Dr. K. Maurischat
Dr. S. Bleß

Aachen, 28. September 2020

Grundlagen der Mathematik

Übungsaufgaben mit Lösung

im Vorkurs Mathematik 2020, RWTH Aachen University

— Logik —

Aufgabe 1

Stellen Sie Wahrheitstafeln für die folgenden Formeln auf:

a) $A \wedge (B \vee C)$, b) $(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$, c) $\neg A \vee \neg B$, d) $A \vee \neg A$.

Lösung:

a)

A	B	C	$B \vee C$	$A \wedge (B \vee C)$
F	F	F	F	F
F	F	W	W	F
F	W	F	W	F
F	W	W	W	F
W	F	F	F	F
W	F	W	W	W
W	W	F	W	W
W	W	W	W	W

b)

A	B	C	$A \wedge B$	$A \wedge C$	$(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
F	F	F	F	F	F
F	F	W	F	F	F
F	W	F	F	F	F
F	W	W	F	F	F
W	F	F	F	F	F
W	F	W	F	W	W
W	W	F	W	F	W
W	W	W	W	W	W

c)

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \vee \neg B$
F	F	W	W	W
F	W	W	F	W
W	F	F	W	W
W	W	F	F	F

d)

A	$\neg A$	$A \vee \neg A$
F	W	W
W	F	W

Aufgabe 2

Man beweise die folgenden Aussagen durch Vergleich der Wahrheitstafeln beider Seiten:

a) $A \wedge (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \wedge C$,
b) $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$,
c) $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$,
d) $\neg(\neg A) \Leftrightarrow A$,
e) $A \vee (B \wedge \neg B) \Leftrightarrow A$,
f) $A \wedge (\neg A \vee B) \Rightarrow B$.

Lösung:

a)

A	B	C	$A \wedge B$	$B \wedge C$	$A \wedge (B \wedge C)$	$(A \wedge B) \wedge C$
F	F	F	F	F	F	F
F	F	W	F	F	F	F
F	W	F	F	F	F	F
F	W	W	F	W	F	F
W	F	F	F	F	F	F
W	F	W	F	F	F	F
W	W	F	W	F	F	F
W	W	W	W	W	W	W

Die letzte und vorletzte Spalte stimmen überein. Daher ist die Behauptung bewiesen.

b) Vergleich der Tafeln aus Aufgabe 1 (a) und (b) liefert die Behauptung.

c)

A	B	$A \wedge B$	$\neg(A \wedge B)$
F	F	F	W
F	W	F	W
W	F	F	W
W	W	W	F

Die letzte Spalte dieser Tafel stimmt mit der letzten Spalte der Tafel aus Aufgabe 1 (c) überein. Dies zeigt die behauptete Äquivalenz.

d)

A	$\neg A$	$\neg(\neg A)$
F	W	F
W	F	W

Die letzte Spalte dieser Tafel stimmt mit der ersten Spalte überein. Dies zeigt die behauptete Äquivalenz.

e)

A	B	$\neg B$	$B \wedge \neg B$	$A \vee (B \wedge \neg B)$
F	F	W	F	F
F	W	F	F	F
W	F	W	F	W
W	W	F	F	W

Die letzte Spalte dieser Tafel stimmt mit der ersten Spalte überein. Dies zeigt die behauptete Äquivalenz.

f)

A	B	$\neg A$	$\neg A \vee B$	$A \wedge (\neg A \vee B)$
F	F	W	W	F
F	W	W	W	F
W	F	F	F	F
W	W	F	W	W

Wann immer $A \wedge (\neg A \vee B)$ wahr ist (was nur der Fall ist, wenn A und B beide wahr sind), ist auch B wahr. Dies zeigt die behauptete Implikation.

Aufgabe 3

Geben Sie für die logischen Aussagen

a) $3x - 7 = 2 \quad \Rightarrow \quad 3x = 9 \quad \Rightarrow \quad x = 3$

b) $3x - 7 = 2 \quad \Leftrightarrow \quad 3x = 9 \quad \Leftrightarrow \quad x = 3$

c) $3x - 7 = 2 \quad \Leftarrow \quad 3x = 9 \quad \Leftarrow \quad x = 3$

jeweils an, für welche der folgenden Aussagen sie als Begründung dienen können:

(1) Die Lösungsmenge der Gleichung $3x - 7 = 2$ für $x \in \mathbb{R}$ ist $\{3\}$.

(2) 3 ist eine Lösung der Gleichung $3x - 7 = 2$ für $x \in \mathbb{R}$.

(3) Höchstens 3 ist eine Lösung der Gleichung $3x - 7 = 2$ für $x \in \mathbb{R}$.

Lösung:

a) Die Folgerungskette kann nur als Begründung für (3) dienen.

b) Die Äquivalenzkette kann (1), (2) und (3) begründen.

c) Die Rückfolgerungskette kann nur als Begründung für (2) dienen.

Aufgabe 4

Welche der folgenden Ausführungen stellen einen Beweis der Tatsache $(m-n)^2 + 4mn = (m+n)^2$ für alle $m, n \in \mathbb{N}$ dar?

(1) Für $m, n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned}
&(m-n)^2 + 4mn = (m+n)^2 && \Rightarrow \\
&m^2 - 2mn + n^2 + 4mn = m^2 + 2mn + n^2 && \Rightarrow \\
&-2mn + 4mn = 2mn && \Rightarrow \\
&2mn = 2mn,
\end{aligned}$$

und da $2mn = 2mn$ stets eine wahre Aussage ist, muß $(m-n)^2 + 4mn = (m+n)^2$ für alle $m, n \in \mathbb{N}$ gelten.

(2) Für $m, n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned} &(m-n)^2 + 4mn = (m+n)^2 && \Leftrightarrow \\ &m^2 - 2mn + n^2 + 4mn = m^2 + 2mn + n^2 && \Leftrightarrow \\ &-2mn + 4mn = 2mn && \Leftrightarrow \\ &2mn = 2mn, \end{aligned}$$

und da $2mn = 2mn$ stets eine wahre Aussage ist, muß $(m-n)^2 + 4mn = (m+n)^2$ für alle $m, n \in \mathbb{N}$ gelten.

(3) Für $m, n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned} &(m-n)^2 + 4mn = (m+n)^2 && \Leftarrow \\ &m^2 - 2mn + n^2 + 4mn = m^2 + 2mn + n^2 && \Leftarrow \\ &-2mn + 4mn = 2mn && \Leftarrow \\ &2mn = 2mn, \end{aligned}$$

und da $2mn = 2mn$ stets eine wahre Aussage ist, muß $(m-n)^2 + 4mn = (m+n)^2$ für alle $m, n \in \mathbb{N}$ gelten.

(4) Für alle $m, n \in \mathbb{N}$ gilt

$$(m-n)^2 + 4mn = m^2 - 2mn + n^2 + 4mn = m^2 + 2mn + n^2 = (m+n)^2.$$

Lösung:
Mit Ausnahme von (1) stellen alle Ausführungen einen Beweis der angegebenen Tatsache dar. Folgerungsketten, die in einer wahren Aussage enden, können kein Beweis für die Anfangsaußage sein: Es gilt $1 = -1 \quad \Rightarrow \quad 1^2 = (-1)^2 \quad \Rightarrow \quad 1 = 1$, und Letzteres ist eine wahre Aussage; dennoch ist $1 = -1$ in den reellen Zahlen falsch. Die umgekehrte Richtung, also eine Folgerungskette, die beginnend mit einer wahren Aussage zur Behauptung führt, stellt hingegen einen korrekten Beweis dar.

Aufgabe 5

Geben Sie an, welche der folgenden Rechnungen aus welchem Grund als Begründung für

$$(a-b)^2 + ab - b^2 = a\frac{a^2 - b^2}{a+b}$$

für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \neq -b$ gut beziehungsweise weniger gut sind.

(1) $(a-b)^2 + ab - b^2 = a^2 - 2ab + b^2 + ab - b^2 = a^2 - ab = a(a-b) = a\frac{(a-b)(a+b)}{a+b} = a\frac{a^2 - b^2}{a+b}$.

(2) $(a-b)^2+ab-b^2 = a^2-2ab+b^2+ab-b^2 = a^2-ab = a\dfrac{a^2-b^2}{a+b} = a\dfrac{(a-b)(a+b)}{a+b} = a(a-b) = a^2-ab$.

(3) $(a-b)^2+ab-b^2 = a^2-2ab+b^2+ab-b^2 = a^2-ab$ und $a\dfrac{a^2-b^2}{a+b} = a\dfrac{(a-b)(a+b)}{a+b} = a(a-b) = a^2-ab$.

Lösung:
(1) und (3) sind als Begründungen in Ordnung, während (2) nicht gut ist, da die Gleichungskette zwar mathematisch korrekt ist, aber aus logischer Sicht nicht in der richtigen Reihenfolge aufgeschrieben wurde: Der Schritt

$$a^2-ab = a\frac{a^2-b^2}{a+b}$$

ist an dieser Stelle nicht offensichtlich, eine Begründung kann erst aus der weiteren Rechnung erschloßen werden; dieser Begründungszusammenhang wird jedoch nicht dargestellt.

Aufgabe 6

Finden Sie den Fehler in der folgenden ¨Aufgabenlösung¨. Lösen Sie danach die Aufgabe korrekt.

Aufgabe: Man bestimme alle $x \in \mathbb{R}$, die sowohl $1+x^2=0$ als auch $1+x^3=0$ erfüllen.

Lösungsversuch: Es gilt

$$\begin{aligned}
&1+x^2=0 \quad \text{und} \quad 1+x^3=0 && \Rightarrow \\
&1+x^2=1+x^3 && \Rightarrow \\
&x^2=x^3 && \Rightarrow \\
&x=0 \quad \text{oder} \quad 1=x,
\end{aligned}$$

also erfüllen 0 und 1 gleichzeitig $1+x^2=0$ und $1+x^3=0$.

Lösung:
Die Folgerungskette an sich ist logisch einwandfrei, sie beweist jedoch nur, dass als Lösungen nur 0 und 1 in Frage kommen, nicht jedoch, dass 0 und 1 tatsächlich Lösungen sind. Wann immer in einer Gleichungsumformung nicht außchließlich Äquivalenzen sondern auch Folgerungen auftreten, ist am Ende eine Probe erforderlich. Eine solche Probe zeigt hier, dass weder 0 noch 1 die Gleichung $1+x^2=0$ erfüllen, also sind weder 0 noch 1 Lösungen der Aufgabe. Zusammen mit der bereits begründeten Tatsache, dass nur 0 und 1 überhaupt als Lösungen in Frage kommen, hat man nun insgesamt gezeigt, dass es kein $x \in \mathbb{R}$ gibt, das sowohl $1+x^2=0$ als auch $1+x^3=0$ erfüllt.

Aufgabe 7

a) Geben Sie für jede der folgenden Bedingungen an, ob sie notwendig und/oder hinreichend dafür ist, dass ein Dreieck gleichseitig ist.

(i) Alle drei Seiten sind gleich lang.

(ii) Zwei Seiten des Dreiecks sind gleich lang.

(iii) Alle drei Winkel im Dreieck sind gleich 60 °.

(iv) Zwei Winkel im Dreieck sind gleich 60 °.

(v) Alle drei Seiten habe eine Länge von $5\,\mathrm{cm}$.

(vi) Für eine Seite a des Dreiecks gilt $h_{\mathrm{a}} = \frac{a}{2}\sqrt{3}$, wobei a die Länge der Seite a und h_{a} die Länge der Höhe auf a bezeichnet.

b) Geben Sie für jede der folgenden Bedingungen an, ob sie notwendig und/oder hinreichend dafür ist, dass ein Viereck ein Parallelogramm ist.

(i) Alle vier Seiten sind gleich lang.

(ii) Zwei Seiten sind gleich lang.

(iii) Es gibt zwei Paare gleich langer Seiten.

(iv) Gegenüberliegende Seiten sind gleich lang.

(v) Alle vier Winkel sind gleich groß.

(vi) Zwei Winkel sind gleich groß.

(vii) Es gibt zwei Paare gleich großer Winkel.

(viii) Gegenüberliegende Winkel sind gleich groß.

(ix) Die Diagonalen halbieren sich.

Lösung:

a) Notwendig, aber nicht hinreichend sind (ii) und (vi); hinreichend, aber nicht notwendig ist (v); notwendig und hinreichend sind (i), (iii) und (iv).

b) Notwendig, aber nicht hinreichend sind (ii), (iii), (vi) und (vii); hinreichend, aber nicht notwendig sind (i) und (v); notwendig und hinreichend sind (iv), (viii) und (ix).

Aufgabe 8

Schreiben Sie die folgenden Aussagen mit den Quantoren $\forall$ und $\exists$, und bilden Sie dann die formale Verneinung (ebenfalls in Quantorenschreibweise).

a) Es gibt ein $x \in \mathbb{Z}$ mit $x > 0$.

b) Für alle $x \in \mathbb{Z}$ gilt $x > 0$.

c) Für alle $x \in \mathbb{Z}$ gibt es ein $y \in \mathbb{Z}$ mit $x > y$.

d) Es gibt ein $x \in \mathbb{Z}$, so dass für alle $y \in \mathbb{Z}$ gilt: $x > y$.

Lösung:

a) $\exists x \in \mathbb{Z} : x > 0$; Verneinung: $\forall x \in \mathbb{Z} : x \leqslant 0$.

b) $\forall x \in \mathbb{Z} : x > 0$; Verneinung: $\exists x \in \mathbb{Z} : x \leqslant 0$.

c) $\forall x \in \mathbb{Z}\ \exists y \in \mathbb{Z} : x > y$; Verneinung: $\exists x \in \mathbb{Z}\ \forall y \in \mathbb{Z} : x \leqslant y$.

d) $\exists x \in \mathbb{Z}\ \forall y \in \mathbb{Z} : x > y$; Verneinung: $\forall x \in \mathbb{Z}\ \exists y \in \mathbb{Z} : x \leqslant y$.

Aufgabe 9

Entscheiden Sie jeweils, ob die zweite Aussage die formale Verneinung der ersten Aussage ist. Falls das nicht der Fall sein sollte, geben Sie für beide Aussagen jeweils eine korrekte Verneinung an.

a) Die Zahl 4 ist durch 2 teilbar. – Die Zahl 4 ist durch 3 teilbar.

b) Die Zahl 6 ist durch 3 teilbar. – Die Zahl 6 ist nicht durch 3 teilbar.

c) Alle natürlichen Zahlen sind gerade. – Alle natürlichen Zahlen sind ungerade.

d) Alle natürlichen Zahlen sind ganze Zahlen. – Keine natürliche Zahl ist eine ganze Zahl.

e) Jede gerade Zahl ist durch 4 teilbar. – Es gibt eine gerade Zahl, die nicht durch 4 teilbar ist.

f) Es gibt eine natürliche Zahl, die nicht durch 1 teilbar ist. – Es gibt eine natürliche Zahl, die durch 1 teilbar ist.

g) Alle natürlichen Zahlen, die durch 6 teilbar sind, sind auch durch 3 teilbar. – Es gibt natürliche Zahlen, die weder durch 6 noch durch 3 teilbar sind.

h) Jede gerade Zahl größer 2 läßt sich als Summe zweier Primzahlen darstellen. – Es gibt eine gerade Zahl n größer 2, so dass für alle Primzahlen p und q gilt: $p + q \neq n$.

i) Zu jeder reellen Zahl $r > 0$ gibt es eine natürliche Zahl N, so dass für alle $n \geqslant N$ gilt: $0 < \frac{1}{n}(1 + (-1)^n) < r$. – Es gibt eine reelle Zahl $r > 0$, so dass für alle natürlichen Zahlen N stets ein $n \geqslant N$ existiert mit $\frac{1}{n}(1 + (-1)^n) > r$. (Schreiben Sie zunächst beide Aussagen in Quantorenschreibweise!)

Lösung:

a) Die zweite Aussage ist keine Verneinung der ersten Aussage. Eine Verneinung der ersten Aussage lautet: ¨Die Zahl 4 ist nicht durch 2 teilbar¨, eine Verneinung der zweiten Aussage lautet: ¨Die Zahl 4 ist nicht durch 3 teilbar.¨

b) Die zweite Aussage ist eine Verneinung der ersten Aussage.

c) Die zweite Aussage ist keine Verneinung der ersten Aussage. Eine Verneinung der ersten Aussage lautet: ¨Es gibt eine ungerade natürliche Zahl¨, eine Verneinung der zweiten Aussage lautet: ¨Es gibt eine gerade natürliche Zahl.¨

d) Die zweite Aussage ist keine Verneinung der ersten Aussage. Eine Verneinung der ersten Aussage lautet: ¨Es gibt eine natürliche Zahl, die keine ganze Zahl ist¨, eine Verneinung der zweiten Aussage lautet: ¨Es gibt eine natürliche Zahl, die eine ganze Zahl ist.¨

e) Die zweite Aussage ist eine Verneinung der ersten Aussage.

f) Die zweite Aussage ist keine Verneinung der ersten Aussage. Eine Verneinung der ersten Aussage lautet: ¨Alle natürlichen Zahlen sind durch 1 teilbar¨, eine Verneinung der zweiten Aussage lautet: ¨Alle natürlichen Zahlen sind nicht durch 1 teilbar.¨

g) Die zweite Aussage ist keine Verneinung der ersten Aussage. Eine Verneinung der ersten Aussage lautet: ¨Es gibt eine natürliche Zahl, die durch 6, aber nicht durch 3 teilbar ist¨, eine Verneinung der zweiten Aussage lautet: ¨Jede natürliche Zahl ist durch 6 oder durch 3 teilbar.¨

h) Die zweite Aussage ist eine Verneinung der ersten Aussage.

i) Aussagen in Quantorenschreibweise: $\forall r > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geqslant N : 0 < \frac{1}{n}(1 + (-1)^n) < r$ beziehungsweise $\exists r > 0\ \forall N \in \mathbb{N}\ \exists n \geqslant N : \frac{1}{n}(1 + (-1)^n) > r$. Die zweite Aussage ist keine Verneinung der ersten Aussage. Eine Verneinung der ersten Aussage lautet: ¨Es gibt eine reelle Zahl $r > 0$, so dass für alle natürlichen Zahlen N stets ein $n \geqslant N$ existiert mit $\frac{1}{n}(1 + (-1)^n) \geqslant r$ oder $\frac{1}{n}(1 + (-1)^n) \leqslant 0$¨, eine Verneinung der zweiten Aussage lautet: ¨Zu jeder reellen Zahl $r > 0$ gibt es eine natürliche Zahl N, so dass für alle $n \geqslant N$ gilt: $\frac{1}{n}(1 + (-1)^n) \leqslant r$.¨

Aufgabe 10

Bestimmen Sie die Wahrheitswerte der folgenden Aussagen.

a) $\forall x \in \mathbb{Z} : x > 0$,	b) $\exists x \in \mathbb{Z} : x > 0$,	c) $\forall x \in \mathbb{Z}\, \forall y \in \mathbb{Z} : x > y$,
d) $\forall x \in \mathbb{Z}\, \exists y \in \mathbb{Z} : x > y$,	e) $\exists y \in \mathbb{Z}\, \forall x \in \mathbb{Z} : x > y$,	f) $\exists x \in \mathbb{Z}\, \exists y \in \mathbb{Z} : x > y$.

