Vorkurs Mathematik–
Teil II. Analysis

Lehrstuhl A
für Mathematik
RWTH AACHEN UNIVERSITY

Inhalt

1.1 Konvergenz - Motivation

Was soll es überhaupt heißen, eine irrationale Zahl *hinzuschreiben*? Im Beispiel der Wurzel aus Zwei wissen wir, dass $\sqrt{2}-1.41421$ eine Zahl ist, deren Dezimaldarstellung mit 5 Nullen nach dem Komma beginnt, d.h.

$$\left|\sqrt{2} - 1.41421\right| = 0.00000\mathrm{irgendwas} < 0.00001 = 10^{-5}.$$

Wir können also $\sqrt{2}$ durch eine Zahlenfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_1 = 1$, $a_2 = 1.4$, $a_3 = 1.41$ $a_4 = 1.414$ usw. (d.h. a_n ist die Dezimalentwicklung von $\sqrt{2}$ bis zur $(n-1)$-ten Stelle nach dem Komma) darstellen. Diese Folge hat die Eigenschaft, dass $|\sqrt{2} - a_n| < 10^{-(n-1)}$ ist, d.h. a_n liefert eine immer bessere Näherung der Wurzel aus Zwei.

1.2 Konvergenz - Folgen reeller Zahlen und Grenzwerte

Definition 1

Eine Folge reeller Zahlen ist eine Abbildung $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $n \mapsto a(n)$. *Meistens schreiben wir eine Folge kurz als* $(a_n)_{n\geq 1}$, *wobei* $a_n := a(n)$. *Die Zahlen* a_n *heißen* **Folgenglieder**.

Oft werden die Folgen durch ein Bildungsgesetz angegeben, d.h. die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ wird zum Beispiel gegeben durch $a_n := n^2$, d.h. wir haben $a_1 = 1^2 = 1$, $a_2 = 4$, $a_3 = 9$, ... usw. Diese Form nennen wir **geschlossene Definition** der Folge.

Für $\sqrt{2}$ können wir eine Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ durch das Bildungsgesetz

$$a_1 := 1, \; a_{n+1} := \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{a_n}$$

festlegen. Man nennt dieses Vorgehen eine **rekursive Definition** der Folge. Auf diese Weise kann man erreichen, dass man eine irrationale Zahl doch in endlicher Zeit hinschreiben kann, nämlich indem man das Bildungsgesetz einer Folge hinschreibt, die gegen die gegebene Zahl *konvergiert*.

Definition 2

Eine Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ reeller Zahlen konvergiert *gegen die reelle Zahl a, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt mit*

$$|a_n - a| < \epsilon$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$. a heißt dann der Grenzwert *der Folge und wir schreiben*

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n.$$

Beispiel 1. *Betrachte erneut die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ gegeben durch $a_1 := 1, \; a_{n+1} := \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{a_n}$. Es ergeben sich die ersten Folgenglieder*

$$a_1 = 1, a_2 = \frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{1} = \frac{3}{2} = 1.5, a_3 = \frac{17}{12} = 1.41\overline{6}, a_4 = \frac{577}{408} = 1.414215685\ldots$$

Die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ konvergiert gegen $\sqrt{2}$. (Bereits a_4 stimmt mit dem exakten Wert für $\sqrt{2}$ auf den ersten fünf Nachkommastellen überein.)

1.2 Konvergenz

Es ist keineswegs so, dass Folgen immer Grenzwerte besitzen. Einen Grenzwert zu besitzen ist sogar eine sehr besondere Eigenschaft einer Folge.

Definition 3

Besitzt eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *einen Grenzwert, so sagen wir,* die Folge konvergiert. *Andernfalls sagen wir,* die Folge divergiert.

Beispiel 2. *Die Folge* $(a_n)_{n\geq 1}$ *mit:*
(1) $a_n := 1$ **(konstante Folge)** *konvergiert mit Grenzwert* 1,
(2) $a_n := 1/n$ *konvergiert mit Grenzwert*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0,$$

(3) $a_n := (-1)^n$ *divergiert,*
(4) $a_n := \frac{2n^2}{n+1}$ *divergiert ebenfalls.*

Die anschauliche Bedeutung, dass *eine konvergente Folge Ihrem Grenzwert beliebig nahe kommt*, muss aber mit einiger Vorsicht genossen werden. Dazu ein Beispiel: Die

Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ mit

$$a_n := \begin{cases} \frac{1}{n} & n \text{ gerade} \\ n & n \text{ ungerade} \end{cases}$$

kommt $a = 0 \in \mathbb{R}$ beliebig nahe, konvergiert aber nicht.

Der Punkt 0 aus dem Beispiel spielt für die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ aber trotzdem eine Sonderrolle.

1.2 Konvergenz - Häufungspunkte

Definition 4

Ist $h \in \mathbb{R}$ eine Zahl, so dass für jedes feste $\epsilon > 0$ unendlich viele Glieder a_n der Folge innerhalb des Intervalls $(h - \epsilon, h + \epsilon)$ liegen, so heißt h Häufungspunkt der Folge.

Jeder Grenzwert ist auch ein Häufungspunkt, aber nicht jeder Häufungspunkt ist auch ein Grenzwert, wie das Beispiel gezeigt hat.

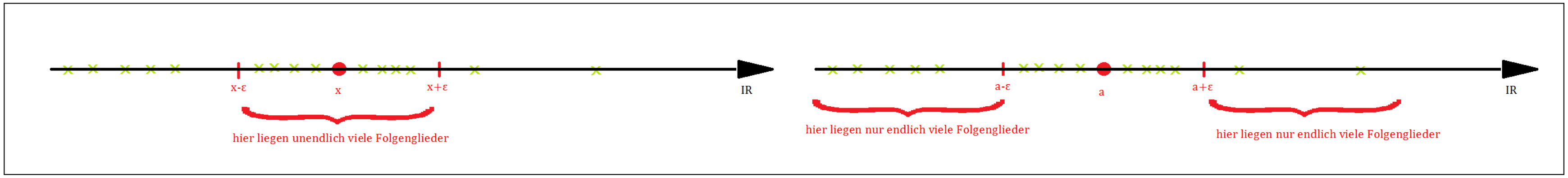
Beispiel 3. *Die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ mit $a_n := (-1)^n$ aus Beispiel 2, (3) hat zwei Häufungspunkte $h_1 = 1$ und $h_2 = -1$. Daraus folgt bereits, dass die Folge divergiert.*

1.2 Konvergenz - Häufungspunkte

Kurz gesagt, lassen sich beide Begriffe wie folgt voneinander abgrenzen:

(1) h ist ein Häufungspunkt, wenn **in jedem Intervall** der Form $(h-\epsilon, h+\epsilon)$ mit $\epsilon > 0$ **unendlich viele** Folgenglieder liegen.

(2) a ist Grenzwert, wenn **außerhalb jedes Intervalls** der Form $(a-\epsilon, a+\epsilon)$ mit $\epsilon > 0$ nur **endlich viele** Folgenglieder liegen.



Häufungspunkte und Grenzwerte

Eine Folge kann beliebig viele Häufungspunkte haben, aber nur einen Grenzwert.

1.2 Konvergenz - Bedingte Divergenz

Es gibt noch einen Typ divergenter Folgen, die keinen Häufungspunkt besitzen.

Definition 5

(1) Eine Folge für die gilt: Zu jedem $M \in \mathbb{R}$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $a_n > M$ für alle $n \geq n_0$, heißt **bestimmt divergent gegen** $+\infty$.

(1) Eine Folge für die gilt: Zu jedem $M \in \mathbb{R}$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $a_n < M$ für alle $n \geq n_0$, heißt **bestimmt divergent gegen** $-\infty$.

Beispiel 4. *Die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ mit $a_n := \frac{2n^2}{n+1}$ aus Beispiel 2, (4) divergiert bestimmt mit $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$.*

Beispiel 5. *Die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ mit $a_n := (-1)^n \cdot n$ divergiert nicht bestimmt.*

1.3 Konvergenz - Die Grenzwertsätze

Satz 1 (Die Grenzwertsätze)

Seien $(a_n)_{n\geq 1}$, $(b_n)_{n\geq 1}$ konvergente Folgen mit $a = lim_{n\to\infty} a_n$, $b = lim_{n\to\infty} b_n$. Dann gilt:

(1) Die Folge $(c_n)_{n\geq 1}$ mit $c_n := a_n + b_n$ ist konvergent mit $\lim_{n\to\infty} c_n = a + b$.

(2) Die Folge $(c_n)_{n\geq 1}$ mit $c_n := a_n\, b_n$ ist konvergent mit $\lim_{n\to\infty} c_n = a\, b$.

(3) Sind alle b_n und der Grenzwert b ungleich Null, so ist die Folge $(c_n)_{n\geq 1}$ mit $c_n := a_n/b_n$ konvergent mit $\lim_{n\to\infty} c_n = a/b$.

Um die Benutzung der Grenzwertsätze zu illustrieren, betrachten wir ein Beispiel.

1.3 Konvergenz - Die Grenzwertsätze

Beispiel 6. *Wir betrachten die Folge* $(a_n)_{n\geq 1}$ *mit*

$$a_n = \frac{3n^2+2}{n^2+6} = \frac{n^2(3+2/n^2)}{n^2(1+6/n^2)} = \frac{3+2/n^2}{1+6/n^2}.$$

Sei nun $b_n := 3+2/n^2$, $c_n := 1+6/n^2 \neq 0$. *Dann ist nach Satz 1*

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} 1 + \lim_{n\to\infty} 6/n^2.$$

Wiederum nach Theorem 1 folgt

$$\lim_{n\to\infty} 6/n^2 = \lim_{n\to\infty} 6 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}.$$

Mit Beispiel 2 (1) und (2) folgt also

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} 1 + \lim_{n\to\infty} 6/n^2 = 1 + 6\cdot 0\cdot 0 = 1.$$

Analog folgt somit $\lim_{n\to\infty} b_n = 3$ *und somit* $\lim_{n\to\infty} a_n = 3/1 = 3.$

1.3 Konvergenz - Die Grenzwertsätze

Satz 2

Wenn die rekursiv definierte Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ aus Beispiel 1 gegen einen Grenzwert konvergiert, der ungleich Null ist, dann ist ihr Grenzwert $a := \lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{2}$.

Beweis. (1) Alle Folgenglieder a_n sind positiv: (a) Induktionsanfang $a_1 = 1 > 0$, (b) Induktionsschluss: Ist $a_n > 0$, so ist $a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{1}{a_n}$ als Summe zweier positiver Zahlen ebenfalls positiv, also folgt $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. (2) Da die Folge nach Voraussetzung konvergiert mit Grenzwert $a \neq 0$, erhalten wir aus der Rekursionsformel für die Folgenglieder mit den Grenzwertsätzen und (1)

$$a = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{2} + \frac{1}{a_n} \right) = \frac{a}{2} + \frac{1}{a}.$$

Diese Gleichung ist äquivalent zu $a^2 = 2$, d.h. $a = \sqrt{2} \vee a = -\sqrt{2}$. Da die Folgenglieder alle positiv sind, kann der Grenzwert nur $a = \sqrt{2}$ sein. □

Bemerkung. Den Beweis, dass die Folge tatsächlich gegen einen Grenzwert ungleich Null konvergiert, lassen wir weg.

1.4 Konvergenz - Das Sandwich - Lemma

Ein weiteres sehr nützliches Hilfsmittel zur Ermittlung des Grenzwertes von Folgen ist das sogenannte **Sandwich - Lemma**.

Satz 3

Seien $(a_n)_{n\geq 1}$, $(b_n)_{n\geq 1}$ *und* $(c_n)_{n\geq 1}$ *drei Folgen mit* $a_n \leq b_n \leq c_n$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$. *Dann gilt: Konvergieren die Folgen* $(a_n)_{n\geq 1}$, $(c_n)_{n\geq 1}$ *mit demselben Grenzwert*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = g\,,$$

so konvergiert auch die Folge $(b_n)_{n\geq 1}$ *mit dem Grenzwert* $\lim_{n\to\infty} b_n = g$.

