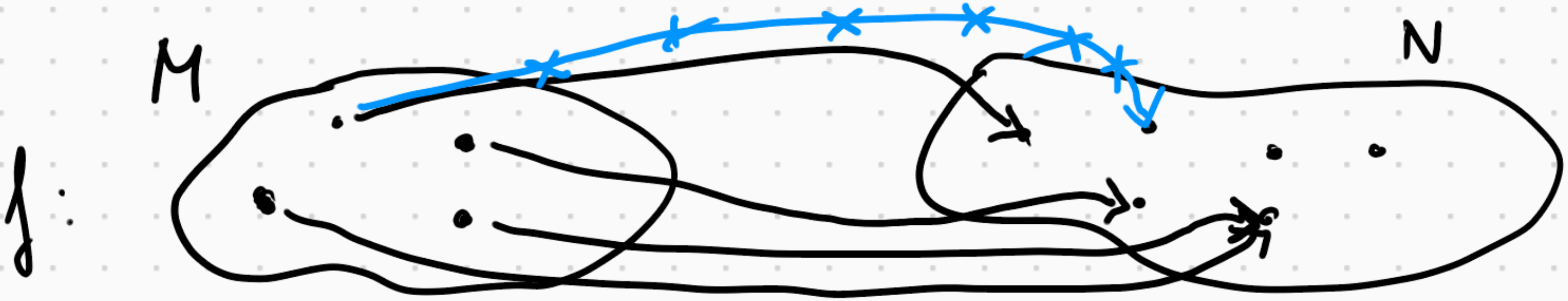
Abbildungen (= Funktionen)

Definition

Seien M, N beliebige, nicht leere Mengen.
Eine **Abbildung** $f : M \to N$ ist eine Vorschrift, die jedem $x \in M$ **genau ein** Element $f(x) \in N$ zuordnet.
Die Menge M heißt Definitionsbereich von f.
Die Menge N heißt Zielbereich von f.
Die Menge $f(M) = \{y \in N \mid \exists x \in M : f(x) = y\} \subset N$ heißt das **Bild** von f [auch: $\mathrm{Bild}(f)$, Wertebereich].



In der Schule: $f(x) = x^2$

<u>Bsp</u>: $f: \{1, 2, 3\} \longrightarrow \{1, 2, 3\}$

$$\begin{aligned} 1 &\longmapsto 3 \\ 2 &\longmapsto 2 \\ 3 &\longmapsto 1 \end{aligned}$$

<u>Bsp</u>: Die "Identität" $f(x) = x$ kann man für jede Menge $M \neq \emptyset$ definieren.

$$f: M \to M, \quad x \longmapsto x \quad \Big| \quad f = id_M$$

Bsp: Ist als Fkt nur $f(x) = \frac{1}{x^2-9}$ angegeben, dann ist wohl gemeint

$$f: \mathbb{R} \setminus \{-3,3\} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{1}{x^2-9}$$

$x = -3, -3$

<u>Bsp</u>: Zuordnung $g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \sqrt{x}$ ist <u>keine</u> Abbildung!

Weil $\sqrt{x}$ für negative Zahlen x nicht definiert ist.

Erst $\tilde{g}: \mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \sqrt{x}$ <u>ist</u> eine Abb.

