Dr. K. Maurischat
Dr. S. Bleß

Aachen, 12. Oktober 2020

Analysis

Übungsaufgaben

im Vorkurs Mathematik 2020, RWTH Aachen University

— Folgen, Konvergenz —

Aufgabe 1

a) Zeigen Sie mit Hilfe der Definition der Konvergenz: Eine Folge $(a_n)_{n\geqslant 1}$ konvergiert genau dann gegen Null, wenn die Folge der Beträge $(|a_n|)_{n\geqslant 1}$ gegen Null konvergiert.

b) Konstruieren Sie ein Beispiel einer divergenten Folge $(a_n)_{n\geqslant 1}$, so dass die Folge der Beträge konvergiert.

Aufgabe 2

Zeigen Sie mit Hilfe der Definition der Konvergenz: Ist $(a_n)_{n\geq 1}$ eine Nullfolge und $(b_n)_{n\geq 1}$ beschränkt, so ist $(a_n \cdot b_n)_{n\geq 1}$ eine Nullfolge.

Aufgabe 3

Bestimmen Sie den Grenzwert a der Folgen $(a_n)_n, n \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie Ihre Vermutung, indem Sie zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{R}$ bestimmen mit $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n > n_0(\varepsilon)$.

a) $a_n = \dfrac{n}{n+1}$, b) $a_n = \dfrac{3}{n^2}$, c) $a_n = 5 + \dfrac{1}{\sqrt{n}}$,

d) $a_n = \sqrt{1 + \dfrac{1}{n}}$, e) $a_n = e^{-n}$, f) $a_n = \dfrac{\sin(n)}{n}$.

Aufgabe 4

Bestimmen Sie den Grenzwert a (falls er existiert) der angegebenen Folgen $(a_n)_n$. Hinweis: Die Grenzwertsätze können hierbei hilfreich sein.

a) $a_n = \dfrac{n+1}{2n}$, b) $a_n = \dfrac{1}{n^2\sqrt{n}} + \dfrac{1}{n^3}$, c) $a_n = (-1)^n \dfrac{1}{n+3}$,

d) $a_n = \dfrac{2n^3 - n + 1}{n^3 + 3n^2}$, e) $a_n = n \cdot \dfrac{1 - 4^{-n}}{3n+5}$, f) $a_n = \sqrt[2n]{5^{n+1}}$,

g) $a_n = \dfrac{\binom{n}{3}}{n^3}$, h) $a_n = n\sqrt{1 + \dfrac{1}{n^2}} - n$, i) $a_n = \frac{1}{3}\left(1 - \dfrac{1}{10^n}\right)$,

j) $a_n = \dfrac{n^2}{2^n}$, k) $a_n = \sqrt{n^2 + n} - n$, l) $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n!}$.

Aufgabe 5 (Fibonacci-Folge)

Vom italienischen Mathematiker Leonardo da Pisa, genannt Fibonacci, wurde 1202 folgendes Problem untersucht: Ein junges Kaninchenpaar befindet sich zum Zeitpunkt $t = 0$ in einem Garten. Nach einem Monat ist das Paar erwachsen und bringt ein neues Paar Kaninchen zur Welt. Dieses Paar Jungtiere braucht wieder einen Monat, bis es erwachsen ist und selbst ein Paar als Nachkommen hat. Dieser Prozess wiederholt sich nun immer weiter und jedes Kaninchenpaar verhält sich gleichermaßen. Fibonacci untersuchte die Frage, wie sich die Population entwickelt unter den beiden folgenden vereinfachten Annahmen:

1. Jedes erwachsene Paar bekommen jeden Monat ein Paar Jungtiere. Jungtiere sind nach einem Monat erwachsen.
2. Es kommen keine weiteren Kaninchen von außen hinzu.
3. Kaninchen sind unsterblich (keine Kaninchen verschwinden).

Untersuchen Sie die Frage, wie viele Kaninchenpaare nach $n \in \mathbb{N}$ Monaten vorhanden sind. Geben Sie dazu die ersten 10 Folgenglieder explizit an. Finden Sie danach eine Rekursionsformel für diese Folge. Welchen Grenzwert erwarten Sie für $n \to \infty$?

