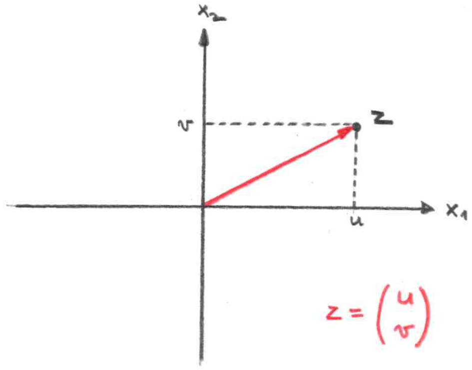
Vorkurs Mathematik–
Teil III. Lineare Algebra

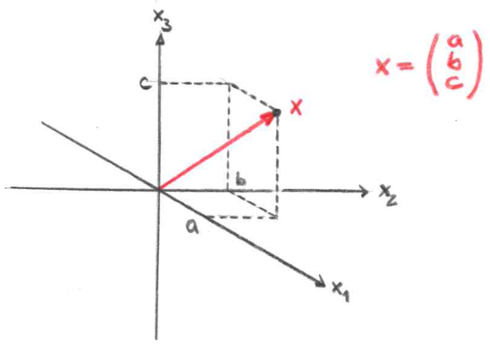
Lehrstuhl A
für Mathematik
RWTH AACHEN UNIVERSITY

Inhalt

1.1 Ebene und Raum

Jeder Punkt der Ebene ist durch zwei reelle Koordinaten festgelegt, jeder Punkt des Raumes durch drei reelle Koordinaten. Da die Reihenfolge der Koordinaten eine Rolle spielt, kann man einen Punkt in der Ebene durch ein 2-Tupel $z \in \mathbb{R}^2$ und einen Punkt im Raum durch ein 3-Tupel $x \in \mathbb{R}^3$ eindeutig beschreiben.





Elemente aus $\mathbb{R}^2$ bzw. R^3, die Punkte in der Ebene bzw. Raum bezeichnen, nennen wir **Ortsvektoren**. Differenzen von Ortsvektoren heißen auch **Richtungsvektoren**. Die Einträge in den 2- bzw. 3-Tupeln heißen die **Koordinaten** des Vektors. Konventionsgemäß schreiben wir die Vektoren, indem wir die Koordinaten untereinander in einer Spalte anordnen.

Lehrstuhl A für Mathematik

1.1 Koordinaten im n-dimensionale Raum

Für die Beschreibung von Punkten als Tupel von Zahlen ist es nicht wesentlich, dass die Dimension des Raumes 2 oder drei ist.

Definition 1

Wir schreiben den Raum der geordneten n-Tupel mit Einträgen im Körper $\mathbb{R}$ als

$$\mathbb{R}^n := \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \ : \ x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R} \right\}.$$

Der Grund, warum man $\mathbb{R}^n$ einen **Vektorraum** und seine Elemente **Vektoren** nennt, ist aber, dass man auf $\mathbb{R}^n$ zwei Operationen ausführen kann, die bestimmten Regeln unterworfen sind.

1.1 Addition und Skalarenmultiplikation von Koordinatenvektoren

Definition 2

Die **Summe** *zweier Vektoren*

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, y := \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

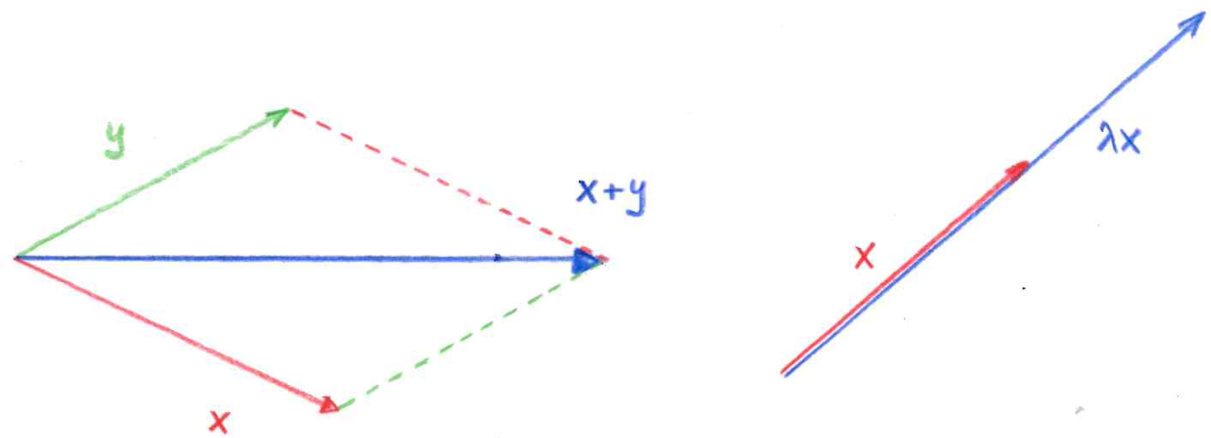
ist gegeben durch das geordnete n-Tupel

$$x + y = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

Die **Skalarenmultiplikation** *eines Vektors $x \in \mathbb{R}^n$ mit einer* Zahl *$\lambda \in \mathbb{R}$ ist gegeben durch*

$$\lambda x = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

1.1 Addition und Skalarenmultiplikation von Koordinatenvektoren



Addition und Skalarenmultiplikation für Elemente aus $\mathbb{R}^n$

Indem man die Eigenschaften dieser beiden Verknüpfungen auf $\mathbb{R}^n$ zur Basis einer abstrakten Definition macht, wird man auf den Begriff des Vektorraums geführt. Neben den Räumen $\mathbb{R}^n$ gibt es noch viele weitere Beispiele von Vektorräumen.

1.2 Das Konzept des Vektorraums über einem Körper

Definition 3

Eine Menge V heißt Vektorraum über dem Körper $\mathbb{K}$, wenn es zwei Abbildungen

$$+ : V \times V \to V, (x, y) \mapsto x + y \quad (\textit{Vektoraddition})$$
$$\cdot : \mathbb{K} \times V \to V, (\lambda, x) \mapsto \lambda \cdot x \quad (\textit{Skalarenmultiplikation})$$

gibt mit den folgenden Eigenschaften:

1. *Die Vektoraddition ist assoziativ, d.h.* $x + (y + z) = (x + y) + z$ *für alle* $x, y, z \in V$.
2. *Die Vektoraddition ist kommutativ, d.h.* $x + y = y + x$ *für alle* $x, y \in V$.
3. *Es gibt einen Vektor* $o \in V$, *den Nullvektor, so dass* $o + x = x$ *für alle* $x \in V$.
4. *Zu jedem* $x \in V$ *gibt es ein Element* $-x \in V$ *mit* $x + (-x) = o$.
5. *Für das Einselement* $1 \in \mathbb{K}$ *gilt* $1 \cdot x = x$ *für alle* $x \in V$.
6. *Für alle* $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $x \in V$ *gilt* $(\lambda\mu) \cdot x = \lambda \cdot (\mu \cdot x)$.
7. *Für alle* $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $x \in V$ *gilt* $(\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$.
8. *Für alle* $\lambda \in \mathbb{K}$, $x, y \in V$ *gilt* $\lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$.

1.2 Beispiele von Vektorräumen

Beispiel 1. Der Vektorraum der Polynome vom Grad $\leq n$.

Seien

$$\begin{aligned} P(X) &= a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \ldots + a_1 X + a_0, \\ Q(X) &= b_n X^n + b_{n-1} X^{n-1} + \ldots + b_1 X + b_0 \end{aligned}$$

mit $a_0, \ldots, a_n, b_n, \ldots, b_0 \in \mathbb{C}$ Polynome vom Grad kleiner oder gleich n mit komplexen Koeffizienten. Dann sind auch

$$(P+Q)(X) := (a_n + b_n) X^n + (a_{n-1} + b_{n-1}) X^{n-1} + \ldots + (a_1 + b_1) X + (a_0 + b_0),$$

sowie

$$(\lambda P)(X) := (\lambda a_n) X^n + (\lambda a_{n-1}) X^{n-1} + \ldots + (\lambda a_1) X + (\lambda a_0)$$

für ein beliebiges $\lambda \in \mathbb{C}$ Polynome vom Grad kleiner oder gleich n mit komplexen Koeffizienten. Die Polynome vom Grad $\leq n$ mit komplexen Koeffizienten bilden also einen Vektorraum über $\mathbb{C}$.

1.2 Beispiele von Vektorräumen

Beispiel 2. Der Vektorraum der stetigen Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Seien

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$$

Aus dem Analysis - Teil wissen wir, dass die Summe $f + g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$x \mapsto (f + g)(x) := f(x) + g(x)$$

und für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ die Funktion $\lambda f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$(\lambda f)(x) := \lambda \cdot f(x)$$

ebenfalls stetige Funktionen sind. Anders ausgedrückt, die stetigen reellen Funktionen mit Definitionsbereich $\mathbb{R}$ bilden einen reellen Vektorraum.

Beispiel 3. Der Vektorraum der konvergenten Folgen

Seien $(a_n)_{n\geq 1}$ und $(b_n)_{n\geq 1}$ konvergente Folgen reeller Zahlen. Wir bezeichnen die Grenzwerte mit

$$a := \lim_{n\to\infty} a_n, \quad b := \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Nach den Grenzwertsätzen ist die Summenfolge $(a_n)_{n\geq 1} + (b_n)_{n\geq 1} := (a_n + b_n)_{n\geq 1}$ (bitte Klammerung beachten) ebenfalls konvergent, da

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n = a + b.$$

Genauso ist für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ die Folge $\lambda(a_n)_{n\geq 1} := (\lambda a_n)_{n\geq 1}$ konvergent wegen

$$\lim_{n\to\infty}(\lambda a_n) = \lambda \lim_{n\to\infty} a_n = \lambda a.$$

Die Menge der konvergenten (reellen) Folgen bildet also einen $\mathbb{R}$-Vektorraum.

1.2 Keine Beispiele von Vektorräumen

Beispiel 4. Die Menge der nichtnegativen Folgen

Die Menge $\mathcal{F}^+ := \{(a_n)_{n\geq 1} \,:\, a_n \in \mathbb{R}, a_n \geq 0\}$ mit Addition und Skalarenmultiplikation wie in Beispiel 3 ist kein $\mathbb{R}$-Vektorraum, da für $\lambda = -1$ das Produkt $\lambda(a_n)_{n\geq 1}$ nicht in $\mathcal{F}^+$ liegt.

Beispiel 5. Die Menge der normierten Polynome vom Grad $\leq n$

Die Menge der normierten Polynome $P(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_0$ mit Addition und Skalarenmultiplikation wie in Beispiel 1 ist kein $\mathbb{C}$-Vektorraum, da weder die Summe zweier normierter Polynome noch die Multiplikation mit $1 \neq \lambda \in \mathbb{R}$ wieder ein normiertes Polynom ergibt.

Beispiel 6. Die Vereinigung der Koordinatenachsen in $\mathbb{R}^2$

Die Vereinigung $W := \{(x, 0) \,:\, x \in \mathbb{R}\} \cup \{(0, x) \,:\, x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$ mit Addition und Skalarenmultiplikation wie in Definition 2 ist ebenfalls kein Vektorraum, da zum Beispiel

$$(1, 0) + (0, 1) = (1, 1) \notin W.$$

1.3 Untervektorräume und Erzeugendensysteme

Definition 4

Sei V mit der Addition $+$ und der Skalarenmultiplikation $\cdot$ ein Vektorraum über $\mathbb{K}$.

