Exponentialfunktionen

$$\tilde{f}: \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad a \in \mathbb{R}_{>0}$$
$$x \longmapsto a^x$$

$x = \frac{p}{q}, p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0: \ a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$

- $\forall x, y \in \mathbb{Q}: \tilde{f}(x+y) = a^{x+y} \overset{\text{Potenzgesetz}}{=} a^x \cdot a^y$
- $a^1 = a$, d.h. $\tilde{f}(1) = a$

stetige Fortsetzung von $\tilde{f}$ auf $\mathbb{R}$! $\forall x_0 \in \mathbb{R}$ $\lim_{x \to x_0} \tilde{f}(x)$ existiert!

$f(x_0) = \lim_{x \to x_0} \tilde{f}(x)$

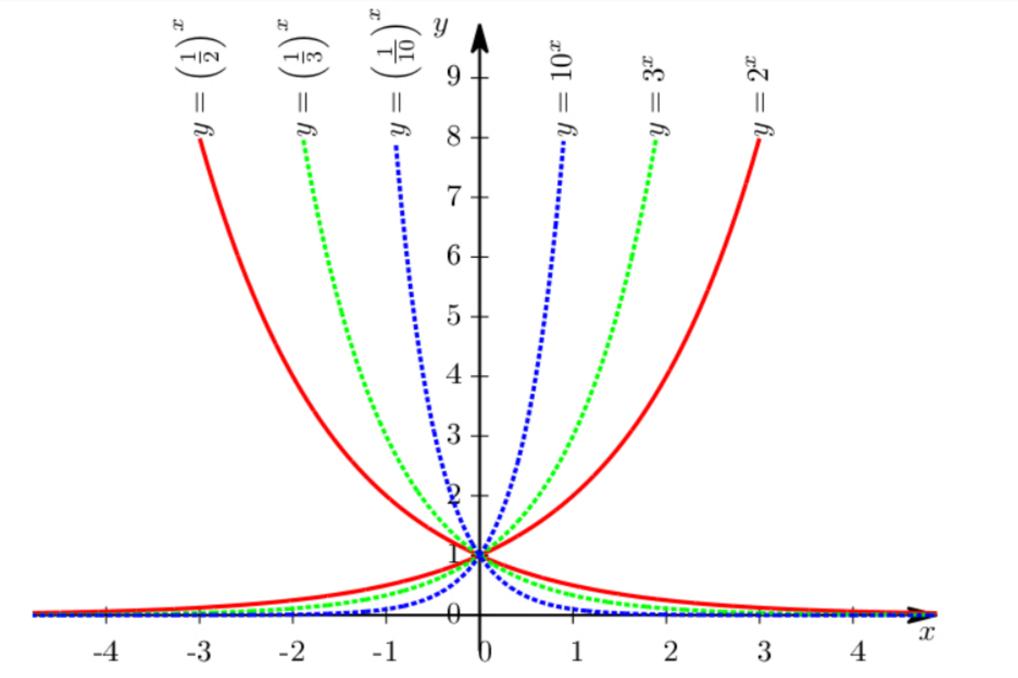
Satz

Sei $a > 0$. Es gibt genau eine stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit den Eigenschaften

- $\forall x, y \in \mathbb{R} : f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$,
- $f(1) = a$.

Auf $\mathbb{Q}$ stimmt f überein mit $x \mapsto a^x$.

Funktionalgleichung



$a > 1$: streng mon. wachsend

$a < 1$: streng mon. fallend

Bemerkung

Es gibt eine von der Natur ausgezeichnete Basis $a = e$, die **Eulersche Zahl**. Es gilt zum Beispiel

$$e = \lim_{n \to \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = 2,7182 \ldots.$$

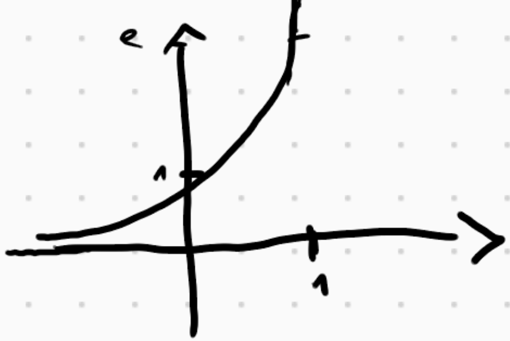
Die Funktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto e^x$, heißt (natürliche) Exponentialfunktion. Insbesondere erfüllt sie

$$\exp(x + y) = \exp(x) \cdot \exp(y), \quad \exp(1) = e.$$

Eigenschaften der natürlichen Exponentialfunktion

Stetigkeit	überall stetig
Differenzierbarkeit	überall beliebig oft differenzierbar
Ableitung	$\exp'(x) = \exp(x)$
Stammfunktion	$F(x) = \exp(x) + c$
Monotonie	streng monoton wachsend
Bild	$\mathbb{R}_{>0} = (0, \infty)$
Nullstellen	keine

$e = 2,\ldots > 1$



Der natürliche Logarithmus

$f = \exp.$
$x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$
also:
$f(x) = f(y)$
$\Rightarrow x = y$

Die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$, $x \mapsto e^x$, ist streng monoton wachsend, also injektiv, und surjektiv auf $\mathbb{R}_{>0}$. Somit gibt es eine Umkehrfunktion $\phi : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ mit

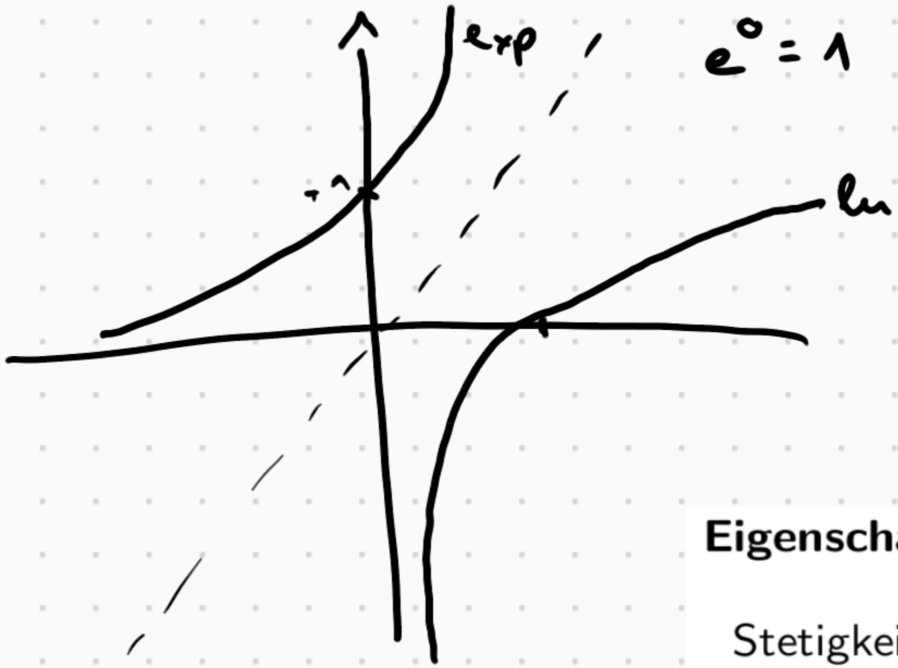
$$\forall x \in \mathbb{R} : \quad \phi \circ \exp(x) = x,$$
$$\forall x \in \mathbb{R}_{>0} : \quad \exp \circ \phi(x) = x.$$