Grundlegende Eigenschaften von Funktionen

Definition

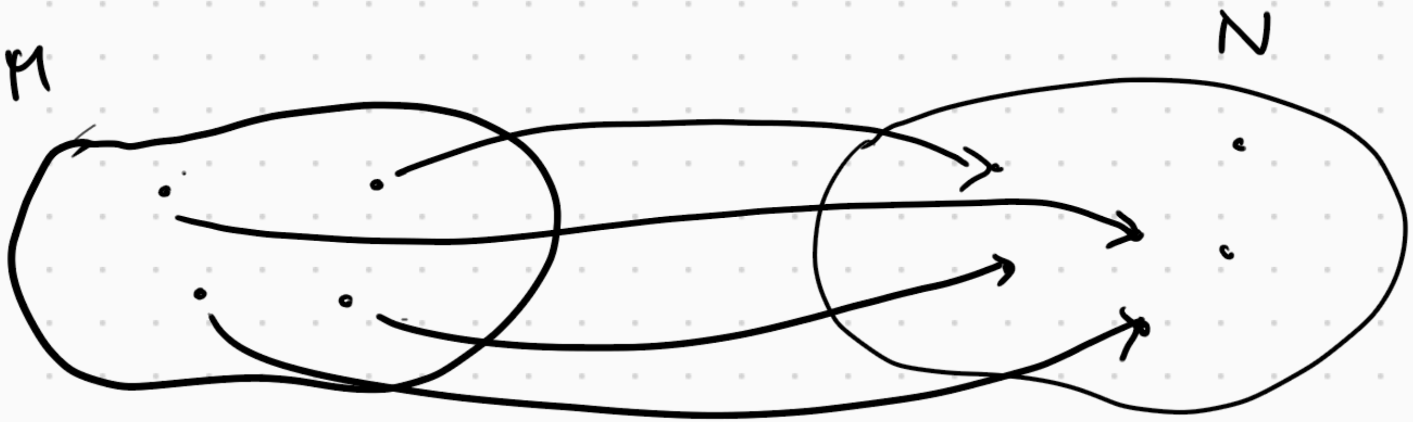
Sei $f : M \to N$ eine Abbildung.

(i) f heißt **injektiv**, wenn aus $f(x) = f(y)$ stets folgt $x = y$.

(ii) f heißt **surjektiv**, wenn das Bild von f ganz N ist, $f(M) = N$. Das heißt, wenn gilt: $\forall y \in \mathbb{N} \exists x \in M : f(x) = y$.

(iii) f heißt **bijektiv**, wenn f sowohl injektiv als auch surjektiv ist.

f :



Definition

Sei $f : M \to N$ eine Abbildung.

(i) f heißt **injektiv**, wenn aus $f(x) = f(y)$ stets folgt $x = y$.

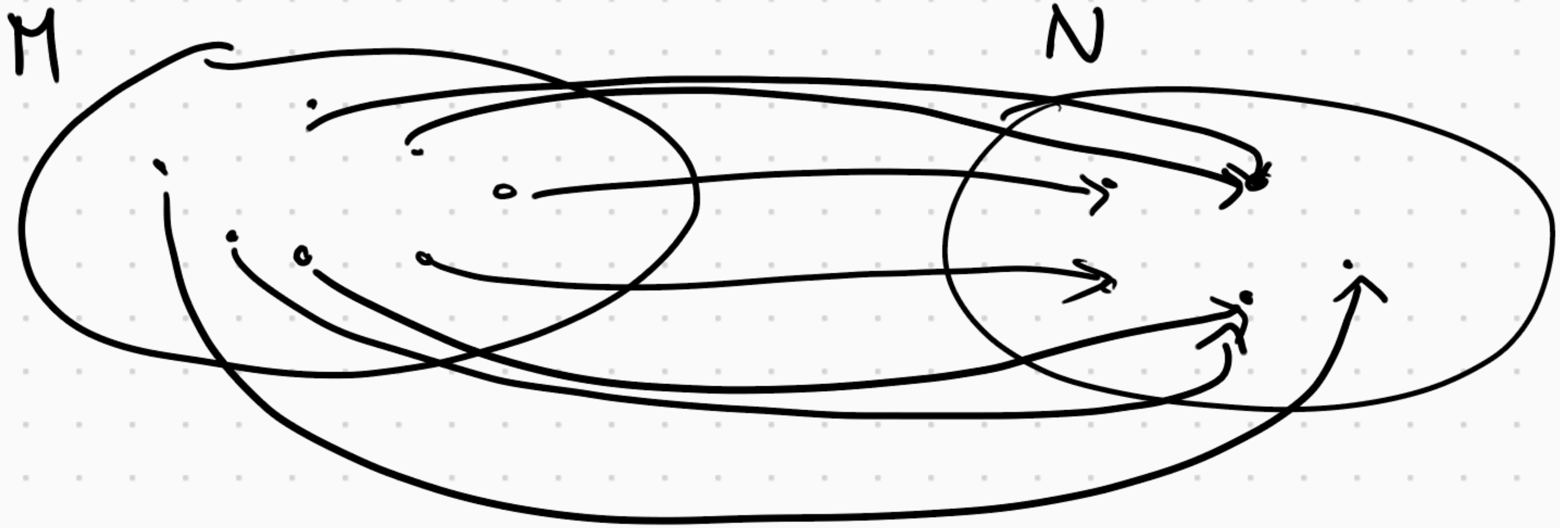
(ii) f heißt **surjektiv**, wenn das Bild von f ganz N ist, $f(M) = N$. Das heißt, wenn gilt: $\forall y \in \mathbb{N} \exists x \in M : f(x) = y$.