Eine Teilmenge $W \subset V$ heißt **Untervektorraum** *von V, wenn W bezüglich $+$ und $\cdot$ abgeschlossen ist, d.h. aus $u, v \in W$ folgt auch $u + v \in W$, sowie $\lambda \cdot w \in W$ für alle $\lambda \in \mathbb{K}$.*

Beispiel 7. (a) Die periodischen stetigen Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit Periode $a > 0$, d.h. es gilt $f(x + a) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, bilden einen Untervektorraum des Raumes der stetigen Funktionen aus Beispiel 2. (b) Seien G_1, G_2 die Geraden

$$G_1 := \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}^3, \;\; G_2 := \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}^3.$$

$G_1 \subset \mathbb{R}^3$ ist ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$, G_2 **nicht**. (c) Jeder Vektorraum V ist auch Untervektorraum von sich selbst. (d) W aus Beispiel 6 ist wie gesehen **kein** Untervektorraum von $\mathbb{R}^2$.

1.3 Untervektorräume und Erzeugendensysteme

V ein Vektorraum über $\mathbb{K}$. Sind $v_1, \ldots, v_n \in V$ Vektoren, so nennt man einen Ausdruck der Form

$$\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n \in V$$

mit $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ eine **Linearkombination** der Vektoren $v_1, \ldots, v_n$.

Lemma 1

Sind $v_1, \ldots, v_n \in V$ Vektoren. Dann ist die Menge aller Linearkombinationen

$$\operatorname{span}(v_1, \ldots, v_n) := \{w = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n \,:\, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}\} \subset V,$$

genannt der **Spann** *der Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ ein Untervektorraum von V.*

Lehrstuhl A für Mathematik RWTH AACHEN UNIVERSITY

1.3 Untervektorräume und Erzeugendensysteme

Beweis. Seien $a = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n$, $b = \mu_1 v_1 + \ldots + \mu_n v_n \in \mathrm{span}(v_1, \ldots, v_n)$. Dann ist mit Assoziativ- und Kommutativgesetz

$$\begin{aligned} a + b &= (\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n) + (\mu_1 v_1 + \ldots + \mu_n v_n) \\ &= \lambda_1 v_1 + \mu_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n + \mu_n v_n \end{aligned}$$

und mit dem Distributivgesetz folgt wegen $\lambda_i + \mu_i \in \mathbb{K}$

$$a + b = (\lambda_1 + \mu_1) v_1 + \ldots + (\lambda_n + \mu_n) v_n \in \mathrm{span}(v_1, \ldots, v_n).$$

Genauso folgt

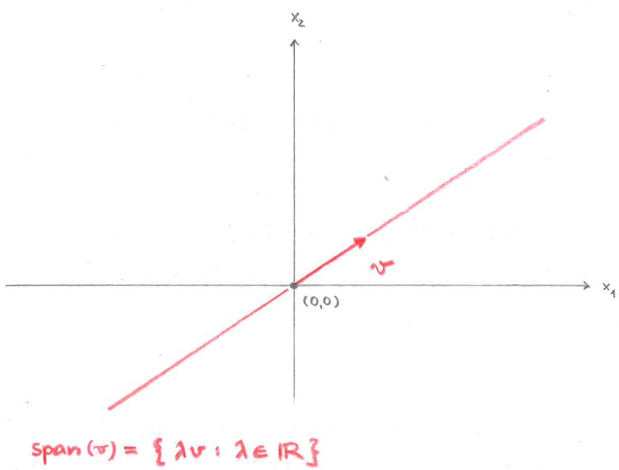
$$\mu a = \mu(\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n) = (\mu\lambda_1) v_1 + \ldots + (\mu\lambda_n) v_n \in \mathrm{span}(v_1, \ldots, v_n).$$

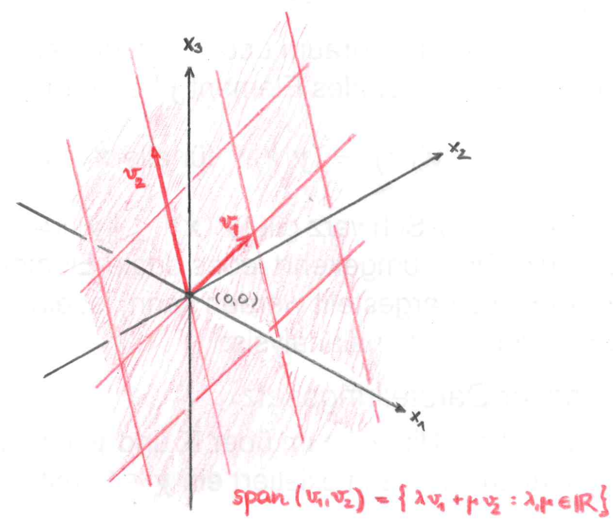
$\square$

1.3 Untervektorräume und Erzeugendensysteme

Bislang haben wir (absichtlich) hauptsächlich Beispiele von Vektorräumen betrachtet, die nicht mit denen übereinstimmen, die Sie schon kennen sollten. Jetzt aber:

Beispiel 8. (1) Identifizieren wir die Ebene mit dem Koordinatenraum $\mathbb{R}^2$, so sind Geraden durch den Nullpunkt des Koordinatensystems Untervektorräume von $\mathbb{R}^2$. (2) Identifizieren wir den dreidimensionalen Raum mit dem Koordinatenraum $\mathbb{R}^3$, so sind Geraden und Ebenen durch den Nullpunkt des Koordinatensystems Untervektorräume von $\mathbb{R}^3$.





Definition 5

Eine (endliche) Menge von Vektoren $v_1, \dots, v_n$ aus einem $\mathbb{K}$-Vektorraum V heißt **Erzeugendensystem** *von V, falls $\operatorname{span}(v_1, \dots, v_n) = V$. Gibt es ein endliches Erzeugendensystem, so nennen wir den Vektorraum V* **endlich erzeugt**.

Beispiel 9. (1) Die Vektoren

$$e_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, e_{n-1} := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_n := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

bilden ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^n$. Die e_i werden die **kanonischen Erzeuger** genannt. (2) Der Vektorraum der stetigen Funktionen aus Beispiel 2 ist **nicht** endlich erzeugt.

1.4 Lineare Unabhängigkeit und Basen

Definition 6

Eine (endliche) Menge von Vektoren $v_1, \dots, v_n$ *aus einem* $\mathbb{K}$*-Vektorraum* V *heißt* **linear unabhängig**, *falls es nur eine einzige Linearkombination der* $v_1, \dots, v_n$ *gibt mit*

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = o.$$

Notwendigerweise ist dies dann die Linearkombination mit $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$.

Definition 7

Ist $v_1, \dots, v_n \in V$ *ein Erzeugendensystem von* V, *das aus linear unabhängigen Vektoren besteht, so nennt man* $v_1, \dots, v_n$ *eine* **Basis** *von* V.

Beispiel 10. (1) Die kanonischen Erzeuger $e_1, \dots, e_n$ bilden eine Basis von $\mathbb{R}^n$. Diese wird auch die **kanonische Basis** genannt. (2) Die Monome $p_0(X) = 1, p_1(X) = X, p_2(X) = X^2, \dots, p_n(X) = X^n$ bilden eine Basis des Vektorraumes der Polynome vom Grad $\leq n$.

Lehrstuhl A für Mathematik
RWTH AACHEN UNIVERSITY

Lemma 2

(1) Ist $v_1, \dots, v_n$ ein Erzeugendensystem von V, so lässt sich jeder Vektor $w \in V$ als Linearkombination der $v_1, .., v_n$ darstellen. (2) Ist $v_1, \dots, v_n$ eine Basis von V, so lässt sich jeder Vektor $w \in V$ auf genau eine Weise als Linearkombination der $v_1, .., v_n$ darstellen.

Beweis. (1) folgt aus der Definition des Erzeugendensystems. (2) Angenommen, $w \in V$ ist ein Vektor mit zwei Darstellungen

$$w = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = \mu_1 v_1 + \dots + \mu_n v_n$$

als Linearkombinationen der $v_1, \dots, v_n$. Dann gilt

$$(\lambda_1 - \mu_1)v_1 + \dots + (\lambda_n - \mu_n)v_n = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n - (\mu_1 v_1 + \dots + \mu_n v_n) = w - w = o,$$

und da die $v_1, \dots, v_n$ linear unabhängig sind, folgt $\lambda_i - \mu_i = 0$ für alle $i = 1, \dots, n$. Damit kann es keine zwei verschiedenen Darstellungen von w als Linearkombination der $v_1, \dots, v_n$ geben. $\square$

Beispiel 11. (1) Sind $v_1, v_2 \in V$ linear abhängig, so gibt es eine Linearkombination $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = o$, wobei **nicht beide** Zahlen λ_1, λ_2 gleich Null sind. Ohne Einschränkung sei $\lambda_1 \neq 0$. Dann ist $v_1 = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} v_2$, also $v_1 \in \operatorname{span}(v_2)$.

(2) Sind $v_1, .., v_m \in V$ paarweise verschiedene, aber ansonsten beliebige Vektoren, so sind die Vektoren $o, v_1, ..., v_m$ immer linear abhängig, da

$$\lambda o + 0 \cdot v_1 + ... + 0 \cdot v_m = o$$

ist für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$.

(3) Aus (1) folgt, dass man immer einen der linear abhängigen Vektoren als Linearkombination der anderen ausdrücken kann. Aus (2) folgt, dass man im Allgemeinen höchstens einen der linear abhängigen Vektoren als Linearkombination der anderen ausdrücken kann. Sind nämlich die $v_1, ..., v_m$ in (2) linear unabhängig, so ist $o = 0 \cdot v_1 + ... + 0 \cdot v_m$ die einzige derartige Linearkombination.

1.5 Die Dimension endlich erzeugter Vektorräume

Der folgende Satz ist die Grundlage für den fundamentalen Begriff der Dimension eines Vektorraumes. Wir geben ihn ohne Beweis an.

Satz 1

Für endlich erzeugte Vektorräume gilt: Ist $v_1, \ldots, v_n \in V$ eine Basis von V, und $w_1, \ldots, w_m \in V$ Vektoren, wobei $m > n$. Dann sind die Vektoren $w_1, \ldots, w_m$ linear abhängig in V.

Die entscheidende Folgerung ziehen wir aber mit Beweis.

Satz 2

Je zwei Basen eines endlich erzeugten Vektorraums bestehen aus gleichviel Vektoren.

Beweis. Seien $a_1, \ldots, a_n \in V$ und $b_1, \ldots, b_m \in V$ zwei Basen von V. Wäre $n > m$, so wären die $a_1, \ldots, a_n$ nach Satz 1 linear abhängig in Widerspruch zu der Voraussetzung, dass $a_1, \ldots, a_n$ eine Basis ist. Also ist $n \leq m$. Umgekehrt folgt analog $m \leq n$. Also ist $n = m$. □

1.5 Die Dimension endlich erzeugter Vektorräume

Nach Satz 2 gibt es somit eine natürliche Zahl, die charakteristisch für einen gegebenen (endlich erzeugten) Vektorraum V ist, nämlich die Anzahl die Anzahl der Vektoren in einer beliebigen Basis von V.

Definition 8

Die **Dimension dim V** *eines endlich erzeugten Vektorraums V ist die eindeutig bestimmte Anzahl von Vektoren einer Basis von V. Der Vektorraum $V = \{o\}$, der nur aus dem Nullvektor besteht, hat definitionsgemäß die Dimension $dimV = 0$.*

Beispiel 12. (1) Wie in Beispiel 10 (1) gesehen, ist somit $\dim \mathbb{R}^n = n$. Dies erklärt die Wahl des Namens 'Dimension' für diese Zahl. (2) Die Dimension des Vektorraums der Polynome vom Grad kleiner oder gleich n ist $n+1$ nach Beispiel 10 (2).

