Vorkurs Mathematik–
Teil I. Grundlagen

Lehrstuhl A
für Mathematik

RWTH AACHEN UNIVERSITY

Inhalt

Lehrstuhl A für Mathematik
RWTH AACHEN UNIVERSITY

1.1 Aussagen und Wahrheitswerte - Beispiele

Wir betrachten folgende sprachliche Ausdrücke:

1. Nehmen Sie am besten die zweite Straße rechts.
2. Ein Wal ist ein Fisch.
3. Ein Wal ist ein Meeressäugetier.
4. 9 ist eine Primzahl.
5. Mailand oder Madrid – Hauptsache Italien.
6. Alle nichttrivialen Nullstellen der Riemannschen Zetafunktion haben den Realteil $1/2$.
7. Köln ist die Hauptstadt von Nordrhein - Westfalen.
8. Wollen Sie Ihren Kaffee mit Milch und Zucker ?
9. Heute ist schlechtes Wetter.

1.1 Aussagen und Wahrheitswerte - Der Begriff der Aussage

Um herauszufinden, bei welchen der Beispiele es sich um Aussagen handelt, müssen wir erstmal formulieren, was eine Aussage eigentlich sein soll:

Arbeitsdefinition

Eine (mathematische) Aussage ist eine sprachlich oder symbolisch formulierte Behauptung, der auf eindeutige Weise ein Wahrheitswert, nämlich wahr *(W) oder* falsch *(F) zugeordnet werden kann.*

Nach dieser Definition stellen die Ausdrücke 1, 5 und 8 sicher keine Aussagen dar. Ausdruck 9 würden wir auch nicht als Aussage betrachten, da der Begriff *schlechtes Wetter* nicht eindeutig genug festgelegt ist, um ihr einen eindeutigen, objektiven Wahrheitswert zuzuordnen.

Lehrstuhl A für Mathematik
RWTH AACHEN UNIVERSITY

1.1 Aussagen und Wahrheitswerte - Bemerkungen

(a) Für die Arbeitsdefinition ist es unwesentlich, ob man der Aussage bereits einen Wahrheitswert zugeordnet hat. Dies kann mitunter sehr schwierig sein. Eine allgemeingültige Methode, einer Aussage anzusehen, ob man ihr wirklich einen Wahrheitswert zuordnen kann, gibt es nicht.

(b) Ausdruck Nummer 6 auf der Liste ist die sogenannte *Riemannsche Vermutung*. Dieser Aussage versucht man seit dem Jahr 1859 einen Wahrheitswert zuzuordnen.

(c) Einer Aussage kann man nur Wahrheitswerte auf einer gegebenen Grundlage (Kontext) zuordnen, d.h. wir müssen uns immer auf bestimmte Grundannahmen einigen, die wir als wahr annehmen und aus denen wir den Wahrheitswert gegebener Aussagen folgern möchten.

(d) Alle derartigen Grundannahmen müssen offen liegen, d.h. wir dürfen bei der Zuordnung der Wahrheitswerte keinen verborgenen Kontext benutzen. Wenn wir Zusatzinformationen benutzen wollen, müssen wir sie formulieren und zu den Grundannahmen dazunehmen.

Lehrstuhl A für Mathematik
RWTH AACHEN UNIVERSITY

1.2 Zusammengesetzte Aussagen - Drei Operationen

Wir betrachten nun zwei Aussagen, die wir mit A und B bezeichnen. Wir führen Symbole für drei Operationen mit Aussagen ein. Durch diese Operationen werden aus gegebenen Aussagen neue Aussagen erzeugt.

Definition 1

(a) Die **Negation** *einer Aussage A wird mit $\neg A$ (gelesen:* nicht A*) bezeichnet.*
(b) Die **Konjunktion** *zweier Aussagen A und B wird mit $A \wedge B$ (gelesen:* A und B*) bezeichnet.*
(c) Die **Disjunktion** *zweier Aussagen A und B wird mit $A \vee B$ (gelesen:* A oder B*) bezeichnet.*

Im Folgenden werden wir zur Illustration dieser Operationen beispielhaft die Aussagen

A: Ein Wal ist ein Fisch.

B: Ein Wal ist ein Meeressäugetier.

verwenden.

1.2 Zusammengesetzte Aussagen - Drei Operationen

Wenn A und B zwei Aussagen sind, kann ihnen ein eindeutiger Wahrheitswert zugeordnet werden. Damit z. B. $A \wedge B$ ebenfalls eine Aussage wird, müssen wir festlegen, wie ihr – abhängig von den Wahrheitswerten von A und B – ein Wahrheitswert zugeordnet wird.

Dazu bedienen wir uns einer sogenannten Wahrheitstafel, in der für sämtliche Möglichkeiten von Wahrheitswerten von A und B der Wahrheitswert von $A \wedge B$ festgelegt wird. Insbesondere besagt die Tafel, dass $A \wedge B$ ein eindeutiger Wahrheitswert zugeordnet werden kann, wenn dies für A und B gilt. Damit ist auch $A \wedge B$ wieder eine Aussage im Sinne unserer Arbeitsdefinition. Da die Wahrheitstafel die Wahrheitswerte der Aussage $A \wedge B$ in Abhängigkeit der Wahrheitswerte von A und B eindeutig festlegt, kann man diese Wahrheitstafel auch als Definition der Aussage $A \wedge B$ ansehen.

Wir fassen nun die drei zusammengesetzten Aussagen steckbriefartig zusammen:

1.2 Zusammengesetzte Aussagen - A und B

Name: A und B

Zeichen: $A \wedge B$

Wahrheitstafel:

A	B	$A \wedge B$
W	W	W
W	F	F
F	W	F
F	F	F

Umgangssprache: A und B ist nur dann wahr, wenn sowohl A als auch B wahr sind.

Beispiel: Ein Wal ist ein Fisch und ein Meeressäugetier.

Lehrstuhl A für Mathematik
RWTH AACHEN UNIVERSITY

1.2 Zusammengesetzte Aussagen - A oder B

Name: A oder B

Zeichen: $A \vee B$

Wahrheitstafel:

A	B	$A \vee B$
W	W	W
W	F	W
F	W	W
F	F	F

Umgangssprache: A oder B ist nur dann wahr, wenn entweder A oder B **oder beide** wahr sind.

Beispiel: Ein Wal ist ein Fisch oder ein Meeressäugetier.

1.2 Zusammengesetzte Aussagen - Verneinung

Name: Nicht A

Zeichen: $\neg A$

Wahrheitstafel:

A	$\neg A$
W	F
F	W

Umgangssprache: Nicht A ist wahr, wenn A falsch ist und umgekehrt.

Beispiel: Ein Wal ist kein Fisch.

1.3 Zusammengesetzte Aussagen - Mehrfachoperationen

Die drei Basisoperationen allein wären nicht besonders nützlich, wenn man aus ihnen nicht durch Kombination und Hintereinanderschalten immer kompliziertere Aussagen produzieren könnte. Ausgehend von einigen Aussagen, denen wir einen Wahrheitswert zuordnen können – diese Aussagen zusammen mit den Wahrheitswerten stellen die *Grundannahmen* dar, von denen wir am Anfang gesprochen haben – konstruieren wir durch Kombination der drei Basisoperationen weitere Aussagen.

Wir wollen dafür einen Kalkül entwickeln. Der entscheidende Punkt hierbei ist, das wir aufgrund der Wahrheitstafeln für $\wedge, \vee, \neg$ jeder dieser weiteren Aussagen auch einen eindeutigen Wahrheitswert zuordnen können.

Dazu muss man allerdings die Reihenfolge angeben, in der die Basisoperationen angewandt werden. Zur Angabe der Reihenfolge werden Klammern verwendet und wie üblich von innen nach außen abgearbeitet.

Lehrstuhl A für Mathematik RWTH AACHEN UNIVERSITY

1.3 Zusammengesetzte Aussagen - Mehrfachoperationen

Beispiel 1. Bei drei Aussagen A,B,C macht zum Beispiel der Ausdruck $A \vee B \wedge C$ ohne weitere Angaben keinen Sinn, denn die Aussagen $A \vee (B \wedge C)$ und $(A \vee B) \wedge C$ ergeben unterschiedliche Wahrheitstafeln.

A	B	C	$B \wedge C$	$A \vee (B \wedge C)$
W	W	W	W	W
W	W	F	F	W
W	F	W	F	W
W	F	F	F	W
F	W	W	W	W
F	W	F	F	F
F	F	W	F	F
F	F	F	F	F

A	B	C	$A \vee B$	$(A \vee B) \wedge C$
W	W	W	W	W
W	W	F	W	F
W	F	W	W	W
W	F	F	W	F
F	W	W	W	W
F	W	F	W	F
F	F	W	F	F
F	F	F	F	F

Erst durch die Klammerung wird die Zuordnung der Wahrheitswerte eindeutig.

Lehrstuhl A für Mathematik
RWTH AACHEN UNIVERSITY

1.3 Zusammengesetzte Aussagen - Beispiel: Das andere ODER

Beispiel 2. Für das *andere oder* im (sprachlichen Sinn), nämlich genauer *entweder A oder B, aber* **nicht** *beide* gibt es in der Aussagenlogik (anders als in der Informatik) kein eigenes Zeichen. Für die Aussage $(A \vee B) \wedge (\neg(A \wedge B))$ erhalten wir nämlich die Wahrheitstafel:

A	B	$A \vee B$	$\neg(A \wedge B)$	$(A \vee B) \wedge (\neg(A \wedge B))$
W	W	W	F	F
W	F	W	W	W
F	W	W	W	W
F	F	F	W	F

Somit ist die zusammengesetzte Aussage wahr, wenn entweder A oder B wahr sind, aber nicht, wenn beide wahr sind. Die Operation $\vee$ nennt man daher auch *inklusiv oder*, während diese Operation hier auch *exklusiv oder* genannt wird.

Bemerkung. Lesen Sie sich den Formelausdruck für die kombinierte Aussage selbst laut vor, wobei Sie versuchen, die Klammerung zu berücksichtigen. Vergleichen Sie ihn dann mit der sprachlichen Formulierung oben.

Lehrstuhl A für Mathematik

RWTH AACHEN UNIVERSITY

1.4 Folgerungen und Äquivalenz - Die Implikation

Definition 2

Sind wieder A und B zwei Aussagen, dann können wir eine weitere zusammengesetzte Aussage mit Hilfe der **Folgerung** *erzeugen:* $A \Rightarrow B$, *gelesen* aus A folgt B *oder* A impliziert B, *oder* wenn A gilt, dann auch B. *Die Wahrheitstafel für diese zusammengesetzte Aussage ist:*

A	B	$A \Rightarrow B$
W	W	W
W	F	F
F	W	W
F	F	W

Bemerkung. $A \Rightarrow B$ ist immer eine wahre Aussage ist, wenn A falsch ist. Das sehen wir ein, wenn wir die sprachliche Entsprechung der Aussage für den Fall, dass A falsch ist, in die Form *wenn A wahr* **wäre**, *so auch B* abändern. Da A falsch ist, ist diese Aussage wahr, egal was B ist.