Lösung:

a) Die Verneinung der gegebenen Aussage lautet: $\exists x \in \mathbb{Z} : x \leqslant 0$. Diese kann bewiesen werden, indem man $x = 0$ wählt. Daher ist die zu untersuchende Aussage falsch.

b) Die gegebene Aussage kann bewiesen werden, indem man $x = 1$ wählt. Daher ist die zu untersuchende Aussage wahr.

c) Die Verneinung der gegebenen Aussage lautet: $\exists x \in \mathbb{Z}\ \exists y \in \mathbb{Z} : x \leqslant y$. Diese kann bewiesen werden, indem man $x = 0$ und $y = 0$ wählt. Daher ist die zu untersuchende Aussage falsch.

d) Die gegebene Aussage kann bewiesen werden: ¨Sei $x \in \mathbb{Z}$. Wähle $y = x - 1$. Dann ist $y \in \mathbb{Z}$, und es gilt $x > y$.¨ Daher ist die zu untersuchende Aussage wahr.

e) Die Verneinung der gegebenen Aussage lautet: $\forall y \in \mathbb{Z}\ \exists x \in \mathbb{Z} : x \leqslant y$. Diese kann bewiesen werden: ¨Sei $y \in \mathbb{Z}$. Wähle $x = y$. Dann ist $x \in \mathbb{Z}$, und es gilt $x \leqslant y$.¨ Daher ist die zu untersuchende Aussage falsch. (Bemerkung: Zusammen mit der letzten Teilaufgabe zeigt dies, dass eine Änderung der Reihenfolge von Quantoren im Allgemeinen nicht zu einer äquivalenten Formel führt.)

f) Die gegebene Aussage kann bewiesen werden, indem man $x = 1$ und $y = 0$ wählt. Daher ist die zu untersuchende Aussage wahr.

Aufgabe 11

Tragen Sie in den folgenden Sätzen für (1) und (2) eine Bedingung beziehungsweise eine Aussage ein, so dass der erste Satz eine wahre Aussage und der zweite Satz eine falsche Aussage ist.

¨Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit (1) gilt (2).¨ – ¨Es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ mit (1), das (2) erfüllt.¨

Lösung:

Damit die erste Aussage wahr und die zweite Aussage falsch ist, muß die Bedingung (1) so gewählt sein, dass sie nie erfüllt werden kann; die Aussage (2) kann dann beliebig gewählt werden. Eine konkrete Lösung wäre etwa:¨ Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \neq n$ gilt $n = n$.¨ – ¨Es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n \neq n$, das $n = n$ erfüllt.¨

Aufgabe 12 ($*$)

Seien A und B zwei Aussagen und $Z(A, B)$ eine aus A und B zusammengesetzte Aussage, d.h. eine Aussage, deren Wahrheitswert durch die Wahrheitswerte von A und B eindeutig bestimmt ist.

1. Wieviele solche Aussagen $Z(A, B)$ gibt es (bis auf Äquivalenz) ?
2. Wieviele davon sind symmetrisch in A und B, d.h. $Z(A, B) \Leftrightarrow Z(B, A)$?
3. Geben Sie für jede Aussage $Z(A, B)$ eine Darstellung mit Hilfe der Symbole $\neg, \vee$ und $\wedge$ an.

Lösung:

1. Äquivalente Aussagen werden durch ihre Wahrheitstafeln festgelegt, d.h.

A	A	Z(A,B)
W	W	*
W	F	*
F	W	*
F	F	*

   und für die Einträge in der letzten Spalte gibt es $2^4 = 16$ Möglichkeiten.

2. $Z(A, B) \Leftrightarrow Z(B, A)$ genau dann, wenn die Einträge in Zeile 2 und 3 der letzten Spalte übereinstimmen. Dafür gibt es $2^3 = 8$ Möglichkeiten.
3. (WWWW): $A \vee \neg A$, (FFFF): $A \wedge \neg A$, (WFFF):$A \wedge B$, (FWFF):$A \wedge \neg B$, (FFWF):$B \wedge \neg A$, (FFFW):$\neg B \wedge \neg A$, (WWFF); A, (WFWF): B, (WFFW); $(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$, (FW-WF): $(A \vee B) \wedge \neg(A \wedge B)$, (FWFW): $\neg B$, (FFWW): $\neg A$, (WWWF): $\neg(FFFW)$, (WWFW): $\neg(FFWF)$, (WFWW): $\neg(FWFF)$, (FWWW): $\neg(WFFF)$.

Aufgabe 13

Der Kommissar hat einen Fall mit drei Verdächtigen P,Q und R. Die Ermittlungsergebnisse sind:

1. Falls P und Q nicht beide beteiligt waren, dann ist R außer Verdacht.
2. Ist Q schuldig oder R unschuldig, dann kann P nicht der Täter sein.
3. Mindestens einer der drei war der Täter.

Ermitteln Sie den oder die Täter.

Lösung:
Wir bezeichnen mit P die Aussage *P ist schuldig* und die analogen Aussagen für die anderen Personen mit S, R bzw. Q. Formalisiert ergeben sich folgende wahre Aussagen:

1. $\neg(P \wedge Q) \Rightarrow (\neg R)$,
2. $Q \vee (\neg R)) \Rightarrow (\neg P)$,
3. $P \vee Q \vee R$.

Wir suchen also diejenigen Ausgangswahrheitswerte, so dass die Aussage (*), gegeben durch

$$(\neg(P \wedge Q) \Rightarrow (\neg R)) \wedge (Q \vee (\neg R) \Rightarrow (\neg P)) \wedge (P \vee Q \vee R)$$

wahr ist. Die Wahrheitstafel

P	Q	R	$\neg(P \wedge Q) \Rightarrow \neg R$	$Q \vee (\neg R) \Rightarrow (\neg P)$	$P \vee Q \vee R$	(*)
W	W	W	W	F	W	F
W	W	F	W	F	W	F
W	F	W	F	W	W	F
W	F	F	W	F	W	F
F	W	W	F	W	W	F
F	W	F	W	W	W	W
F	F	W	F	W	W	F
F	F	F	W	W	F	F

liefert also, dass Q alleine der Täter ist.

Aufgabe 14

Der Kommissar hat einen neuen Fall mit vier Verdächtigen P,Q,R und S. Die Ermittlungsergebnisse sind:

1. Ist P unschuldig, dann ist auch Q unschuldig. R wäre aber dann ganz sicher einer der Täter.
2. Ist S unschuldig, dann ist Q einer der Täter.

3. Ist S schuldig, dann ist auch R schuldig.
4. R hat ein todsicheres Alibi.

Ermitteln Sie den oder die Täter.

Lösung:
Wir bezeichnen mit P die Aussage *P ist schuldig* und die analogen Aussagen für die anderen Personen mit S, R bzw. Q. Formalisiert ergeben sich folgende wahre Aussagen:

1. $\neg P \Rightarrow (\neg Q \wedge R)$, und dies ist äquivalent zu $P \vee (\neg Q \wedge R)$,
2. $\neg S \Rightarrow Q$, und dies ist äquivalent zu $S \vee Q$,
3. $S \Rightarrow R$, und dies ist äquivalent zu $\neg S \vee R$,
4. $\neg R$.

Eine Wahrheitstafel hätte 16 Zeilen und 5 Spalten. Wir versuchen also, die Täter durch Umformung der Ausdrücke zu ermitteln. Da $\neg R$ wahr ist, und $\neg S \vee R$ ebenfalls, muß $\neg S$ wahr sein. Damit kann $S \vee Q$ nur dann wahr sein, wenn Q wahr ist. Q ist also einer der Täter. Damit ist $\neg Q$ falsch, $\neg Q \wedge R$ ebenso, und $P \vee (\neg Q \wedge R)$ kann nur dann wahr sein, wenn auch P wahr ist. P und Q werden also verhaftet, die anderen beiden sind unschuldig.

— Mengenlehre —

Aufgabe 15
Seien $A = \{1,2\}$, $B = \{2,3\}$ und $C = \{1,2,3,4\}$. Man bilde die folgenden Mengen:

a) $A \cup B$,	b) $A \cap B$,	c) $(A \cup B) \cup C$,	d) $(A \cap B) \cap C$,
e) $(A \cup B) \cap C$,	f) $(A \cap B) \cup C$,	g) $\complement_A B$,	h) $\complement_B A$,
i) $(A \setminus B) \setminus C$,	j) $A \setminus (B \setminus C)$,	k) $\mathfrak{P}(\emptyset)$,	l) $\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(\emptyset))$,
m) $\mathfrak{P}(A)$,	n) $\mathfrak{P}(A \cap B)$,	o) $\mathfrak{P}((A \cup B) \cap C)$.	

Lösung:

a) $\{1,2,3\}$,	b) $\{2\}$,	c) $\{1,2,3,4\}$,	d) $\{2\}$,
e) $\{1,2,3\}$,	f) $\{1,2,3,4\}$,	g) $\{1\}$,	h) $\{3\}$,
i) $\emptyset$,	j) $\{1,2\}$,	k) $\{\emptyset\}$,	l) $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$,

m) $\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$, n) $\{\emptyset, \{2\}\}$,
o) $\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$.

Aufgabe 16

Geben Sie jeweils an, wie viele Elemente die Menge enthält.

a) $\emptyset$,	b) $\{\emptyset\}$,	c) $\{\{\emptyset\}\}$,
d) $\{1,2,3\}$,	e) $\{\{1,2,3\}\}$,	f) $\{1,\{2,3\}\}$,
g) $\{1,\{2,\{3\}\}\}$,	h) $\{\emptyset,1,\{1\},\{1,1\}\}$,	i) $\{\{\emptyset\},\{2\},\{2,\{2\}\}\}$,
j) $\{1,2\} \cup \{2,4\}$,	k) $\{1,2\} \cap \{2,4\}$,	l) $\{1,2\} \setminus \{2,4\}$,
m) $\{1,2,3\} \setminus \{2,3\}$,	n) $\{1,2,3\} \setminus \{\{2,3\}\}$,	o) $\{1,2,3\} \setminus \{\{2\},3\}$,
p) $\{1,\{2,3\}\} \setminus \{2,3\}$,	q) $\{1,2,\{3\}\} \setminus \{\{2\},\{3\}\}$,	r) $\{1,2,\{1,2,3\}\} \setminus \{\{1,2\}\}$.

Lösung:

a) 0,	b) 1,	c) 1,
d) 3,	e) 1,	f) 2,
g) 2,	h) 3,	i) 3,
j) 3,	k) 1,	l) 1,
m) 1,	n) 3,	o) 2,
p) 2,	q) 2,	r) 3.

Aufgabe 17

Es seien A und B zwei Mengen mit $A \subseteq B$. Bestimmen Sie

a) $A \cup \emptyset$,	b) $A \cap \emptyset$,	c) $A \cup B$,	d) $A \cap B$,	e) $\complement_B B$,	f) $\complement_A(A \cap B)$,
g) $\complement_B \emptyset$,	h) $\emptyset \setminus B$,	i) $\complement_B(\complement_B A)$,	j) $A \cup \complement_B A$,	k) $A \cap \complement_B A$,	l) $A \cup \complement_B \emptyset$,
m) $A \cap \complement_B \emptyset$,	n) $A \setminus \complement_B B$,	o) $A \setminus \complement_B A$.			

Lösung:

a) A,	b) $\emptyset$,	c) B,	d) A,	e) $\emptyset$,	f) $\emptyset$,
g) B,	h) $\emptyset$,	i) A,	j) B,	k) $\emptyset$,	l) B,
m) A,	n) A,	o) A.			

Aufgabe 18

Man beweise für beliebige Mengen A, B und C:

a) $A \subseteq B \ \wedge \ B \subseteq C \quad \Rightarrow \quad A \subseteq C$.

b) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.

c) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

d) $A \cap B = B \quad \Leftrightarrow \quad B \subseteq A$.

e) $A \subseteq B \quad \Rightarrow \quad \complement_C B \subseteq \complement_C A$.

f) Falls $A \subseteq C$ gilt, folgt aus $\complement_C B \subseteq \complement_C A$ stets $A \subseteq B$. Man gebe ein Beispiel dafür an, dass im Falle $A \not\subseteq C$ aus $\complement_C B \subseteq \complement_C A$ nicht notwendigerweise $A \subseteq B$ folgen muss.

g) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$.

Lösung:

a) Es gelte $A \subseteq B$ und $B \subseteq C$. Sei $x \in A$. Dann gilt auch $x \in B$ wegen $A \subseteq B$, und es folgt $x \in C$ wegen $B \subseteq C$. Man hat damit $x \in A \Rightarrow x \in C$ gezeigt, was nach Definition äquivalent zu $A \subseteq C$ ist.

b) Es gilt

$$\begin{aligned}
&x \in A \cap (B \cap C) && \Leftrightarrow \\
&x \in A \ \wedge \ x \in B \cap C && \Leftrightarrow \\
&x \in A \ \wedge \ (x \in B \ \wedge \ x \in C) && \overset{\text{A 2 (a)}}{\Leftrightarrow} \\
&(x \in A \ \wedge \ x \in B) \ \wedge \ x \in C && \Leftrightarrow \\
&(x \in A \cap B) \ \wedge \ x \in C && \Leftrightarrow \\
&x \in (A \cap B) \cap C.
\end{aligned}$$

Diese Äquivalenzumformung beweist die behauptete Mengengleichheit.

c) Es gilt

$$\begin{aligned}
&x \in A \cap (B \cup C) && \Leftrightarrow \\
&x \in A \ \wedge \ x \in B \cup C && \Leftrightarrow \\
&x \in A \ \wedge \ (x \in B \ \vee \ x \in C) && \overset{\text{A 2 (b)}}{\Leftrightarrow} \\
&(x \in A \ \wedge \ x \in B) \ \vee \ (x \in A \ \wedge \ x \in C) && \Leftrightarrow \\
&x \in A \cap B \ \vee \ x \in A \cap C && \Leftrightarrow \\
&x \in (A \cap B) \cup (A \cap C).
\end{aligned}$$

Diese Äquivalenzumformung beweist die behauptete Mengengleichheit.

d) Zeige die Äquivalenz durch Nachweis von $A \cap B = B \Rightarrow B \subseteq A$ und $A \cap B = B \Leftarrow B \subseteq A$.

"$\Rightarrow$": Es gelte $A \cap B = B$. Sei $x \in B$. Wegen $B = A \cap B$ gilt dann auch $x \in A \cap B$, also insbesondere $x \in A$. Dies beweist $x \in B \Rightarrow x \in A$, also $B \subseteq A$.

"$\Leftarrow$": Es gelte $B \subseteq A$. Da $A \cap B \subseteq B$ nach Definition des Mengendurchschnitts immer gilt, verbleibt für $A \cap B = B$ nur noch $A \cap B \supseteq B$ zu zeigen. Sei $x \in B$. Wegen $B \subseteq A$ gilt dann auch $x \in A$, also insgesamt $x \in B \cap A$. Dies beweist $x \in B \Rightarrow x \in A \cap B$, also die Inklusion $A \cap B \supseteq B$, und schließt somit den Beweis ab.

e) Es gelte $A \subseteq B$. Sei $x \in \complement_C B$. Dann gilt $x \in C$ und $x \notin B$. Es sei zunächst angenommen, es gelte $x \in A$. Wegen $A \subseteq B$ wäre dann auch $x \in B$, was im Widerspruch zu $x \notin B$ stünde. Daher kann $x \in A$ nicht gelten. Somit hat man $x \in C$ und $x \notin A$, also $x \in \complement_C A$. Dies beweist $x \in \complement_C B \Rightarrow x \in \complement_C A$, also $\complement_C B \subseteq \complement_C A$, was die Behauptung liefert.

f) Es gelte $A \subseteq C$ und $\complement_C B \subseteq \complement_C A$. Sei $x \in A$. Wegen $A \subseteq C$ gilt dann auch $x \in C$. Nehme nun an, es gelte $x \notin B$. Zusammen mit $x \in C$ erhält man $x \in \complement_C B$, woraus sich wegen $\complement_C B \subseteq \complement_C A$ auch $x \in \complement_C A$ und somit insbesondere $x \notin A$ folgern lößt. Dies ist jedoch ein Widerspruch zu $x \in A$. Die Annahme $x \notin B$ kann also nicht wahr sein, es muß $x \in B$ gelten. Dies beweist $x \in A \Rightarrow x \in B$, also $A \subseteq B$.

   Für den zweiten Teil der Aufgabe wähle $A = \{1,2\}$ und $B = \{1,3\}$ sowie $C = \{1\}$. Dann ist $\complement_C B = \emptyset = \complement_C A$, also insbesondere $\complement_C B \subseteq \complement_C A$, aber es gilt nicht $A \subseteq B$.

g) Schreibe $x = (x_1, x_2)$. Dann gilt

$$\begin{array}{ll}
x \in (A \cap B) \times C & \Leftrightarrow \\
(x_1, x_2) \in (A \cap B) \times C & \Leftrightarrow \\
x_1 \in (A \cap B) \ \wedge \ x_2 \in C & \Leftrightarrow \\
(x_1 \in A \ \wedge \ x_1 \in B) \ \wedge \ x_2 \in C & \Leftrightarrow \\
(x_1 \in A \ \wedge \ x_2 \in C) \ \wedge \ (x_1 \in B \ \wedge \ x_2 \in C) & \Leftrightarrow \\
(x_1, x_2) \in A \times C \ \wedge \ (x_1, x_2) \in B \times C & \Leftrightarrow \\
(x_1, x_2) \in (A \times C) \cap (B \times C) & \Leftrightarrow \\
x \in (A \times C) \cap (B \times C). &
\end{array}$$

   Diese Äquivalenzumformung beweist die behauptete Mengengleichheit.