Definition 9

Ein rechteckiges Zahlenschema mit n **Zeilen** *und m* **Spalten**

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1\,m-1} & a_{1\,m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2\,m-1} & a_{2\,m} \\ \vdots & & & & & \vdots \\ a_{n-1\,1} & a_{n-1\,2} & a_{n-1\,3} & \dots & a_{n-1\,m-1} & a_{n-1\,m} \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{n\,m-1} & a_{n\,m} \end{pmatrix},$$

wobei alle Zahlen $a_{ij} \in \mathbb{K}$ liegen, heißt $\mathbf{n \times m}$**-Matrix** *(gelesen: n Kreuz m - Matrix) mit Werten in $\mathbb{K}$. Die Indizes geben an, an welcher Stelle der Matrix die gegebene Zahl steht, die Zahl a_{ij} steht in der iten Zeile der Matrix in der jten Spalte. i heißt deswegen* **Zeilenindex** *und j* **Spaltenindex**.
Die Menge der $n \times m$-Matrizen mit Werten in $\mathbb{K}$ wird mit $\mathbb{K}^{n \times m}$ bezeichnet. Für das obige Zahlenschema schreiben wir kurz $A = (a_{ij})_{i=1,\dots,n,j=1,\dots,m} \in \mathbb{K}^{n\times m}$.

2.1 Matrizen – Addition und Skalarenmultiplikation

Zwei Matrizen $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in \mathbb{K}^{n\times m}$ derselben Zeilen- und Spaltenzahl lassen sich addieren. Es ist

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1\,m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n\,m} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1\,m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{n\,m} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \dots & a_{1\,m} + b_{1\,m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} + b_{n1} & \dots & a_{n\,m} + b_{n\,m} \end{pmatrix}.$$

Genauso können wir eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times m}$ mit einer Zahl $\lambda \in \mathbb{K}$ multiplizieren. Es ist dann

$$\lambda \cdot A = \lambda \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1\,m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n\,m} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \dots & \lambda a_{1\,m} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{n1} & \dots & \lambda a_{n\,m} \end{pmatrix}.$$

Satz 3

Die Menge $\mathbb{K}^{n\times m}$ der $n \times m$-Matrizen ist mit den Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum.

2.2 Matrixmultiplikation – Multiplikation von Zeilen und Spalten

Die bisher von uns betrachteten **Spaltenvektoren**

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

sind ebenfalls Matrizen, es ist nämlich $v \in \mathbb{R}^{n\times 1}$. Dementgegen sind **Zeilenvektoren**

$$w = (w_1, \ldots, w_n) \in \mathbb{R}^{1\times n}.$$

Definition 10

Das **Produkt eines Zeilen- mit einem Spaltenvektor** *ist eine Zahl aus* $\mathbb{K}$*, definiert als*

$$w\, v = (w_1, \ldots, w_n) \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} := w_1 v_1 + \ldots + w_n v_n \in \mathbb{K}.$$

Lehrstuhl A für Mathematik RWTH AACHEN UNIVERSITY

2.2 Matrixmultiplikation – Zerlegung eine Matrix in Zeilen und Spalten

Wenn wir die Zeilen einer Matrix zu Zeilenvektoren zusammenfassen, erhalten wir für eine Matrix die oft nützliche Darstellung

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1\,m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n\,m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \hline \vdots \\ \hline a_n \end{pmatrix}.$$

Dabei werden die einzelnen Zeilenvektoren $a_i := (a_{i1}, \dots, a_{im}) \in \mathbb{R}^{1\times m}$ durch waagrechte Striche voneinander getrennt. Wenn wir analog die Spalten einer Matrix zu Spaltenvektoren zusammenfassen, erhalten wir

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1\,m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{n\,m} \end{pmatrix} = \left(b_1 \middle| \dots \middle| b_m \right).$$

Dabei werden die einzelnen Spaltenvektoren $b_j \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ der Matrix durch senkrechte Striche voneinander getrennt.

Lehrstuhl A für Mathematik
RWTH AACHEN UNIVERSITY

2.2 Matrixmultiplikation – Produkt zweier Matrizen

Definition 11

Wir definieren das Produkt AB zweier Matrizen A und B für den Fall (und nur für diesen), dass die erste Matrix A genausoviele Spalten hat, wie die zweite Matrix B Zeilen, d.h. für $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ und $B \in \mathbb{R}^{m\times k}$. In allen anderen Fällen kann man das Matrixprodukt in der Reihenfolge AB nicht bilden. Das Produkt ist nun definiert durch

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1\,m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n\,m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1\,k} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{m\,k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \hline \vdots \\ \hline a_n \end{pmatrix} \left(b_1 \middle| \dots \middle| b_k \right) \\ &= \begin{pmatrix} a_1 b_1 & \dots & a_1 b_k \\ \vdots & & \vdots \\ a_n b_1 & \dots & a_n b_k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times k}, \end{aligned}$$

wobei die Einträge der neuen Matrix die Produkte der Zeilenvektoren $a_i \in \mathbb{R}^{1\times m}$ und der Spaltenvektoren $b_j \in \mathbb{R}^{m\times 1}$ sind.

2.2 Das Produkt zweier Matrizen

In dieser Produktdefinition ist die Reihenfolge der Faktoren absolut entscheidend.

Beispiel 13. (1) Das Produkt der Matrizen $A \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ und $B \in \mathbb{R}^{2\times 1}$ ist eine Matrix $C \in \mathbb{R}^{3\times 1}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 14 \\ 18 \end{pmatrix}$$

In der umgekehrten Reihenfolge ist das Produkt nicht einmal definiert. (2) Wie gesehen ist das Produkt eines Zeilenvektors $a \in \mathbb{R}^{1\times n}$ und eines Spaltenvektors $b \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ eine Zahl $\lambda \in \mathbb{R}^{1\times 1} = \mathbb{R}$. In umgekehrter Reihenfolge ist aber das Produkt derselben Faktoren

$$b\,a = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} (a_1, \ldots, a_n) = \begin{pmatrix} b_1 a_1 & \ldots & b_1 a_n \\ \vdots & & \vdots \\ b_n a_1 & \ldots & b_n a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

eine $n \times n$-Matrix.

2.2 Das Produkt zweier Matrizen

Beispiel 14. Sind $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ quadratische Matrizen mit derselben Zeilen- und Spaltenzahl, dann sind beide Produktreihenfolgen möglich und es ist ebenfalls $AB, BA \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Die Menge $\mathbb{R}^{n\times n}$ der quadratischen Matrizen ist also bezüglich Produktbildung abgeschlossen.

In diesem Fall ist es also sinnvoll, danach zu fragen, ob die Multiplikation von Matrizen kommutativ ist. Dies ist aber **im Allgemeinen nicht** der Fall.

Sei zum Beispiel $A, B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

so ist

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = AB.$$

2.2 Das Produkt zweier Matrizen

Satz 3

Seien $A, A' \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $B, B' \in \mathbb{R}^{m\times k}$, $C \in \mathbb{R}^{k\times l}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

1. $A(BC) = (AB)C$ **(Assoziativgesetz)**
2. $(A + A')B = AB + A'B$ **(Distributivgesetz I)**
3. $A(B + B') = AB + AB'$ **(Distributivgesetz II)**
4. $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$ **(Verträglichkeit mit Skalarenmultiplikation)**

Unter den quadratischen Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ besitzt die **Einheitsmatrix**

$$E = (e_1|e_2|\dots|e_n) = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

(e_j: kanonische Einheitsvektoren) die besondere Eigenschaft

Lemma 4

Für alle $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist $AE = EA = A$.

3.1 Lineare Gleichungssysteme

Wir betrachten nun lineare Gleichungssysteme. Sie kennen lineare Gleichungssysteme für zwei und drei Variable und mehrere Lösungsmethoden wie Gleichsetzungs- und Additionsverfahren für solche Systeme aus der Schule.

Wir wollen nun aber die bis hierhin kennengelernten abstrakten Begriffsbildungen benutzen, um lineare Gleichungssysteme mit einer beliebigen Anzahl von Variablen mit Hilfe eines einfachen systematischen Verfahrens zu lösen.

Dazu schreiben wir zunächst lineare Gleichungssysteme mit Hilfe von Matrizen und zeigen dann, dass alle Information über das Gleichungssystem – also auch, wie man sein Lösungsmenge bestimmt – in der sogenannten **Systemmatrix** enthalten sind.

3.1 Lineare Gleichungssysteme – Definition

Ein **lineares Gleichungssystem** in n Variablen $x_1, \dots, x_n$ ist ein System von m Gleichungen der Form

$$
(1) \qquad \begin{array}{ccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\
\vdots & & & & & & & \vdots & \\
a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m
\end{array}
$$

mit vorgegebenen **Koeffizienten** $a_{ij} \in \mathbb{K}$ und $b_i \in \mathbb{K}$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$. Ist $b_1 = \dots = b_m = 0$, so heißt das Gleichungssystem **homogen**. Das Gleichungssystem

$$
\begin{array}{ccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & 0 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & 0 \\
\vdots & & & & & & & \vdots & \\
a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & 0
\end{array}
$$

(mit den gleichen Koeffizienten a_{ij} wie oben) heißt das zum (inhomogenen) System (1) **assoziierte homogene Gleichungssystem**.

3.1 Lineare Gleichungssysteme – Die Matrixschreibweise

Die erste Beobachtung ist, dass wir mit der Matrix

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

und den Spaltenvektoren

$$b := \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m, \quad x := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

das Gleichungssystem einfach in der **Matrixform** $Ax = b$ schreiben können. Daraus ergibt sich schonmal ein einfacher Ausdruck für die gesuchte **Lösungsmenge**

$$\mathbb{L} := \{x \in \mathbb{R}^n \, : \, Ax = b\}$$

des linearen Gleichungssystems.

Definition 12

Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

heißt **Koeffizientenmatrix** *und die Matrix*

$$S = (A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right) \in \mathbb{R}^{m \times (n+1)}$$

heißt **erweiterte Koeffizientenmatrix** *oder* **Systemmatrix***.*

Die Systemmatrix enthält alle Information über das lineare Gleichungssystem, die Koeffizientenmatrix enthält alle Information über das zugehörige homogene System.

3.3 Lösung linearer Gleichungssysteme – Problemstellung

Sei $S = (A|b) \in \mathbb{R}^{m\times(n+1)}$ die Systemmatrix eines linearen Gleichungssystems mit m Gleichungen in n Variablen. Es geht nun darum, die Lösungsmenge

$$\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R}^n \,:\, Ax = b\}$$

explizit zu bestimmen. Das heißt, wir müssen die Frage beantworten, unter welche Umständen $\mathbb{L} = \emptyset$ ist und was für eine Struktur die Lösungsmenge hat, wenn sie nicht leer ist.

Da alle Information des Systems in der Matrix S steckt, müssen wir diese Fragen auch alleine anhand der Matrix S beantworten können. Wir beschreiben nun einen Algorithmus, um allein durch Manipulationen der Systemmatrix die Lösungsmenge des Systems zu bestimmen. Dieser Algorithmus heißt **Gauss - Algorithmus**.

3.3 Lösung linearer Gleichungssysteme – Elementare Zeilenumformungen

Seien nun zwei Matrizen $S, S' \in \mathbb{R}^{m\times(n+1)}$ gegeben, die wir als Systemmatrizen linearer Gleichungssysteme betrachten.

