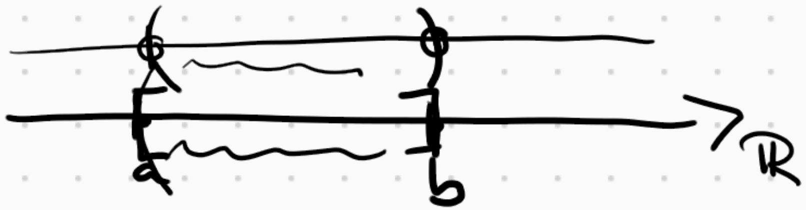
Reelle Funktionen

Erinnerung:
Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ mit Definitionsbereich $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}$ und Zielbereich $\mathbb{R}$ ist eine eindeutige Zuordnung $x \mapsto f(x)$.
Die Menge $f(D) = \{y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in D : y = f(x)\}$ heißt das Bild von f.
Für $y \in \mathbb{R}$ heißt $f^{-1}(y) = \{x \in D \mid f(x) = y\}$ das Urbild von y.

Typische Definitionsbereiche:

- $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$
- Intervalle in $\mathbb{R}$, d.h. für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$
  - abgeschlossenes Intervall $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$
  - offenes Intervall $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$
  - halb offene Intervalle $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$ und $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$
  - Wir lassen unbeschränkte Grenzen $\pm\infty$ zu, z.B. $(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$ oder $(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$
  - insbesondere: $(-\infty, 0] = \mathbb{R}_{\leq 0}$, $[0, \infty) = \mathbb{R}_{\geq 0}$, $(-\infty, 0) = \mathbb{R}_{>0}$, $(0, \infty) = \mathbb{R}_{>0}$, $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$.



$\leftarrow \mathbb{R}_{<0}$

Definition

Seien $f_1 : D_1 \to \mathbb{R}$ und $f_2 : D_2 \to \mathbb{R}$ zwei reelle Funktionen.
Ist $D = D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$, so ist

(i) die **Summe** $f_1 + f_2 : D \to \mathbb{R}$ erklärt durch $x \mapsto f_1(x) + f_2(x)$,

(ii) das **Produkt** $f_1 \cdot f_2 : D \to \mathbb{R}$, erklärt durch$x \mapsto f_1(x) \cdot f_2(x)$.

(iii) Ist $D' = \{x \in D_1 \cap D_2 \mid f_2(x) \neq 0\} \neq \emptyset$, so ist der **Quotient** $\frac{f_1}{f_2} : D' \to \mathbb{R}$ erklärt durch $x \mapsto \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$.

Bsp: (i) Ist $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \longmapsto x^2$, $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \longmapsto x+1$

dann ist
- $f_1 + f_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto x^2 + x + 1$
- $f_1 \cdot f_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto x^2(x+1) = x^3 + x^2$
- $\frac{f_1}{f_2} : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \frac{x^2}{x+1}$

(ii) Ist $f : D \to \mathbb{R}$ irgendeine Fkt, dann ist $2 \cdot f$ die Fkt $2 \cdot f : D \to \mathbb{R},\ x \mapsto 2 \cdot f(x)$; $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 2$

(iii) Sind $f_1, f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Polynome, so ist

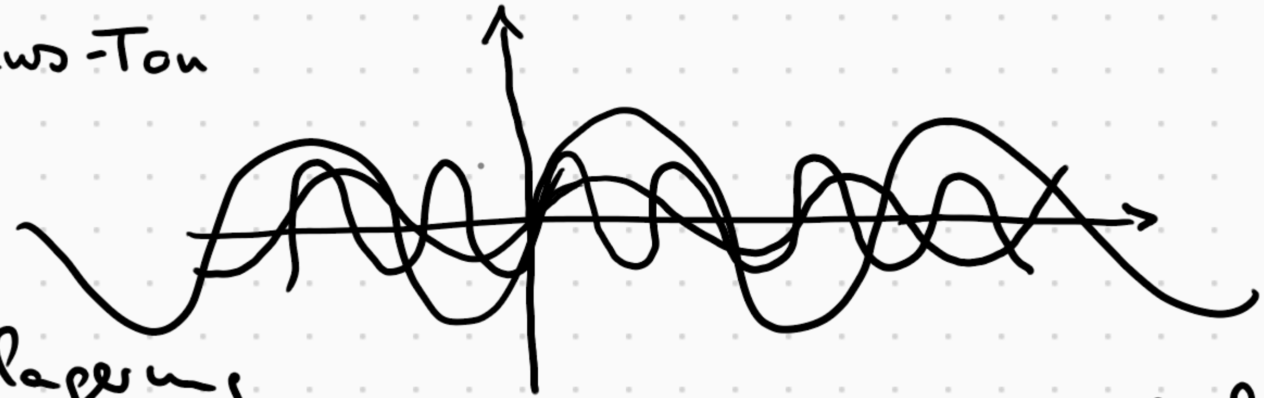
$$\left.\begin{array}{l} f_1 \cdot f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \longmapsto f_1(x) \cdot f_2(x) \\ f_1 + f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \longmapsto f_1(x) + f_2(x) \end{array}\right\} \text{ wieder ein Polynom.}$$