Aufgabe 19

Man beweise für beliebige Mengen X und Y:

a) $X \subseteq Y \quad \Rightarrow \quad \mathfrak{P}(X) \subseteq \mathfrak{P}(Y)$.

b) $\mathfrak{P}(X) \cup \mathfrak{P}(Y) \subseteq \mathfrak{P}(X \cup Y)$. Man gebe ein Beispiel dafür an, dass im Allgemeinen nicht $\mathfrak{P}(X) \cup \mathfrak{P}(Y) = \mathfrak{P}(X \cup Y)$ gilt.

Lösung:

a) Es gelte $X \subseteq Y$. Sei $M \in \mathfrak{P}(X)$, also $M \subseteq X$. Wegen $X \subseteq Y$ folgt dann mit Aufgabe 18 (a), dass auch $M \subseteq Y$, also $M \in \mathfrak{P}(Y)$ gilt. Dies beweist $M \in \mathfrak{P}(X) \Rightarrow M \in \mathfrak{P}(Y)$, also $\mathfrak{P}(X) \subseteq \mathfrak{P}(Y)$.

b) Sei $M \in \mathfrak{P}(X) \cup \mathfrak{P}(Y)$. Dann gilt $M \in \mathfrak{P}(X)$ oder $M \in \mathfrak{P}(Y)$, also $M \subseteq X$ oder $M \subseteq Y$. Wegen $X \subseteq X \cup Y$ und $Y \subseteq X \cup Y$ folgt in beiden Fällen mit Aufgabe 18 (a), dass auch $M \subseteq X \cup Y$, also $M \in \mathfrak{P}(X \cup Y)$ gilt. Dies beweist $M \in \mathfrak{P}(X) \cup \mathfrak{P}(Y) \Rightarrow x \in \mathfrak{P}(X \cup Y)$, also $\mathfrak{P}(X) \cup \mathfrak{P}(Y) \subseteq \mathfrak{P}(X \cup Y)$.

   Für den zweiten Teil der Aufgabe wähle $X = \{1\}$ und $Y = \{2\}$. Dann gilt $\mathfrak{P}(X) \cup \mathfrak{P}(Y) = \{\emptyset, \{1\}\} \cup \{\emptyset, \{2\}\} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}\}$, aber es ist $\mathfrak{P}(X \cup Y) = \mathfrak{P}(\{1,2\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$.

Aufgabe 20 ($*$)

Berechnen Sie $\bigcap\limits_{r\in\mathbb{R}} \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant r\}$, und beweisen Sie Ihr Ergebnis.

Lösung:
Es gilt $\bigcap_{r\in\mathbb{R}}\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant r\} = \emptyset$. Nehme $\bigcap_{r\in\mathbb{R}}\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant r\} \neq \emptyset$ an, es existiere also ein $y \in \bigcap_{r\in\mathbb{R}}\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant r\}$. Dann gilt $y \in \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant r\}$ für alle $r \in \mathbb{R}$, insbesondere $y \in \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant y+1\}$, also $y \geqslant y+1$. Dies ist ein Widerspruch; ein solches y kann nicht existieren. Daher war die Annahme $\bigcap_{r\in\mathbb{R}}\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant r\} \neq \emptyset$ falsch, was das behauptete Ergebnis beweist.

Aufgabe 21 ($*$)

Es bezeichne A eine Menge. Zeigen Sie die Äquivalenz der Aussagen

(i) $B \setminus A = B$ für alle Mengen B

(ii) $(A \cup B) \setminus A = B$ für alle Mengen B

(iii) $A = \emptyset$

durch einen Ringschluss, das heißt: Zeigen Sie (i) $\Rightarrow$ (ii), (ii) $\Rightarrow$ (iii) und (iii) $\Rightarrow$ (i).

Lösung:
(i) $\Rightarrow$ (ii): Es gelte $B \setminus A = B$ für alle Mengen B. Sei nun B eine beliebige Menge. Dann gilt

$$\begin{aligned}
& x \in (A \cup B) \setminus A && \Leftrightarrow \\
& x \in (A \cup B) \ \wedge \ x \notin A && \Leftrightarrow \\
& (x \in A \ \vee \ x \in B) \ \wedge \ x \notin A && \overset{\text{A 2 (b)}}{\Leftrightarrow} \\
& (x \in A \ \wedge \ x \notin A) \ \vee \ (x \in B \ \wedge \ x \notin A) && \Leftrightarrow \\
& x \in B \ \wedge \ x \notin A && \Leftrightarrow \\
& x \in B \setminus A && \overset{B\setminus A = B}{\Leftrightarrow} \\
& x \in B.
\end{aligned}$$

Diese Äquivalenzumformung beweist (ii).

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Es gelte $(A \cup B) \setminus A = B$ für alle Mengen B. Spezialisiert man dies für $B = A$, erhält man $A = (A \cup A) \setminus A = A \setminus A = \emptyset$, also die Aussage aus (iii).

(iii) $\Rightarrow$ (i): klar nach Definition der Mengendifferenz

Aufgabe 22

Welche der folgenden Ausdrücke definieren Abbildungen? Falls eine Abbildung vorliegt, untersuchen Sie diese auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität.

a) $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$; $f_2 : \mathbb{R} \to [0, \infty)$, $x \mapsto x^2$; $f_3 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $x \mapsto x^2$;

b) $g_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3$; $g_2 : \mathbb{R} \to [0, \infty)$, $x \mapsto x^3$; $g_3 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $x \mapsto x^3$;

c) $w_1 : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{x}$; $w_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \pm\sqrt{x^2}$;

d) $d : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, $(m, n) \mapsto m - n$;

e) $p_m : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $n \mapsto m \cdot n$ (Untersuchung in Abhängigkeit von $m \in \mathbb{N}$);

f) $F_M : \mathfrak{P}(M) \to \mathfrak{P}(M)$, $A \mapsto \complement_M A$ (Untersuchung in Abhängigkeit von $M \neq \emptyset$);

g) $H_M : M \to \mathfrak{P}(M)$, $x \mapsto \{x\}$ (Untersuchung in Abhängigkeit von der Menge $M \neq \emptyset$);

h) $u : (0, \infty) \to [2, \infty)$, $x \mapsto \frac{1}{x}(x^2 + 1)$;

i) $v : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{Z}$ mit $u(n) = \frac{n}{2}$ falls n gerade und $u(n) = -\frac{n+1}{2}$ falls n ungerade;

j) $h_c : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x + \frac{c}{x}$ (Untersuchung in Abhängigkeit von $c \in \mathbb{R}$).

Lösung:

a) f_1 nicht injektiv ($f_1(1) = 1 = f_1(-1)$), nicht surjektiv (es gibt kein $x \in \mathbb{R}$ mit $f_1(x) = -1$), nicht bijektiv; f_2 nicht injektiv ($f_2(1) = 1 = f_2(-1)$), surjektiv ($f_2(\sqrt{y}) = y$ für alle $y \in [0, \infty)$), nicht bijektiv; f_3 injektiv (für jedes y in der Wertemenge von f_3 ist $x = \sqrt{y}$ die einzige Lösung für $f_3(x) = y$), nicht surjektiv (es gibt kein $x \in \mathbb{N}$ mit $f_3(x) = 2$), nicht bijektiv

b) g_1 injektiv, surjektiv, bijektiv; g_2 keine Abbildung; g_3 injektiv, nicht surjektiv, nicht bijektiv

c) w_1 injektiv, nicht surjektiv, nicht bijektiv; w_2 keine Abbildung ($w_2(1)$ nicht eindeutig)

d) d nicht injektiv ($d(2, 1) = 1 = d(3, 2)$), surjektiv ($\forall i \in \mathbb{Z} : d(i + |i| + 1, |i| + 1) = i$), nicht bijektiv

e) p_1 injektiv, surjektiv, bijektiv; p_m für $m > 1$ injektiv, nicht surjektiv, nicht bijektiv

f) F_M für alle Mengen M injektiv, surjektiv, bijektiv

g) H_M für alle Mengen M injektiv, nicht surjektiv, nicht bijektiv

h) u nicht injektiv ($u(\frac{1}{2}) = \frac{5}{2} = u(2)$), surjektiv (für jedes $y \geqslant 2$ ist $\frac{1}{x}(1 + x^2) = y \Leftrightarrow 1 + x^2 = yx$ eine in $(0, \infty)$ lösbare quadratische Gleichung), nicht bijektiv

i) v injektiv, surjektiv, bijektiv

j) h_0 injektiv, nicht surjektiv, nicht bijektiv; h_c für $c > 0$ nicht injektiv, nicht surjektiv, nicht bijektiv (für $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $y \in \mathbb{R}$ gilt $x + \frac{c}{x} = y \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + c = yx \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - yx + c = 0$, es gibt $y \in \mathbb{R}$, so dass diese Gleichung keine Lösung hat ($\Rightarrow$ nicht surjektiv), ebenso gibt es $y \in \mathbb{R}$, so dass zwei Lösungen existieren ($\Rightarrow$ nicht injektiv)); h_c für $c < 0$ nicht injektiv, surjektiv, nicht bijektiv (Gleichung $x^2 - yx + c = 0$ ist immer lösbar, es gibt $y \in \mathbb{R}$, so dass diese Gleichung zwei Lösungen hat).

Aufgabe 23

Seien $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 2x + 1$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto (x-1)^2$ zwei Abbildungen.

a) Bestimmen Sie $g \circ f$ und $f \circ g$.

b) Bestimmen Sie den Wertebereich von f, g, $f \circ g$ und $g \circ f$.

Lösung:

a) $g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto g(f(x)) = 4x^2$; $f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(g(x)) = 2(x-1)^2 + 1 = 2x^2 - 4x + 3$.

b) Wertebereich von f: $\mathbb{R}$, Wertebereich von g: $[0, \infty)$, Wertebereich von $f \circ g$: $[1, \infty)$, Wertebereich von $g \circ f$: $[0, \infty)$.

Aufgabe 24

Was ist an Sprechweisen wie 'die Funktion x^2' oder 'die Funktion $f(x)$' formal gesehen falsch? Formulieren Sie die Zitate so um, dass sie formal korrekt sind.

Lösung:

Der Begriff ¨Funktion¨ steht nicht für ¨Term¨, sondern für eine Abbildungsvorschrift zusammen mit Definitions- und Zielbereich. Die Zitate können wie folgt korrigiert werden: ¨die Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$¨ und ¨die Funktion f¨.

Aufgabe 25 ($*$)

a) Beweisen Sie: Die Abbildung $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, $n \mapsto \begin{cases} \frac{n-1}{2} & n \text{ ungerade} \\ -\frac{n}{2} & n \text{ gerade} \end{cases}$ ist bijektiv.

b) Konstruieren Sie eine bijektive Abbildung $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Lösung:

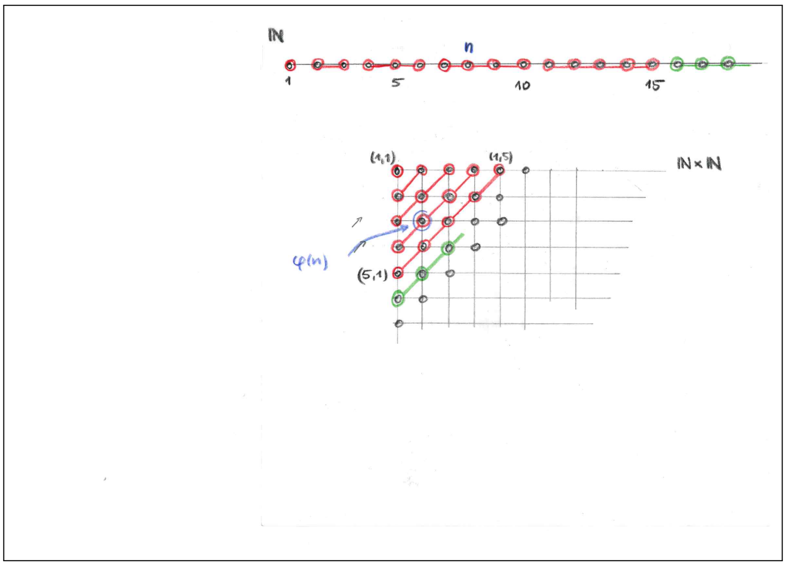
a) (i) f ist surjektiv: Sei $k \in \mathbb{Z}$, dann gilt:

$$k = \begin{cases} f(2k+1) & k \geqslant 0 \\ f(-2k) & k < 0 \end{cases}$$

Da in den beiden Fällen $2k + 1$ bzw. $-2k$ jeweils natürliche Zahlen sind, besitzt jede ganze Zahl ein Urbild unter f. Also ist f surjektiv. (ii) f ist injektiv: Seien $n, m \in \mathbb{N}$ gegeben mit $f(n) = f(m)$. Dann müssen entweder m, n beide negativ oder beide nichtnegativ sein ($\geqslant 0$), denn sonst würden nicht einmal die Vorzeichen von $F(n)$ und $f(m)$ übereinstimmen. Also:

Im ersten Fall $n, m \geqslant 0$ gilt dann $(n-1)/2 = f(n) = f(m) = (m-1)/2$ und somit $n - 1 = m - 1$ oder $n = m$. Im zweiten Fall gilt $-n/2 = f(n) = f(m) = -m/2$, also $-n = -m$ und somit ebenfalls $n = m$. Also folgt in jedem Fall aus $f(n) = f(m)$, dass $n = m$ ist, und die Abbildung ist somit auch injektiv. Also ist f bijektiv.

b) (ii) Sei $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 2$ gegeben. Dann ist $D(k) := \{(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : a + b = k\} \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ eine der Diagonalen in dem Bild unten. Wie Sie sehen, ist $\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \cup_{k \geqslant 2} D(k)$ und $D(k) \cap D(k') = \emptyset$ für $k \neq k'$. Die Idee bei der Abbildung ist es nun, $\mathbb{N}$ in Stücke entsprechender Länge zu zerlegen und diese *über die entsprechenden Diagonalen zu legen*. Damit erhalten wir eine 1-1-Zuordnung zwischen den natürlichen Zahlen und den Punkten in $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Genauer: Jede natürliche Zahl n erfüllt eine Ungleichung $\frac{m(m-1)}{2} < n \leqslant \frac{m(m+1)}{2}$ für genau ein $m \in \mathbb{N}$. Sei dann $T := n - \frac{m(m-1)}{2}$, dann ist $\phi(n) := (T, m - T + 1)$.



Aufgabe 26 ($*$)

Seien X und Y beliebige nichtleere Mengen und $f : X \to Y$ eine Abbildung. Man definiert für alle Mengen $A \subseteq X$ und $B \subseteq Y$ die Schreibweisen $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$ und $f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}$. Zeigen Sie für alle Mengen $A, A' \subseteq X$ sowie $B, B' \subseteq Y$:

a) $f(A \cap A') \subseteq f(A) \cap f(A')$.

b) $f^{-1}(B \cup B') = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B')$.

c) $A \subseteq f^{-1}(f(A))$.

Geben Sie Beispiele dafür an, dass in (a) und (c) im Allgemeinen nicht Gleichheit gilt.

Lösung:

a) Sei $y \in f(A \cap A')$. Dann gibt es ein $x \in A \cap A'$ mit $y = f(x)$. Da $x \in A$ und $x \in A'$ gilt, ist damit auch $y \in f(A)$ und $y \in f(A')$, also $y \in f(A) \cap f(A')$. Dies zeigt $y \in f(A \cap A') \Rightarrow y \in f(A) \cap f(A')$, also $f(A \cap A') \subseteq f(A) \cap f(A')$.

Für den Nachweis, dass im Allgemeinen keine Gleichheit gilt, wähle $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ sowie $A = (-\infty, 0)$ und $A' = (0, \infty)$. Dann gilt $f(A \cap A') = f(\emptyset) = \emptyset$, aber $f(A) \cap f(A') = (0, \infty) \cap (0, \infty) = (0, \infty) \neq \emptyset$.

b) Für $x \in X$ gilt

$$\begin{aligned}
&x \in f^{-1}(B \cup B') && \Leftrightarrow \\
&f(x) \in B \cup B' && \Leftrightarrow \\
&f(x) \in B \ \vee \ f(x) \in B' && \Leftrightarrow \\
&x \in f^{-1}(B) \ \vee \ x \in f^{-1}(B') && \Leftrightarrow \\
&x \in f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B').
\end{aligned}$$

Diese Äquivalenzumformung beweist die Behauptung.

c) Sei $x \in A$. Dann ist $f(x) \in f(A)$, also nach Definition $x \in f^{-1}(f(A))$. Dies zeigt $x \in A \Rightarrow x \in f^{-1}(f(A))$, also $A \subseteq f^{-1}(f(A))$.

Für den Nachweis, dass im Allgemeinen keine Gleichheit gilt, wähle $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ sowie $A = [0, 1]$. Dann gilt $f(A) = [0, 1]$ und $f^{-1}(f(A)) = f^{-1}([0, 1]) = [-1, 1] \neq [0, 1] = A$.

— Teilbarkeit —

Aufgabe 27

Untersuchen Sie die folgenden Zahlen darauf, ob sie Primzahlen sind. Bestimmen Sie anderenfalls deren Primfaktorzerlegung.

a) 15, b) 37, c) 61, d) 91, e) 192, f) 269, g) 445, h) 1001.

Lösung:

a) 15 ist keine Primzahl, es gilt $15 = 3 \cdot 5$.

b) 37 ist eine Primzahl (wegen $7^2 = 49 > 37$ genügt es, Teilbarkeit durch Primzahlen kleiner 7 (also 2, 3 und 5) zu untersuchen; wie man mit den Teilbarkeitsregeln sieht, ist keine dieser Teilbarkeiten gegeben).

c) 61 ist eine Primzahl (wegen $8^2 = 64 > 61$ genügt es, Teilbarkeit durch Primzahlen kleiner 8 (also 2, 3, 5 und 7) zu untersuchen; wie man mit den Teilbarkeitsregeln und einer Probedivision durch 7 sieht, ist keine dieser Teilbarkeiten gegeben).

d) 91 ist keine Primzahl, es gilt $91 = 7 \cdot 13$ (zunächst Teilbarkeitsregeln für 2, 3 und 5 anwenden, dann (erfolgreiche) Probedivision durch 7, der sich ergebende Quotient 13 ist eine Primzahl).

e) 192 ist keine Primzahl, es gilt $192 = 2^6 \cdot 3$ (da Teilbarkeit durch 2 festgestellt werden kann, zunächst Division durch 2 und dann analog weiter mit den Quotienten 96, 48, 24, 12 und 6, zum Schluß Zusammensammeln der Faktoren).

f) 269 ist eine Primzahl (wegen $17^2 = 289 > 269$ genügt es, Teilbarkeit durch Primzahlen kleiner 17 (also $2, 3, 5, 7, 11$ und 13) zu untersuchen; wie man mit den Teilbarkeitsregeln und Probedivisionen durch 7 und 13 sieht, ist keine dieser Teilbarkeiten gegeben).

g) 445 ist keine Primzahl, es gilt $445 = 5 \cdot 89$ (da Teilbarkeit durch 5 festgestellt werden kann, zunächst Division durch 5, der Quotient 89 ist eine Primzahl).

h) 1001 ist keine Primzahl, es gilt $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$ (da Teilbarkeit durch 11 festgestellt werden kann, Division durch 11, der Quotient 91 hat wie schon gesehen als $91 = 7 \cdot 13$ als Primfaktorzerlegung).