(iii) f heißt **bijektiv**, wenn f sowohl injektiv als auch surjektiv ist.

N

<u>surjektiv</u>

$f :$



Definition

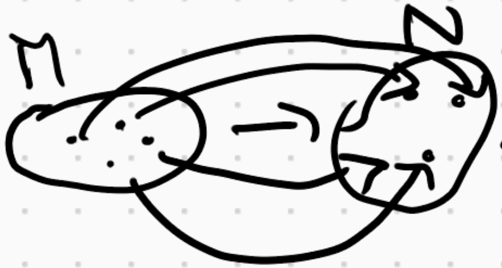
Sei $f : M \to N$ eine Abbildung.

(i) f heißt **injektiv**, wenn aus $f(x) = f(y)$ stets folgt $x = y$.

(ii) f heißt **surjektiv**, wenn das Bild von f ganz N ist, $f(M) = N$. Das heißt, wenn gilt: $\forall y \in \mathbb{N} \exists x \in M : f(x) = y$.

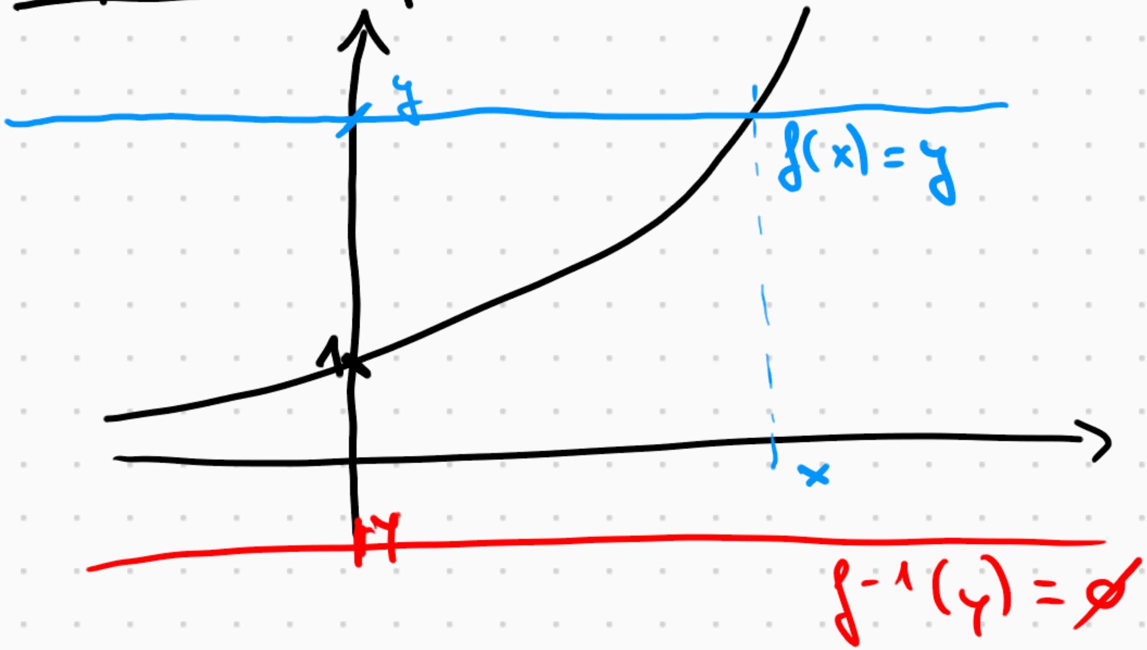
(iii) f heißt **bijektiv**, wenn f sowohl injektiv als auch surjektiv ist.