1.4 Konvergenz - Das Sandwich - Lemma

Zur Verdeutlichung des Sandwich-Lemmas betrachten wir das folgende Beispiel:

Beispiel 7. *Sei $(b_n)_{n\geq 1}$ gegeben durch $b_n := \frac{\cos(n)}{n^2}$. Dann gilt nach der Definition der Cosinusfunktion am Einheitskreis, dass $-1 \leq \cos(n) \leq 1$ ist und somit für die Folgen $(a_n)_{n\geq 1}$ mit $a_n := \frac{-1}{n^2}$ und $(c_n)_{n\geq 1}$ mit $c_n := \frac{1}{n^2}$, dass*

$$a_n \leq b_n \leq c_n$$

ist für alle $n \geq 1$. Wegen $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = 0$ (z.B. nach den Grenzwertsätzen) folgt nach dem Sandwich - Lemma, dass auch der Grenzwert der Folge $(b_n)_{n\geq 1}$ gleich Null ist.

2.1 Grundlegendes über Funktionen - Definition

Wir betrachten in diesem Teil des Vorkurses nur reelle Funktionen, d.h. Abbildungen von Teilmengen der reellen Zahlen in die Menge der reellen Zahlen.

Definition 6

Eine **(reelle) Funktion** $f : D \to \mathbb{R}$ *ist eine Abbildung einer (nichtleeren) Teilmenge* $D \subset \mathbb{R}$, *dem* **Definitionsbereich** *der Funktion, nach* $\mathbb{R}$, *dem* **Zielbereich** *der Funktion.Die Menge*

$$f(D) := \{y \in \mathbb{R} : y = f(x), x \in D\} \subset \mathbb{R}$$

heißt **Bild** *von* f.

Typische Definitionsbereiche von Funktionen sind:

(1) Die **Zahlbereiche**, die in $\mathbb{R}$ enthalten sind, also

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

(2) **Intervalle** reeller Zahlen, also

1. **abgeschlossene Intervalle**

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\},$$

2. **offene Intervalle**

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\},$$

3. **halboffene Intervalle** der Form

$$\begin{aligned} [a, b) &:= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}, \\ (a, b] &:= \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}, \end{aligned}$$

wobei in allen Fällen $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ die das Intervall definierenden Zahlen sind.

(3) **Unbeschränkte Intervalle** reller Zahlen, also

1. **abgeschlossene unbeschränkte Intervalle**

$$\begin{aligned} [a, \infty) &:= \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}, \\ (-\infty, a] &:= \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}, \end{aligned}$$

2. **offene unbeschränkte Intervalle**

$$\begin{aligned} (a, \infty) &:= \{x \in \mathbb{R} : x > a\}, \\ (-\infty, a) &:= \{x \in \mathbb{R} : x < a\}, \end{aligned}$$

wobei $a \in \mathbb{R}$ eine beliebige reelle Zahl ist, die das jeweilige Intervall festlegt.

(4) Manchmal schreibt man auch $(-\infty, \infty)$ anstatt $\mathbb{R}$.

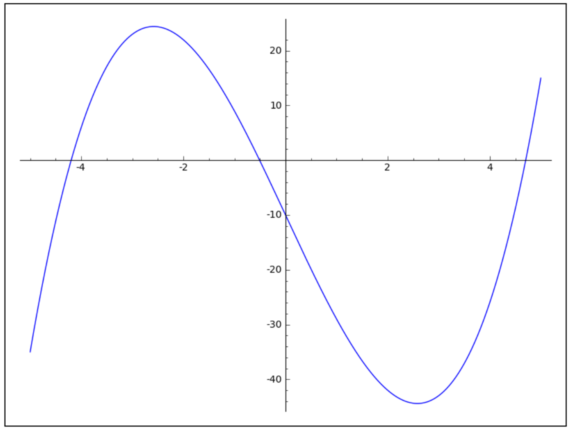
Definition 7

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Die Teilmenge

$$G(f) := \mathrm{graph}(f) := \{(x, f(x)) \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} \; : \; x \in D\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

des kartesischen Produktes von $\mathbb{R}$ mit sich selbst, heißt **Graph der Funktion** *f.*

Beispiel 8. *Der Graph der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3 - 20x - 10$.*



2.4 Grundlegendes über Funktionen – Summen und Produkte

Wir nutzen nun die Möglichkeit, reelle Zahlen zu addieren und zu multiplizieren, um Summen und Produkte von Funktionen zu definieren.

Definition 8

Seien $f : D_1 \to \mathbb{R}$, $g : D_2 \to \mathbb{R}$ zwei reelle Funktionen.

(i) *Ist $D := D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$, so ist die* **Summe** $f + g : D \to \mathbb{R}$ *von f und g definiert durch*

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x).$$

(ii) *Ist $D := D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$, so ist das* **Produkt** $f\,g : D \to \mathbb{R}$ *von f und g definiert durch*

$$(f\,g)(x) := f(x)g(x).$$

(iii) *Den Quotienten von zwei Funktionen können wir überall dort erklären, wo der Nenner nicht Null wird, d.h. ist $D := \{x \in D_1 \cap D_2 \ : \ g(x) \neq 0\} \neq \emptyset$, dann wird durch*

$$\frac{f}{g}(x) := \frac{f(x)}{g(x)}$$

eine Funktion $\frac{f}{g} : D \to \mathbb{R}$ definiert, der **Quotient** *der Funktionen f und g.*

2.5 Grundlegendes über Funktionen - Monotonie

Um das Verhalten von Funktionen zwischen lokalen Extremwerten zu beschreiben, ist das folgende Konzept hilfreich.

Definition 9

(1) Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt **monoton wachsend (fallend)**, *falls für $x, y \in D$ mit $x < y$ die Ungleichung $f(x) \leq f(y)$ $(f(x) \geq f(y))$ folgt.*
(2) Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt **streng monoton wachsend (fallend)**, *falls für $x, y \in D$ mit $x < y$ die Ungleichung $f(x) < f(y)$ $(f(x) > f(y))$ folgt.*

Strenge Monotonie impliziert (einfache) Monotonie, jedoch gibt es monotone Funktionen die nicht streng monoton sind.

Satz 4

Eine streng monotone Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ist injektiv.

Definition 10

Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt **stetig im Punkt** $x_0 \in D$*, wenn für alle Folgen $(x_n)_{n\geq 1}$ mit $x_n \in D$ und $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ auch die zugehörigen Folgen $(y_n)_{n\geq 1}$ mit $y_n := f(x_n)$ konvergieren mit Grenzwert $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$. Die Funktion heißt stetig in D, wenn f stetig ist in jedem Punkt $x_0 \in D$.*

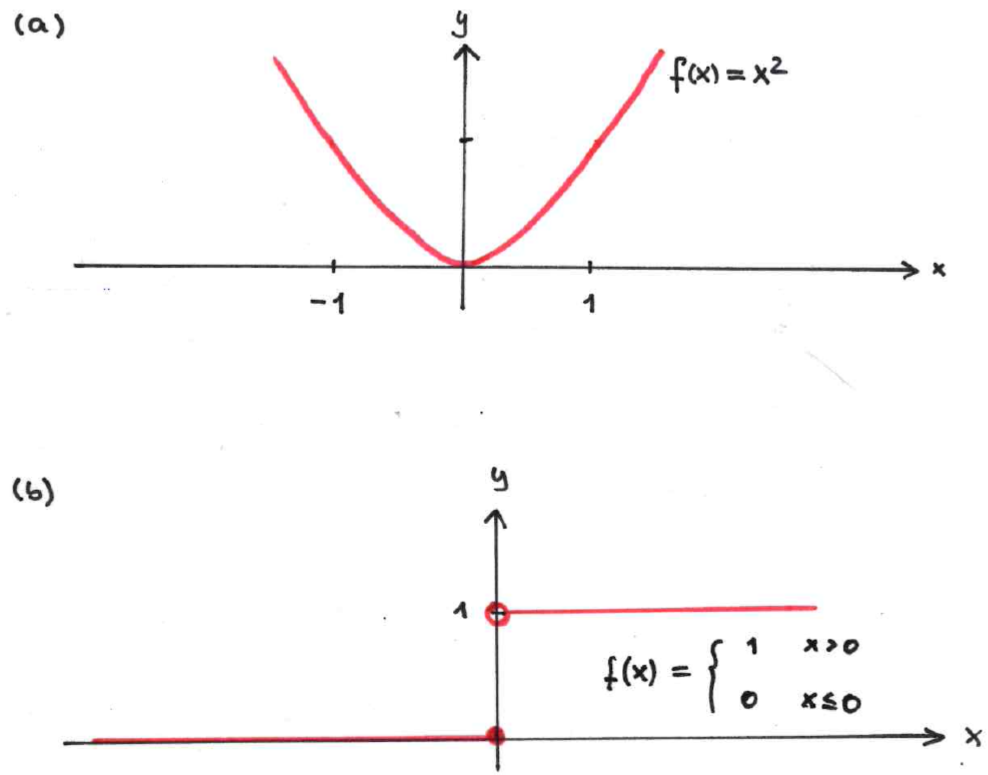
Definition 11

Ist $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und gilt für alle Folgen $(x_n)_{n\geq 1}$ mit $x_n \in D$ für alle $n \geq 1$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ die Gleichung $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = a \in \mathbb{R}$, d.h. alle Folgen $(f(x_n))_{n\geq 1}$ konvergieren und haben denselben Grenzwert, so schreiben wir meistens kürzer

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a.$$

f ist also stetig in $x_0 \in D$ genau dann, wenn $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Beispiel 9.



Definition 12

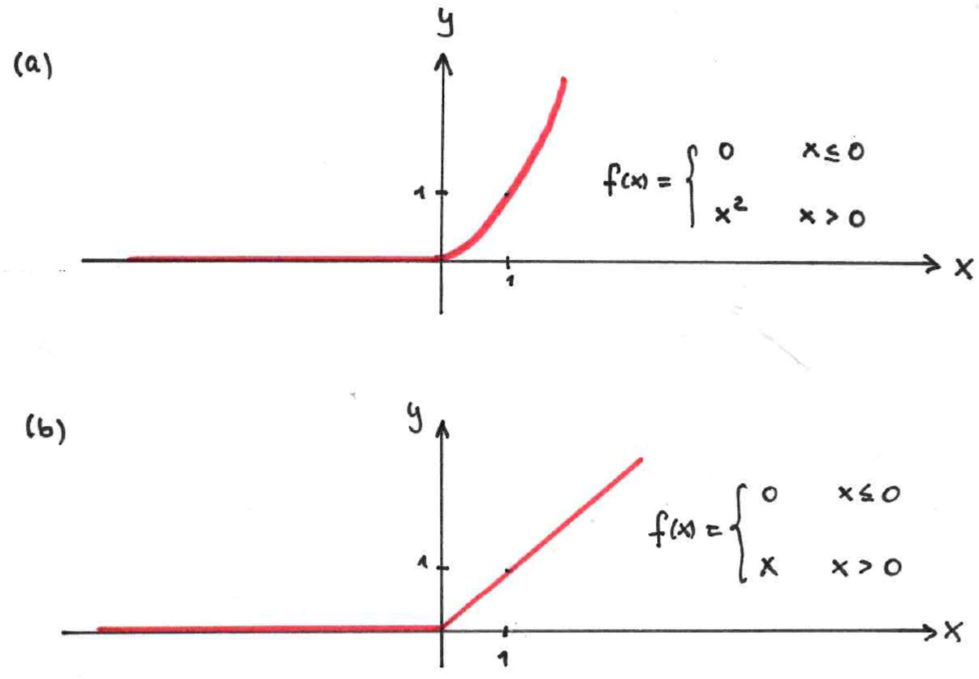
Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ *heißt* differenzierbar im Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$, *wenn für alle Folgen* $(x_n)_{n\geq 1}$ *mit* $x_n \in D \setminus \{x_0\}$ *und* $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ *auch die Folge*

$$y_n = \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0}$$

konvergiert und deren Grenzwert für alle Folgen $(x_n)_{n\geq 1}$ *derselbe ist. Der Grenzwert* $f'(x) := \lim_{n\to\infty} y_n$ *heißt dann die* **Ableitung** *von* f *im Punkt* $x_0 \in D$. *Die Funktion heißt* **differenzierbar** *in* D, *wenn* f *differenzierbar ist in jedem Punkt* $x_0 \in D$.