Lehrstuhl A für Mathematik
RWTH AACHEN UNIVERSITY

1.4 Folgerungen und Äquivalenz - Die Implikation

Wir betrachten wieder unser Beispielaussagen:

Für die beiden Aussagen, die wir bisher betrachtet haben, wäre die sprachliche Entsprechung der Implikation $A \Rightarrow B$: *Wenn ein Wal ein Fisch ist, dann ist ein Wal auch ein Meeressäugetier* bzw. *Wenn ein Wal ein Fisch* **wäre**, *dann wäre er auch ein Meeressäugetier*. Dies ist **wahr**, da die erste Aussage falsch ist und damit beliebige Implikationen möglich sind (vgl. Zeile 3 der Tabelle).

Dagegen ist die sprachliche Entsprechung von $B \Rightarrow A$: *Ein Wal ist ein Meeressäugetier impliziert, dass ein Wal ein Fisch ist*, oder *Wenn ein Wal ein Meeressäugetier ist, ist ein Wal auch ein Fisch*. Diese zusammengesetzte Aussage ist falsch aufgrund von Zeile zwei der Tabelle.

Bemerkung. Beachten Sie, dass die Implikation *nicht symmetrisch* ist in A und B. Dies wird durch die Verwendung des einseitigen Pfeils als Symbol ausgedrückt.

1.5 Folgerungen und Äquivalenz - Äquivalenz

Definition 3

Zwei Aussagen A und B heißen **äquivalent** *(geschrieben: $A \Leftrightarrow B$), falls beide wahr oder beide falsch sind, d.h. es ergibt sich eine Wahrheitstafel*

A	B	$A \Leftrightarrow B$
W	W	W
W	F	F
F	W	F
F	F	W

Wir sagen: Genau dann, wenn A gilt, gilt auch B.

1.6 Folgerungen und Äquivalenz - Beispiele

Wir betrachten nun drei Beispiele für äquivalente Aussagen:

Beispiel 3. Es gilt:

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow ((\neg A) \vee B).$$

Zum Beweis betrachten wir die Wahrheitstafel

A	B	$(\neg A) \vee B$
W	W	W
W	F	F
F	W	W
F	F	W

Dies ist dieselbe Wahrheitstafel wie in Definition 2. Wenn zwei Aussagen auf der Basis derselben Grundannahmen dieselben Wahrheitstafeln besitzen sind sie auch äquivalent im Sinne von Definition 3. Damit lassen sich auch die Folgepfeile durch die ursprünglichen drei Operationen ausdrücken. Trotzdem haben sie sich aber natürlich mehr als bewährt, nicht nur als Abkürzungen.

1.6 Folgerungen und Äquivalenz - Beispiele

Beispiel 4. Es gilt:

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow ((\neg B) \Rightarrow (\neg A)).$$

Der Beweis folgt analog durch Betrachtung einer Wahrheitstafel.

Dieses Beispiel ist der Ursprung für die Begriffe *notwendig* und *hinreichend*. Die linke der beiden äquivalenten Aussagen besagt, aus A folgt B oder anders ausgedrückt, *die Bedingung, dass A gilt, ist* **hinreichend** *dafür, dass B gilt*. Die rechte Seite besagt, dass $\neg B$ auch $\neg A$ impliziert. Also kann A nur wahr sein, wenn auch B wahr ist. Das bedeutet aber **nicht**, dass B bereits A impliziert. Also ist *B* **notwendig** *dafür, dass A gilt, aber* **nicht hinreichend**.

Aufgrund dieses Zusammenhangs ist eine weitere mögliche sprachliche Übersetzung der Aussage $A \Leftrightarrow B$: *Die Aussage A ist* **notwendig und hinreichend** *für B*.

Lehrstuhl A für Mathematik
RWTH AACHEN UNIVERSITY

1.6 Folgerungen und Äquivalenz - Beispiele

Beispiel 5. Es gilt:

$$(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow ((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A))$$

Das dritte Beispiel zeigt, dass auch der Äquivalenzpfeil durch die Folgepfeile und somit durch die drei Basisoperationen darstellbar ist.

Bemerkung. In mathematischen Beweisen werden oft nicht die in den Theoremen formulierten Aussagen direkt bewiesen, sondern es wird zu äquivalenten Aussagen übergegangen. Beispiel 5 ist in diesem Sinne eine der meistbenutzten Äquivalenzen. Praktisch immer, wenn man die Äquivalenz zweier Aussagen A und B nachweisen will, zerlegt man den Beweis in zwei Teile: Erst zeigt man $A \Rightarrow B$ und dann $B \Rightarrow A$ und damit ist man fertig. Da dies sehr oft vorkommt, werden wir dazu jetzt einen solchen Äquivalenzbeweis betrachten.

1.6 Folgerungen und Äquivalenz - Ein Äquivalenzbeweis

Wir wollen die folgende Aussage beweisen:

Satz 1

Eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ ist genau dann gerade, wenn n^2 gerade ist.

In den Formalismus der Aussagenlogik umgesetzt haben wir zwei Aussagen:

A: Die natürliche Zahl n ist gerade.

B: Das Quadrat n^2 der natürlichen Zahl n ist gerade.

Wir wollen zeigen: $A \Leftrightarrow B$. Als bekannte Grundtatsachen, die wir als gegeben annehmen, benutzen wir eine Charakterisierung gerader und ungerader Zahlen, sowie eine binomische Formel.

Beweis von Satz 1:

(a) Zuerst zeigen wir $A \Rightarrow B$: Ist n gerade, so gibt es eine andere natürliche Zahl $m \in \mathbb{N}$ mit $n = 2m$. Damit gilt aber $n^2 = 4m^2 = 2(2m^2)$ mit $2m^2 \in \mathbb{N}$. Also ist auch n^2 gerade.

(b) Nun zeigen wir $B \Rightarrow A$: Da die beiden Aussagen äquivalent sind, können wir statt $B \Rightarrow A$ genauso gut $(\neg A) \Rightarrow (\neg B)$ beweisen (siehe Beispiel 4). Umgangssprachlich ist das die Aussage: *Ist $n \in \mathbb{N}$ nicht gerade (ungerade), so auch n^2.*

Der Beweis dieser äquivalenten Aussage geht dann wie folgt: Ist n ungerade, so gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ mit $n = 2m - 1$. Nach der zweiten Binomischen Formel ist somit auch $n^2 = (2m - 1)^2 = 4m^2 - 4m + 1 = 4(m^2 - m) + 1$ ungerade.

Damit ist Satz 1 bewiesen. $\square$

1.7 Ein Beispiel zur Aussagenlogik

Beispiel 6. Der Kommissar hat drei Tatverdächtige P,Q und R. Er hat ermittelt:

1. Ist Q oder R Täter, dann ist P unschuldig.
2. Ist P oder R unschuldig, dann ist Q ein Täter.
3. Ist R schuldig, dann ist P Mittäter.

Zur Umsetzung in den Formalismus betrachten wir die Aussagen:

Q: Q ist der Täter.

R: R ist der Täter.

P: P ist der Täter.

Die drei Ermittlungsergebnisse des Kommissars lassen sich dann wie folgt in einer Formel ausdrücken:

$$((Q \vee R) \Rightarrow (\neg P)) \wedge (((\neg P) \vee (\neg R)) \Rightarrow Q) \wedge (R \Rightarrow P).$$

Lehrstuhl A für Mathematik
RWTH AACHEN UNIVERSITY

1.7 Ein Beispiel zur Aussagenlogik

Eine Wahrheitstafel hilft dem Kommissar, den Fall zu lösen:

Q	R	P	$((Q \vee R) \Rightarrow (\neg P)) \wedge (((\neg P) \vee (\neg R)) \Rightarrow Q) \wedge (R \Rightarrow P)$
W	W	W	F
W	W	F	F
W	F	W	F
W	F	F	W
F	W	W	F
F	W	F	F
F	F	W	F
F	F	F	F

Also ist Q der Täter, P und R sind unschuldig.

Bemerkung. Würden in der letzten Spalte mehrere W's stehen, wären die Ermittlungen noch nicht ausreichend.

Lehrstuhl A für Mathematik
RWTH AACHEN UNIVERSITY

1.8 Aussagenlogik - Zusammenfassung

(1) Aussagen sind sprachliche Ausdrücke, denen man Wahrheitswerte (W,F) zuordnen kann.

(2) Mit Hilfe der Operationen $\neg, \vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ kann man mit gegebenen Aussagen neue Aussagen formulieren.

(3) Bei der Bildung neuer Aussagen ist die Reihenfolge der angewandten Operationen wichtig, damit die neue Aussage eindeutig festgelegt ist.

(4) Die Reihenfolge wird durch Klammersetzung ausgedrückt.

1.8 Aussagenlogik - Zusammenfassung

(5) Die Wahrheitstafeln und somit die Zuordnung der Wahrheitswerte für die zusammengesetzten Aussagen sind eindeutig durch die Wahrheitstafeln der Einzelaussagen bestimmt.

(6) Die Liste der Operationen oben ist nicht minimal, z.B. kann die Operation $\Rightarrow$ durch die Operationen $\neg$ und $\vee$ ausgedrückt werden.

(7) Insbesondere kann es vorkommen, dass dieselben zusammengesetzten Aussagen auf unterschiedliche Weisen ausgedrückt werden.

(8) Alle Zuordnungen von Wahrheitswerten beruhen auf Grundannahmen, d.h. Aussagen mit bekannten Wahrheitswerten (*Kontext*). Diese sollten möglichst vollständig aufgelistet werden.

Lehrstuhl A für Mathematik
RWTH AACHEN UNIVERSITY

1.9 Aussagen mit Unbestimmten - Beispiele

Beispiel 7. In der Mathematik spielen auch Aussagen eine Rolle, die einen oder mehrere Unbestimmte enthalten. Einem sprachlichen Ausdruck der Form

x ist eine reelle Zahl

kann aber kein Wahrheitswert zugeordnet werden, ohne dass wir etwas über x wissen. Anders ist mit Aussagen der Form

$$(\textit{x ist eine reelle Zahl}) \Rightarrow (x^2 \geq 0)$$

oder

Zu jeder natürlichen Zahl x gibt es eine natürliche Zahl y, die größer als x ist

Diese Aussagen sind wahr unabhängig davon, für welche Zahl x steht. Die Form solcher Aussagen wird standardisiert durch die Benutzung sogenannter Quantoren.

1.9 Aussagen mit Unbestimmten - Quantoren

Definition 4

Es gibt zwei Quantoren

(1) Den **Allquantor** $\forall$ *(gelesen:* für alle*) gefolgt von einem Doppelpunkt, hinter dem die Eigenschaft steht, die alle x haben sollen.*

(2) Der **Existenzquantor** $\exists$ *(gelesen:* es gibt*) ebenfalls gefolgt von einem Doppelpunkt.*

Bemerkung. Die beiden Aussagen aus Beispiel 7 schreiben sich unter Benutzung der Quantoren in der folgenden Standardform

1. $\forall_{x\in\mathbb{R}} : x^2 \geq 0$, gesprochen: *Für alle* $x \in \mathbb{R}$ *gilt* $x^2 \geq 0$.
2. $\forall_{x\in\mathbb{N}}\exists_{y\in\mathbb{N}} : y > x$, gesprochen: *Für alle* $x \in \mathbb{N}$ *gibt es ein* $y \in \mathbb{N}$ *mit* $y > x$.