<u>bijektiv</u>: Jedem $x \in M$ wird genau ein $y \in N$ zugeordnet.



- Zu jedem $y \in N$ ex. ein $x \in M$ mit $f(x) = y$. (surj.)
- Ist $x_1 \neq x_2$ $(x_1, x_2 \in M)$, dann ist $f(x_1) \neq f(x_2)$

Bsp (i): $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto e^x$



injektiv

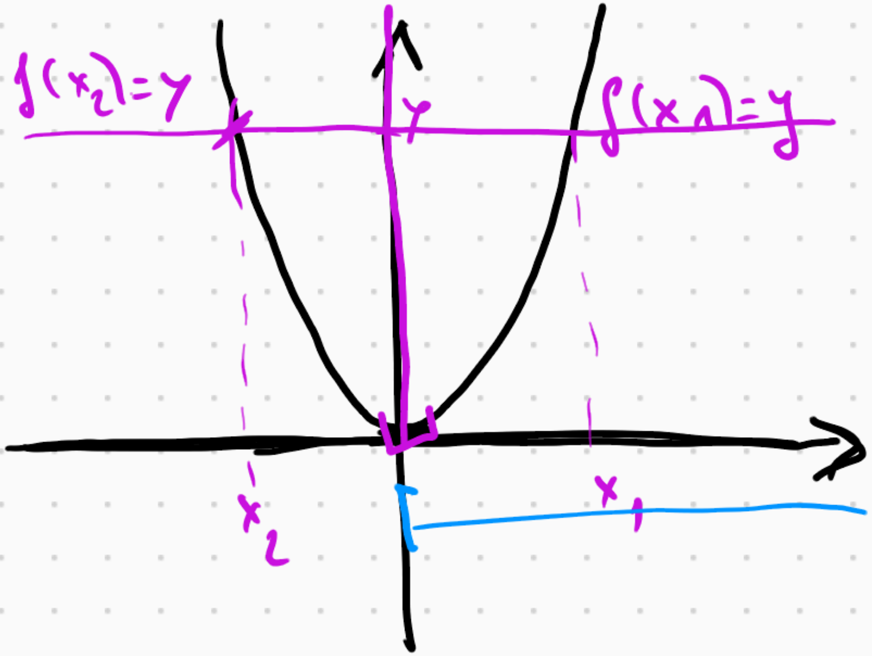
nicht surjektiv

Urbild(menge)

$$f^{-1}(y) \overset{\text{Def}}{=} \{x \in M \mid f(x) = y\}$$

-5-

Bsp (iv) $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$
$x \longmapsto x^2$