Bemerkung. (1) Die Ableitung konstanter Funktionen ist die Nullfunktion.
(2) Die Ableitung der Summe zweier Funktionen ist die Summe der Ableitungen, d.h. $(f + g)' = f' + g'$.
(3) Die Ableitung eines reellen Vielfachen einer Funktion ist dasselbe Vielfache der Ableitung, d.h. $(af)' = a\,f'$, $a \in \mathbb{R}$.
(4) Die Folge $(y_n)_{n\geq 1}$ heißt auch **Folge der Differenzenquotienten**.

Beispiel 10.



2.7 Grundlegendes über Funktionen - Differenzierbarkeit

Bemerkung. (1) Ist $f : D \to \mathbb{R}$ in $x_0 \in D$ nicht stetig, so ist f in x_0 auch nicht differenzierbar.
(2) Ist $f : D \to \mathbb{R}$ in $x_0 \in D$ stetig, so sagt das nichts über die Differenzierbarkeit von f in x_0 aus.

Achtung! Die Anschauung f ist stetig wenn man den Graphen *durchzeichnen* kann, ist mit Vorsicht zu genießen!

Sei $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ ein beschränktes und abgeschlossenes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion.

Definition 13

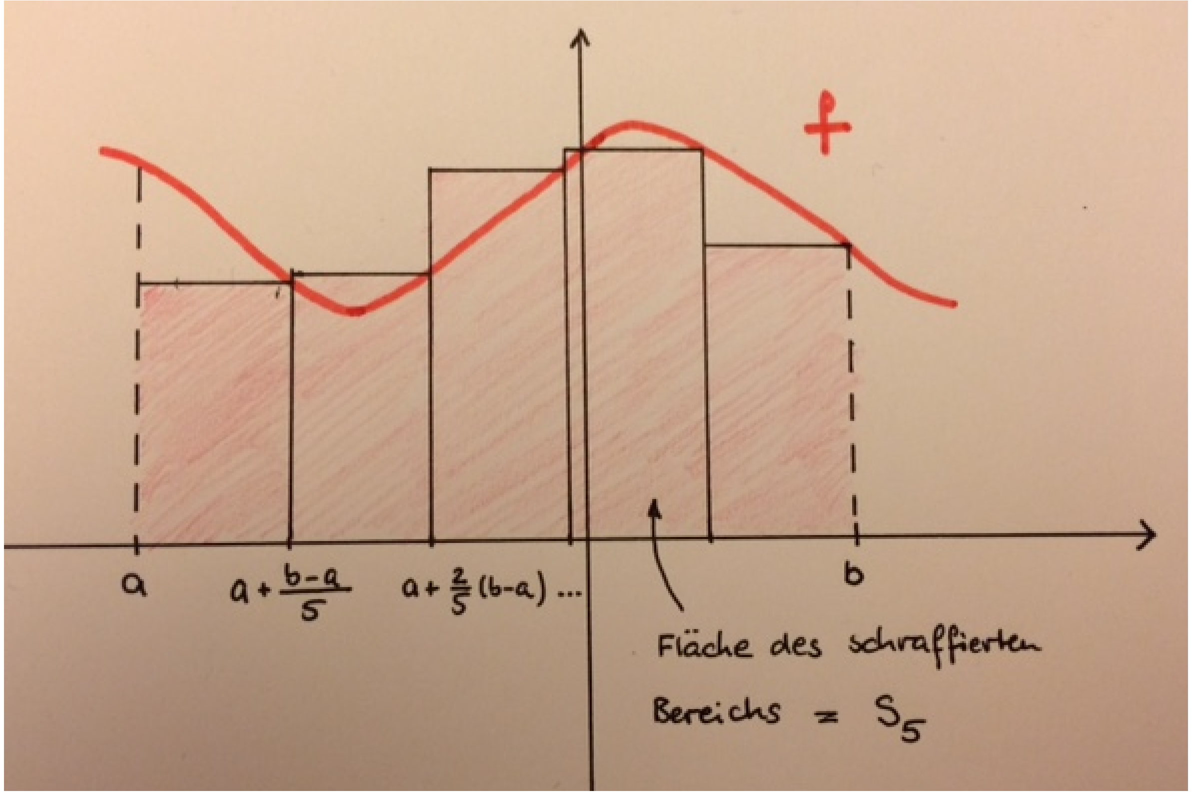
Das **bestimmte Integral** *von f über das Intervall I ist der Grenzwert der Folge $(S_n)_{n\geq 1}$ von* **Partialsummen**

$$S_n := \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right).$$

Wir schreiben

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{n\to\infty} S_n.$$

Beispiel 11.



Die Partialsummen S_n liefern eine Approximation des Flächeninhaltes zwischen Funktionsgraph und x-Achse.

Ableitungen und Integrale über die Definition mit Hilfe der Grenzwerte zu berechnen, ist meist sehr mühsam. Die bei Weitem wichtigste Beziehung, um Integrale zu berechnen, ist der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung. Dazu benötigen wir zunächst den Begriff der Stammfunktion.

Definition 14

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Eine Funktion $F : D \to \mathbb{R}$ heißt **Stammfunktion** *von f, wenn $F'(x) = f(x)$. Wir schreiben auch $F(x) = \int f(x)dx$ und nennen diesen Ausdruck* **unbestimmtes Integral**.

Bemerkung. Stammfunktionen sind aufgrund der Definition nur bis auf eine additive Konstante bestimmt. Ist nämlich $F'(x) = f(x)$, so ist auch $(F + c)' = F' + c' = F' + 0 = f$ für alle $c \in \mathbb{R}$.

Satz 5 (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)

Ist $f : D \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann besitzt f eine Stammfunktion F und es gilt für alle Intervalle $[a, b] \subset D$, $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Der Ausdruck auf der linken Seite der Gleichung heißt auch **bestimmtes Integral**.

Bemerkung. (1) Diese Beziehung zwischen Ableitungen und Integralen ist an sich vollkommen überraschend. (2) Die spezielle Wahl der Stammfunktion ist egal für die Berechnung des Integrals, denn Stammfunktionen sind aufgrund der Definition bis auf eine additive Konstante bestimmt. Damit ist aber $(F+c)(b)-(F+c)(a) = F(b)+c-(F(a)+c) = F(b) - F(a)$ für alle $c \in \mathbb{R}$. Die rechte Seite des Hauptsatzes ist somit unabhängig von der speziellen Wahl der Konstante $c \in \mathbb{R}$ einer Stammfunktion.

3.2 Differential- und Integralrechnung - Produktformel/partielle Integration

Satz 6

Sind $f, g : D \to \mathbb{R}$ zwei differenzierbare Funktionen, so gilt für die Ableitung der Produktfunktion $fg : D \to \mathbb{R}$ die **Produktregel**

$$(fg)' = f'g + fg'.$$

Satz 7

Es gilt die Regel der **partiellen Integration**

$$\int_a^b f'g \, dx = fg(b) - fg(a) - \int_a^b fg' dx.$$

Beispiel 12. *Gesucht ist das Integral*

$$\int_0^1 xe^x dx = ?$$

Wir machen den Ansatz $u(x) = x$, $v'(x) = e^x$. *Da die Ableitung der Exponentialfunktion die Exponentialfunktion selber ist, ist die Stammfunktion von* v' *die Funktion* $v(x) = e^x$. *Mit* $u'(x) = 1$ *folgt also mit partieller Integration*

$$\begin{aligned}\int_0^1 xe^x dx &= \int_0^1 u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)|_0^1 - \int_0^1 u'(x)v(x)dx \\ &= xe^x|_0^1 - \int_0^1 e^x dx \\ &= 1e^1 - 0e^0 - e^x|_0^1 = e - (e-1) = 1.\end{aligned}$$

Umgekehrt kann man mit Hilfe der Produktregel sehen, dass $(xe^x)' = e^x + xe^x$.

Satz 8

Sind $f : D_1 \to \mathbb{R}$, $g : D_2 \to \mathbb{R}$ zwei differenzierbare Funktionen mit $f(D_1) \subset D_2$, so gilt für die Ableitung der Komposition $g \circ f : D_1 \to \mathbb{R}$ die **Kettenregel**

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x).$$

Wir können die Kettenregel auch so interpretieren, dass $(g \circ f)(x)$ die Stammfunktion von $g'(f(x)) \cdot f'(x)$ ist. Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung bedeutet dies:

Satz 9

Es gilt die Regel der **Integration durch Substitution**

$$\int_a^b g'(f(x)) \cdot f'(x)dx = g(f(b)) - g(f(a)) = \int_{f(a)}^{f(b)} g'(u)du.$$

Beispiel 13. *Gesucht ist das Integral*

$$\int_0^1 xe^{x^2} dx = ?$$

Definition 15

(1) Eine differenzierbare Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt **stetig differenzierbar**, *wenn die Ableitung $f' : D \to \mathbb{R}$ stetig ist. (2) Ist die Ableitung $f' : D \to \mathbb{R}$ einer differenzierbaren Funktion wieder differenzierbar, so heißt ihre Ableitung $f'' := (f')' : D \to \mathbb{R}$ die* **zweite Ableitung** *von f.*

Indem wir diese Methode iterieren, können wir bei hinreichender Differenzierbarkeit der Ausgangsfunktion beliebig hohe Ableitungen konstruieren.

Definition 16

(1) Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt **n-mal differenzierbar**, *wenn die Ableitungen $f, f', f'', f''' = (f'')', ..., f^{(n-1)} := (f^{(n-2)})'$ differenzierbar sind. Mit $f^{(k)} : D \to \mathbb{R}$ wird die* **k-te Ableitung** *von f bezeichnet. (2) Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt* **n-mal stetig differenzierbar**, *wenn f n-mal differenzierbar ist und die Ableitung $f^{(n)}$ stetig ist.*

Lehrstuhl A für Mathematik
RWTH AACHEN UNIVERSITY

3.4 Differential- und Integralrechnung - Maximum, Minimum

Sei $S \subset \mathbb{R}$ eine Teilmenge.

Definition 17

(1) Enthält S ein größtes Element s_0 (d.h. $s_0 \in S$ und $s \leq s_0$ für alle $s \in S$), so nennen wir s_0 das **Maximum von S** *(oder das maximale Element von S) und schreiben $s_0 = \max S$.*
(2) Enthält S ein kleinstes Element s_0 (d.h. $s_0 \in S$ und $s \geq s_0$ für alle $s \in S$), so nennen wir s_0 das **Minimum von S** *(oder das minimale Element von S) und schreiben $s_0 = \min S$.*
(3) Eine nichtleere Teilmenge $S \subset \mathbb{R}$ heißt **beschränkt***, wenn es ein abgeschlossenes Intervall $[a, b]$ gibt mit $S \subset [a, b]$.*

Bemerkung. (1) Eine Menge, die ein Maximum und Minimum besitzt, ist beschränkt. Die Umkehrung gilt nicht. (2) Alle endlichen Teilmengen von $\mathbb{R}$ sind beschränkt und besitzen ein Minimum und ein Maximum.