In der Standardform können also mehrere Quantoren hintereinander stehen. Durch einen Doppelpunkt von den Quantoren getrennt, folgen dann die Eigenschaften, die die einzelnen Unbekannten erfüllen sollen.

1.9 Aussagen mit Unbestimmten - Verneinung von Quantoren

Statt wie bisher, Aussagen einfach mit Großbuchstaben abzukürzen, werden wir Aussagen in Unbestimmten x,y,z,... mit S(x,y,z,...) bezeichnen. Eine Aussage mit Quantoren hat dann die standardmäßige Form $Q_x Q_y Q_z ... : S(x, y, z, ...)$, wobei Q entweder $\exists$ oder $\forall$ ist.

Satz 1

Die Negation der Aussage $Q_x Q_y Q_z ... : S(x, y, z, ...)$ ist dann

$$\neg(Q_x Q_y Q_z ... : S(x, y, z, ...)) \Leftrightarrow Q'_x Q'_y Q'_z ... : \neg S(x, y, z, ...),$$

wobei Q' der jeweils andere Quantor ist.

Beispiel 8. Es ist $\neg(\forall_{x\in\mathbb{N}} \exists_{y\in\mathbb{N}} : y > x) \Leftrightarrow \exists_{x\in\mathbb{N}} \forall_{y\in\mathbb{N}} : y \leq x$. Die Verneinung von *Zu jeder natürlichen Zahl gibt es eine größere natürliche Zahl* ist also korrekterweise die Aussagen *Es gibt eine natürliche Zahl, so dass alle natürlichen Zahlen kleiner oder gleich dieser Zahl sind*, oder, was äquivalent ist: *Es gibt eine größte natürliche Zahl.*

Lehrstuhl A für Mathematik

RWTH AACHEN UNIVERSITY

1.10 Aussagenlogik - Ökonomie der Schreibweise

Die Bewertung logischer Ausdrücke, die $\neg, \vee, \wedge$ enthalten, hängt wie gesehen von der Klammerung ab. Um umfangreiche Klammerungen zu vermeiden, verabredet man zunächst, dass die Operation $\neg$ immer zuerst ausgeführt wird (das ist wie Punktrechnung vor Strichrechnung). Mit dieser Verabredung können wir z.B. die Aussage $(\neg A)\vee(\neg B)$ auch einfacher als $\neg A \vee \neg B$ schreiben, ohne ein Durcheinander anzurichten. In anderen Fällen ist die Klammerung egal, oder wir können zusammengesetzte Aussagen durch einfachere, äquivalente Aussagen ersetzen. Dazu benutzen wir unter anderem die folgenden Äquivalenzen:

Satz 2

Es gilt:

1. $\neg(\neg A) \Leftrightarrow A$,
2. $A \vee A \Leftrightarrow A$,
3. $A \wedge A \Leftrightarrow A$.

Generell gilt aber immer: **Im Zweifelsfall Klammern setzen !**

Lehrstuhl A für Mathematik RWTH AACHEN UNIVERSITY

1.10 Kommutativität, Assoziativität, Distributivität

Satz 3

Weitere Regeln zur Äquivalenz von Aussagen sind:

1. *Kommutativität:*
   i. $A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$
   ii. $A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$
2. *Assoziativität:*
   i. $A \wedge (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \wedge C$
   ii. $A \vee (B \vee C) \Leftrightarrow (A \vee B) \vee C$
3. *Distributivität:*
   i. $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
   ii. $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
4. *Verneinung:*
   i. $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$
   ii. $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$

Die letzten beiden Sachverhalte werden auch de Morgansche Regeln genannt.

1.10 Nochmal der Kriminalfall

Beispiel 9. Der Kommissar hat den Täter durch eine Wahrheitstafel ermittelt. Bei komplizierteren Sachverhalten werden Wahrheitstafeln aber sehr schnell sehr groß und ihre komplette Berechnung damit zu aufwändig. Zum Abschluss lösen wir den Fall daher nochmal mit Hilfe des Einsatzes äquivalenter Formulierungen.

Die erste Aussage *Ist Q oder R schuldig, dann ist P unschuldig* wird nun äquivalent umgeformt:

$$\begin{aligned}(Q \vee R) \Rightarrow \neg P &\overset{Beispiel 3}{\Leftrightarrow} (\neg(Q \vee R) \vee \neg P)\\ &\overset{Satz 3.4i}{\Leftrightarrow} \neg((Q \vee R) \wedge P)\\ &\overset{Satz 3.3i}{\Leftrightarrow} \neg((Q \wedge P) \vee (R \wedge P))\\ &\overset{Satz 3.4ii}{\Leftrightarrow} \neg(Q \wedge P) \wedge \neg(R \wedge P).\end{aligned}$$

Also: *Weder haben P und Q zusammen das Verbrechen begangen, noch P und R.* Da die beiden Aussagen durch ein $\wedge$ verbunden sind und die zusammengesetzte Aussage wahr ist, muss jede einzelne Aussage wahr sein. Wir sehen also, dass somit auch die Aussage $\neg(R \wedge P)$ wahr sein muss.

Lehrstuhl A für Mathematik
RWTH AACHEN UNIVERSITY

1.10 Nochmal der Kriminalfall

Wir verbinden dies jetzt mit dem dritten Ermittlungsergebnis des Kommissars *Ist R schuldig, dann ist P Mittäter*, d.h. $\neg(R \wedge \neg P)$:

$$
\begin{aligned}
\neg(R \wedge P) \wedge \neg(R \wedge \neg P) &\overset{Satz 3.4i}{\Leftrightarrow} (\neg R \vee \neg P) \wedge (\neg R \vee \neg(\neg P)) \\
&\overset{Satz 2.1}{\Leftrightarrow} (\neg R \vee \neg P) \wedge (\neg R \vee P) \\
&\overset{Satz 3.3ii}{\Leftrightarrow} \neg R \vee (\neg P \wedge P)) \\
&\Leftrightarrow \neg R.
\end{aligned}
$$

Der letzte Schritt folgt daraus, dass $P \wedge \neg P$ niemals wahr ist. Damit kann die oder-Verknüpfung nur dann eine wahre Aussage liefern, wenn die erste Aussage $\neg R$ richtig ist.

Mit der zweiten Aussage $(\neg P \vee \neg R) \Rightarrow Q$ folgt somit sofort Q, also Q ist ein Täter. Einsetzen dieses Resultats in die erste Aussage $(Q \vee R) \Rightarrow \neg P$ liefert sofort $\neg P$ und wir erhalten dasselbe Resultat wie bei der Wahrheitstafel.

Lehrstuhl A für Mathematik RWTH AACHEN UNIVERSITY

2.1 Mengen und Abbildungen

Wir werden nun Mengen und Abbildungen betrachten und beginnen wieder zuerst mit einer Arbeitsdefinition.

Arbeitsdefinition

Eine Menge *ist eine Ansammlung von Objekten, genannt* Elemente *der Menge. Eine Menge wird durch eine Vorschrift festgelegt, die eindeutig bestimmt, ob ein gegebenes Objekt ein Element der Menge ist oder nicht.*

Wie beim Begriff der Aussage bestehen auch beim Begriff der Menge gewisse logische Schwierigkeiten und – wie bei Aussagen – werden wir diese Schwierigkeiten erstmal einfach ignorieren.

2.1 Mengen und Abbildungen - Notation

Mengen werden in der Regel mit Großbuchstaben, ihre Elemente mit kleinen Buchstaben bezeichnet. Die Schreibweise $x \in M$ bedeutet **x ist ein Element der Menge M**. Um eine Menge durch eine Vorschrift festzulegen schreiben wir oft

$$M := \{x \,:\, S(x)\}$$

dabei ist $S(x)$ eine Aussage mit der Unbekannten x und ein Objekt x ist ein Element von M genau dann, wenn die Aussage $S(x)$ wahr ist.

Bemerkung. Zwei Mengen sind gleich, wenn sie dieselben Elemente enthalten. Insbesondere ist

$$\{1, 2, 3\} = \{1, 3, 2\} = \{1, 1, 2, 2, 3\}$$

d.h. die Reihenfolge der Elemente und etwaige Mehrfachnennungen spielen keine Rolle.

Beispiel 10. (a) Sei $S(x) = (x \in \mathbb{N}) \wedge (x/2 \in \mathbb{N})$. Dann ist $M := \{x \,:\, S(x)\}$ die Menge aller natürlichen Zahlen x, so dass x geteilt durch 2 auch eine natürliche Zahl ist. Also ist M die *Menge der geraden Zahlen*. Man schreibt auch oft

$$M := \{x \,:\, (x \in \mathbb{N}) \wedge (x/2 \in \mathbb{N})\} = \{x \in \mathbb{N} \,:\, x/2 \in \mathbb{N}\}.$$

(b) *Intervalle* auf der reellen Zahlengeraden sind ebenfalls Mengen. Für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ wird das *abgeschlossene Intervall* mit

$$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\},$$

das offene Intervall mit

$$(a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\},$$

und ein *halboffenes Intervall* mit

$$[a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\},$$

notiert.

2.2 Operationen mit Mengen

Wir betrachten drei Mengenoperationen: *Differenz*, *Durchschnitt* und *Vereinigung*.

Definition 5

Seien M und N zwei Mengen:

(1) Die **Differenz** *$M \setminus N$ von M und N ist die Menge*

$$M \setminus N := \{x \in M \,:\, x \notin N\}.$$

(2) Die **Vereinigung** *$M \cup N$ von M und N ist die Menge*

$$M \cup N := \{x : (x \in M) \vee (x \in N)\}.$$

(3) Der **Durchschnitt** *$M \cap N$ von M und N ist die Menge*

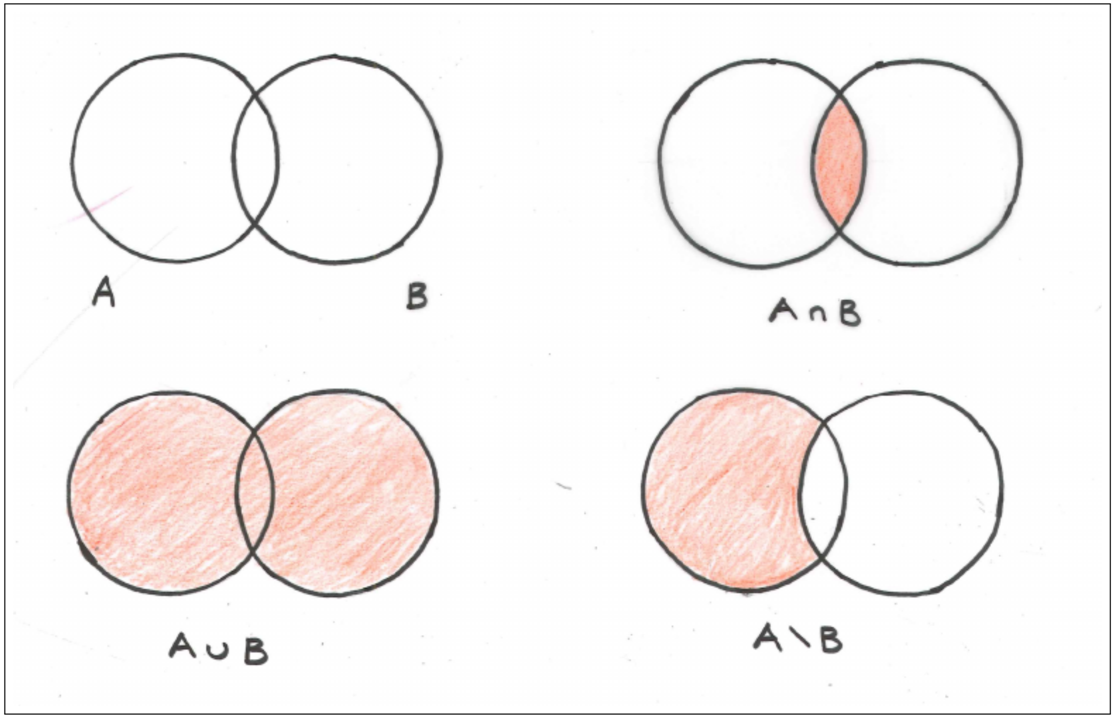
$$M \cap N := \{x : (x \in M) \wedge (x \in N)\}.$$

Bemerkung. Wie man sieht, ist $A \cap B = B \cap A$, $A \cup B = B \cup A$, aber $A \setminus B \neq B \setminus A$.