$x \mapsto \ln(x)$

Definition

Die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion exp heißt natürliche Logarithmusfunktion $\ln : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$, $y \mapsto \ln(x)$.
Insbesondere gilt $\ln(e^x) = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $e^{\ln(x)} = x$ für alle $x \in \mathbb{R}_{>0}$.

$$e^0 = 1 \Rightarrow \ln(1) = 0$$



Eigenschaften des natürlichen Logarithmus

Stetigkeit	überall stetig
Differenzierbarkeit	überall beliebig oft
Ableitung	$\ln'(x) = \frac{1}{x}$
Stammfunktion	$F(x) = x\ln(x) - x + c$
Monotonie	streng monoton wachsend
Bild	$\mathbb{R}$
Nullstellen	$x = 1$

$$: x \longmapsto \exp(\ln(x)) = x$$

$$\mathbb{R}_{>0} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad \text{Ableitung: } (\exp \circ \ln)' \underline{\underline{= 1}}$$

$$\forall x>0: \ (\exp \circ \ln)'(x) \overset{\uparrow}{\underset{\text{Kettenregel}}{=}} \exp'(\ln(x)) \cdot \ln'(x)$$

$$= \underbrace{\exp(\ln(x))}_{x} \cdot \ln'(x)$$

$\underline{\text{also}}$: $\forall x>0: \quad 1 = x \cdot \ln'(x) \iff \ln'(x) = \frac{1}{x}$

überprüfe Stammfkt: $\forall x>0$

$$\underline{F'(x)} = (x \cdot \ln(x) - x)' \overset{\uparrow}{\underset{\text{Prod.regel}}{=}} 1 \cdot \ln(x) + \underbrace{x \cdot \frac{1}{x}}_{1} - 1 = \underline{\ln(x)} \ //\ \checkmark$$

Logarithmen zu beliebigen Basen

$a > 0,\ a \neq 1$

Zu jeder Basis $a > 0$, $a \neq 1$, gibt es eine Umkehrfunktion zur Exponentialfunktion a^x,

$$\begin{aligned} \log_a : \mathbb{R}_{>0} &\to \mathbb{R}, \\ x &\mapsto \log_a(x), \end{aligned}$$

das heißt insbesondere ist $a^{\log_a(x)} = x$ für alle $x \in \mathbb{R}_{>0}$ und $\log_a(a^x) = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
Besondere Bezeichnungen: $\log_2 = \mathrm{lb}$, $\log_e = \ln$ und $\log_10 = \lg$.

$\left[\forall x \in \mathbb{R}: 1^x = 1\right]$

$\log_{10} = \lg$ //

Es gilt $0 < a = (\exp \circ \ln)(a) = e^{\ln(a)}$, also

$$a^x = e^{x \ln(a)}.$$

$a^x = \left(e^{\ln(a)}\right)^x \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Potenzgesetz}}}{=} e^{\ln(a) \cdot x}$

$= e^{x \ln(a)}$

-1-

$\forall x\in\mathbb{R}: a^x = e^{x\ln(a)}$

$\overset{\ln}{\Longrightarrow} \quad \ln(a^x) = \ln(e^{x\ln(a)}) = x\cdot\ln(a)$ $\quad a>0$ bel.

speziell $x=-1$: $\quad \ln\left(\frac{1}{a}\right) = \ln(a^{-1}) = -\ln(a)$

$a,b>0$:

- $e^{\ln(a\cdot b)} \underset{\text{Umkehrfkt}}{=} a\cdot b = e^{\ln(a)}\cdot e^{\ln(b)} \underset{\text{Funktionalgl. von exp}}{=} e^{\ln(a)+\ln(b)}$

$\overset{\ln}{\Longrightarrow} \quad \ln(a\cdot b) = \ln(a)+\ln(b)$ Funktionalgl. von ln

---

$0<a\neq 1,\ y>0 \Rightarrow \exists!\ x\in\mathbb{R}: \ y=a^x$

$x\mapsto a^x$

$\mathbb{R}\to\mathbb{R}_{>0}$ bij.

$y=a^x=e^{x\ln(a)} \overset{\ln}{\Longrightarrow} \ln(y)=\ln(a^x)=x\cdot\ln(a)$

$$\left.\begin{aligned} &\Rightarrow x = \frac{\ln(a^x)}{\ln(a)} = \frac{\ln(y)}{\ln(a)}; \\ &x = \log_a(y) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \log_a(y) = \frac{\ln(y)}{\ln(a)}$$

Satz

Es gilt für alle $1 \neq a > 0$ und alle $x, y > 0$:

- $\log_a(y) = \frac{\ln(y)}{\ln(a)}$,
- $\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$,
- $\log_a(\frac{x}{y}) = \log_a(x) - \log_a(y)$.

Logarithmusgesetze.

$$\ln(x \cdot y) = \ln(x) + \ln(y),$$

$$\ln\left(\frac{1}{y}\right) = -\ln(y)$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln\left(x \cdot \frac{1}{y}\right)$$

$$= \ln(x) + \ln\left(\frac{1}{y}\right)$$

$$= \ln(x) - \ln(y)$$

-3-

Polynome

Definition

Eine Polynomfunktion $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist eine Funktion

$$x \mapsto a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

mit fest gewählten Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Ist $a_n \neq 0$, dann ist $n = \mathrm{grad}(p) \in \mathbb{N}_0$ der Grad des Polynoms p.
[Ein Monom ist übrigens ein Term $a_k x^k$.]

! $x^0 \equiv 1$ auch für $x = 0$!