Beispiel 14.(Maxima und Minima)

(1) Für $S_1 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ *gilt* $\min S_1 = 1$ *und* $\max S_1 = 5$.

(2) Für $S_2 = \{n \in \mathbb{Z} : -4 < n \leq 100\}$ *gilt* $\min S_2 = -3$ *und* $\max S_2 = 100$.

(3) Die Menge $S_3 = (a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$ *mit* $a, b \in \mathbb{R}$ *hat kein Minimum aber ihr Maximum ist* b.

(4) Die Menge $S_4 = \{r \in \mathbb{Q} : 0 \leq r \leq \sqrt{2}\}$ *hat* 0 *als Minimum aber kein Maximum. Das liegt daran, daß* $\sqrt{2}$ *keine rationale Zahl ist. In* S_4 *gibt es aber rationale Zahlen, die beliebig nahe an* $\sqrt{2}$ *liegen.*

(5) Das Minimum der Menge $[2, \infty)$ *ist* 2*, die Menge besitzt kein Maximum.*

(6) Die Menge $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ *besitzt weder ein Minimum noch ein Maximum.*

Definition 18

(1) Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ *besitzt ein* **globales Maximum (Minimum)**, *wenn das Bild* $f(D) \subset \mathbb{R}$ *ein Maximum (Minimum) besitzt.*

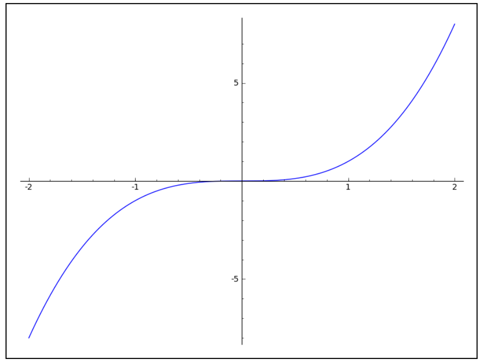
(2) Ein Punkt $x \in D$ *heißt* **globales Maximum (Minimum)** *der Funktion* f, *wenn der Funktionswert* $f(x)$ *von* x *das Maximum (Minimum) von* $f(D)$ *ist.* $f(x)$ *heißt* **globaler Maximal- bzw. Minimalwert**.

(3) Ein Punkt $x \in D$ *heißt* **lokales Maximum (Minimum)** *der Funktion* f, *wenn es ein offenes Intervall* $I \subset D$ *mit* $x \in I$ *gibt, so dass der Funktionswert* $f(x)$ *von* x *das Maximum (Minimum) von* $f(I)$ *ist.* $f(x)$ *heißt* **lokaler Maximal- bzw. Minimalwert**.

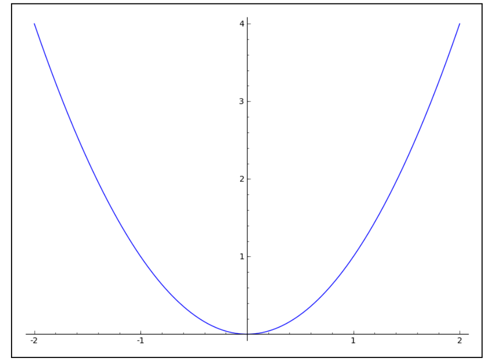
Lehrstuhl A für Mathematik

RWTH AACHEN UNIVERSITY

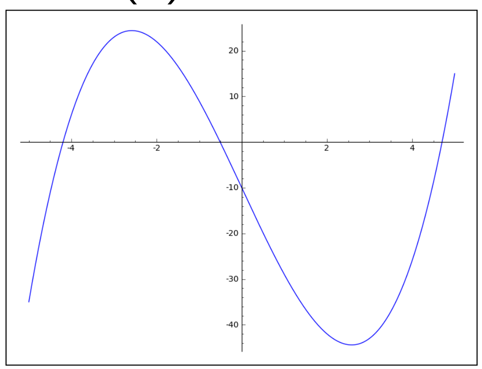
3.4 Differential- und Integralrechnung - Maximum und Minimum



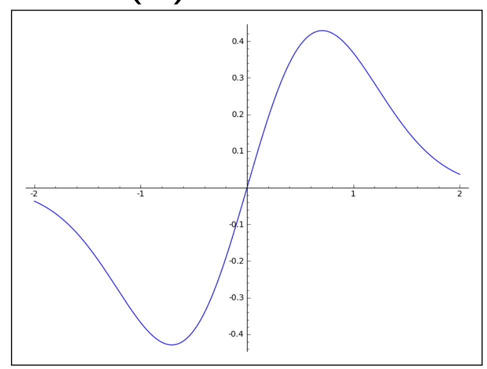
(a) $x \mapsto x^3$



(b) $x \mapsto x^2$



(c) $x \mapsto x^3 - 20x - 10$



(d) $x \mapsto xe^{-x^2}$

Keine Extrema (a), ein globales Minimum (b), je ein lokales Maximum und Minimum (c), und ein globales Maximum und Minimum (d).

Abschließend betrachten wir die Kriterien für die Erkennung lokaler Extremwerte differenzierbarer Funktionen.

Satz 10

Sei $a < b$ und $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ 2-mal stetig differenzierbar.

(1) Ist $x_0 \in (a, b)$ ein lokales Minimum oder lokales Maximum von f, so ist $f'(x_0) = 0$.

(2) Ist $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0 (< 0)$, so ist x_0 ein lokales Minimum (Maximum) von f.

Mit Hilfe dieses Kriteriums können wir eine Funktion durch Angabe der Extremstellen und der Monotonieeigenschaften zwischen den Extremstellen beschreiben **(Kurvendiskussion)**.

4.1 Elementare Funktionen - Beispiele

Wir betrachten nun eine Anzahl von wichtigen Beispielen für Funktionen. Wir werden dabei immer so vorgehen, dass wir die Abbildungseigenschaften, den Graph der Funktion, Ableitung und Stammfunktion, und gegebenenfalls ihre Umkehrfunktion, sowie etwaige Besonderheiten auflisten. Dabei werden die **Potenz- und Wurzelfunktionen** für rationale Exponenten aus den Grundlagen als bekannt vorausgesetzt.

4.2 Elementare Funktionen - Polynomfunktionen

Definition 19

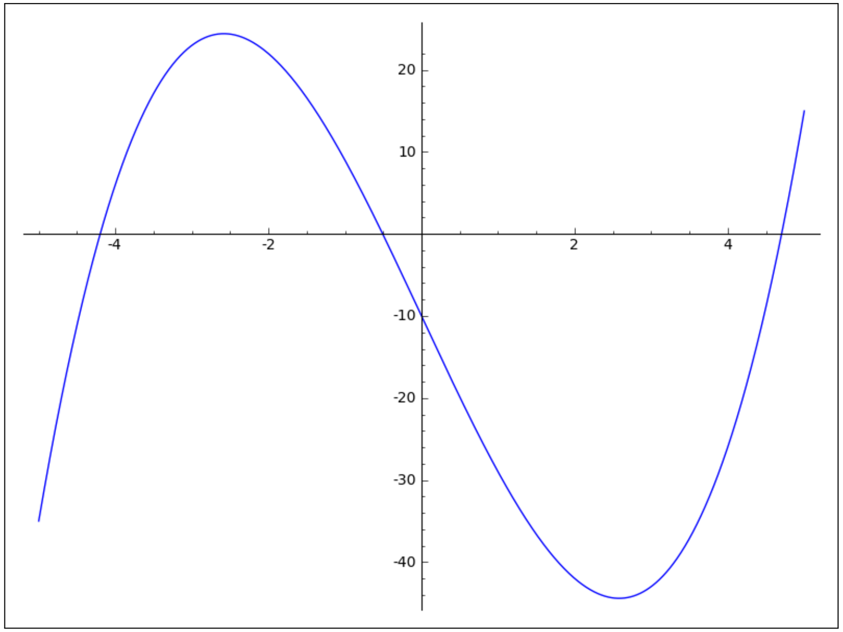
Eine **Polynomfunktion** $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *vom Grad* $n \in \mathbb{N}_0$ *ist eine Funktion mit*

$$x \mapsto p(x) := a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

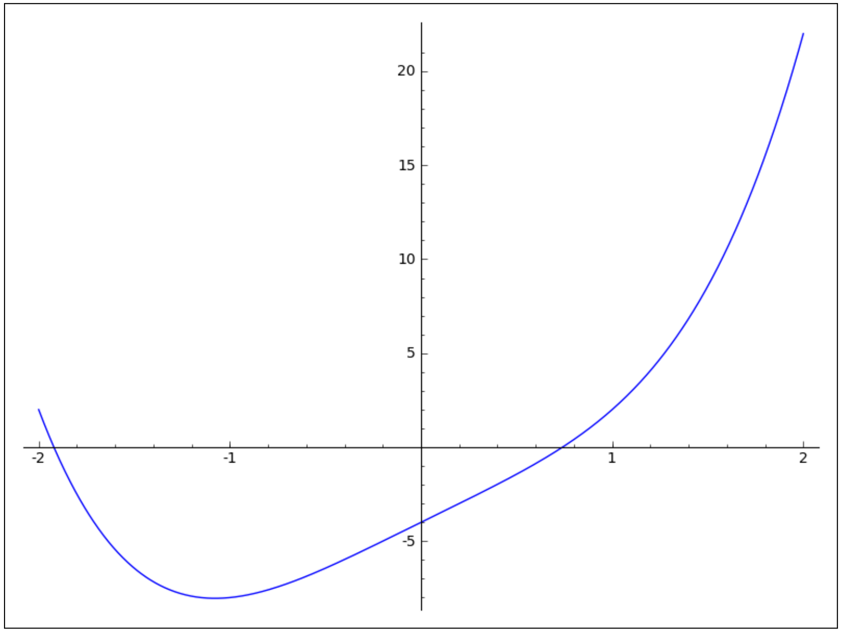
mit festen Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$. *Wir schreiben* $n = \operatorname{grad}(p)$.

Stetigkeit	überall stetig
Differenzierbarkeit	überall beliebig oft differenzierbar
Ableitung	$p'(x) = \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1}$
Stammfunktion	$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1}$
Monotonie	im Allgemeinen keine
Bild	für n ungerade ist $p(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, sonst keine Aussage möglich
Nullstellen	maximal n reelle Nullstellen, für n ungerade mindestens eine

4.2 Elementare Funktionen - Polynomfunktionen



(a) $x \mapsto x^3 - 20x - 10$



(b) $x \mapsto x^4 + 5x - 4$

Bemerkung. Eine Polynomfunktion vom Grad 0 ist konstant (und ungleich Null), vom Grad 1 ist eine lineare Funktion und vom Grad 2 ist eine quadratische Funktion (Parabel).