Aufgabe 6 ($\star$)

Untersuchen Sie die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Monotonie und Beschränktheit.
Hinweis: Man nennt eine Folge monoton fallend (wachsend), falls $a_{n+1} \leq a_n$ ($a_{n+1} \geq a_n$) gilt. Man nennt eine Folge streng monoton fallend (wachsend), falls $a_{n+1} < a_n$ ($a_{n+1} > a_n$) gilt.

a) $a_n = \dfrac{1}{n^2}$, b) $a_n = \dfrac{n+1}{5n}$, c) $a_n = \dfrac{n}{n^2+1}$,

d) $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n+3}$, e) $a_n = \dfrac{n^2-1}{n}$, f) $a_n = \dfrac{3n-2n^2}{n^2+1}$,

g) $a_n = \dfrac{\sqrt{5n}}{\sqrt{n+1}}$, h) $a_n = \dfrac{n\sqrt{n}+10}{n^2}$, i) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

— Funktionen —

Aufgabe 7

Bestimmen Sie jeweils, ob es sich bei den angegebenen Mengen um Intervalle handelt. Geben Sie in diesem Fall bitte die Intervallschreibweise an.

a) $[0,1] \cup (1,2]$, b) $[-1,0] \cup [2,3]$ c) $[-2,3] \cap (-2,4)$, d) $(2,5] \setminus (4,5]$,

e) $(-\infty,5] \cap (1,6)$, f) $\{x^2 : x \in \mathbb{R}\}$, g) $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$, h) $\{-1,7\}$,

i) $\{x \in \mathbb{R} : x < 0\}$, j) $(0,2) \cap \mathbb{Q}$, k) $\{x \in \mathbb{R} : x^2 < 1\}$, l) $\{x \in \mathbb{R} : x^2 > 7\}$.

Aufgabe 8

Bestimmen Sie jeweils den Definitionsbereich von f/g. Untersuchen Sie, ob sich f/g in den Definitionslücken noch sinnvoll erklären lässt. Falls ja, mit welchem Funktionswert?

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2, \quad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = x^2 - 7x + 12$

b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x - 3, \quad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = x^2 - 10x + 21$

c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 1, \quad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = |x| - 5$

d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x - 1, \quad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = x^3 - 1$

Aufgabe 9

Gegeben seien die Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 1 - x^2$ und $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R},\ g(x) = \sqrt{x}$. Bestimmen Sie die Definitionsbereiche $D(f \circ g)$ und $D(g \circ f)$ und geben Sie $f \circ g$ und $g \circ f$ explizit an.

Aufgabe 10

Finden Sie Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sodass

a) $f \circ g = g \circ f$,

b) $f \circ g \neq g \circ f$.

Benutzen Sie nicht die Beispiele aus den vorangegangenen Aufgaben und betrachten Sie nicht die Identitätsabbildung, d.h. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) := x$ oder $g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) := x$ ist nicht zulässig.

— Monotonie —

Aufgabe 11

Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf ihrem Definitionsbereich auf (strenge) Monotonie. Bestimmen Sie die maximalen Monotoniebereiche **ohne** Zuhilfenahme von Methoden der Differentialrechnung. Versuchen Sie dabei möglichst die jeweils voranstehenden Aufgabenteile zu benutzen.

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^5$,

b) $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{x}$,

c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2$,

d) $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{x}$,

e) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = |x|$,

f) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2 + 2x + 2$,

g) $f : [-1, 1] \to \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{1 - x^2}$,

h) $f : \mathbb{R} \setminus \{3, 4\} \to \mathbb{R},\ f(x) = (x^2 - 7x + 12)^{-1}$.

Hinweis: Benutzen Sie in Teil d) die 3. Binomische Formel.

Aufgabe 12

Seien $D, E \subseteq \mathbb{R}$ nichtleere Teilmengen. Zeigen Sie:

a) Ist $f : D \to \mathbb{R}$ eine (streng) monoton wachsende Funktion, so ist $-f : D \to \mathbb{R}$ mit $(-f)(x) := -f(x)$ (streng) monoton fallend.

b) Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ monoton wachsende Funktionen mit $f, g \geqslant 0$ auf D, so ist auch $f \cdot g : D \to \mathbb{R}$ mit $(f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x)$ monoton wachsend.

c) Seien $f : D \to \mathbb{R}$ und $g : E \to \mathbb{R}$ monoton mit $g(E) \subseteq D$. Zeigen Sie, dass dann auch $f \circ g : E \to \mathbb{R}$ monoton ist. Welche Art von Monotonie liegt jeweils vor?

d) Sei $f : D \to W$ streng monoton und bijektiv. Zeigen Sie, dass dann auch $f^{-1} : W \to D$ streng monoton ist.