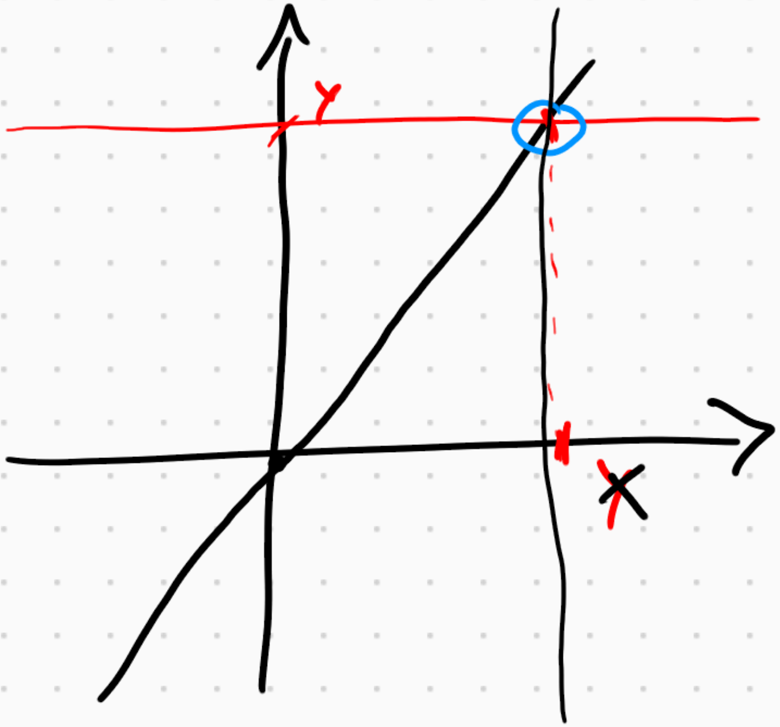
f ist surjektiv

[$\tilde{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \longmapsto x^2$ ist <u>nicht</u> surjektiv]

Für $y>0$: $f^{-1}(y) = \{x_1, x_2\}$
d.h. f ist <u>nicht</u> injektiv.

[$\tilde{\tilde{f}}: \mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto x^2$ ist injektiv.]

Bsp: $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \; x \longmapsto x$



$$\left.\begin{array}{l} \bullet \ \text{surjektiv} \\ \bullet \ \text{injektiv} \end{array}\right\} \Rightarrow f \ \text{bijektiv}$$

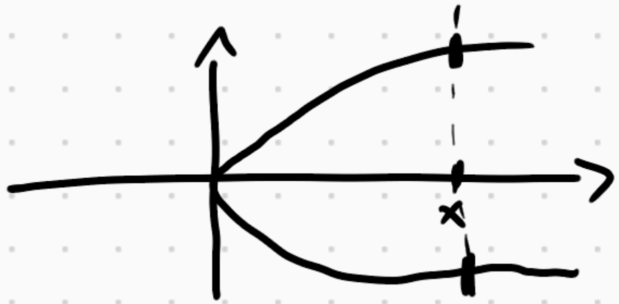
Definition

Der **Graph** einer Funktion $f : M \to N$ ist formal definiert als die Menge

$$\mathrm{Graph(f)} = \{(x, f(x)) \mid x \in M\} \subsetneq M \times N.$$

Teilmenge ist echt, weil eine Fkt eine eindeutige Zuordnung ist.

[Ausnahme: $\# N = 1$, d. h. N ist 1-elementig.]



ist <u>nicht</u> Graph einer Fkt.

Komposition

Eine Fkt verarbeitet Eingabedaten:

$$f : M \longrightarrow N$$

Eingabe Ausgabe

weiterverarbeiten durch

$$g : N \longrightarrow P$$

Definition

Es seien $f : M \to N$ und $g : N \to P$ zwei Abbildungen. Die **Komposition** von f und g ist die Abbildung

$$\begin{aligned} g \circ f \ &: M \to P \\ x &\mapsto g(f(x))\,. \end{aligned}$$

Bsp: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sqrt{x^2+3}$

f ist folgende Komposition von Flten:

$g_1: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad x \longmapsto x^2$

$g_2: \mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}_{>0}, \quad x \longmapsto x+3$

$g_3: \mathbb{R}_{>0} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \sqrt{x}$

$$g_3 \circ g_2 \circ g_1 : x \stackrel{g_1}{\longmapsto} x^2 \stackrel{g_2}{\longmapsto} x^2+3 \stackrel{g_3}{\longmapsto} \sqrt{x^2+3},$$

also $f(x) = g_3 \circ g_2 \circ g_1 (x) = g_3\big(g_2(g_1(x))\big) = \sqrt{x^2+3}$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

Beachte: Damit die Verkettung $g \circ f$ wohldefiniert ist ($f: M \to N$, $g: \tilde{N} \to P$) reicht es, dass $f(M) \subseteq \tilde{N}$.