Definition 13

Wir sagen, die Matrix S' geht aus S durch **elementare Zeilenumformungen** *hervor, wenn wir, mit S beginnend, durch eine beliebige Kombination der drei folgenden Operationen zur Matrix S' kommen:*

1. *Vertauschen zweier Zeilen,*
2. *Addieren einer Zeile zu einer anderen,*
3. *Multiplikation einer Zeile mit einer Zahl $\lambda \neq 0$.*

Satz 4

(1) Wenn S' aus S durch **elementare Zeilenumformungen** *hervorgeht, dann geht auch S durch elementare Zeilenumformungen aus S' hervor. (2) Wenn zwei Systemmatrizen durch* **elementare Zeilenumformungen** *auseinander hervorgehen, stimmen die Lösungsmengen ihrer Gleichungssysteme überein.*

Lehrstuhl A für Mathematik

RWTH AACHEN UNIVERSITY

Beispiel 15. Um die Beweisidee von Theorem 4 zu erläutern, betrachten wir ein ausführliches Beispiel:

Gleichungssystem | Systemmatrix

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} I & : & 3x & + & 5y & - & 3z & = & 1 \\ II & : & & & y & - & z & = & 4 \\ III & : & x & + & y & - & 3z & = & -1 \end{array} \qquad S = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & -3 & -1 \end{array}\right)$$

Die Zeilenumformungen $III' = (-3) \cdot III$; $I' = I + III'$; $III = (-1/3) \cdot III'$ergeben:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} I' & : & & & 2y & + & 6z & = & 4 \\ II & : & & & y & - & z & = & 4 \\ III & : & x & + & y & - & 3z & = & -1 \end{array} \qquad S^{(1)} = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 6 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & -3 & -1 \end{array}\right)$$

Effektiv ist diese Abfolge dreier elementarer Zeilenumformungen einfach zu beschreiben durch $I' = I - 3 \cdot III$. In konkreten Rechnungen wird das dann einfach auch so notiert, und ab jetzt machen wir das auch so.

3.3 Lösung linearer Gleichungssysteme – Beispiel 15

Die Zeilenumformung $I'' = I' - 2 \cdot II$, $I''' = (1/8) \cdot I''$ und Vertauschen der Reihenfolge der drei Zeilen von (I''', II, III) zu (III, II, I''') ergeben:

$$\begin{array}{lcrcrcrcr} III & : & x & + & y & - & 3z & = & -1 \\ II & : & & & y & - & z & = & 4 \\ I''' & : & & & & & z & = & -1/2 \end{array} \qquad S^{(2)} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 \end{array}\right)$$

Jetzt können wir durch $III' = III - II$, $II' = II + I'''$ und $III'' = III' + 2 \cdot I'''$ systematisch die Spalten oberhalb der Einsen auf der Diagonale ausräumen. Wir erhalten:

$$\begin{array}{lcrrrcr} III'' & : & x & & & = & -6 \\ II & : & & y & & = & 7/2 \\ I''' & : & & & z & = & -1/2 \end{array} \qquad S' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 7/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 \end{array}\right)$$

Damit erhalten wir als Lösungsmenge

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} -6 \\ 7/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} \right\}.$$

3.3 Lösung linearer Gleichungssysteme – Beweisidee von Satz 4

(1) Der erste Teil der Aussage folgt daraus, dass man alle elementaren Zeilenumformungen wieder durch elementare Zeilenumformungen rückgängig machen kann:

- Vertauschen von Zeilen durch Rückvertauschung,
- Multiplikation einer Zeile mit $\lambda \neq 0$ durch Multiplikation derselben Zeile mit $1/\lambda \neq 0$,
- Addition der Zeile n zur Zeile m durch Multiplikation der Zeile n mit -1, gefolgt von der Addition der dadurch entstandenen neuen Zeile n zur Zeile m mit darauf folgender erneuter Multiplikation der Zeile n mit -1.

(2) Der zweite Teil folgt daraus, dass bei jeder elementaren Zeilenumformung eine Lösung des alten Systems auch eine Lösung des neuen Systems ist. Ist also $\mathbb{L}$ die Lösungsmenge zum System mit Systemmatrix S und $\mathbb{L}'$ die Lösungsmenge zum System mit Systemmatrix S', so gilt $\mathbb{L} \subset \mathbb{L}'$. Wegen (1) folgt aber auch $\mathbb{L}' \subset \mathbb{L}$. Damit ist $\mathbb{L} = \mathbb{L}'$. $\square$

Lehrstuhl A für Mathematik

RWTH AACHEN UNIVERSITY

3.3 Lösungen von Gleichungssystemen – Beispiel 16

In nächsten Beispiel ist das lineare Gleichungssystem nicht eindeutig lösbar.

Beispiel 16. Wir betrachten nun das Gleichungssystem mit der Systemmatrix

$$S = \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 6 & -1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 2 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

Durch die Zeilenumformungen $II \to II - 2 \cdot I$ und danach $III \to III + II$ erhalten wir

$$S^{(1)} = \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Die Umformungen $I \to I + 2/5 \cdot II$ und danach $I \to 1/3 \cdot I$, $II \to -1/5 \cdot II$ ergeben dann

$$S' = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1/15 & 7/15 & 2/15 \\ 0 & 1 & 2/5 & -1/5 & -1/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

3.3 Lösungen von Gleichungssystemen – Beispiel 16

Die Systemmatrix

$$S' = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1/15 & 7/15 & 2/15 \\ 0 & 1 & 2/5 & -1/5 & -1/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

gehört zum linearen Gleichungssystem

$$\left| \begin{array}{rcrcrcr} x_1 & & + & \frac{1}{15}x_3 & + & \frac{7}{15}x_4 & = & \frac{2}{15} \\ & x_2 & + & \frac{2}{5}x_3 & - & \frac{1}{5}x_4 & = & -\frac{1}{5} \end{array} \right| \Leftrightarrow \left| \begin{array}{rcrcrcr} x_1 & = & - & \frac{1}{15}x_3 & - & \frac{7}{15}x_4 & + & \frac{2}{15} \\ x_2 & = & - & \frac{2}{5}x_3 & + & \frac{1}{5}x_4 & - & \frac{1}{5} \end{array} \right|.$$

In der Lösungsmenge sind also die Variablen x_3, x_4 frei wählbar und die Variablen x_1, x_2 abhängig. Es ergibt sich

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 2/15 \\ -1/5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1/15 \\ -2/5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -7/15 \\ 1/5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \; : \; \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}.$$

3.3 Lösungen von Gleichungssystemen – Beispiel 16

Die abhängigen Variablen sind an der Systemmatrix leicht zu erkennen: Es sind diejenigen, in deren Spalten eine Eins und sonst nur Nullen stehen

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1/15 & 7/15 & 2/15 \\ 0 & 1 & 2/5 & -1/5 & -1/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \end{array}.$$

Bemerkung. Die Lösungsmenge läßt sich auch schreiben als

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 2/15 \\ -1/5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x \ : \ x \in \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} -1/15 \\ -2/5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -7/15 \\ 1/5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \right\},$$

d.h. als Summe einer speziellen Lösung des Systems und einem beliebigen Vektor aus einem Unterraum von $\mathbb{R}^4$. Dieser Tatsache werden wir später noch auf den Grund gehen.

3.3 Lösungen von Gleichungssystemen – Beispiel 17

Im nächsten Beispiel ist das lineare Gleichungssystem nicht lösbar.
Beispiel 17. Wir betrachten nun als Variante des vorigen Beispiels die an einer Stelle veränderte Systemmatrix

$$S = \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 6 & -1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 2 & -1 & \color{red}{1} \end{array}\right)$$

Durch dieselben Zeilenumformungen $II \to II - 2 \cdot I$ und danach $III \to III + II$ erhalten wir

$$S^{(1)} = \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \color{red}{2} \end{array}\right).$$

An diesem Punkt sehen wir bereits, dass in diesem Fall die Lösungsmenge $\mathbb{L} = \emptyset$ leer sein muss, denn die letzte Zeile der Systemmatrix entspricht der (nicht lösbaren) Gleichung $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 = 2$.

3.3 Lösungen von Gleichungssystemen – Zusammenfassung

(1) Lineare Gleichungssysteme lassen sich alle in der Form

$$Ax = b$$

schreiben mit $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $b \in \mathbb{R}^n$ und Variablen $x \in \mathbb{R}^m$.

(2) Insgesamt haben wir drei Beispiele von inhomogenen linearen Gleichungssystemen mit unterschiedlichem Verhalten gesehen:

1. Das erste Gleichungssystem war eindeutig lösbar,
2. Das zweite Gleichungssystem war lösbar und die Lösungen waren alle von der Form $x = x_0 + v$, wobei x_0 eine feste, spezielle Lösung des Gleichungssystems und v ein beliebiger Vektor aus einem vom System abhängigen Untervektorraum $U \subset V$ war.
3. Das dritte Gleichungssystem war nicht lösbar.

(3) Der Fall (2iii) kann im Fall homogener Gleichungssysteme nicht vorkommen, da der Nullvektor $o \in \mathbb{R}^n$ stets eine Lösung der homogenen Gleichung $Ax = o$ ist.

Die Liste (2i – iii) ist vollständig. Wir werden jetzt ein Kriterium angeben, wie man anhand der Systemmatrix direkt sehen kann, welcher der Fälle vorliegt.

3.4 Zeilenstufenform

Definition 14

Eine Systemmatrix befindet sich in **Zeilenstufenform**, *wenn sie wie folgt aufgebaut ist:*

$$S = \left(\begin{array}{ccccccccccccc|c}
a_{11} & (*) & (*) & (*) & (*) & (*) & (*) & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & & (*) \\
0 & a_{22} & (*) & (*) & (*) & (*) & (*) & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & & (*) \\
0 & 0 & 0 & a_{34} & (*) & (*) & (*) & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & & (*) \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{47} & (*) & \dots & \dots & \dots & \dots & & (*) \\
\vdots & & & & \vdots & & & & \vdots & & & & & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & a_{rl} & (*) & \dots & & (*) \\
0 & 0 & 0 & & \vdots & & & & \vdots & & 0 & 0 & & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & & b_s \\
0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & & 0 \\
\vdots & & & & \vdots & & & & \vdots & & & & & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & & 0
\end{array}\right)$$

mit Zahlen $a_{1i_1}, \dots, a_{ri_r} \neq 0$ *und* $b_s \neq 0$.

3.4 Zeilenstufenform

Durch systematische Eliminieren von Zeilen der Systemmatrix wie in den betrachteten Beispielen erhält man immer eine neue Systemmatrix in Zeilenstufenform.

Satz 5

Durch elementare Zeilenumformungen lässt sich jede Systemmatrix auf Zeilenstufenform bringen.

Daraus folgt, dass ein Gleichungssystem nicht lösbar ist, wenn in der Zeilenstufenform der Matrix der letzte Eintrag $b_s \neq 0$ in der letzten Spalte, der ungleich Null ist, in einer Zeile unterhalb der letzten Zeile der Koeffizientenmatrix liegt, die Elemente ungleich Null enthält (d.h. wenn $s > r$ ist).

Im Fall $s \leq r$ kann man aber die Systemmatrix **immer** anschließend auf die folgende Form bringen:

3.4 Zeilenstufenform

Satz 6

Durch Ausräumen der Spalten und Normieren der Zeilen der Koeffizientenmatrix wie in den Beispielen kann man aus der Zeilenstufenform die folgende Form erreichen:

$$S = \left(\begin{array}{cccccccccccc|c}
1 & 0 & (*) & 0 & (*) & (*) & 0 & \dots & \dots & 0 & \dots & \dots & (*) \\
0 & 1 & (*) & 0 & (*) & (*) & 0 & \dots & \dots & 0 & \dots & \dots & (*) \\
0 & 0 & 0 & 1 & (*) & (*) & 0 & \dots & \dots & 0 & \dots & \dots & (*) \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & (*) & \dots & 0 & \dots & \dots & (*) \\
\vdots & & & & \vdots & & & & \vdots & & & & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & (*) & \dots & (*) \\
0 & 0 & 0 & & \vdots & & & & \vdots & & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & & & & \vdots & & & & \vdots & & & & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)$$

Satz 7

Das Gleichungssystem der Systemmatrix $S \in \mathbb{R}^{n\times(m+1)}$ in der Zeilenstufenform mit ausgeräumten Spalten wie in Satz 6 kann gelöst werden wie im Beispiel 16:

Die Variablen, die zu den r ausgeräumten Spalten gehören, sind die abhängigen Variablen. Die anderen $m-r$ Variablen können frei gewählt werden. Die Lösungsmenge ist von der Form

$$\mathbb{L} = \{x = x_0 + v \ : \ v \in \operatorname{span}(v_1, \ldots, v_{m-r})\}$$

mit linear unabhängigen Vektoren $v_1, \ldots, v_{m-r}$ und einer speziellen Lösung x_0 des Gleichungssystems.