Aufgabe 13

Bestimmen Sie den Wertebereich der folgenden Funktionen.

a) $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{1}{x}$,

b) $f : [-1, 2] \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{1}{x-3}$

c) $f : (-4, -1] \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2 + 2x + 2$,

d) $f : [-1, 1] \to \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{1 - x^2}$

e) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$,

f) $f : (-1, 1) \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

g) $f : (4, 5] \to \mathbb{R},\ f(x) = (x^2 - 7x + 12)^{-1}$.

— Stetigkeit —

Aufgabe 14

Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf Stetigkeit in den angegebenen Punkten.

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 2|x|$ in $x_0 = 0$.

b)

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

in $x_0 = 0$.

c)

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 1}, & x \neq 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$$

in $x_0 = 1$.

d)

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & x \geqslant 0 \\ \sqrt{1-x}, & x < 0 \end{cases}$$

in $x_0 = 0$.

Aufgabe 15

Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf Stetigkeit in ihrem Definitionsbereich.

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x + 4$

b) $f : \mathbb{R} \setminus \{4\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{x^2 - 16}{x - 4}$

c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} x + 4, & -\infty < x \leqslant 4 \\ x + 6, & 4 < x < \infty \end{cases}$

d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 16}{x - 4}, & x \neq 4 \\ 10, & x = 4 \end{cases}$

Aufgabe 16

Bestimmen Sie alle $\alpha \in \mathbb{R}$, sodass

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} x^2 + \alpha \cdot x, & x \geq 1 \\ \sqrt{x}, & x < 1 \end{cases}$$

stetig in $x_0 = 1$ ist.

— Differenzierbarkeit —

Aufgabe 17

Untersuchen Sie die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto |x^2 - 1|$$

auf Differenzierbarkeit.

Aufgabe 18

Untersuchen Sie die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x|x|$$

auf Differenzierbarkeit im Nullpunkt. Bestimmen Sie gegebenenfalls $f'(0)$.

Aufgabe 19

Zeigen Sie durch vollständige Induktion und mit Hilfe der Definition der Ableitung, dass für die Funktionen $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^n$ gilt:

$$f_n'(x) = nx^{n-1}.$$

Hinweis: Produktregel.

Aufgabe 20

Bestimmen Sie jeweils die Ableitung f' der Funktionen f, welche auf geeigneten Definitionsbereichen durch folgende Abbildungsvorschriften gegeben sind:

a) $f(x) = 5x^3 + 7x^2 - 4x + 9$,

b) $f(x) = \frac{1}{3}x^6 + x + \sqrt{x}$,

c) $f(x) = 4x^4 - \sqrt{4x}$,

d) $f(x) = 8x^2 - x + 2 + 6\sqrt[3]{x^4}$,

e) $f(x) = \frac{1}{2}x^{-2} + 2x^{-3} - 3x^{-4}$,

f) $f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^5}}$,

g) $f(x) = e^x \cdot x^2 + 3x^5$,

h) $f(x) = 4x^4 \cdot 4^x$,

i) $f(x) = 2x \cdot \ln(x) + \ln(x^3)$,

j) $f(x) = 3x^4 \cdot \sin(x)$,

k) $f(x) = (e^{-x} + 4^x)^2$,

l) $f(x) = \ln(x)^2 \cdot e^x$,

m) $f(x) = \frac{3x^2 + 4}{2x}$,

n) $f(x) = \frac{1}{2 + \sqrt{x}}$,

o) $f(x) = \frac{7x^2 + 3x + 1}{x^2 + x}$,

p) $f(x) = (5x - 3)^5$

q) $f(x) = \left(3x^4 - \frac{2}{x} + 7\right)^4$,

r) $f(x) = \sqrt[3]{(2x^3 + 3x)^5}$.

Aufgabe 21

Bestimmen Sie zunächst die Definitionsbereiche der Funktionen f, welche durch die folgenden Abbildungsvorschriften gegeben sind. Bestimmen Sie im Anschluss f'.

a) $f(x) = \frac{x-1}{x^2+1}$, b) $f(x) = \frac{3x+2}{(x^2-4)^3}$, c) $f(x) = \frac{2x-1}{(x^2-4x+3)^2}$.

