بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه صنعتی شریف
دانشکده مهندسی مکانیک

پروژه دینامیک پیشرفته

شبیه سازی حرکت منیپولاتور سه درجه آزادی روی بدنه ماهواره در فضا

نگارش

ایمان شریفی

۹۸۲۱۰۱۸۴

استاد

دکتر نجات

بهمن۹۸

چکیده

در این پروژه شبیه سازی دینامیک منیپولاتور سه درجه آزادی بر روی بدنه جسم صلب فضایی۶ درجه آزادی بدون در نظر گرفتن اثر گرانش با استفاده از هر دو روش نیوتنی و لاگرانژی انجام گرفته ، همچنین نتایج هردو روش با هم مقایسه شده اند . با استفاده از کواترنیون ها که به مراتب دقت و سرعت بالاتری در حل عددی دارند نیز شبیه سازی شده است.

کلیدواژه‌ها: منیپولاتور سه درجه آزادی، روش نیوتنی، روش لاگرانژی،کواترنیون ها

فهرست مطالب

فهرست تصویرها

فهرست نمودارها

فصل ۱ : مقدمه

ماهواره


شکل ۱: نمونه ماهواره در فضا

اهمیت ماهواره‌ها برای مخابرات و بررسی منابع زمینی و پژوهش و کاربردهای نظامی و جاسوسی روزافزون است. بخشی از پژوهش‌های علمی و تخصصی که در آزمایشگاه‌های مستقر در فضا انجام می‌شود، هرگز نمی‌توانست روی کره زمین جنبه عملی به خود گیرد .

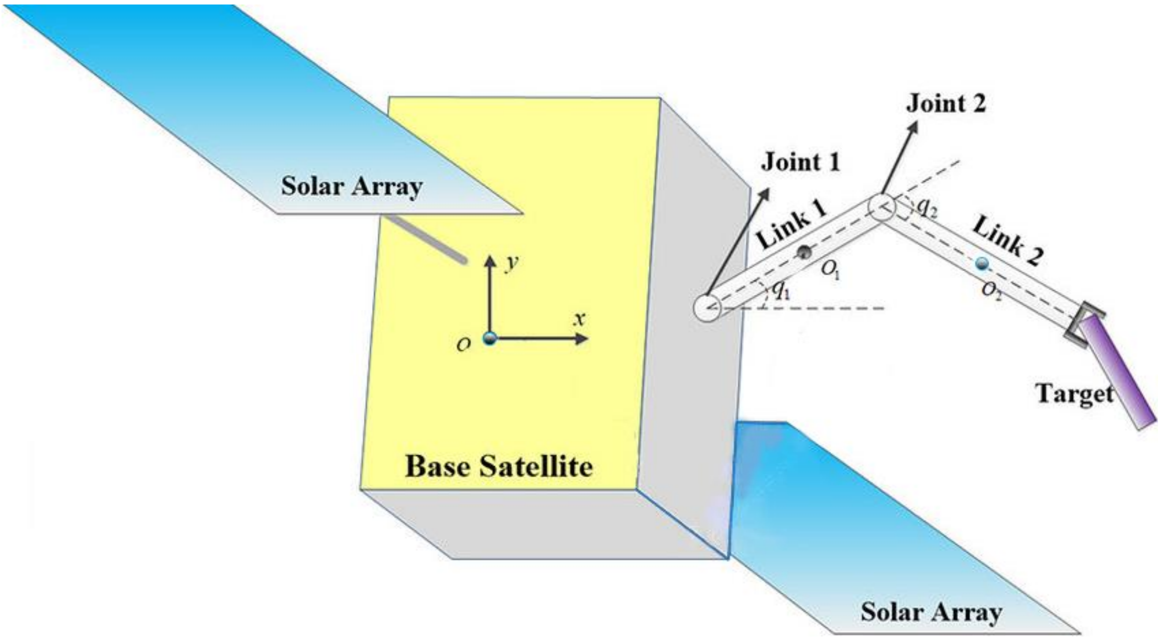
نخستین ماهواره فضایی جهان اسپوتنیک-۱(به معنی *همسفر-۱* به زبان روسی) بود که در تاریخ ۱۲ مهر ۱۳۳۶(۴ اکتبر ۱۹۵۷) به مدار زمین پرتاب شد. پرتاب اسپوتنیک-۱ به مدار زمین آغازگر عصر فضا و مسابقه فضایی شد. از آن زمان، حدود ۶۶۰۰ ماهواره بیش از ۴۰ کشور به وسیله ۱۰ ملت به فضا پرتاب شده‌اند. بنا بر تخمینی مربوط به ۲۰۱۳، ۳۶۰۰ تا در مدار باقی مانده‌اند. از این تعداد حدود ۱۰۰۰ تا فعال بوده‌اند و بقیه، عمر مفیدشان را پشت سر گذاشته و به زباله‌های فضایی تبدیل شده‌اند. تقریباً ۵۰۰ ماهواره عملیاتی در مدار زمین-پایین هستند؛ ۵۰ تا در مدار زمین-متوسط در ۲۰۰۰۰ (km) ، و بقیه در مدار زمین-ثابت هستند .در ٣٦٠٠٠ (km) تعداد کمی ماهواره بزرگ در قطعات جداگانه پرتاب و در مدار به

هم متصل شده‌اند. بالغ بر یک دوجین سفینه کاوشگر در مدارات سایر اجرام قرار داده شده و تبدیل به ماهواره‌های مصنوعی ماه، تیر، ناهید، مریخ، برجیس(سیاره)، کیوان، تعدادی سیارک، و خورشید گشته‌اند .

منیپولاتور ها و کاربرد آن ها

در رباتیـک ، یـک منیپولاتـور وسـیله ای اسـت کـه بـرای دسـتکاری مـواد بـدون تمـاس مسـتقیم فیزیکی توسط اپراتـور مـورد اسـتفاده قـرار مـی گیـرد. منیپولاتورهـا در اصـل بـرای مقابلـه بـا مـواد رادیواکتیو یا بیوشیمی یـا در مکـان هـای غیرقابـل دسترسـی اسـتفاده مـی شـدند. در تحـولات اخیـر از آنهـا در طیـف هـای متنـوعی از جملـه اتوماسـیون جوشـ کاری ، جراحـی رباتیـک و در فضـا استفاده شده اسـت. ایـن مکانیسـم بـازویماننـد اسـت کـه از یـک سـری بخـش هـا تشـکیل شـده است ، معمـولاً بـه صـورت کشـویی یـا متصـل ،کـه اشـیاء را بـا درجـه ای از آزادی بـه حرکـت در مـــــــــــــــــــــــــــــــــی آورنـــــــــــــــــــــــــــــــــد.

در ارگونـومی صـنعتی ، یـک منیپولاتـور وسـیله ای بـرای کمـک بـه کـارگران اسـت کـه در بلنـد کـردن ، مـانوردادن ، قـرار دادن جعبـه هـا در مراحـل بسـیار سـنگین ، بـیش از حـد گـرم ، بـیش از حد بزرگ یا غیر این حالات، جایی کـه کـار بـرای یـک کـارگر بسـیار دشـوار اسـت کـه بـه تنهـایی کـار مـی کنـد. بـرخلاف کمـک هـای بـالابر عمـودی (جرثقیـل و غیـره)، منیپولاتورهـا توانـایی دسترسی به فضاهای تنگ و حذف قطعات کـار را دارنـد. مثـال خـوب حـذف قطعـات بـزرگ مهـر شـــده از مطبوعـــات و قـــرار دادن آنهـــا در یـــک قفســـه یـــا یـــک تپـــه مشـــابه اســـت.



شکل ۲ : نمونه یک منیپولاتور دو درجه آزادی روی ماهواره

ماموریت های فضایی آینده به ساخت ، تعمیر و نگهداری ماهواره ها و ایستگاه های فضایی در فضا نیاز دارد. فناوری فعلی مستلزم این است که این وظایف توسط فضانورد فعالیت اضافی وسیله نقلیه (EVA) انجام شود. پیشنهاد شده است که سیستم های دست ساز روبوتی برای انجام بسیاری از کارهایی که در حال حاضر فقط توسط فضانورد EVA می توانند انجام شوند ، توسعه داده شود. از بین بردن نیاز به فضانورد EVA هم هزینه های ماموریت و هم خطرات آن را برای فضانوردان کاهش می دهد. وظایف منیپولاتور رباتیک فضایی معمولی نیاز به کنترل دقیق حرکت کننده دارند متأسفانه ، به دلیل وجود اتصال پویا بین بازوها و فضاپیمای آن ، کنترل حرکت دستگیرنده دشوار است. با حرکت اسلحه ، آنها نیروهایی پویا را بر روی فضاپیمای خود اعمال می کنند که باعث حرکت آن می شود. این حرکات فضاپیما می تواند وابسته به توده های نسبی فضاپیما ، منبلترها و بار آنها باشد. تعامل دینامیکی منیپولاتور و فضاپیما را می توان با جت های کنترل نگرش فضاپیما جبران کرد. محققان به تازگی مطالعاتی در مورد سینماتیک ، دینامیک و کنترل منیپولاتورهای فضایی انجام داده اند که بر روی تأمین فشار این جفت پویا در سیستم هایی که از جت های کنترل نگر استفاده می کنند تمرکز دارند.

فصل ۲ سینماتیک سیستم

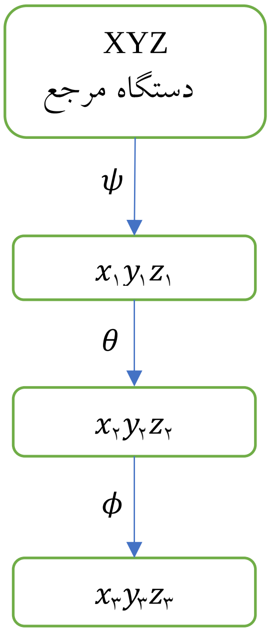
مقدمه

این سیستم دارای ۹ درجه آزادی می باشد بنابراین به ۹ مولفه مختصات تعمیم یافته برای تعیین موقعیت و وضعیت سیستم نیاز است که مطابق زیر تعریف می گردند:

$$q_1 = X, q_2 = Y, q_3 = Z, q_4 = \psi, q_5 = \theta, q_6 = \phi, q_7 = \theta_1, q_8 = \theta_2, q_9 = \theta_3$$

۲-۱ سینماتیک ماهواره

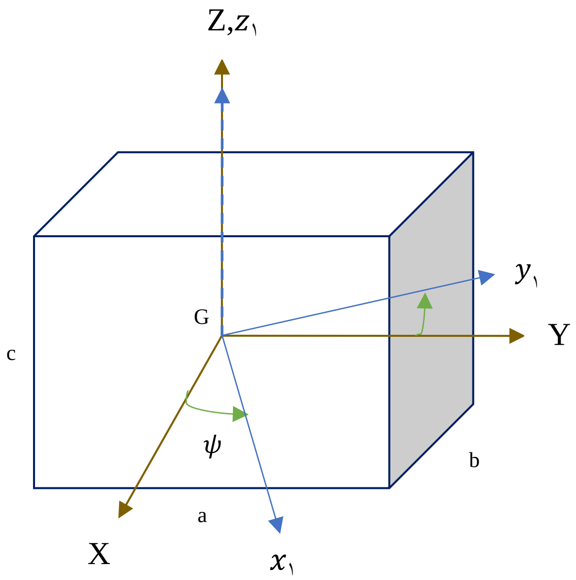
ابتدا دستگاه مختصات های مورد نیاز برای توصیف حرکت بدنه ماهواره مشخص می شوند:



شکل ۳: شماتیک کلی دوران ها از دستگاه XYZ به دستگاه بدنی $x_3y_3z_3$

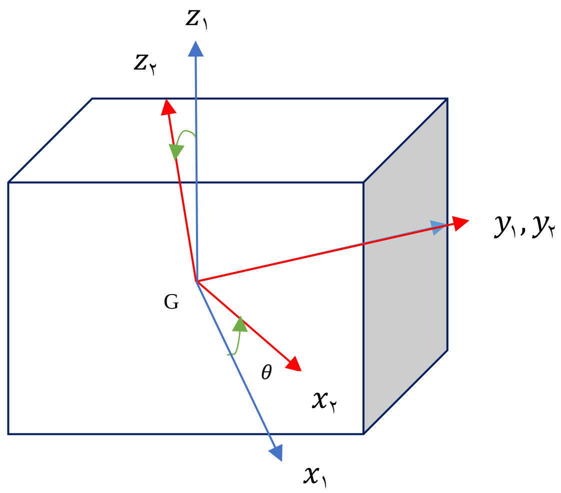
مختصات های مطلوب همراه با دوران آن ها به ترتیب در زیر به نمایش در آمده است.

۱–دوران به اندازه ψ حول محور Z:



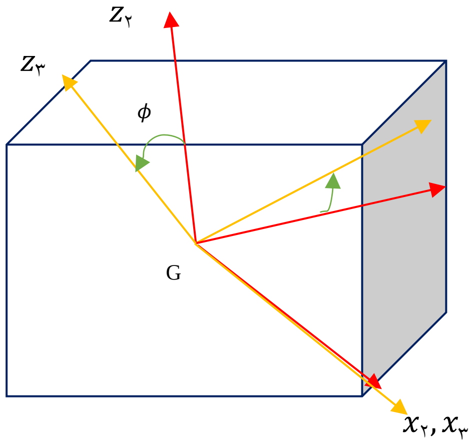
شکل ۴:دوران بدنه در دستگاه XYZ حول محور Z به اندازه ψ

۲-دوران به اندازه θ حول محور $y_۱$:



شکل ۵: دوران بدنه در دستگاه $x_۱y_۱z_۱$ حول محور $y_۱$ به اندازه θ

۳-دوران به اندازه ϕ حول محور $x_۲$:



شکل ۶: دوران بدنه در دستگاه $x_۲y_۲z_۲$ حول محور $x_۲$ به اندازه ϕ

- موقعیت مرکز جرم ماهواره در دستگاه XYZ

$$r_{G_{sat}}^{XYZ} = XI + YJ + ZK$$

- سرعت مرکز جرم ماهواره در دستگاه XYZ

$$v_{G_{sat}}^{XYZ} = \dot{X}I + \dot{Y}J + \dot{Z}K$$

- سرعت مرکز جرم ماهواره در دستگاه بدنی ماهواره($x_۳y_۳z_۳$)

$$[R] = [R_{x_۲,\phi}][R_{y_۱,\theta}][R_{Z,\psi}]$$

$$v_{G_{sat}}^{x_۳y_۳z_۳} = [R]\, v_{G_{sat}}^{XYZ}$$

- شتاب مرکز جرم ماهواره در دستگاه XYZ

$$a_{G_{sat}}^{XYZ} = \ddot{X}I + \ddot{Y}J + \ddot{Z}K$$

- شتاب مرکز جرم ماهواره در دستگاه بدنی ماهواره($x_۳y_۳z_۳$)

$$a_{G_{sat}}^{x_۳y_۳z_۳} = [R]\, a_{G_{sat}}^{XYZ}$$

- سرعت زاویه ای ماهواره

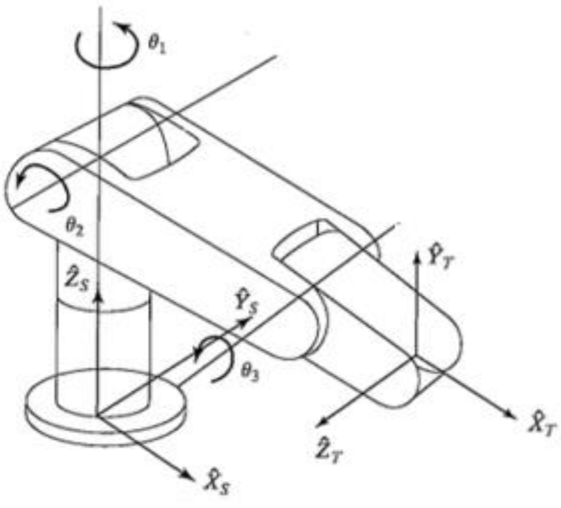
$$\omega_{sat} = \dot{\psi}K + \dot{\theta}j_۱ + \dot{\phi}i_۲$$

$$\omega_{sat}^{x_۳y_۳z_۳} = [R_{x_۲,\phi}][R_{y_۱,\theta}][R_{Z,\psi}]\dot{\psi}K + [R_{x_۲,\phi}][R_{y_۱,\theta}]\dot{\theta}j_۱ + [R_{x_۲,\phi}]\dot{\phi}i_۲$$

- سرعت مفصل۱ در دستگاه بدنی ماهواره ($x_۳y_۳z_۳$)

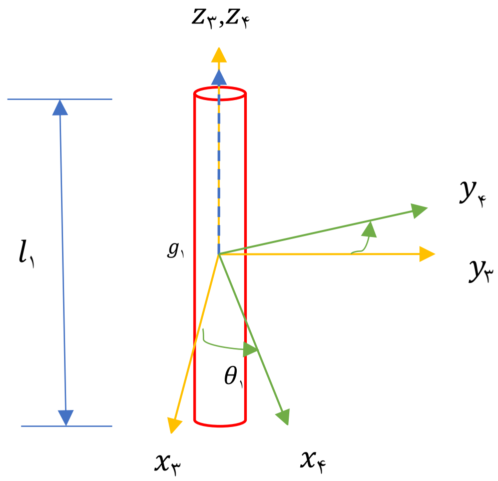
$$v_{joint_۱}^{x_۳y_۳z_۳} = v_{G_{sat}}^{x_۳y_۳z_۳} + \omega_{sat}^{x_۳y_۳z_۳} * r_{\frac{joint_۱}{G_{sat}}}^{x_۳y_۳z_۳}$$

۲-۲ سینماتیک منیپولاتور



شکل ۷: شماتیک کلی منیپولاتور سه درجه آزادی

۱-۲-۲ لینک ۱



شکل ۸: دوران لینک ۱ در دستگاه $x_۳y_۳z_۳$ حول محور $z_۳$ به اندازه $\theta_۱$

- سرعت زاویه ای لینک ۱ در دستگاه $x_۳y_۳z_۳$

$$\omega_{link_۱}^{x_۴y_۴z_۴} = [R_{z_۳,\theta_۱}]\omega_{sat}^{x_۳y_۳z_۳} + \dot{\theta}_۱ k_۴$$