Lehrstuhl A für Mathematik RWTH AACHEN UNIVERSITY

2.2 Operationen mit Mengen – Venn - Diagramme

Eine verbreitete Methode, sich die Mengenoperationen zu veranschaulichen, sind *Venn - Diagramme*.



2.3 Die leere Menge, Teilmengen und die Potenzmenge

Definition 6

(1) Die **leere Menge** $\emptyset$ *ist die Menge, die kein Element enthält.*

(2) Eine Menge M *ist* **enthalten** *in einer Menge* N*, geschrieben* $M \subset N$*, wenn jedes Element von* M *in* N *enthalten ist, d.h. wenn die Aussage* $(x \in M) \Rightarrow (x \in N)$ *wahr ist. Wir nennen* M *eine* **Teilmenge** *von* N *und* N *eine* **Obermenge** *von* M.

2.3 Die leere Menge, Teilmengen und die Potenzmenge

Bemerkung. (a) Mit einer beliebigen Aussage $S(x)$ können wir die leere Menge im Rahmen unserer Arbeitsdefinition schreiben als

$$\emptyset := \{x \, : \, S(x) \wedge \neg S(x)\}.$$

(b) Zwei Mengen M, N mit $M \cap N = \emptyset$ heißen **disjunkt**.

(c) Wenn es ein $x \in N$ gibt mit $x \notin M$, dann heißt M eine **echte** Teilmenge von N.

(d) Manchmal drückt man die Möglichkeit, dass M und N auch gleich sein können durch das Zeichen $M \subseteq N$ und die Möglichkeit, dass M eine echte Teilmenge von N ist, durch $M \subsetneq N$ aus.

(e) Die leere Menge ist Teilmenge jeder Menge, d.h. $\emptyset \subset M$. Das liegt daran, dass die Aussage $(x \in \emptyset) \Rightarrow (x \in M)$ immer wahr ist, da es kein x gibt, so dass die Aussage $x \in \emptyset$ wahr ist.

Lehrstuhl A für Mathematik
RWTH AACHEN UNIVERSITY

2.3 Die Potenzmenge und das Komplement

Definition 7

(1) Die Teilmengen $A \subset M$ einer gegebenen Menge M bilden ebenfalls eine Menge, die **Potenzmenge** $\mathcal{P}(M) := \{A : A \subset M\}$ *von M. Es gilt immer: $\emptyset \in \mathcal{P}(M)$ und $M \in \mathcal{P}(M)$.*

(2) Auf der Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ können wir eine weitere Operation definieren, das Komplement *einer Teilmenge. Ist $N \in \mathcal{P}(M)$, so ist auch das* **Komplement** $\overline{N} := M \setminus N \in \mathcal{P}(M)$ *von N eine Teilmenge von M.*

Beispiel 11. Sei $M = \{1, 2, 3\}$. (a) Dann ist $\mathcal{P}(M) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$. (b) In $\mathcal{P}(M)$ ist $\overline{\{1, 2\}} = \{3\} \subset M$.

Bemerkung. Möchte man die Obermenge M mitnotieren, schreibt man für das Komplement oft auch $\complement_M N$ anstelle von $\overline{N}$.

2.4 Aussagen über Vereinigungen und Durchschnitte

Satz 4

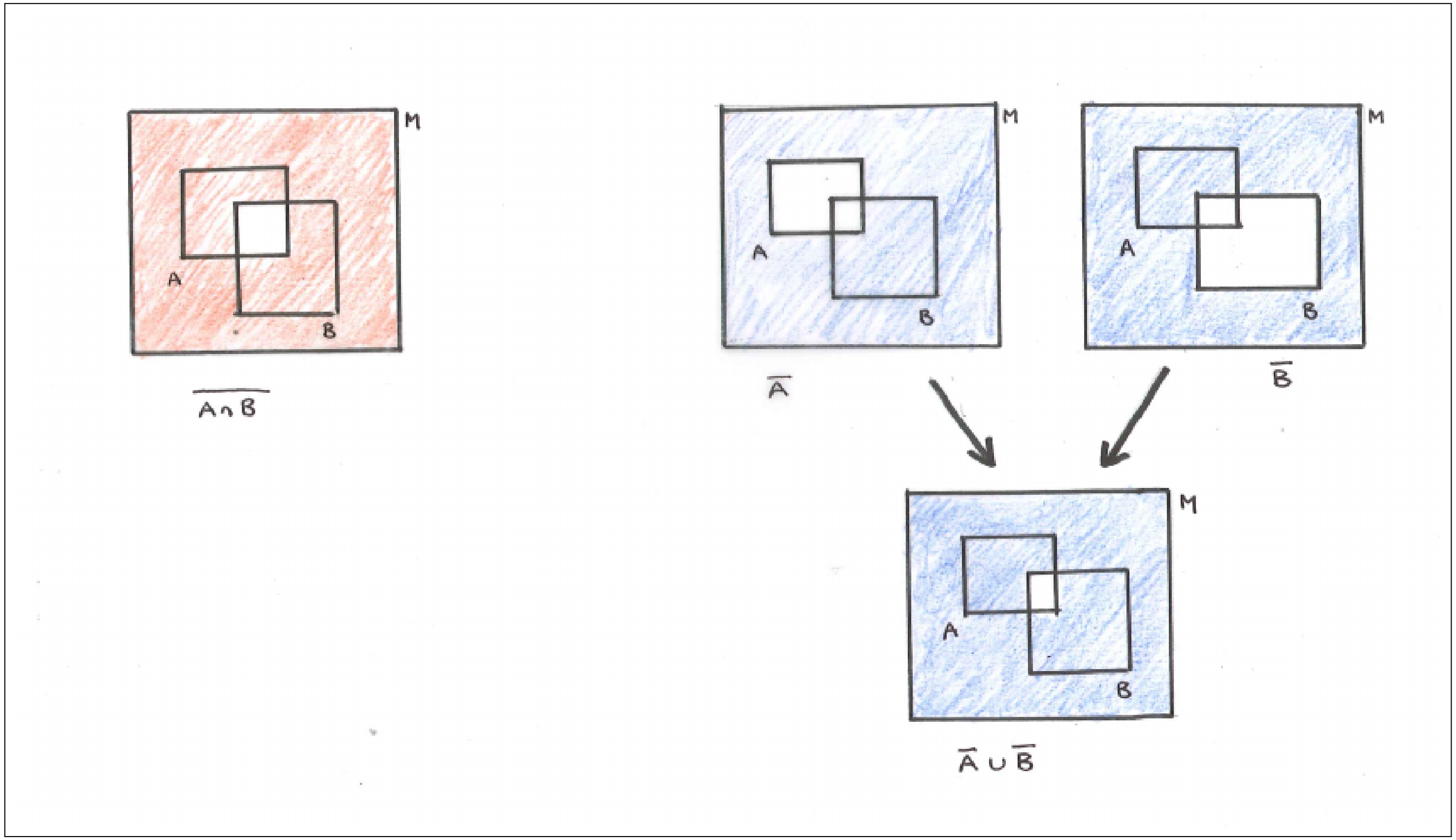
Für Mengen A, B, C gilt:

1. *Kommutativität:*
   i. $A \cap B = B \cap A$
   ii. $A \cup B = B \cup A$
2. *Assoziativität:*
   i. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
   ii. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
3. *Distributivität:*
   i. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
   ii. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
4. *Für Teilmengen $A, B \subset M$ einer gemeinsamen Obermenge M gilt:*
   i. $\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$
   ii. $\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$

Die Aussagen über Komplemente werden auch de Morgansche Regeln genannt.

Bemerkung. Vergleichen Sie diesen Satz mit Satz 3.

2.4 Ein Beweis von Satz 4.4i mit Venn-Diagrammen



2.5 Kartesische Produkte von Mengen

Definition 8

Sind M und N zwei Mengen, so heißt die Menge aller **geordneten Paare**

$$M \times N := \{(x, y) : x \in M, y \in N\}$$

das **kartesische Produkt** *der Mengen M und N. Kartesische Produkte kann man auch von mehr als zwei Mengen bilden. Sind n Mengen $M_1, M_2, ..., M_n$ gegeben, so bilden die geordneten n-Tupel das kartesische Produkt*

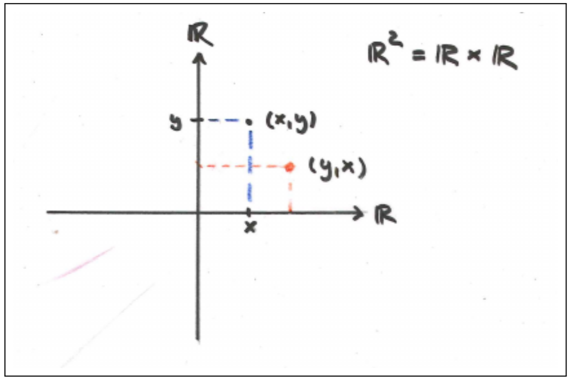
$$M_1 \times ... \times M_n := \{(x_1, x_2, ..., x_n) : x_i \in M_i\}$$

der Mengen $M_1, ..., M_n$. Sind die Mengen gleich, d.h. gilt $M_i = M$, $i = 1, ..., n$, so schreiben wir $M^n = M \times ... \times M$.

2.5 Kartesische Produkte von Mengen – Beispiele

Bemerkung. Geordnete n-Tupel bedeutet, dass die Reihenfolge der Einträge wichtig ist. Insbesondere sind zwei Tupel $(x_1, \ldots, x_n)$ und $(y_1, \ldots, y_n)$ genau dann gleich, wenn $x_i = y_i$ ist für alle $i = 1, \ldots, n$. Kartesische Produkte und insbesondere die Tatsache, dass die Tupel geordnet sein sollen, haben ihre Anwendung bei allen Arten von Koordinatensystemen.