Eigenschaften von Polynomen

Stetigkeit	überall stetig
Differenzierbarkeit	überall, beliebig oft
Ableitung	$p'(x) = \sum_{k=0}^{n} k \cdot a_k x^{k-1}$
Stammfunktion	$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1} (+c)$
Monotonie	i.a. keine
Bild	Ist n ungerade, dann $p(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, Für n gerade keine allgemeine Aussage möglich.
Nullstellen	maximal $n = \mathrm{grad}(p)$ Stück. Ist n ungerade, gibt es mindestens eine reelle Nullstelle.

$x \longmapsto 1$ stetig, diff'bar
$x \longmapsto x$ stetig, —"—

$(x^n)' = n x^{n-1}$

$x \longmapsto a_1 x + a_0$ monoton
$x \longmapsto x^3$

$a_{2n+1} x^{2n+1}$

$\mathrm{grad}\, p = 0 \Rightarrow p(x) \equiv a_0$ konstant, $\mathrm{grad}\, p = 1$: $a_1 x + a_0$, $\mathrm{grad}(p) = 2$: $a_2 x^2 + a_1 x + a_0$

Nullstellen von Polynomen:
Ist x_0 Nullstelle eines Polynoms p, also $p(x_0) = 0$, dann kann man den **Linearfaktor** $(x - x_0)$ von p abspalten, d.h. es gibt ein Polynom q mit $\mathrm{grad}(q) = \mathrm{grad}(p) - 1$ so, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$p(x) = q(x) \cdot (x - x_0).$$

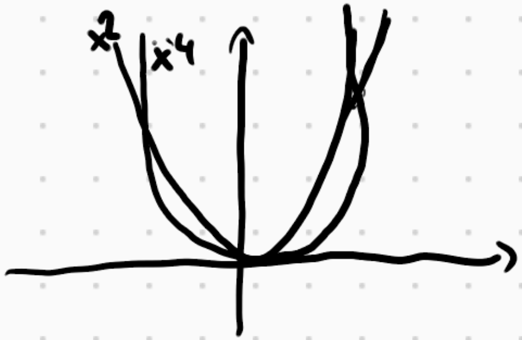
Praktisch findet man q durch Polynomdivision (schriftliche Division).

Ist x_0 auch eine Nullstelle von q, dann kann man wiederum von q einen Linearfaktor abspalten, $p(x) = q(x) \cdot (x - x_0) = q_2(x) \cdot (x - x_0)^2$, etc. so lange, bis

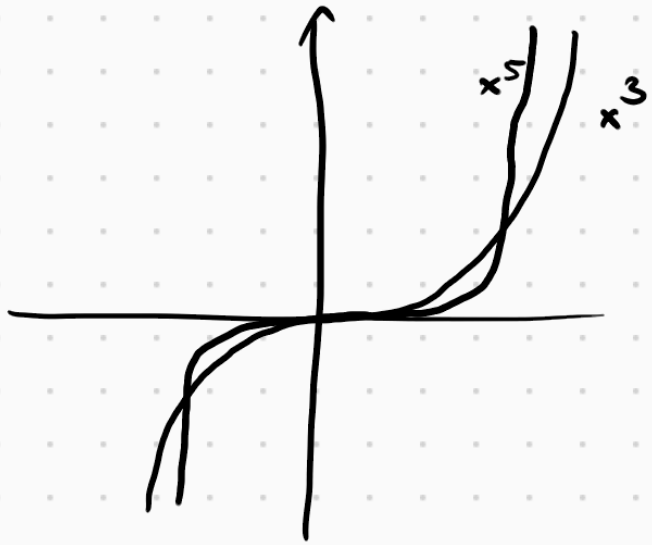
$$p(x) = q_k(x) \cdot (x - x_0)^k, \text{ wobei } q_k(x_0) \neq 0.$$

Dann heißt x_0 eine k-fache Nullstelle von p.

$$q(x) = q_2(x)(x - x_0)$$



Ist die Vielfachheit k einer Nullstelle x_0 **gerade**, dann ist x_0 eine lokale Extremstelle von p. Das Vorzeichen von p bleibt dasselbe.



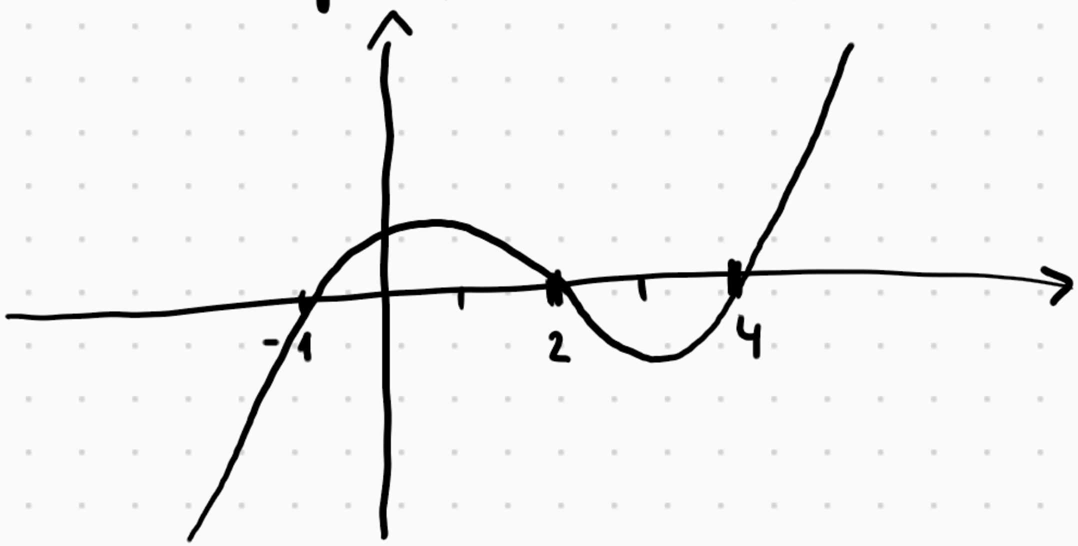
Ist die Vielfachheit k der Nullstelle x_0 **ungerade**, dann ist x_0 höchstens ein Sattelpunkt von p und die Funktion wechselt ihr Vorzeichen.