- سرعت مرکز جرم لینک ۱ در دستگاه $x_۳y_۳z_۳$

$$v_{g_{link_۱}}^{x_۳y_۳z_۳} = v_{G_{sat}}^{x_۳y_۳z_۳} + \omega_{sat}^{x_۳y_۳z_۳} * r_{\frac{joint_۱}{G_{sat}}}^{x_۳y_۳z_۳}$$

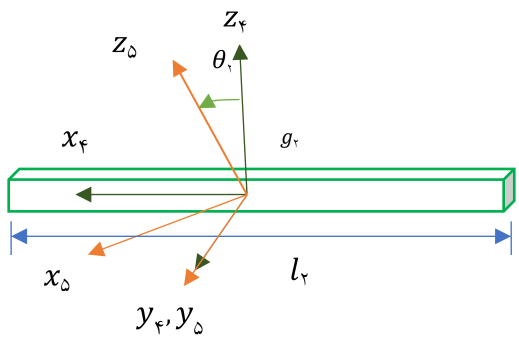
$$v_{g_{link_۱}}^{x_۴y_۴z_۴} = [R_{z_۳,\theta_۱}]\, v_{g_{link_۱}}^{x_۳y_۳z_۳}$$

- شتاب مرکز جرم لینک ۱ در دستگاه $x_۳y_۳z_۳$

$$a_{g_{link_۱}}^{x_۳y_۳z_۳} = \frac{\delta v_{g_{link_۱}}^{x_۳y_۳z_۳}}{\delta t} + \omega_{link_۱}^{x_۴y_۴z_۴} * v_{g_{link_۱}}^{x_۳y_۳z_۳}$$

$$a_{g_{link_۱}}^{x_۴y_۴z_۴} = [R_{z_۳,\theta_۱}]\, a_{g_{link_۱}}^{x_۳y_۳z_۳}$$

۲-۲-۲ لینک۲



شکل ۹: دوران لینک۲ در دستگاه $x_4y_4z_4$ حول محور y_4 به اندازه θ_2

- سرعت زاویه ای لینک۲ در دستگاه $x_4y_4z_4$

$$\omega_{link_2}^{x_5y_5z_5} = [R_{x_4,\theta_2}]\omega_{link_1}^{x_4y_4z_4} + \dot{\theta}_2 j_5$$

- سرعت مرکز جرم لینک۲ در دستگاه $x_4y_4z_4$

$$v_{g_{link_2}}^{x_5y_5z_5} = [R_{x_4,\theta_2}]v_{joint_1}^{x_4y_4z_4} + \omega_{link_2}^{x_5y_5z_5} * r_{\frac{g_{link_2}}{joint_1}}^{x_5y_5z_5}$$

- شتاب مرکز جرم لینک۲ در دستگاه $x_4y_4z_4$

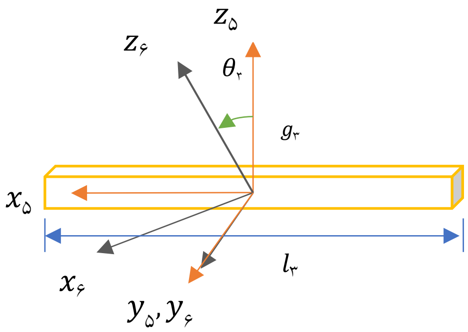
$$a_{g_{link_2}}^{x_5y_5z_5} = \frac{\delta v_{g_{link_2}}^{x_5y_5z_5}}{\delta t} + \omega_{link_2}^{x_5y_5z_5} * v_{g_{link_2}}^{x_5y_5z_5}$$

- سرعت مفصل ۲ بر روی لینک۲ در دستگاه $x_4y_4z_4$

$$v_{joint_2}^{x_3y_3z_3} = v_{G_{sat}}^{x_3y_3z_3} + \omega_{sat}^{x_3y_3z_3} * r_{\frac{joint_2}{G_{sat}}}^{x_3y_3z_3}$$

$$v_{joint_2}^{x_4y_4z_4} = [R_{z_3,\theta_1}]v_{joint_2}^{x_3y_3z_3}$$

۳-۲-۲ لینک ۳



شکل ۱۰: دوران لینک ۳ در دستگاه $x_۵y_۵z_۵$ حول محور $x_۵$ به اندازه $\theta_۳$

- سرعت زاویه ای لینک ۳ در دستگاه $x_۵y_۵z_۵$

$$\omega_{link_۳}^{x_۶y_۶z_۶} = [R_{x_۵,\theta_۳}]\omega_{link_۲}^{x_۵y_۵z_۵} + \dot{\theta}_۳ j_۶$$

- سرعت مرکز جرم لینک ۳ در دستگاه $x_۵y_۵z_۵$

$$v_{g_{link_۳}}^{x_۶y_۶z_۶} = [R_{x_۵,\theta_۳}]v_{joint_۲}^{x_۵y_۵z_۵} + \omega_{link_۳}^{x_۶y_۶z_۶} * r_{\frac{g_{link_۳}}{joint_۲}}^{x_۶y_۶z_۶}$$

- شتاب مرکز جرم لینک ۳ در دستگاه $x_۵y_۵z_۵$

$$a_{g_{link_۳}}^{x_۶y_۶z_۶} = \frac{\delta v_{g_{link_۳}}^{x_۶y_۶z_۶}}{\delta t} + \omega_{link_۳}^{x_۶y_۶z_۶} * v_{g_{link_۳}}^{x_۶y_۶z_۶}$$

- سرعت مفصل ۳ بر روی لینک ۳ در دستگاه $x_۵y_۵z_۵$

$$v_{joint_۳}^{x_۵y_۵z_۵} = [R_{x_۴,\theta_۲}]v_{joint_۳}^{x_۴y_۴z_۴} + \omega_{link_۳}^{x_۶y_۶z_۶} * r_{\frac{joint_۳}{joint_۲}}^{x_۵y_۵z_۵}$$

فصل ۳ معادلات دینامیک سیستم

۳-۱ روش لاگرانژ

مقدمه

در مکانیک لاگرانژی، به خاطرِ اصلِ همیلتونیِ کمترین کنش، تغییرهایِ یک سیستمِ فیزیکی با جوابِ معادله اویلر-لاگرانژ برایِ آن رفتارِ آن سیستم توصیف می‌شود. در مکانیک کلاسیک، این اصل معادل با قانون‌هایِ حرکتِ نیوتون است، هر چند که این مزیت را دارد که در هر سیستمی با مختصات تعمیم‌یافته، فرمِ آن تغییر نمی‌کند و در نتیجه برایِ تعمیم دادن بسیار مناسب‌تر است.

انرژی جنبشی اجزا سیستم

- بدنه ماهواره

$$T_{sat} = \frac{1}{2} M_s \{v_{G_{sat}}^{x_3 y_3 z_3}\}^T \left\{v_{G_{sat}}^{x_3 y_3 z_3}\right\} + \frac{1}{2} \{\omega_{sat}^{x_3 y_3 z_3}\}^T [I_{G_{sat}}^{x_3 y_3 z_3}] \{\omega_{sat}^{x_3 y_3 z_3}\}$$

- لینک ۱

$$T_{link_1} = \frac{1}{2} m_1 \{v_{g_{link_1}}^{x_3 y_3 z_3}\}^T \left\{v_{g_{link_1}}^{x_3 y_3 z_3}\right\} + \frac{1}{2} \{\omega_{link_1}^{x_4 y_4 z_4}\}^T [I_{link_1}^{x_4 y_4 z_4}] \left\{\omega_{link_1}^{x_4 y_4 z_4}\right\}$$

- لینک ۲

$$T_{link_2} = \frac{1}{2} m_2 \{v_{g_{link_2}}^{x_5 y_5 z_5}\}^T \left\{v_{g_{link_2}}^{x_5 y_5 z_5}\right\} + \frac{1}{2} \{\omega_{link_2}^{x_5 y_5 z_5}\}^T [I_{link_2}^{x_5 y_5 z_5}] \left\{\omega_{link_2}^{x_5 y_5 z_5}\right\}$$

- لینک ۳

$$T_{link_3} = \frac{1}{2} m_3 \{v_{g_{link_3}}^{x_6 y_6 z_6}\}^T \left\{v_{g_{link_3}}^{x_6 y_6 z_6}\right\} + \frac{1}{2} \{\omega_{link_3}^{x_6 y_6 z_6}\}^T [I_{link_3}^{x_6 y_6 z_6}] \left\{\omega_{link_3}^{x_6 y_6 z_6}\right\}$$

- انرژی جنبشی کل سیستم

$$T = T_{sat} + T_{link_۱} + T_{link_۲} + T_{link_۳}$$

- انرژی پتانسیل

به دلیل فاصله زیاد ماهواره نسبت به زمین این سیستم نمی تواند اثر گرانش زمین را حس کند بنابراین هیچ گونه انرژی پتانسل گرانشی در سیستم وجود ندارد همچنین به دلیل عدم وجود ذخیره کننده انرژی در سیستم مثل فنر مکانیکی انرژی پتانسیل کشسانی نیز وجود ندارد، بنابراین انرژی پتانسیل کل سیستم صفر فرض می گردد.

$$V = ۰$$

- نیروهای تعمیم یافته

$$\delta W = f_X \delta X + f_Y \delta Y + f_Z \delta Z + \tau_۱(\delta\theta_۱ - \delta\phi) + \tau_۲\delta\theta_۲ + \tau_۳(\delta\theta_۳ - \delta\theta_۲)$$

$$Q_X = f_X \,, Q_Y = f_Y, Q_Z = f_Z$$

$$Q_\psi = ۰ \,, Q_\theta = ۰, Q_\phi = -\tau_۱$$

$$Q_{\theta_۱} = \tau_۱ \,, Q_{\theta_۲} = \tau_۲ - \tau_۳, Q_{\theta_۳} = \tau_۳$$

بنابراین بردار نیروهای تعمیم یافته از رابطه زیر محاسبه می شود:

$$Q = \{f_X \,, f_Y, f_Z, ۰ \,, ۰ - \tau_۱, \tau_۱ \,, \tau_۲ - \tau_۳, \tau_۳\}^T$$

- لاگرانژین

$$L = T - V$$

- فرم کلی معادلات لاگرانژ غیرمقید

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = \{Q_i\}$$

$$[M]\{\ddot{q}\} + \{B\} = \{Q\}$$

- مشتق مرتبه دوم مختصات های تعمیم یافته

$$\{\ddot{q}\} = [M]\backslash\{-B + Q\}$$

۲-۳ روش نیوتن

۱-۲-۳ ممنتوم زاویه ای نسبت به مرکز جرم اجزاء و نرخ تغییرات آن ها

- ممنتوم زاویه ای بدنه و نرخ تغییرات آن

$$H_{G_{sat}}^{x_3y_3z_3}=[I_{G_{sat}}^{x_3y_3z_3}]\left\{\omega_{sat}^{x_3y_3z_3}\right\}$$

$$\dot{H}_{G_{sat}}^{x_3y_3z_3}=\frac{\delta H_{G_{sat}}^{x_3y_3z_3}}{\delta t}+\omega_{sat}^{x_3y_3z_3}*H_{G_{sat}}^{x_3y_3z_3}$$

- ممنتوم زاویه لینک۱ و نرخ تغییرات آن

$$H_{g_{link_1}}^{x_4y_4z_4}=[I_{link_1}^{x_4y_4z_4}]\left\{\omega_{link_1}^{x_4y_4z_4}\right\}$$

$$\dot{H}_{g_{link_1}}^{x_4y_4z_4}=\frac{\delta H_{g_{link_1}}^{x_4y_4z_4}}{\delta t}+\omega_{link_1}^{x_4y_4z_4}*H_{g_{link_1}}^{x_4y_4z_4}$$

- ممنتوم زاویه لینک۲ و نرخ تغییرات آن

$$H_{g_{link_2}}^{x_5y_5z_5}=[I_{link_2}^{x_5y_5z_5}]\left\{\omega_{link_2}^{x_5y_5z_5}\right\}$$

$$\dot{H}_{g_{link_2}}^{x_5y_5z_5}=\frac{\delta H_{g_{link_2}}^{x_5y_5z_5}}{\delta t}+\omega_{link_2}^{x_5y_5z_5}*H_{g_{link_2}}^{x_5y_5z_5}$$

- ممنتوم زاویه لینک۳ و نرخ تغییرات آن

$$H_{g_{link_3}}^{x_6y_6z_6}=[I_{link_3}^{x_6y_6z_6}]\left\{\omega_{link_3}^{x_6y_6z_6}\right\}$$

$$\dot{H}_{g_{link_3}}^{x_6y_6z_6}=\frac{\delta H_{g_{link_3}}^{x_6y_6z_6}}{\delta t}+\omega_{link_3}^{x_6y_6z_6}*H_{g_{link_3}}^{x_6y_6z_6}$$

۲-۲-۳ معادلات حاکم بر سیستم بر اساس قانون دوم نیوتن

۱-برآیند حاضلضرب جرم و شتاب های وارد بر اجزاء سیستم برابر برآیند نیروهای خارجی وارد بر

سیستم خواهد بود:

$$F_{ext}=[f_X \quad f_Y \quad f_Z]^T$$

$$f_{ext}^{x_۳y_۳z_۳}=[R]\{F_{ext}\}$$

$$\sum F_{ext}^{x_۳y_۳z_۳}=\sum_{i=۱}^{۴} m_i a_i^{x_۳y_۳z_۳}=$$
$$M_s a_{G_{sat}}^{x_۳y_۳z_۳}+m_۱ a_{g_{link_۱}}^{x_۳y_۳z_۳}+m_۲ a_{g_{link_۲}}^{x_۳y_۳z_۳}+m_۳ a_{g_{link_۳}}^{x_۳y_۳z_۳}=f_{ext}^{x_۳y_۳z_۳}$$

۲-همچنین به دلیل اینکه هیچ گونه گشتاور خارجی وارد بر سیستم وجود ندارد رابطه زیر نیز برقرار است:

$$\sum \tau_{ext_{G_{sat}}}^{x_۳y_۳z_۳}=\sum_{i=۱}^{۴} \dot{H}_{g_i}^{x_۳y_۳z_۳}+r_{\frac{g_i}{g_۱}} * m_i a_{g_i}^{x_۳y_۳z_۳}=\dot{H}_{g_{link_۳}}^{x_۳y_۳z_۳}+r_{\frac{g_{link_۳}}{G_{sat}}}^{x_۳y_۳z_۳} * m_۳ a_{g_{link_۳}}^{x_۳y_۳z_۳}+$$
$$\dot{H}_{g_{link_۲}}^{x_۳y_۳z_۳}+r_{\frac{g_{link_۲}}{G_{sat}}}^{x_۳y_۳z_۳} * m_۲ a_{g_{link_۲}}^{x_۳y_۳z_۳}+\dot{H}_{g_{link_۱}}^{x_۳y_۳z_۳}+r_{\frac{g_{link_۱}}{G_{sat}}}^{x_۳y_۳z_۳} * m_۱ a_{g_{link_۱}}^{x_۳y_۳z_۳}+\dot{H}_{G_{sat}}^{x_۳y_۳z_۳}$$
$$=\tau_۱ k_۳+\tau_۲ j_۴+\tau_۳ j_۵$$

۳-برآندگشتاورهای خارجی وارد بر لینک۳ حول مفصل ۳ درجهت$x_۶$ صفر می باشد بنابراین؛

$$\sum \tau_{ext_{joint_۳}}^{x_۶y_۶z_۶}=\dot{H}_{g_{link_۳}}^{x_۶y_۶z_۶}+r_{\frac{g_{link_۳}}{joint_۳}}^{x_۶y_۶z_۶} * m_۳ a_{g_{link_۳}}^{x_۶y_۶z_۶}$$

$$\sum \tau_{ext_{joint_۳}}^{x_۶y_۶z_۶}.j_۶=\tau_۳$$

۴- برآیند گشتاور های خارجی وارد بر هر دو لینک ۲و۳ حول مفصل ۲ در جهت $x_۵$ صفر می باشد بنابراین؛

$$\sum \tau_{ext_{joint_۲}}^{x_۵y_۵z_۵}=\dot{H}_{g_{link_۳}}^{x_۵y_۵z_۵}+r_{\frac{g_{link_۳}}{joint_۲}}^{x_۵y_۵z_۵} * m_۳ a_{g_{link_۳}}^{x_۵y_۵z_۵}+$$
$$\dot{H}_{g_{link_۲}}^{x_۵y_۵z_۵}+r_{\frac{g_{link_۲}}{joint_۲}}^{x_۵y_۵z_۵} * m_۲ a_{g_{link_۲}}^{x_۵y_۵z_۵}$$

$$\sum \tau_{ext_{joint_۲}}^{x_۵y_۵z_۵}.j_۵=\tau_۲$$

۵- برآیند گشتاور های خارجی وارد بر هر سه لینک۱و۲و۳ حول مفصل ۱ در جهت $z_۳$ صفر می باشد بنابراین؛

$$\sum \tau_{ext_{joint_۱}}^{x_۳y_۳z_۳}=\dot{H}_{g_{link_۳}}^{x_۳y_۳z_۳}+r_{\frac{g_{link_۳}}{joint_۱}}^{x_۳y_۳z_۳} * m_۳ a_{g_{link_۳}}^{x_۳y_۳z_۳}+$$
$$\dot{H}_{g_{link_۲}}^{x_۳y_۳z_۳}+r_{\frac{g_{link_۲}}{joint_۱}}^{x_۳y_۳z_۳} * m_۲ a_{g_{link_۲}}^{x_۳y_۳z_۳}+$$
$$\dot{H}_{g_{link_۱}}^{x_۴y_۴z_۴}+r_{\frac{g_{link_۱}}{joint_۱}}^{x_۳y_۳z_۳} * m_۱ a_{g_{link_۱}}^{x_۴y_۴z_۴}$$

$$\sum \tau_{ext_{joint_1}}^{x_3 y_3 z_3} . k_3 = \tau_1$$

قسمت های ۱ و۲ هرکدام دارای ۳ معادله می باشند و قسمت های۳و۴و۵ نیز هر کدام دارای ۱ معادله که در کل ۹ معادله و۹ مجهول معادله حل می گردد.