Beispiel 12. Die geordneten Paare $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ kann man sich gut als Koordinaten in der Ebene vorstellen. Dabei ist x die $x-$Koordinate des Punktes und y die $y-$Koordinate. Da die Koordinaten (x, y) und (y, x) unterschiedliche Punkte der Ebene bezeichnen, entsprechen die Punkte der Ebene geordneten Tupeln.



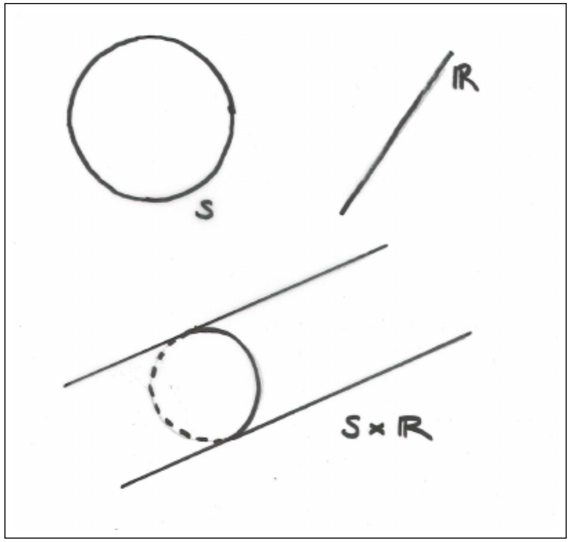
Lehrstuhl A für Mathematik

RWTH AACHEN UNIVERSITY

Beispiel 13. Ist $S := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ ein Kreis und $\mathbb{R}$ die Zahlengerade, so können wir uns das kartesische Produkt

$$S \times \mathbb{R} := \{(x,y,t) \,:\, (x,y) \in S, t \in \mathbb{R}\}$$

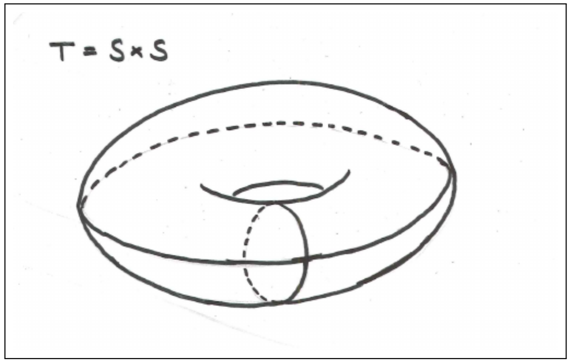
als (unendlich ausgedehnten) Zylinder vorstellen.



Lehrstuhl A für Mathematik
RWTH AACHEN UNIVERSITY

2.5 Kartesische Produkte von Mengen – Beispiele

Das kartesische Produkt $S \times S$ zweier Kreise können wir uns wie einen Torus vorstellen.



Beispiel 14. Das kartesische Produkt der endlichen Mengen $M = \{a, b\}$ und $N = \{1, 2\}$ ist $M \times N = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2)\}$. Ist $M = \{a, b, ..., h\}$ und $N = \{1, 2, ..., 8\}$, so entsprechen die Elemente von $M \times N$ genau den Feldern eines Schachbretts.

2.6 Abbildungen

Definition 9

Sind M und N Mengen, dann ist eine **Abbildung** $f : M \to N$ *von M nach N eine Vorschrift, die jedem Element $x \in M$ genau ein Element $f(x) \in N$ zuordnet.*

(1) M heißt **Definitionsbereich**, *N* **Zielbereich** *der Abbildung f.*

(2) $f(x)$ heißt **Bild von x**.

(3) Für eine Teilmenge $A \subset N$ heißt $f^{-1}(A) := \{x \in M : f(x) \in A\} \subset M$ das **Urbild** *von A. Für das Urbild eines Punktes schreiben wir oft kurz $f^{-1}(y)$, anstatt $f^{-1}(\{y\})$.*

(4) $f(M) = \{y \in N : \exists_{x \in M} : y = f(x)\} \subset N$ heißt **Bild von f** *oder* **Wertebereich**.

Zur Angabe einer Abbildung sind immer alle drei Daten erforderlich: Definitionsbereich, Zielbereich und Abbildungsvorschrift. Zwei Abbildungen sind genau dann gleich, wenn alle drei Daten übereinstimmen.

Lehrstuhl A für Mathematik
RWTH AACHEN UNIVERSITY

2.6 Abbildungen

Bemerkung. (a) Die Abbildungsvorschrift **x wird f(x) zugeordnet**, schreiben wir oft als $x \mapsto f(x)$. (b) Wenn nur die Abbildungsvorschrift angegeben wird (was oft vorkommt), wird von Ihnen erwartet, dass Sie den *maximalen* Definitionsbereich benutzen, nachdem Sie ihn selbst bestimmt haben. Zum Beispiel bedeutet eine Angabe

$$x \mapsto \frac{1}{1-x^2},$$

dass der Definitionsbereich $M = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ genommen werden soll.

Beispiel 15. (a) $\mathrm{id}_M : M \to M$ mit $x \mapsto \mathrm{id}_M(x) = x$ heißt die **identische Abbildung** oder **Identität** auf M. (b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto x^2$ ist eine Abbildung, genauso wie alle anderen Funktionen, die Sie aus der Schule kennen. (c) $g_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{x}$ ist **keine** Abbildung, da man aus einer negativen reellen Zahl keine Wurzel ziehen kann. $g_2 : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{x}$ ist hingegen eine Abbildung.

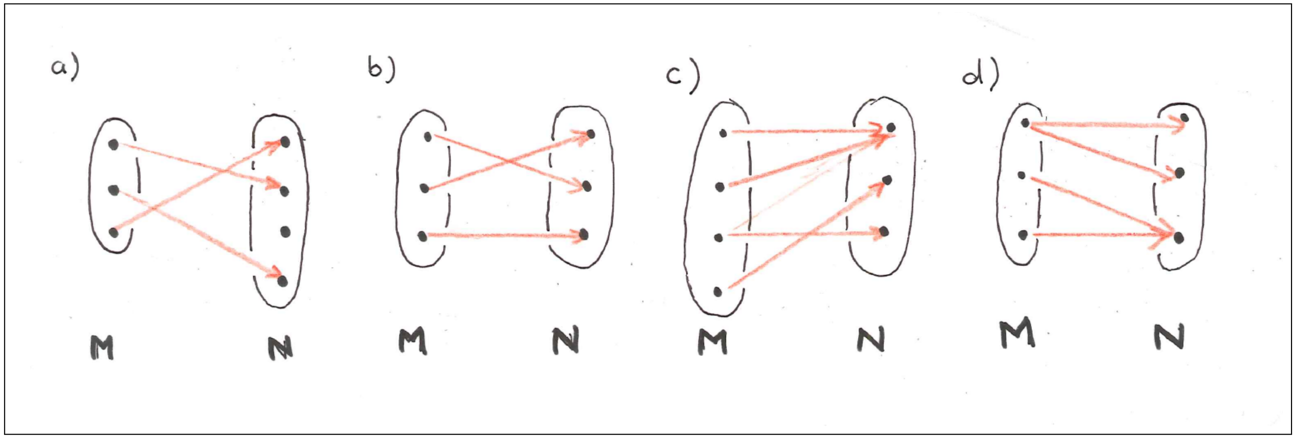
Definition 10

Sei $f : M \to N$ eine Abbildung.

(1) f heißt **injektiv**, *falls das Urbild $f^{-1}(y)$ für alle $y \in N$ entweder leer ist, oder nur aus einem Punkt besteht.*

(2) f heißt **surjektiv**, *falls $f(M) = N$, d.h. für alle $y \in N$ gibt es ein $x \in M$ mit $f(x) = y$.*

(3) f heißt **bijektiv**, *falls f injektiv und surjektiv ist.*



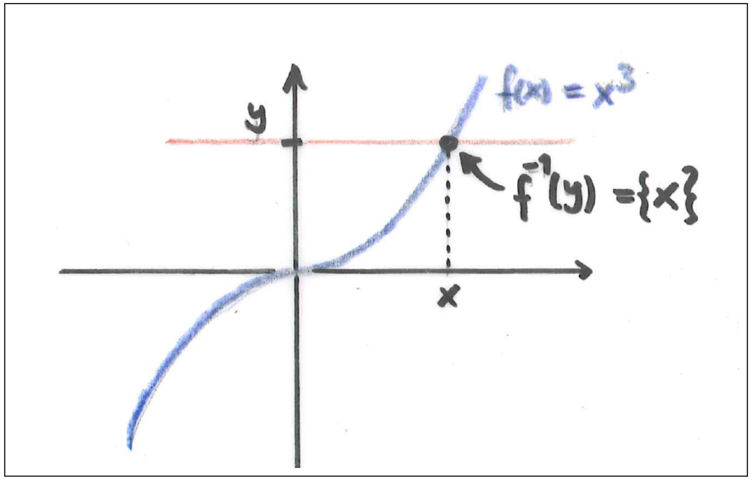
(a) injektiv, (b) bijektiv, (c) surjektiv (d) keine Abbildung

Lehrstuhl A für Mathematik
RWTH AACHEN UNIVERSITY

2.6 Abbildungen – Injektivität, Surjektivität, Bijektivität

Wir betrachten Beispiele von Funktionen, um die Abbildungseigenschaften zu erläutern.

Beispiel 16. Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3$ ist bijektiv. In der Grafik erkennen wir das dadurch, dass der Graph der Funktion mit jeder Parallelen zur $x-$Achse genau einen Schnittpunkt hat.