Bsp: $f: \mathbb{R} \setminus \{-1, +1\} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \dfrac{1}{x^2-1}$

$g_1: \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\} \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{1\}, \quad x \longmapsto x^2$

$g_2: \mathbb{R} \setminus \{1\} \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad x \longmapsto x - 1$

$g_3: \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \dfrac{1}{x}$

$$g_3 \circ g_2 \circ g_1: \; x \xmapsto{g_1} x^2 \xmapsto{g_2} x^2 - 1 \xmapsto{g_3} \frac{1}{x^2-1}$$

D.h. $f = g_3 \circ g_2 \circ g_1$.

Umkehrabbildung

Satz

Ist $f : M \to N$ eine bijektive Abbildung, dann ist f „eineindeutig“, d.h.

- zu jedem $x \in M$ gibt es genau ein $f(x) \in N$,
- zu jedem $y \in N$ gibt es genau ein $x \in M$ mit $f(x) = y$.

Eigenschaft der Fkt.

weil f injektiv, existiert höchstens ein solches x

weil f surjektiv, existiert wirklich immer ein Urbild x zu y, $f^{-1}(y) = x$.

Drehe Zuordnung um, $g : N \to M$, $y \mapsto f^{-1}(y) = x$

Dann ist g eine Fkt!

Verkette f und g:

$g \circ f : M \to M, \quad x \overset{f}{\longmapsto} f(x) \overset{g}{\longmapsto} f^{-1}(f(x)) = x$

d.h. $g \circ f = \mathrm{id}_M$.

$f \circ g : N \to N, \quad y \overset{g}{\longmapsto} f^{-1}(y) \longmapsto f(f^{-1}(y)) = y$

d.h. $f \circ g = \mathrm{id}_N$.

-2-

Definition

Ist $f : M \to N$ eine Abbildung, dann heißt eine Funktion $g : N \to M$ **Umkehrabbildung** von f, wenn gilt

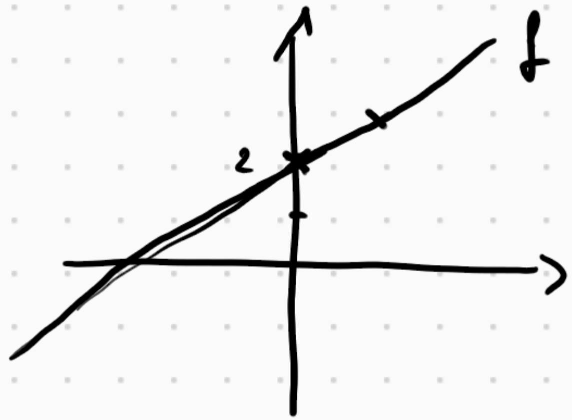
$$g \circ f = \mathrm{id}_M \text{ und } f \circ g = \mathrm{id}_N.$$

Bemerkung

Eine Umkehrabbildung zu f existiert nur, wenn f bijektiv ist.
Wenn sie existiert, dann ist sie eindeutig bestimmt.

Bsp: $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto x+2$

f ist bijektiv.



Denn für $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ gilt

$$f(x_1) = f(x_2)$$
$$\Leftrightarrow \quad x_1 + 2 = x_2 + 2 \qquad \mid -2$$
$$\Leftrightarrow \quad x_1 = x_2,$$ also f injektiv.

Für $y \in \mathbb{R}$ gilt $f(y-2) = y-2+2 = y$, also ist f surjektiv.

$g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \; y \longmapsto y-2$ ist die Umkehrabbildung, denn:

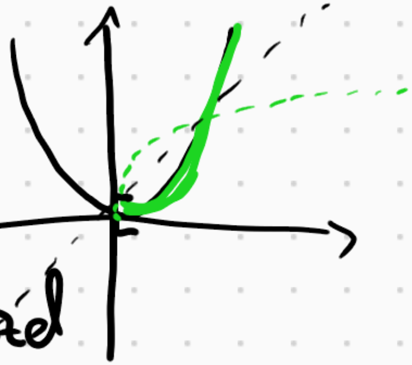
- $g \circ f(x) = g(x+2) = x+2-2 = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
- $f \circ g(y) = f(y-2) = y-2+2 = y$ für alle $y \in \mathbb{R}$, $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$, $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$.