Aufgabe 28

Bestimmen Sie jeweils den größten gemeinsamen Teiler der gegebenen Zahlen.

a) $12, 16,$	b) $17, 72,$	c) $33, 99,$	d) $91, 192,$
e) $84, 110,$	f) $84, 135,$	g) $110, 135,$	h) $84, 110, 135.$

Lösung:

a) Es gilt $12 = 2^2 \cdot 3$ und $16 = 2^4$, also erhält man durch Vergleich der Exponenten, dass der größte gemeinsame Teiler gleich $2^2 = 4$ ist.

b) Da 17 eine Primzahl und 72 kein Vielfaches von 17 ist, muß der größte gemeinsame Teiler gleich 1 sein.

c) Da 99 ein Vielfaches von 33 ist, ist 33 auch der größte gemeinsame Teiler.

d) Wie in der letzten Aufgabe gesehen gilt $91 = 7 \cdot 13$ und $192 = 2^6 \cdot 3$. Damit gibt es außer 1 keinen gemeinsamen Teiler, so dass 1 auch der größte gemeinsame Teiler ist.

e) Es gilt $84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$ und $110 = 2 \cdot 5 \cdot 11$, also ist (gemäß Exponentenvergleich) der größte gemeinsame Teiler gleich 2.

f) Es gilt $84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$ und $135 = 3^3 \cdot 5$, also ist (gemäß Exponentenvergleich) der größte gemeinsame Teiler gleich 3.

g) Es gilt $110 = 2 \cdot 5 \cdot 11$ und $135 = 3^3 \cdot 5$, also ist (gemäß Exponentenvergleich) der größte gemeinsame Teiler gleich 5.

h) Aus den nun bekannten Primfaktorzerlegungen ($84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$ und $110 = 2 \cdot 5 \cdot 11$ sowie $135 = 3^3 \cdot 5$) liest man durch Exponentenvergleich ab, dass der größte gemeinsame Teiler gleich 1 sein muß.

Aufgabe 29
Geben Sie für die folgenden Brüche jeweils die vollständig gekürzte Darstellung an.

a) $\frac{6}{21}$ b) $\frac{60}{12}$, c) $\frac{28}{49}$, d) $\frac{25}{21}$,

e) $\frac{105}{60}$, f) $\frac{17}{34}$, g) $\frac{34}{153}$, h) $\frac{200}{3200}$,

i) $\frac{228}{209}$, j) $\frac{315}{255}$, k) $\frac{210}{315}$, l) $\frac{840}{1050}$.

Lösung:

a) $\frac{2}{7}$ b) 5, c) $\frac{4}{7}$, d) $\frac{25}{21}$,

e) $\frac{7}{4}$, f) $\frac{1}{2}$, g) $\frac{2}{9}$, h) $\frac{1}{16}$,

i) $\frac{12}{11}$, j) $\frac{21}{17}$, k) $\frac{2}{3}$, l) $\frac{4}{5}$.

Aufgabe 30
Vergleichen Sie jeweils die beiden gegebenen Brüche, indem Sie sie auf ihren Hauptnenner bringen. Schreiben Sie das richtige Relationszeichen ($<$, $=$ oder $>$) zwischen die Brüche.

a) $\frac{5}{14} \quad \frac{6}{21}$, b) $\frac{27}{5} \quad \frac{23}{3}$, c) $\frac{3}{13} \quad \frac{21}{91}$, d) $\frac{1}{3} \quad \frac{1}{2}$,

e) $\frac{5}{4} \quad \frac{4}{5}$, f) $\frac{7}{3} \quad \frac{6}{4}$, g) $\frac{5}{8} \quad \frac{95}{152}$, h) $-\frac{7}{4} \quad -\frac{8}{3}$.

Lösung:

a) $\frac{5}{14} > \frac{6}{21}$, b) $\frac{27}{5} < \frac{23}{3}$, c) $\frac{3}{13} = \frac{21}{91}$, d) $\frac{1}{3} < \frac{1}{2}$,

e) $\frac{5}{4} > \frac{4}{5}$, f) $\frac{7}{3} > \frac{6}{4}$, g) $\frac{5}{8} = \frac{95}{152}$, h) $-\frac{7}{4} > -\frac{8}{3}$.

Aufgabe 31
Schreiben Sie als vollständig gekürzten Bruch ganzer Zahlen:

a) $\frac{0{,}3}{0{,}4}$, b) $\frac{0{,}5}{1{,}5}$, c) $\frac{0{,}008}{0{,}02}$, d) $\frac{0{,}1}{0{,}004}$, e) $\frac{10{,}5}{6}$, f) $\frac{1{,}23}{3{,}6}$.

Lösung:

a) $\frac{0{,}3}{0{,}4} = \frac{3}{4}$, b) $\frac{0{,}5}{1{,}5} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$, c) $\frac{0{,}008}{0{,}02} = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$, d) $\frac{0{,}1}{0{,}004} = \frac{100}{4} = 25$,

e) $\frac{10{,}5}{6} = \frac{105}{60} = \frac{7}{4}$, f) $\frac{1{,}23}{3{,}6} = \frac{123}{360} = \frac{41}{120}$.

Aufgabe 32

Schreiben Sie die folgenden Doppelbrüche als vollständig gekürzten Bruch ganzer Zahlen:

a) $\frac{7}{\frac{5}{6}}$, b) $\frac{\frac{13}{7}}{\frac{26}{14}}$, c) $\frac{\frac{72}{17}}{\frac{12}{17}}$, d) $\frac{\frac{13}{5}}{\frac{15}{7}}$

e) $\frac{\frac{13}{5}}{\frac{15}{7}}$, f) $\frac{13}{\frac{\frac{5}{15}}{7}}$, g) $\frac{\frac{21}{5}}{\frac{10}{3}}$, h) $\frac{\frac{5}{21}}{\frac{3}{10}}$.

Lösung:

a) $\frac{42}{5}$, b) 1, c) 6, d) $\frac{91}{75}$,

e) $\frac{39}{7}$, f) 273, g) $\frac{63}{50}$, h) $\frac{50}{63}$.

Aufgabe 33

Berechnen Sie (ohne Taschenrechner!):

a) $\frac{17}{33} + \frac{5}{33}$, b) $\frac{1}{10} + \frac{1}{15}$, c) $\frac{18}{25} - \frac{13}{25}$, d) $\frac{13}{14} - \frac{2}{21}$,

e) $\frac{2}{21} - \frac{13}{14}$, f) $\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{7}$, g) $\frac{12}{25} \cdot \frac{15}{8}$, h) $\frac{14}{17} : \frac{21}{17}$,

i) $\frac{16}{21} : \frac{20}{9}$, j) $6 \cdot \frac{3}{10} + \frac{1}{5}$, k) $\left(\frac{2}{9} - \frac{1}{10}\right) : \frac{2}{45}$, l) $\frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}}$,

m) $\left(\left(\left(\frac{4}{3} + \frac{5}{2}\right) \cdot \frac{6}{5}\right) - \frac{2}{5}\right) \cdot \frac{5}{2}$, n) $\frac{2}{9} : \left(\frac{17}{18} - \frac{2}{9} \cdot \left(\frac{3}{7} + \frac{1}{14}\right)\right) + \frac{15}{2}$.

Lösung:

a) $\frac{2}{3}$, b) $\frac{1}{6}$, c) $\frac{1}{5}$, d) $\frac{5}{6}$,

e) $-\frac{5}{6}$, f) $\frac{6}{35}$, g) $\frac{9}{10}$, h) $\frac{2}{3}$,

i) $\frac{12}{35}$, j) 2, k) $\frac{11}{4}$, l) $\frac{12}{13}$,

m) $\frac{21}{2}$, n) $\frac{233}{30}$.

Aufgabe 34

a) Geben Sie Dezimaldarstellungen der folgenden Brüche an: $\frac{7}{10}$, $\frac{3}{16}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{2}{11}$ und $\frac{123}{990}$.
Hinweis: Schriftliche Division

b) Schreiben Sie die folgenden Dezimaldarstellungen als (vollständig gekürzte) Brüche: $0{,}1$; $0{,}2$; $0{,}375$; $0{,}1\overline{6}$; $0{,}\overline{2}$; $0{,}41\overline{6}$; $0{,}1\overline{4}$; $0{,}\overline{14}$ und $0{,}1\overline{18}$.

Lösung:

a) $\frac{7}{10} = 0{,}7$; $\frac{3}{16} = 0{,}1875$; $\frac{1}{3} = 0{,}\overline{3}$; $\frac{5}{6} = 0{,}8\overline{3}$; $\frac{3}{7} = 0{,}\overline{428571}$; $\frac{2}{11} = 0{,}\overline{18}$; $\frac{123}{990} = 0{,}1\overline{24}$.

b) $0{,}1 = \frac{1}{10}$; $0{,}2 = \frac{1}{5}$; $0{,}375 = \frac{3}{8}$; $0{,}1\overline{6} = \frac{1}{6}$; $0{,}\overline{2} = \frac{2}{9}$; $0{,}41\overline{6} = \frac{5}{12}$; $0{,}1\overline{4} = \frac{13}{90}$; $0{,}\overline{14} = \frac{14}{99}$; $0{,}1\overline{18} = \frac{13}{110}$.

Aufgabe 35 ($*$)

Warum ist es nicht sinnvoll, eine Addition von Brüchen durch folgende Vorschrift zu definieren: Der Zähler des Ergebnisses ist die Summe der Zähler der Summanden, und der Nenner des Ergebnisses ist die Summe der Nenner der Summanden?

Lösung:

Der gleiche Bruchwert läßt sich auf verschiedene Weisen darstellen; so bezeichnen etwa $\frac{1}{2}$ und $\frac{2}{4}$ dieselbe Zahl. Eine Rechnenoperation ist nur dann vernünftig definiert (wohldefiniert), wenn der Wert des Ergebnisses nicht von der konkreten Darstellung des Bruchwertes abhängig ist. Bei den üblichen Rechenoperationen auf Brüchen ist dies der Fall; die in der Aufgabenstellung vorschlagene 'Addition' erfüllt diese Bedingung jedoch nicht: Obwohl $\frac{1}{2}$ und $\frac{2}{4}$ denselben Wert bezeichnen, erhielte man einerseits als 'Summe' von $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{3}$ den Wert $\frac{2}{5}$, andererseits als 'Summe' von $\frac{2}{4}$ und $\frac{1}{3}$ den Wert $\frac{3}{7}$, welcher von $\frac{2}{5}$ verschieden ist.

Aufgabe 36

Schreiben Sie die folgenden Zahlen in der Form $a \cdot 10^z$ für eine ganze Zahl z und eine reelle Zahl a, bei der genau eine Ziffer vor dem Komma steht und diese von 0 verschieden ist.

a) $23{,}4$, b) $0{,}062$, c) 100, d) $0,000293$, e) $14 \cdot 10^6$, f) $1{,}8$.

Lösung:
a) $2{,}34 \cdot 10^1$, b) $6{,}2 \cdot 10^{-2}$, c) $1 \cdot 10^2$, d) $2{,}93 \cdot 10^{-4}$, e) $1{,}4 \cdot 10^7$, f) $1{,}8 \cdot 10^0$.

Aufgabe 37

Wandeln Sie die folgenden Zehnerpotenz-Darstellungen in Dezimaldarstellungen um.

a) $6{,}7 \cdot 10^2$, b) $1{,}54 \cdot 10^{-1}$, c) $23 \cdot 10^5$, d) $8{,}11 \cdot 10^{-3}$, e) $3{,}3 \cdot 10^0$.

Lösung:
a) 670, b) $0{,}154$, c) $2\,300\,000$, d) $0{,}00811$, e) $3{,}3$.

Aufgabe 38

Berechnen Sie:

a) 3^3, b) 5^2, c) 2^9, d) 1^8, e) 7^0, f) 0^3, g) 0^0,
h) 4^{-2}, i) 3^{-1}, j) $(-4)^2$, k) $(-1)^{77}$, l) $(-5)^{-2}$, m) $(-4)^3$, n) $(-6)^1$.

Lösung:

a) 27, b) 25, c) 512, d) 1, e) 1, f) 0, g) 1,
h) $\frac{1}{16}$, i) $\frac{1}{3}$, j) 16, k) -1, l) $\frac{1}{25}$, m) -64, n) -6.

Aufgabe 39

Schreiben Sie als eine Potenz mit einer ganzzahligen Basis zwischen 1 und 9 und ganzzahligem Exponenten:

a) 49, b) 81, c) $\frac{1}{128}$, d) 125, e) $\frac{1}{36}$, f) 1024, g) 1296.

Lösung:
a) 7^2, b) $9^2 = 3^4$, c) 2^{-7}, d) 5^3, e) 6^{-2}, f) $2^{10} = 4^5$, g) 6^4.

Aufgabe 40

Schreiben Sie als *eine* Potenz:

a) $3^4 \cdot 3^2$, b) $7^3 \cdot 2^3$, c) $2^4 \cdot 4^3$, d) $6^4 \cdot 2^{-4}$, e) $\dfrac{3^5}{3^3}$, f) $\dfrac{10^4}{5^4}$,
g) $(7^7)^2$, h) 7^{7^2}, i) $5^6 \cdot 5^7$, j) $3^{-4} \cdot 9^4$, k) $\left(4^3\right)^7$, l) $3^3 \cdot 3^3$.

Lösung:

a) 3^6, b) 14^3, c) $2^{10} = 4^5$, d) 3^4, e) 3^2, f) 2^4,
g) 7^{14}, h) 7^{49}, i) 5^{13}, j) 3^4, k) 4^{21}, k) 3^6.

Aufgabe 41

Berechnen Sie:

a) $4^{\frac{1}{2}}$, b) $27^{\frac{2}{3}}$, c) $32^{0,2}$, d) $\sqrt[4]{256}$, e) $\sqrt{\frac{9}{16}}$,
f) $\left(\frac{8}{27}\right)^{-\frac{2}{3}}$, g) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-0.5}$, h) $\sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{4}$, i) $\sqrt[5]{4} \cdot \sqrt[5]{8}$, j) $\sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[3]{3}$.

Lösung:

a) 2, b) 9, c) 2, d) 4, e) $\frac{3}{4}$,
f) $\frac{9}{4}$, g) 2, h) 2, i) 2, j) 3.

Aufgabe 42

Schreiben Sie als Wurzel einer Zahl:

a) $4^{\frac{1}{5}}$, b) $2^{\frac{3}{4}}$, c) $3^{0,3}$, d) $4^{-\frac{2}{7}}$, e) $\frac{\sqrt{2}}{2}$, f) $\frac{5}{\sqrt{5} \cdot \sqrt[3]{5}}$, g) $4^{\frac{2}{5}} \cdot 2^{-\frac{1}{2}}$.

Lösung:

a) $\sqrt[5]{4}$, b) $\sqrt[4]{8}$, c) $\sqrt[10]{27}$, d) $\sqrt[7]{\frac{1}{16}}$, e) $\sqrt{\frac{1}{2}}$, f) $\sqrt[6]{5}$, g) $\sqrt[10]{8}$.

Aufgabe 43

Berechnen Sie geschickt:

a) $\sqrt{5 \cdot 5^3}$, b) $(27\sqrt{8})^{\frac{2}{3}}$, c) $\sqrt{\frac{(-4)^6 \cdot 9}{2^4 \cdot 4^2}}$, d) $\sqrt[3]{12} \cdot \sqrt[6]{9^2 \cdot 4}$, e) $\sqrt{5}\sqrt{2}\sqrt{20}\sqrt{18}$.

Lösung:

a) $\sqrt{5 \cdot 5^3} = \sqrt{5^4} = (5^4)^{\frac{1}{2}} = 5^{4 \cdot \frac{1}{2}} = 5^2 = 25.$

b) $(27\sqrt{8})^{\frac{2}{3}} = 27^{\frac{2}{3}}(\sqrt{8})^{\frac{2}{3}} = (27^{\frac{1}{3}})^2\sqrt{(8^{\frac{1}{3}})^2} = 3^2 \cdot 8^{\frac{1}{3}} = 9 \cdot 2 = 18.$

c) $\sqrt{\frac{(-4)^6 \cdot 9}{2^4 \cdot 4^2}} = \frac{\sqrt{(-4)^6} \cdot \sqrt{9}}{\sqrt{2^4} \cdot \sqrt{4^2}} = \frac{4^3 \cdot 3}{2^2 \cdot 4} = \frac{4^3 \cdot 3}{4^2} = 4 \cdot 3 = 12.$

d) $\sqrt[3]{12} \cdot \sqrt[6]{9^2 \cdot 4} = \sqrt[6]{12^2} \cdot \sqrt[6]{9^2 \cdot 4} = \sqrt[6]{12^2 \cdot 9^2 \cdot 4} = \sqrt[6]{(3 \cdot 2^2)^2 \cdot 3^4 \cdot 2^2} = \sqrt[6]{3^2 \cdot 2^4 \cdot 3^4 \cdot 2^2} =$
$\sqrt[6]{3^6 \cdot 2^6} = 3 \cdot 2 = 6.$

e) $\sqrt{5}\sqrt{2}\sqrt{20}\sqrt{18} = \sqrt{5 \cdot 20} \cdot \sqrt{2 \cdot 18} = \sqrt{100} \cdot \sqrt{36} = 10 \cdot 6 = 60.$

Aufgabe 44

Geben Sie den Zahlenwert der folgenden Summen an:

a) $\sum_{j=1}^{3} j(j+1)$, b) $\sum_{n=1}^{1}(3n+7)$, c) $\sum_{k=1}^{101} 3$, d) $\sum_{k=1}^{5}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$.