Insbesondere gibt es eine eindeutige Lösung, wenn es außer den ausgeräumten Spalten keine weiteren Spalten in der Koeffizientenmatrix gibt, d.h. wenn $r = m = n$ ist.

Beispiel 18. Anstatt eines Beweises betrachten wir nochmal Beispiel 16. Hier ist die Systemmatrix am Ende der Umformung

$$S' = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1/15 & 7/15 & 2/15 \\ 0 & 1 & 2/5 & -1/5 & -1/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \in \mathbb{R}^{3\times 4+1}$$

d.h. $n = 3$, $m = 4$, $m - r = 2$, sowie

$$x_0 = \begin{pmatrix} 2/15 \\ -1/5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_1 = \begin{pmatrix} -1/15 \\ -2/5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -7/15 \\ 1/5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

3.5 Anwendung: Lagebeziehungen in der Ebene und im Raum

Definition 15

Eine **Gerade** *ist eine Teilmenge*

$$G := \{x = x_0 + \lambda v \ : \ \lambda \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^n.$$

Dabei heißt $x_0 \in \mathbb{R}^n$ **Stützvektor** *und* $0 \neq v \in \mathbb{R}^n$ **Richtungsvektor** *der Geraden.*

Definition 16

Eine **Ebene** *ist eine Teilmenge*

$$E := \{x = x_0 + \lambda v + \mu w \ : \ \lambda, \mu \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^n.$$

Dabei heißt $x_0 \in \mathbb{R}^n$ **Stützvektor** *und die linear unabhängigen Vektoren* $v, w \in \mathbb{R}^n$ *heißen die* **aufspannende Vektoren** *der Ebene.*

Beispiel 19. Zwei Geraden in der Ebene.

Seien

$$G_1 := \{x = x_0 + \lambda v \ : \ \lambda \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2, \quad G_2 := \{x = y_0 + \mu w \ : \ \mu \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$$

zwei Geraden. Wir interessieren uns für die Schnittmenge $G_1 \cap G_2$ der beiden Geraden. Dazu müssen wir ein lineares Gleichungssystem lösen, denn $x \in G_1 \cap G_2$ liegt im Durchschnitt der beiden Geraden, wenn es Zahlen $\mu, \lambda \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $x = x_0 + \lambda v$ und gleichzeitig $x = y_0 + \mu w$ ist. Dies führt auf die Gleichung $x_0 + \lambda v = y_0 + \mu w$ oder

$$\begin{pmatrix} w_1 & -v_1 \\ w_2 & -v_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix},$$

wobei

$$w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, x_0 - y_0 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}.$$

3.5 Anwendung: Lagebeziehungen zweier Geraden in der Ebene

Für die Bestimmung der Schnittmenge haben wir also das lineare Gleichungssystem mit Systemmatrix

$$S = \left(\begin{array}{cc|c} w_1 & -v_1 & a_1 \\ w_2 & -v_2 & a_2 \end{array}\right)$$

zu lösen. Für die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ des Gleichungssysystems gilt es also, drei Fälle zu betrachten:

(1) $r = 1$: In diesem Fall ist nach dem Gauß - Algorithmus die Zeilenstufenform

$$S' = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & (\star) & (\star) \\ 0 & 0 & c \end{array}\right)$$

(1a) Ist $c \neq 0$, so ist das System nicht lösbar, d.h. $G_1 \cap G_2 = \mathbb{L} = \emptyset$ und **die Geraden sind parallel**. (1b) Ist $c = 0$, so ist das System lösbar und die Lösungsmenge hat die Form

$$G_1 \cap G_2 = \mathbb{L} = \{z_0 + \gamma u \; : \; \gamma \in \mathbb{R}\}.$$

Damit ist $G_1 \cap G_2$ wieder eine Gerade und somit ist $G_1 = G_2$, d.h. **die beiden Geraden stimmen überein**.

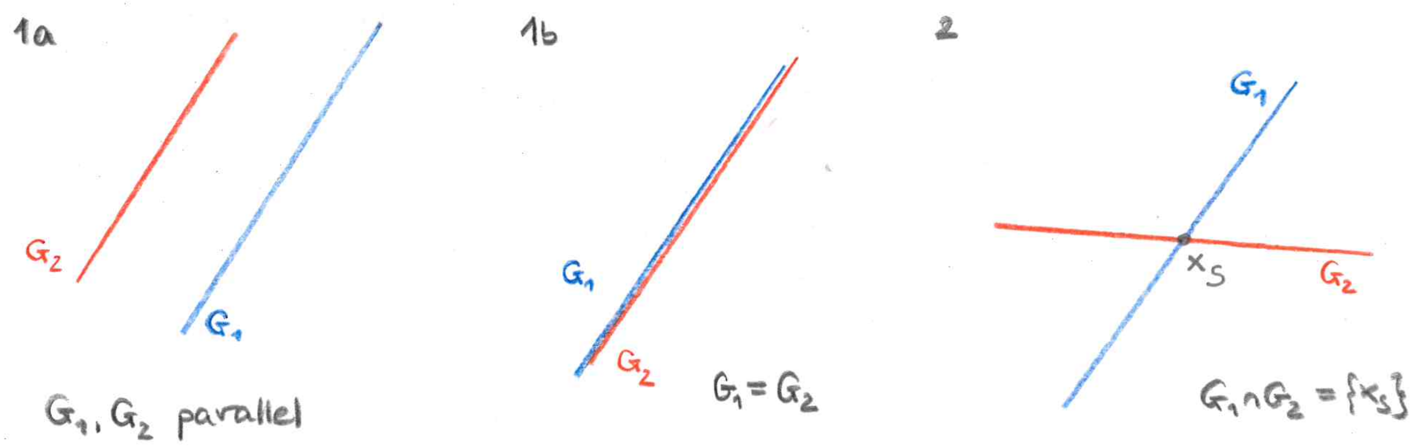
3.5 Anwendung: Lagebeziehungen zweier Geraden in der Ebene

Der dritte zu betrachtende Fall ist nun:

(2) $r = 2$: In diesem Fall ist nach dem Gauß - Algorithmus die Zeilenstufenform

$$S' = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & (\star) \\ 0 & 1 & (\star) \end{array} \right)$$

und die Lösung ist eindeutig, d.h. $G_1 \cap G_2 = \{x_S\}$, **die beiden Geraden schneiden sich in einem Punkt**.



Beispiel 20. Gerade und Ebene im Raum.

Wir betrachten nun die Lagebeziehungen von einer Gerade und einer Ebene in $\mathbb{R}^3$. Analog wie bei den Geraden in der Ebene erhalten wir für den Durchschnitt $G \cap E$ der Geraden G und der Ebene E ein Gleichungssystem für die drei Parameter $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$, nämlich

$$x_0 + \lambda u = y_0 + \mu v + \nu w$$

mit $o \neq u, v, w \in \mathbb{R}^3$ und $x_0, y_0 \in \mathbb{R}^3$ oder

$$\begin{pmatrix} -u_1 & v_1 & w_1 \\ -u_2 & v_2 & w_2 \\ -u_3 & v_3 & w_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix},$$

mit

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}, x_0 - y_0 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}.$$

3.5 Anwendung: Lagebeziehungen von Gerade und Ebene im Raum

In diesem Fall ist die Systemmatrix

$$S = \left(\begin{array}{ccc|c} -u_1 & v_1 & w_1 & a_1 \\ -u_2 & v_2 & w_2 & a_2 \\ -u_3 & v_3 & w_3 & a_3 \end{array}\right).$$

Sei wie bisher r mit $1 \leq r \leq 3$ die Anzahl der Zeilen der *Koeffizientenmatrix*, die in der Zeilenstufenform am Ende des Gauß-Algorithmus nicht vollständig gleich Null sind. Wir erhalten nun die folgenden Fälle:

(1) Es gibt einen Eintrag ungleich Null in der letzten Spalte der Systemmatrix in einer Zeile k mit $k > r$: Dann besitzt das Gleichungssystem keine Lösung und **die Gerade verläuft parallel zur Ebene**.

(2) Angenommen also, es gibt keinen Eintrag ungleich Null in der letzten Spalte der Systemmatrix in einer Zeile k mit $k > r$. Dann haben wir potentiell drei Möglichkeiten:

(2a) $r = 1$: **Diese Möglichkeit kommt nicht vor.** Dies werden wir gleich mit Hilfe des Begriffes des Rangs einer Matrix nachweisen, nachdem wir die Klassifikation der Lagebeziehungen von Gerade und Ebene abgeschlossen haben.

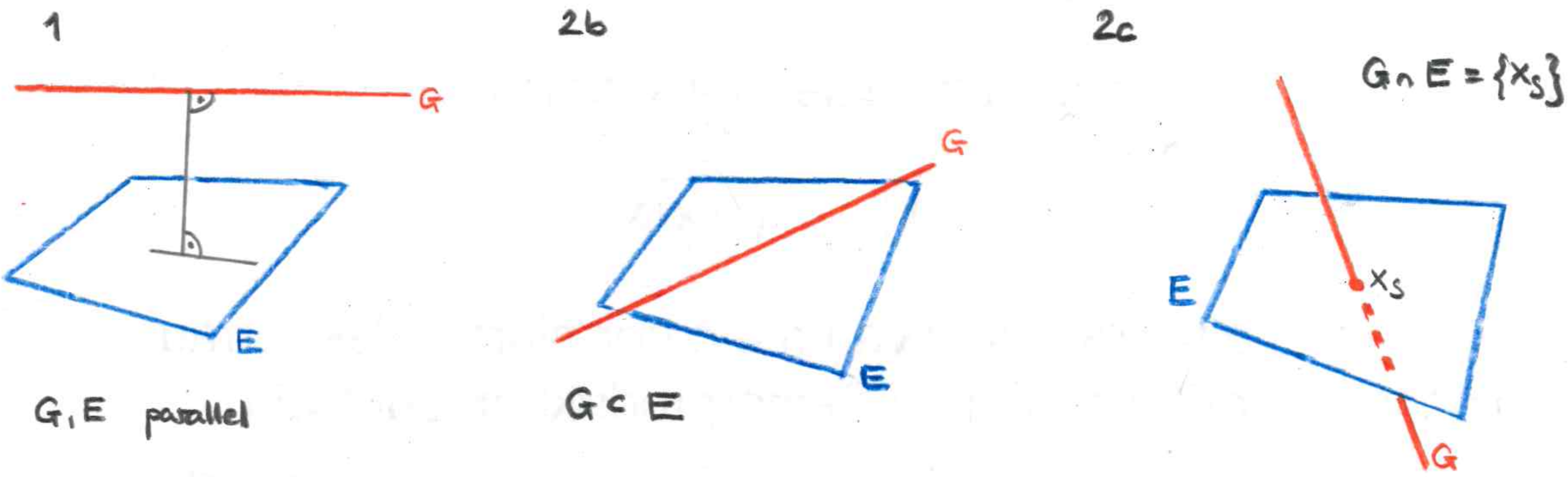
(2b) $r = 2$: In diesem Fall ist die Lösungsmenge von der Form

$$\mathbb{L} = \{x = z_0 + \gamma k \, \gamma \in \mathbb{R}\}$$

mit $x_0, k \in \mathbb{R}^3$, $k \neq 0$. Also ist $E \cap G$ eine Gerade und somit ist $E \cap G = G$, **die Gerade liegt in der Ebene**.