Bsp: $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0} \quad x \longmapsto x^2$

f ist bijektiv.

Ihre Umkehrabbildung ist Quadratwurzel

$g : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad x \longmapsto \sqrt{x}$



Bemerkung

Der Graph von $f : M \to N$ ist

$$\mathrm{Graph}(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in M\} \subset M \times N.$$

Der Graph der Umkehrfunktion g von f (wenn diese existiert) ist dann

$$\mathrm{Graph}(g) = \{(f(x), x) \mid x \in M\} \subset N \times N.$$

$y \longmapsto f^{-1}(y)$

Das heißt, im Schaubild ist der Graph der Umkehrfunktion der an der Winkelhalbierenden gespiegelte Graph von f.

Injektive, surjektive, bijektive Abbildungen

Annahme: Alle auftretenden Mengen sind endlich.

- Sei $f: M \to N$ injektiv. $\iff$ $\# M = \# f(M)$

  Dann ist $\# M \leq \# N$.

  Denn: Weil f injektiv ist, ist $\# M = \# f(M)$.

  Da $f(M) \subseteq N$, also erstreckt $\# f(M) \leq \# N$

  D.h. $\# M \leq \# N$

- Sei $f: M \to N$ surjektiv. $\iff$ $\# f(M) = \# N$

  Dann ist $\# M \geq \# N$.

  Denn: Es gilt für Fkten immer $\# f(M) \leq \# M$. Ist f surjektiv, so ist $f(M) = N$, also insbes. $\# N = \# f(M) \leq \# M$.

-2-

• Sei $f: M \to N$ bijektiv. $\iff \# M = \# f(M) = \# N$.

Dann ~~ist~~ $\# M = \# N$.

Denn: $\left.\begin{array}{l} f \text{ injektiv} \implies \# M \leq \# N \\ f \text{ surjektiv} \implies \# M \geq \# N \end{array}\right\} \xRightarrow{f \text{ bij.}} \# M = \# N$

Die Umkehrung gilt nicht!

Für die Umkehrabb. g von $f: M \to N$ hatten wir die Bedingungen

$$g \circ f = id_M \quad \text{und} \quad f \circ g = id_N .$$

__Ann__: Zu $f: M \to N$ gibt es $g: N \to M$ mit

$$g \circ f = id_M .$$ g heißt Linksinverse zu f.

__Beh__: Dann ist f injektiv.

__Bew__: Wenn für $x_1, x_2 \in M$ gilt $f(x_1) = f(x_2)$, dann ist

$$g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2) \iff x_1 = x_2 .$$

Ann: Zu $f: M \to N$ gibt es $g: N \to M$ mit

$$f \circ g = \mathrm{id}_N .$$

g heißt Rechts-inverse zu f

Beh: Dann ist f surjektiv.

Bew: id_N ist surjektiv (sogar bij.)

$\forall x \in N: \mathrm{id}_N(x) = x$, also $f \circ g(x) = x$.

Also gibt es ein $y \in M$, nämlich $y = g(x)$ so, dass

$f(y) = x$.

Jedes $x \in N$ gehört zum Bild $f(M)$, also ist f surjektiv.

Beispiel:

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad x \longmapsto (x,1)$$

ist nicht surjektiv, aber injektiv

$[\,(x,1) = (y,1) \Leftrightarrow x = y\,]$

$$g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x,y) \longmapsto x$$

ist nicht injektiv aber surjektiv

$\forall\, x \in \mathbb{R}$: $\quad g \circ f\,(x) = g\big((x,1)\big) = x$, d.h. $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$

während $\quad f \circ g\big((x,y)\big) = f(x) = (x,1) \quad$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$

d.h. $\quad f \circ g \neq \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$.

Also: g ist eine linksinverse Fkt von f.

f ist eine rechtsinverse Fkt von g.