Kennt man die Nullstellen, deren Vielfachheiten und den führenden Koeffizienten eines Polynoms, dann kann man die Funktion grob skizzieren,

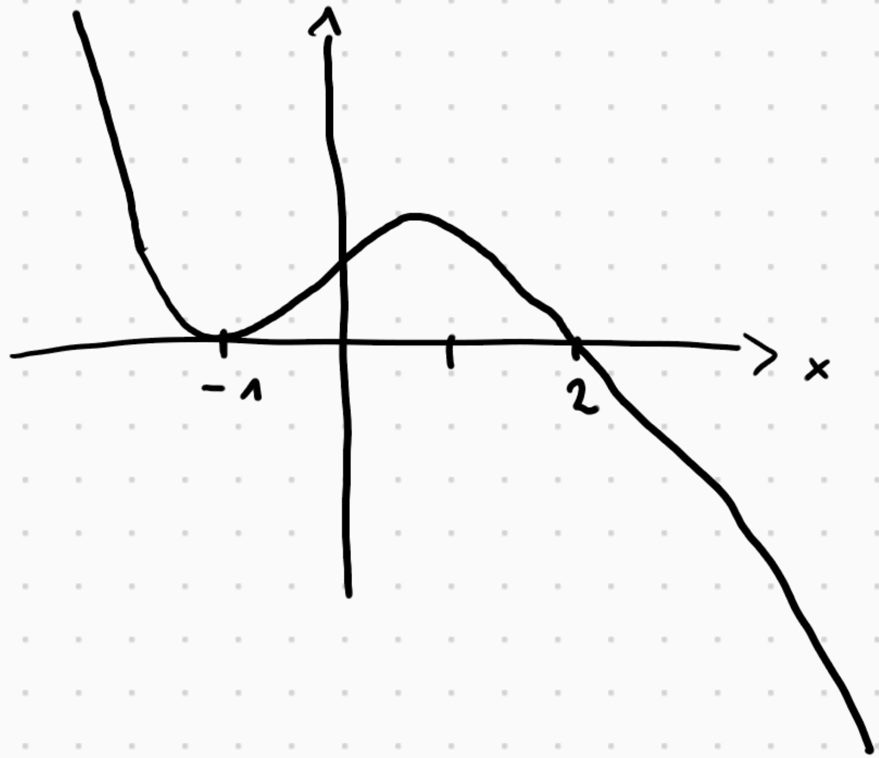
$$p(x) = a_n(x - x_0)^{k_0}(x - x_2)^{k_2} \cdots (x - x_r)^{k_r} \cdot q(x).$$

!! Im allgemeinen werden die Nullstellen komplex sein.!!

<u>Bsp</u>: 1) $p(x) = (x+1)(x-2)(x-4)$
$\text{grad}(p) = 3, \quad a_3 = 1$



2) $g(x) = -(x+1)^2(x-2)$
$\text{grad}(g) = 3, \quad a_3 = -1$



Polynomdivision

Satz

Sind f und g zwei Polynome $\not\equiv 0$, dann gibt es zwei Polynome q und r so, dass

$$f = q \cdot g + r$$

mit $\mathrm{grad}(r) < \mathrm{grad}(g)$ oder sogar $r \equiv 0$ das Nullpolynom.
Die Polynome q und r sind eindeutig bestimmt.

Division mit Rest:

Sind F und G zwei ganze Zahlen $\neq 0$, dann gibt zwei Zahlen Q und R so, dass

$$F = Q \cdot G + R,$$

wobei $|R| < G$.

$$
\begin{array}{l}
576 : 11 = 52 \text{ Rest } 4 \\
\underline{-55} \\
26 \\
\underline{22} \\
4
\end{array}
$$

bzw.: $\underbrace{576}_{F} = \underbrace{52}_{Q} \cdot \underbrace{11}_{G} + \underbrace{4}_{R}$

$$(3x^4 + 7x^3 + 3x - 1) : \underbrace{(x^2+3)}_{\text{grad} = 2} = 3x^2 + 7x - 9 \quad \text{Rest} \, (-18x + 26)$$

$$
\begin{array}{l}
-(3x^4 + 9x^2) \\
\hline
\quad 7x^3 - 9x^2 + 3x - 1 \\
\quad -(7x^3 + 21x) \\
\hline
\qquad -9x^2 - 18x - 1 \\
\qquad -(-9x^2 - 27) \\
\hline
\qquad\qquad -18x + 26 \quad \text{grad} = 1 < 2
\end{array}
$$

bzw: $3x^4 + 7x^3 + 3x + 1 = (3x^2 + 7x - 9)(x^2 + 3) - 18x + 26.$

bzw: $\dfrac{3x^4 + 7x^3 + 3x + 1}{x^2 + 3} = 3x^2 + 7x - 9 + \dfrac{-18x + 26}{x^2 + 3}$

$$(x^7-1):(x-1) = x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$$

$$\begin{array}{l}
-(x^7-x^6) \\ \hline
\quad +x^6-1 \\
\quad -(x^6-x^5) \\ \hline
\qquad x^5-1 \\
\qquad -(x^5-x^4) \\ \hline
\qquad\quad x^4-1 \\
\qquad\quad -(x^4-x^3) \\ \hline
\qquad\qquad x^3-1 \\
\qquad\qquad -(x^3-x^2) \\ \hline
\qquad\qquad\quad x^2-1 \\
\qquad\qquad\quad -(x^2-x) \\ \hline
\qquad\qquad\qquad x-1
\end{array}$$

D.h. $x^7-1 = \underbrace{(x^6+x^5+\ldots+x+1)\cdot(x-1)}$

ausmultiplizieren:

$$x^7-x^6+x^6-x^5+x^5-x^4+x^4-x^3+x^3-x^2+x^2-x+x-1$$

$$= x^7-1$$

„Teleskopsumme"

Allgemein:

$$x^{n+1}-1 = (x-1)\cdot\sum_{j=0}^{n} x^j$$

(Gebrochen) Rationale Funktionen

Definition

Sind $p, q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Polynomfunktionen mit $\mathrm{grad}(q) \geq 1$, dann heißt (gebrochen) rationale Funktion

$$\frac{p}{q} : \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid q(x) = 0\} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{p(x)}{q(x)}.$$

Stetigkeit	überall stetig
Differenzierbarkeit	beliebig oft überall differenzierbar
Ableitung	$\left(\frac{p}{q}\right)' = \frac{p'q - pq'}{q^2}$
Stammfunktion	keine allgemeine Formel
Monotonie	keine allgemeine Aussage möglich
Bild	keine allgemeine Aussage möglich
Nullstellen	höchstens an den Nullstellen von p