Aufgabe 22

Bestimmen Sie die maximalen Definitionsbereiche der Funktionen f, welche durch die folgenden Abbildungsvorschriften gegeben sind. Bestimmen Sie in jedem Punkt, in welchem f differenzierbar ist, die Ableitung. (Randpunkte des Definitionsbereichs sind dabei zu vernachlässigen.)

a) $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 4x - 5}$, b) $\sqrt{x + \sqrt[4]{x} + \sqrt[5]{x}}$, c) $f(x) = \cos\left(\tan(1 + x^2)\right)$.

Aufgabe 23

Bestimmen Sie ohne Rechnung und nur mit der Definition des bestimmten Integrals

$$\int_{-1}^{3}(6x+1)dx, \quad \int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}dx,$$
$$\int_{-4}^{4}||x|-2|dx.$$

Aufgabe 24

Bestimmen Sie jeweils eine Stammfunktion F der Funktionen f, welche durch folgende Abbildungsvorschriften gegeben sind.

a) $f(x) = 4x^3+3x+1$, b) $f(x) = \sqrt[5]{x^3}$, c) $f(x) = 2e^x$,

d) $f(x) = \dfrac{1}{4\sqrt[4]{x}}$, e) $f(x) = 5x^4+4+\dfrac{6}{x}$, f) $f(x) = \dfrac{2x+3}{\sqrt{x}}$,

g) $f(x) = (x-2)^2$, h) $f(x) = 4^x$.

Aufgabe 25

Bestimmen Sie:

a) $\displaystyle\int_0^2 (3x+1)^2\,\mathrm{d}x$, b) $\displaystyle\int_1^4 (\sqrt{x}+x)\,\mathrm{d}x$, c) $\displaystyle\int_0^1 (2-x)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 2(x-1)\,\mathrm{d}x$,

d) $\displaystyle\int_0^1 x^4\,\mathrm{d}x - \int_3^1 x^4\,\mathrm{d}x + \int_3^5 x^4\,\mathrm{d}x$, e) $\displaystyle\int_1^4 x(x^2+x)\,\mathrm{d}x + \int_4^7 (x^3+x^2)\,\mathrm{d}x - \int_1^7 (x^3+x^2)\,\mathrm{d}x$,

f) $\displaystyle\int_1^2 \left(\frac{1}{x^4}+\frac{1}{x^5}\right)\mathrm{d}x$, g) $\displaystyle\int_1^4 5\sqrt[4]{x}\,\mathrm{d}x$, h) $\displaystyle\int_{-1}^1 \left(e^{\frac{x}{3}}+3x^2\right)\mathrm{d}x$,

i) $\displaystyle\int_0^1 5^x\,\mathrm{d}x$, j) $\displaystyle\int_{-3}^{-1} \frac{4}{x}\,\mathrm{d}x$.

Aufgabe 26

Bestimmen Sie mit Hilfe der Substitutionsmethode jeweils eine Stammfunktion F der Funktionen f, welche durch folgende Abbildungsvorschriften gegeben sind.

a) $f(x) = (2x+3)^3$, b) $f(x) = \dfrac{2e^x}{3+2e^x}$, c) $f(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{x^2+3}}$,

d) $f(x) = \dfrac{9x^2+1}{x(3x^2+1)}$, e) $f(x) = \dfrac{3}{3x\ln(x)+2x}$, f) $f(x) = \dfrac{1}{(x+2)\ln(x+2)}$.

Aufgabe 27

Bestimmen Sie den Wert I der folgenden Integrale mit Hilfe der Substitutionsmethode.

a) $\displaystyle\int_0^1 (2x+3)^4 \,\mathrm{d}x$, b) $\displaystyle\int_0^1 (1+x^3)^2 \cdot 3x^2 \,\mathrm{d}x$, c) $\displaystyle\int_3^5 \frac{2x+4}{x^2+4x} \,\mathrm{d}x$,

d) $\displaystyle\int_2^{10} \frac{x}{\sqrt{2x+5}} \,\mathrm{d}x$, e) $\displaystyle\int_0^1 (6x+5) \cdot e^{3x^2+5x} \,\mathrm{d}x$, f) $\displaystyle\int_{-4}^{12} 4x\sqrt[4]{x+4} \,\mathrm{d}x$.