(iv) Sind $f_1, f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Polynome, so ist

$$\frac{f_1}{f_2} : \mathbb{R} \setminus \{\text{NSt von } f_2\} \to \mathbb{R}$$

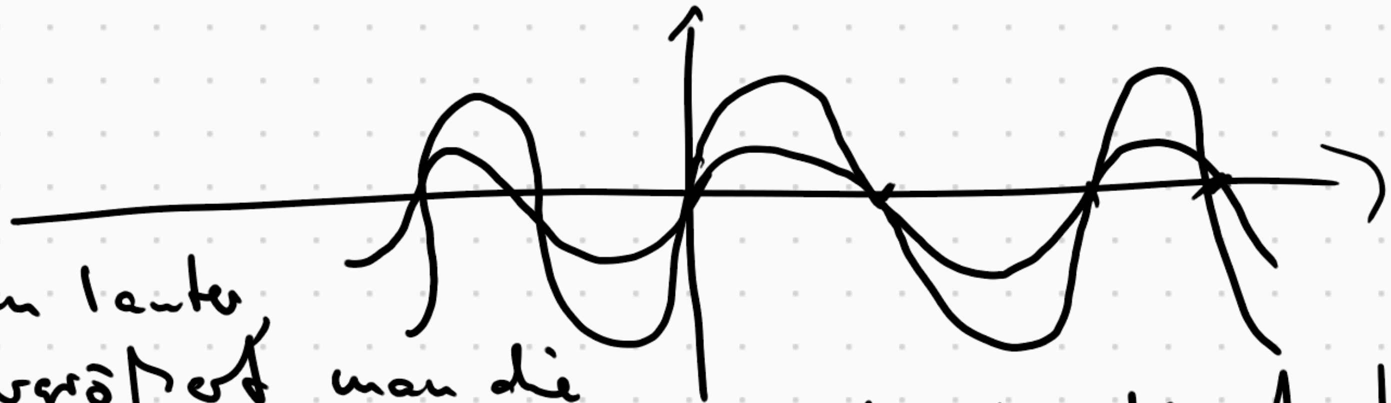
eine gebrochen rationale Funktion

Beispiel: Sinus-Ton



Erst die Überlagerung verschiedener Sinus-Töne ergibt einen natürlichen Ton.

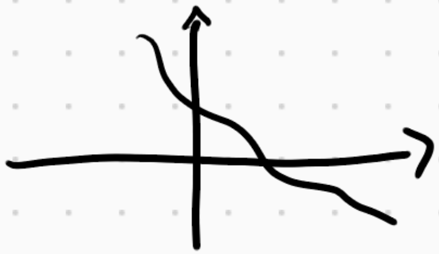
$\widehat{=}$ Addition



- spielt man lauter, dann vergrößert man die Amplitude $\widehat{=}$ Multiplikation mit einer Konstanten $c > 1$.

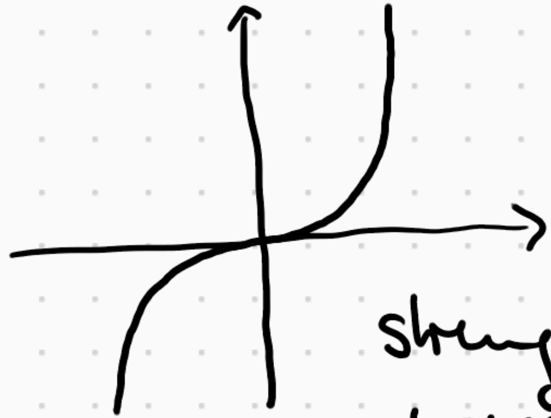
Monotonie

Erinnerung: Der Graph einer Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ist die Menge $\mathrm{Graph}(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in D\} \subsetneq D \times \mathbb{R}$.



Bsp: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \longmapsto x^3$

$\mathrm{graph}(f) = \{(x, x^3) \mid x \in \mathbb{R}\} \subsetneq \mathbb{R}^2$



streng monoton wachsend

Definition

(i) Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt **monoton wachsend** (bzw. fallend), falls für alle $x, y \in D$ mit $x < y$ gilt $f(x) \leq f(y)$ (bzw. $f(x) \geq f(y)$).

(ii) Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt **streng monoton wachsend** (bzw. fallend), falls für alle $x, y \in D$ mit $x < y$ gilt $f(x) < f(y)$ (bzw. $f(x) > f(y)$).

<u>**Beweis:**</u> Sei $x<y$, z.z. $x^3 < y^2$ für bel. $x, y \in \mathbb{R}$.