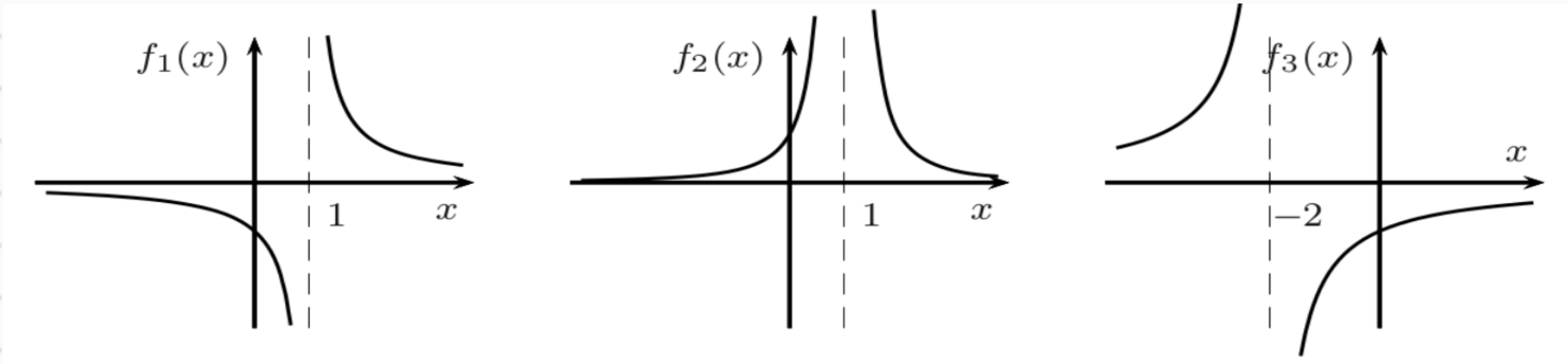
- Gilt für eine Def.lücke x_0 von $r = \frac{p}{q}$: $\lim\limits_{x \to x_0} |r(x)| = \infty$, dann heißt x_0 **Polstelle** von r.
- Gilt für eine Def.lücke x_0 von r : $\lim\limits_{x \to x_0} r(x) = c$, dann kann r stetig in x_0 fortgesetzt werden durch $r(x_0) = c$.

Bsp: $r(x) = \dfrac{x^7 - 1}{x - 1} \overset{\text{Pol.div.}}{=} x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^7 - 1}{x - 1} = \underbrace{1 + 1 + 1 + \dots + 1}_{7 \text{ Stück}} = 7$$

Stetige Forts. $\tilde{r}(1) = 7$, $\tilde{r} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Polstellen



$f_1(x) = \frac{1}{x-1}$, $f_2(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$, $f_3(x) = \frac{-3}{x+2}$

einfache Polst.

Vielfachheit der Polstelle x_0: Vielfachheit der NSt x_0 vom Nenner
− Vielfachheit der NSt x_0 vom Zähler.

≥ 0

$\lim_{x \to 1^+} f_1(x) = +\infty$

$\lim_{x \to 1^-} f_1(x) = -\infty$

$\lim_{x \to 1} f_2(x) = +\infty$

$\lim_{x \to -2^+} f_3(x) = -\infty$

$\lim_{x \to -2^-} f_3(x) = +\infty$

Kennt man

- die Nullstellen } mit Vielfachheiten,
- die Polstellen }
- $\lim\limits_{x \to \pm\infty} r(x)$,

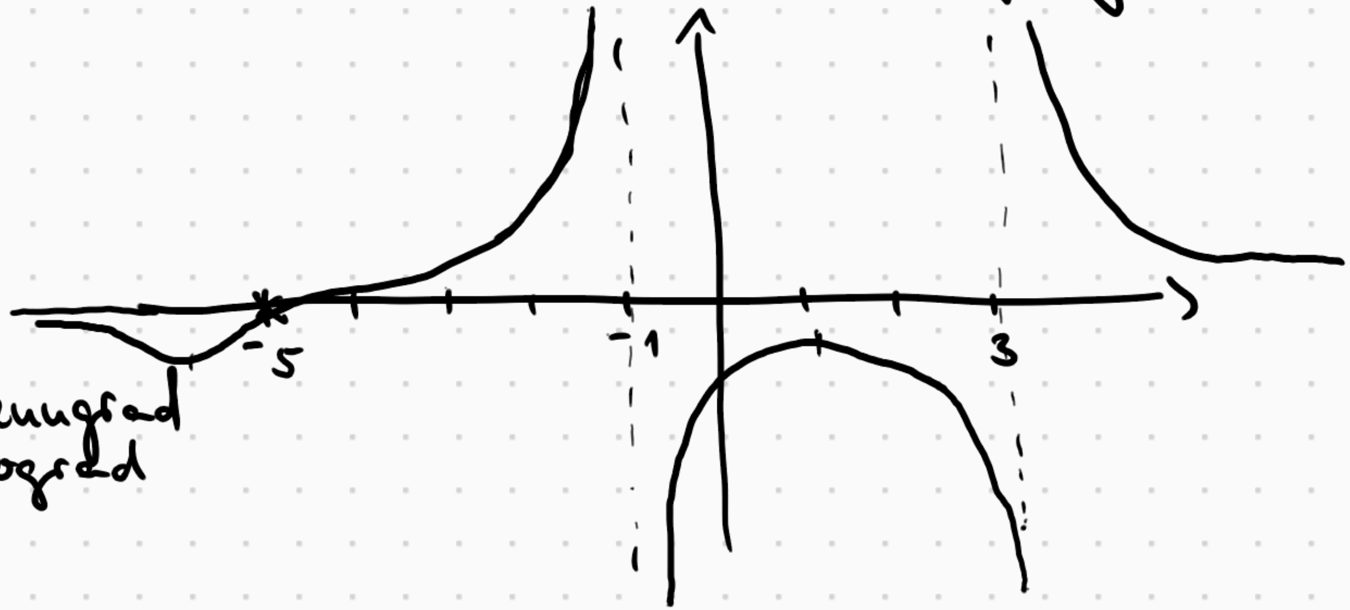
dann kann man r grob skizzieren.

Bsp: $r(x) = \dfrac{x+5}{x^2-2x-3} = \dfrac{2}{x-3} - \dfrac{1}{x+1}$ Partialbruch-zerlegung!

Nst: $x = -5$

Polst: $x_1 = -1$, $x_2 = +3$
(Nst des Nenners, z.B. p-q-Formel)
einfach

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} r(x) = 0$ (weil Nennergrad > Zählergrad)



Partialbruchzerlegung

Findet man für den Nenner $q(x)$ einer rationalen Fkt $\frac{p(x)}{q(x)}$ eine Produktzerlegung $q(x) = q_1(x) \cdot q_2(x)$ mit Polynomen $q_1(x), q_2(x)$, dann sucht man Polynome $A_1(x)$ und $A_2(x)$ so, dass

- $\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A_1(x)}{q_1(x)} + \frac{A_2(x)}{q_2(x)}$
- $\text{grad}(A_1) + \text{grad}(q_2) \leq \text{grad}(p)$ und $\text{grad}(A_2) + \text{grad}(q_1) \leq \text{grad}(p)$.