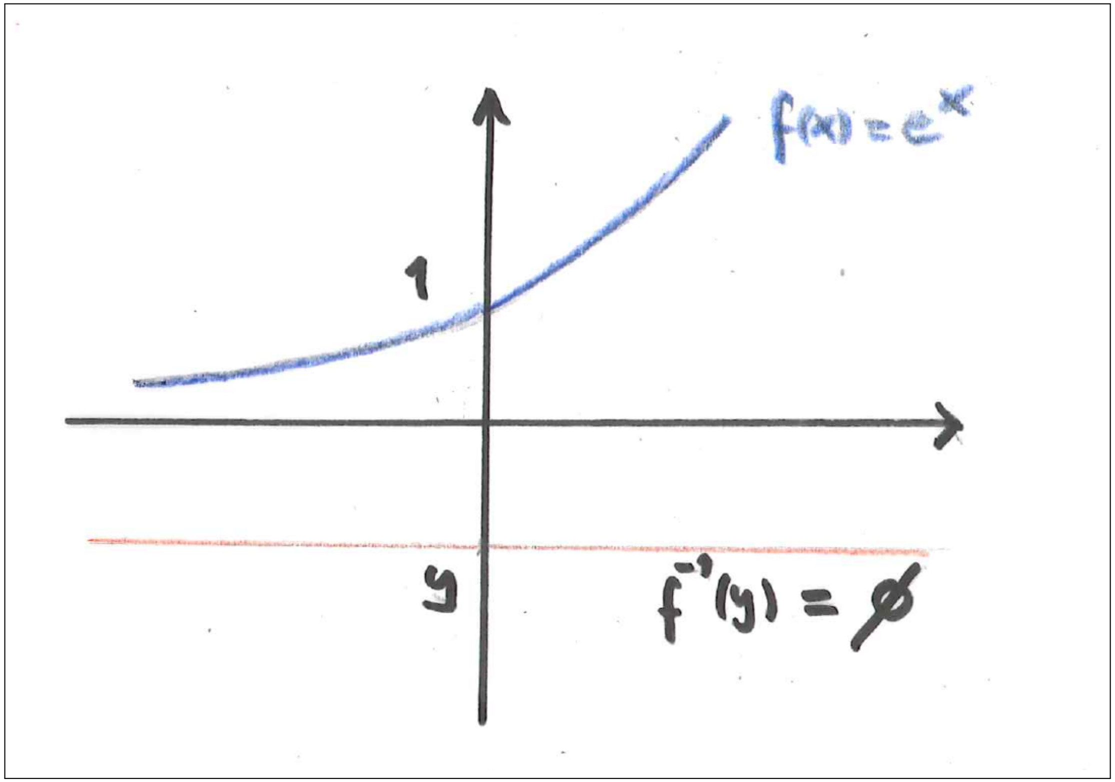
Bemerkung. Eine Abbildung $f : M \to N$ ist genau dann injektiv, wenn gilt:

$$\forall_{x,x' \in M} : (f(x) = f(x')) \Rightarrow (x = x').$$

Lehrstuhl A für Mathematik

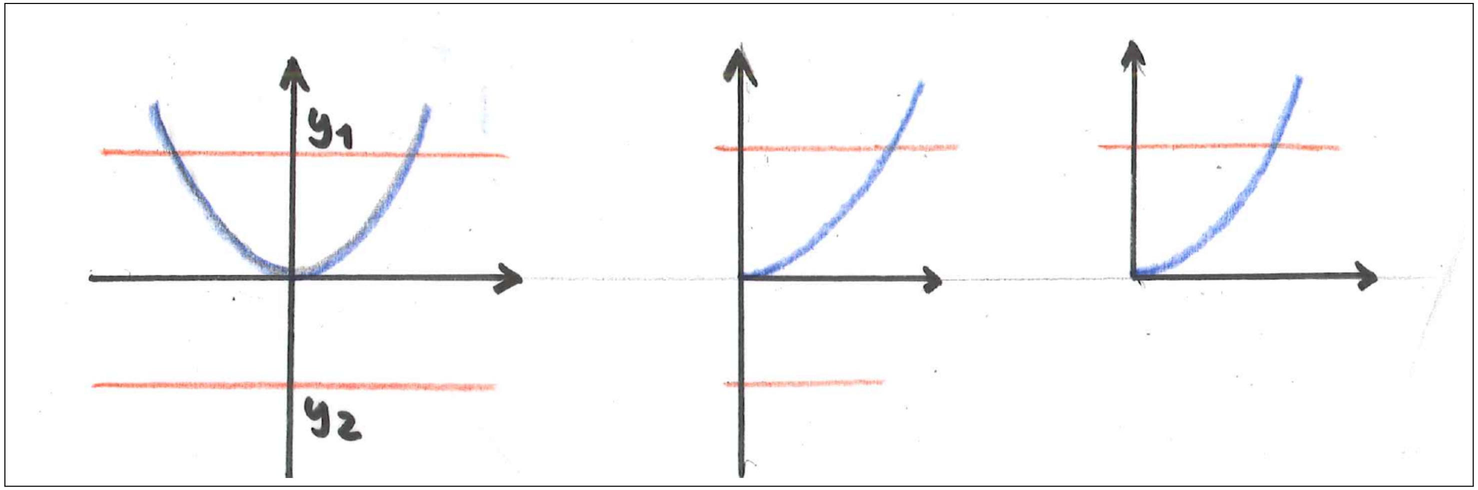
RWTH AACHEN UNIVERSITY

Beispiel 17. Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto e^x$ ist injektiv, aber nicht surjektiv. Wegen $e^x > 0$ ist die Urbildmenge $f^{-1}(y) = \emptyset$ leer für alle $y \leq 0$.



2.6 Abbildungen – Injektivität, Surjektivität, Bijektivität

Beispiel 18. Bei fester Abbildungsvorschrift können wir durch Veränderung des Definitions- und Zielbereiches oft die Eigenschaften der Funktion verändern.
(a) $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ ist weder injektiv noch surjektiv.
(b) $f_2 : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ ist injektiv, aber nicht surjektiv.
(c) $f_3 : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$, $f(x) = x^2$ ist injektiv und surjektiv.



Lehrstuhl A für Mathematik | RWTH AACHEN UNIVERSITY

Definition 11

Sind $f : M \to N$ und $g : N \to L$ Abbildungen, so ist die **Hintereinanderausführung** *oder* **Komposition** *$g \circ f$ dieser Abbildungen eine Abbildung*

$$g \circ f : M \to L$$

mit $g \circ f(x) := g(f(x))$.

Beispiel 19. (a) Die Funktion $f : \{x \in \mathbb{R} : x \geq -b\} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto \sqrt{x+b}$ ist die Komposition $h \circ g$ der Funktionen $g : \{x \in \mathbb{R} : x \geq -b\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x + b$ und $h : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$, $u \mapsto \sqrt{u}$. (b) $f : \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{1-x^2}$ ist die Komposition $h \circ g$ der Funktionen $g : \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 1 - x^2$ und $h : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $u \mapsto \frac{1}{u}$.

Bemerkung. (a) Um eine Hintereinanderausführung zu definieren, reicht es aus, dass das Bild $f(M) \subset N$ ist. (b) Solche Zerlegungen sind oft sehr hilfreich, zum Beispiel um mit Hilfe der Kettenregel die Ableitungen einer Funktion zu bestimmen.

Lehrstuhl A für Mathematik RWTH AACHEN UNIVERSITY

2.6 Abbildungen – Die Umkehrabbildung

Bijektive Abbildungen kann man umkehren. Der Grund dafür ist folgende Tatsache.

Satz 5

Sei $f : M \to N$ eine Abbildung. Ist $f : M \to N$ bijektiv, so gibt es zu jedem $y \in N$ genau ein $x \in M$ mit $f(x) = y$.

Beweis. Sei $y \in N$. Da f injektiv ist, ist $f^{-1}(y)$ entweder die leere Menge oder eine Menge $\{x\}$, die aus einem Element $x \in M$ besteht. Da f surjektiv ist, kann $f^{-1}(y)$ nicht leer sein. □

Definition 12

Durch die Vorschrift $y \mapsto x$, wobei x das eindeutige Urbild von y unter der Abbildung f ist, erhalten wir eine Abbildung $g : N \to M$ mit

$$f \circ g(y) = f(g(y)) = f(x) = y, \; g \circ f(x) = g(f(x)) = g(y) = x,$$

d.h. $f \circ g = \mathrm{id}_N$ und $g \circ f = \mathrm{id}_M$. In diesem Fall nennen wir g die **Umkehrabbildung** *von f und schreiben oft auch $g = f^{-1}$.*

Lehrstuhl A für Mathematik
RWTH AACHEN UNIVERSITY

2.7 Die Umkehrabbildung – Beispiele

Beispiel 20. Ist f selbst nicht bijektiv, aber injektiv, so kann man folgende Konstruktion machen:

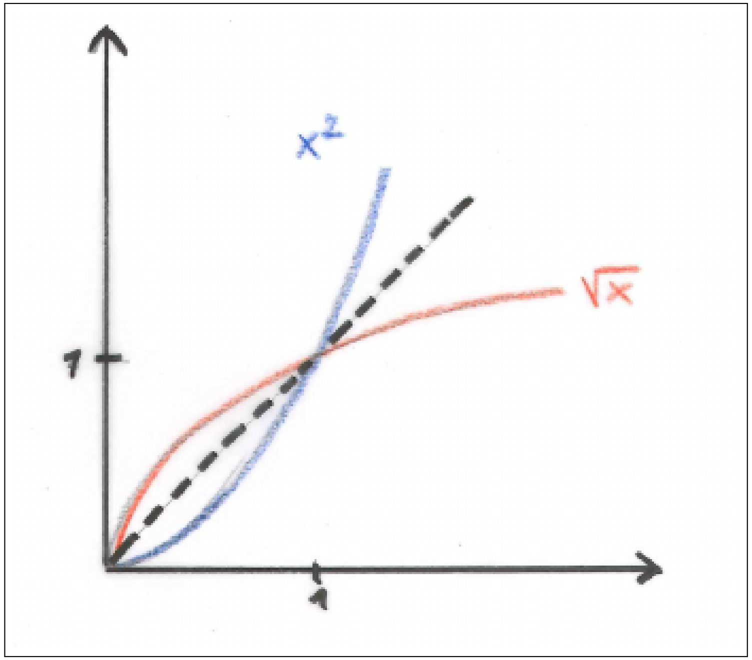
1. f bleibt eine Abbildung, wenn wir den Wertebereich auf das Bild von f einschränken, d.h. wenn wir dieselbe Abbildungsvorschrift als eine Abbildung $f : M \to f(M)$ betrachten.
2. $f : M \to f(M)$ ist immer surjektiv.
3. Falls $f : M \to N$ *injektiv* ist, so ist $f : M \to f(M)$ sogar bijektiv.
4. Die Abbildung $f : M \to f(M)$ besitzt also eine Umkehrabbildung $f^{-1} : f(M) \to M$.

Ein Beispiel hierfür haben wir bereits gesehen. Die Abbildungsvorschrift $x \mapsto x^2$ ergibt laut Beispiel 18 eine injektive Funktion, wenn wir Sie als Funktion $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ betrachten. Sie ist bijektiv als Funktion $f : \mathbb{R}_0^+ \to f(\mathbb{R}_0^+) = \mathbb{R}_0^+$.

Lehrstuhl A für Mathematik RWTH AACHEN UNIVERSITY

2.7 Die Umkehrabbildung – Beispiele

Beispiel 21. $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$, $x \mapsto x^2$ ist bijektiv. Die Umkehrfunktion $f^{-1} : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$, $x \mapsto \sqrt{x}$ ist die **Quadratwurzel**.



Dies lässt sich für beliebige $n \in \mathbb{N}$ verallgemeinern.

2.7 Die Umkehrabbildung – Beispiele

Für alle $n \in \mathbb{N}$ sind die Funktionen $f_n : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$, $x \mapsto x^n$ bijektiv.