درنهایت هم معادلات لاگرانژ و هم معادلات نیوتنی به فرم کلی زیر در می آیند:

$$\boxed{\{\ddot{q}\}_{9*1} = -[M]_{9*9} \backslash \{B\}_{9*1}}$$

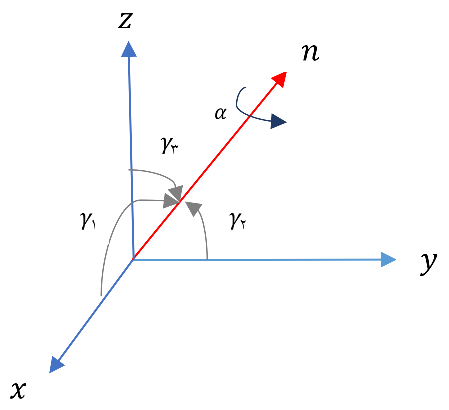
کواترنیون ها

مقدمه

در علم ریاضیات، کواترنیون ها یا چهارگان‌ها (Quaternions) یک دستگاه عددنویسی برای بسط اعداد مختلط هستند. آنها اولین بار توسط ریاضی‌دان ایرلندی، ویلیام همیلتون، در سال ۱۸۴۳معرفی و در حوزه مکانیک در فضای سه بعدی به کار گرفته شدند. یکی از ویژگی‌های کواترنیون‌ها این است که ضرب دو کواترنیون خاصیت جابه‌جایی ندارد. همیلتون، یک کواترنیون را به صورت خارج قسمت دو خط جهت‌دار در یک فضای سه بعدی، و یا معادل آن، یعنی خارج قسمت دو بردار تعریف کرده است.

کواترنیون‌ها هم در ریاضیات نظری و هم کاربردی، به خصوص برای محاسباتی که شامل چرخش سه بعدی هستند همچون گرافیک کامپیوتری سه بعدی، بینایی کامپیوتر و تحلیل بافت کریستالوگرافی، به کار می‌روند. در کاربردهای عملی، از کواترنیون‌ها می‌توان در کنار سایر روش‌ها همچون زاویه اویلر و ماتریس دوران استفاده کرد و یا گاهی به جای آن‌ها به کار برد.

بر اساس قضیه اویلر هر دوران در فضا را می توان به صورت دوران به اندازه مشخص (Principle Angle) حول محور خاص(Principle Line) انجام داد.



$$n = (cos\gamma_۱, cos\gamma_۲, cos\gamma_۳) = (c_۱, c_۲, c_۳)$$

که مقدار زاویه و بردارمذکور از روابط زیر محاسبه می شوند:

$$۲\cos\alpha + ۱ = \mathrm{trace}([R])$$

$$[R]\begin{Bmatrix} c_۱ \\ c_۲ \\ c_۳ \end{Bmatrix} = \lambda \begin{Bmatrix} c_۱ \\ c_۲ \\ c_۳ \end{Bmatrix}$$

چهارگان ها نیز مطابق زیر قابل تعریف اند و قید زیر نیز باید برقرار باشد.

$$\begin{cases} e_۰ = \cos\left(\frac{\alpha}{۲}\right) \\ e_۱ = c_۱ \sin\left(\frac{\alpha}{۲}\right) \\ e_۲ = c_۲ \sin\left(\frac{\alpha}{۲}\right) \\ e_۳ = c_۲ \sin\left(\frac{\alpha}{۲}\right) \end{cases}, e_۰^۲ + e_۱^۲ + e_۲^۲ + e_۳^۲ = ۱$$

ماتریس دوران در استاندارد اویلری (ZYX)، از طریق زیر محاسبه می شود:

$$[R] = \begin{bmatrix} e_۰^۲ + e_۱^۲ - e_۲^۲ - e_۳^۲ & ۲(e_۱e_۲ + e_۰e_۳) & ۲(e_۱e_۳ - e_۰e_۲) \\ ۲(e_۱e_۲ - e_۰e_۳) & e_۰^۲ - e_۱^۲ + e_۲^۲ - e_۳^۲ & ۲(e_۲e_۳ + e_۰e_۱) \\ ۲(e_۱e_۳ + e_۰e_۲) & ۲(e_۲e_۳ - e_۰e_۱) & e_۰^۲ - e_۱^۲ - e_۲^۲ + e_۳^۲ \end{bmatrix} *$$

بنابراین می توان به جای سه زاویه($\psi\theta\phi$) ازچهارگان زیر همراه با قید متناظر استفاده کرد:

$$q = \{e_۰ \ \ e_۱ \ \ e_۲ \ \ e_۳\}^T$$

$$qq^T = e_۰^۲ + e_۱^۲ + e_۲^۲ + e_۳^۲ = ۱$$

رابطه بین چهارگان ها و مشتقات چهارگان ها به صورت زیر بیان می شود:

$$\dot{q} = \frac{۱}{۲}[\omega]q$$

ماتریس ω از رابطه زیر به دست می آید:

$$[\omega] = \begin{bmatrix} ۰ & -\omega_۱ & -\omega_۲ & -\omega_۳ \\ \omega_۱ & ۰ & \omega_۳ & -\omega_۲ \\ \omega_۲ & -\omega_۳ & ۰ & \omega_۱ \\ \omega_۳ & \omega_۲ & -\omega_۱ & ۰ \end{bmatrix}$$

همچنین با توجه به رابطه بالا می توان سرعت های زاویه ای را به صورت تابعی از چهارگان ها و مشتقات آن ها بیان نمود:

$$\dot{q} = \frac{۱}{۲}[\Omega]\{\omega\}$$

$$[\Omega]^T = \begin{bmatrix} -e_۱ & e_۰ & e_۳ & -e_۲ \\ -e_۲ & -e_۳ & e_۰ & e_۱ \\ -e_۳ & e_۲ & e_۱ & e_۰ \end{bmatrix}, \{\omega\} = \begin{Bmatrix} \omega_۱ \\ \omega_۲ \\ \omega_۳ \end{Bmatrix}$$

حال براساس روش لاگرانژ معادلات سیستم به صورت مقید بیان می شوند برای حل معادلات چهار روش متداول وجود دارد که برای نمونه با استفاده از روش AUGMENTED METHOD که در پیوست۵ به آن اشاره شده است به ادامه حل پرداخته میشود.

- مختصات تعمیم یافته جدید

$$q = \{X_g, Y_g, Z_g, e_۰, e_۱, e_۲, e_۳, \theta_۱, \theta_۲, \theta_۳\}$$

- کارمجازی

$$\delta W = f_X\delta X + f_Y\delta Y + f_Z\delta Z + \tau_۱(\delta\theta_۱ - (\delta e_۰ + \delta e_۱)) + \tau_۲\delta\theta_۲ + \tau_۳(\delta\theta_۳ - \delta\theta_۲)$$

$$Q_X = f_X \,, Q_Y = f_Y, Q_Z = f_Z$$

$$Q_{e_۰} = -\tau_۱ \,, Q_{e_۱} = -\tau_۱, Q_{e_۲} = ۰ \,, Q_{e_۳} = ۰$$

$$Q_{\theta_۱} = \tau_۱ \,, Q_{\theta_۲} = \tau_۲ - \tau_۳, Q_{\theta_۳} = \tau_۳$$

بنابراین بردار نیروهای تعمیم یافته از رابطه زیر محاسبه می شود:

$$Q = \{f_X \,, f_Y, f_Z, -\tau_۱ \,, -\tau_۱, ۰ \,,۰, \tau_۱ \,, \tau_۲ - \tau_۳, \tau_۳\}^T$$

- معادلات قید

برای اینکه اثر قید در معادلات دیده شود باید ازآن نسبت به زمان دو مرتبه مشتق گرفته شود:

$$e_۰^۲ + e_۱^۲ + e_۲^۲ + e_۳^۲ = ۱ \rightarrow e_۰\dot{e}_۰ + e_۱\dot{e}_۱ + e_۲\dot{e}_۲ + e_۳\dot{e}_۳ = ۰ \rightarrow$$

$$e_۰\ddot{e}_۰ + e_۱\ddot{e}_۱ + e_۲\ddot{e}_۲ + e_۳\ddot{e}_۳ + \dot{e}_۰^۲ + \dot{e}_۱^۲ + \dot{e}_۲^۲ + \dot{e}_۳^۲ = ۰ \qquad \rightarrow$$

$$[۰\ ۰\ ۰\ e_۰\ \ e_۱\ \ e_۲\ \ e_۳\ ۰\ ۰\ ۰]\{\ddot{q}\}_{۱۰*۱} + [۰\ ۰\ ۰\ \dot{e}_۰\ \ \dot{e}_۱\ \ \dot{e}_۲\ \ \dot{e}_۳\ ۰\ ۰\ ۰]\{\dot{q}\}_{۱۰*۱} = ۰$$

بنابراین ماتریس **a** به صورت زیر فرض می شود.

$$[a] = [۰\ ۰\ ۰\ e_۰\ \ e_۱\ \ e_۲\ \ e_۳\ ۰\ ۰\ ۰]$$

- **معادلات مقید حاکم بر سیستم:**

$$\begin{cases} [M]_{۱۰*۱۰}.\{\ddot{q}\}_{۱۰*۱} = \{F\}_{۱۰*۱} + [a]^T_{۱۰*۱}\lambda_۱ \\ -[a]_{۱*۱۰}.\{\ddot{q}\}_{۱۰*۱} = [\dot{a}]_{۱*۱۰}.\{\dot{q}\}_{۱۰*۱} + \{\dot{b}\}_{۱*۱} \end{cases}$$

- مشتقات اول و دوم مختصات های تعمیم یافته:

$$\{\dot{Z}\} = \begin{Bmatrix} \{\dot{q}\}_{۱۰*۱} \\ \{\ddot{q}\}_{۱۰*۱} \end{Bmatrix}$$

$$\{F\}_{۱۰*۱} = -\{B\} + \{Q\}$$

- فرم ماتریسی معادلات همراه با قیود:

$$\begin{bmatrix} [M]_{۱۰*۱۰} & -[a]^T_{۱۰*۱} \\ -[a]^T_{۱۰*۱} & [۰]_{۱۰*۱۰} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{\ddot{q}\}_{۱۰*۱} \\ \lambda_۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{F\}_{۱۰*۱} \\ [\dot{a}]_{۱*۱۰}.\{\dot{q}\}_{۱۰*۱} + \{\dot{b}\}_{۱*۱} \end{bmatrix}$$

- فرم ساده شده ماتریسی:

$$[M_{Aug}] \begin{bmatrix} \{\ddot{q}\}_{۱۰*۱} \\ \lambda_۱ \end{bmatrix} = \{F_{Aug}\} \rightarrow \begin{bmatrix} \{\ddot{q}\}_{۱۰*۱} \\ \lambda_۱ \end{bmatrix} = [M_{Aug}]\backslash\{F_{Aug}\}$$

$$[M_{Aug}] = \begin{bmatrix} [M]_{۱۰*۱۰} & -[a]^T_{۱۰*۱} \\ -[a]^T_{۱۰*۱} & [۰]_{۱۰*۱۰} \end{bmatrix} \text{و} \{F_{Aug}\} = \begin{bmatrix} \{F\}_{۱۰*۱} \\ [\dot{a}]_{۱*۱۰}.\{\dot{q}\}_{۱۰*۱} + \{\dot{b}\}_{۱*۱} \end{bmatrix}$$

فصل ٤ شبیه سازی عددی

مقدمه

برای شبیه سازی معادلات از نرم افزار متلب استفاده شد و نتایج شبیه سازی‌ برای هر سه روش لاگرانژ ، نیوتن و کواترنیون ها به ازای شرط اولیه،

موقعیت و وضعیت اولیه:

$$X_{۰}=۰\,,Y_{۰}=۰\,,Z_{۰}=۰$$
$$\psi_{۰}=۰\,,\theta_{۰}=۰\,,\phi_{۰}=۰$$
$$\theta_{۱۰}=۰\,,\theta_{۲۰}=۰\,,\theta_{۳۰}=۰$$

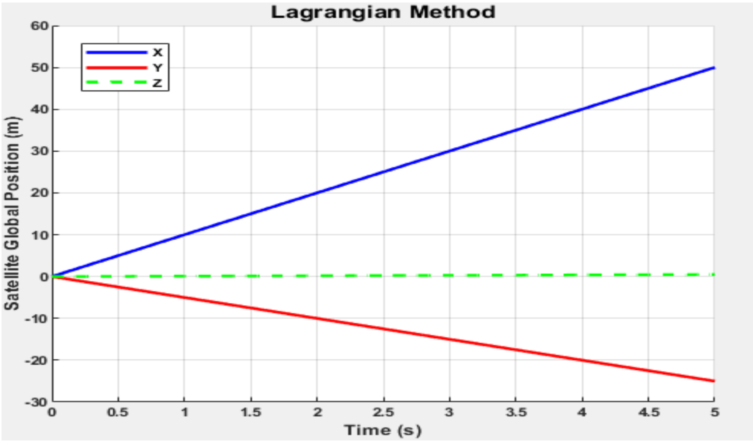
سرعت خطی و زاویه ای اولیه:

$$\dot{X}_{۰}=۱۰\ \ ,\dot{Y}_{۰}=-۵\ \ ,\dot{Z}_{۰}=۰.۱$$
$$\dot{\psi}_{۰}=۰.۲\ ,\dot{\theta}_{۰}=۰.۱\ ,\dot{\phi}_{۰}=۰$$
$$\dot{\theta}_{۱۰}=۰\ \ ,\dot{\theta}_{۲۰}=۰\ \ ,\dot{\theta}_{۳۰}=۰$$

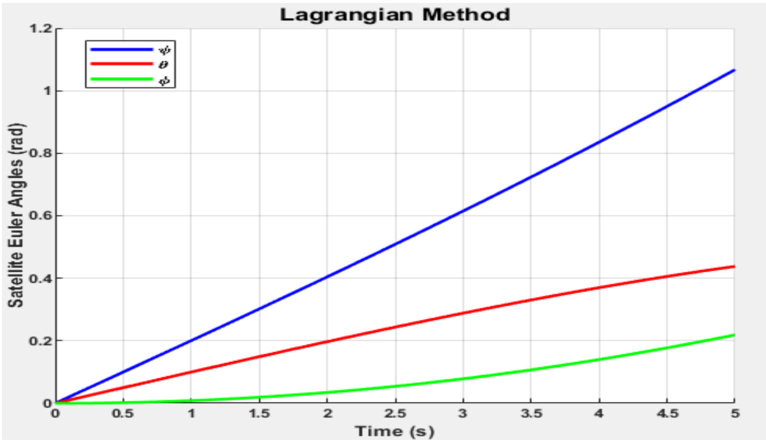
و در حالتی که گشتاور ورودی موتور ها و همچنین نیروها و گشتاورهای خارجی صفر در نظر گرفته شد(حالت آزاد سیستم فقط با شرط اولیه مدنظر می باشد.)

$$f_X=۰\quad f_Y=۰\quad f_Z=۰$$
$$\tau_{۱}=۰\ \ ,\tau_{۲}=۰\,,\tau_{۳}=۰$$

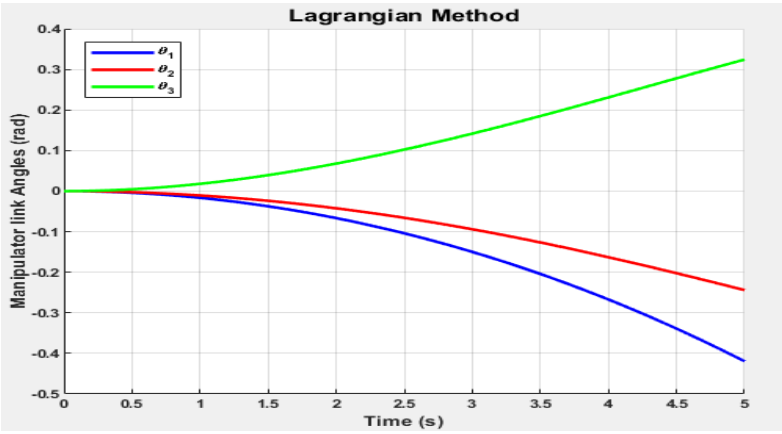
۴-۱ نتایج روش لاگرانژ



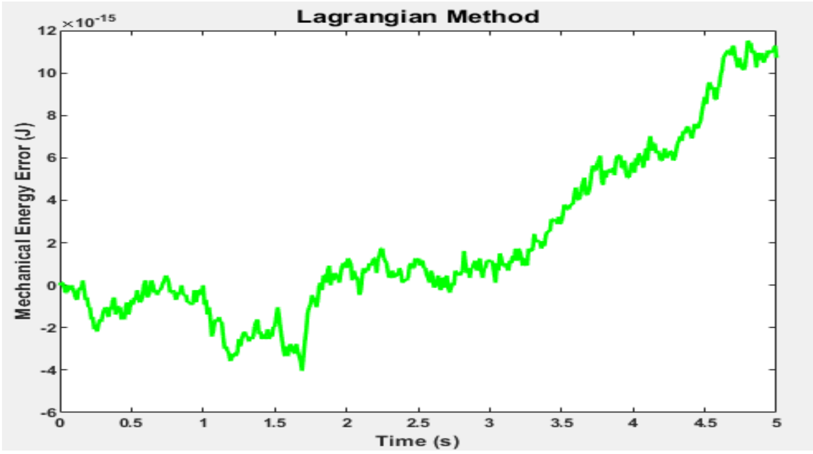
نمودار ۱: تغییر موقعیت مرکزجرم ماهواره در دستگاه مرجع برحسب زمان



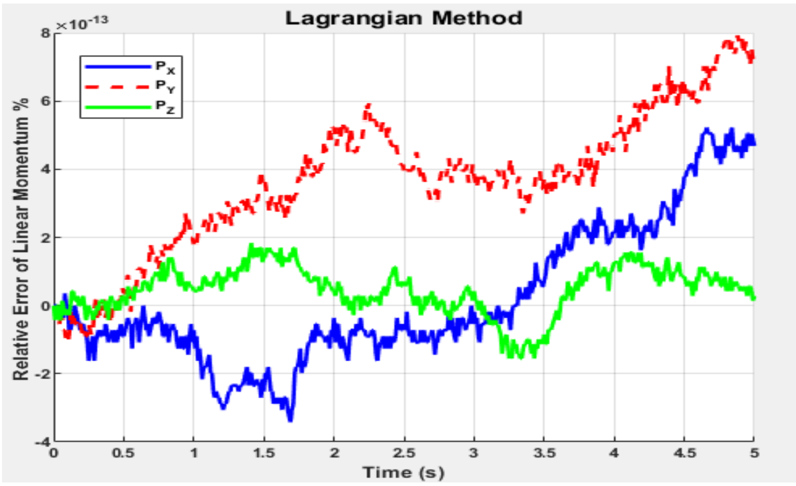
نمودار ۲: تغییر وضعیت بدنه ماهواره برحسب زمان