<u>**1. Fall:**</u> $x = 0 < y$. Dann ist $0 = x^3 < y^3$ klar.

<u>**2. Fall:**</u> $0 < x < y$. Dann gilt:

$$\left.\begin{array}{l} \cdot\ x < y \overset{\cdot x^2}{\Longrightarrow} x^3 < x^2 y \\ \cdot\ x < y \overset{\cdot xy}{\Longrightarrow} x^2 y < x y^2 \\ \cdot\ x < y \overset{\cdot y^2}{\Longrightarrow} x y^2 < y^3 \end{array}\right\} \underset{\text{von „<"}}{\overset{\text{Transitivität}}{\Longrightarrow}}$$

$\Rightarrow x^3 < x^2 y < x y^2 < y^3$, also $\underline{x^3 < y^3}$. ✓

<u>**3. Fall:**</u> $x < 0 \leq y$: Dann ist $x^3 < 0$ und $0 \leq y^3$, also $\underline{x^3 < y^3}$.

<u>**4. Fall:**</u> $x < y < 0$. Dann ist $0 < (-y) < (-x)$. Somit $(-y)^3 < (-x)^3$, also $\underline{x^3 < y^3}$. $\blacksquare$

__Beispiel__: Die konstante Funktion $f : D \to \mathbb{R}$, $x \longmapsto c$ (für $c \in \mathbb{R}$ fest) ist monoton, aber nicht streng monoton. (wachsend wie fallend)

Denn $\forall\, x, y \in D$: $x < y \begin{cases} \Rightarrow & f(x) = c \leq c = f(y). \\ \Rightarrow & f(x) = c \geq c = f(y). \end{cases}$

Satz

Eine streng monotone Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ist injektiv.

Beweis: Seien $x, y \in D$ mit $f(x) = f(y)$ gegeben.

OE (OBdA) ist $x \leq y$ (sonst vertausche die Rollen von x und y).

Aus $x < y$ folgt $f(x) < f(y)$, falls f streng mon. steigend.

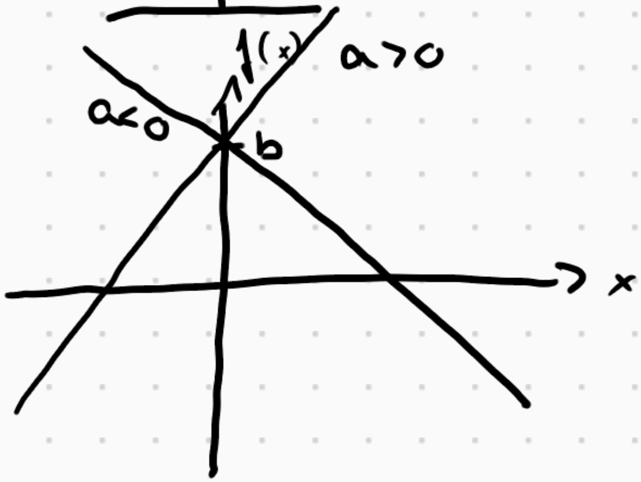
[$f(x) > f(y)$, —"— fallend]

Also folgt aus $f(x) = f(y)$, dass $x = y$.

D.h. f ist injektiv. $\square$

<u>Beispiel</u>: Lineare Funktionen $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto ax+b$

für feste $a,b\in\mathbb{R}$, $(a\neq 0)$.



Ist $a>0$, so ist f streng monoton wachsend

Ist $a<0$, ——— " ——— fallend.

Reelle Folgen

Bsp: Herr Meyer legt sein Geld G_0 an zu einem festen Zinssatz p an.

Nach 1 Jahr hat er das Guthaben $G_1 = (1+p)\cdot G_0$

Nach 2 Jahren ——— " ——— $G_2 = (1+p)\cdot G_1 = (1+p)^2 G_0$

" 3 ——— " ——— $G_3 = (1+p) G_2 = (1+p)^3 G_0$

$\vdots$

Nach n Jahren ——— " ——— $G_n = (1+p)\cdot G_{n-1} = (1+p)^n G_0$

$G_0, G_1, G_2, \ldots$ bilden eine <u>Folge</u>, bei der die Glieder rekursiv aus den vorhergehenden berechnet werden:

$$G_n = (1+p)\, G_{n-1}.$$

Definition

Eine Abbildung, die jeder Zahl $n \in \mathbb{N}$ (oder auch $\mathbb{N}_0$) eine reelle Zahl $a_n \in \mathbb{R}$ zuordnet, heißt **reelle Folge**. Schreibweise:

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Die einzelnen a_n heißen **Folgeglieder**.

$\mathbb{N} \to \mathbb{R}$
$n \mapsto a_n \in \mathbb{R}$

Beispiel

Die Folge $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ heißt **harmonische Folge**.