Hauptnenner: $\frac{A_1(x)}{q_1(x)} + \frac{A_2(x)}{q_2(x)} = \frac{A_1(x)\cdot q_2(x) + A_2(x)\cdot q_1(x)}{\underbrace{q_1(x)\cdot q_2(x)}_{q(x)}} \overset{!}{=} \frac{p(x)}{q(x)}$

d.h. $\boxed{A_1(x)\cdot q_2(x) + A_2(x)\cdot q_1(x) \overset{!}{=} p(x)}$

Bestimme Koeffizienten von $A_1(x)$ und $A_2(x)$ durch Vergleich mit denen von $p(x)$.

Bsp: $\frac{x+5}{x^2-2x-3} \overset{!}{=} \frac{A_1(x)}{x-3} + \frac{A_2(x)}{x+1}$.

Nst. des Nenners, $x_2 = 3$, $x_1 = -1$

A_1, A_2 sollen konstant sein.

$x+5 \overset{!}{=} A_1(x+1) + A_2(x-3) = (A_1+A_2)\cdot x + A_1 - 3A_2$

Koeffizientenvergleich: $1 = A_1 + A_2$ und $5 = A_1 - 3A_2$

Beispiel:

$$\frac{7x^2+1}{x^3-x^2+2x-2} = \frac{A_1(x)}{x-1} + \frac{A_2(x)}{x^2+2} = \frac{\frac{8}{3}}{x-1} + \frac{13}{3}\cdot\frac{(x+1)}{x^2+2}$$

NSt d. Nenners: $x = 1$

$$\underbrace{(x-1)}_{q_1(x)}\underbrace{(x^2+2)}_{q_2(x)} = x^3-x^2+2x-2\,,$$

dabei: Gradbeschränkung:

$$\operatorname{grad} A_1 + 2 \le 2 \iff \operatorname{grad} A_1 = 0$$

$$\operatorname{grad} A_2 + 1 \le \cancel{1}\,2 \iff \operatorname{grad} A_2 \le 1$$

A_1 konstant

$$A_2(x) = b_1 x + b_0$$

$$7x^2+1 \overset{!}{=} A_1\cdot(x^2+2) + (b_1x+b_0)(x-1)$$

$$= A_1x^2 + 2A_1 + b_1x^2 + b_0x - b_1x - b_0 = (A_1+b_1)x^2 + (b_0-b_1)x + 2A_1 - b_0$$

Koeff.vgl.:

$$\left.\begin{array}{l} 7 = A_1+b_1 \\ 0 = b_0-b_1 \\ 1 = 2A_1-b_0 \end{array}\right\} \iff \left\{\begin{array}{l} b_0=b_1 \\ A_1+b_1=7 \\ 2A_1-b_1=1 \end{array}\right\} \iff \left\{\begin{array}{l} b_0=b_1 \\ 2A_1=1+b_1 \\ 3A_1=8 \end{array}\right\} \iff \left\{\begin{array}{l} A_1=\frac{8}{3} \\ b_1=\frac{16}{3}-1 \\ \quad=\frac{13}{3}=b_0 \end{array}\right\}$$

-4-

Anwendungen:

- Polstellenverhalten (gebrochen) rationaler Funktionen.

- Integration (gebrochen) rationaler Funktionen

Bsp: $\frac{x+5}{x^2-2x-3} = \frac{2}{x-3} - \frac{1}{x+1}$; $\int_4^6 \frac{x+5}{x^2-2x-3}\,dx = ?$

$\ln(x)' = \frac{1}{x} \Rightarrow \ln(x-3)' = \frac{1}{x-3}$, $\ln(x+1)' = \frac{1}{x+1}$

$$\Rightarrow \int_4^6 \frac{x+5}{x^2-2x-3}\,dx = 2\cdot\int_4^6 \frac{1}{x-3}\,dx - \int_4^6 \frac{1}{x+1}\,dx = 2\cdot\ln(x-3)\Big|_4^6 - \ln(x+1)\Big|_4^6$$

$$= 2\cdot\ln(3) - 2\underbrace{\ln(1)}_{=0} - \ln(7) + \ln(5) = \ln(3^2) + \ln(5) - \ln(7)$$

$$= \ln\left(\frac{3^2\cdot 5}{7}\right) = \ln\left(\frac{45}{7}\right) //$$

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = 1 \\ A_1 - 3A_2 = 5 \end{cases} \iff \begin{cases} A_1 = 1 - A_2 \\ 1 - A_2 - 3A_2 = 5 \end{cases} \iff \begin{cases} A_1 = 1 - A_2 \\ -4A_2 = 4 \end{cases} \iff \begin{cases} A_1 = 2 \\ A_2 = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x+5}{x^2-2x-3} = \frac{2}{x-3} - \frac{1}{x+1}$$

Potenzfunktionen

Definition

Eine Funktion der Form $f : D \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^a$, heißt Potenzfunktion. Dabei hängt der Definitionsbereich D vom festgewählten Exponenten $a \in \mathbb{R}$ ab:

- Ist $a \in \mathbb{N}_0$, dann ist f ein Polynom und $D = \mathbb{R}$.
- Ist $a \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}_0$, dann ist f eine gebrochen rationale Funktion und $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- Ist $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, dann definiert man

$$x^a := e^{a \ln(x)},$$

was nur für $x \in \mathbb{R}_{>0}$ sinnvoll ist. Für $a > 0$ kann man noch $0^a = 0$ setzen. In dem Fall ist somit $D = \mathbb{R}_{\geq 0}$. Während für $a < 0$ der Definitionsbereich $D = \mathbb{R}_{>0}$ ist.

$[x \longmapsto x^n$ Polynom$]$

$x \longmapsto \frac{1}{x^n}$ $\quad a \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}_0$
$\Rightarrow a = -n$, für ein $n \in \mathbb{N}$

$a = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$

$\underline{x > 0}$ $\quad x^a = x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p}$

$a > 0$: $x \longmapsto x^a$
$\mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}$

$a < 0$: $x \longmapsto x^a = e^{a \ln(x)}$
$\mathbb{R}_{>0} \longrightarrow \mathbb{R}$

-1-

Eigenschaften von Potenzfunktionen

Stetigkeit	überall auf D
Differenzierbarkeit	Falls $a \in \mathbb{Z}$, überall auf D beliebig oft.
	Falls $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, dann auf $\mathbb{R}_{>0}$ beliebig oft.
Ableitung	$f'(x) = a \cdot x^{a-1}$
Stammfunktion	$F(x) = \begin{cases} \frac{x^{a+1}}{a+1}, & \text{falls } a \neq -1 \\ \ln(x), & \text{falls } a = -1. \end{cases}$
Nullstellen	$x = 0$ für $a > 0$, sonst keine.