(2c) $r = 3$: In diesem Fall ist die Lösung des Gleichungssystems eindeutig, **die Gerade schneidet die Ebene in einem Punkt**.

3.5 Anwendung: Lagebeziehungen von Gerade und Ebene im Raum



3.6 Zusatz: Der Rang einer Matrix

Wir müssen nun noch Fall (2a) aus Beispiel 20 diskutieren. Dazu betrachten wir zunächst eine Charakterisierung der Zahl $1 \leq r \leq n$, die die Anzahl der Zeilen in der Zeilenstufenform angibt, die nicht identisch Null sind.

Lemma 5

Die r Zeilenvektoren in der Zeilenstufenform einer Matrix A, die nicht identisch Null sind, sind linear unabhängig.

Beweis. Wären Sie linear abhängig, so wäre wegen Beispiel 11 (3) einer der Zeilenvektoren, z. B. z_r als Linearkombination $z_r = \mu_1 z_1 + \ldots + \mu_{r-1} z_{r-1}$ der anderen ausdrückbar. Damit könnte man aber mit Hilfe elementarer Zeilenumformungen die Zeile z_r auch noch annullieren, indem man von z_r nacheinander das μ_i-fache der $i$ten Zeile abzieht. $\square$

3.6 Zusatz: Der Rang einer Matrix

Umgekehrt kann man durch eine Kombination elementarer Zeilenumformungen (ohne Vertauschungen) nichts anderes erreichen, als zu jeder Zeile eine beliebige Linearkombination aller übrigen Zeilen zu addieren. Daraus folgt (ohne Beweis):

Lemma 6

Sind die r Zeilenvektoren in der Zeilenstufenform einer Matrix A, die nicht identisch Null sind, linear unabhängig, so kann keine weitere Zeile annuliert werden.

Damit erhalten wir nun die gesuchte Charakterisierung der Zahl r: Sind $a_1, \dots, a_n$ die n Zeilenvektoren einer Matrix A, so ist $U := \mathrm{span}(a_1, \dots, a_n) \subset \mathbb{R}^n$ ein Untervektorraum. Die Dimension dieses Raumes ist die maximale Anzahl linear unabhängiger Zeilenvektoren der Matrix A. Per Definition ist diese Zahl charakteristisch für die Matrix und ändert sich nicht unter elementaren Zeilenumformungen.

Definition 17

Die Zahl $r = \mathrm{rang}(A) := \dim(a_1, \dots, a_n)$ heißt **Rang** *der Matrix A.*

3.6 Anwendung: Lagebeziehungen von Gerade und Ebene im Raum

Nun zurück zum Fall 2a aus Beispiel 20:

(2a) $r = 1$: **Diese Möglichkeit kommt nicht vor.** Ist nämlich $r = 1$, so sind die erste und die zweite Zeile der Koeffizientenmatrix

$$A = \begin{pmatrix} -u_1 & v_1 & w_1 \\ -u_2 & v_2 & w_2 \\ -u_3 & v_3 & w_3 \end{pmatrix}$$

linear abhängig und somit ist $(-u_2, v_2, w_2) = \lambda(-u_1, v_1, w_1)$. Da die erste und die dritte Zeile genauso linear abhängig sind, folgt $(-u_3, v_3, w_3) = \mu(-u_1, v_1, w_1)$. Dies bedeutet aber mit

$$v = v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \mu \end{pmatrix}, w = w_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \mu \end{pmatrix},$$

dass $w_1 v + v_1 w = o$ im Widerspruch zur linearen Unabhängigkeit von v und w.

3.7 Zusatz: Die Struktur der Lösungsmengen

Wenn die Lösungsmenge des durch die Systemmatrix $S = (A|b)$ gegebenen linearen Gleichungssystems nichtleer ist, lässt sie sich jede Lösung in der Form $x = x_0 + v$ schreiben, wobei x_0 eine feste, spezielle Lösung des Gleichungssystems ist und $v \in \operatorname{span}(v_1, \dots, v_{m-r})$. Dabei ergeben sich die Vektoren $v_1, \dots, v_{m-r}$ aus der Zeilenstufenform der Systemmatrix $S = (A|b)$. Es gibt aber noch eine einfachere, von den Vektoren $v_1, \dots, v_{m-r}$ unabhängige Weise, den Untervektorraum $\operatorname{span}(v_1, \dots, v_{m-r})$ zu beschreiben.

Satz 8

$\operatorname{span}(v_1, \dots, v_{m-r})$ *ist der Lösungsraum des assoziierten homogenen Gleichungssystems.*

Beweis. Sei x_0 eine feste Lösung des Gleichungssystems, d.h. $Ax_0 = b$. (1) Ist $x_0 + v$ eine weitere Lösung, so ist $Av = A(x_0 + v - x_0) = A(x_0 + v) - Ax_0 = b - b = o$. (2) Ist andererseits $Av = o$, so ist $A(x_0 + v) = Ax_0 + Av = Ax_0 = b$, also ist $x_0 + v$ eine Lösung der Gleichung. $\square$

3.8 Zusatz: Das Inverse einer Matrix

Ohne Beweis zitieren wir die folgende Aussage:

Satz 9

Zu jeder quadratischen Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $\operatorname{rang} A = n$ gibt es eine Matrix $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $AB = BA = E$. B heißt **inverse Matrix** *zu A und wird mit A^{-1} bezeichnet.*

Wenn man diese Aussage voraussetzt, kann man B wie folgt bestimmen: Lösen der Gleichung $AB = A(b_1|\dots|b_n) = E$ ist äquivalent dazu, dass man die Systeme

$$Ab_1 = e_1, Ab_2 = e_2, \dots, Ab_n = e_n$$

simultan löst. Da die Koeffizientenmatrix für alle Gleichungen dieselbe ist, müssen wir dazu nicht n verschiedene Systemmatrizen aufstellen, sondern können alle Gleichungen in der Systemmatrix $S = (A|e_1|\dots|e_n) = (A|E) \in \mathbb{R}^{n\times 2n}$ zusammenfassen. Aufgrund der Rangbedingung an A ist somit die Zeilenstufenform der Systemmatrix gegeben durch $S' = (E|(\star))$ mit einer Matrix $(\star) \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Überraschenderweise ist $(\star) = B = A^{-1}$ bereits die Inverse. Überlegen Sie sich mal, warum das so ist !

4.1 Euklidische Räume - Das Skalarprodukt

Euklidische Räume zeichnen sich dadurch aus, dass sich in Ihnen Längen und Winkel messen lassen (und somit auch Flächen und Volumina). Alle derartigen Messungen lassen sich aus einer speziellen Abbildung ableiten, dem sogenannten **Skalarprodukt**.

Definition 18

Das **Standard-Skalarprodukt** $\langle -, - \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *zweier Vektoren*

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

ist gegeben durch

$$\langle x, y \rangle := x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j \in \mathbb{R}.$$

4.1 Euklidische Räume - Das Skalarprodukt

Das Skalarprodukt hat die folgenden Eigenschaften:

Satz 10

Für $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

1. $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$ **(Symmetrie)**,
2. $\langle x + z, y\rangle = \langle x, y\rangle + \langle z, y\rangle$ **(Linearität)**,
3. $\langle \lambda x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle$.

Bemerkung. Aus der Symmetrie des Skalarproduktes folgt, dass die anderen beiden Eigenschaften auch für die zweiten Argumente richtig sind, d.h.

$$\begin{aligned} \langle x, y + z\rangle &= \langle y + z, x\rangle = \langle y, x\rangle + \langle z, x\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle, \\ \langle x, \lambda y\rangle &= \langle \lambda y, x\rangle = \lambda\langle y, x\rangle = \lambda\langle x, y\rangle. \end{aligned}$$

4.1 Euklidische Räume - Die Euklidische Norm

Die Längenmessung von Vektoren wird wie folgt aus dem Skalarprodukt abgeleitet.

Definition 19

Die **Norm** $\| - \| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *auf* $\mathbb{R}^n$ *ist gegeben durch*

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}, x \in \mathbb{R}^n.$$

Beispiel 21. Zur Motivation des Begriffs der Norm und seinem Zusammenhang mit der Längenmessung betrachten wir den **Satz von Pythagoras**: Ist

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2,$$

so ist

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

die Länge des Vektors x, wie man sie nach dem Satz von Pythagoras erhalten würde.

Definition 20

Zwei Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^n$ heißen **orthogonal**, *wenn ihr Skalarprodukt $\langle x, y \rangle = 0$ ist.*

Beispiel 22. (1) $o \in \mathbb{R}^n$ ist orthogonal zu jedem Vektor $y \in \mathbb{R}^n$. (2) Sei $o \neq x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ gegeben. Dann ist der Vektor $y = \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix}$ orthogonal zu x, da

$$\langle x, y \rangle = x_1 x_2 - x_1 x_2 = 0.$$

(3) Sei $o \neq x \in \mathbb{R}^n$, dann ist

$$W := \{ y \in \mathbb{R}^n \, : \, \langle x, y \rangle = 0 \} \subset \mathbb{R}^n$$

ein Untervektorraum, denn mit Satz 10 (1.-3.) gilt für $u, v \in W$ und $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \langle x, u + v \rangle &= \langle u + v, x \rangle = \langle u, x \rangle + \langle v, x \rangle = 0 + 0 = 0, \\ \langle x, \lambda v \rangle &= \langle \lambda v, x \rangle = \lambda \langle v, x \rangle + \lambda 0 = 0, \end{aligned}$$

und somit ist W gegenüber Addition und Skalarenmultiplikation abgeschlossen.

Definition 21

Eine Familie von Vektoren $v_1, \ldots, v_m \in \mathbb{R}^n$ heißt **Orthonormalsystem**, *wenn gilt: (1) $\|v_j\| = 1$ für $1 \leq j \leq m$, (2) die Vektoren sind paarweise orthogonal, d.h. $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ für alle $0 \leq i \neq j \leq m$.*

Satz 11

Ein Orthonormalsystem $v_1, \ldots, v_m$ ist automatisch eine Basis von $\operatorname{span}(v_1, \ldots, v_m) \subset \mathbb{R}^n$.