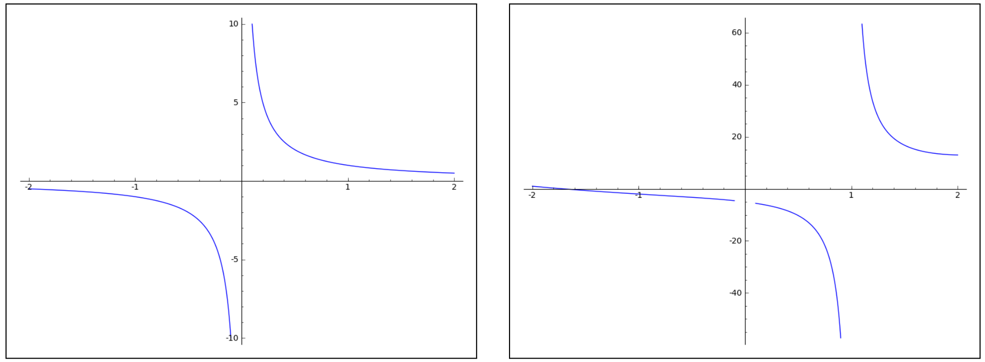
Definition 20

Sind $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *und* $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *Polynomfunktionen mit* $\operatorname{grad}(q) \geq 1$, *so ist eine* **rationale Funktion** $r : \{x \in \mathbb{R} : q(x) \neq 0\} \to \mathbb{R}$ *gegeben durch den Quotienten*

$$x \mapsto r(x) := \frac{p(x)}{q(x)}.$$

Stetigkeit	stetig im Definitionsbereich
Differenzierbarkeit	beliebig oft differenzierbar im Definitionsbereich
Ableitung	$r' = \frac{p'q - pq'}{q^2}$
Stammfunktion	keine allgemeine geschlossene Formel
Monotonie	im Allgemeinen keine
Bild	keine Aussage möglich
Nullstellen	maximal soviele wie das Zählerpolynom

4.3 Elementare Funktionen - Rationale Funktionen



(a) $x \mapsto 1/x$ (b) $x \mapsto \frac{x^4+5x}{x^2-x}$

Bemerkung. Definitionslücken rationaler Funktionen sind genau die Nullstellen des Nennerpolynoms. (1) Ist $x_0 \in \mathbb{R} \setminus D$ eine Definitionslücke mit $\lim_{x \to x_0} |r(x)| = \infty$, dann heißt x_0 eine **Polstelle** von r. (2) Eine Definitionslücke, in die die Funktion stetig fortgesetzt werden kann, heißt **hebbare Singularität**.

Satz 11

Für alle $a > 0$ gibt genau es genau eine stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x+y) = f(x)f(y),\ f(1) = a,$$

sie stimmt auf $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ mit der Funktion $x \mapsto a^x$, die wir in den Grundlagen konstruiert haben, überein, und wir benutzen deswegen dieselbe Bezeichnung für die Funktionsvorschrift.

Aus verschiedenen Gründen besitzt die Funktion $x \mapsto e^x$ zur Basis $e = 2.7182\ldots$ (**Eulersche Zahl)** eine Sonderrolle und wird daher die **Exponentialfunktion** genannt.

Bemerkung. Die Zahl $e \in \mathbb{R}$ ist irrational und kann durch den Grenzwert

$$e := \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

charakterisiert werden.

Definition 21 (Exponentialfunktion)

Die eindeutig bestimmte **stetige** *Funktion* $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *mit den Eigenschaften*

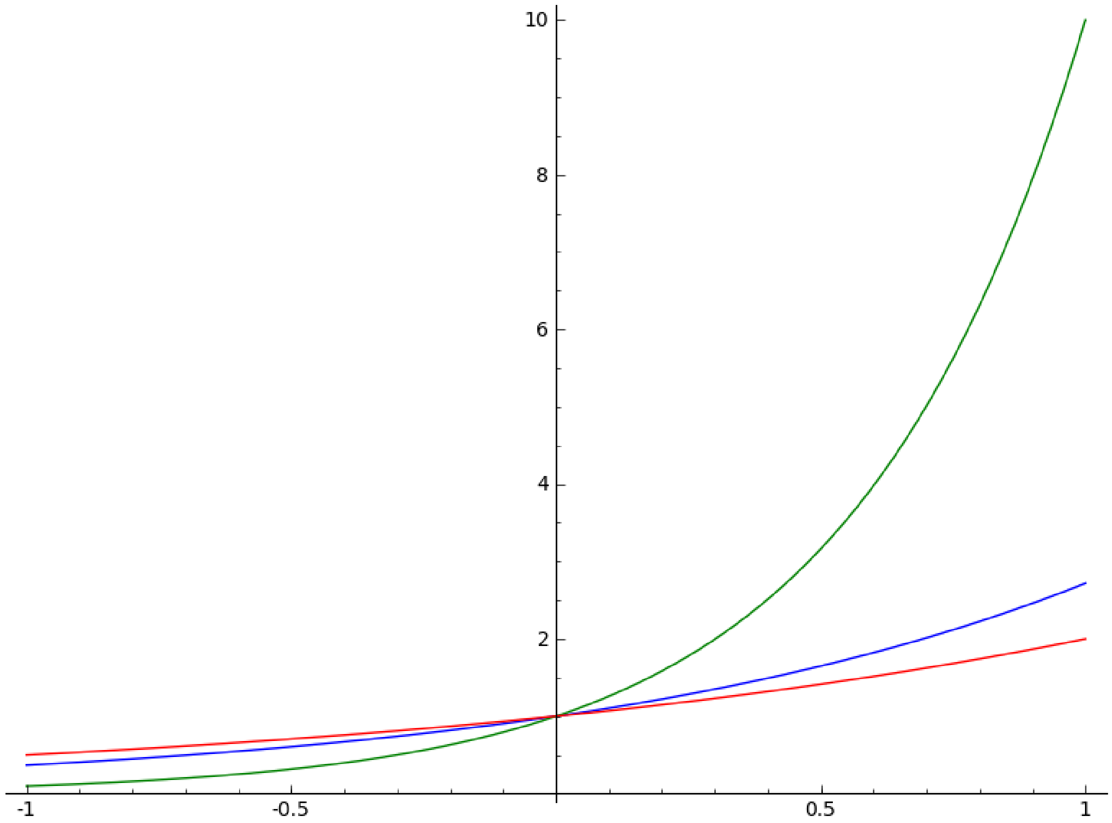
$$\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y), \ \exp(1) = e,$$

heißt **Exponentialfunktion**. *Wir bezeichnen die Funktionsvorschrift mit* $x \mapsto \exp(x)$ *oder* $x \mapsto e^x$.

Stetigkeit	überall stetig
Differenzierbarkeit	überall beliebig oft differenzierbar
Ableitung	$f'(x) = \exp(x)$
Stammfunktion	$F(x) = \exp(x)$
Monotonie	streng monoton wachsend
Bild	$\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$
Nullstellen	keine

4.4 Elementare Funktionen - Exponentialfunktion und Logarithmus

Wir zeigen den Graph der Funktionen $x \mapsto a^x$ für $a = 2, e, 10$.



Grün: $x \mapsto 10^x$, Blau: $x \mapsto e^x$, Rot: $x \mapsto 2^x$

4.4 Elementare Funktionen - Exponentialfunktion und Logarithmus

Für $y \in \mathbb{R}$ betrachten wir die Gleichung $\exp(x) = y$. Da das Bild der Exponentialabbildung $\exp(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^+$ ist, folgt:

Lemma 1

Ist $y \leq 0$, so ist $\{x \in \mathbb{R} : \exp(x) = y\} = \emptyset$, d.h. die Gleichung besitzt keine Lösung.

Da die Exponentialabbildung streng monoton wachsend ist, ist sie nach Satz 4 injektiv und somit bijektiv als Abbildung $\exp : \mathbb{R} \to (0, \infty)$. Damit besitzt sie eine Umkehrabbildung $\phi : (0, \infty) \to \mathbb{R}$. Aufgrund der Eigenschaft einer Umkehrabbildung gilt $\phi(y) = \phi(\exp(x)) \overset{!}{=} x$ und somit gilt:

Lemma 2

Ist $y > 0$, so ist $\{x \in \mathbb{R} : \exp(x) = y\} = \{\phi(y)\}$, d.h. es gibt genau eine Lösung, die durch die Umkehrfunktion von $\exp$ gegeben wird.

Definition 22

Die Umkehrfunktion $\phi : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ *der Exponentialfunktion heißt* **natürlicher Logarithmus** *und die Funktionsvorschrift wird mit* $x \mapsto \ln(x)$ *bezeichnet. Es gilt:* $e^{\ln(y)} = y$ *für alle* $y \in \mathbb{R}^+$ *und* $\ln(e^x) = x$ *für alle* $x \in \mathbb{R}$.

Stetigkeit	stetig auf ganz $D = (0, \infty)$
Differenzierbarkeit	auf D beliebig oft differenzierbar
Ableitung	$f'(x) = 1/x$
Stammfunktion	$F(x) = x\ln(x) - x$
Monotonie	streng monoton wachsend
Bild	$\mathbb{R}$
Nullstellen	$x = 1$

4.4 Einschub: Ableitung der Umkehrfunktion

Satz 12

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion ($D \subset \mathbb{R}$), die eine Umkehrfunktion f^{-1} besitze. Sei $x_0 \in D$ mit $y_0 = f(x_0)$. Außerdem gelte $f'(f^{-1}(y_0)) \neq 0$. Dann ist f^{-1} in y_0 differenzierbar mit

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

Wie ist das nun mit den Gleichungen $a^x = y$, $y \in \mathbb{R}_0^+$ für andere Werte von $a > 0$?
Da $a > 0$ ist, ist $a = e^{\ln(a)}$ und somit wegen der Potenzgesetze

$$y = a^x = \left(e^{\ln(a)}\right)^x = e^{x\ln(a)}.$$

Wenn wir auf beiden Seiten der Gleichung den natürlichen Logarithmus nehmen, haben wir somit

$$\ln(y) = x\ln(a), \text{ bzw. } x = \frac{\ln(y)}{\ln(a)}$$

und damit haben wir die Gleichung gelöst. Es ist nun bequemer, für diese Lösungen ebenfalls eine eigene Schreibweise einzuführen.

Definition 23

Für festes $a > 0$ ist der **Logarithmus** $\log_a y$ *definiert als die eindeutige Lösung der obigen Gleichung*

$$x = \log_a y :\Leftrightarrow a^x = y,$$

a *heißt* **Basis**, y *heißt* **Numerus**.*Da* $a^1 = a$ *und* $a^0 = 1$ *ist folgt*

$$\log_a a = 1 \qquad \text{und} \qquad \log_a 1 = 0.$$

Bemerkung. (1) Logarithmen zur Basis 10 heißen **Zehnerlogarithmen** und es wird die Bezeichnung $\log_{10} b = \lg b$ benutzt.
(2) Logarithmen zur Basis $a = 2$ heißen **Zweierlogarithmen** und es wird die Bezeichnung $\log_2 x = \operatorname{lb} x$ benutzt.
(3) Logarithmen zur Basis $a = e = 2.7182...$ **(Eulersche Zahl)** sind wieder die **natürlichen Logarithmen** mit Bezeichnung $\log_e y = \ln y$ benutzt.

Logarithmen zu verschiedenen Basen lassen sich ineinander umrechnen.