$a_1 = 1, \quad a_2 = \frac{1}{2}, \quad a_3 = \frac{1}{3}, \ldots, \quad a_n = \frac{1}{n}, \quad a_{n+1} = \frac{1}{n+1}, \ldots$

<u>Bsp</u>: Die Folge $(n)_{n\in\mathbb{N}}$: $1, 2, 3, 4, \ldots$

<u>Bsp</u>: Die konstante Folge $(c)_{n\in\mathbb{N}}$: $c, c, c, c, \ldots$
($c \in \mathbb{R}$ fest)

-2-

Definition

Eine reelle Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt (streng) monoton wachsend/fallend, wenn sie das als Funktion $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $n \mapsto a_n$, ist.

<u>Bsp:</u>

- Die Folge $(n)_{n\in\mathbb{N}}$, d.h. $a_n = n$, ist streng monoton wachsend: $a_1 = 1 < 2 = a_2 < 3 = a_3 < \dots$
- Die harmon. Folge $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ist streng monoton fallend: $1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4} > \dots > \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} > \dots$

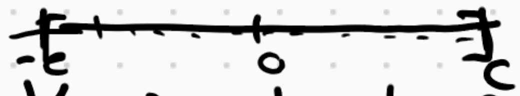
Definition

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt absolut **beschränkt**, wenn es eine reelle Zahl $C \geq 0$ gibt mit

$$\forall n \in \mathbb{N}. |a_n| \leq C.$$

Die Zahl C heißt **Schranke** der Folge.

Wir verwenden auch: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt nach oben beschränkt, wenn es $C \in \mathbb{R}$ gibt mit $a_n \leq C$ für alle n. Dann heißt C obere Schranke.
Sowie: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt nach unten beschränkt, wenn es $c \in \mathbb{R}$ gibt mit $c \leq a_n$ für alle n. Dann heißt c untere Schranke.



$\forall n\in\mathbb{N}: |a_n| \leq C$

Bsp: • Die harmonische Folge ist beschränkt durch 1: $\left|\frac{1}{n}\right| \leq 1$, $1 \geq \frac{1}{n} > 0$

• Die Folge $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist unbeschränkt
Denn wäre C eine Schranke für $(n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Dann fänden wir in $[C, C+1]$ eine natürliche Zahl m mit $C < m$ ↯ C Schranke

Bsp: Folge $(2)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt, z.B. durch 2, $|2| \le 2$.

Bsp: Die Folge $((-1)^n n)_{n\in\mathbb{N}}$

$-1, 2, -3, 4, -5, 6, \ldots$ alternierende Folge

ist weder nach oben noch nach unten beschränkt.

Konvergenz von Folgen

Definition

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt **konvergent** gegen den Grenzwert a,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad [\text{oder: } a_n \xrightarrow{n\to\infty} a],$$

wenn für jedes reelle $\epsilon > 0$ gilt: Für alle großen n ist

$$|a_n - a| < \epsilon.$$

Eine Folge, die nicht konvergent ist, heißt divergent.

Bemerkung

(i) „Für alle großen n…“ heißt genauer: „Es gibt eine natürliche Zahl $N \in \mathbb{N}$ so, dass für alle $n \geq N$ gilt…“. Dieses N hängt normalerweise von ϵ ab, $N = N(\epsilon)$.

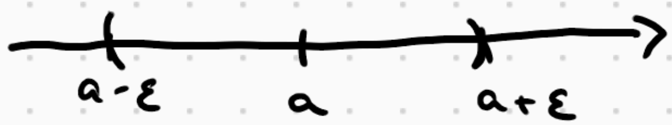
(ii) Zu einer Zahl $\epsilon > 0$ und $a \in \mathbb{R}$ nennt man

$$U_\epsilon(a) = \{x \in \mathbb{R} \mid |a - x| < \epsilon\} = (a - \epsilon, a + \epsilon)$$

die ϵ-Umgebung von a.

(iii) Konvergenz gegen a bedeutet, dass ab einem gewissen Index $N = N(\epsilon)$ alle Folgeglieder in der ϵ-Umgebung von a liegen – und zwar für jedes $\epsilon > 0$.

$$\forall x \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon) : |x - a| < \varepsilon$$



<u>Bsp</u>: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ $\qquad$ $\left[\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}\right.$ harmonische Folge.$\left.\right]$

Zu $\varepsilon > 0$ wählt man $N \in \mathbb{N}$ so groß, dass $N > \frac{1}{\varepsilon}$. Dann gilt für alle $n \geq N$:

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon .$$

Man sieht: Die Folgeglieder kommen dem Grenzwert beliebig nahe, nehmen ihn aber nie an.

Bsp: $\forall n \in \mathbb{N}: \; a_n = 3$ (Folge konstant $= 3$)

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} 3 = 3$$

Denn für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $|a_n - 3| = |3-3| = 0 < \varepsilon$ für jedes $\varepsilon > 0$.

Satz

(i) Jede konvergente Folge ist beschränkt.

(ii) Jede Folge, die monoton und beschränkt ist, ist konvergent.

