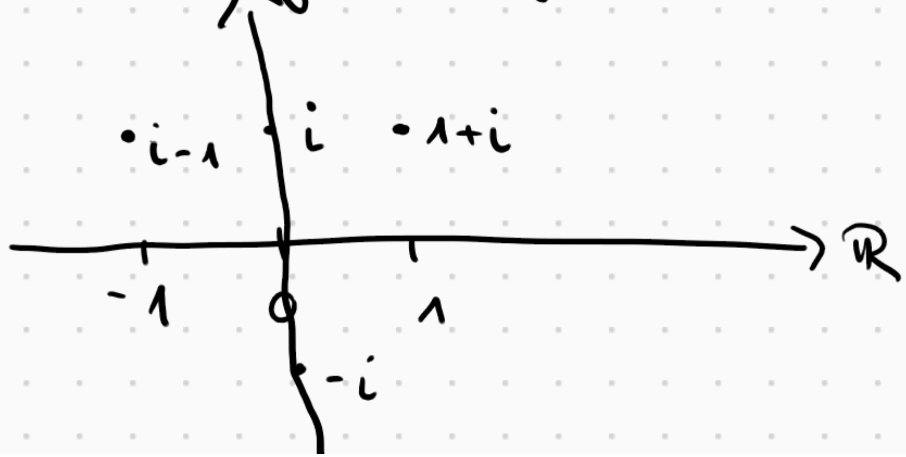
Komplexe Zahlen

Die quadratische Gleichung $x^2+1=0$ hat keine Lösung.

Doch!?? Noch mal exakter

Die quad. Gl. $x^2+1=0$ hat keine Lsg ($\mathbb{L}=\emptyset$) über der Grundmenge $\mathbb{R}$. [denn: $\forall x\in\mathbb{R}: x^2\geq 0 \Longrightarrow \forall x\in\mathbb{R}: x^2+1\geq 1$]

Wir nehmen uns trotzdem eine Lsg der Gleichung, nennen sie „i" $\notin \mathbb{R}$.



Mit $i\cdot i = i^2 = -1$,

Nehme i zu $\mathbb{R}$ dazu, und damit ganz $\mathbb{R} + i\mathbb{R}$

Definition

Die Gaußsche Zahlenebene ist die Ebene der komplexen Zahlen

$$\mathbb{C} = \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Sie enthält die reellen Zahlen $\mathbb{R} = \{a + ib \mid a \in \mathbb{R}, b = 0\}$.
Wir setzen die Addition „$+$" und die Multiplikation „$\cdot$" von $\mathbb{R}$ assoziativ, kommutativ und distributiv fort auf $\mathbb{C}$.

i: imaginäre Einheit $\qquad (a, b, c, d \in \mathbb{R})$

$$(a+ib) + (c+id) = a + c + ib + id = \underbrace{(a+c)}_{\in \mathbb{R}} + i\underbrace{(b+d)}_{\in \mathbb{R}} \in \mathbb{C}$$

$$(a+ib) + (-a-ib) = a - a + i(b-b) = 0 + i \cdot 0 = \underline{\underline{0}}$$

$$(a+ib)\cdot(c+id) = a \cdot c + a \cdot i \cdot d + ib \cdot c + ib \cdot id$$

$$= a \cdot c + \underbrace{i^2}_{-1} bd + i(ad + bc)$$

$$= \underbrace{(ac - bd)}_{\mathbb{R}} + i\,(\underbrace{ad + bc}_{\mathbb{R}}) \in \mathbb{C}.$$

Wenn $a+ib \neq 0$ (d.h. $a \neq 0$ oder $b \neq 0$), gibt es dann $(a+ib)^{-1} \in \mathbb{C}$?

Rechne $\underbrace{(a+ib)(a-ib)} = a^2 - (ib)^2 = a^2 - \underbrace{i^2}_{-1} b^2 = a^2 - (-1)b^2 = \underbrace{a^2+b^2}_{\in \mathbb{R}\setminus\{0\}} > 0$

$$(a^2+b^2 \neq 0) \Rightarrow (a+ib) \cdot \underbrace{\frac{a-ib}{a^2+b^2}}_{(a+ib)^{-1}} = 1$$

Ist $z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$, dann ist

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{z \cdot \bar{z}}$$

Bemerkung

Es seien $a, b \in \mathbb{R}$, und es sei $i \in \mathbb{C}$ die imaginäre Einheit und $z = a + ib \in \mathbb{C}$.