Lemma 3

Für $a, c \in \mathbb{R}$ mit $a, c > 0$ und $y \in \mathbb{R}$ mit $y > 0$ gilt

$$\log_a y = \frac{\log_c y}{\log_c a}.$$

Außerdem gelten die folgenden Rechenregeln:

Lemma 4

Für $a \in \mathbb{R}$ mit $a > 0$ und $u, v \in \mathbb{R}$ mit $u, v > 0$ gilt

(1) $$\log_a(u \cdot v) = \log_a(u) + \log_a(v)\,;$$

(2) $$\log_a\left(\frac{u}{v}\right) = \log_a(u) - \log_a(v)\,.$$

Beweis. (1) Setze $x = \log_a(u)$ und $y = \log_a(v)$, d.h.

$$a^x = u \qquad \text{und} \qquad a^y = v.$$

Daraus folgt

$$u \cdot v = a^x \cdot a^y = a^{x+y}.$$

Und dies impliziert schließlich

$$\log_a(u \cdot v) = x + y = \log_a(u) + \log_a(v).$$

(2) Wegen $a^{\log_a(1/v)} = 1/v$ und $a^{\log_a(v)} = v$ folgt

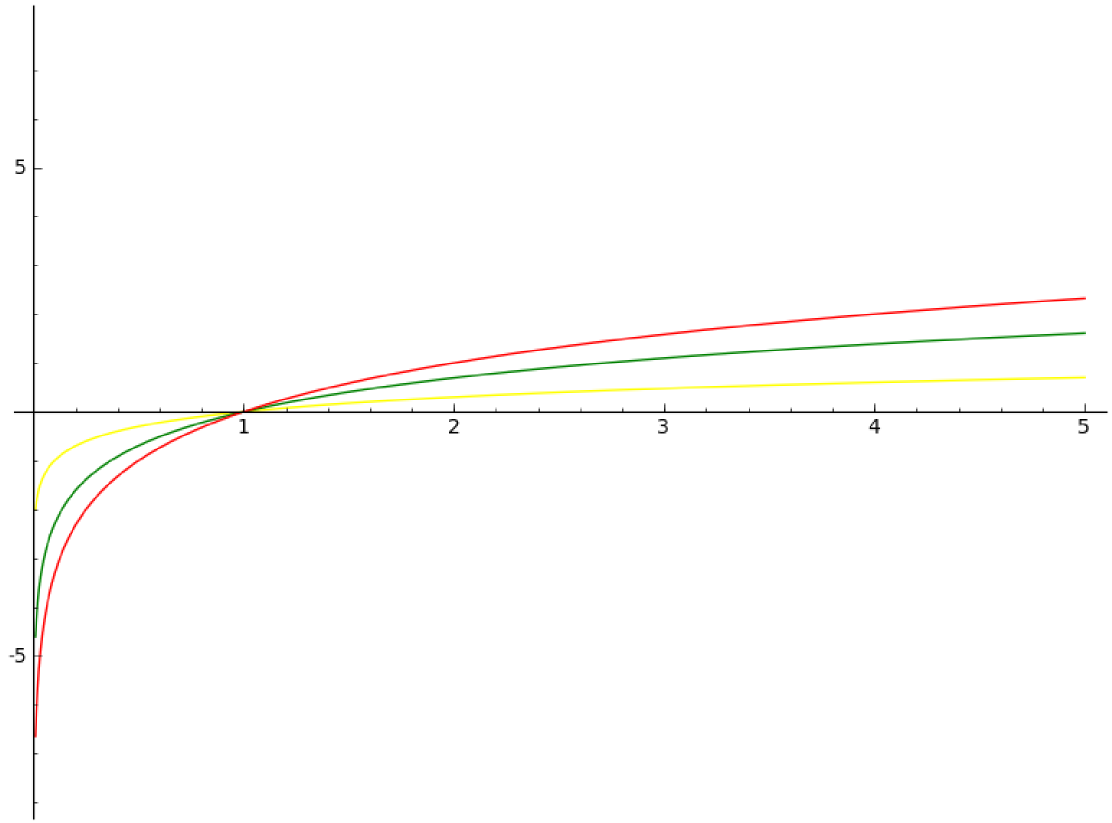
$$a^{\log_a(v)} = v = \frac{1}{a^{\log_a(1/v)}} = \left(a^{\log_a(1/v)}\right)^{-1} = a^{-\log_a(1/v)},$$

und somit aufgrund der Eindeutigkeit der Lösung: $\log_a(v) = -\log_a(1/v)$. Damit ist aber wegen (1)

$$\log_a(u/v) = \log_a\left(u\frac{1}{v}\right) = \log_a(u) + \log_a(1/v) = \log_a(u) - \log_a(v).$$

$\square$

4.4 Elementare Funktionen - Exponentialfunktion und Logarithmus



Gelb: $x \mapsto \log_{10}(x)$, Grün: $x \mapsto \log_e(x) = \ln(x)$, Rot: $x \mapsto \log_2(x)$

4.5 Elementare Funktionen - Potenzfunktionen

Definition 24

Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^a$ *heißt* **Potenzfunktion**. *Der Definitionsbereich* D *hängt hierbei vom Exponenten* a *wie folgt ab:*

	$a > 0$	$a < 0$
$a \in \mathbb{Z}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$
$a \notin \mathbb{Z}$	$\mathbb{R}_0^+$	$\mathbb{R}^+$

$$x^a := e^{a \ln(x)} \qquad ,a \notin \mathbb{Z},\ a < 0$$

$$x^a := \begin{cases} e^{a \ln(x)} & , x > 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases} \qquad ,a \notin \mathbb{Z},\ a > 0$$

Stetigkeit	stetig im Definitionsbereich
Differenzierbarkeit	beliebig oft differenzierbar in D für $a \in \mathbb{Z}$, und in $\mathbb{R}^+$ für $a \notin \mathbb{Z}$
Ableitung	$f'(x) = ax^{a-1}$
Stammfunktion	$F(x) = \begin{cases} \frac{x^{a+1}}{a+1} & , a \neq -1 \\ \ln(x) & , a = -1 \end{cases}$
Nullstellen	für $a > 0$ in $x = 0$, für $a < 0$ keine

Lehrstuhl A für Mathematik RWTH AACHEN UNIVERSITY

4.6 Elementare Funktionen - Trigonometrische Funktionen

Definition 25

Die **trigonometrische Funktionen** *sind*

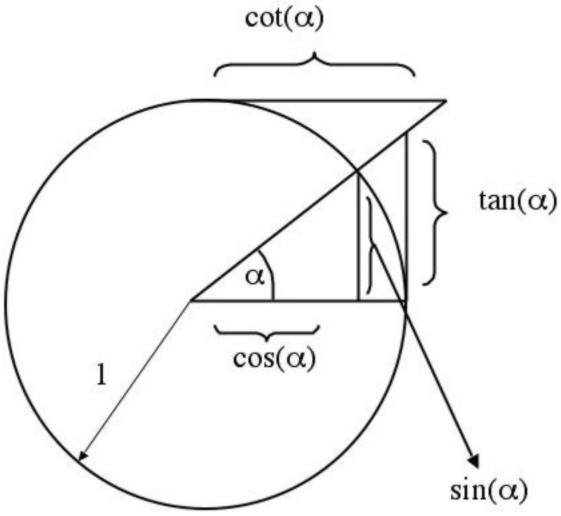
(1) **Sinus** $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sin(x)$,
(2) **Cosinus** $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \cos(x)$,
(3) **Tangens** $\tan(x)$,
(4) **Cotangens** $\cot(x)$.

Sie dienen der Winkel- und Längenberechnung in Dreiecken. Wie in der folgenden Graphik dargestellt, kann jede dieser Funktionen als eine bestimmte Seitenlänge eines bestimmten in oder auf den Einheitskreis einbeschriebenen rechtwinkligen Dreiecks in Abhängigkeit eines seiner Innenwinkel dargestellt werden.

Der Parameter x der Winkelfunktion ist der in der Graphik eingezeichnete Winkel α, der im **Bogenmaß** *angegeben wird.* $\sin(x)$ *ist dann zum Beispiel die Seitenlänge der dem Winkel gegenüberliegenden Seite des in den Einheitskreis einbeschriebenen, rechtwinkligen Dreiecks.*

Lehrstuhl A für Mathematik

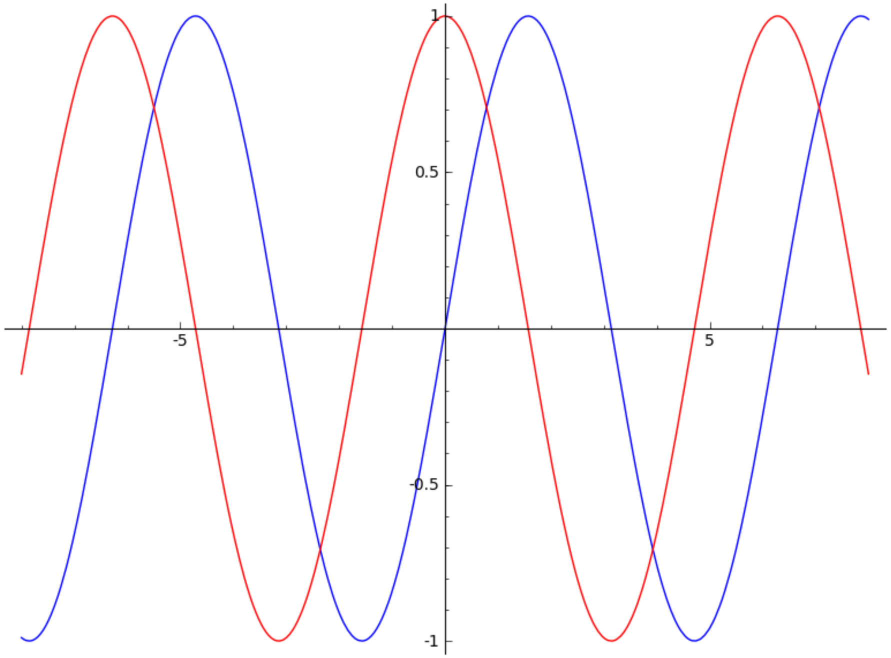
Die Trigonometrischen Funktionen am Einheitskreis



Da für einen Winkel $\alpha + 2\pi$ im Bogenmaß genau dasselbe Bild wie für α herauskommt, haben auch alle Winkelfunktionen denselben Wert. Bezeichnet f eine der trigonometrischen Funktionen, so gilt also $f(\alpha + 2\pi) = f(\alpha)$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$. Die Winkelfunktionen sind **periodisch**.

4.7 Elementare Funktionen - Sinus und Cosinus

Blau: Graph von $f(x) = \sin(x)$, Rot: Graph von $\cos(x)$.



Eigenschaften der Sinus-Funktion.

Stetigkeit	überall stetig
Differenzierbarkeit	überall beliebig oft differenzierbar
Ableitung	$f'(x) = \cos(x)$
Stammfunktion	$F(x) = -\cos(x)$
Bild	$[-1, 1]$
Nullstellen	$x_n = n\pi,\ n \in \mathbb{Z}$
Symmetrie	ungerade: $\sin(-x) = -\sin(x)$
Periodizität	Periode 2π

Eigenschaften der Cosinus-Funktion.

Stetigkeit	überall stetig
Differenzierbarkeit	überall beliebig oft differenzierbar
Ableitung	$f'(x) = -\sin(x)$
Stammfunktion	$F(x) = \sin(x)$
Bild	$[-1, 1]$
Nullstellen	$x_n = \frac{\pi}{2} + n\pi,\ n \in \mathbb{Z}$
Symmetrie	gerade: $\cos(-x) = \cos(x)$
Periodizität	Periode 2π

4.7 Elementare Funktionen - Sinus und Cosinus

Satz 13

Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right),$$
$$\sin(x) = -\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right).$$

Zum Beweis müssen wir einfach die Zeichnung mit den trigonometrischen Funktionen am Einheitskreis um 90 Grad $= \frac{\pi}{2}$ entgegen des Uhrzeigersinns drehen.
Die folgende nützliche Tatsache folgt schließlich aus dem Satz von Pythagoras für das in den Kreis einbeschriebene rechtwinklige Dreieck.