Aufgabe 28

Bestimmen Sie mit Hilfe der partiellen Integration jeweils eine Stammfunktion F der Funktionen f, welche durch folgende Abbildungsvorschriften gegeben sind.

a) $f(x) = x \cdot e^x$, b) $f(x) = e^x(x^2+3x)$, c) $f(x) = \ln(x)$,

d) $f(x) = x^2 \cdot \ln(x)$, e) $f(x) = \log_2(x)$, f) $f(x) = \ln(x)^2$.

Aufgabe 29

Bestimmen Sie die folgenden Integrale unter Benutzung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung.

a) $\displaystyle\int_0^{1/\sqrt{7}} \frac{1}{3+7x^2} \,\mathrm{d}x$, b) $\displaystyle\int_0^{2/\sqrt{3}} \frac{1}{4+9x^2} \,\mathrm{d}x$, c) $\displaystyle\int_6^{11} \frac{1}{x^2 - 2x - 15} \,\mathrm{d}x$,

d) $\displaystyle\int_{-8}^{-4} \frac{1}{x^2-2x-15} \,\mathrm{d}x$, e) $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{4x^2-5x+1} \,\mathrm{d}x$, f) $\displaystyle\int_2^3 \frac{8x-5}{4x^2-5x+1} \,\mathrm{d}x$,

g) $\displaystyle\int_0^{2\pi/3} \frac{\sin(x)}{2 + 3\cos(x)} \,\mathrm{d}x$, h) $\displaystyle\int_0^{\pi/6} \frac{\cos(x)}{3+4\sin(x)} \,\mathrm{d}x$.

Aufgabe 30

Bestimmen Sie mit Hilfe partieller Integration die folgenden Integrale.

a) $\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/4} \cos(x)\ln(\sin(x)) \,\mathrm{d}x$, b) $\displaystyle\int_0^{\pi} x^2 \sin(x) \,\mathrm{d}x$,

c) $\displaystyle\int_0^1 x^5 \ln(x^3+1) \,\mathrm{d}x$, d) $\displaystyle\int_0^1 x^3 e^{2x} \,\mathrm{d}x$.

Aufgabe 31

Bestimmen Sie jeweils, ob die angegebenen Mengen beschränkt sind. Geben Sie – falls diese existieren – auch die Maxima und Minima der Mengen an.

a) $[0,1]$, b) $(0,1)$, c) $\{2,7\}$, d) $\{\pi, e\}$

e) $\left\{1+\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$, f) $\{0\}$, g) $[0,1] \cup [2,3]$, h) $\{r \in \mathbb{Q} : r < 2\}$

i) $\{r \in \mathbb{Q} : r^2 < 4\}$, j) $\{r \in \mathbb{Q} : r^2 < 2\}$, k) $\left\{1, \frac{\pi}{3}, \pi^2, 10\right\}$ l) $\{p : p \text{ Primzahl}\}$,

m) $\{(-1)^n n : n \in \mathbb{N}\}$, n) $\{x^2+1 : x \in \mathbb{R}\}$, o) $\{x \in \mathbb{R} : x^2 = -2x\}$, p) $\{3^{-n} : n \in \mathbb{N}\}$.

Aufgabe 32

Seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Hat die Funktion $f \colon [a,b] \to \mathbb{R}$, $f(x) = cx + d$ (in Abhängigkeit der Wahl von c und d) ein Minimum? Wenn ja, wo befindet sich das Minimum?
Hinweis: Eine Fallunterscheidung wird hilfreich sein.

Aufgabe 33

Betrachten Sie die Funktion $f : [-2,2] \to \mathbb{R}$, welche gegeben ist durch

$$f(x) := \begin{cases} x+1, & \text{falls } x \leqslant -1 \\ x^2, & \text{falls } -1 < x < 1 \\ x-1, & \text{falls } x \geqslant 1. \end{cases}$$

Untersuchen Sie die Funktion auf lokale und globale Maxima und Minima.

Aufgabe 34

Betrachten Sie die Funktion $f : (-2,2] \to \mathbb{R}$, welche gegeben ist durch

$$f(x) := \begin{cases} x+1, & \text{falls } x < -1 \\ x^2, & \text{falls } -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ x-1, & \text{falls } x > 1. \end{cases}$$

Untersuchen Sie die Funktion auf lokale und globale Maxima und Minima.