- Die Zahl $\overline{z} := a - ib$ heißt die zu z konjugiert komplexe Zahl.
- a heißt Realteil von z, und b heißt Imaginärteil.
- Ist $a = 0$, so heißt $z = ib$ rein imaginär.

Bsp.:

- $z = 1+i \Rightarrow \bar{z} = 1-i$, $z^{-1} = \dfrac{1-i}{1+1} = \dfrac{1-i}{2}$
- $5^{-1} = \dfrac{5}{5\cdot 5} = \dfrac{1}{5}$, $\bar{5} = 5$; • $i^{-1} = \dfrac{-i}{i\cdot(-i)} = \dfrac{-i}{-i^2} = \dfrac{-i}{-(-1)} = -i$

<u>Satz:</u> Die komplexen Zahlen bilden einen Körper.

- $(5+i\pi)+(-13+i)=(5-13)+i(\pi+1)=-8+i(\pi+1)$

- $\dfrac{5+3i}{1-2i}=(5+3i)(1-2i)^{-1}=(5+3i)\cdot\dfrac{(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)}$

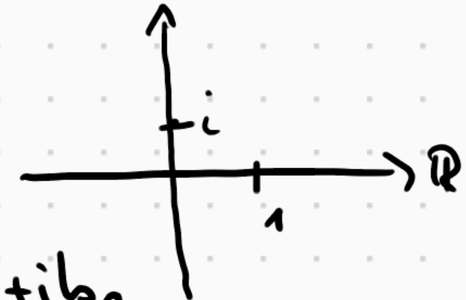
möchte das in der Form $a+ib$

$$=\frac{(5+3i)\cdot(1+2i)}{1^2+2^2}=\frac{5+3i+10i+6\overset{=-1}{i^2}}{5}=\frac{-1+i\cdot 13}{5}$$

$$=-\frac{1}{5}+i\cdot\frac{13}{5}\quad //$$

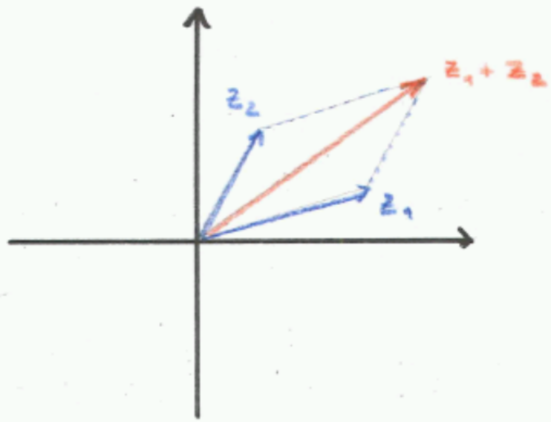
Komplexe Zahlen 2

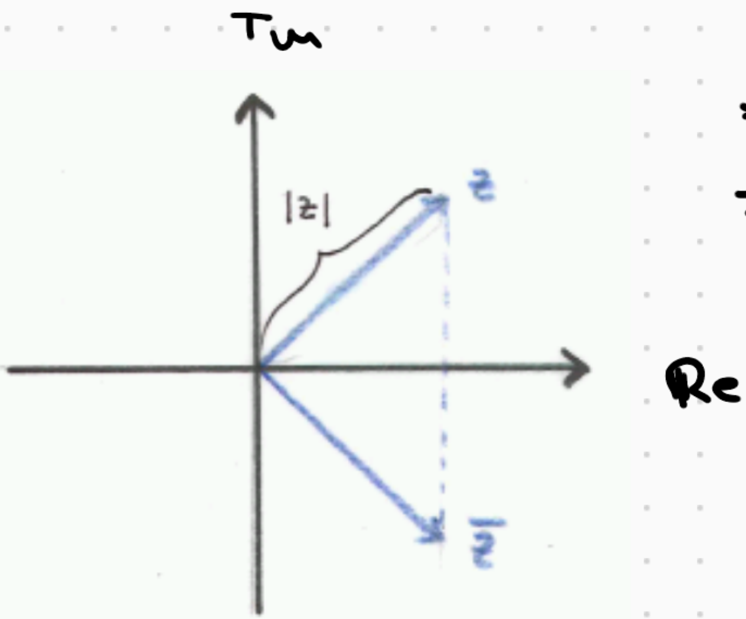
$\mathbb{C} = \{ a + ib \mid a, b \in \mathbb{R} \}$ komplexen Zahlen.