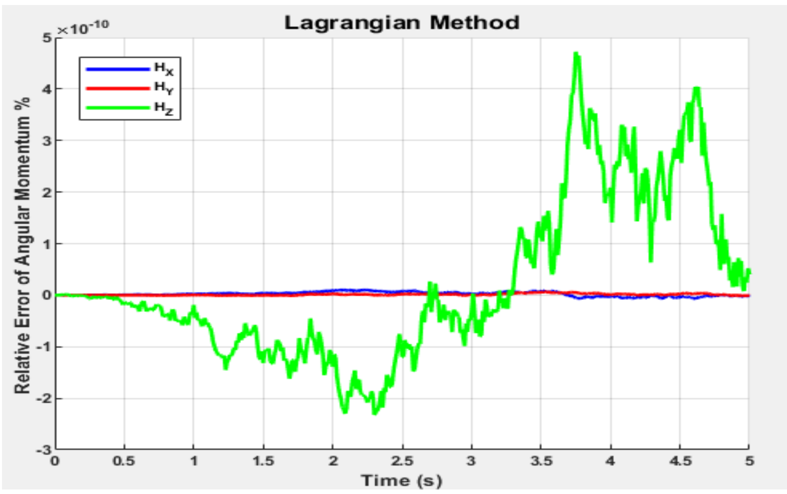
نمودار ۳: تغییر زوایای لینک های ۱و۲و۳ منیپولاتور برحسب زمان



نمودار ۴: خطای انرژی مکانیکی یر حسب زمان

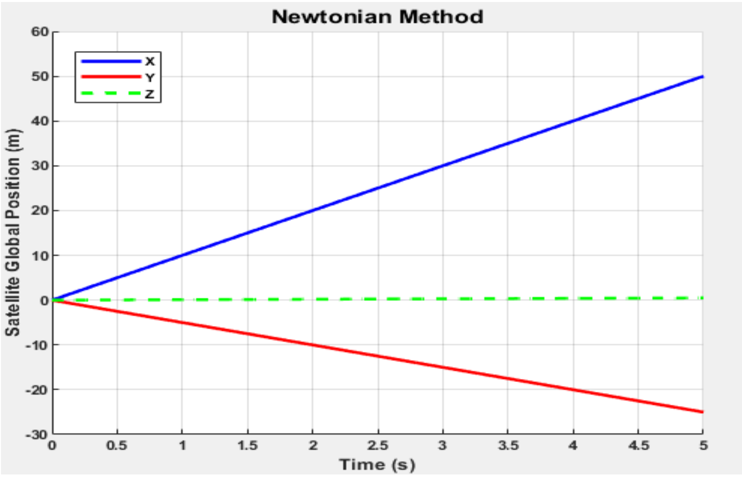


نمودار ۵:درصد تغییر خطای ممنتوم خطی کل سیستم بر حسب زمان

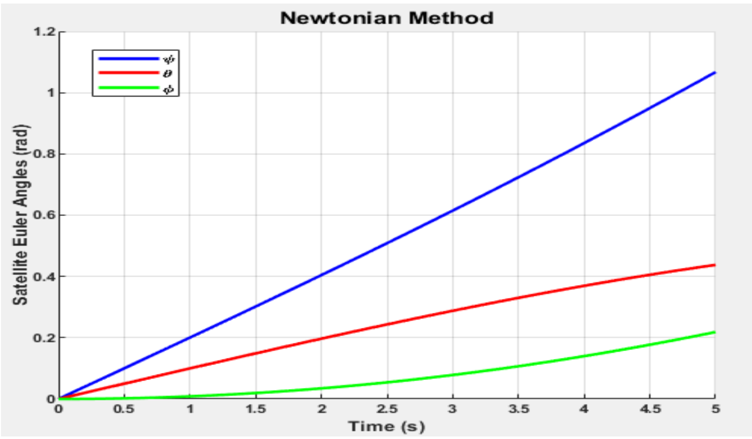


نمودار ۶: درصد تغییر خطای ممنتوم زاویه ای کل سیستم بر حسب زمان

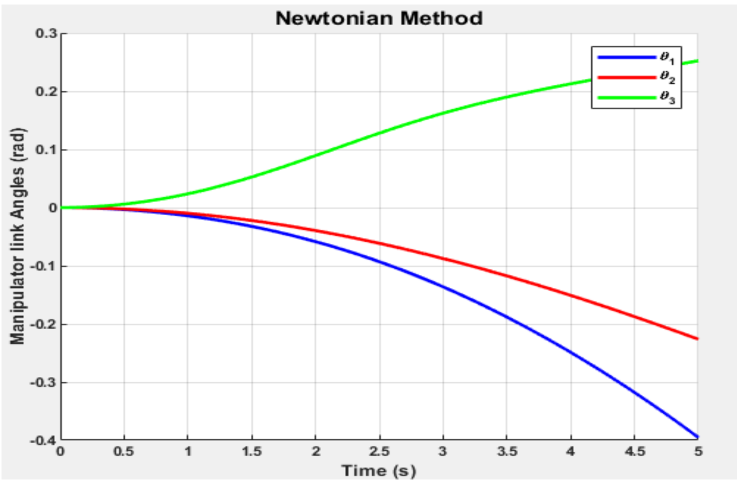
٤-۲ نتایج روش نیوتن



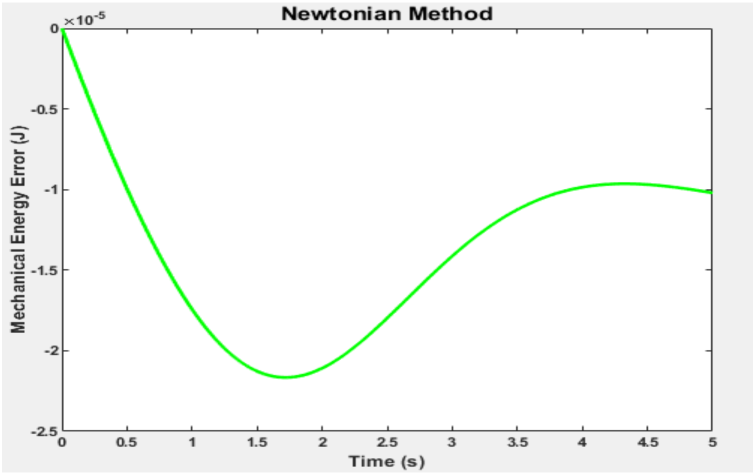
نمودار ۷: تغییر موقعیت مرکزجرم ماهواره در دستگاه مرجع برحسب زمان



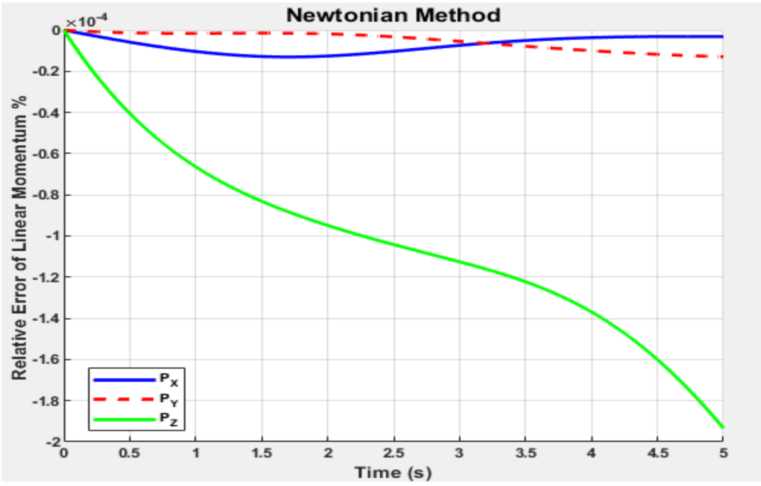
نمودار ۸: تغییر وضعیت بدنه ماهواره برحسب زمان



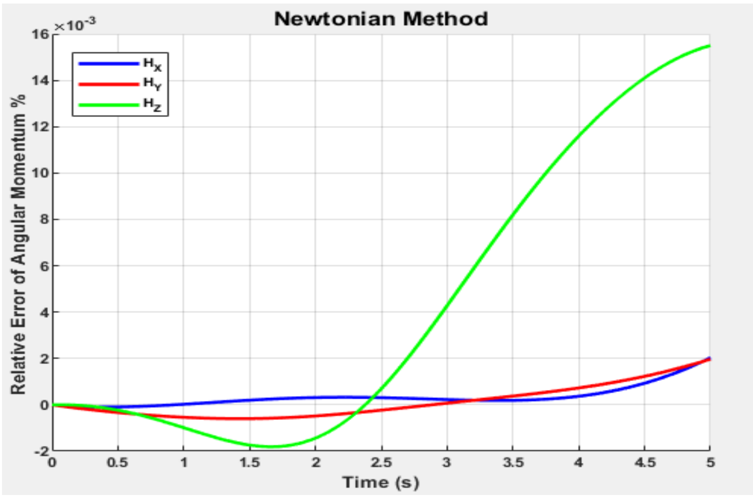
نمودار ۹: تغییر زوایای لینک های ۱و۲و۳ منیپولاتور برحسب زمان



نمودار ۱۰:تغییرات خطای انرژی مکانیکی بر حسب زمان

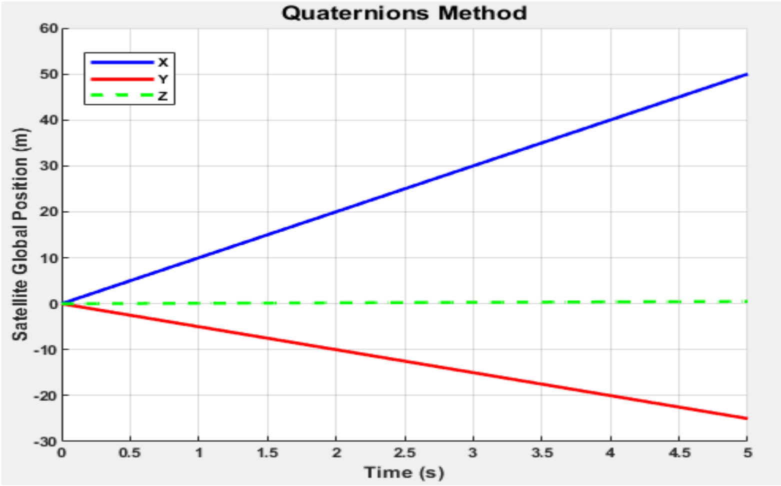


نمودار ۱۱:درصد تغییر خطای ممنتوم خطی کل سیستم بر حسب زمان

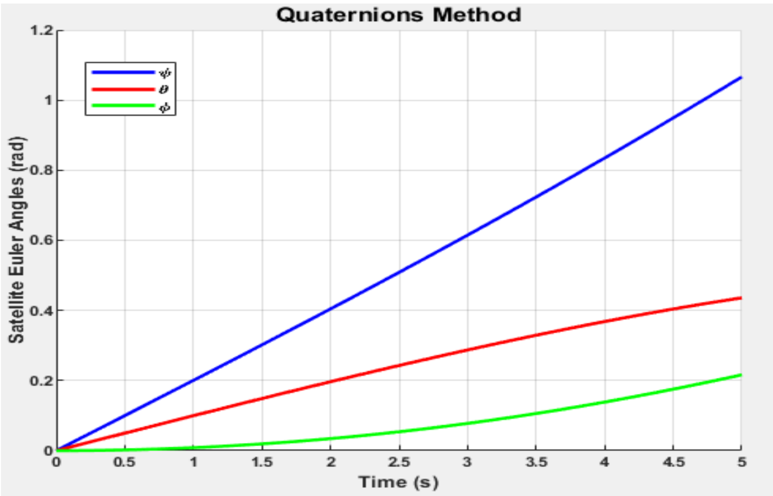


نمودار ۱۲:درصد تغییر خطای ممنتوم زاویه ای کل سیستم بر حسب زمان

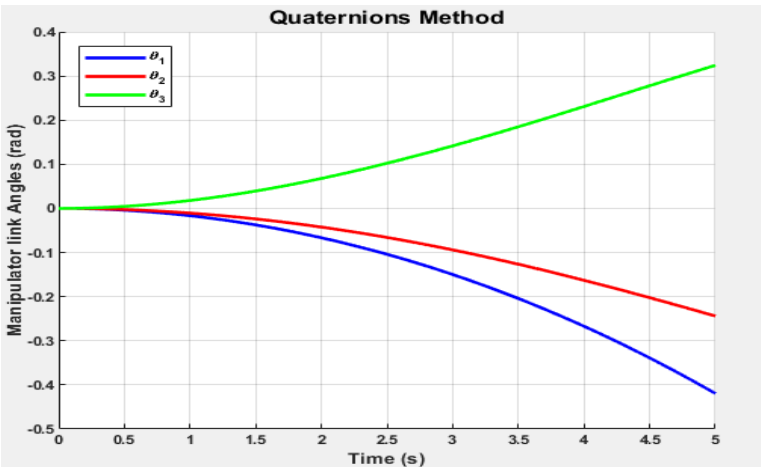
۴-۳ نتایج روش لاگرانژ با استفاده از کواترنیون ها



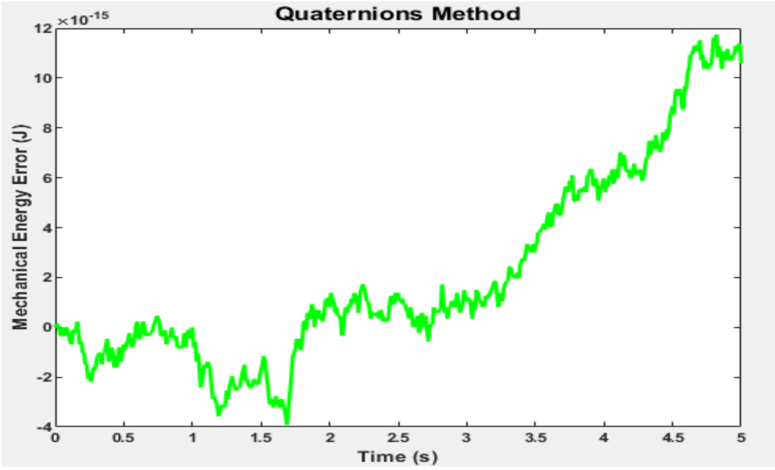
نمودار ۱۳: تغییر موقعیت مرکزجرم ماهواره در دستگاه مرجع برحسب زمان



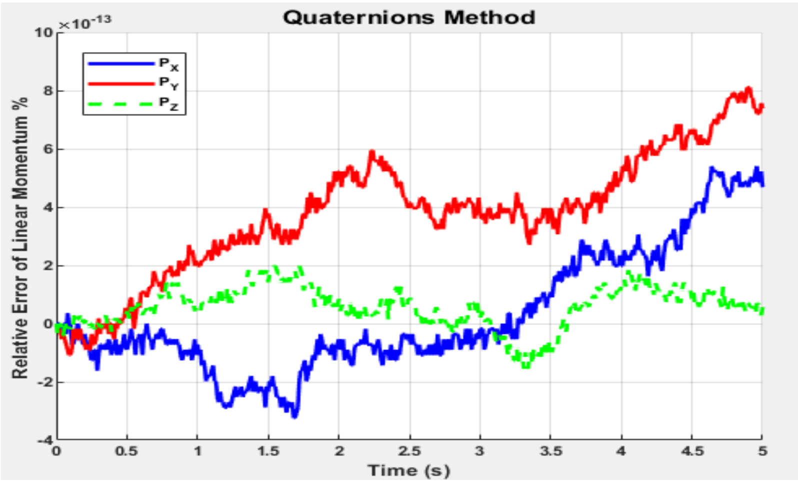
نمودار ۱۴: تغییر وضعیت بدنه ماهواره برحسب زمان



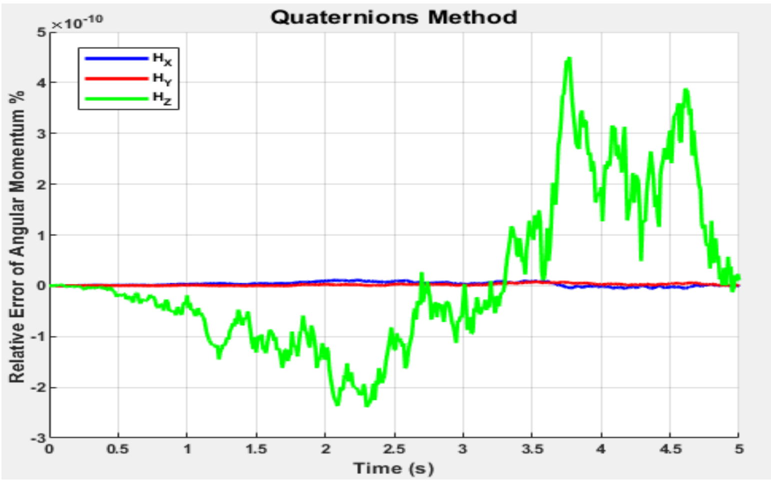
نمودار ۱۵: تغییر زوایای لینک های ۱و۲و۳ منیپولاتور برحسب زمان