Lösung:

a) 20, b) 10, c) $\ldots = 101 \cdot 3 = 303$, d) $\ldots = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$.

Aufgabe 45

Schreiben Sie mit dem Summenzeichen:

a) $3^4 + 5^5 + 7^6 + 9^7$, b) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n+5}$,

c) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{1024}$, d) $q - q^2 + q^3 - q^4 + \cdots - q^{10}$.

Lösung:

a) $\sum_{j=1}^{4}(2j+1)^{j+3}$, b) $\sum_{j=2}^{n+5}\frac{1}{j}$, c) $\sum_{j=0}^{10}\frac{1}{2^j}$, d) $-\sum_{j=1}^{10}(-q)^j$.

Aufgabe 46

Berechnen Sie:

a) $\prod_{j=2}^{4}\frac{1}{j}$, b) $\prod_{l=0}^{7} 2$, c) $\prod_{j=2}^{4}(3j)$, d) $\prod_{k=1}^{5}\frac{k}{k+1}$.

Lösung:

a) $\frac{1}{24}$, b) $\ldots = 2^8 = 256$, c) 648, d) $\frac{1}{6}$.

Aufgabe 47

Schreiben Sie mit dem Produktzeichen:

a) $4 \cdot 7 \cdot 10 \cdot 13$, b) $n!$, c) $\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}$, d) $9 \cdot 16 \cdot 25 \cdot 36 \cdot 49$.

Lösung:

a) $\prod_{j=1}^{4}(3j+1)$, b) $\prod_{j=1}^{n} j$, c) $\prod_{j=1}^{4}\frac{2j}{2j+1}$, d) $\prod_{j=3}^{7} j^2$.

Aufgabe 48

Ersetzen Sie jeweils "$\square$" durch einen Term, der dazu führt, dass die Gleichheit für den allgemeinen Fall gültig wird. Geben Sie für (b) zwei verschiedene Lösungen an.

a) $\displaystyle\sum_{j=-2}^{n} a_j = \sum_{k=1}^{\square} a_{k-3}$, b) $\displaystyle\prod_{j=1}^{n} a_j = \prod_{k=0}^{n-1} a_{\square}$.

Lösung:

a) $n+3$, b) $k+1$ oder $n-k$.

Aufgabe 49

Beweisen Sie für $n \in \mathbb{N}$ und $a_1, \ldots, a_{n+1} \in \mathbb{R}$ beziehungsweise $b_1, \ldots, b_{n+1} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$:

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k+1}) = a_1 - a_{n+1}$,

b) $\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \frac{b_k}{b_{k+2}} = \frac{b_0 b_1}{b_n b_{n+1}}$,

c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$,

d) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{n-k+1}{k} = 1$.

Lösung:

a) Es gilt

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k+1}) = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n} a_{k+1} = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=2}^{n+1} a_k = a_1 + \sum_{k=2}^{n} a_k - \left(\sum_{k=2}^{n} a_k + a_{n+1} \right)$$
$$= a_1 - a_{n+1}.$$

Bemerkung: Die hier auftretende Form der Summe wird auch als "Teleskopsumme" bezeichnet.

b) Es gilt

$$\prod_{k=0}^{n-1} \frac{b_k}{b_{k+2}} = \frac{\prod_{k=0}^{n-1} b_k}{\prod_{k=0}^{n-1} b_{k+2}} = \frac{\prod_{k=0}^{n-1} b_k}{\prod_{k=2}^{n+1} b_k} = \frac{b_0 \cdot b_1 \cdot \prod_{k=2}^{n-1} b_k}{\prod_{k=2}^{n-1} b_k \cdot b_n \cdot b_{n+1}} = \frac{b_0 b_1}{b_n b_{n+1}}.$$

c) Es gilt

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(k+1)-k}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k+1}{k(k+1)} - \frac{k}{k(k+1)} \right) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$$
$$\overset{(a)}{=} \frac{1}{1} - \frac{1}{n+1} = \frac{(n+1)-1}{n+1} = \frac{n}{n+1}.$$

d) Es gilt

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{n-k+1}{k} = \frac{\prod_{k=1}^{n}(n-k+1)}{\prod_{k=1}^{n} k} = \frac{\prod_{j=1}^{n} j}{\prod_{k=1}^{n} k} = 1.$$

Aufgabe 50

Geben Sie die Werte der folgenden Binomialköffizienten an:

a) $\binom{3}{1}$, b) $\binom{5}{0}$, c) $\binom{6}{3}$, d) $\binom{50}{49}$, e) $\binom{50}{51}$, f) $\binom{0}{0}$, g) $\binom{0}{1}$.

Lösung:

a) 3, b) 1, c) 20, d) $\binom{50}{49} = \binom{50}{1} = 50$, e) 0, f) 1, g) 0.

Aufgabe 51

Beweisen Sie:

a) Für alle $k, n \in \mathbb{N}_0$ mit $k \leqslant n$ gilt $(n+1)\binom{n}{k} = (n-k+1)\binom{n+1}{k}$.

b) Für alle $k, n \in \mathbb{N}$ mit $k \leqslant n$ gilt $\frac{\binom{n}{k}}{\binom{n}{k-1}} = \frac{n-k+1}{k}$.

c) Für alle $k, n \in \mathbb{N}_0$ mit $k < n$ gilt $\binom{n}{k} + \binom{n+1}{k+1} = \frac{n+k+2}{n-k}\binom{n}{k+1}$.

Lösung:

a) Es gilt

$$\begin{aligned}(n+1)\binom{n}{k} &= (n+1)\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{(n+1)!}{k!(n-k)!} = \frac{(n+1)!(n-k+1)}{k!(n-k)!(n-k+1)} \\ &= \frac{(n-k+1)(n+1)!}{k!(n-k+1)!} = (n-k+1)\binom{n+1}{k}.\end{aligned}$$

b) Es gilt

$$\frac{\binom{n}{k}}{\binom{n}{k-1}} = \frac{\frac{n!}{k!(n-k)!}}{\frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!}} = \frac{(k-1)!(n-k+1)!}{k!(n-k)!} = \frac{n-k+1}{k}.$$

c) Es gilt

$$\begin{aligned}\binom{n}{k} + \binom{n+1}{k+1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!} \\ &= \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}\left(\frac{k+1}{n-k} + \frac{n+1}{n-k}\right) = \frac{n+k+2}{n-k}\binom{n}{k+1}.\end{aligned}$$

Aufgabe 52

Eine Aussage $A(n)$ soll mit vollständiger Induktion für alle $n \in \mathbb{N}$ bewiesen werden. Der Induktionsanfang wurde für $n = 1$ durchgeführt. Entscheiden Sie jeweils, ob die Formulierung der Induktionsvoraußetzung in diesem Beweis korrekt ist.

(1) (IV) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gelte $A(n)$.

(2) (IV) Sei $n \in \mathbb{N}$, und es gelte $A(n)$.

(3) (IV) Es gelte $A(n)$ für ein $n \in \mathbb{N}$.

(4) (IV) Es gelte $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(5) (IV) Es gelte $A(n)$ für $n \in \mathbb{N}$.

(6) (IV) Es gelte $A(n+1)$ für ein $n \in \mathbb{N}$.

(7) (IV) Es gelte $A(n)$ und $A(n+1)$ für ein $n \in \mathbb{N}$.

(8) (IV) Sei $n \in \mathbb{N}$ so, dass $A(n)$ gilt.

(9) (IV) Sei $n \in \mathbb{N}$ so, dass $A(n+1)$ gilt.

Lösung:
Korrekt sind nur die Varianten (2), (3) und (8).

Aufgabe 53

Beweisen Sie die folgenden Aussagen mit vollständiger Induktion:

a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\sum\limits_{j=1}^{n} j \cdot j! = (n+1)! - 1$.

b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = \frac{2^{n+1} - n - 2}{2^n}$.

c) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\sum\limits_{j=1}^{2n-1} (-1)^{j-1} j^2 = n(2n-1)$.

d) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $n! \geqslant 2^{n-1}$.

e) Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und $x \in \mathbb{R}$ mit $x > -1$ gilt $(1+x)^n \geqslant 1 + nx$.

f) Für alle $k, n \in \mathbb{N}_0$ mit $k \leqslant n$ gilt $\binom{n+1}{k+1} = \sum\limits_{m=k}^{n} \binom{m}{k}$.

Lösung:

a) (IA) Es gilt

$$\sum_{j=1}^{1} j \cdot j! = 1 \cdot 1! = 1 \qquad \text{und} \qquad (1+1)! - 1 = 2! - 1 = 2 - 1 = 1,$$

also gilt die Behauptung für $n = 1$.

(IV) Sei $n \in \mathbb{N}$, und es gelte die Behauptung für dieses n.

(IS) Es gilt

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n+1} j \cdot j! = \sum_{j=1}^{n} j \cdot j! + (n+1) \cdot (n+1)! &\overset{\text{IV}}{=} (n+1)! - 1 + (n+1)(n+1)! \\ &= (n+1)! \cdot (1 + n + 1) - 1 = (n+1)! \cdot (n+2) - 1 = (n+2)! - 1 \\ &= ((n+1)+1)! - 1.\end{aligned}$$

Dies ist die Behauptung mit $n+1$ anstelle von n. Mit dem Induktionsprinzip folgt nun die Gültigkeit der Behauptung für alle $n \in \mathbb{N}$.

b) (IA) Es gilt

$$\sum_{k=1}^{1} \frac{k}{2^k} = \frac{1}{2^1} = \frac{1}{2} \qquad \text{und} \qquad \frac{2^{1+1} - 1 - 2}{2^1} = \frac{4 - 1 - 2}{2} = \frac{1}{2},$$

also gilt die Behauptung für $n = 1$.

(IV) Sei $n \in \mathbb{N}$, und es gelte die Behauptung für dieses n.

(IS) Es gilt

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} \frac{k}{2^k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} + \frac{n+1}{2^{n+1}} &\overset{\text{IV}}{=} \frac{2^{n+1} - n - 2}{2^n} + \frac{n+1}{2^{n+1}} \\ &= \frac{2 \cdot 2^{n+1} - 2n - 4 + n + 1}{2^{n+1}} = \frac{2^{n+2} - n - 3}{2^{n+1}} = \frac{2^{(n+1)+1} - (n+1) - 2}{2^{n+1}}\end{aligned}$$

Dies ist die Behauptung mit $n+1$ anstelle von n. Mit dem Induktionsprinzip folgt nun die Gültigkeit der Behauptung für alle $n \in \mathbb{N}$.

c) (IA) Es gilt

$$\sum_{j=1}^{2 \cdot 1 - 1} (-1)^{j-1} j^2 = \sum_{j=1}^{1} (-1)^{j-1} j^2 = (-1)^0 1^2 = 1 = 1 \cdot (2 \cdot 1 - 1),$$

also gilt die Behauptung für $n = 1$.

(IV) Sei $n \in \mathbb{N}$, und es gelte die Behauptung für dieses n.

(IS) Es gilt

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{2(n+1)-1}(-1)^{j-1}j^2 &= \sum_{j=1}^{2n+1}(-1)^{j-1}j^2\\ &= \sum_{j=1}^{2n-1}(-1)^{j-1}j^2+(-1)^{2n-1}(2n)^2+(-1)^{2n}(2n+1)^2\\ &\overset{\text{IV}}{=} n(2n-1)-(2n)^2+(2n+1)^2 = 2n^2-n-4n^2+4n^2+4n+1\\ &= 2n^2+3n+1=(n+1)(2n+1)=(n+1)(2(n+1)-1).\end{aligned}$$

Dies ist die Behauptung mit $n+1$ anstelle von n. Mit dem Induktionsprinzip folgt nun die Gültigkeit der Behauptung für alle $n \in \mathbb{N}$.

d) (IA) Es gilt $1! = 1 = 2^0 = 2^{1-1}$, also gilt die Behauptung für $n = 1$.

(IV) Sei $n \in \mathbb{N}$, und es gelte $n! \geqslant 2^{n-1}$.

(IS) Es gilt

$$(n+1)! = n!(n+1) \overset{\text{IV}}{\geqslant} 2^{n-1}(n+1) \overset{n\geqslant 1}{\geqslant} 2^{n-1}\cdot 2 = 2^n = 2^{(n+1)-1}.$$

Dies ist die Behauptung mit $n+1$ anstelle von n. Mit dem Induktionsprinzip folgt nun die Gültigkeit der Behauptung für alle $n \in \mathbb{N}$.

e) Sei $x \in \mathbb{R}$ mit $x > -1$.

(IA) Es gilt $(1+x)^0 = 1 = 1 + 0\cdot x$, also gilt die Behauptung für $n = 0$.

(IV) Sei $n \in \mathbb{N}_0$, und es gelte $(1+x)^n \geqslant 1 + nx$.

(IS) Es gilt

$$\begin{aligned}(1+x)^{n+1} &= (1+x)^n(1+x) \underset{1+x>0}{\overset{\text{IV}}{\geqslant}} (1+nx)(1+x) = 1+nx+x+nx^2\\ &= 1+(n+1)x+nx^2 \geqslant 1+(n+1)x.\end{aligned}$$

Dies ist die Behauptung mit $n+1$ anstelle von n. Mit dem Induktionsprinzip folgt nun die Gültigkeit der Behauptung für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

f) Führe Induktion nach n durch.

(IA) Sei $n = 0$. Ist $k \in \mathbb{N}_0$ mit $k \leqslant n$, so muß $k = 0$ gelten. Dann ist

$$\sum_{m=k}^{n}\binom{m}{k} = \sum_{m=0}^{0}\binom{m}{0} = \binom{0}{0} = 1 = \binom{0+1}{0+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Daher gilt die Behauptung für $n = 0$.

(IV) Sei $n \in \mathbb{N}_0$, und es gelte $\binom{n+1}{k+1} = \sum\limits_{m=k}^{n} \binom{m}{k}$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ mit $k \leqslant n$.

(IS) Sei $k \in \mathbb{N}_0$ mit $k \leqslant n+1$. Betrachte zunächst den Fall $k = n+1$. Dann gilt

$$\sum_{m=k}^{n+1} \binom{m}{k} = \sum_{m=n+1}^{n+1} \binom{m}{n+1} = \binom{n+1}{n+1} = 1 = \binom{n+2}{n+2} = \binom{(n+1)+1}{k+1},$$

was die Behauptung für $n+1$ anstelle von n und $k = n+1$ ist. Sei nun $k \leqslant n$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \sum_{m=k}^{n+1} \binom{m}{k} &= \sum_{m=k}^{n} \binom{m}{k} + \binom{n+1}{k} \overset{\text{IV}}{=} \binom{n+1}{k+1} + \binom{n+1}{k} \overset{\text{Add.th.}}{=} \binom{n+2}{k+1} \\ &= \binom{(n+1)+1}{k+1}. \end{aligned}$$

Auch in diesem Fall konnte man die Behauptung für $n+1$ anstelle von n bewiesen. Insgesamt folgt nun mit dem Induktionsprinzip die Gültigkeit der Behauptung für alle $n, k \in \mathbb{N}_0$ mit $k \leqslant n$.

Bemerkung: Die oben durchgeführte Fallunterscheidung ist notwendig, da die Induktionsvoraußetzung nur für $k \leqslant n$ eine Aussage liefert, nicht aber für $k = n+1$.

Aufgabe 54

Beweisen Sie durch Anwendung des binomischen Satzes:

a) Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.

b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$.

Lösung:

a) Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $2^n = (1+1)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot 1^k \cdot 1^{n-k} = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$.

b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $0 = 0^n = ((-1)+1)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k 1^{n-k} = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$.

Aufgabe 55

Beweisen Sie durch Anwendung von Aufgabe 54 (a):

a) $2^n \geqslant n$ für alle $n \in \mathbb{N}$,

b) $2^n \geqslant \frac{1}{4} n^2$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqslant 2$,

c) $2^n \geqslant \frac{1}{27} n^3$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqslant 3$,

d) $2^n \geqslant \frac{1}{16} n^3$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqslant 4$.

Lösung:

a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $2^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \geqslant \binom{n}{1} = n$.

b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqslant 2$ gilt

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \geqslant \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} \overset{n\geqslant 2}{\geqslant} \frac{n(n-\frac{n}{2})}{2} = \frac{n \cdot \frac{n}{2}}{2} = \frac{n^2}{4}.$$

c) Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqslant 3$ gilt

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \geqslant \binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6} \overset{n\geqslant 3}{\geqslant} \frac{n(n-\frac{n}{3})(n-\frac{2n}{3})}{6} = \frac{n \cdot \frac{2n}{3} \cdot \frac{n}{3}}{6} = \frac{n^3}{27}.$$

d) Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqslant 4$ gilt

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \geqslant \binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6} \overset{n\geqslant 4}{\geqslant} \frac{n(n-\frac{n}{4})(n-\frac{n}{2})}{6} = \frac{n \cdot \frac{3n}{4} \cdot \frac{n}{2}}{6} = \frac{n^3}{16}.$$

Aufgabe 56 (∗)

Beweisen Sie die folgenden Aussagen mit vollständiger Induktion:

a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \neq b$ gilt $\frac{a^n - b^n}{a-b} = \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-k-1}$.

b) Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und $a, b \in \mathbb{R}$ gilt $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

c) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$.

d) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\sum_{k=1}^{n} (k+1) \binom{n}{k} = 2^{n-1}(n+2) - 1$.

e) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \leqslant 2\sqrt{n} - 1$.

Aufgabe 57 (∗)

Stellen Sie jeweils (anhand einer Wertetabelle) eine Vermutung auf, für welche $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichung gilt. Beweisen Sie Ihre Vermutung mit der Wertetabelle und vollständiger Induktion.

a) $n! \geqslant 2^n$, b) $n! < 3^{n-1}$, c) $2^n \geqslant n^2$, d) $n! \geqslant n^n$.