$z_1 = a_1 + ib_1, \; z_2 = a_2 + ib_2$

$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$





$z = a + ib$

$\bar{z} = a - ib$

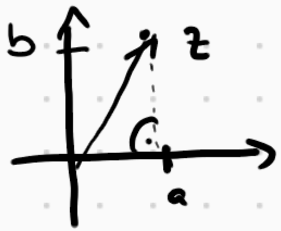
Definition

Der Betrag einer komplexen Zahl $z = a + ib \in \mathbb{C}$ $(a, b \in \mathbb{R})$ ist seine Euklidische Länge

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Der Betrag hat die folgenden Eigenschaften für alle $z, w \in \mathbb{C}$:

- $|z| \geq 0$, und $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$,
- $|z + w| \leq |z| + |w|$,
- $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$,
- $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$.



Dreiecksungleichung

Insbes.: $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$. $z = a+ib,\ w = c+id$

$|z\cdot w| = |(a+ib)\cdot(c+id)| = |ac - bd + i(bc+ad)|$

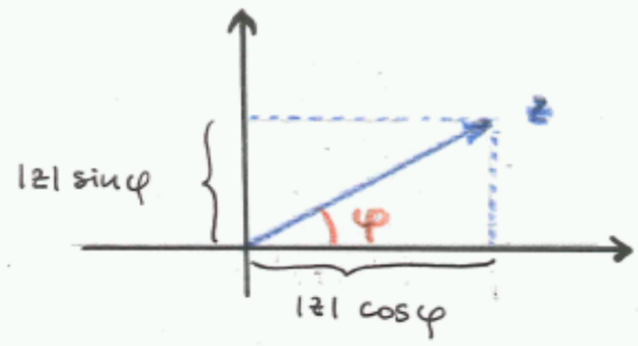
$= \sqrt{(ac-bd)^2 + (bc+ad)^2} = \sqrt{a^2c^2 - 2abcd + b^2d^2 + b^2c^2 + 2abcd + a^2d^2}$

andererseits: $|z|\cdot|w| = \sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{c^2+d^2} = \sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}$

$= \sqrt{a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2} = |z\cdot w|$ //

Polarkoordinaten

Ein Punkt $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ der komplexen Ebene wird eindeutig festgelegt durch seine Länge $|z|$ zusammen mit dem Winkel $\varphi \in (-\pi, \pi]$. Der Winkel φ heißt das **Argument** $\varphi = \arg(z)$ von z.



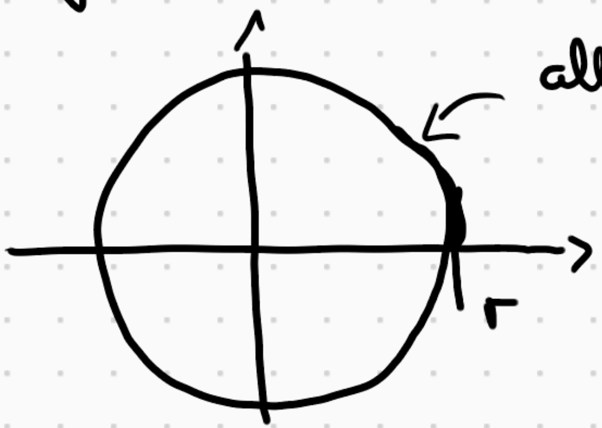
$$z = |z| \, (\cos\varphi + i \sin\varphi)$$

$$z = a + ib$$

$$\cos\varphi = \frac{a}{|z|}, \quad \sin\varphi = \frac{b}{|z|}$$

Bsp: i: $|i| = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1$

$$\arg(i) = \frac{\pi}{2}$$



alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = r > 0$ liegen auf der Kreislinie

$z = |z| \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $\quad w = |w| \cdot (\cos\psi + i \sin\psi)$

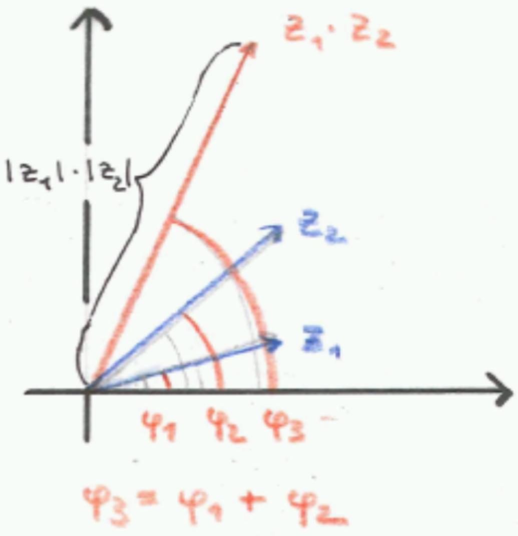
$$\Rightarrow \quad z\cdot w = |z|\cdot|w|\cdot\left(\cos\varphi\cdot\cos\psi + i\cos\varphi\cdot\sin\psi + i\sin\varphi\cos\psi + i^2\sin\varphi\sin\psi\right)$$

$$= |z|\cdot|w|\cdot\Big(\underbrace{\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi}_{\cos(\varphi+\psi)} + i\,(\underbrace{\cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi}_{\sin(\varphi+\psi)})\Big)$$