$$\left[x^a \overset{?}{=} 0 \Rightarrow (a > 0 \wedge x = 0) \right]$$

$$\left[a = \frac{1}{q} \Rightarrow \text{Wurzelfkt} \right]$$

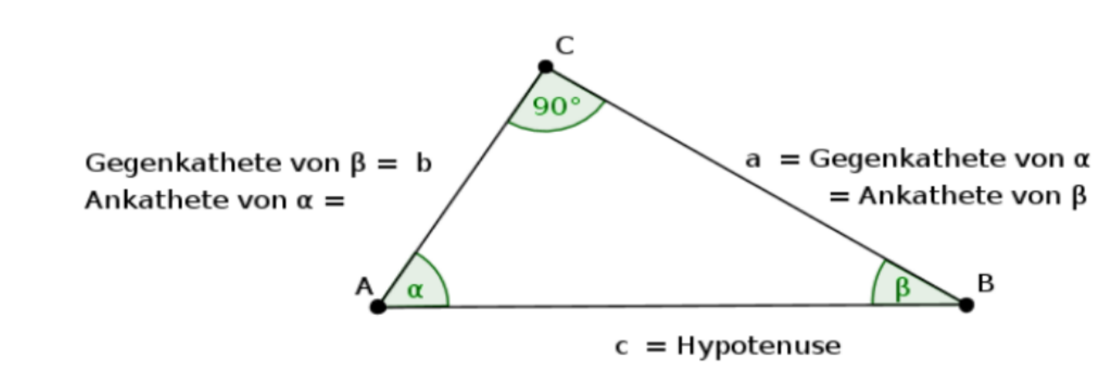
$x > 0$: $(x^a)' = \left(e^{a \ln(x)}\right)' \underset{\text{Kettenregel}}{=} e^{a\ln(x)} \cdot a \cdot \frac{1}{x} = a \cdot \frac{x^a}{x} = a \cdot x^{a-1}$

$a \in \mathbb{Z}$, $x \leq 0$: Haben das schon berechnet!

$\ln'(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$, $\quad a \neq -1$: $\left(\frac{x^{a+1}}{a+1}\right)' = \frac{a+1}{a+1} \cdot x^{a+1-1} = x^a$

Trigonometrische Funktionen 1

(cos, sin, tan, cot)



Definition

Wir definieren die trigonometrischen Funktionen im rechtwinklingen Dreieck

$$\cos\alpha = \frac{|\text{Ankathete}|}{|\text{Hypothenuse}|} = \frac{b}{c},$$
$$\sin\alpha = \frac{|\text{Gegenkathete}|}{|\text{Hypothenuse}|} = \frac{a}{c},$$
$$\tan\alpha = \frac{|\text{Gegenkathete}|}{|\text{Ankathete}|} = \frac{a}{b},$$
$$\cot\alpha = \frac{|\text{Ankathete}|}{|\text{Gegenkathete}|} = \frac{b}{a} = \frac{1}{\tan\alpha}.$$

Satz (Satz des Pythagoras)

Im rechtwinkligen Dreieck gilt

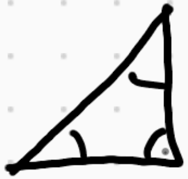
$$a^2 + b^2 = c^2.$$

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1$$

Der Satz des Pythagoras übersetzt sich in (teile durch c^2)

$$\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1.$$

Beispiele:

• 

$\alpha = \beta = 45^\circ$: $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$

$\sin\alpha = \cos\beta = \cos\alpha$

$\Rightarrow 2\cos^2\alpha = 1 \Leftrightarrow \cos^2\alpha = \frac{1}{2}$

Längen > 0 $\Leftrightarrow \cos 45^\circ = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin 45^\circ$

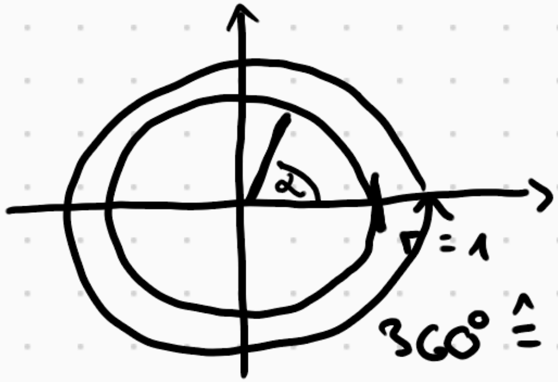
• 

gleichseitiges Δ $\Rightarrow$ Alle Winkel $= 60^\circ$

$$\left.\begin{array}{l} \cos^2 60^\circ + \sin^2 60^\circ = 1 \\ \cos 60^\circ = \frac{1}{2} = \sin 30^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow \sin 60^\circ = \sqrt{1 - \cos^2 60}$$

$$= \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \cos 30^\circ$$



$360° \hat{=} 2\pi$

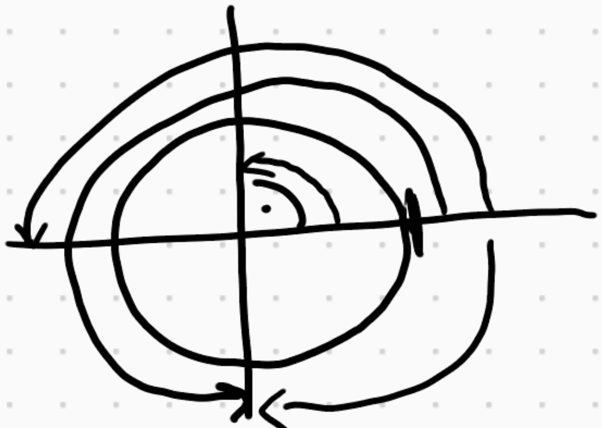
Bogenmaß: Weil der Kreisumfang durch $2\pi r$ (r = Radius) gegeben ist, entsprechen

$$360° = \text{Vollkreisbogen} = 2\pi.$$

$$\frac{\alpha}{360°} = \frac{x}{2\pi}$$

Bogenmaß von α ist $\boxed{x = 2\pi \cdot \frac{\alpha}{360°}}$

gebräuchlich φ (phi)