Beweis. Es bleibt zu zeigen, dass die Vektoren linear unabhängig sind: Sei also $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m = o$. Dann ist

$$0 = \langle \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m, \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m \rangle = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^2 \|v_j\|^2 = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^2.$$

Daraus folgt $\lambda_j = 0$ für alle $1 \leq j \leq m$. $\square$

4.1 Euklidische Räume - Das Skalarprodukt

Das Skalarprodukt zweier Vektoren $o \neq x, y \in \mathbb{R}^2$ besitzt folgende anschauliche Bedeutung:

Satz 12

Sind $o \neq x, y \in \mathbb{R}^2$ ebene Vektoren und $\alpha \in [0, \pi]$ der Winkel zwischen den beiden Vektoren. Dann ist

$$\langle x, y \rangle = \|x\| \, \|y\| \, \cos(\alpha).$$

Beweis. Ist $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, so ist $x^\perp := \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix}$ nach Beispiel 22 orthogonal zu x. Damit ist nach Satz 11 x, $x^\perp$ eine Basis von $\mathbb{R}^2$ und wir können somit y schreiben als $y = \lambda x + \mu x^\perp$. Daraus folgt

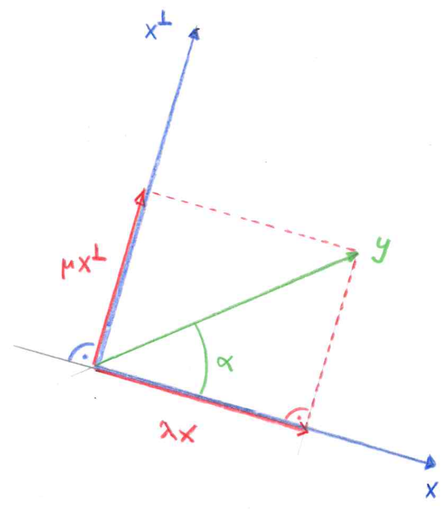
$$\langle x, y \rangle = \langle x, \lambda x + \mu x^\perp \rangle = \lambda \langle x, x \rangle + \mu \langle x, x^\perp \rangle = \lambda \|x\|^2.$$

4.1 Euklidische Räume - Das Skalarprodukt

Wie man an dem Bild sieht, ist aber nach den trigonometrischen Formeln aus dem Vorkurs - Teil über Analysis

$$\lambda\|x\| = \|y\| \cos(\alpha).$$

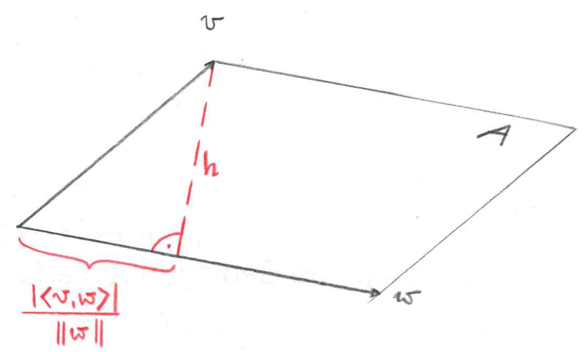
Daraus folgt die Behauptung. $\square$



Bemerkung. Die Formel ist genauso richtig für $x, y \in \mathbb{R}^n$, wenn man den Winkel zwischen x und y **in der von x und y aufgespannten Ebene** benutzt.

Beispiel 23. Die Fläche eines Parallelogramms.

Die Fläche des von $v, w \in \mathbb{R}^2$ aufgespannten Parallelogramms ist $A = \|w\|\, h$.



Mit $h^2 + \left(\frac{\langle v,w\rangle}{\|w\|}\right)^2 = \|v\|^2$ nach dem Satz von Pythagoras folgt

$$A = \sqrt{\langle v, v\rangle\langle w, w\rangle - \langle v, w\rangle^2}.$$

Bemerkung. Die Formel gilt genauso für die Fläche eines von $x, y \in \mathbb{R}^n$ aufgespannten Parallelogramms.

4.2 Anwendung: Der Cosinussatz

Mit Hilfe der Vektorrechnung kann man verschiedenste Aussagen der analytischen Geometrie beweisen, z.B. den **Cosinussatz**:

Satz 13

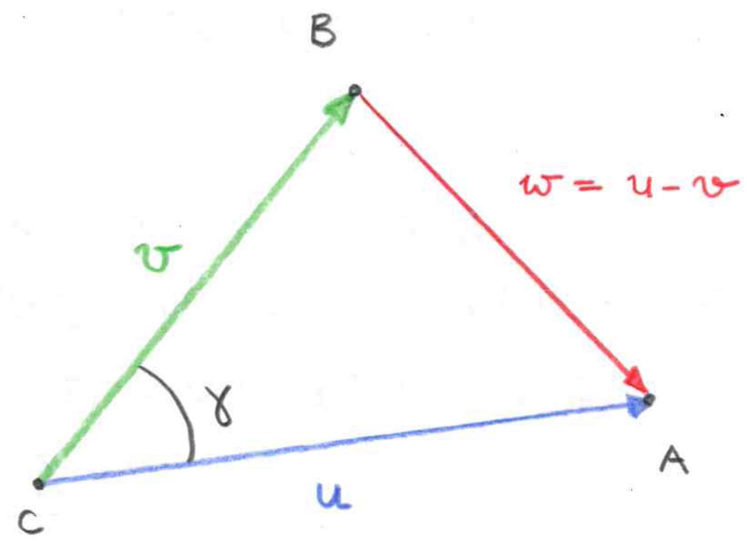
Ist $\Delta(A, B, C)$ ein Dreieck mit den Eckpunkte $A, B, C \in \mathbb{R}^2$ und den Seitenlängen a, b, c, und ist $\gamma = \gamma(a, b)$ der (unorientierte) Innenwinkel zwischen a und b, so gilt $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\alpha)$.

Beweis. Sei $u = A - C$ mit $v = B - C$, wobei $a = \|v\|$ und $b = \|u\|$. Dann ist $w = A - B = u - v$. Dann ist

$$\begin{aligned} c^2 &= \langle w, w\rangle = \langle u - v, u - v\rangle = \langle u, u\rangle + \langle v, v\rangle - 2\langle u, v\rangle \\ &= b^2 + a^2 - 2ab\cos(\gamma). \end{aligned}$$

□

4.2 Anwendung: Der Cosinussatz



Cosinussatz

4.2 Anwendung: Abstand Punkt zu Gerade in der Ebene

Sei $G := \{x_0 + tv \ : \ t \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$ und $y \in \mathbb{R}^2$, $y \notin G$, ein Punkt. Der **Abstand von y zur Geraden** G ist definiert als das Minimum

$$d := \min\{\|x_0 + tv - y\| \ : \ t \in \mathbb{R}\}.$$

Wir betrachten daher die Funktion $D : \mathbb{R} \to [0, \infty), t \mapsto \|x_0 + tv - y\|$ und suchen das Minimum dieser Funktion. Da es einfacher abzuleiten ist, betrachten wir

$$f(t) = D^2(t) = \langle x_0 - y + tv, x_0 - y + tv\rangle = \|x_0 - y\|^2 + 2t\langle v, x_0 - y\rangle + t^2\|v\|^2.$$

Die Ableitung dieser Funktion ist $f'(t) = 2(\langle v, x_0 - y\rangle + t\|v\|^2)$ mit $f''(t) = \|v\|^2 > 0$. Damit ist bei $t_M = -\langle v, x_0 - y\rangle/\|v\|^2$ ein Minimum der Funktion und somit ist

$$\begin{aligned} d^2 &= \|x_0 + t_M v - y\| = \|x_0 - y - \frac{\langle v, x_0 - y\rangle}{\|v\|^2} v\|^2 \\ &= \left\langle x_0 - y - \frac{\langle v, x_0 - y\rangle}{\|v\|^2} v, x_0 - y - \frac{\langle v, x_0 - y\rangle}{\|v\|^2} v \right\rangle = \|x_0 - y\|^2 - \frac{\langle v, x_0 - y\rangle^2}{\|v\|^2}. \end{aligned}$$

4.2 Anwendung: Abstand Punkt zu Gerade in der Ebene

Der minimale Abstand d der Geraden zum Punkt y wird also in einem Punkt auf der Geraden angenommen und zwar in

$$x^* = x_0 - \frac{\langle v, x_0 - y\rangle}{\|v\|^2} v.$$

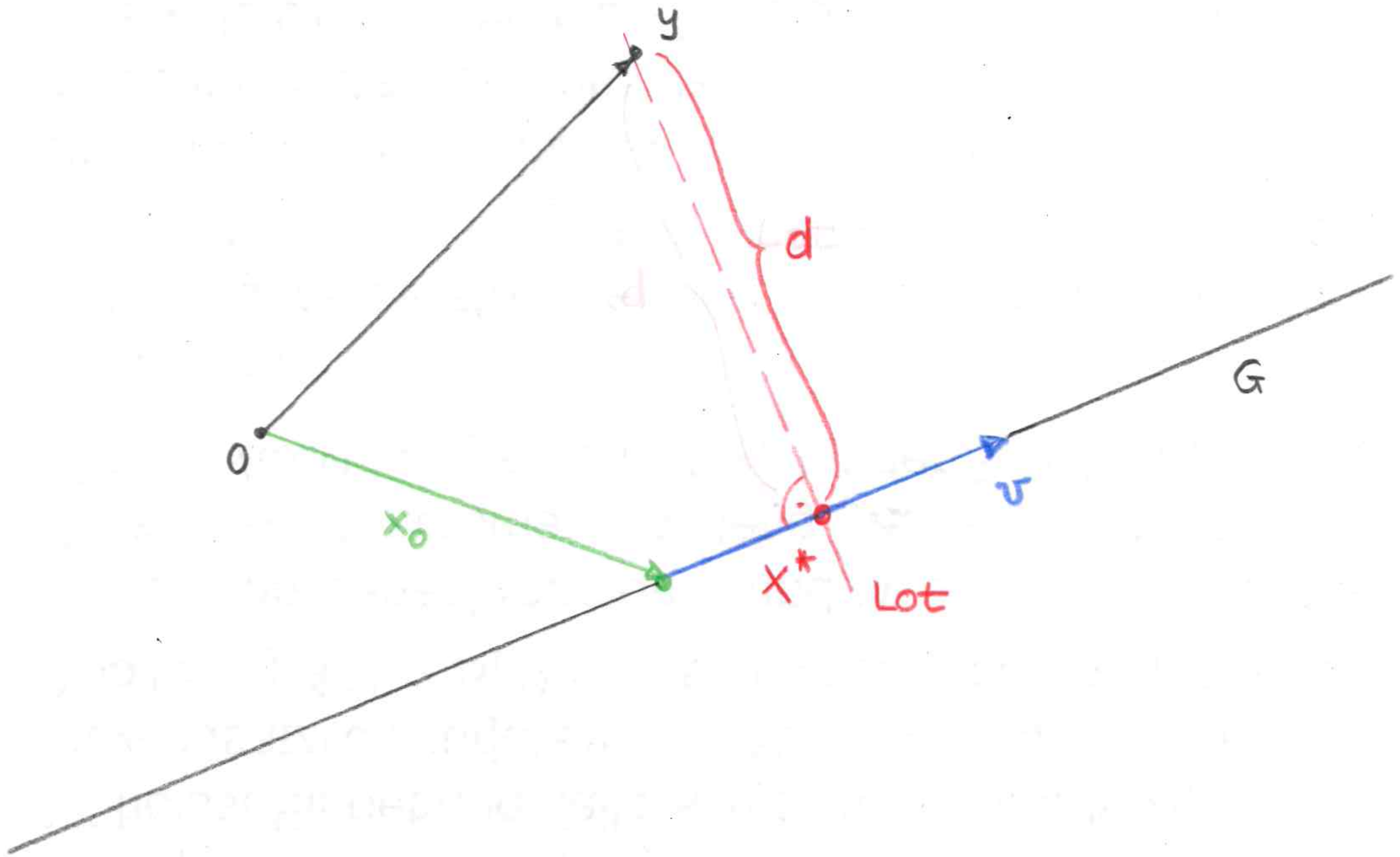
Wie können wir diesen Punkt geometrisch charakterisieren ? Dazu berechnen wir

$$\begin{aligned}\langle v, x^* - y\rangle &= \left\langle v, x_0 - y - \frac{\langle v, x_0 - y\rangle}{\|v\|^2} v\right\rangle = \langle v, x_0 - y\rangle - \frac{\langle v, x_0 - y\rangle}{\|v\|^2}\langle v, v\rangle \\ &= \langle v, x_0 - y\rangle - \langle v, x_0 - y\rangle = 0.\end{aligned}$$

Dies bedeutet, dass der Verbindungsvektor zwischen x^* und y senkrecht auf der Geraden steht und somit der kürzeste Abstand dort angenommen wird, wo das von y ausgehende Lot auf die Gerade die Gerade trifft.

Bemerkung. Diese Tatsache, sowie die Formeln für x^* und d^2 sind in jeder Dimension richtig, wenn man die entsprechenden Skalarprodukte benutzt.