نمودار ۱۶: خطای انرژی مکانیکی بر حسب زمان



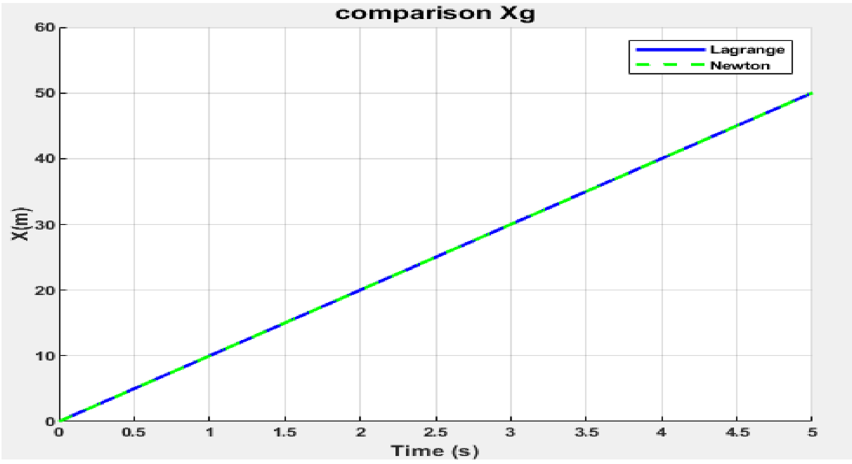
نمودار ۱۷: درصد تغییر خطای ممنتوم خطی کل سیستم بر حسب زمان



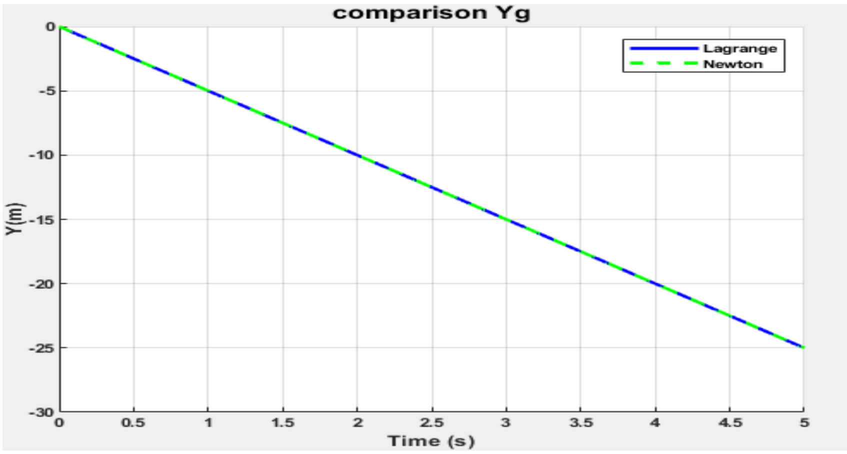
نمودار ۱۸: درصد تغییر خطای ممنتوم زاویه ای کل سیستم بر حسب زمان

مقایسه نتایج:

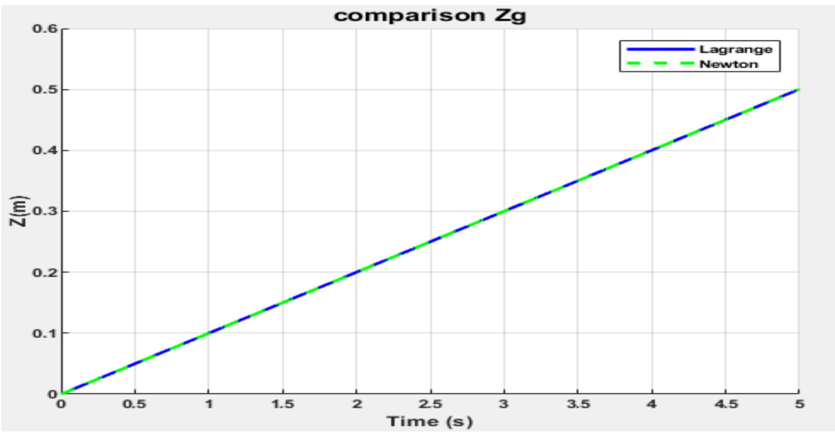
همان طور که از نمودار های بالا مشاهده می کنید نتایج روش لاگرانژ و کواترنیون ها دارای نتایج کاملا مشابه می باشند به دلیل اینکه سیستم در نقطه ای دور از حالت **singularity** قرار دارد . لذا در زیر فقط به مقایسه روش نیوتن و روش لاگرانژ می پردازیم .



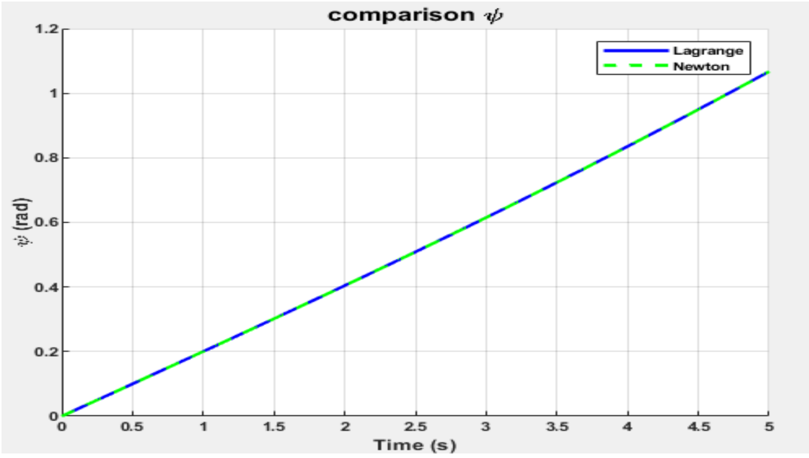
نمودار ۱۹::مقایسه Xg درروش لاگرانژ و نیوتن



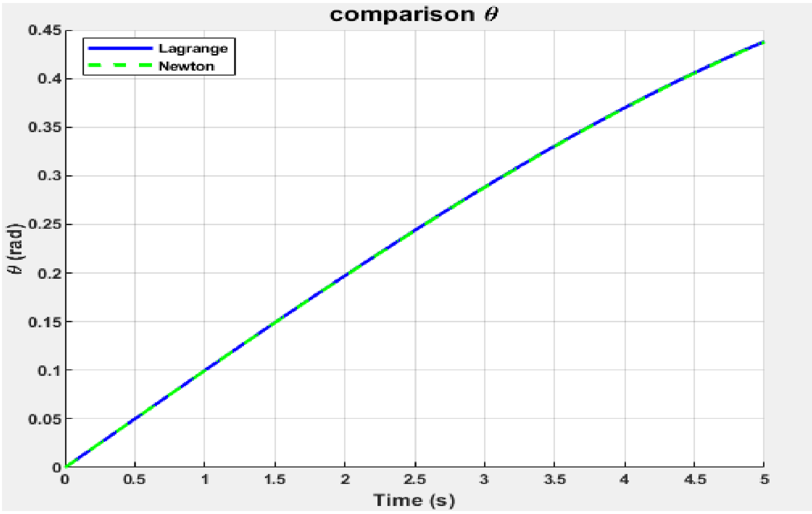
نمودار ۲۰: مقایسه Yg درروش لاگرانژ و نیوتن



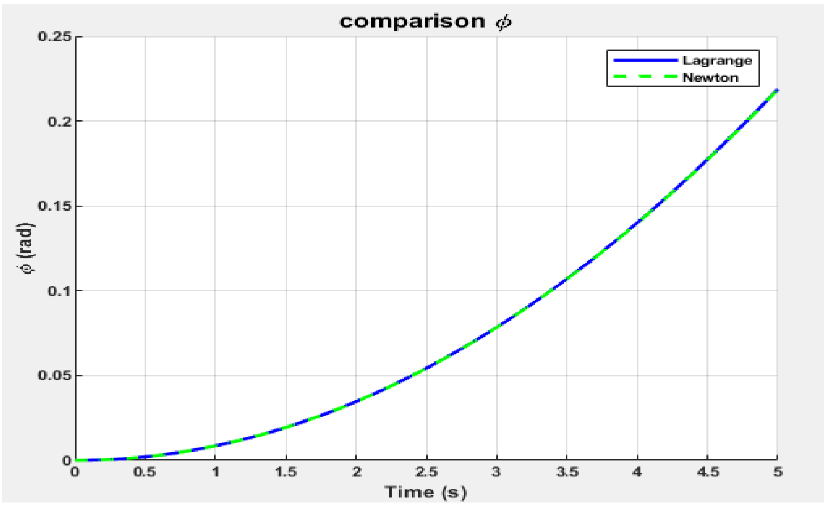
نمودار ۲۱: مقایسه Zg درروش لاگرانژ و نیوتن



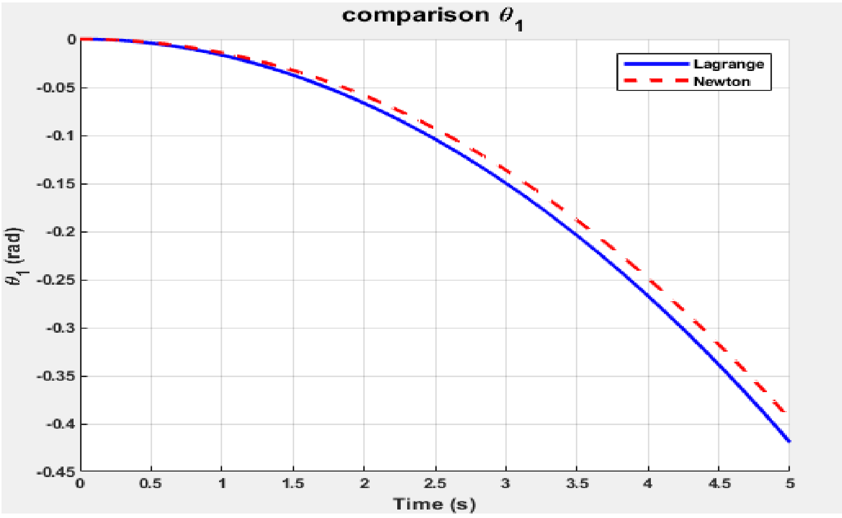
نمودار ۲۲: مقایسه ψ درروش لاگرانژ و نیوتن



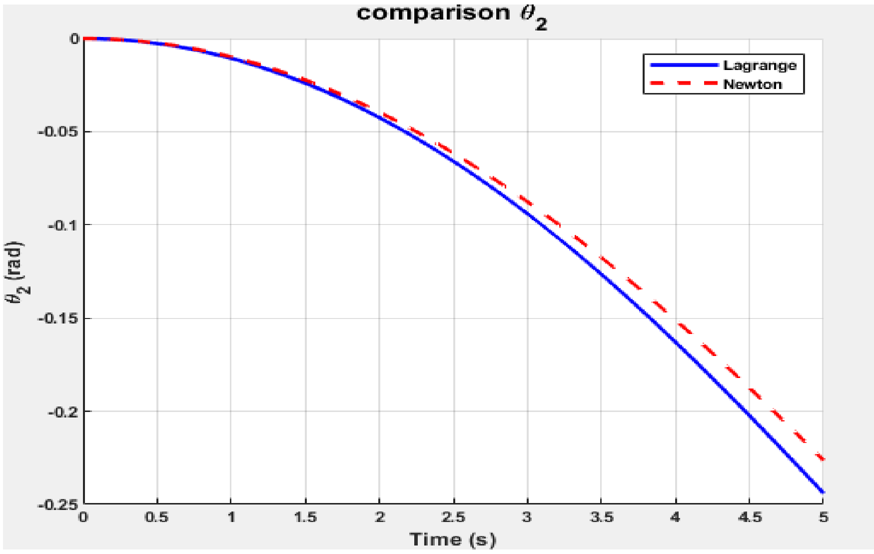
نمودار ۲۳: مقایسه θ درروش لاگرانژ و نیوتن



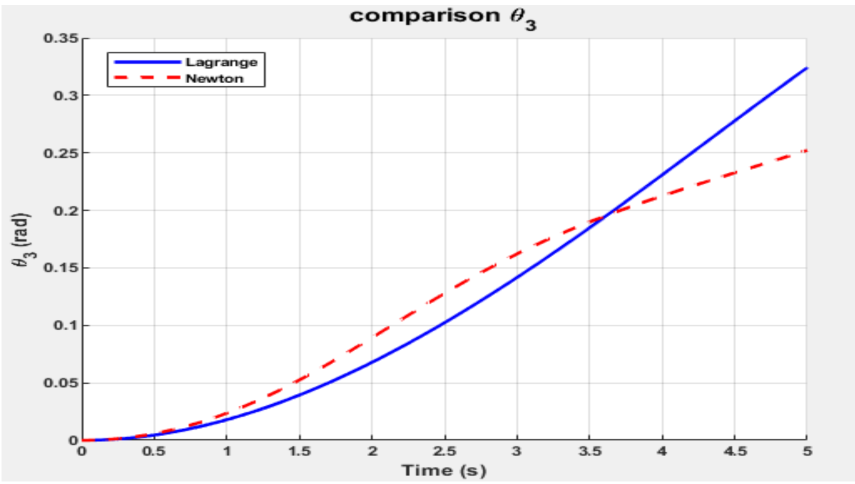
نمودار ۲۴: مقایسه ϕ درروش لاگرانژ و نیوتن



نمودار ۲۵: مقایسه θ_1 در روش لاگرانژ و نیوتن



نمودار ۲۶: مقایسه θ_2 درروش لاگرانژ و نیوتن

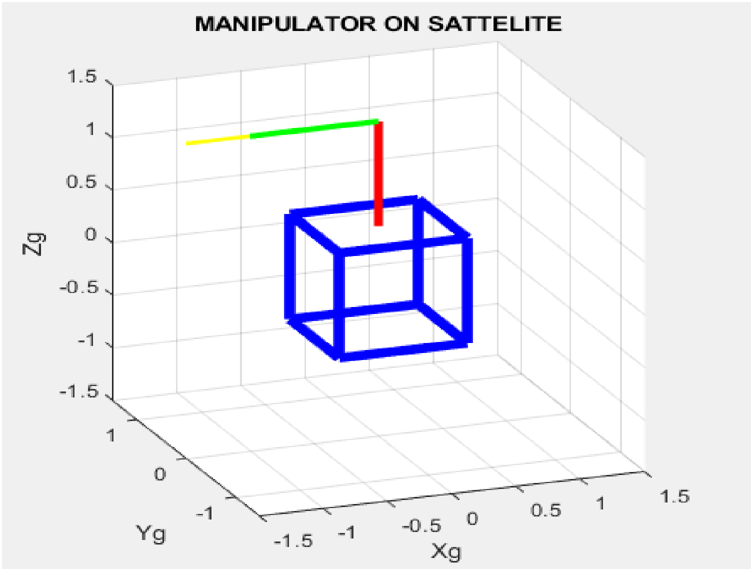


نمودار ۲۷: مقایسه θ_3 درروش لاگرانژ و نیوتن

- نتیجه گیری

همان طور که از نمودارهای مقایسه دو روش لاگرانژ و نیوتن مشخص است در هردو روش با شرایط اولیه یکسان، موقعیت و وضعیت بدنه ماهواره کاملا یکسان می باشد تنها تفاوت آنها در زوایای لینک ها به میزان کمی است که دلیل آن یا اشتباه فردی است یا هم حل عددی در متلب.

فصل ۵ بخش گرافیکی (انیمیشن)



شکل ۱۱: شماتیک کلی انیمیشن طراحی شده در نرم افزار متلب

کد مربوط به این قسمت پیوست شده است.

پیوست ۱ : ممان های اینرسی و ماتریس های دوران

$$I_{G_{sat}}^{x_3y_3z_3}=\begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix} \quad , \quad I_{link_1}^{x_4y_4z_4}=\begin{bmatrix} \frac{1}{12}m_1l_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12}m_1l_1^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$I_{link_2}^{x_5y_5z_5}=\begin{bmatrix} \frac{1}{12}m_2l_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{12}m_2l_2^2 \end{bmatrix} \quad , \quad I_{link_3}^{x_6y_6z_6}=\begin{bmatrix} \frac{1}{12}m_3l_3^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{12}m_3l_3^2 \end{bmatrix}$$

$$R_{Z,\psi}=\begin{bmatrix} c\psi & s\psi & 0 \\ -s\psi & c\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad R_{y_1,\theta}=\begin{bmatrix} c\theta & 0 & -s\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ s\theta & 0 & c\theta \end{bmatrix}$$

$$R_{x_2,\phi}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\phi & s\phi \\ 0 & -s\phi & c\phi \end{bmatrix} \quad , \quad R_{z_3,\theta_1}=\begin{bmatrix} c\theta_1 & s\theta_1 & 0 \\ -s\theta_1 & c\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_{x_4,\theta_2}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\theta_2 & s\theta_2 \\ 0 & -s\theta_2 & c\theta_2 \end{bmatrix} \quad , \quad R_{x_5,\theta_3}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\theta_3 & s\theta_3 \\ 0 & -s\theta_3 & c\theta_3 \end{bmatrix}$$