Additions-theoreme

$$= |z\cdot w| \cdot \left(\cos(\varphi+\psi) + i\sin(\varphi+\psi)\right)$$

Multipliziert man zwei komplexe Zahlen, dann multipliziert man ihre Beträge und man addiert ihre Argumente.



$\varphi + \psi \overset{?}{\in} (-\pi, \pi]$. Falls nicht: Addiert/subtrahiert 2π, um das Argument von $z\cdot w$ zu erhalten.

Komplexe Zahlen 3

Quadratwurzeln In $\mathbb{C}$ hat $x^2+1=0$ die Lösung $\mathbb{L}=\{i,-i\}$

Analog gilt für $a>0$: In $\mathbb{C}$ hat $x^2+a=0$ die Lsg $\mathbb{L}=\{i\sqrt{a},-i\sqrt{a}\}$, denn $(\pm i\sqrt{a})^2=i^2a=-a$

Die quadratische Gleichung $x^2+px+q=0$ hat über $\mathbb{R}$ die Nullstellen

$$-\frac{p}{2}+\sqrt{D} \text{ und } -\frac{p}{2}-\sqrt{D},$$

falls die Diskriminante $D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q\geq 0$.
Nun betrachte den Fall $D<0$: Wie eben finden wir zwei Quadratwurzeln aus D in den komplexen Zahlen, nämlich $i\sqrt{|D|}$ und $-i\sqrt{|D|}$.

$$\left(\pm i\sqrt{|D|}\right)^2=i^2\cdot|D|=(-1)(-D)=D$$

-1-

Behauptung: Die komplexen Zahlen

$$z_1 = -\frac{p}{2} + i\sqrt{|D|} \text{ und } z_2 = -\frac{p}{2} - i\sqrt{|D|}$$

sind Lösungen der quadratischen Gleichung $x^2 + px + q = 0$.

<u>Beweis:</u> $z_{1/2}^2 + p z_{1/2} + q = \left(-\frac{p}{2} \pm i\sqrt{|D|}\right)^2 + p\left(-\frac{p}{2} \pm i\sqrt{|D|}\right) + q$

$$= \frac{p^2}{4} \mp 2 \cdot \cancel{\frac{p}{2} \cdot i\sqrt{|D|}} + i^2|D| - \frac{p^2}{2} \pm i\,\cancel{p\sqrt{|D|}} + q$$

$$= -\frac{p^2}{4} \underbrace{-|D|}_{=+D<0} + q = -\frac{p^2}{4} + \left(\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q\right) + q = 0$$

$\square$

Fazit: Über der Grundmenge $\mathbb{C}$ hat jedes quadratische Polynom $x^2 + px + q$ zwei Nullstellen $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, (die zusammenfallen können). Es gilt

$$x^2 + px + q = (x - z_1) \cdot (x - z_2).$$

„Quad.wurzel" aus $D<0$: $\pm i\sqrt{|D|}$ ← reelle Quadratwurzel

Moralisch: "$\cancel{i\sqrt{|D|} = \sqrt{-D}}$"

Warnung: Die Potenzgesetze gelten nur für reelle positive Basen.
Für negative oder komplexe Basen treten früher oder später Fehler auf, die aus den Argumenten arg der Zahlen resultieren.

Bsp: $\sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = i \cdot i = -1$

$\neq$

aber $\sqrt{(-1)^2} = \sqrt{1} = 1$

Satz (Hauptsatz der Algebra)

Sei

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

ein Polynom n-ten Grades mit komplexen Koeffizienten $a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0 \in \mathbb{C}$.

Dann gibt es n komplexe Zahlen $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ (die nicht notwendig alle verschieden sind) so, dass

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = (x - z_1)(x - z_2) \cdots (x - z_n).$$

Insbesondere hat jedes Polynom n-ten Grades über $\mathbb{C}$ genau die Nullstellen $z_1, \ldots, z_n$.

„Das Buch der Beweise" Aigner/Ziegler