Aufgabe 35

Betrachten Sie die Funktion $f : (-2,2) \to \mathbb{R}$, welche gegeben ist durch

$$f(x) := \begin{cases} x+1 & \text{falls } x < -1 \\ x^2 & \text{falls } -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ x-1 & \text{falls } x > 1. \end{cases}$$

Untersuchen Sie die Funktion auf lokale und globale Maxima und Minima.

Aufgabe 36

Bestimmen Sie die lokalen und globalen Maxima und Minima der Funktionen aus Aufgabe 21.

Aufgabe 37

Betrachten Sie die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 3x^5 - 25x^3 + 60x - 3.$$

a) Bestimmen Sie die lokalen Maxima und Minima von f.

b) Bestimmen Sie die größten Intervalle, auf denen f streng monoton wachsend ist.

c) Fertigen Sie eine Skizze von f an.

Aufgabe 38

Untersuchen Sie analog zu vorigen Aufgabe die Funktion

$$f : \mathbb{R} \setminus \{-2\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{3x^2(x-2)}{(x+2)}.$$

Hinweis: Die einzige reelle Nullstelle von f'' ist $x_0 = 2\sqrt[3]{2} - 2$.

Aufgabe 39

Untersuchen Sie die Funktionen

a) $f : [-2, 3] \to \mathbb{R}, f(x) = 4 - x^2$,

b) $f : [-1, 4] \to \mathbb{R}, f(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 7$

auf lokale und globale Maxima und Minima. Bestimmen Sie auch die entsprechenden Extremalwerte.

Aufgabe 40

Seien $a \in \mathbb{R}, m, n \in \mathbb{Z}$ mit $m \neq -n$ und $m, n \neq 0$.

a) Zerlegen Sie a so in zwei Summanden, dass deren Produkt möglichst groß wird.

b) Zerlegen Sie a so in zwei Summanden, dass das Produkt der m-ten Potenz des einen Summanden und der n-ten Potenz des anderen Summanden möglichst groß wird.

Aufgabe 41

Die Summe der Kathetenlängen eines rechtwinkligen Dreiecks ergibt k. Wie groß müssen die einzelnen Kathetenlängen gewählt werden, damit die Hypothenusenlänge möglichst klein wird?

Aufgabe 42

Der Querschnitt eines Tunnels habe die Form eines Rechtecks mit aufgesetztem Halbkreis. Sein Umfang sei U. Für welchen Halbkreisradius wird der Flächeninhalt des Querschnitts am größten?

— Elementare Funktionen —

— A. Exponentialabbildung und Logarithmus —

Aufgabe 43

Es seien $a, u, v > 0$ und $r \in \mathbb{R}$. Beweisen Sie :

$$\log_a(u^r) = r \log_a(u).$$

Aufgabe 44

Bestimmen Sie die folgende Logarithmen.

a) $\log_2(4)$, b) $\log_4(64)$, c) $\log_2\left(\frac{1}{8}\right)$, d) $\log_4(2)$, e) $\log_7(7^x),\ x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 45

a) Drücken Sie $2 - \log_3(4)$ als Logarithmus einer einzigen Zahl aus.

b) Vereinfachen Sie

$$\log_2\left(\frac{75}{16}\right) - 2\log_2\left(\frac{5}{9}\right) + \log_2\left(\frac{32}{243}\right).$$

c) Vereinfachen Sie für $a > 0$ den Ausdruck $\dfrac{\log_a(\sqrt{3})}{\log_a(27)}$.

Aufgabe 46

Berechnen Sie noch einmal den Grenzwert aus Aufgabe 4 (j), indem Sie die Identität

$$\frac{n^2}{2^n} = e^{-n\ \ln 2 + 2\ \ln n}$$

(warum ist das richtig?) und die Eigenschaften der Exponentialfunktion benutzen. Hinweis: Sie können ohne Beweis benutzen, dass $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n)}{n} = 0$ ist.