Lösung:

Skizze zu (b): $1! = 1 \not< 1 = 3^{1-1}$, $2! = 2 < 3 = 3^{2-1}$, $3! = 6 < 9 = 3^{3-1}$, $4! = 24 < 27 = 3^{4-1}$, $5! = 120 \not< 81 = 3^{5-1}$, $6! = 720 \not< 243 = 3^{6-1}$. Vermutung: Es gilt $n! < 3^{n-1}$ genau für $n \in \{2, 3, 4\}$. Zeige dazu noch per vollständiger Induktion, dass $n! \geqslant 3^{n-1}$ für alle $n \geqslant 5$ gilt. Den Induktionsanfang für $n = 5$ entnimmt man obiger Wertetabelle . Sei nun $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqslant 5$, und es gelte $n! \geqslant 3^{n-1}$. Weise die Aussage mit $n+1$ anstelle von n nach. Mit dem Induktionsprinzip folgt nun $n! \geqslant 3^{n-1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqslant 5$. Der Wertetabelle entnimmt man, dass $n! \geqslant 3^{n-1}$ auch für $n = 1$ und $n! < 3^{n-1}$ für $n \in \{2, 3, 4\}$ gilt. Zusammengenommen beweist dies die Vermutung

Aufgabe 58

Multiplizieren Sie aus:

a) $2 \cdot (x+3)$, b) $(y-3)(y+6)$, c) $(a+2)^2$, d) $(2x-3)(4a-2b)$,
e) $(3a-b)^2$, f) $(7x+yz)(yz-7x)$, g) $(a-b)(a^2+ab+b^2)$, h) $(-4x+2y)^2$,
i) $(a+1)^3$, j) $(a-b)^3$, k) $(a+1)(b+2)(c+3)$, l) $(a-b)^2 \cdot (a+b)$.

Lösung:

a) $2x+6$, b) $y^2+3y-18$, c) a^2+4a+4, d) $8ax-12a-4bx+6b$,
e) $9a^2-6ab+b^2$, f) $y^2z^2-49x^2$, g) a^3-b^3, h) $16x^2-16xy+4y^2$,
i) a^3+3a^2+3a+1, j) $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$, k) $abc+3ab+2ac+bc+6a+3b+2c+6$,
l) $a^3-a^2b-ab^2+b^3$.

Aufgabe 59

Fassen Sie zu einem Produkt zusammen:

a) $3a-3b$, b) $ac+2c-ad-2d$, c) $12ax+6ay+20bx+10by$,
d) $4x^2+12xy+9y^2$, e) $ab-3a+7b-21$, f) $4ax+14ax^2+50a^2b$.

Lösung:

a) $3(a-b)$, b) $(a+2)(c-d)$, c) $(4x+2y)(3a+5b)$,
d) $(2x+3y)^2$, e) $(a+7)(b-3)$, f) $2a(2x+7x^2+25ab)$.

Aufgabe 60

Vereinfachen Sie unter geeigneten Einschränkungen an die Variablen:

a) $1-\dfrac{n-1}{n}$, b) $\dfrac{1}{a+b}\left(\dfrac{1}{ab^2}+\dfrac{1}{a^2b}\right)$, c) $\left(\dfrac{4}{xy}+\dfrac{3}{yz}\right)\left(\dfrac{xz-y}{y}+1\right)$,

d) $\dfrac{\frac{x}{y}-\frac{z}{x}}{\frac{2}{x}-\frac{z}{y}}$, e) $\dfrac{x-2}{x-3}-\dfrac{x-1}{x-2}$, f) $\left(\dfrac{x^2}{2y}-\dfrac{y^2}{2x}\right):\left(\dfrac{2}{x}-\dfrac{2}{y}\right)$,

g) $\dfrac{\frac{2}{x}+\frac{x}{2}}{\frac{2}{x}-\frac{x}{2}}$, h) $\dfrac{\frac{1}{1-x}+\frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}}$, i) $\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{2x+\frac{1}{2x^2}}}$.

Lösung:

a) $\cdots = \dfrac{n-(n-1)}{n} = \dfrac{1}{n}$.

b) $\cdots = \dfrac{1}{a+b}\left(\dfrac{a+b}{a^2b^2}\right) = \dfrac{1}{a^2b^2}$.

c) $\dots = \frac{4z+3x}{xyz} \cdot \frac{xz-y+y}{y} = \frac{4z+3x}{xyz} \cdot \frac{xz}{y} = \frac{4z+3x}{y^2}.$

d) $\dots = \frac{\frac{x^2-zy}{xy}}{\frac{2y-zx}{xy}} = \frac{x^2-zy}{2y-zx}.$

e) $\dots = \frac{(x-2)^2-(x-1)(x-3)}{(x-3)(x-2)} = \frac{1}{(x-3)(x-2)}.$

f) $\dots = \frac{x^3-y^3}{2xy} : \frac{2y-2x}{xy} = \frac{(x^3-y^3)xy}{2xy(2y-2y)} = \frac{x^3-y^3}{4y-4x} = \frac{x^3-y^3}{4(y-x)} = \frac{x^2+xy+y^2}{-4}.$

g) $\dots = \frac{\frac{4+x^2}{2x}}{\frac{4-x^2}{2x}} = \frac{4+x^2}{2x} \cdot \frac{2x}{4-x^2} = \frac{4+x^2}{4-x^2}.$

h) $\dots = \frac{\frac{x+1+1-x}{1-x^2}}{\frac{x+1+x-1}{x^2-1}} = \frac{2}{1-x^2} \cdot \frac{x^2-1}{2x} = -\frac{1}{x}.$

i) $\dots = \frac{1}{2+\frac{1}{\frac{4x^3+1}{2x^2}}} = \frac{1}{2+\frac{2x^2}{4x^3+1}} = \frac{1}{\frac{8x^3+2+2x^2}{4x^3+1}} = \frac{4x^3+1}{8x^3+2x^2+2}.$

Aufgabe 61

Es seien $y > 0$ und $w < 0$. Weiter seien m, n ganze Zahlen. Vereinfachen Sie unter geeigneten Einschränkungen an die restlichen Variablen:

a) $\sqrt{x^2}$,

b) $\sqrt{y^2}$,

c) $\sqrt{w^2}$,

d) $\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[4]{a^3}$,

e) $\frac{r^{z+1}-r^{1-z}}{r^{-z}-r^z}$,

f) $\frac{r^{-s}-s^{-r}}{s^r-r^s} - \frac{1}{s^r r^s}$,

g) $\frac{(2r^{-6}s^3)^{-3}}{(2r^5s^{-2})^4}$,

h) $-\frac{(-r)^{3m}(-s^{5n})}{(-s)^{2m}(-r)^{4n+3}}$,

i) $\frac{(r^3)^2r^5s^{-3^2}}{(r^{-1})^{-6}r^2s^{-2\cdot 4}}$.

Lösung:

a) $|x|$, b) y, c) $-w$,

d) $\ldots = a^{\frac{1}{2}} a^{\frac{2}{3}} a^{\frac{3}{4}} = a^{\frac{23}{12}}$,

e) $\ldots = \dfrac{r(r^z - r^{-z})}{r^{-z} - r^z} = -r$,

f) $\ldots = \dfrac{s^r r^s (r^{-s} - s^{-r}) - (s^r - r^s)}{(s^r - r^s) s^r r^s} = 0$,

g) $\ldots = \dfrac{2^{-3} r^{18} s^{-9}}{2^4 r^{20} s^{-8}} = \dfrac{1}{2^7 r^2 s}$,

h) $(-1)^{m+1} r^{3m-4n-3} s^{5n-2m}$,

i) $\ldots = \dfrac{r^6 r^5 s^{-9}}{r^6 r^2 s^{-8}} = \dfrac{r^3}{s}$.

Aufgabe 62

Es seien a, b, r, s, x reelle Zahlen mit $a \geqslant b \geqslant 0$ und $x \geqslant 0$ sowie $a \neq x, s \neq 0$ und $r \neq -s$. Vereinfachen Sie mit Hilfe der binomischen Formeln:

a) $\sqrt{\sqrt{a} - \sqrt{b}} \cdot \sqrt{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$,

b) $\dfrac{a\sqrt{ax} - x\sqrt{ax}}{\sqrt{a} - \sqrt{x}}$,

c) $\dfrac{s^3 - r^2 s}{rs + s^2}$,

d) $\dfrac{(r-s)^2 + 4rs}{(r+s)^2}$.

Lösung:

a) $\sqrt{\sqrt{a} - \sqrt{b}} \cdot \sqrt{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \sqrt{(\sqrt{a} - \sqrt{b}) \cdot (\sqrt{a} + \sqrt{b})} = \sqrt{(\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2} = \sqrt{a - b}$.

b) $\dfrac{a\sqrt{ax} - x\sqrt{ax}}{\sqrt{a} - \sqrt{x}} = \dfrac{(a-x)\sqrt{ax}}{\sqrt{a} - \sqrt{x}} = \dfrac{(\sqrt{a} - \sqrt{x})(\sqrt{a} + \sqrt{x})\sqrt{ax}}{\sqrt{a} - \sqrt{x}} = a\sqrt{x} + x\sqrt{a}$.

c) $\dfrac{s^3 - r^2 s}{rs + s^2} = \dfrac{s(s^2 - r^2)}{s(r+s)} = \dfrac{s^2 - r^2}{r+s} = \dfrac{(s-r)(s+r)}{r+s} = s - r$.

d) $\dfrac{(r-s)^2 + 4rs}{(r+s)^2} = \dfrac{r^2 - 2rs + s^2 + 4rs}{(r+s)^2} = \dfrac{r^2 + 2rs + s^2}{(r+s)^2} = \dfrac{(r+s)^2}{(r+s)^2} = 1$.

Aufgabe 63

Bringen Sie die folgenden Terme durch Erweitern auf eine Form, in der im Nenner keine Wurzeln mehr stehen. Dabei seien a und b reelle Zahlen mit $a, b \geqslant 0$ und $a \neq b$.

a) $\dfrac{1}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}$, b) $\dfrac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$, c) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}}$, d) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}}$.

Lösung:

a) $\dfrac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})} = \dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}$.

b) $\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})} = \dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b}$.

c) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}} = \dfrac{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}{(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2})(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})} = \dfrac{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}{a-b}$ (etwa mit A 58(g)).

d) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}} = \dfrac{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}{(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2})} = \dfrac{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}{a-b}$.

— Gleichungen und Ungleichungen —

Aufgabe 64

Bringen Sie die folgenden Terme durch quadratische Ergänzung auf die Scheitelpunktform $a(x-b)^2+c$, und lesen Sie daran Art und Lage des lokalen Extremums sowie die Anzahl der Nullstellen der Parabel ab.

a) x^2-4x+5, b) $\frac{1}{2}x^2+x-\frac{9}{2}$, c) $-3x^2+12x-11$, d) $2x^2-4x+2$.

Lösung:

a) $(x-2)^2+1$, lokales Minimum in $(2,1)$, keine Nullstellen

b) $\frac{1}{2}(x+1)^2-5$, lokales Minimum in $(-1,-5)$, zwei Nullstellen

c) $-3(x-2)^2+1$, lokales Maximum in $(2,1)$, zwei Nullstellen

d) $2(x-1)^2$, lokales Minimum in $(1,0)$, eine Nullstelle

Aufgabe 65

Bringen Sie die folgenden quadratischen Terme durch Raten der richtigen Koeffizienten auf die Form $(x-a)(x-b)$, und lesen Sie daran die Nullstellen der Parabel ab. Hinweis: Ist $x^2+px+q=(x-a)(x-b)$, so muß $q=ab$ gelten; in dieser Aufgabe sind a und b stets ganzzahlig.

a) x^2-2x, b) x^2-5x+6, c) x^2+5x+6, d) x^2+3x-4.

Lösung:

a) $(x-0)(x-2)$, Nullstellen sind 0 und 2.

b) $(x-2)(x-3)$, Nullstellen sind 2 und 3.

c) $(x-(-2))(x-(-3))$, Nullstellen sind -2 und -3.

d) $(x-(-4))(x-1)$, Nullstellen sind 1 und -4.

Aufgabe 66

Lösen Sie die folgenden Gleichungen (sofern möglich) mit der p-q-Formel, durch quadratische Ergänzung oder wie in der letzten Aufgabe.

a) $x^2+x-6=0$,	b) $\frac{1}{3}x^2+\frac{10}{3}x+\frac{34}{3}=0$,	c) $x^2-4x+5=3x^2+7$,
d) $x^2+7x=0$,	e) $4x^2-1=0$,	f) $x^2=x+1$,
g) $x^4-13x^2+36=0$,	h) $x^4+2x^2+1=0$,	i) $x^4-2x^2-8=0$.

Lösung:

a) $x=2$ oder $x=-3$,	b) keine (reelle) Lösung,	c) $x=-1$,
d) $x=0$ oder $x=-7$,	e) $x=\frac{1}{2}$ oder $x=-\frac{1}{2}$,	f) $x=\frac{1}{2}(1\pm\sqrt{5})$,
g) $x=\pm 2$ oder $x=\pm 3$,	h) keine (reelle) Lösung,	i) $x=2$ oder $x=-2$.

Aufgabe 67

Geben Sie für die folgenden Gleichungen an, für welche reellen Zahlen x (gegebenenfalls in Abhängigkeit von den Parametern a und b) beide Seiten definiert sind. Lösen Sie dann die Gleichung in x.

a) $\dfrac{x+8}{x+1}=x-4$, b) $\dfrac{x+4}{x+5}=\dfrac{2x}{x-4}$,

c) $\dfrac{x+a+b}{x}+1=\dfrac{x+5a-b}{x+a-b}$.

Lösung:

a) Für $x\in\mathbb{R}$ mit $x\neq -1$ sind beide Seiten definiert.

$$\frac{x+8}{x+1}=x-4 \quad\Leftrightarrow\quad x+8=(x-4)(x+1) \quad\Leftrightarrow\quad x^2-4x-12=0,$$

die Lösung ist $x=-2$ oder $x=6$.

b) Für $x\in\mathbb{R}$ mit $x\neq -5$ und $x\neq 4$ sind beide Seiten definiert.

$$\frac{x+4}{x+5}=\frac{2x}{x-4} \quad\Leftrightarrow\quad (x+4)(x-4)=2x(x+5) \quad\Leftrightarrow\quad x^2+10x+16=0,$$

die Lösung ist $x=-8$ oder $x=-2$.

c) Für $x\in\mathbb{R}$ mit $x\neq 0$ und $x\neq b-a$ sind beide Seiten definiert.

$$\begin{aligned}
&\frac{x+a+b}{x}+1=\frac{x+5a-b}{x+a-b}\\
\Leftrightarrow\quad &(x+a+b)(x+a-b)+x(x+a-b)=x(x+5a-b)\\
\Leftrightarrow\quad &(2x+a+b)(x+a-b)=x^2+5ax-bx\\
\Leftrightarrow\quad &2x^2+3ax-bx+a^2-b^2=x^2+5ax-bx\\
\Leftrightarrow\quad &x^2-2ax+a^2-b^2=0,
\end{aligned}$$

die Lösung ist $x = a + b$ oder $x = a - b$, sofern beide Seiten der Gleichung für diese Werte definiert sind. Man hat also im Fall $a = b = 0$ keine Lösung, im Fall $a = 0$ und $b \neq 0$ die Lösung $x = -b$, im Fall $a \neq 0$ und $b = 0$ die Lösung $x = a$, im Fall $a, b \neq 0$ und $a = b$ die Lösung $x = 2a$, im Fall $a, b \neq 0$ und $a = -b$ ebenfalls die Lösung $x = 2a$ und in allen anderen Fällen die Lösungen $x = a + b$ und $x = a - b$.

Aufgabe 68

Bestimmen Sie die Lösungsmengen der folgenden Ungleichungen.

a) $x^2 > 9$,
b) $x^2 + 6x + 3 < 10$,
c) $x^2 + 3x - 9 \leqslant -x^2 + 7x + 7$,
d) $2x^2 + 3 \leqslant 1 - 4x$,
e) $x^2 - 4x + 6 < 2x^2 - 12x + 28$,
f) $3x^4 + 4 \leqslant 2x^4 + 5x^2$.

Lösung:

a) $x^2 > 9 \quad \Leftrightarrow \quad (x-3)(x+3) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x < -3$ oder $x > 3$.

b) $x^2 + 6x + 3 < 10 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + 6x - 7 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-1)(x+7) < 0$; man erhält, dass genau die $x \in \mathbb{R}$ mit $-7 < x < 1$ die Ungleichung lösen.

c) $x^2 + 3x - 9 \leqslant -x^2 + 7x + 7 \quad \Leftrightarrow \quad 2x^2 - 4x - 16 \leqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2(x+2)(x-4) \leqslant 0$; man erhält, dass genau die $x \in \mathbb{R}$ mit $-2 \leqslant x \leqslant 4$ die Ungleichung lösen.

d) $2x^2 + 3 \leqslant 1 - 4x \quad \Leftrightarrow \quad 2x^2 + 4x + 2 \leqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2(x+1)^2 \leqslant 0$; man liest ab, dass nur -1 die Ungleichung löst.

e) $x^2 - 4x + 6 < 2x^2 - 12x + 28 \quad \Leftrightarrow \quad -x^2 + 8x - 22 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad -(x-4)^2 - 6 < 0$; man liest ab, dass die Ungleichung für alle $x \in \mathbb{R}$ erfüllt ist.

f) $3x^4 + 4 \leqslant 2x^4 + 5x^2 \quad \Leftrightarrow \quad x^4 - 5x^2 + 4 \leqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x^2 - 1)(x^2 - 4) \leqslant 0$; die Ungleichung ist also äquivalent zu $1 \leqslant x^2 \leqslant 4$, also zu $1 \leqslant x \leqslant 2$ oder $-2 \leqslant x \leqslant -1$.

Aufgabe 69

Für welche $x \in \mathbb{R}$ sind die Ungleichungen definiert? Bestimmen Sie die Lösungsmengen.

a) $\dfrac{x-1}{x+1} < \dfrac{2x-1}{2x+1}$, b) $\dfrac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 8x + 15} \geqslant 0$, c) $\dfrac{x}{x+2} < \dfrac{2x-1}{3x-5}$.

Lösung:

a) Der Definitionsbereich ist $\mathbb{R} \setminus \{-1, -\frac{1}{2}\}$, die Lösungsmenge der Ungleichung lautet hier

$$\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < -\frac{1}{2} \text{ oder } x > 0\}.$$

b) Der Definitionsbereich ist $\mathbb{R} \setminus \{3, 5\}$, die Lösungsmenge der Ungleichung lautet hier

$$\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 1 \text{ oder } 3 < x \leqslant 4 \text{ oder } x > 5\}.$$

c) Der Definitionsbereich ist $\mathbb{R} \setminus \{-2, \frac{5}{3}\}$, die Lösungsmenge der Ungleichung lautet hier

$$\mathbb{L} = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 4 - \sqrt{14} \text{ oder } \frac{5}{3} < x < 4 + \sqrt{14} \right\}.$$

Aufgabe 70

Beweisen Sie die folgenden Ungleichungen:

a) $\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} \geqslant 2$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x, y > 0$,

b) $2xy \leqslant \frac{1}{2}(x+y)^2 \leqslant x^2 + y^2$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$.