!! Die Umkehrungen dieser Aussagen sind falsch!!
Nicht jede beschränkte Folge konvergiert. Beispiel: $b_n = (-1)^n$.
Nicht jede konvergente Folge ist monoton. Beispiel: $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$.

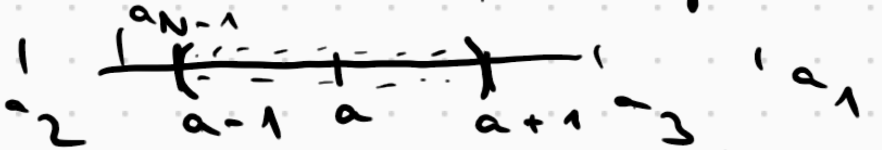
$|b_n| \le 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

Bsp: $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist unbeschränkt, also divergent.
ist monoton

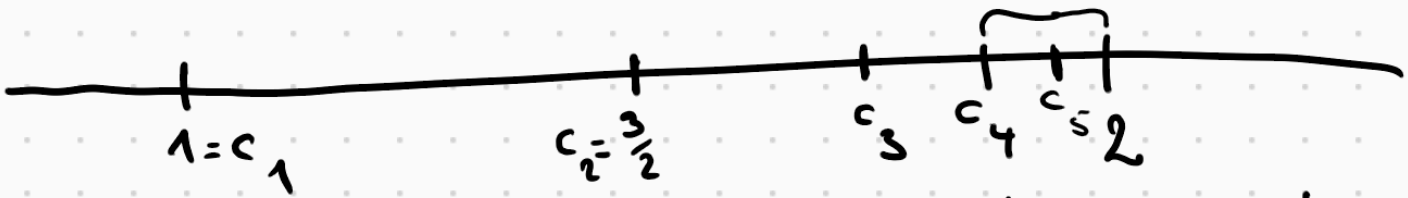
(i) **Bew:** Sei $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ geg., d.h. insbesondere gilt für das spezielle $\varepsilon = 1$ ein $N \in \mathbb{N}$ so, dass für alle $n \ge N$ gilt

$|a_n - a| < 1$ ✓



D.h. $|a|+1$ ist eine abs. Schranke für die Folge $(a_n)_{n\ge N}$.
Die endlich vielen ersten Folgeglieder $a_1, \ldots, a_{N-1}$ sind ebenfalls beschränkt. $\Rightarrow$ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt.

Beispiel: Betrachte die Folge c_n mit $c_1 = 1$, bei der in jedem Schritt der Abstand zu 2 halbiert wird.



$\forall n \in \mathbb{N}: 1 \leq c_n < 2$: $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt

$$c_{n+1} = c_n + \frac{2-c_n}{2} > c_n$$: $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton wachsend

$\overset{\text{Satz (ii)}}{\Longrightarrow}$ $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent.

1.

Grenzwertsätze

Satz

Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente Folgen mit

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n \quad \text{und} \quad b = \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Dann gilt:

(i) Die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $c_n = a_n + b_n$ (für alle $n \in \mathbb{N}$) konvergiert und es gilt

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b.$$

(ii) Die Folge $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $d_n = a_n \cdot b_n$ konvergiert und es gilt

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = a \cdot b.$$

(iii) Ist die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gliedweise von null verschieden und ist $b \neq 0$, so konvergiert die Folge $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $e_n = \frac{a_n}{b_n}$ und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}.$$

Bsp: $a_n = \dfrac{3n^2+2}{n^2+6}$ für alle $n \in \mathbb{N}$

Konvergiert $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Wende die Grenzwertsätze an!

$$a_n = \frac{n^2\left(3+\frac{2}{n^2}\right)}{n^2\left(1+\frac{6}{n^2}\right)} = \frac{3+\frac{2}{n^2}}{1+\frac{6}{n^2}}$$

Die Folge $(2)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent, $\lim\limits_{n\to\infty} 2 = 2$

$\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ $\Bigg\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(2\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent,

$\lim\limits_{n\to\infty} 2\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n} = 2\cdot 0\cdot 0 = 0$

Die Folge $(3)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent, $\lim\limits_{n\to\infty} 3 = 3$

$\Rightarrow \left(3+\frac{2}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent, $\lim\limits_{n\to\infty} 3+\frac{2}{n^2} = 3+0 = \underline{\underline{3}}$

Ebenso: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{6}{n^2} \overset{!}{=} \lim\limits_{n\to\infty} 6 \left(\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right)^2 = 6\cdot 0\cdot 0 = 0$

Also konvergiert $\left(1+\frac{6}{n^2}\right) \xrightarrow{n\to\infty} 1+0 = 1$ $\Bigg\} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ existiert und ist $= \frac{3}{1} = \underline{\underline{3}}$

Bestimmte Divergenz

Definition

Eine reelle Folge heißt **bestimmt divergent gegen** $+\infty$,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \quad \text{bzw.} \quad a_n \xrightarrow{n\to\infty} \infty,$$

wenn für jede reelle Zahl $C > 0$ gilt $a_n > C$ für alle großen n. Analog definiert man bestimmt divergent gegen $-\infty$.