Definition 2

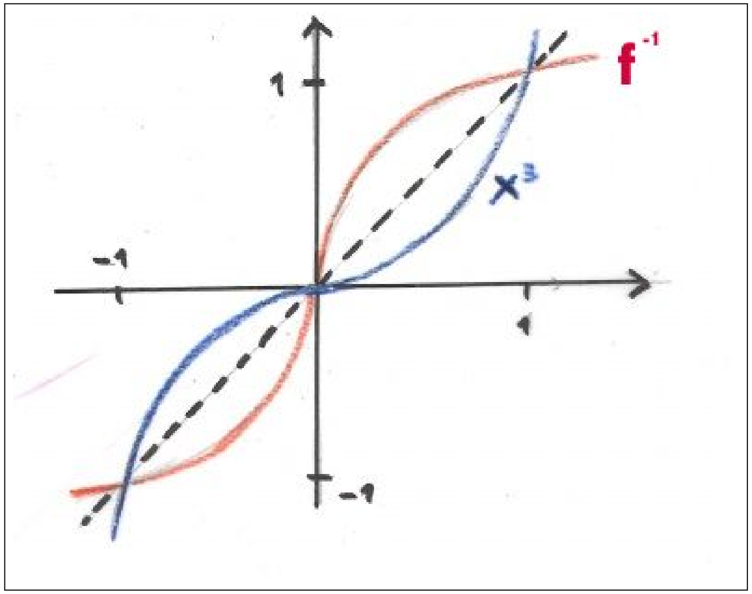
Die Umkehrfunktionen $f_n^{-1} : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ heißen die **n-ten Wurzeln** und ihre Abbildungsvorschrift wird mit $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ bezeichnet.

Bemerkung. Beachten Sie hier, dass die Wurzelfunktionen nur für nicht-negative reelle Zahlen definiert wurden. Dies ist eine Konvention, für die wir uns in diesem Fall entschieden haben. Das man das auch anders sehen könnte, zeigt das folgende Beispiel, welches analog mit jedem ungeraden $n \in \mathbb{N}$ durchführbar ist.

Lehrstuhl A für Mathematik
RWTH AACHEN UNIVERSITY

Beispiel 22. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3$ ist bijektiv. Die Umkehrfunktion $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ können wir mit Hilfe der **dritten Wurzel** aus Definition 2 ausdrücken durch

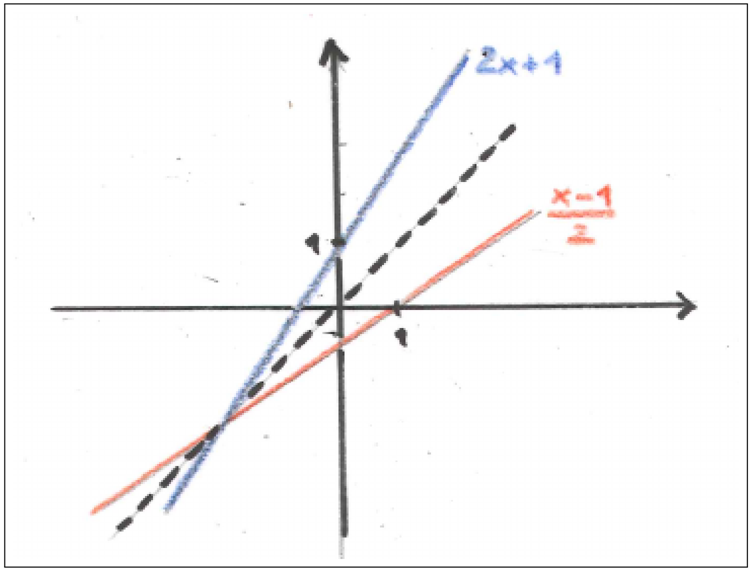
$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x} & , x \geq 0 \\ -\sqrt[3]{-x} & , x < 0 \end{cases} .$$



Lehrstuhl A für Mathematik RWTH AACHEN UNIVERSITY

2.7 Die Umkehrabbildung – Beispiele

Beispiel 23. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 2x + 1$ ist bijektiv. Die Umkehrfunktion $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist gegeben durch die Vorschrift $x \mapsto \frac{x-1}{2}$.



Beispiel 24. Der Graph der Umkehrfunktion ist immer der an der Winkelhalbierenden gespiegelte Graph der Ausgangsfunktion.

Lehrstuhl A für Mathematik RWTH AACHEN UNIVERSITY

3.1 Natürliche und ganze Zahlen

Wir verwenden die Konvention, dass die **natürlichen Zahlen**

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, ...\}$$

die Null nicht enthalten. Der Grund ist, dass die Null in Ihrer heutigen Form (in den meisten Quellen) über 1500 Jahre später als die anderen Zahlen in Gebrauch kam (in Europa erst ungefähr ab dem 13. Jahrhundert). Wenn wir die Null dazurechnen wollen, sprechen wir von den nichtnegativen ganzen Zahlen und schreiben

$$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\} = \{0, 1, 2, 3, ...\}.$$

Die **ganzen Zahlen** bestehen aus den natürlichen Zahlen, der Null und den negativen ganzen Zahlen, d.h.

$$\mathbb{Z} = \{... - 3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}.$$

Lehrstuhl A für Mathematik RWTH AACHEN UNIVERSITY

3.2 Teilbarkeit und Primzahlen

Die Eigenschaften der natürlichen Zahlen sind kein spezieller Teil des Vorkurses. Wir wollen aber anhand eines Beispieles verschiedene Beweisstrategien vorführen. Dazu benötigen wir vorher etwas Wissen über Teilbarkeit und Primzahlen.

Definition 13

Wir sagen eine natürliche Zahl m ist ein **Teiler** *der natürlichen Zahl n (kurz $m|n$), wenn es eine weitere natürliche Zahl b gibt mit $n = mb$. Insbesondere ist wegen $b \geq 1$ jeder Teiler m von n eine Zahl zwischen 1 und n.*

Definition 14

Eine **Primzahl** *ist eine natürliche Zahl $z \geq 2$, die nur durch 1 und durch sich selbst teilbar ist. Wir bezeichnen die Menge der Primzahlen mit $\mathbb{P}$.*

Bemerkung. (a) 1 ist Teiler jeder natürlichen Zahl. (b) 2 ist Teiler jeder *geraden* Zahl. (c) Die ersten Primzahlen sind $2, 3, 5, 7, 11, 13, \ldots$. Alle geraden Zahlen, die größer als zwei sind, sind zusätzlich zur 1 und sich selbst auch noch durch 2 teilbar, also keine Primzahlen. $9 = 3 \cdot 3$ ist durch 3 teilbar, also auch keine Primzahl.

Lehrstuhl A für Mathematik
RWTH AACHEN UNIVERSITY

3.2 Teilbarkeit und Primzahlen – Ein Hilfssatz

Wie gesagt, möchten wir die Beweisstrategien des direkten und des indirekten Beweises an einer Beispielaussage über natürliche Zahlen erläutern. Dazu benötigen wir als Vorbereitung die folgende Hilfsaussage.

Satz 6

Ist l ein Teiler von m und m ein Teiler von n, so ist auch l ein Teiler von n.

Beweis. Wegen $l|m$ gibt es ein $a \in \mathbb{N}$ mit $la = m$ und wegen $m|n$ gibt es ein $b \in \mathbb{N}$ mit $mb = n$. Damit ist aber

$$l(ab) = (la)b = mb = n$$

und da das Produkt ab zweier natürlicher Zahlen wieder eine natürliche Zahl ist, ist auch l ein Teiler von n. $\square$

Bemerkung. Den Beweis von Satz 6 würde man als **direkten Beweis** bezeichnen. Dazu aber gleich mehr.

3.3 Beweise – Zwei grundlegende Beweisstrategien

Es gibt zwei grundlegende Beweisstrategien, den **direkten** und den **indirekten** Beweis. Beim direkten Beweis wird die Aussage durch direkte Folgerungen aus bekannten Voraussetzungen hergeleitet. Beim indirekten Beweis werden äquivalente Aussagen bewiesen, oft wird das Gegenteil der Aussage angenommen und bewiesen, dass es auf falsche Folgerungen führt, getreu dem Grundsatz *...when you have eliminated the impossible, whatever remains, however improbable, must be the truth...* (Sherlock Holmes zu Dr. Watson in *The Sign of the Four* (1890), ch. 6).

Als Beispiel zur Illustration der beiden Beweisstrategien benutzen wir:

Satz 7

Jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit $n > 1$ besitzt einen Teiler $p \in \mathbb{P}$, der eine Primzahl ist.

Bemerkung. (a) Natürlich gibt es Varianten dieser beiden Beweisstrategien und oft sind die Übergänge fließend. (b) Aus Satz 7 folgt, dass jede natürliche Zahl $n > 1$ ein Produkt von Primzahlen ist. Aber das nur nebenbei.

Lehrstuhl A für Mathematik
RWTH AACHEN UNIVERSITY

3.3 Beweise – Ein direkter Beweis

Den folgenden Beweis würde man als direkten Beweis bezeichnen. Er ist sogar **konstruktiv** insofern, als dass eine Methode angegeben wird, einen der gesuchten Primzahlteiler zu bestimmen.

Beweis von Satz 7. Ist $t \in \mathbb{N}$ ein Teiler von n, so ist notwendigerweise $1 \leq t \leq n$ und da $n > 1$ immer sich selber teilt, gibt es auf jeden Fall einen Teiler $t \in \mathbb{N}$ von $\mathbb{N}$, der größer als 1 ist.

Wir nehmen nun den kleinsten derartigen Teiler t^*, d.h. die kleinste natürliche Zahl mit $t^* > 1$ und $t^* | n$. t^* ist dann automatisch eine Primzahl, denn wäre $1 < a < t^*$ ein Teiler von t^*, so wäre (nach Satz 6 und nur deswegen haben wir diesen Hilfssatz vorher bewiesen) a auch ein Teiler von n, der kleiner als t^* ist.

Also ist t^* nur durch 1 und durch sich selbst teilbar und somit $t^* \in \mathbb{P}$. $\square$

3.3 Beweise – Ein indirekter Beweis

Den folgenden Beweis würde man als indirekten Beweis bezeichnen. Er beruht darauf, aus der Annahme des Gegenteils der Behauptung die Existenz einer Zahl n^* zu folgern, deren Eigenschaften widersprüchlich sind.

Beweis von Satz 7. Wir nehmen an, die Aussage sei falsch. Dann gibt es eine kleinste natürliche $n^* \in \mathbb{N}$, $n^* > 1$ die keinen Teiler besitzt, der eine Primzahl ist.

Damit kann aber n^* keinen Teiler außer 1 und sich selbst besitzen, denn dieser Teiler t wäre kleiner als n^* und besäße somit nach Definition von n^* einen Teiler p, der eine Primzahl ist. Damit würde die Primzahl p (wieder nach Satz 6) aber auch n^* teilen, was nach Definition ausgeschlossen ist.

Also besitzt n^* nur die Teiler 1 und n^* und ist somit selber eine Primzahl im Widerspruch dazu, dass n^* nicht von einer Primzahl geteilt wird. Damit kann es keine solche kleinste Zahl n^* geben. Die Annahme, dass die Aussage des Satzes falsch ist, führt also auf einen Widerspruch. Damit muss die Aussage richtig sein. $\square$

3.3 Beweise – Eine Warnung

Die Annahme des Gegenteils in indirekten Beweisen ist nicht ganz ohne. Insbesondere können logisch einwandfreie Argumente unter falschen Annahmen zu falschen Schlüssen führen. Dies zeigt folgender **falscher** Beweis.

Wir zeigen: 1 ist die größte natürliche Zahl.