پیوست ۲ : کدهای متلب دینامیک لاگرانژی

code ۱ : lagrangian symbolic derivation

```
clc
clear
close all
t۰=clock;
%% SYMBOLIC VARIABLE
syms t
syms a b c
syms L۱ L۲ L۳
syms Ms m۱ m۲ m۳
syms Ixx Ixy Ixz Iyy Iyz Izz
syms q۱ q۲ q۳ q۴ q۵ q۶ q۷ q۸ q۹
syms dq۱ dq۲ dq۳ dq۴ dq۵ dq۶ dq۷ dq۸ dq۹
syms ddq۱ ddq۲ ddq۳ ddq۴ ddq۵ ddq۶ ddq۷ ddq۸ ddq۹
% q۱=Xg, q۲=Yg q۳=Zg, x۴=Sai, x۵=Teta, x۶=Phi, x۷=Teta۱, x۸=Teta۲,
x۹=Teta۲,
R۰۱ = [cos(q۴) sin(q۴) ۰;-sin(q۴) cos(q۴) ۰;۰ ۰ ۱]; %XYZ-------->x۱y۱z۱
R۱۲ = [cos(q۵) ۰ -sin(q۵);۰ ۱ ۰;sin(q۵) ۰ cos(q۵)]; %x۱y۱z۱---->x۲y۲z۲
R۲۳ = [۱ ۰ ۰;۰ cos(q۶) sin(q۶);۰ -sin(q۶) cos(q۶)]; %x۲y۲z۲---->x۳y۳z۳
R۳۴ = [cos(q۷) sin(q۷) ۰;-sin(q۷) cos(q۷) ۰;۰ ۰ ۱]; %x۳y۳z۳---->x۴y۴z۴
R۴۵ = [cos(q۸) ۰ -sin(q۸);۰ ۱ ۰;sin(q۸) ۰ cos(q۸)]; %x۴y۴z۴---->x۵y۵z۵
R۵۶ = [cos(q۹) ۰ -sin(q۹);۰ ۱ ۰;sin(q۹) ۰ cos(q۹)]; %x۵y۵z۵---->x۶y۶z۶
%coordinate jumping
R۰۳ = R۲۳*R۱۲*R۰۱;                                  %XYZ-------->x۳y۳z۳
R۳۵ = R۴۵*R۳۴;                                      %x۳y۳z۳---->x۵y۵z۵
R۳۶ = R۵۶*R۴۵*R۳۴;                                  %x۳y۳z۳---->x۶y۶z۶
R۴۶ = R۵۶*R۴۵;                                      %x۴y۴z۴---->x۶y۶z۶
%% MOIs
I_sat_x۳y۳z۳ = [Ixx -Ixy -Ixz;-Ixy Iyy -Iyz;-Ixz -Iyz Izz];
I_LINK۱_x۴y۴z۴ = ۱/۱۲*m۱*L۱^۲*[۱ ۰ ۰;۰ ۱ ۰;۰ ۰ ۱/۵];
I_LINK۲_x۵y۵z۵ = ۱/۱۲*m۲*L۲^۲*[۱/۵ ۰ ۰;۰ ۱ ۰;۰ ۰ ۱];
I_LINK۳_x۶y۶z۶ = ۱/۱۲*m۳*L۳^۲*[۱/۵ ۰ ۰;۰ ۱ ۰;۰ ۰ ۱];

%% SATELLITE
w_sat_x۳y۳z۳ = R۲۳*R۱۲*R۰۱*[۰;۰;dq۴]+R۲۳*R۱۲*[۰;dq۵;۰]+R۲۳*[dq۶;۰;۰];
vG_sat_XYZ = [dq۱;dq۲;dq۳];
vG_sat_x۳y۳z۳ = R۰۳*vG_sat_XYZ;
HG_sat_x۳y۳z۳  = I_sat_x۳y۳z۳*w_sat_x۳y۳z۳;
T_SAT = ۱/۲*Ms*(vG_sat_XYZ).' * (vG_sat_XYZ)+...
        ۱/۲*(w_sat_x۳y۳z۳).' * HG_sat_x۳y۳z۳;

%% LINK۱
rgLINK۱_G_x۳y۳z۳ = [۰;۰;c/۲+L۱/۲];
w_LINK۱_x۴y۴z۴ = R۳۴ * w_sat_x۳y۳z۳ + dq۷*[۰;۰;۱];
vg_LINK۱_x۳y۳z۳ = vG_sat_x۳y۳z۳ +
cross(w_sat_x۳y۳z۳,rgLINK۱_G_x۳y۳z۳);
vg_LINK۱_x۴y۴z۴ = R۳۴*vg_LINK۱_x۳y۳z۳;
Hg_LINK۱_x۴y۴z۴ = I_LINK۱_x۴y۴z۴ * w_LINK۱_x۴y۴z۴;
T_LINK۱ = ۱/۲*m۱*(vg_LINK۱_x۳y۳z۳).' * (vg_LINK۱_x۳y۳z۳)+...
          ۱/۲*(w_LINK۱_x۴y۴z۴).' * Hg_LINK۱_x۴y۴z۴;
```

```
%% joint٢
r_joint٢_x٣y٣z٣ = [٠;٠;c/٢+L١];
v_joint٢_x٣y٣z٣ = vG_sat_x٣y٣z٣+cross(w_sat_x٣y٣z٣,r_joint٢_x٣y٣z٣);
v_joint٢_x٤y٤z٤ = R٣٤*v_joint٢_x٣y٣z٣;
%% LINK٢
rgLINK٢_G_x٥y٥z٥ = R٣٥*r_joint٢_x٣y٣z٣ + [L٢/٢;٠;٠];
w_LINK٢_x٥y٥z٥ = R٤٥*(w_LINK١_x٤y٤z٤+dq٨*[٠;١;٠]);
vg_LINK٢_x٥y٥z٥=R٤٥*v_joint٢_x٤y٤z٤+cross(w_LINK٢_x٥y٥z٥,[L٢/٢;٠;٠]);
Hg_LINK٢_x٥y٥z٥ = I_LINK٢_x٥y٥z٥ * w_LINK٢_x٥y٥z٥;
T_LINK٢ = ١/٢*m٢* (vg_LINK٢_x٥y٥z٥).' * (vg_LINK٢_x٥y٥z٥)+...
          ١/٢*(w_LINK٢_x٥y٥z٥).' * Hg_LINK٢_x٥y٥z٥;
%% joint٣
r_joint٣_x٥y٥z٥ = R٣٥*r_joint٢_x٣y٣z٣ + [L٢;٠;٠];
v_joint٣_x٥y٥z٥ = R٤٥*v_joint٢_x٤y٤z٤ +
cross(w_LINK٢_x٥y٥z٥,[L٢;٠;٠]);

%% LINK٣
w_LINK٣_x٦y٦z٦ = R٥٦*(w_LINK٢_x٥y٥z٥ + dq٩*[٠;١;٠]);
rgLINK٣_G_x٦y٦z٦ = R٥٦*(r_joint٣_x٥y٥z٥) + [L٣/٢;٠;٠];
vg_LINK٣_x٦y٦z٦ = R٥٦ * v_joint٣_x٥y٥z٥ +
cross(w_LINK٣_x٦y٦z٦,[L٣/٢;٠;٠]);
Hg_LINK٣_x٦y٦z٦ = I_LINK٣_x٦y٦z٦ * w_LINK٣_x٦y٦z٦;
T_LINK٣ = ١/٢*m٣* (vg_LINK٣_x٦y٦z٦).' * (vg_LINK٣_x٦y٦z٦)+...
          ١/٢*(w_LINK٣_x٦y٦z٦).' * Hg_LINK٣_x٦y٦z٦;

%% KINETIC AND POTENTIAL ENERGY-->LAGRANZHIAN
T = T_SAT + T_LINK١ + T_LINK٢ + T_LINK٣;
V = ٠;
L = T-V;
E = T+V;
%% Generalized coordinates
q=[q١;q٢;q٣;q٤;q٥;q٦;q٧;q٨;q٩];
dq=[dq١;dq٢;dq٣;dq٤;dq٥;dq٦;dq٧;dq٨;dq٩];
%%
dL_dq = jacobian(L,q);
dL_ddq = jacobian(L,dq);

M = jacobian(dL_ddq,dq);
N = jacobian(dL_ddq,q);
A = diff(dL_ddq.',t);
B = N*dq + A - dL_dq.';

%% Linear and Angular Momentum
P_XYZ=Ms*vG_sat_XYZ+m١*R٠٣.'*vg_LINK١_x٣y٣z٣+m٢*(R٣٥*R٠٣).'*vg_LINK٢_x
٥y٥z٥+m٣*(R٣٦*R٠٣).'*vg_LINK٣_x٦y٦z٦;

rGsat_XYZ = [q١;q٢;q٣];
Hsat_XYZ = R٠٣.'*HG_sat_x٣y٣z٣ + Ms*cross(rGsat_XYZ,vG_sat_XYZ);

rg_LINK١_XYZ = rGsat_XYZ + R٠٣.'*(rgLINK١_G_x٣y٣z٣);
Hg_LINK١_XYZ = (R٣٤*R٠٣).'*Hg_LINK١_x٤y٤z٤ +
m١*cross(rg_LINK١_XYZ,R٠٣.'*vg_LINK١_x٣y٣z٣);

rg_LINK٢_XYZ = rGsat_XYZ+(R٣٥*R٠٣).'*rgLINK٢_G_x٥y٥z٥;
Hg_LINK٢_XYZ = (R٣٥*R٠٣).'*Hg_LINK٢_x٥y٥z٥ +
m٢*cross(rg_LINK٢_XYZ,(R٣٥*R٠٣).'*vg_LINK٢_x٥y٥z٥);

rg_LINK٣_XYZ = rGsat_XYZ+(R٣٦*R٠٣).'*rgLINK٣_G_x٦y٦z٦;
```

```
Hg_LINK٣_XYZ=(R٣١*R٠٣).'*Hg_LINK٣_x١y١z١+m٣*cross(rg_LINK٣_XYZ,(R٣١*R٠
٣).'*vg_LINK٣_x١y١z١);

H_XYZ = Hsat_XYZ + Hg_LINK١_XYZ + Hg_LINK٢_XYZ + Hg_LINK٣_XYZ;

%% matlabFunctions
MFunc=matlabFunction(M,'File','generate١١\Mfunc');
BFunc=matlabFunction(B,'File','generate١١\Bfunc');
EFunc=matlabFunction(E,'File','generate١١\Efunc');
PFunc=matlabFunction(P_XYZ,'file','generate١١\Pfunc');
HFunc=matlabFunction(H_XYZ,'file','generate١١\Hfunc');
%% END
t١=clock;
ti=etime(t١,t٠)/٦٠;
disp(['Newtonian Symbolic Derivation Simulation Time: ' num٢str(ti)
'(min)'])
```

code٢: lagrangian Run_me

```
function dz=Lagrange_SAT_DYNAMIC(t,z)
dz = z;
dz(١:٩) = z(١٠:١٨);

global a b c L١ L٢ L٣ Ms m١ m٢ m٣ Ixx Ixy Ixz Iyy Iyz Izz tav١ tav٢
tav٣ fX fY fZ

q١ = z(١); q٢ = z(٢); q٣ = z(٣); q٤ = z(٤); q٥ = z(٥); q٦ = z(٦); q٧ =
z(٧); q٨ = z(٨);q٩ = z(٩);
dq١ = z(١٠); dq٢ = z(١١); dq٣ = z(١٢); dq٤ = z(١٣); dq٥ = z(١٤); dq٦ =
z(١٥); dq٧ = z(١٦); dq٨ = z(١٧); dq٩ = z(١٨);

M=Mfunc(Ixx,Ixy,Ixz,Iyy,Iyz,Izz,L١,L٢,L٣,Ms,c,m١,m٢,m٣,q٤,q٥,q٦,q٧,q٨,
q٩);

B=Bfunc(Ixx,Ixy,Ixz,Iyy,Iyz,Izz,L١,L٢,L٣,c,dq١,dq٢,dq٣,dq٤,dq٥,dq٦,dq٧
,dq٨,dq٩,m١,m٢,m٣,q٤,q٥,q٦,q٧,q٨,q٩);
Q = [fX;fY;fZ;٠;٠;-tav١;tav١;tav٢-tav٣;tav٣];

dz(١٠:١٨) = -M\(B+Q);
end
```