Lösung:

a) Indem man mit xy erweitert und weiter umformt, erhält man

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geqslant 2 \quad \overset{xy>0}{\Leftrightarrow} \quad x^2 + y^2 \geqslant 2xy \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 2xy + y^2 \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-y)^2 \geqslant 0,$$

und das ist stets eine wahre Aussage, also gilt die Behauptung.

b) Die erste Ungleichung gilt nach

$$\begin{aligned} &2xy \leqslant \tfrac{1}{2}(x+y)^2 \quad \Leftrightarrow \quad 2xy \leqslant \tfrac{1}{2}(x^2 + 2xy + y^2) \quad \Leftrightarrow \quad 4xy \leqslant x^2 + 2xy + y^2 \\ &\Leftrightarrow \quad 0 \leqslant x^2 - 2xy + y^2 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leqslant (x-y)^2, \end{aligned}$$

da $(x-y)^2 \geqslant 0$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ eine wahre Aussage ist. Die zweite Ungleichung gilt mit derselben Begründung wegen

$$\begin{aligned} &\tfrac{1}{2}(x+y)^2 \leqslant x^2 + y^2 \quad \Leftrightarrow \quad (x+y)^2 \leqslant 2x^2 + 2y^2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + 2xy + y^2 \leqslant 2x^2 + 2y^2 \\ &\Leftrightarrow \quad 2xy \leqslant x^2 + y^2 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leqslant x^2 - 2xy + y^2 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leqslant (x-y)^2. \end{aligned}$$

Aufgabe 71 ($*$)

Beweisen Sie die folgenden Aussagen. Für den Umgang mit den Ungleichungszeichen $<$ und $>$ dürfen Sie hier nur die aus der Vorlesung bekannten Anordnungsaxiome (O.1) bis (O.4) verwenden.

a) Ist $r \in \mathbb{R}$, so gilt $r < 0 \Leftrightarrow -r > 0$.

b) Für alle $r \in \mathbb{R}$ mit $r \neq 0$ gilt $r^2 > 0$.

c) $1 > 0$.

d) Ist $r \in \mathbb{R}$ mit $r > 0$, so gilt auch $\frac{1}{r} > 0$.

Lösung:

a) Ist $r < 0$, so folgt mit (O.3) $r + (-r) < 0 + (-r)$, also $0 < -r$ und damit $-r > 0$. Gilt umgekehrt $-r > 0$, also $0 < -r$, so folgt mit (O.3) $0 + r < (-r) + r$, also $r < 0$. Damit wurde die Äquivalenz bewiesen.

b) Nach (O.1) verbleiben die Fälle $r > 0$ und $r < 0$ zu untersuchen. Im Fall $r > 0$ (also $0 < r$) hat man $0 \cdot r < r \cdot r$ nach (O.4), also $r^2 > 0$, und im Fall $r < 0$ hat man $-r > 0$ (also $0 < -r$) nach Teil (a) und damit $0 \cdot (-r) < (-r) \cdot (-r)$ nach (O.4), also $(-r)^2 > 0$ und damit wegen $(-r)^2 = r^2$ auch $r^2 > 0$.

c) Wähle $r = 1$ in Teil (b).

d) Annahme: $\frac{1}{r} < 0$. Dann folgt $-\frac{1}{r} > 0$ nach Teil (a) und damit $0 \cdot 0 < r \cdot (-\frac{1}{r})$ nach (O.4) wegen $0 < r$. Die letzte Ungleichung bedeutet aber $0 < -1$ und damit nach Teil (a) $1 < 0$, was mit (O.1) und Teil (c) einen Widerspruch liefert. Daher muß nach (O.1) $\frac{1}{r} > 0$ oder $\frac{1}{r} = 0$ gelten. Letzteres ist aber ausgeschloßen. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Aufgabe 72

Lösen Sie die Beträge auf, das heißt, geben sie einen gleichwertigen Ausdruck ohne Betragsstriche (dafür gegebenenfalls mit Fallunterscheidung) an.

a) $|x-5|$, b) $|x^2-5x+6|$, c) $|x^2-2x+1|$, d) $\dfrac{|x^2+x-2|}{|x+4|}$.

Lösung:

a) $|x-5| = \begin{cases} x-5, & \text{falls } x \geqslant 5, \\ 5-x, & \text{falls } x < 5 \end{cases}$

b) $|x^2-5x+6| = \begin{cases} x^2-5x+6, & \text{falls } x \leqslant 2 \text{ oder } x \geqslant 3, \\ -x^2+5x-6, & \text{falls } 2 < x < 3 \end{cases}$

c) $|x^2-2x+1| = |(x-1)^2| = (x-1)^2$

d) $\dfrac{|x^2+x-2|}{|x+4|} = \dfrac{|(x-1)(x+2)|}{|x+4|} = \begin{cases} \dfrac{x^2+x-2}{x+4}, & \text{falls } x \geqslant 1 \text{ oder } -4 < x \leqslant -2, \\ -\dfrac{x^2+x-2}{x+4}, & \text{falls } -2 < x < 1 \text{ oder } x < -4 \end{cases}$

Aufgabe 73

Für welche $x \in \mathbb{R}$ sind die folgenden Ungleichungen erfüllt?

a) $|x+4| < 2$, b) $|x-1| > 1$, c) $|x-3| > 0$ und $|x+1| < 5$.

Lösung:

a) $-6 < x < -2$, b) $x > 2$ oder $x < 0$, c) $-6 < x < 4$ und $x \neq 3$.

Aufgabe 74

Lösen Sie die folgenden Betragsgleichungen.

a) $|x+1| = x+2,$ b) $|x-1| - 2 = -x+1,$

c) $2|x+1| - 1 = 2x+1,$ d) $-3|x-2| = 3x+1.$

Lösung:

a) $x = -\frac{3}{2},$ b) $x = 2,$ c) $x \geqslant -1,$ d) Gleichung unlösbar

Aufgabe 75

Für welche $x \in \mathbb{R}$ sind die folgenden Gleichungen definiert? Lösen Sie die Gleichungen.

a) $\dfrac{x^2-3x-4}{2|x^2-4|} = 1,$ b) $\left|\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}\right| - 1 = 1.$

Lösung:

a) Definitionsbereich ist $\mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$, Lösungsmenge ist $\{-4, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{17}}{2}\}$.

b) Definitionsbereich ist $\mathbb{R} \setminus \{-2, -1\}$, Lösungsmenge ist $\{-\frac{9}{2} \pm \frac{\sqrt{73}}{2}\}$.

Aufgabe 76

Untersuchen Sie, welche $x \in \mathbb{R}$ die folgenden Ungleichungen erfüllen.

a) $|x^2-2x-2| < 2x-1,$ b) $|x^2+x-1| > (x-2)^2+1,$ c) $|x-1| < |2x-3| - 1.$

Lösung:

a) $\sqrt{3} < x < 2+\sqrt{5},$ b) $x > \frac{6}{5},$ c) $x < 1$ oder $x > 3.$

Aufgabe 77

Für welche $x \in \mathbb{R}$ sind die folgenden Ungleichungen definiert? Lösen Sie die Ungleichungen.

a) $\dfrac{2-|x-1|}{|x-4|} \geqslant \dfrac{1}{2},$ b) $\dfrac{|x|-1}{x^2-1} \geqslant \dfrac{1}{2},$ c) $\dfrac{|(x+2)^2-2|}{x+1} > 1.$

Lösung:

a) Definitionsbereich: $\mathbb{R} \setminus \{4\}$, Lösungsmenge: $\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{2}{3} \leqslant x \leqslant 2\}$

b) Definitionsbereich: $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, Lösungsmenge: $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 1\}$

c) Definitionsbereich: $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, Lösungsmenge: $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < -\frac{5}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2}$ oder $x > -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\}$

Aufgabe 78

Schreiben Sie die folgenden komplexen Zahlen in der Form $u + iv$ mit $u, v \in \mathbb{R}$:

a) $(1+2i)+(4+i)$, b) $(1+2i)-(4+i)$, c) $(1+2i)\cdot(4+i)$,
d) $(-11+i)-(5-2i)$, e) $(-11+i)+(5-2i)$, f) $(-11+i)\cdot(5-2i)$,
g) $(10+3i)+(4-2i)$, h) $(10+3i)-(4-2i)$, i) $(10+3i)\cdot(4-2i)$,
j) $(-9+7i)+(-5+2i)$, k) $(-9+7i)-(-5+2i)$, l) $(-9+7i)\cdot(-5+2i)$.

Lösung:

a) $5+3i$, b) $-3+i$, c) $2+9i$, d) $-16+3i$, e) $-6-i$, f) $-53+27i$,
g) $14+i$, h) $6+5i$, i) $46-8i$, j) $-14+9i$, k) $-4+5i$, l) $31-53i$.

Aufgabe 79

Bestimmen Sie jeweils $\mathrm{Re}(z), \mathrm{Im}(z), \overline{z}$ und $|z|$ für

a) $z = 2$, b) $z = 5i$, c) $z = 3+4i$, d) $z = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$,
e) $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, f) $z = 7-6i$, g) $z = 5+12i$, h) $z = 2+2\sqrt{3}i$.

Lösung:

	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	h)
$\mathrm{Re}\, z$	2	0	3	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	7	5	2
$\mathrm{Im}\, z$	0	5	4	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	-6	12	$2\sqrt{3}$
$\overline{z}$	2	$-5i$	$3-4i$	$\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$	$7+6i$	$5-12i$	$2-2\sqrt{3}i$
$\lvert z\rvert$	2	5	5	1	1	$\sqrt{85}$	13	4

Aufgabe 80

Zeigen Sie für $z \in \mathbb{C}$:

a) $\mathrm{Re}\, z = \dfrac{z+\overline{z}}{2}$, b) $\mathrm{Im}(z) = \dfrac{z-\overline{z}}{2i}$.

Lösung:

Sei $z = x+iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$.

a) $\dfrac{z+\overline{z}}{2} = \dfrac{x+iy+x-iy}{2} = \dfrac{2x}{2} = x = \mathrm{Re}\, z$,

b) $\dfrac{z-\overline{z}}{2i} = \dfrac{x+iy-(x-iy)}{2i} = \dfrac{2iy}{2i} = y = \mathrm{Im}\, z$.

Aufgabe 81

Zeigen Sie für $z, w \in \mathbb{C}$:

$$\text{a) } \overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}, \qquad \text{b) } |z|^2 = \overline{z} \cdot z, \qquad \text{c) } |z \cdot w| = |z| \cdot |w|.$$

Lösung:

Seien $z = x + iy$ und $w = u + iv$ mit $x, y, u, v \in \mathbb{R}$.

a)

$$\begin{aligned} \overline{z \cdot w} &= \overline{xu - yv + i(xv + yu)} \\ &= xu - yv - i(xv + yu) \\ &= xu - (-y)(-v) + i(x(-v) + (-y)u) \\ &= (x - iy) \cdot (u - iv) \\ &= \overline{z} \cdot \overline{w}. \end{aligned}$$

b)

$$z \cdot \overline{z} = (x + iy) \cdot (x - iy) = (x^2 - y(-y)) + i(x(-y) + yx) = x^2 + y^2 = |z|^2.$$

c) Es gilt zunächst

$$|z \cdot w|^2 \overset{b)}{=} \overline{z \cdot w} \cdot z \cdot w \overset{a)}{=} \overline{z} \cdot \overline{w} \cdot z \cdot w = (\overline{z} \cdot z) \cdot (\overline{w} \cdot w) \overset{b)}{=} |z|^2 \cdot |w|^2.$$

Aus $|z \cdot w|, |z|, |w| \geqslant 0$ folgt dann $|zw| = |z| \cdot |w|$.

Aufgabe 82

Seien $z, w \in \mathbb{C}$. Beweisen Sie mit Hilfe von A 81 (b) die Parallelogrammidentität:

$$|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2|z|^2 + 2|w|^2.$$

Lösung:

$$\begin{aligned} |z + w|^2 + |z - w|^2 &= \overline{z + w} \cdot (z + w) + \overline{z - w} \cdot (z - w) \\ &= (\overline{z} + \overline{w}) \cdot (z + w) + (\overline{z} - \overline{w}) \cdot (z - w) \\ &= \overline{z}z + \overline{z}w + \overline{w}z + \overline{w}w + \overline{z}z - \overline{z}w - \overline{w}z + \overline{w}w \\ &= 2 \cdot \overline{z}z + 2 \cdot \overline{w}w \\ &= 2|z|^2 + 2|w|^2. \end{aligned}$$

Aufgabe 83

Schreiben Sie die folgenden komplexen Zahlen in der Form $u + iv$ mit $u, v \in \mathbb{R}$:

a) $\frac{1}{i}$, b) $\frac{10+3i}{4-2i}$, c) $\frac{5}{2-i}$, d) $\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{-1}$,

e) $\frac{\sqrt{3}+2\sqrt{2}i}{\sqrt{3}-\sqrt{2}i}$, f) $\frac{1}{3+4i}$, g) $\frac{4+3i}{1-2i}$, h) $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2$,

i) $\frac{1}{i+\frac{1}{i+1}}$, j) $\frac{(1+i)^5}{(1-i)^3}$, k) $\frac{3+5i}{4+i}$, l) $\frac{2+3i}{4-5i}$.

Lösung:

a) $-i$, b) $1.7+1.6i$, c) $2+i$, d) $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$,

e) $\frac{-1}{5}+\frac{3}{5}\sqrt{6}i$, f) $\frac{3}{25}-\frac{4}{25}i$, g) $-\frac{2}{5}+\frac{11}{5}i$, h) -1,

i) $1-i$, j) 2, k) $1+i$, l) $\frac{-7}{41}+\frac{22}{41}i$.

Aufgabe 84

Berechnen Sie:

a) $i^2+i^5+i^3$, b) $i(-i)-i^2+i^3-i^8$, c) $6i-3i^2+3i^3+i^9$, d) $(2i-i^2)^2$,

e) $\frac{1}{i^3}$, f) $\frac{1}{i^6}$, g) $\frac{i^3}{i^5}$, h) $\frac{i^4}{i^2}$,

i) $i^{-1}-i^{-3}$, j) $i^{-2}+i^2$, k) i^{31}, l) $(1+i)^{17}$,

m) $i^2-\frac{1}{i}$, n) $\left(i-\frac{1}{i}\right)^2$, o) $(-i)^3+\frac{1}{i^4}$, p) $1-\frac{1}{i}$.

Lösung:

a) -1, b) $1-i$, c) $3+4i$, d) $-3+4i$, e) i, f) -1,

g) -1, h) -1, i) $-2i$, j) -2, k) $-i$, l) $256+256i$,

m) $-1+i$, n) -4, o) $1+i$, p) $1+i$.

Aufgabe 85

Bestimmen Sie die Polarkoordinatendarstellung der folgenden Zahlen. Wählen Sie dabei das Argument φ im Intervall $[0, 2\pi)$.

a) -5, b) $-5i$, c) $\frac{1+i}{2}$, d) $\frac{\sqrt{2}(1-i)}{2}$,

e) $\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$, f) $3+3i$, g) $-\sqrt{3}+i$, h) $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3i}{2}$.

Lösung:

a) $5 \cdot e^{i\pi}$, b) $5 \cdot e^{i\frac{3\pi}{2}}$, c) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{4}}$, d) $e^{i\frac{7\pi}{4}}$,

e) $e^{i\frac{\pi}{3}}$, f) $3\sqrt{2} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}}$, g) $2 \cdot e^{i\frac{5\pi}{6}}$, h) $\sqrt{3} \cdot e^{i\frac{5\pi}{3}}$.

Lösung:

a) $z_1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i,\ z_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$

b) $z_1 = i\sqrt{5},\ z_2 = -i\sqrt{5}$

c) $z_1 = \sqrt{1 + \frac{1}{2}\sqrt{5}} + \left(\sqrt{-1 + \frac{1}{2}\sqrt{5}}\right)i,\ z_2 = -z_1$

d) $z_1 = i,\ z_2 = -\frac{1}{2}\left(\sqrt{3} + i\right),\ z_3 = -\frac{1}{2}\left(-\sqrt{3} + i\right)$

Aufgabe 86

Bestimmen Sie die Lösungen der folgenden Gleichungen über $\mathbb{C}$:

a) $z^2 - 2iz - 2 = 0$, b) $z^2 - 2z - i = 0$, c) $z^3 + z^2 + z + 1 = 0$,
d) $z^4 - 2z^2 + 4 = 0$, e) $z^2 + 2(1-i)z = 2i$, f) $z^3 - 3z^2 + (3-2i)z = 1 - 2i$,
g) $z^2 = i\bar{z}$, h) $z^2 + (2-2i)z = 4i$, i) $z^4 + 2iz^2 = 2$.

Lösung:

a) $\{-1+i, 1+i\}$, b) $\left\{1 - \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} - i\sqrt{\frac{-1+\sqrt{2}}{2}},\ 1 + \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} + i\sqrt{\frac{-1+\sqrt{2}}{2}}\right\}$,

c) $\{-1, -i, i\}$, d) $\left\{z_1 := \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{3}+i), -z_1,\ z_2 := \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{3}-i), -z_2\right\}$,e) $\{-1+i\}$,

f) $\{1, -i, 2+i\}$, g) $\left\{0, -i, \frac{1}{2}(\sqrt{3}+i), \frac{1}{2}(-\sqrt{3}+i)\right\}$, h) $\{-2, 2i\}$,

i) $\left\{z_1 := \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} - i\sqrt{\frac{-1+\sqrt{2}}{2}}, -z_1,\ z_2 := \sqrt{\frac{-1+\sqrt{2}}{2}} - i\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}, -z_2\right\}$

— Zusatzmaterial: Prozentrechnung —

Aufgabe 87

Berechnen Sie jeweils den Prozentwert.

a) $10\,\%$ von 130, b) $6\,\%$ von 75, c) $8{,}7\,\%$ von 243, d) $153\,\%$ von $13{,}7$.

Lösung:

a) 13, b) $4{,}5$, c) $21{,}141$, d) $20{,}961$.

Aufgabe 88

Berechnen Sie jeweils den Prozentsatz.

a) 6 von 75, b) 23 von 141, c) $13{,}7$ von 8, d) $66{,}42$ von $3801{,}2$.