Bsp: $\lim\limits_{n\to\infty} n = +\infty$

Bsp: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2-1}{n+2} = +\infty$

$\forall n \in \mathbb{N}: \quad \frac{n^2-1}{n+2} = \frac{n^2\left(1-\frac{1}{n^2}\right)}{n\left(1+\frac{2}{n}\right)} = n \underbrace{\frac{\left(1-\frac{1}{n^2}\right)}{1+\frac{2}{n}}}_{\xrightarrow{n\to\infty} 1}$

Bsp: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1-n^3}{2n^2+1} = -\infty$

$$\frac{1-n^3}{2n^2+1} = \frac{n^3\left(\frac{1}{n^3}-1\right)}{n^2\left(2+\frac{1}{n^2}\right)} = n \cdot \underbrace{\frac{\left(\frac{1}{n^3}-1\right)}{\left(2+\frac{1}{n^2}\right)}}_{\xrightarrow{n\to\infty} \frac{-1}{2}}$$

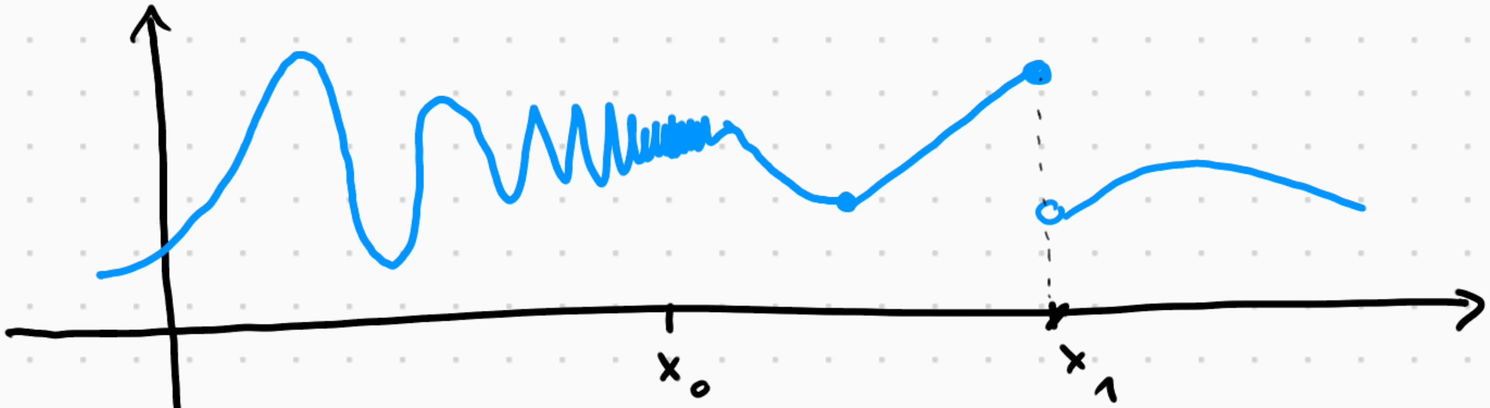
-2-

Damit kann man ganz allgemein den Grenzwert einer gebrochen rationalen Fkt in n bestimmen.

Seien p, q Polynome. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{p(n)}{q(n)} = \begin{cases} 0 \,, & \text{grad}(p) < \text{grad}(q) \\ \text{Quotient d. höchsten Koeff.}\,, & \text{grad}(p) = \text{grad}(q) \\ (\text{VZ d. höchsten Koeff}) \cdot \infty \,, & \text{grad}(p) > \text{grad}(q) \end{cases}$

$$\frac{p(n)}{q(n)} = \underbrace{\frac{n^{\text{grad}\,p}}{n^{\text{grad}\,q}}} \underbrace{\left(\frac{a + \frac{a_1}{n} + \frac{c_2}{n^2} + \ldots +}{b + \frac{b_1}{n} + \ldots}\right)}_{\longrightarrow \frac{a}{b}}$$

Grenzwerte von Funktionen



„Gutartiges Verhalten": Nähert sich das Argument x einer Stelle x_0, so nähert sich der Funktionswert $f(x)$ dem Wert $f(x_0)$.

Definition

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine reelle Funktion. Die Funktion hat für x gegen x_0 den Grenzwert y_0, wenn gilt: Für **jede** Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in D, deren Folgeglieder $x_n \neq x_0$ sind und die gegen x_0 konvergiert, konvergiert die Folge der Funktionswerte $y_n = f(x_n)$ gegen y_0,

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = y_0.$$

Man schreibt auch kurz

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = y_0.$$

D: Def.bereich

$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$

Beachte:

- Hierbei muss x_0 nicht zu D gehören. Insbesondere lassen wir „$x_0 = \pm\infty$" zu.
- Selbst falls $x_0 \in D$, muss der Grenzwert y_0 nicht notwendig mit $f(x_0)$ übereinstimmen.
- Findet man auch nur eine einzige Folge, die die Bedingung verletzt, ist y_0 nicht der Grenzwert.