پیوست ۳ کدهای متلب دینامیک نیوتنی

code٣: Newtonian Symbolic Derivation

```
clc
clear
close all
t٠=clock;
%% SYMBOLIC VARIABLE
syms t
syms a b c
syms L١ L٢ L٣
syms Ms m١ m٢ m٣
syms fX fY fZ   % External Forces
syms tav١ tav٢ tav٣    % Input momentum of motors
syms Ixx Ixy Ixz Iyy Iyz Izz
syms q١ q٢ q٣ q٤ q٥ q٦ q٧ q٨ q٩
syms dq١ dq٢ dq٣ dq٤ dq٥ dq٦ dq٧ dq٨ dq٩
syms ddq١ ddq٢ ddq٣ ddq٤ ddq٥ ddq٦ ddq٧ ddq٨ ddq٩
% q١=Xg, q٢=Yg q٣=Zg, x٤=Sai, x٥=Teta, x٦=Phi, x٧=Teta١, x٨=Teta٢,
x٩=Teta٢,
R٠١ = [cos(q٤) sin(q٤) ٠;-sin(q٤) cos(q٤) ٠;٠ ٠ ١]; %XYZ------->x١y١z١
R١٢ = [cos(q٥) ٠ -sin(q٥);٠ ١ ٠;sin(q٥) ٠ cos(q٥)]; %x١y١z١---->x٢y٢z٢
R٢٣ = [١ ٠ ٠;٠ cos(q٦) sin(q٦);٠ -sin(q٦) cos(q٦)]; %x٢y٢z٢---->x٣y٣z٣
R٣٤ = [cos(q٧) sin(q٧) ٠;-sin(q٧) cos(q٧) ٠;٠ ٠ ١]; %x٣y٣z٣---->x٤y٤z٤
R٤٥ = [cos(q٨) ٠ -sin(q٨);٠ ١ ٠;sin(q٨) ٠ cos(q٨)]; %x٤y٤z٤-----
>x٥y٥z٥
R٥٦ = [cos(q٩) ٠ -sin(q٩);٠ ١ ٠;sin(q٩) ٠ cos(q٩)]; %x٥y٥z٥---->x٦y٦z٦
%coordinate jumping
R٠٣ = R٢٣*R١٢*R٠١;                                  %XYZ------->x٣y٣z٣
R٣٥ = R٤٥*R٣٤;                                      %x٣y٣z٣---->x٥y٥z٥
R٣٦ = R٥٦*R٤٥*R٣٤;                                  %x٣y٣z٣---->x٦y٦z٦
R٤٦ = R٥٦*R٤٥;                                      %x٤y٤z٤---->x٦y٦z٦
%% MOIs
I_sat_x٣y٣z٣ = [Ixx -Ixy -Ixz;-Ixy Iyy -Iyz;-Ixz -Iyz Izz];
I_LINK١_x٤y٤z٤ = ١/١٢*m١*L١^٢*[١ ٠ ٠;٠ ١ ٠;٠ ٠ ١/٥];
I_LINK٢_x٥y٥z٥ = ١/١٢*m٢*L٢^٢*[١/٥ ٠ ٠;٠ ١ ٠;٠ ٠ ١];
I_LINK٣_x٦y٦z٦ = ١/١٢*m٣*L٣^٢*[١/٥ ٠ ٠;٠ ١ ٠;٠ ٠ ١];

%% SATELLITE
w_sat_x٣y٣z٣ = R٢٣*R١٢*R٠١*[٠;٠;dq٤]+R٢٣*R١٢*[٠;dq٥;٠]+R٢٣*[dq٦;٠;٠];
vG_sat_XYZ = [dq١;dq٢;dq٣];
vG_sat_x٣y٣z٣ = R٠٣*vG_sat_XYZ;
HG_sat_x٣y٣z٣  = I_sat_x٣y٣z٣*w_sat_x٣y٣z٣;
T_SAT = ١/٢*Ms*(vG_sat_XYZ).' * (vG_sat_XYZ)+...
        ١/٢*(w_sat_x٣y٣z٣).' * HG_sat_x٣y٣z٣;

%% LINK١
rgLINK١_G_x٣y٣z٣ = [٠;٠;c/٢+L١/٢];
w_LINK١_x٤y٤z٤ = R٣٤ * w_sat_x٣y٣z٣ + dq٧*[٠;٠;١];
vg_LINK١_x٣y٣z٣ = vG_sat_x٣y٣z٣ +
cross(w_sat_x٣y٣z٣,rgLINK١_G_x٣y٣z٣);
vg_LINK١_x٤y٤z٤ = R٣٤*vg_LINK١_x٣y٣z٣;
Hg_LINK١_x٤y٤z٤ = I_LINK١_x٤y٤z٤ * w_LINK١_x٤y٤z٤;
```

```
T_LINK١ = ١/٢*m١*(vg_LINK١_x٣y٣z٣).' * (vg_LINK١_x٣y٣z٣)+...
          ١/٢*(w_LINK١_x٤y٤z٤).' * Hg_LINK١_x٤y٤z٤;
%% joint٢
r_joint٢_x٣y٣z٣ = [٠;٠;c/٢+L١];
v_joint٢_x٣y٣z٣ = vG_sat_x٣y٣z٣ + cross(w_sat_x٣y٣z٣,r_joint٢_x٣y٣z٣);
v_joint٢_x٤y٤z٤ = R٣٤*v_joint٢_x٣y٣z٣;
%% LINK٢
rgLINK٢_G_x٥y٥z٥ = R٣٥*r_joint٢_x٣y٣z٣ + [L٢/٢;٠;٠];
w_LINK٢_x٥y٥z٥ = R٤٥*(w_LINK١_x٤y٤z٤+dq٨*[٠;١;٠]);
vg_LINK٢_x٥y٥z٥ = R٤٥ *v_joint٢_x٤y٤z٤ +
cross(w_LINK٢_x٥y٥z٥,[L٢/٢;٠;٠]);
Hg_LINK٢_x٥y٥z٥ = I_LINK٢_x٥y٥z٥ * w_LINK٢_x٥y٥z٥;
T_LINK٢ = ١/٢*m٢* (vg_LINK٢_x٥y٥z٥).' * (vg_LINK٢_x٥y٥z٥)+...
          ١/٢*(w_LINK٢_x٥y٥z٥).' * Hg_LINK٢_x٥y٥z٥;
%% joint٣
r_joint٣_x٥y٥z٥ = R٣٥*r_joint٢_x٣y٣z٣ + [L٢;٠;٠];
v_joint٣_x٥y٥z٥ = R٤٥*v_joint٢_x٤y٤z٤ +
cross(w_LINK٢_x٥y٥z٥,[L٢;٠;٠]);

%% LINK٣
w_LINK٣_x٦y٦z٦ = R٥٦*(w_LINK٢_x٥y٥z٥ + dq٩*[٠;١;٠]);
rgLINK٣_G_x٦y٦z٦ = R٥٦*(r_joint٣_x٥y٥z٥) + [L٣/٢;٠;٠];
vg_LINK٣_x٦y٦z٦=R٥٦*v_joint٣_x٥y٥z٥+cross(w_LINK٣_x٦y٦z٦,[L٣/٢;٠;٠]);
Hg_LINK٣_x٦y٦z٦ = I_LINK٣_x٦y٦z٦ * w_LINK٣_x٦y٦z٦;
T_LINK٣ = ١/٢*m٣* (vg_LINK٣_x٦y٦z٦).' * (vg_LINK٣_x٦y٦z٦)+...
          ١/٢*(w_LINK٣_x٦y٦z٦).' * Hg_LINK٣_x٦y٦z٦;

%% ACCELERATION AND ANGULAR MOMENTUMS of CENTER OF MASSs
q=[q١;q٢;q٣;q٤;q٥;q٦;q٧;q٨;q٩];
dq=[dq١;dq٢;dq٣;dq٤;dq٥;dq٦;dq٧;dq٨;dq٩];
ddq=[ddq١;ddq٢;ddq٣;ddq٤;ddq٥;ddq٦;ddq٧;ddq٨;ddq٩];

S = [q;dq];
dS = [dq;ddq];
%% SATELLITE
aG_sat_x٣y٣z٣ = zeros(٣,١);
for i=١:١٨
    aG_sat_x٣y٣z٣ = aG_sat_x٣y٣z٣ + diff(vG_sat_x٣y٣z٣,S(i))*dS(i);
end
aG_sat_x٣y٣z٣ = aG_sat_x٣y٣z٣ + cross(w_sat_x٣y٣z٣,vG_sat_x٣y٣z٣);

dHG_sat_x٣y٣z٣ = zeros(٣,١);
for i=١:١٨
    dHG_sat_x٣y٣z٣ = dHG_sat_x٣y٣z٣ + diff(HG_sat_x٣y٣z٣,S(i))*dS(i);
end
dHG_sat_x٣y٣z٣ = dHG_sat_x٣y٣z٣ + cross(w_sat_x٣y٣z٣,HG_sat_x٣y٣z٣);
%% LINK١
ag_LINK١_x٣y٣z٣ = zeros(٣,١);
for i=١:١٨
    ag_LINK١_x٣y٣z٣=ag_LINK١_x٣y٣z٣+diff(vg_LINK١_x٣y٣z٣,S(i))*dS(i);
end
ag_LINK١_x٣y٣z٣=ag_LINK١_x٣y٣z٣+cross(w_sat_x٣y٣z٣,vg_LINK١_x٣y٣z٣);

dHg_LINK١_x٤y٤z٤ = zeros(٣,١);
for i=١:١٨
   dHg_LINK١_x٤y٤z٤=dHg_LINK١_x٤y٤z٤+diff(Hg_LINK١_x٤y٤z٤,S(i))*dS(i);
end
dHg_LINK١_x٤y٤z٤=dHg_LINK١_x٤y٤z٤+cross(w_LINK١_x٤y٤z٤,Hg_LINK١_x٤y٤z٤
);
```

```
%% LINK٢
ag_LINK٢_x٥y٥z٥ = zeros(٣,١);
for i=١:١٨
    ag_LINK٢_x٥y٥z٥=ag_LINK٢_x٥y٥z٥+diff(vg_LINK٢_x٥y٥z٥,S(i))*dS(i);
end
ag_LINK٢_x٥y٥z٥=ag_LINK٢_x٥y٥z٥+cross(w_LINK٢_x٥y٥z٥,vg_LINK٢_x٥y٥z٥);

dHg_LINK٢_x٥y٥z٥ = zeros(٣,١);
for i=١:١٨
   dHg_LINK٢_x٥y٥z٥=dHg_LINK٢_x٥y٥z٥+diff(Hg_LINK٢_x٥y٥z٥,S(i))*dS(i);
end
dHg_LINK٢_x٥y٥z٥ = dHg_LINK٢_x٥y٥z٥ +
cross(w_LINK٢_x٥y٥z٥,Hg_LINK٢_x٥y٥z٥);

%% LINK٣
ag_LINK٣_x٦y٦z٦ = zeros(٣,١);
for i=١:١٨
    ag_LINK٣_x٦y٦z٦=ag_LINK٣_x٦y٦z٦+diff(vg_LINK٣_x٦y٦z٦,S(i))*dS(i);
end
ag_LINK٣_x٦y٦z٦=ag_LINK٣_x٦y٦z٦+cross(w_LINK٣_x٦y٦z٦,vg_LINK١_x٤y٤z٤);

dHg_LINK٣_x٦y٦z٦ = zeros(٣,١);
for i=١:١٨
   dHg_LINK٣_x٦y٦z٦=dHg_LINK٣_x٦y٦z٦+diff(Hg_LINK٣_x٦y٦z٦,S(i))*dS(i);
end
dHg_LINK٣_x٦y٦z٦=dHg_LINK٣_x٦y٦z٦+cross(w_LINK٣_x٦y٦z٦,Hg_LINK٣_x٦y٦z٦
);

%% EQUATIONS
EQ١_٣ = Ms*aG_sat_x٣y٣z٣ + m١*ag_LINK١_x٣y٣z٣ +...
        m٢*R٣٥.'*ag_LINK٢_x٥y٥z٥ + m٣*R٣٦.'*ag_LINK٣_x٦y٦z٦-
R٠٣*[fX;fY;fZ];

EQ٤_٦ = dHG_sat_x٣y٣z٣+...
        R٣٤.'* dHg_LINK١_x٤y٤z٤ +
m١*cross(rgLINK١_G_x٣y٣z٣,ag_LINK١_x٣y٣z٣)+...
        R٣٥.'*(dHg_LINK٢_x٥y٥z٥ +
m٢*cross(rgLINK٢_G_x٥y٥z٥,ag_LINK٢_x٥y٥z٥))+...
        R٣٦.'*(dHg_LINK٣_x٦y٦z٦ +
m٣*cross(rgLINK٣_G_x٦y٦z٦,ag_LINK٣_x٦y٦z٦));%There isnt external
momentum
EQ٧ = dHg_LINK٣_x٦y٦z٦ + m٣*cross([L٣/٢;٠;٠],ag_LINK٣_x٦y٦z٦)-
[٠;tav٣;٠];%external momentum about joint٣ on link٣
EQ٧ = EQ٧.'*[٠;١;٠];% EQ٧ = dot(EQ٧,[١;٠;٠]);

EQ٨ = dHg_LINK٢_x٥y٥z٥ + m٢*cross([L٢/٢;٠;٠],ag_LINK٢_x٥y٥z٥)+...
      R٥٦.'*(dHg_LINK٣_x٦y٦z٦
+m٣*cross(R٥٦*[L٢;٠;٠]+[L٣/٢;٠;٠],ag_LINK٣_x٦y٦z٦))-
[٠;tav٢;٠];%external momentum about joint٢ on link٢

EQ٩ = R٣٤.'*dHg_LINK١_x٤y٤z٤ +
m١*cross([٠;٠;L١/٢],ag_LINK١_x٣y٣z٣)+...
      R٣٥.'*(dHg_LINK٢_x٥y٥z٥ +
m٢*cross(R٣٥*[٠;٠;L١]+[L٢/٢;٠;٠],ag_LINK٢_x٥y٥z٥))+...
      R٣٦.'*(dHg_LINK٣_x٦y٦z٦ +
m٣*cross(R٣٦*[٠;٠;L١]+R٥٦*[L٢;٠;٠]+[L٣/٢;٠;٠],ag_LINK٣_x٦y٦z٦))-
[٠;٠;tav١];%external momentum about joint١ on link١
```

```
EQ۹ = EQ۹.'*[۰;۰;۱];% EQ۹=dot(EQ۹,[۰;۰;۱]);

EQ = [EQ۱_۳;EQ٤_٦;EQ۷;EQ۸;EQ۹];
%%
Mass=jacobian(EQ,ddq);
M = simplify(Mass);
% B = EQ-M*ddq;
% B = simplify(B);
B=subs(EQ,[ddq۱,ddq۲,ddq۳,ddq٤,ddq٥,ddq٦,ddq۷,ddq۸,ddq۹],[۰,۰,۰,۰,۰,۰,
۰,۰,۰]);

T = T_SAT + T_LINK۱+ T_LINK۲ + T_LINK۳;
V = ۰;
E=T+V;
%% linear and Angular Momentum
P_XYZ =
Ms*vG_sat_XYZ+m۱*R۰۳.'*vg_LINK۱_x۳y۳z۳+m۲*(R۳٥*R۰۳).'*vg_LINK۲_x٥y٥z٥+
m۳*(R۳٦*R۰۳).'*vg_LINK۳_x٦y٦z٦;

rGsat_XYZ = [q۱;q۲;q۳];
Hsat_XYZ = R۰۳.'*HG_sat_x۳y۳z۳ + Ms*cross(rGsat_XYZ,vG_sat_XYZ);

rg_LINK۱_XYZ = rGsat_XYZ + R۰۳.'*(rgLINK۱_G_x۳y۳z۳);
Hg_LINK۱_XYZ = (R۳٤*R۰۳).'*Hg_LINK۱_x٤y٤z٤ +
m۱*cross(rg_LINK۱_XYZ,R۰۳.'*vg_LINK۱_x۳y۳z۳);

rg_LINK۲_XYZ = rGsat_XYZ+(R۳٥*R۰۳).'*rgLINK۲_G_x٥y٥z٥;
Hg_LINK۲_XYZ = (R۳٥*R۰۳).'*Hg_LINK۲_x٥y٥z٥ +
m۲*cross(rg_LINK۲_XYZ,(R۳٥*R۰۳).'*vg_LINK۲_x٥y٥z٥);

rg_LINK۳_XYZ = rGsat_XYZ+(R۳٦*R۰۳).'*rgLINK۳_G_x٦y٦z٦;
Hg_LINK۳_XYZ = (R۳٦*R۰۳).'*Hg_LINK۳_x٦y٦z٦ +
m۳*cross(rg_LINK۳_XYZ,(R۳٦*R۰۳).'*vg_LINK۳_x٦y٦z٦);

H_XYZ = Hsat_XYZ + Hg_LINK۱_XYZ + Hg_LINK۲_XYZ + Hg_LINK۳_XYZ;

%% matlabFunctions
MFunc=matlabFunction(M,'File','generate٥۱\Mfunc');
BFunc=matlabFunction(B,'File','generate٥۱\Bfunc');
EFunc=matlabFunction(E,'File','generate٥۱\Efunc');
PFunc=matlabFunction(P_XYZ,'file','generate٥۱\Pfunc');
HFunc=matlabFunction(H_XYZ,'file','generate٥۱\Hfunc');
%% END
```

code۴: Newtonian ODE45

```
function dz = Newton_Sat_Dynamics(t,z)

dz = z;
dz(۱:۹) = z(۱۰:۱۸);

global a b c L۱ L۲ L۳ Ms m۱ m۲ m۳ Ixx Ixy Ixz Iyy Iyz Izz tav۱ tav۲
tav۳ fX fY fZ

q۱ = z(۱); q۲ = z(۲); q۳ = z(۳); q٤ = z(٤); q٥ = z(٥); q٦ = z(٦); q۷ =
z(۷); q۸ = z(۸);q۹ = z(۹);
```

```
dq١ = z(١٠); dq٢ = z(١١); dq٣ = z(١٢); dq٤ = z(١٣); dq٥ = z(١٤); dq٦ =
z(١٥); dq٧ = z(١٦); dq٨ = z(١٧); dq٩ = z(١٨);

M =
Mfunc(Ixx,Ixy,Ixz,Iyy,Iyz,Izz,L١,L٢,L٣,Ms,c,m١,m٢,m٣,q٤,q٥,q٦,q٧,q٨,q٩
);

B =
Bfunc(Ixx,Ixy,Ixz,Iyy,Iyz,Izz,L١,L٢,L٣,Ms,c,dq١,dq٢,dq٣,dq٤,dq٥,dq٦,dq
٧,dq٨,dq٩,fX,fY,fZ,m١,m٢,m٣,q٤,q٥,q٦,q٧,q٨,q٩,tav١,tav٢,tav٣);
dz(١٠:١٨) = -M\B;

end
```

پیوست ٤ کدهای متلب کواترنیون ها

code٥ : Quaternion Symbolic Derivation

```
clc
clear all
close all
t٠=clock;
%% symbolic parameters
syms t
syms c L١ L٢ L٣
syms Ms m١ m٢ m٣
syms q١ q٢ q٣ e٠ e١ e٢ e٣ q٧ q٨ q٩
syms dq١ dq٢ dq٣ de٠ de١ de٢ de٣ dq٧ dq٨ dq٩
syms Ixx Iyy Izz Ixy Ixz Iyz
% q١=Xg, q٢=Yg, q٣=Zg, e٠=cos(alph/٢),
e١=c١*sin(alph/٢),e٢=c٢*sin(alph/٢),e٣=c٣*sin(alph/٢),
% q٧=Teta١, q٨=Teta٢, q٩=Teta٢,
%% MOMENT OF INNERTIA
I_sat_x٣y٣z٣ = [Ixx -Ixy -Ixz;-Ixy Iyy -Iyz;-Ixz -Iyz Izz];
I_LINK١_x٤y٤z٤ = ١/١٢*m١*L١^٢*[١ ٠ ٠;٠ ١ ٠;٠ ٠ ١/٥];
I_LINK٢_x٥y٥z٥ = ١/١٢*m٢*L٢^٢*[١/٥ ٠ ٠;٠ ١ ٠;٠ ٠ ١];
I_LINK٣_x٦y٦z٦ = ١/١٢*m٣*L٣^٢*[١/٥ ٠ ٠;٠ ١ ٠;٠ ٠ ١];

%% ROTATION MATRIXS
R٠٣ =[e٠^٢+e١^٢-e٢^٢-e٣^٢ ٢*(e١*e٢+e٠*e٣) ٢*(e١*e٣-e٠*e٢);
      ٢*(e١*e٢-e٠*e٣) e٠^٢-e١^٢+e٢^٢-e٣^٢ ٢*(e٢*e٣+e٠*e١);
      ٢*(e١*e٣+e٠*e٢) ٢*(e٢*e٣-e٠*e١) e٠^٢-e١^٢-e٢^٢+e٣^٢];%XYZ-x٣y٣z٣
R٣٤ = [cos(q٧) sin(q٧) ٠;-sin(q٧) cos(q٧) ٠;٠ ٠ ١]; %x٣y٣z٣---->x٤y٤z٤
R٤٥ = [cos(q٨) ٠ -sin(q٨);٠ ١ ٠;sin(q٨) ٠ cos(q٨)]; %x٤y٤z٤---->x٥y٥z٥
R٥٦ = [cos(q٩) ٠ -sin(q٩);٠ ١ ٠;sin(q٩) ٠ cos(q٩)]; %x٥y٥z٥---->x٦y٦z٦
%coordinate jumping
R٣٥ = R٤٥*R٣٤;                                        %x٣y٣z٣---->x٥y٥z٥
R٣٦ = R٥٦*R٤٥*R٣٤;                                    %x٣y٣z٣---->x٦y٦z٦
R٤٦ = R٥٦*R٤٥;                                        %x٤y٤z٤---->x٦y٦z٦

W=٢*[-e١ e٠ e٣ -e٢;-e٢ -e٣ e٠ e١;-e٣ e٢ -e١ e٠]*[de٠;de١;de٢;de٣];
```

```
%% SATELLITE
w_sat_x٣y٣z٣ = W;
vG_sat_XYZ = [dq١;dq٢;dq٣];
vG_sat_x٣y٣z٣ = R٠٣*vG_sat_XYZ;
HG_sat_x٣y٣z٣  = I_sat_x٣y٣z٣*w_sat_x٣y٣z٣;
T_SAT = ١/٢*Ms*(vG_sat_XYZ).' * (vG_sat_XYZ)+...
        ١/٢*(w_sat_x٣y٣z٣).' * HG_sat_x٣y٣z٣;

%% LINK١
rgLINK١_G_x٣y٣z٣ = [٠;٠;c/٢+L١/٢];
w_LINK١_x٤y٤z٤ = R٣٤ * w_sat_x٣y٣z٣ + dq٧*[٠;٠;١];
vg_LINK١_x٣y٣z٣ = vG_sat_x٣y٣z٣ +
cross(w_sat_x٣y٣z٣,rgLINK١_G_x٣y٣z٣);
vg_LINK١_x٤y٤z٤ = R٣٤*vg_LINK١_x٣y٣z٣;
Hg_LINK١_x٤y٤z٤ = I_LINK١_x٤y٤z٤ * w_LINK١_x٤y٤z٤;
T_LINK١ = ١/٢*m١*(vg_LINK١_x٣y٣z٣).' * (vg_LINK١_x٣y٣z٣)+...
          ١/٢*(w_LINK١_x٤y٤z٤).' * Hg_LINK١_x٤y٤z٤;
%% joint٢
r_joint٢_x٣y٣z٣ = [٠;٠;c/٢+L١];
v_joint٢_x٣y٣z٣ = vG_sat_x٣y٣z٣ + cross(w_sat_x٣y٣z٣,r_joint٢_x٣y٣z٣);
v_joint٢_x٤y٤z٤ = R٣٤*v_joint٢_x٣y٣z٣;
%% LINK٢
rgLINK٢_G_x٥y٥z٥ = R٣٥*r_joint٢_x٣y٣z٣ + [L٢/٢;٠;٠];
w_LINK٢_x٥y٥z٥ = R٤٥*(w_LINK١_x٤y٤z٤+dq٨*[٠;١;٠]);
vg_LINK٢_x٥y٥z٥ = R٤٥ *v_joint٢_x٤y٤z٤ +
cross(w_LINK٢_x٥y٥z٥,[L٢/٢;٠;٠]);
Hg_LINK٢_x٥y٥z٥ = I_LINK٢_x٥y٥z٥ * w_LINK٢_x٥y٥z٥;
T_LINK٢ = ١/٢*m٢* (vg_LINK٢_x٥y٥z٥).' * (vg_LINK٢_x٥y٥z٥)+...
          ١/٢*(w_LINK٢_x٥y٥z٥).' * Hg_LINK٢_x٥y٥z٥;
%% joint٣
r_joint٣_x٥y٥z٥ = R٣٥*r_joint٢_x٣y٣z٣ + [L٢;٠;٠];
v_joint٣_x٥y٥z٥ = R٤٥*v_joint٢_x٤y٤z٤ +
cross(w_LINK٢_x٥y٥z٥,[L٢;٠;٠]);

%% LINK٣
w_LINK٣_x٦y٦z٦ = R٥٦*(w_LINK٢_x٥y٥z٥ + dq٩*[٠;١;٠]);
rgLINK٣_G_x٦y٦z٦ = R٥٦*(r_joint٣_x٥y٥z٥) + [L٣/٢;٠;٠];
vg_LINK٣_x٦y٦z٦ = R٥٦ * v_joint٣_x٥y٥z٥ +
cross(w_LINK٣_x٦y٦z٦,[L٣/٢;٠;٠]);
Hg_LINK٣_x٦y٦z٦ = I_LINK٣_x٦y٦z٦ * w_LINK٣_x٦y٦z٦;
T_LINK٣ = ١/٢*m٣* (vg_LINK٣_x٦y٦z٦).' * (vg_LINK٣_x٦y٦z٦)+...
          ١/٢*(w_LINK٣_x٦y٦z٦).' * Hg_LINK٣_x٦y٦z٦;

%% KINETIC AND POTENTIAL ENERGY---->LAGRANGIAN
T = T_SAT + T_LINK١ + T_LINK٢ + T_LINK٣;
V = ٠;
E=T+V;
L=T-V;
%% Generalized Coordinates
q=[q١;q٢;q٣;e٠;e١;e٢;e٣;q٧;q٨;q٩];
dq=[dq١;dq٢;dq٣;de٠;de١;de٢;de٣;dq٧;dq٨;dq٩];
%% Mass and Bias Matrixs
dL_dq = jacobian(L,q);
dL_ddq = jacobian(L,dq);

M = jacobian(dL_ddq,dq);
N = jacobian(dL_ddq,q);
A = diff(dL_ddq.',t);
B = N*dq + A - dL_dq.';
```

```
% There is no need to simplify?
% M=simplify(M);
% B=simplify(B);
%% linear and Angular Momentum
P_XYZ =
Ms*vG_sat_XYZ+m١*R٠٣.'*vg_LINK١_x٣y٣z٣+m٢*(R٣٥*R٠٣).'*vg_LINK٢_x٥y٥z٥+
m٣*(R٣٦*R٠٣).'*vg_LINK٣_x٦y٦z٦;

rGsat_XYZ = [q١;q٢;q٣];
Hsat_XYZ = R٠٣.'*HG_sat_x٣y٣z٣ + Ms*cross(rGsat_XYZ,vG_sat_XYZ);

rg_LINK١_XYZ = rGsat_XYZ + R٠٣.'*(rgLINK١_G_x٣y٣z٣);
Hg_LINK١_XYZ = (R٣٤*R٠٣).'*Hg_LINK١_x٤y٤z٤ +
m١*cross(rg_LINK١_XYZ,R٠٣.'*vg_LINK١_x٣y٣z٣);

rg_LINK٢_XYZ = rGsat_XYZ+(R٣٥*R٠٣).'*rgLINK٢_G_x٥y٥z٥;
Hg_LINK٢_XYZ = (R٣٥*R٠٣).'*Hg_LINK٢_x٥y٥z٥ +
m٢*cross(rg_LINK٢_XYZ,(R٣٥*R٠٣).'*vg_LINK٢_x٥y٥z٥);

rg_LINK٣_XYZ = rGsat_XYZ+(R٣٦*R٠٣).'*rgLINK٣_G_x٦y٦z٦;
Hg_LINK٣_XYZ = (R٣٦*R٠٣).'*Hg_LINK٣_x٦y٦z٦ +
m٣*cross(rg_LINK٣_XYZ,(R٣٦*R٠٣).'*vg_LINK٣_x٦y٦z٦);

H_XYZ = Hsat_XYZ + Hg_LINK١_XYZ + Hg_LINK٢_XYZ + Hg_LINK٣_XYZ;

%% matlabFunctions
MFunc=matlabFunction(M,'File','generate٧١\MFunc');
BFunc=matlabFunction(B,'File','generate٧١\BFunc');
PFunc=matlabFunction(P_XYZ,'File','generate٧١\PFunc');
HFunc=matlabFunction(H_XYZ,'File','generate٧١\HFunc');
EFunc=matlabFunction(E,'File','generate٧١\EFunc');

%%
t١=clock;
ti=etime(t١,t٠)/٦٠;
disp(['Quaternions Symbolic Derivation Simulation Time: ' num٢str(ti)
'(min)'])
%% END
```