Aufgabe 47

Bestimmen Sie jeweils Definitionsbereich und Lösungsmenge der folgenden logarithmischen Gleichungen.

a) $\log_2(x) = \log_2(10)$, b) $\log_{10}(x) = 2\log_{10}(5) - \log_{10}(4)$, c) $\log_3(x-1) = 2$,

d) $2\ln(3x-3) = 1$, e) $-\log_4(2x) = \log_4(6)$, f) $\log_{\sqrt{2}}(x^2-1) = 0$,

g) $\log_{10}(x+1) - \log_{10}(2) = 2$, h) $\log_2(x) = \log_3(x)$, i) $\log_{10}(x^2+1) = 1$.

Aufgabe 48

Bestimmen Sie jeweils den Definitionsbereich der folgenden Terme. Drücken Sie im Anschluss die Terme durch einen Logarithmus aus.

a) $\log_a(x+1) - 3\log_a(1-x) + 2\log_a(x)$,

b) $\log_a\left(\sqrt{x^2-1}\right) + \frac{1}{2}\log_a\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$.

Aufgabe 49

Bestimmen Sie jeweils die Lösungsmenge der folgenden Gleichungssysteme.

a)

$$\left\{\begin{array}{c} x - y = 1 \\ 2^x \cdot 3^y = 432 \end{array}\right\},$$

b)

$$\left\{\begin{array}{c} \log_{10}(x) + \log_{10}(y) = 1 \\ \log_{10}(x) - \log_{10}(y) = \log_{10}\left(\frac{5}{2}\right) \end{array}\right\}, \quad x, y > 0$$

c)

$$\left\{\begin{array}{c} 4^x = 5^y \\ 2 \cdot 4^x = 7^y \end{array}\right\}.$$

Aufgabe 50

Die Intensität von Röntgenstrahlen nehme bei Durchdringen von Aluminiumplatten von 1mm Stärke um 75% ab. Wie viele 1mm starke Platten werden benötigt, damit nur noch höchstens 1% Röntgenstrahlung hindurch kommt? (Nehmen Sie an, dass das Problem von keinerlei weiteren Faktoren, wie z.B. der Luft zwischen den Platten o.ä., abhängt.)
Hinweis: Sie dürfen einen Taschenrechner benutzen.

— Trigonometrische Funktionen —

Aufgabe 51

Beweisen Sie die Additionstheoreme für Tangens und Cotangens. Bestimmen Sie auch den Definitionsbereich der Gleichungen.

a) $\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan(\alpha)+\tan(\beta)}{1-\tan(\alpha)\tan(\beta)}$, b) $\cot(\alpha+\beta) = \dfrac{\cot(\alpha)\cot(\beta)-1}{\cot(\alpha)+\cot(\beta)}$.

Aufgabe 52

Zeigen Sie mit Hilfe der Addtionstheoreme:

a) $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(\alpha)$, b) $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(\alpha)$,

c) $\tan\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -\cot(\alpha)$, d) $\cot\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -\tan(\alpha)$.

Aufgabe 53

Bestimmen Sie die Definitionsbereiche der folgenden Gleichungen. Bestimmen Sie im Anschluß die Lösungsmenge.

a) $\tan(x) = \sqrt{2}\,\sin(x)$,

b) $\tan(x) = 2\sqrt{3}\cos(x)$,

c) $\sin(2x) = \tan(x)$,

d) $\cos(3x) = 5 - 4\cos^2(x)$.

Hinweis: Beweisen Sie für die Aufgabenteile c) bzw. d) zunächst die Identitäten

$$\sin(2x) = \frac{2\tan(x)}{1 + \tan^2(x)}, \quad \cos(3x) = 4\cos^3(x) - 3\cos(x).$$

Aufgabe 54

Es seien $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ mit $\alpha + \beta + \gamma = \pi$. Zeigen Sie:

a) $\sin(\beta)\cos(\gamma) + \cos(\beta)\sin(\gamma) = \sin(\alpha)$,

b) $\sin(\alpha)\sin(\beta) - \cos(\beta)\cos(\alpha) = \cos(\gamma)$.

Aufgabe 55

In einiger Entfernung zu einer Antenne wird ein Lichstrahl vom Boden (Meßebene) auf die Spitze der Antenne gerichtet. Der Winkel des Strahls zur Meßebene wird mit α bezeichnet. Nun geht man a Meter auf den Antennenmast zu und wiederholt die Messung. Man erhält nun einen Winkel β. Es ist insbesondere $0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$. Wie hoch ist der Mast?