-2-

-3-

Beispiel

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$, und $x_0 = 2$.

Beh: $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 4$.

Denn sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine bel. Folge mit $x_n \neq 2$ für alle n und $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2$. Dann gilt mit den Grenzwertsätzen:

$$\lim_{n\to\infty} x_n^2 = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} x_n = 2 \cdot 2 = 4.$$

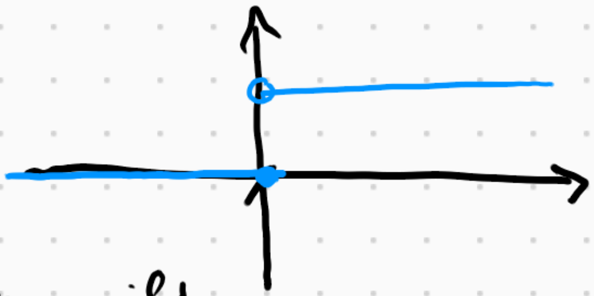
d.h. $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = 4$. Da Folge beliebig war, folgt Behauptung. $\square$

Bsp: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \begin{cases} 1, & \text{falls } x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

$\underbrace{\lim\limits_{x\to 0} f(x)}_{\neq f(0)} = 1$. Denn ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine bel. Folge mit $x_n \neq 0$ f.a. $n \in \mathbb{N}$, dann ist $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}} = (1)_{n\in\mathbb{N}} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = 1$.

Beispiel

Heaviside-Funktion: $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} 0, & \text{falls } x \leq 0, \\ 1, & \text{falls } x > 0, \end{cases}$ und $x_0 = 0$.



Für positive Folgen $x_n \to x_0 = 0$, $x_n > 0$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} H(x_n) = \lim_{n\to\infty} 1 = 1.$$

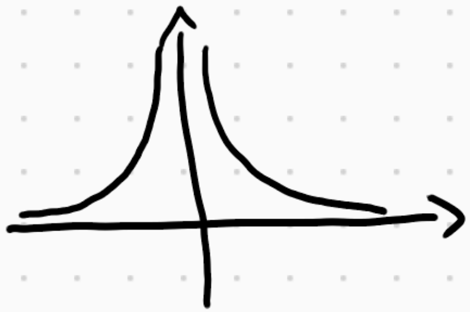
Für negative Folgen $x_n \to 0$, $x_n < 0$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} H(x_n) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$$

$\Rightarrow$ Der Grenzwert $\lim\limits_{x\to 0} H(x)$ <u>existiert nicht</u>!

Beispiel

$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x^2}$, und $x_0 = 0$.



Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $x_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Dann ist $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{(x_n)^2} = +\infty$

Dann: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0 = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

Bemerkung

Grenzwerte von Funktionen genügen den Grenzwertsätzen.

Beispiel: $f:\mathbb{R}\setminus\{0;-1\}\longrightarrow\mathbb{R}\qquad x\longmapsto\dfrac{2x^2+1}{x^2+x}$

- $\lim\limits_{x\to\infty}$? : $$\frac{2x^2+1}{x^2+x}=\frac{x^2\left(2+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\frac{2+\overbrace{\frac{1}{x^2}}^{\to 0}}{1+\underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0}}\xrightarrow[x\to\infty]{}\frac{2}{1}=2$$

  d.h. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=2$

- $$\lim_{x\to 0+}\frac{\overbrace{2x^2+1}^{\to 1}}{x^2+x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^2+x}=+\infty$$

- $$\lim_{x\to 0^-}\frac{\overbrace{2x+1}^{\to 1}}{x^2+x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{\underbrace{x^2+x}_{<0}}=-\infty$$

Stetigkeit

$f : D \to \mathbb{R}$

Definition

(i) Eine Funktion heißt **stetig in** $x_0 \in D$, wenn der Grenzwert $\lim_{x \to x_0} f(x)$ existiert und mit den Funktionswert $f(x_0)$ übereinstimmt

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

(ii) Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt **stetig**, wenn sie in jedem $x_0 \in D$ stetig ist.

Bemerkung

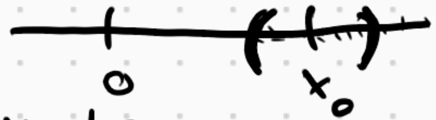
Eine stetige Funktion kann also insbesondere keine Sprungstellen haben.

Beispiel

Die Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$ ist stetig auf ihrem gesamten Definitionsbereich.