code۶: Quaternions ODE45

```
function dZ=dyn_Quat(t,Z)
dZ=Z;
global a b c L١ L٢ L٣ Ms m١ m٢ m٣ Ixx Ixy Ixz Iyy Iyz Izz tav١ tav٢
tav٣ fX fY fZ

q١ = Z(١);q٢ = Z(٢);q٣ = Z(٣);e٠=Z(٤); e١=Z(٥); e٢=Z(٦); e٣=Z(٧);q٧ =
Z(٨);q٨ = Z(٩);q٩ = Z(١٠);
dq١ = Z(١١);dq٢ = Z(١٢);dq٣ = Z(١٣);de٠=Z(١٤); de١=Z(١٥); de٢=Z(١٦);
de٣=Z(١٧);dq٧ = Z(١٨);dq٨ = Z(١٩);dq٩ = Z(٢٠);

M=MFunc(Ixx,Ixy,Ixz,Iyy,Iyz,Izz,L١,L٢,L٣,Ms,c,e٠,e١,e٢,e٣,m١,m٢,m٣,q٧,
q٨,q٩);
B=BFunc(Ixx,Ixy,Ixz,Iyy,Iyz,Izz,L١,L٢,L٣,c,de٠,de١,de٢,de٣,dq١,dq٢,dq٣
,dq٧,dq٨,dq٩,e٠,e١,e٢,e٣,m١,m٢,m٣,q٧,q٨,q٩);
Q = [fX;fY;fZ;-tav١;-tav١;٠;٠;tav١;tav٢-tav٣;tav٣];
```

```
a۱=[۰ ۰ ۰ e۰ e۱ e۲ e۳ ۰ ۰ ۰];
a۱_dot=[۰ ۰ ۰ de۰ de۱ de۲ de۳ ۰ ۰ ۰];

F_aug=[-(B+Q);a۱_dot*Z(۱۱:۲۰)];
M_aug=[M -a۱.';-a۱ ۰];

dZ(۱:۱۰)=Z(۱۱:۲۰);
dzz=M_aug\F_aug;
dZ(۱۱:۲۰)=dzz(۱:۱۰);
end
```

کد مربوط به انیمیشن و رسم نمودارها:

code۷: ANIMATION PART

```
function SAT_ANIMATION(t,a,b,c,L۱,L۲,L۳,q۱,q۲,q۳,q٤,q٥,q٦,q۷,q۸,q۹)
hold on;grid on
Len=length(t);
for i=۱:Len
    R۰۱ = [cos(q٤(i)) sin(q٤(i)) ۰;-sin(q٤(i)) cos(q٤(i)) ۰;۰ ۰
۱];%XYZ----->x۱y۱z۱
    R۱۲ = [cos(q٥(i)) ۰ -sin(q٥(i));۰ ۱ ۰;sin(q٥(i)) ۰
cos(q٥(i))];%x۱y۱z۱----->x۲y۲z۲
    R۲۳ = [۱ ۰ ۰;۰ cos(q٦(i)) sin(q٦(i));۰ -sin(q٦(i))
cos(q٦(i))];%x۲y۲z۲----->x۳y۳z۳
    R۰۳ = R۲۳*R۱۲*R۰۱;
%XYZ----->x۳y۳z۳
    R۳٤ = [cos(q۷(i)) sin(q۷(i)) ۰;-sin(q۷(i)) cos(q۷(i)) ۰;۰ ۰ ۱];
%x۳y۳z۳----->x۳y۳z۳
    R٤٥ = [cos(q۸(i)) ۰ -sin(q۸(i));۰ ۱ ۰;sin(q۸(i)) ۰ cos(q۸(i))];
%x٤y٤z٤----->x٥y٥z٥
    R٥٦ = [cos(q۹(i)) ۰ -sin(q۹(i));۰ ۱ ۰;sin(q۹(i)) ۰ cos(q۹(i))];
%x٥y٥z٥----->x٦y٦z٦

    Rt۱=R۰۳.';
    Rt۲=(R٤٥*R۳٤*R۰۳).';
    Rt۳=(R٥٦*R٤٥*R۳٤*R۰۳).';
    %Satellite Corners
    P۱ = [q۱(i);q۲(i);q۳(i)]+Rt۱*۱/۲*[-b;-a;c];
    P۲ = [q۱(i);q۲(i);q۳(i)]+Rt۱*۱/۲*[b;-a;c];
    P۳ = [q۱(i);q۲(i);q۳(i)]+Rt۱*۱/۲*[-b;a;c];
    P٤ = [q۱(i);q۲(i);q۳(i)]+Rt۱*۱/۲*[b;a;c];
    P٥ = [q۱(i);q۲(i);q۳(i)]+Rt۱*۱/۲*[b;a;-c];
    P٦ = [q۱(i);q۲(i);q۳(i)]+Rt۱*۱/۲*[b;-a;-c];
    P۷ = [q۱(i);q۲(i);q۳(i)]+Rt۱*۱/۲*[-b;a;-c];
    P۸ = [q۱(i);q۲(i);q۳(i)]+Rt۱*۱/۲*[-b;-a;-c];
    %Manipulators Joints
    J۱ = [q۱(i);q۲(i);q۳(i)]+Rt۱*[۰;۰;c/۲];
    J۲ = [q۱(i);q۲(i);q۳(i)]+Rt۱*[۰;۰;c/۲+L۱];
    J۳ = J۲+Rt۲*[۰;L۲;۰];
    END = J۳+Rt۳*[۰;L۳;۰];
    %
    V۱۲ = [P۱,P۲]; V۱۳ = [P۱,P۳]; V۲٤ = [P۲,P٤]; V۳٤ = [P۳,P٤];
    V٤٥ = [P٤,P٥]; V٥٦ = [P٥,P٦]; V٥۷ = [P٥,P۷]; V۷۸ = [P۷,P۸];
    V۱۸ = [P۱,P۸]; V۳۷ = [P۳,P۷]; V۲٦ = [P۲,P٦]; V۸٦ = [P۸,P٦];
    %
    VJ۱J۲ = [J۱,J۲];
    VJ۲J۳ = [J۲,J۳];
```

```
    VJ٣END = [J٣,END];
    %
plot٣(V١٢(١,:),V١٢(٢,:),V١٢(٣,:),'b','linewidth',٥);title('MANIPULATOR
ON SATTELITE')
    xlabel('Xg');ylabel('Yg');zlabel('Zg');
    hold on;grid on
    plot٣(V١٣(١,:),V١٣(٢,:),V١٣(٣,:),'b-','linewidth',٥)
    plot٣(V٢٤(١,:),V٢٤(٢,:),V٢٤(٣,:),'b-','linewidth',٥)
    plot٣(V٣٤(١,:),V٣٤(٢,:),V٣٤(٣,:),'b-','linewidth',٥)
    plot٣(V٤٥(١,:),V٤٥(٢,:),V٤٥(٣,:),'b-','linewidth',٥)
    plot٣(V٥٦(١,:),V٥٦(٢,:),V٥٦(٣,:),'b-','linewidth',٥)
    plot٣(V٥٧(١,:),V٥٧(٢,:),V٥٧(٣,:),'b-','linewidth',٥)
    plot٣(V٧٨(١,:),V٧٨(٢,:),V٧٨(٣,:),'b-','linewidth',٥)
    plot٣(V١٨(١,:),V١٨(٢,:),V١٨(٣,:),'b-','linewidth',٥)
    plot٣(V٣٧(١,:),V٣٧(٢,:),V٣٧(٣,:),'b-','linewidth',٥)
    plot٣(V٢٦(١,:),V٢٦(٢,:),V٢٦(٣,:),'b-','linewidth',٥)
    plot٣(V٨٦(١,:),V٨٦(٢,:),V٨٦(٣,:),'b-','linewidth',٥)
    plot٣(V٢٦(١,:),V٢٦(٢,:),V٢٦(٣,:),'b-','linewidth',٥)
    plot٣(V٤٥(١,:),V٤٥(٢,:),V٤٥(٣,:),'b-','linewidth',٥)

    plot٣(VJ١J٢(١,:),VJ١J٢(٢,:),VJ١J٢(٣,:),'r-','linewidth',٤)
    plot٣(VJ٢J٣(١,:),VJ٢J٣(٢,:),VJ٢J٣(٣,:),'g-','linewidth',٣)
    plot٣(VJ٣END(١,:),VJ٣END(٢,:),VJ٣END(٣,:),'y-','linewidth',٢)

    axis equal
    axis([q١(i)-٢*a  (q١(i)+٢*a)  (q٢(i)-٢*a)  (q٢(i)+٢*a)   (q٣(i)-٢*a)
(q٣(i)+٢*a)])
    str=['Time = ',num٢str(t(i))];
    text(q١(i)+a,q٢(i)-a,q٣(i)-٢*a,str)

    hold off
    pause(٠,٠١)
end
end
```

code٨ : plot part

```
functionplotter(str,t,q١,q٢,q٣,q٤,q٥,q٦,q٧,q٨,q٩,ER,LM_x,LM_y,LM_z,AM_
x,AM_y,AM_z)
    figure
    hold on;grid on
    plot(t,q١,'b-','linewidth',٢)
    plot(t,q٢,'r-','linewidth',٢)
    plot(t,q٣,'g--','linewidth',٢)
    legend('X','Y','Z')
    set(gca,'fontsize',٨,'fontweight','bold');
    xlabel('Time (s)','fontsize',١٠,'fontweight','bold');
    ylabel('Satellite Global Position
(m)','fontsize',١٠,'fontweight','bold');
    title(str,'fontsize',١٢)

    figure
    hold on;grid on
    plot(t,q٤,'b-','linewidth',٢)
    plot(t,q٥,'r-','linewidth',٢)
    plot(t,q٦,'g-','linewidth',٢)
    legend('\psi','\theta','\phi')
```

```
    set(gca,'fontsize',٨,'fontweight','bold');
    xlabel('Time (s)','fontsize',١٠,'fontweight','bold');
    ylabel('Satellite Euler Angles
(rad)','fontsize',١٠,'fontweight','bold');
    title(str,'fontsize',١٢)

    figure
    hold on;grid on
    plot(t,q٧,'b-','linewidth',٢)
    plot(t,q٨,'r-','linewidth',٢)
    plot(t,q٩,'g-','linewidth',٢)
    legend('\theta_١','\theta_٢','\theta_٣')
    set(gca,'fontsize',٨,'fontweight','bold');
    xlabel('Time (s)','fontsize',١٠,'fontweight','bold');
    ylabel('Manipulator link Angles
(rad)','fontsize',١٠,'fontweight','bold');
    title(str,'fontsize',١٢)

    if ER ~= '~'
        figure
        grid on
        plot(t,ER,'g-','linewidth',٢)
        set(gca,'fontsize',٨,'fontweight','bold');
        xlabel('Time (s)','fontsize',١٠,'fontweight','bold');
        ylabel('Mechanical Energy Error
(J)','fontsize',١٠,'fontweight','bold');
        title(str,'fontsize',١٢)
    end
    if LM_x ~= '~'
        figure
        hold on;grid on
        plot(t,(LM_x-LM_x(١))/LM_x(١)*١٠٠,'b-','linewidth',٢)
        plot(t,(LM_y-LM_y(١))/LM_y(١)*١٠٠,'r-','linewidth',٢)
        plot(t,(LM_z-LM_z(١))/LM_z(١)*١٠٠,'g--','linewidth',٢)
        set(gca,'fontsize',٨,'fontweight','bold');
        ylabel('Relative Error of Linear Momentum %
','fontsize',١٠,'fontweight','bold');
        xlabel('Time (s)','fontsize',١٠,'fontweight','bold');
        legend('P_X','P_Y','P_Z')
        title(str,'fontsize',١٢)
    end
    if AM_x ~= '~'
        figure
        hold on;grid on
        plot(t,(AM_x-AM_x(١))/AM_x(١)*١٠٠,'b-','linewidth',٢)
        plot(t,(AM_y-AM_y(١))/AM_y(١)*١٠٠,'r-','linewidth',٢)
        plot(t,(AM_z-AM_z(١))/AM_z(١)*١٠٠,'g-','linewidth',٢)
        set(gca,'fontsize',٨,'fontweight','bold');
        ylabel('Relative Error of Angular Momentum %
','fontsize',١٠,'fontweight','bold');
        xlabel('Time (s)','fontsize',١٠,'fontweight','bold');
        legend('H_X','H_Y','H_Z')
        title(str,'fontsize',١٢)
    end
end
```

پیوست ۵ :AUGMENTED METHOD

- معادلات و قیود حاکم بر سیستم:

$$\begin{cases}[M]_{m*m}\{\ddot{q}\}_{m*۱} = \{F\}_{m*۱} + [a]^T_{m*r}\{\lambda\}_{r*۱} \\ -[a]_{r*m}\{\ddot{q}\}_{m*۱} = [\dot{a}]_{r*m}\{\dot{q}\}_{m*۱} + \{\dot{b}\}_{r*۱}\end{cases}$$

- مشتقات اول و دوم مختصات های تعمیم یافته:

$$\{\dot{Z}\} = \begin{Bmatrix}\{\dot{q}\}_{m*۱} \\ \{\ddot{q}\}_{m*۱}\end{Bmatrix}$$

- فرم ماتریسی معادلات همراه با قیود:

$$\begin{bmatrix}[M]_{m*m} & -[a]^T_{m*r} \\ -[a]^T_{m*r} & [۰]_{m*m}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\{\ddot{q}\}_{m*۱} \\ \{\lambda\}_{r*۱}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\{F\}_{m*۱} \\ [\dot{a}]_{r*m}\{\dot{q}\}_{m*۱} + \{\dot{b}\}_{r*۱}\end{bmatrix}$$

- فرم ساده شده ماتریسی:

$$[M_{Aug}]\begin{bmatrix}\{\ddot{q}\}_{m*۱} \\ \{\lambda\}_{r*۱}\end{bmatrix} = \{F_{Aug}\} \rightarrow \begin{bmatrix}\{\ddot{q}\}_{m*۱} \\ \{\lambda\}_{r*۱}\end{bmatrix} = [M_{Aug}]\backslash\{F_{Aug}\}$$

- در نهایت مجهولات سیستم به صورت زیر به ست می آیند:

$$\{Z\}_{۲m} = \begin{Bmatrix}Z(m+۱:۲m) \\ \{\ddot{q}\}_{m*۱}\end{Bmatrix}$$

در این روش باید ماتریس های (۲m+r)*(۲m+r) حل گردد و با استفاده ازاین روش همانند روش قبل میتوان بردارهای حالت و ضرایب لاگرانژ را بدست اورد. ولی زمان انجام محاسبات نسبت به دیگر روش ها مثل INTEGRATED MULTIPLIER METHOD و ELEMINATION METHOD کمتر است.

Sharif University of Technology
(Mechanical Engineering)

Simulation of ٣Dof Manipulator on ٦Dof Satellite

By:
Iman sharifi

Supervisor:
Dr. nejat

January/٢٠٢٠