Satz 14

Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1.$

4.8 Elementare Funktionen - Tangens und Cotangens

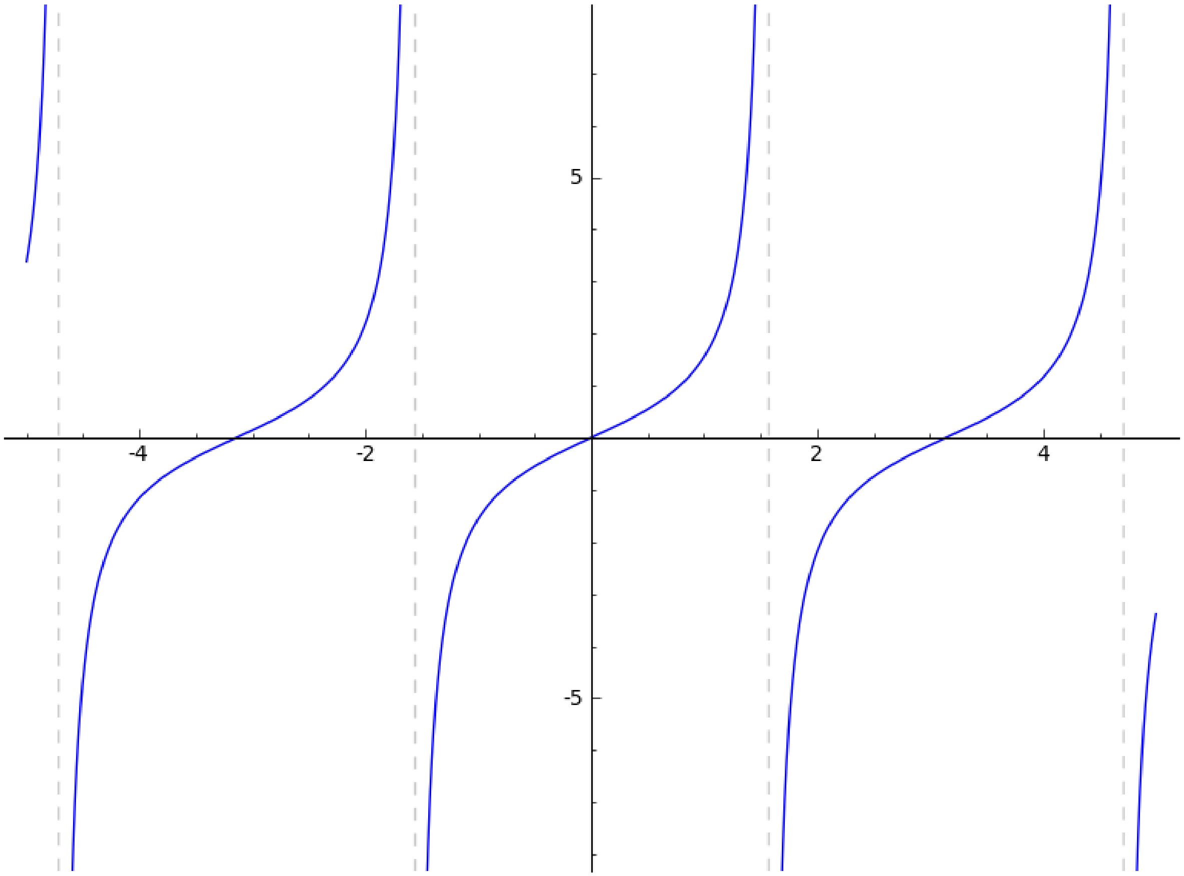
Definition 26

Die **Tangens-Funktion** $\tan : D \to \mathbb{R}$ *ist gegeben durch* $D := \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \ : \ k \in \mathbb{Z}\}$ *und die Funktionsvorschrift* $x \mapsto \tan(x) := \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$

Stetigkeit	in D stetig
Differenzierbarkeit	in D beliebig oft differenzierbar
Ableitung	$f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$
Stammfunktion	$F(x) = -\ln(\cos(x))$
Bild	$\mathbb{R}$
Nullstellen	$x_n = n\pi, \ n \in \mathbb{Z}$
Symmetrie	ungerade: $\tan(-x) = -\tan(x)$
Periodizität	Periode π

4.8 Elementare Funktionen - Tangens und Cotangens

Graph von $f(x) = \tan(x)$



4.8 Elementare Funktionen - Tangens und Cotangens

Definition 27

Die **Cotangens-Funktion** $\cot : D \to \mathbb{R}$ *ist gegeben durch* $D := \mathbb{R} \setminus \{k\pi \ : \ k \in \mathbb{Z}\}$ *und die Funktionsvorschrift* $x \mapsto \cot(x) := \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$.

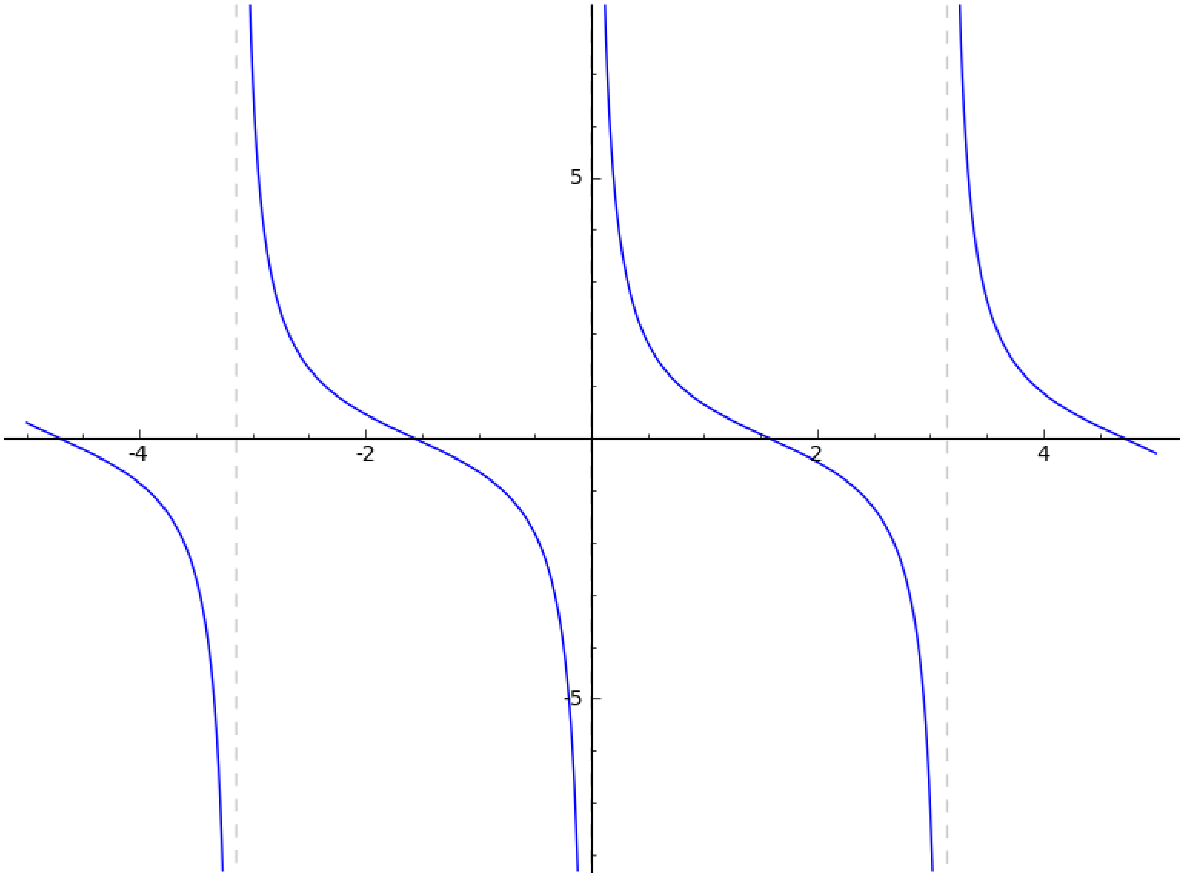
Stetigkeit	in D stetig
Differenzierbarkeit	in D beliebig oft differenzierbar
Ableitung	$f'(x) = -\frac{1}{\sin^2(x)}$
Stammfunktion	$F(x) = \ln(\sin(x))$
Bild	$\mathbb{R}$
Nullstellen	$x_n = \frac{\pi}{2} + n\pi, \ n \in \mathbb{Z}$
Symmetrie	ungerade: $\cot(-x) = -\cot(x)$
Periodizität	Periode π

Lehrstuhl A für Mathematik

RWTH AACHEN UNIVERSITY

4.8 Elementare Funktionen - Tangens und Cotangens

Graph von $f(x) = \cot(x)$



4.9 Elementare Funktionen - Die Additionstheoreme

Satz 15

Die **Additionstheoreme** *der trigonometrischen Funktionen lauten: Für alle* $x, y \in \mathbb{R}$*, so dass beide Seiten der Gleichung definiert sind, gilt:*

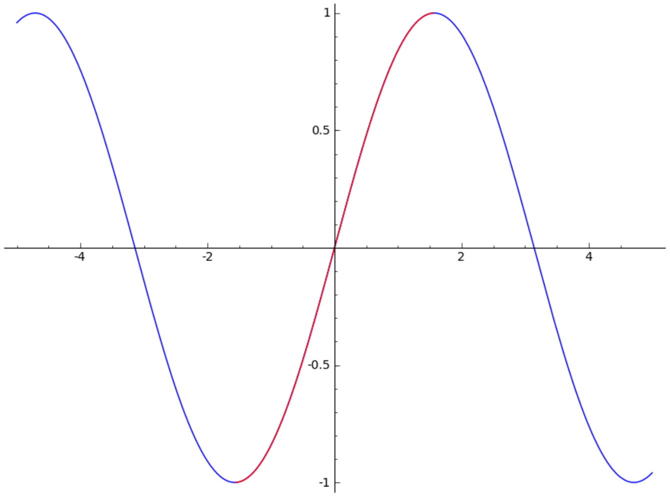
$$\begin{aligned}
\sin(x \pm y) &= \sin(x) \cdot \cos(y) \pm \cos(x) \cdot \sin(y) \\
\cos(x \pm y) &= \cos(x) \cdot \cos(y) \mp \sin(x) \cdot \sin(y) \\
\tan(x \pm y) &= \frac{\tan(x) \pm \tan(y)}{1 \mp \tan(x) \cdot \tan(y)} \\
\cot(x \pm y) &= \frac{\cot(x) \cdot \cot(y) \mp 1}{\cot(x) \pm \cot(y)}.
\end{aligned}$$

4.10 Elementare Funktionen - Umkehrfunktionen trigonometrischer Funktionen

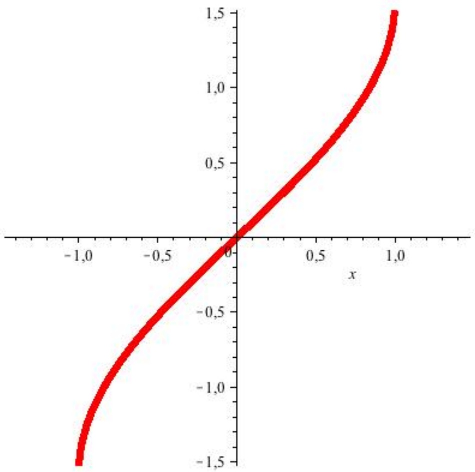
Wir führen die Umkehrfunktionen zu $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\tan(x)$ und $\cot(x)$ ein. Da die Funktionen periodisch sind, können sie nicht injektiv sein. Daher ist es nötig, die Funktionen auf Bereiche einzuschränken, wo sie injektiv sind, um eine Umkehrfunktion konstruieren zu können. Für die Wahl dieser Bereiche haben sich folgende Konventionen durchgesetzt:

1. Die **Arcussinus-Funktion** $\arcsin : [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $y \mapsto \arcsin(y)$ ist die Umkehrfunktion von $\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1]$. Mit dem genannten Definitions- und Zielbereich ist $x \mapsto \sin(x)$ eine bijektive Abbildung.
2. Die **Arcuscosinus-Funktion** $\arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$, $y \mapsto \arccos(y)$ ist die Umkehrfunktion von $\cos : [0,\pi] \to [-1,1]$. Mit dem genannten Definitions- und Zielbereich ist $x \mapsto \arccos(x)$ eine bijektive Abbildung.
3. Die **Arcustangens-Funktion** $\arctan : \mathbb{R} \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $y \mapsto \arctan(y)$ ist die Umkehrfunktion von $\tan : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$. Mit dem genannten Definitions- und Zielbereich ist $x \mapsto \arctan(x)$ eine bijektive Abbildung.
4. Die **Arcuscotangens-Funktion** $\operatorname{arccot} : \mathbb{R} \to [0,\pi]$, $y \mapsto \operatorname{arccot}(y)$ ist die Umkehrfunktion von $\cot : [0,\pi] \to \mathbb{R}$. Mit dem genannten Definitions- und Zielbereich ist $x \mapsto \operatorname{arccot}(x)$ eine bijektive Abbildung.