Winkel misst man gegen den Uhrzeigersinn

$\hat{=}$ mathem. positiver Sinn

$360^\circ \hat{=} 2\pi$

$90^\circ \hat{=} \frac{1}{4} \cdot 2\pi = \frac{\pi}{2}$

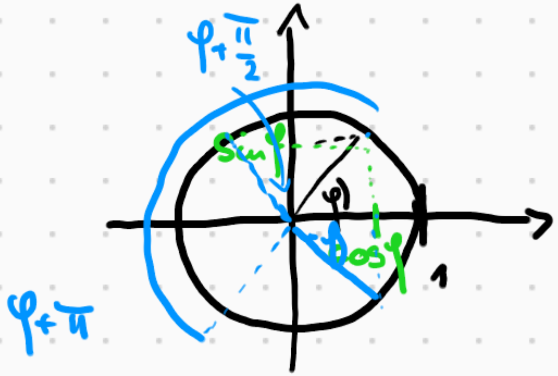
$270^\circ \hat{=} \frac{3}{4} \cdot 2\pi = \frac{3\pi}{2}$

$180^\circ \hat{=} \frac{1}{2} \cdot 2\pi = \pi$

$720^\circ \hat{=} 4\pi$ (2x rundherum)

$-90^\circ \hat{=} -\frac{\pi}{2}$

Trigonometrische Funktionen 2



Durch „Weiterdrehen" des Winkels entsteht jeder bel. Winkel (im Bogenmaß) $\varphi \in \mathbb{R}$

Es gilt für alle $\varphi \in \mathbb{R}$

$$\cos(\varphi + 2\pi) = \cos(\varphi) \quad \text{und} \quad \sin(\varphi + 2\pi) = \sin(x).$$

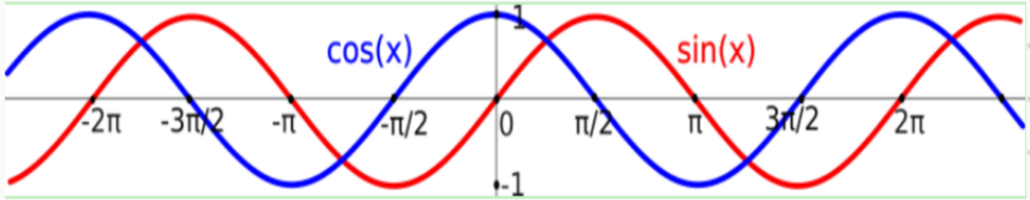
$\sin \varphi$

cos (sin) ist eine 2π - periodische Funktion.

Aus den Symmetrieeigenschaften (Drehen und Spiegeln) erhält man zahlreiche Identitäten, z. B.

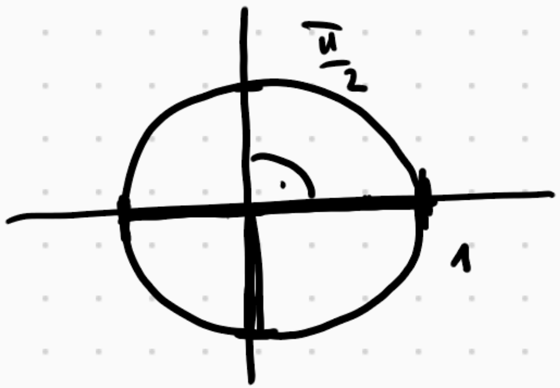
$$\begin{aligned} \cos(-\varphi) &= \cos(\varphi), \\ \sin(-\varphi) &= -\sin(\varphi), \\ \cos(\varphi) &= \sin(\varphi + \frac{\pi}{2}), \\ \sin(\varphi + \pi) &= -\sin(\varphi). \end{aligned}$$

cos ist eine gerade Fkt



Eigenschaften von cos **und** sin

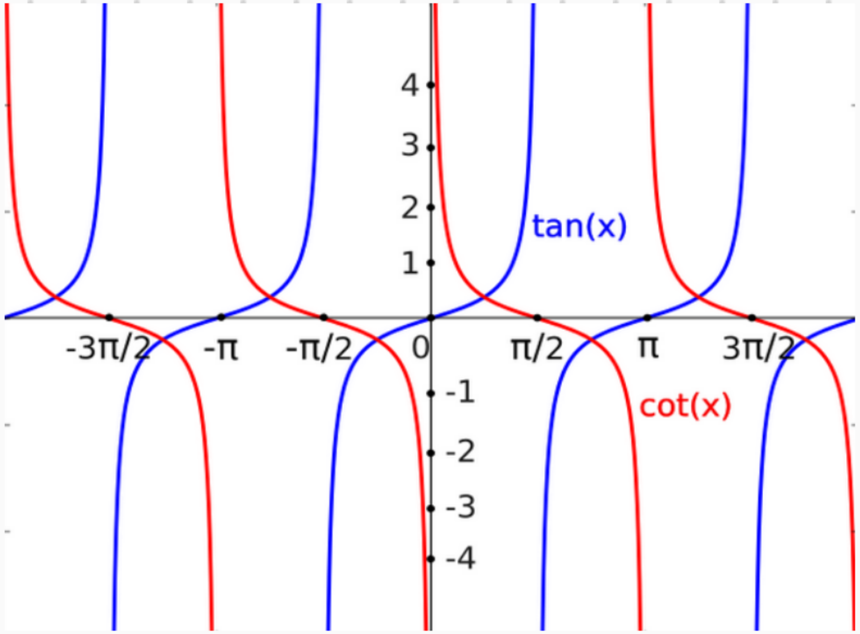
	cos	sin
Definitionsbereich D	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
Stetigkeit	überall	überall
Differenzierbarkeit	überall bel. oft	überall bel. oft
Ableitung	$-\sin$	cos
Periodizität	2π	2π
Bild	$[-1, 1]$	$[-1, 1]$
Nullstellen	$\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$, wo $k \in \mathbb{Z}$	$k \cdot \pi$, wo $k \in \mathbb{Z}$
Symmetrie	gerade	ungerade
Monotonie	–	–



Weil $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0 = \cos(\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi)$ und $\sin(0) = 0 = \sin(k \cdot \pi)$ für alle $k \in \mathbb{Z}$, haben tan und cot Definitionslücken.

$$\tan = \frac{\sin}{\cos}$$

$$\cot = \frac{\cos}{\sin}$$



Eigenschaften von tan **und** cot

	tan	cot
Definitionsbereich D	$\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$	$\mathbb{R} \setminus \{k \cdot \pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$
Stetigkeit	überall	überall
Differenzierbarkeit	überall bel. oft	überall bel. oft
Ableitung	$\frac{1}{\cos^2}$	$-\frac{1}{\sin^2}$
Stammfunktion	$-\ln \circ \cos$	$\ln \circ \sin$
Periodizität	π	π
Bild	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
Nullstellen	$k \cdot \pi$, wo $k \in \mathbb{Z}$	$\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$, wo $k \in \mathbb{Z}$
Symmetrie	ungerade	ungerade
Monotonie	auf jedem Teilint. v. D	auf jedem Teilint. v. D

$(a,b) \subset D$