Für alle $x_0 \neq 0$ gilt: ist $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$,

dann ist $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = \frac{1}{x_0}$



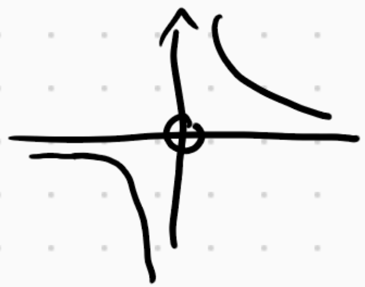
für große n ist $x_n \neq 0$

D.h. für alle solche Folgen gilt $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$,

d.h. f ist stetig in x_0.

Also ist nur $x_0 = 0$ kritisch. Aber $x_0 \notin D$.

$\Rightarrow$ f ist stetig



Beispiel

Die Heaviside-Funktion $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} 0, & \text{falls } x \leq 0, \\ 1, & \text{falls } x > 0, \end{cases}$ ist nicht stetig in $x_0 = 0$, aber überall sonst.

für $x_0 \neq 0$ gilt:

$x_0 < 0$: $\lim\limits_{n\to\infty} H(x_n) = 0 = H(x_0)$, falls $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$

$x_0 > 0$: $\lim\limits_{n\to\infty} H(x_n) = 1 = H(x_0)$, falls $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$

$\Rightarrow$ H ist stetig in $x_0 \neq 0$.

$x_0 = 0$:

$$\lim_{x\to 0^+} H(x) = 1$$

$$\lim_{x\to 0^-} H(x) = 0$$

$\neq 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} H(x)$ nicht existent $\Rightarrow$ H nicht stetig in $x_0 = 0$.

Beispiel

Die Betragsfunktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |x|$ ist stetig.

$x_0 > 0$: $\quad x_n \to x_0$: $\quad \lim_{n\to\infty} |x_n| = \lim_{n\to\infty} x_n = x_0 = |x_0|$

$\Rightarrow f$ stetig in x_0

$x_0 < 0$: $\quad x_n \to x_0$: $\quad \lim_{n\to\infty} |x_n| = \lim_{n\to\infty} (-x_n) = -x_0 = |x_0|$

$\Rightarrow f$ stetig in x_0

$x_0 = 0$: $\quad x_n \to 0$ $\quad \lim_{n\to\infty} |x_n| = 0 = |0|$

$\Rightarrow f$ stetig in $x_0 = 0$.

-4-

Beispiel

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2.$

Sei $x_0 \in \mathbb{R}$. , Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ $\quad (x_n \neq x_0)$

Grenzwerte $\Longrightarrow$ $(x_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert mit

$$\lim_{n\to\infty} x_n^2 = x_0^2 = f(x_0)$$

Also ist f stetig in x_0. Da $x_0 \in \mathbb{R}$ bel, ist f stetig.

Satz

(i) Polynome sind stetige Funktionen.

(ii) Gebrochen rationale Funktionen sind stetig (auf ihrem Definitionsbereich).

(iii) Die Funktionen exp, ln, sin, cos sind stetig.

(iv) Sind $f_1 : D_1 \to \mathbb{R}$ und $f_2 : D_2 \to \mathbb{R}$ stetig und ist $D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$, dann sind die Funktionen $f_1 + f_2$, $f_1 \cdot f_2$ stetig auf $D_1 \cap D_2$.
Ebenso ist $\frac{f_1}{f_2}$ stetig auf $D_1 \cap D_2 \setminus \{x \in D_2 \mid f_2(x) = 0\}$.

(v) Sind $f : D_1 \to \mathbb{R}$ und $g : D_2 \to \mathbb{R}$ stetig und ist $f(D_1) \subset D_2$, dann ist $g \circ f : D_1 \to \mathbb{R}$ stetig.

$\leftarrow$ Benutze die Grenzwertsätze

Bemerkung: Die Schuldefinition „Eine Funktion ist stetig, wenn man sie ohne absetzen des Stifts zeichnen kann." taugt nicht immer.

- Man kann zwar Sprungstellen ausschließen, muss aber Definitionslücken beachten.
- Ein Bsp: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \; x \mapsto \begin{cases} \sin(\frac{1}{x}), & \text{für } x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

$\sin(\frac{1}{x})$ oszilliert extrem! für $x \to 0$

f ist nicht stetig in $x_0 = 0$.

1) $x_n = \dfrac{1}{2\pi \cdot n + \frac{\pi}{2}} \xrightarrow{n \to \infty} 0$, $\sin\left(\frac{1}{x_n}\right) = \sin\left(2\pi n + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ für alle n.

2) $y_n = \dfrac{1}{2\pi \cdot n + \frac{3\pi}{2}} \xrightarrow{n \to \infty} 0$, $\sin\left(\frac{1}{y_n}\right) = \sin\left(2\pi n + \frac{3\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1$ für alle n.

d.h. $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = 1 \neq 0 = f(0) \neq -1 = \lim\limits_{n \to \infty} f(y_n)$