Lösung:
a) $8\,\%$, b) $16{,}31\,\%$ (gerundet), c) $171{,}25\,\%$, d) $1{,}75\,\%$ (gerundet).

Aufgabe 89

Berechnen Sie jeweils den Grundwert.

a) $10\,\%$ sind 73, b) $7\,\%$ sind 12, c) $32\,\%$ sind $5{,}4$, d) $5{,}4\,\%$ sind $2{,}8$.

Lösung:
a) 730, b) $171{,}43$ (gerundet), c) $16{,}875$, d) $51{,}85$ (gerundet).

Aufgabe 90

Bei einer Vorstandswahl in einem Verein stimmten im letzten Jahr 417 von 532 Mitgliedern für einen Kandidaten. In diesem Jahr erhielt derselbe Kandidat 486 von 599 Stimmen.

a) Berechnen Sie für beide Jahre die Zustimmungsquote für den Kandidaten in Prozent.

b) Um wieviele Prozentpunkte stieg die Zustimmungsquote zwischen diesen beiden Wahlen?

c) Um wie viel Prozent stieg die Zustimmungsquote zwischen diesen beiden Wahlen?

Lösung:

a) letztes Jahr: $\frac{417}{532} \approx 0{,}7838$, also Zustimmungsquote gerundet $78{,}38\,\%$; dieses Jahr: $\frac{486}{599} \approx 0{,}8113$, also Zustimmungsquote gerundet $81{,}13\,\%$.

b) $81{,}13 - 78{,}38 = 2{,}75$, die Zustimmungsquote stieg um $2{,}75$ Prozentpunkte (bei Rechnung mit den gerundeten Werten aus Teil (a)).

c) $81{,}13 : 78{,}38 \approx 1{,}0351$, also stieg die Zustimmungsquote (gerundet) um $3{,}5\,\%$.

Aufgabe 91

Rechnen Sie mit dem aktuellen Umsatzsteuersatz von $19\,\%$.

a) Ein Produkt kostet ohne Umsatzsteuer 120 €. Berechnen Sie den Bruttopreis (Preis mit Einbezug der Umsatzsteuer) des Produktes.

b) Ein Produkt kostet einschließlich Umsatzsteuer $148{,}15$ €. Berechnen Sie den Nettopreis (Preis ohne Einbezug der Umsatzsteuer) des Produktes.

Lösung:

a) $120\,€ \cdot 1{,}19 = 142{,}80\,€$.

b) $148{,}15\,€ \cdot \frac{1}{1{,}19} \approx 124{,}50\,€$ (nicht etwa $148{,}15\,€ \cdot 0{,}81 \approx 120{,}00\,€$, was auch im Widerspruch zu Teil (a) stünde).

Aufgabe 92

Ein Computer kostete ursprünglich $1795\,€$. Sein Preis wurde um $15\,\%$ gesenkt. Als ein neues Modell herauskam, wurde er noch einmal um $20\,\%$ billiger.

a) Wie viel Euro kostete der Computer zuletzt?

b) Um wie viel Prozent wurde der Preis insgesamt gesenkt?

Lösung:

a) $1220{,}60\,€$, b) $32\,\%$.

Aufgabe 93

Familie Burgner braucht einen neuen Kühlschrank.

a) Im Katalog des Großhandels Qücks ist der Preis ohne Umsatzsteuer mit $739\,€$ angegeben. Auf diesen Preis gibt es $30\,\%$ Rabatt, es kommen dann aber noch $19\,\%$ Umsatzsteuer hinzu. Wie viel Euro kostet der Kühlschrank bei Qücks?

b) Frau Burgner erkundigt sich im Fachgeschäft Elektro-Jürgens. Dort soll der gleiche Kühlschrank $598\,€$ (inklusive Umsatzsteuer) kosten. Bei Barzahlung gibt es $2\,\%$ Skonto. Wie viel Euro kostet der Kühlschrank dort bei Barzahlung?

c) Schließlich entscheiden sie sich für einen Kühlschrank, auf den $20\,\%$ Rabatt gewährt wurden. Da sie bar bezahlen, erhalten sie noch zusätzlich $3\,\%$ Skonto auf den ermäßigten Preis und bezahlen am Ende $582\,€$.

   (i) Wie viel betrug der Preis vor Abzug von Rabatt und Skonto?

   (ii) Wie viel Prozent hat Familie Burgner jetzt insgesamt gespart?

Lösung:

a) $615{,}59\,€$, b) $586{,}04\,€$, c) (i) $750\,€$, (ii) $22{,}4\,\%$.

Aufgabe 94

Meerwasser hat einen Salzgehalt von $3{,}5\,\%$ (alle Prozentangaben in dieser Aufgabe beziehen sich auf das Gewicht).

a) Der menschliche Geschmackssinn ist so empfindlich, dass Wasser mit $0{,}25\,\%$ Salzgehalt gerade noch als salzig wahrgenommen wird. Wie viel reines Wasser muß man zu $1\,\text{kg}$ Meerwasser hinzufügen, um den Salzgehalt auf $0{,}25\,\%$ zu erniedrigen?

b) In Frankreich wird an manchen Orten aus Meerwasser durch Verdunsten Salz gewonnen. Aus wie vielen Kilogramm Meerwasser erhält man 1 kg Salz?

Lösung:
a) 13 kg, b) $28{,}571$ kg (gerundet).

Aufgabe 95

a) Man vergleiche die Kosten für einen Kredit über $15\,000$ € für ein Jahr:

(1) $6{,}5\,\%$ Zinsen, 300 € Bearbeitungsgebühr,

(2) $8{,}25\,\%$ Zinsen, keine Bearbeitungsgebühr,

(3) $7\,\%$ Zinsen, 100 € Bearbeitungsgebühr,

b) $15\,000$ € werden jährlich mit $6\,\%$ verzinst. Man berechne das Endkapital mit Zinsen und Zinseszinsen nach fünf Jahren.

Lösung:
a) (1) 1275 €, (2) $1237{,}50$ €, (3) 1150 €, b) $20\,073{,}38$ €.

Aufgabe 96

Messing ist eine Legierung (Mischung) aus Kupfer und Zink.

a) Bei der Herstellung werden 90 kg Kupfer und 60 kg Zink zusammengeschmolzen. Wie viel Prozent Kupfer und wie viel Prozent Zink enthält die Legierung?

b) Eine andere Sorte Messing soll $65\,\%$ Kupfer enthalten. Für die Legierung sollen 300 kg Kupfer verwendet werden. Wieviele Kilogramm Zink werden benötigt?

c) Es werden 20 kg Messing mit einem Kupferanteil von $55\,\%$ mit 40 kg Messing mit einem Kupferanteil von $70\,\%$ zusammengeschmolzen. Wie viel Kilogramm Kupfer enthält die neue Legierung? Wie hoch ist der Anteil des Kupfers am Gesamtgewicht in Prozent?

Lösung:
a) $60\,\%$ Kupfer, $40\,\%$ Zink, b) $161{,}538$ kg Zink (gerundet), c) 39 kg Kupfer, $65\,\%$.

Aufgabe 97

Ein Rezept für $0{,}4$ l Cocktail verlangt $0{,}08$ l Rum mit einem Alkoholgehalt von $37{,}5\,\%$ (bezogen auf das Volumen) und hat ansonsten nur nichtalkoholische Zutaten.

a) Welche Menge Alkohol enthält der Cocktail?

b) Welche Menge Bier mit einem Alkoholgehalt von $4{,}9\,\%$ enthält die gleiche Menge Alkohol wie der Cocktail?

Lösung:
a) $0{,}03$ l, b) $0{,}61$ l (gerundet).

Aufgabe 98

Eine Wasserpumpe fördert 10 l Wasser in 50 s.

a) In wievielen Sekunden ist ein Behälter gefüllt, der 15 l Wasser faßt?

b) Wie viel Wasser wird in 2 h gefördert?

Lösung:

a) Der 15-Liter-Behälter ist in 75 s gefüllt.

b) In zwei Stunden fördert die Pumpe 1440 l Wasser.

Aufgabe 99

Ein Tintenstrahldrucker hat eine qualitätsabhängige Druckleistung von 5–8 Seite pro Minute, wenn ein Dokument nur schwarz/weiß gedruckt wird, bei Farbausdrucken beträgt seine Leistung je nach Qualität 3–4 Seiten pro Minute.

a) Wie viel Zeit muß man mindestens einplanen, um 20 Seiten zu drucken?

b) Wie lange dauert es höchstens, bis ein Dokument, das aus 60 Seiten besteht, ausgedruckt ist?

c) Wie viele Seiten werden in einer Stunde höchstens gedruckt?

Lösung:

a) schnellste Druckvariante: S-W-Druck mit 8 Seiten pro Minute. Um 20 Seiten zu drucken, muß man also mindestens zweieinhalb Minuten einplanen.

b) langsamste Druckerstufe: Farbdruck in bester Qualität, also mit 3 Seiten pro Minute. Für ein 60-seitiges Dokument benötigt man höchstens 20 Minuten.

c) schnellste Druckvariante: S-W-Druck mit 8 Seiten pro Minute. Damit schafft der Drucker in einer Stunde maximal 480 Seiten.

Aufgabe 100

Zum Streichen einer 3 m $\times$ 4 m großen Wand werden $2{,}4$ kg Farbe benötigt. Dabei sind 5 kg Wandfarbe mit 750 cm^3 Wasser zu verdünnen.

a) Wie viel Wasser benötigt man, um die für die Wand benötigte Farbmenge zu verdünnen?

b) Wie viel Farbe kann man mit 2 l Wasser höchstens verarbeiten?

c) Wie viel Farbe und wie viel Wasser benötigt man, um die Wände eines 3 m hohen Raumes zu streichen, deßen Grundfläche 4 m $\times$ 5 m ist?

Lösung:

a) 360 cm^3,

b) $\frac{40}{3}$ kg ($\approx 13{,}3$ kg),

c) Die Wandfläche beträgt $2 \cdot (4\,\text{m} \cdot 3\,\text{m}) + 2 \cdot (5\,\text{m} \cdot 3\,\text{m}) = 54\,\text{m}^2$. Zum Streichen dieser Wand benötigt man $10{,}8$ kg Farbe und $1620\,\text{cm}^3$ Wasser.

Aufgabe 101

Eine Radtour dauert sechs Tage, wenntäglich 56 km zurückgelegt werden.

a) Wie viele Tage benötigt man bei einer täglichen Fahrstrecke von 84 km?

b) Wie viele Kilometer müßen am Tag gefahren werden, wenn jede Etappe gleich lang sein soll und für die Radtour sieben Tage zur Verfügung stehen?

Lösung:

a) 4 Tage, b) 48 km.

Aufgabe 102

Zwei Mähdrescher bringen die Ernte eines Feldes in 12 h ein.

a) Wie lange brauchen fünf Mähdrescher für die gleiche Ernte?

b) In wie vielen Stunden ist die Ernte von fünf Feldern eingefahren, wenn drei Mähdrescher zur Verfügung stehen?

c) Wie viele Felder können abgeerntet werden, wenn vier Mähdrescher jeweils 8 h im Einsatz sind?

Lösung:

a) $4{,}8$ h, b) 40 h, c) $\frac{4}{3}$ Felder.

Aufgabe 103

Joghurt wird in 20 Becher zu je 150 g abgefüllt. Jeder Becher Joghurt kostet $0{,}29$ €.

a) Wie viele 250-Gramm-Becher kann man mit der gleichen Menge Joghurt füllen?

b) Ein 250-Gramm-Becher kostet $0{,}47$ €. Ist es günstiger, drei große oder fünf kleine Becher Joghurt zu kaufen?

Lösung:

a) Mit den vorhandenen 3 kg Joghurt können 12 Becher à 250 g gefüllt werden.

b) Es ist günstiger, drei große Becher zu kaufen; diese kosten zusammen $1{,}41$ €, während fünf kleine Becher zusammen $1{,}45$ € kosten.

Aufgabe 104

In 8 h erzeugen vier Werkzeugmaschinen 960 Formteile. Wie viele Teile erzeugen drei dieser Maschinen in 5 h?

Lösung:
450 Formteile

Aufgabe 105

Der Lebensmittelvorrat eines Kreuzfahrtschiffes reicht für 120 Personen für genau 18 Tage. Nach 6 Tagen werden 24 Personen zusätzlich an Bord genommen. Wie lange reicht der Vorrat insgesamt?

Lösung:
Nach 6 Tagen würde der Vorrat für 120 Personen noch 12 Tage reichen, für 144 Personen also noch 10 Tage. Insgesamt reichen die Vorräte also 16 Tage.

Aufgabe 106

Auf einer Teststrecke verbrauchen fünf PKWs des selben Typs auf einer Strecke von 280 km bei einer Testfahrt insgesamt $113{,}4$ l Benzin.

a) Wieviele Liter Benzin verbrauchen unter gleichen Bedingungen acht dieser PKWs auf einer Strecke von 350 km?

b) Bei einer Testfahrt unter denselben Bedingungen verbrauchen 7 PKWs einer anderen Automarke auf einer 210 km langen Teststrecke zusammen $107{,}31$ l Benzin. Welcher Autotyp hat den geringeren Durchschnittsverbrauch?

Lösung:

a) $226{,}8$ l Benzin

b) Der zweite Autotyp hat mit $7{,}3$ l pro 100 km einen geringeren Durchschnittsverbrauch als der erste Autotyp mit $8{,}1$ l auf 100 km.

— Polynomdivision —

Aufgabe 107

Lösen Sie die folgenden kubischen Gleichungen, indem Sie sie gegebenenfalls auf die Form $p(x) = 0$ bringen, eine Nullstelle d von p raten, dann $p(x)$ durch $x - d$ dividieren und die verbleibende quadratische Gleichung lösen. *Hinweis:* Ist $p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, so testen Sie zunächst die ganzzahligen Teiler von c darauf, ob sie Nullstellen von p sind.

a) $x^3 - 7x + 6 = 0$, b) $x^3 - 6x^2 + 5x + 12 = 0$,
c) $x^3 + x + 6 = 4x^2 - x + 2$, d) $2x^3 + 8x^2 + 12x + 8 = 0$.

Lösung:

a) $x = 1$ oder $x = 2$ oder $x = -3$ (geratene Nullstelle sei 1, dann mit Polynomdivision $(x^3 - 7x + 6) : (x - 1) = x^2 + x - 6 = (x - 2)(x + 3)$)

b) $x = -1$ oder $x = 3$ oder $x = 4$ (geratene Nullstelle sei -1, dann mit Polynomdivision $(x^3 - 6x^2 + 5x + 12) : (x + 1) = x^2 - 7x + 12 = (x - 3)(x - 4)$)

c) $x = 2$ oder $x = 1 \pm \sqrt{3}$ (gegebene Gleichung ist äquivalent zu $x^3 - 4x^2 + 2x + 4 = 0$, geratene Nullstelle sei 2, dann $(x^3 - 4x^2 + 2x + 4) : (x - 2) = x^2 - 2x - 2 = (x - 1)^2 - 3$, Lösen von $(x - 1)^2 - 3 = 0$ liefert weitere Lösungen der gegebenen Gleichung)

d) $x = -2$ (Gleichung äquivalent schreibbar als $x^3 + 4x^2 + 6x + 4 = 0$, geratene Nullstelle sei -2, dann $(x^3 + 4x^2 + 6x + 4) : (x + 2) = x^2 + 2x + 2 = (x + 1)^2 + 1 > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$)

— Zusatzmaterial: Knobelaufgaben —

Aufgabe 108 ($*$)

a) In der folgenden Addition stehen die Buchstaben für einzelne Ziffern (gleiche Buchstaben bedeuten stets gleiche Ziffern, verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern): ABBC + DADE = CEDAD. Finden Sie heraus, welche Rechnung durchgeführt wurde.

b) Untersuchen Sie wie in Teil (a) die Addition ABCB + DBBA = CEFC.

c) Warum kann die Rechnung $2962 + 1164 = 4126$ nicht als Grundlage einer Aufgabe wie Teil (a) verwendet werden?

Aufgabe 109 ($*$)

Auf einem Tisch liegen 27 Streichhölzer. Zwei Spieler nehmen nun abwechselnd pro Zug mindestens ein Streichholz und höchstens vier Streichhölzer vom Tisch. Gewonnen hat derjenige, der am Ende eine gerade Anzahl von Streichhölzern besitzt.

a) Zeigen Sie, dass der zuerst nehmende Spieler stets gewinnen kann, indem Sie eine Gewinnstrategie für diesen Spieler angeben.

b) Gewinnt der zuerst nehmende Spieler auch dann stets, wenn zu Beginn $28, 29, 30, 31, 32$ oder 33 Streichhölzer auf dem Tisch liegen?

c) Das oben beschriebene Spiel soll nun für beliebige Anfangszahl von Streichhölzern untersucht werden. Überlegen Sie sich eine Darstellung der auftretenden Spielpositionen, und beschreiben Sie alle Positionen, von denen aus der am Zug befindliche Spieler eine Gewinnstrategie besitzt.

d) Untersuchen Sie nun in ähnlicher Weise die Spielvariante, in der pro Zug mindestens ein Streichholz und höchstens drei Streichhölzer vom Tisch genommen werden dürfen.

Aufgabe 110 ($*$)

Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es, das ¨Haus vom Nikolaus¨ ( ) ohne Absetzen des Stiftes und ohne mehrfaches Durchlaufen derselben Strecke zu zeichnen, wenn in der Ecke links oben unter dem Dach begonnen werden soll?

Aufgabe 111 ($*$)
Der Springer im Schachspiel zieht auf folgende Weise: zunächst ein Feld in gerader Richtung (vorwärts, rückwärts, nach links oder nach rechts) und dann unter weiterer Entfernung vom Startpunkt ein Feld in diagonaler Richtung. Geben Sie für die nachfolgenden Springer-Probleme jeweils entweder eine Lösung an oder zeigen Sie, dass keine Lösung existieren kann (es wird immer ein Springer auf einem Schachbrett der Größe 8×8 betrachtet).

a) Geben Sie eine Springerzugfolge an, die auf einem beliebigen Feld startet, auf demselbem Feld endet und jedes Feld des Schachbretts mit Ausnahme des Startfeldes genau einmal berührt.

b) Geben Sie eine Springerzugfolge an, die auf dem Feld unten links beginnt, auf dem Feld oben rechts endet und jedes Feld des Schachbretts genau einmal berührt.