4.10 Elementare Funktionen - Umkehrfunktionen trigonometrischer Funktionen



$\sin(x)$



$\arcsin(x)$

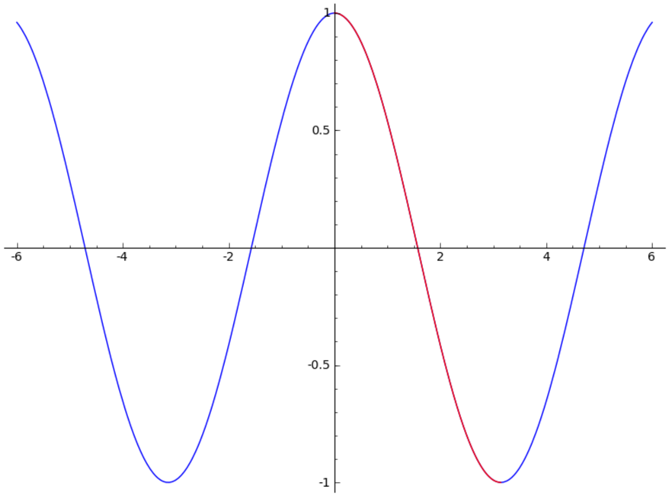
4.10 Elementare Funktionen - Umkehrfunktionen trigonometrischer Funktionen

Definition 28

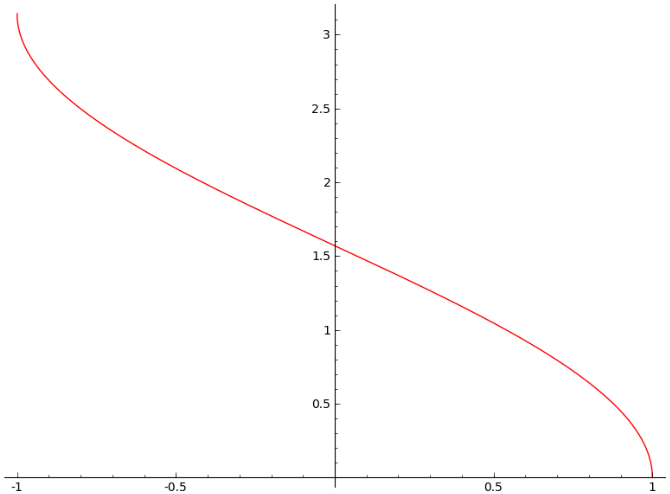
Die **Arcussinus-Funktion** $\arcsin : D \to \mathbb{R}$ *ist gegeben durch* $D := [-1, 1]$ *und die Funktionsvorschrift* $x \mapsto \arcsin(x)$.

Stetigkeit	in D stetig
Differenzierbarkeit	in $(-1, 1)$ beliebig oft differenzierbar
Ableitung	$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
Stammfunktion	$F(x) = x \arcsin(x) + \sqrt{1 - x^2}$
Bild	$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
Nullstellen	$x = 0$
Symmetrie	ungerade: $\arcsin(-x) = -\arcsin(x)$

4.10 Elementare Funktionen - Umkehrfunktionen trigonometrischer Funktionen



$\cos(x)$



$\arccos(x)$

4.10 Elementare Funktionen - Umkehrfunktionen trigonometrischer Funktionen

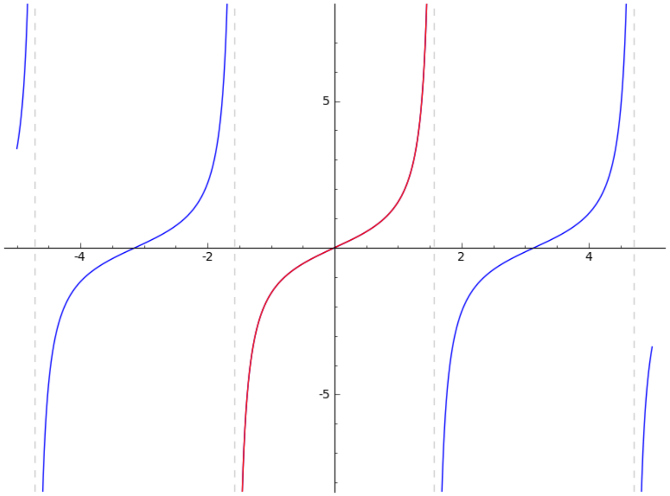
Definition 29

Die **Arcuscosinus-Funktion** $\arccos : D \to \mathbb{R}$ *ist gegeben durch* $D := [-1, 1]$ *und die Funktionsvorschrift* $x \mapsto \arccos(x)$.

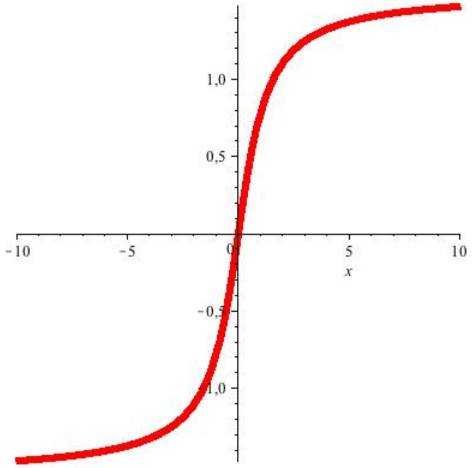
Stetigkeit	in D stetig
Differenzierbarkeit	in $(-1, 1)$ beliebig oft differenzierbar
Ableitung	$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
Stammfunktion	$F(x) = x \arccos(x) - \sqrt{1 - x^2}$
Bild	$[0, \pi]$
Nullstellen	$x = 1$
Symmetrie	keine

Lehrstuhl A für Mathematik

4.10 Elementare Funktionen - Umkehrfunktionen trigonometrischer Funktionen



$\tan(x)$



$\arctan(x)$

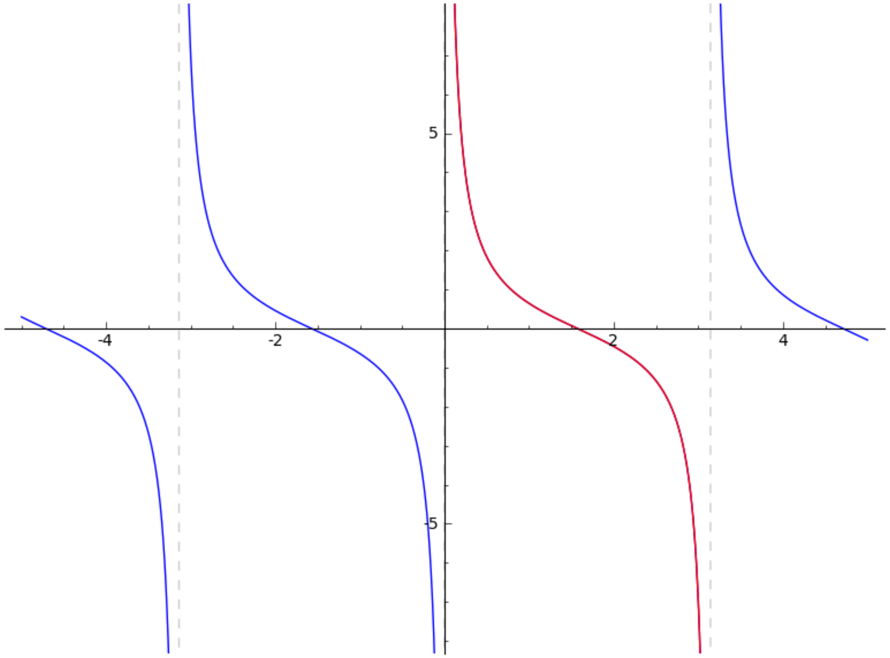
4.10 Elementare Funktionen - Umkehrfunktionen trigonometrischer Funktionen

Definition 30

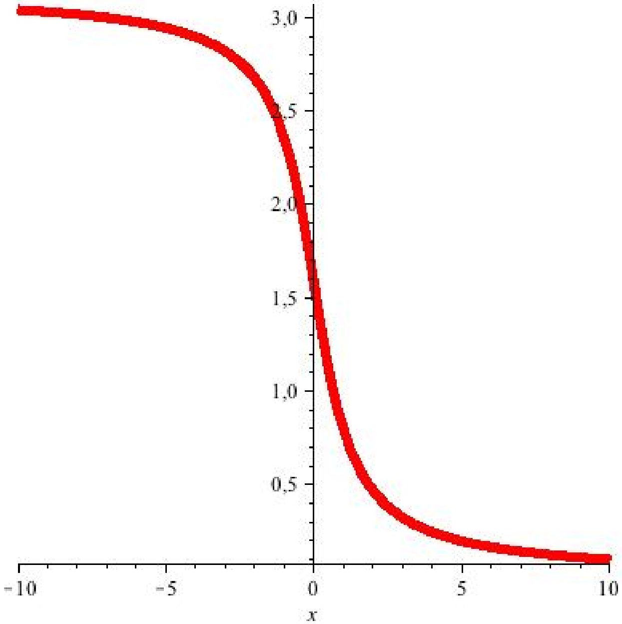
Die **Arcustangens-Funktion** $\arctan : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *ist gegeben durch die Funktionsvorschrift* $x \mapsto \arctan(x)$.

Stetigkeit	überall stetig
Differenzierbarkeit	überall beliebig oft differenzierbar
Ableitung	$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$
Stammfunktion	$F(x) = x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$
Bild	$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$
Nullstellen	$x = 0$
Symmetrie	ungerade: $\arctan(-x) = -\arctan(x)$

4.10 Elementare Funktionen - Umkehrfunktionen trigonometrischer Funktionen



$\cot(x)$



$f(x) = \operatorname{arccot}(x)$

4.10 Elementare Funktionen - Umkehrfunktionen trigonometrischer Funktionen

Definition 31

Die **Arcuscotangens-Funktion** $\operatorname{arccot} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *ist gegeben durch die Funktionsvorschrift* $x \mapsto \operatorname{arccot}(x)$.

Stetigkeit	überall stetig
Differenzierbarkeit	überall beliebig oft differenzierbar
Ableitung	$f'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$
Stammfunktion	$F(x) = x \operatorname{arccot}(x) + \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$
Bild	$(0, \pi)$
Nullstellen	keine
Symmetrie	keine

4.11 Elementare Funktionen - Gleichungen mit trigonometrischen Funktionen

Die Wahl eines passenden Bereichs für die Konstruktion der Umkehrfunktion der Winkelfunktionen hat einige Konsequenzen für die Lösung von Gleichungen. Wir betrachten dazu ein Beispiel.

Beispiel 15

Wir suchen alle Lösungen der Gleichung $\sin(x) = a \geq 0$.

1. *Für* $a > 1$ *gibt es keine Lösungen, da in diesem Fall* $a \notin \sin(\mathbb{R}) = [-1, 1]$.
2. *Für* $a = 1$ *sind die Lösungen die Maxima der Sinusfunktion, d.h. die Punkte* $x_k = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ *mit* $k \in \mathbb{Z}$.
3. *Für* $a = 0$ *sind die Lösungen die Nullstellen der Sinusfunktion, d.h. die Punkte* $x_k = k\pi$ *mit* $k \in \mathbb{Z}$.
4. *Für* $0 < a < 1$ *wollen wir nun die Lösungen mit Hilfe der Umkehrfunktion ausdrücken. Sei* $A = \arcsin(a)$, *dann ist die Lösungsmenge der Gleichung*

$$\mathbb{L} = \{A + 2k\pi \,:\, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{-A + (2k+1)\pi \,:\, k \in \mathbb{Z}\}.$$

4.11 Elementare Funktionen - Gleichungen mit trigonometrischen Funktionen