4.2 Anwendung: Abstand Punkt zu Gerade in der Ebene



Lehrstuhl A für Mathematik | RWTH AACHEN UNIVERSITY

Definition 22

Die **Sphäre** $S(z, r)$ *vom Radius* $r > 0$ *mit Mittelpunkt* z *ist die Menge aller Punkte* $x \in \mathbb{R}^n$, *die von* z *den Abstand* r *haben, d.h.*

$$S(z; r) := \{x \in \mathbb{R}^n \, : \, \|x - z\| = r\}.$$

Der **offene Ball** $B(z, r)$ *vom Radius* $r > 0$ *mit Mittelpunkt* z *ist die Menge aller Punkte* $x \in \mathbb{R}^n$, *die von* z *einen Abstand kleiner als* r *haben, d.h.*

$$B(z; r) := \{x \in \mathbb{R}^n \, : \, \|x - z\| < r\}.$$

4.2 Anwendung: Der Schnitt zweier Kreise in $\mathbb{R}^2$

Sind $u, v \in \mathbb{R}^2$ mit $u \neq v$ die Mittelpunkte zweier Kreise $S(u; r)$ und $S(v; R)$ mit $0 < r \leq R$, so interessieren wir uns für den Durchschnitt

$$S(u; r) \cap S(v; R) = \{x \in \mathbb{R}^2 \, : \, \|x - u\| = r, \|x - v\| = R\},$$

wobei wir $R + r \geq \|u - v\|$ voraussetzen, denn sonst ist der Durchschnitt leer. Wir müssen also das (äquivalente) Gleichungssystem

$$\langle x - u, x - u \rangle = \|x - u\|^2 = r^2, \langle x - v, x - v \rangle = \|x - v\|^2 = R^2$$

lösen, und dies ist sicherlich kein lineares Gleichungssystem. Wenn wir aber die zweite Gleichung in diesem System durch die Differenz der zweiten und der ersten Gleichung ersetzen, erhalten wir das äquivalente System

$$\langle x - u, x - u \rangle = \|x - u\|^2 = r^2, \langle u - v, x \rangle = \frac{1}{2}\left(R^2 + \|u\|^2 - r^2 - \|v\|^2\right) =: \rho$$

und die zweite Gleichung ist nun **linear** in x.

4.2 Anwendung: Der Schnitt zweier Kreise in $\mathbb{R}^2$

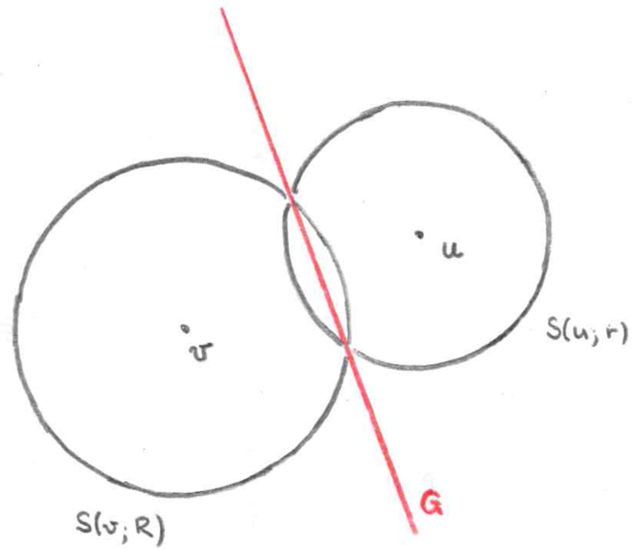
Für $u_1 \neq v_1$ ist somit die **Systemmatrix** der zweiten Gleichung gegeben durch $S = \left(1, \frac{u_2-v_2}{u_1-v_1} \,\middle|\, \frac{\rho}{u_1-v_1}\right)$ und die Lösungsmenge ist die Gerade

$$G = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \,:\, x = x(t) = \begin{pmatrix} \frac{\rho}{u_1-v_1} \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \frac{v_2-u_2}{u_1-v_1} \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Das Problems des Durchschnitts zweier Kreise ist also zurückgeführt auf das Problem des Durchschnitts eines Kreises und einer Geraden.

Dazu muss man nur noch die maximal zwei Punkte $x(t) \in G$ bestimmen, für die $\|x(t) - u\|^2 = r^2$ ist. Dies führt auf eine quadratische Gleichung in der Variablen t, die zugehörige Rechnung werden wir aber hier nicht mehr durchführen.

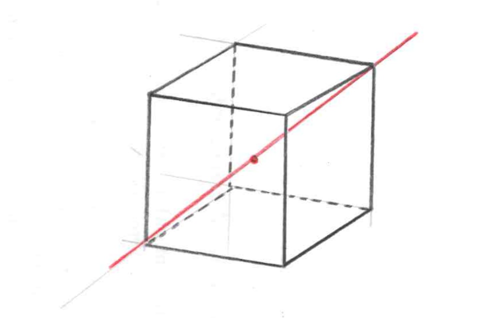
4.2 Anwendung: Der Schnitt zweier Kreise in $\mathbb{R}^2$



Durchschnitt zweier Kreise und Durchschnitt Kreis/Gerade

4.3 Anwendung: Der geteilte Würfel

Wir betrachten folgendes Problem: Sei W ein Würfel mit Raumdiagonale (der Diagonale zwischen gegenüberliegenden Eckpunkten des Würfels) D.



Wir schneiden nun den Würfel entlang der Ebene, die senkrecht zu D durch den Mittelpunkt des Würfels verläuft, in zwei Teile. Was können wir dann über die Form der Schnittfläche sagen, ?

4.3 Anwendung: Der geteilte Würfel

Die Kantenlänge des Würfels ist bedeutungslos für die Form der Schnittfläche, wir wählen also der Einfachheit halber einen Würfel der Kantenlänge 2. Einen Würfel mit Kantenlänge 2 und Mittelpunkt $o \in \mathbb{R}^3$ können wir mit Hilfe der kanonischen Basisvektoren beschreiben durch

$$W = \{x = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3 \,:\, -1 \leq \alpha, \beta, \gamma \leq 1\}$$

und seine Raumdiagonale ist die Gerade $D := \{\tau(e_1 + e_2 + e_3) \,:\, \tau \in \mathbb{R}\}$.
Sei also

$$E := \{x \in \mathbb{R}^3 \,:\, \langle x, e_1 + e_2 + e_3 \rangle = 0\}$$

die Ebene, die orthogonal zur Diagonalen ist und durch den Nullpunkt geht. Dann suchen wir eine möglichst genaue Beschreibung der Menge $W \cap E$.

4.3 Anwendung: Der geteilte Würfel

Die Vektoren

$$b_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, b_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

sind beide orthogonal zu

$$e_1 + e_2 + e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und liegen somit in E. Da $\|b_1\| = \|b_2\| = 1$ ist und die beiden orthogonal sind, bilden Sie eine Orthonormalbasis von E. Jedes Element $y \in E$ läßt sich also eindeutig in der Form $y = \lambda b_1 + \mu b_2$ mit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ schreiben.

4.3 Anwendung: Der geteilte Würfel

Die Schnittfläche $W \cap E$ besteht aus allen $y \in E$ mit $y \in W$, also wegen

$$\lambda b_1 + \mu b_2 = y = \langle y, e_1 \rangle e_1 + \langle y, e_2 \rangle e_2 + \langle y, e_3 \rangle e_3$$

suchen wir nach denjenigen Vektoren in E, für die gilt

$$\begin{aligned} -1 &\leq \langle e_1, \lambda b_1 + \mu b_2 \rangle \leq 1, \\ -1 &\leq \langle e_2, \lambda b_1 + \mu b_2 \rangle \leq 1, \\ -1 &\leq \langle e_3, \lambda b_1 + \mu b_2 \rangle \leq 1. \end{aligned}$$

4.3 Anwendung: Der geteilte Würfel

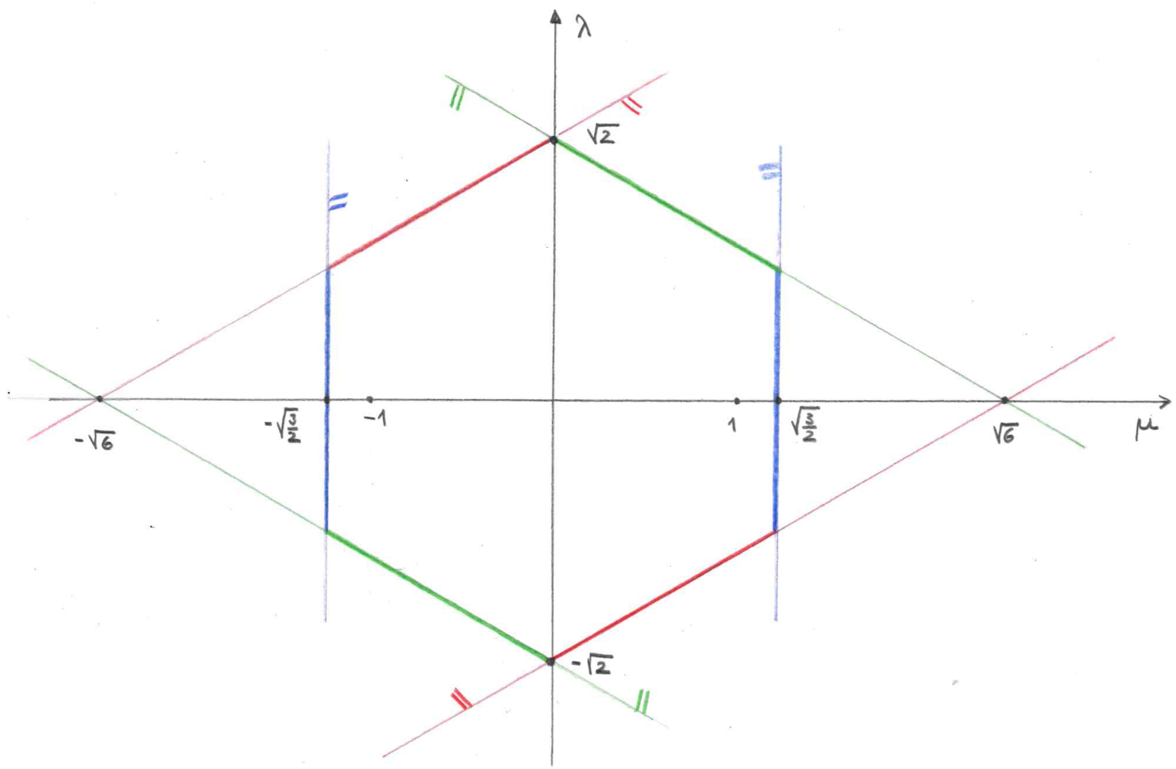
Einsetzen der Vektoren b_1 und b_2 ergibt

$$
\begin{aligned}
-1 &\le \frac{\lambda}{\sqrt{2}} + \frac{\mu}{\sqrt{6}} \le 1, \\
-1 &\le -\frac{\lambda}{\sqrt{2}} + \frac{\mu}{\sqrt{6}} \le 1, \\
-\sqrt{\frac{3}{2}} &\le \mu \le \sqrt{\frac{3}{2}},
\end{aligned}
$$

oder

$$
\begin{aligned}
-\sqrt{2} - \frac{\mu}{\sqrt{3}} \le \ &\lambda \le \sqrt{2} - \frac{\mu}{\sqrt{3}}, \\
-\sqrt{2} + \frac{\mu}{\sqrt{3}} \le \ &\lambda \le \sqrt{2} + \frac{\mu}{\sqrt{3}}, \\
-\sqrt{\frac{3}{2}} \le \ &\mu \le \sqrt{\frac{3}{2}}.
\end{aligned}
$$

Wir erhalten somit abschließend folgendes Bild:



Die Schnittfläche ist also ein regelmäßiges Sechseck !

Lehrstuhl A für Mathematik RWTH AACHEN UNIVERSITY