Beweis. Angenommen, es gibt eine größte natürliche Zahl n^*. Ist $n^* > 1$, so ist $(n^*)^2 > n^*$ im Widerspruch dazu, dass n^* die größte natürliche Zahl ist. Also kann n^* nur gleich 1 sein. $\square$

Der Beweis an sich ist vollkommen in Ordnung. Der Fehler ist die Annahme, dass es eine größte natürliche Zahl gibt.

Lehrstuhl A für Mathematik
RWTH AACHEN UNIVERSITY

3.4 Rationale und Reelle Zahlen

Die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{N}_0$ sind bezüglich Subtraktion und Division nicht abgeschlossen. Die ganzen Zahlen sind bezüglich Division nicht abgeschlossen.

Dagegen sind die **reellen Zahlen** $\mathbb{R}$ und die **rationalen Zahlen (Brüche)**

$$\mathbb{Q} := \left\{ x \in \mathbb{R} \,:\, \exists_{p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}} \,:\, x = \frac{p}{q} \right\}$$

gegenüber diesen Operationen abgeschlossen. Die Rechenoperationen in diesen beiden Zahlbereichen wird eindeutig festgelegt durch die folgende wichtige Eigenschaft:

Satz 8

$\mathbb{R}$ *und* $\mathbb{Q}$ *bilden einen* **Körper**.

Wir erklären jetzt, was das bedeutet.

3.4 Rationale und Reelle Zahlen – Die Körperaxiome

Die rationalen und die reellen Zahlen bilden einen **Körper**. Alle elementaren Rechengesetze und weitere Eigenschaften der reellen bzw. rationalen Zahlen können aus den folgenden Axiomen, den Körperaxiomen, hergeleitet werden.

Definition 15

Eine Menge $\mathbb{K}$ *mit der Eigenschaft, dass zu je zwei Zahlen* $x, y \in \mathbb{K}$

eine **Summe** $x + y \in \mathbb{K}$,

und ein **Produkt** $x \cdot y \in \mathbb{K}$

definiert ist, bildet einen **Körper**, *wenn die nachfolgend aufgelisteten Rechenregeln gelten. Der Vorgang der Summenbildung heißt* **Addition**, *der der Produktbildung* **Multiplikation**.

Lehrstuhl A für Mathematik RWTH AACHEN UNIVERSITY

3.4 Rationale und Reelle Zahlen – Die Körperaxiome für Addition

Die Rechenregeln für die Addition lauten:

(A.1) $x + y = y + x$ (Kommutativitätsgesetz)

(A.2) $x + (y + z) = (x + y) + z$ (Assoziativitätsgesetz)

(A.3) Es gibt ein Element $0 \in \mathbb{K}$ mit $0 + x = x$ für alle $x \in \mathbb{K}$. (**Nullelement**, bzw. **neutrales Element der Addition**)

(A.4) Zu jedem Element $x \in \mathbb{K}$ gibt es ein Element $(-x) \in \mathbb{K}$ mit $x + (-x) = 0$ (**Inverses Element der Addition**)

Bemerkung. Alle diese Rechenregeln für Addition haben Sie schon benutzt und Sie mögen sie als selbstverständlich ansehen. Das sind sie aber nicht. Die Formulierung der Körperaxiome sind gerade der Versuch, alle Zahlbereiche, in denen man wie gewohnt rechnen kann, auszuzeichnen.

3.4 Rationale und Reelle Zahlen – Die Körperaxiome für Multiplikation

Die Rechenregeln für die Multiplikation lauten:

(M.1) $x \cdot y = y \cdot x$ (Kommutativitätsgesetz)

(M.2) $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ (Assoziativitätsgesetz)

(M.3) Es gibt ein Element $1 \in \mathbb{K}$ mit $1 \neq 0$ und $1 \cdot x = x$ für alle $x \in \mathbb{K}$. (**Einselement**, bzw. **neutrales Element der Multiplikation**)

(M.4) Zu jedem Element $x \in \mathbb{K}$ mit $x \neq 0$ gibt es ein Element $x^{-1} \in \mathbb{K}$ mit $x \cdot x^{-1} = 1$ (**Inverses Element der Multiplikation**)

Multiplikation und Addition sind im folgenden Sinne verträglich:

(AM) $x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$ (Distributivgesetz)

Bemerkung. Um Klammern zu sparen, vereinbart man *Punktrechung vor Strichrechnung* (und lässt oft den Malpunkt einfach weg). Setzt man $a - b := a + (-b)$ und $a : b, \frac{a}{b} := ab^{-1}$, $b \neq 0$, dann sind in $\mathbb{K}$ die vier Grundrechenarten (bis auf Division durch 0) erklärt.

Lehrstuhl A für Mathematik RWTH AACHEN UNIVERSITY

3.4 Rationale und Relle Zahlen – Folgerungen aus den Körperaxiomen

Aus diesen wenigen Axiomen folgen alle weiteren Rechenregeln in Körpern. So auch die folgenden Tatsachen, welche Ihnen selbstverständlich erscheinen mögen, es aber eigentlich nicht sind:

Satz 9

(a) Das neutrale Element der Addition ist eindeutig, d.h. ist $n \in \mathbb{K}$ gegeben mit $a + n = a$ für alle $a \in \mathbb{K}$, so ist $n = 0$.

(b) Das neutrale Element der Multiplikation ist eindeutig, d.h. ist $e \in \mathbb{K}$ gegeben mit $e \cdot a = a$ für alle $a \in \mathbb{K}$, so ist $e = 1$.

(c) Das inverse Element der Addition ist eindeutig, d.h. ist $b \in \mathbb{K}$ gegeben mit $a + b = 0$, so ist $b = -a$.

(d) Das inverse Element der Multiplikation ist eindeutig, d.h. ist $a \neq 0$ und $b \in \mathbb{K}$ gegeben mit $a \cdot b = 1$, so ist $b = a^{-1}$.

Lehrstuhl A für Mathematik RWTH AACHEN UNIVERSITY

Beispiel 25. (a) Für $a, b \in \mathbb{K}$ hat die Gleichung $a+x = b$ eine eindeutig bestimmte Lösung $x \in \mathbb{K}$. Diese Lösung ist $x = (-a) + b$. Insbesondere ist $\mathbb{N}$ kein Körper, denn $5 + x = 2$ hat keine Lösung $x \in \mathbb{N}$.

(b) Für $a, b \in \mathbb{K}$ mit $a \neq 0$ hat die Gleichung $ax = b$ eine eindeutig bestimmte Lösung $x \in \mathbb{K}$. Diese Lösung ist $x = a^{-1}b$. Insbesondere ist $\mathbb{Z}$ auch kein Körper, denn $5x = 2$ hat keine Lösung $x \in \mathbb{Z}$.

(c) Jeden Bruch $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ kann man in der Form $\pm\frac{n}{m}$ schreiben mit $n \in \mathbb{N}_0$ und $m \in \mathbb{N}$.

(d) Der Bruch aus (c) heißt **vollständig gekürzt**, wenn n und m keinen gemeinsamen Teiler besitzen, d.h. es gibt kein $t \in \mathbb{N}$, $t > 1$ mit $t|m$ und $t|n$.

(e) Jeder Bruch kann vollständig gekürzt werden. Dieses Resultat werden wir ohne Beweis benutzen.

Lehrstuhl A für Mathematik
RWTH AACHEN UNIVERSITY

3.4 Rationale und Reelle Zahlen – Ein Beispiel

Eine der in konkreten Rechnungen sehr oft verwendeten Regeln ist:

Satz 10

In einem Körper ist ein Produkt genau dann Null, wenn einer der Faktoren Null ist

$$a \cdot b = 0 \Leftrightarrow (a = 0) \vee (b = 0).$$

Beweis: Wir zeigen die Äquivalenz, indem wir zunächst die eine und dann die andere Folgerung beweisen.

(1) $\Leftarrow$: Sei $a = 0$ oder $b = 0$. Da Multiplikation kommutativ ist (M.1), können wir ohne Einschränkung annehmen, dass $a = 0$ ist. Dann ist

$$ab = 0b \overset{(A.3)}{=} (0 + 0)b \overset{(AM)}{=} 0b + 0b.$$

Damit gilt nach (A.4) auch $0 = 0b + (-0b) = (0b + 0b) + (-0b) = 0b$. Also ist $ab = 0b = 0$.

Lehrstuhl A für Mathematik | RWTH AACHEN UNIVERSITY

Beweis. (2) $\Rightarrow$: Sei $ab = 0$ und wir nehmen an, es wäre $a \neq 0$ und $b \neq 0$. Dann gibt es nach (M.3) multiplikative Inverse a^{-1}, b^{-1} zu a bzw. b. Es folgt somit

$$0 = (b^{-1}a^{-1})0 = (b^{-1}a^{-1})(ab) = b^{-1}(a^{-1}a)b = b^{-1}1b = b^{-1}b = 1.$$

Da nach (M.3) $1 \neq 0$ sein muss, erhalten wir einen Widerspruch zu den Körperaxiomen. Dieser Widerspruch beruht auf der Annahme, dass gleichzeitig a und b ungleich Null sind. Also ist diese Annahme falsch, und entweder a oder b muss gleich Null sein. $\square$

3.4 Rationale und Reelle Zahlen – Die Beziehung zwischen $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$

Die *rationalen Zahlen* $\mathbb{Q}$ bilden eine echte Teilmenge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$. Die Zahlen in $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ heißen **irrationale Zahlen**.

1. Rationale Zahlen werden durch endliche oder periodische Dezimalzahlen dargestellt

$$\frac{1}{4} = 0.25, \frac{1}{6} = 0.1\overline{6}$$

2. Irrationale Zahlen besitzen eine unendliche, nicht periodische Dezimaldarstellung. Beispiele sind

$$\sqrt{2} = 1.4142135..., \pi = 3.1415926..., e = 2.7128...$$

Bemerkung. Der Unterschied zwischen den beiden Körpern besteht darin, dass im Gegensatz zu den rationalen, die reellen Zahlen **vollständig** sind. Was das bedeutet, wird Ihnen im Teil über Analysis erklärt.

3.4 Rationale und Reelle Zahlen – Ein weiterer Beweis durch Widerspruch

Wir beweisen nun, dass $\sqrt{2}$ eine irrationale Zahl ist. Damit ist $\mathbb{Q}$ eine echte Teilmenge von $\mathbb{R}$. Dies ist einer der bekanntesten Widerspruchsbeweise. Wir benötigen dazu eine Hilfsaussage, die wir bereits (als Satz 1) bewiesen haben: *Eine natürliche Zahl n ist genau dann gerade, wenn n^2 gerade ist.* Außerdem benutzen wir die Aussagen aus Beispiel 25, (c) – (e).

Satz 11

$\sqrt{2}$ ist eine irrationale Zahl.

Beweis. Angenommen $\sqrt{2} = n/m \in \mathbb{Q}$ mit $n, m \in \mathbb{N}$. Dann können wir wegen Beispiel 25 (e) annehmen, dass der Bruch vollständig gekürzt ist. Quadrieren der Gleichung und Umstellen ergibt $n^2 = 2m^2$. Also ist nach Satz 1 auch $n = 2l$ gerade. Einsetzen ergibt dann aber $n^2 = 4l^2 = 2m^2$ oder $m^2 = 2l^2$. Also ist nach Satz 1 auch m gerade. Der Bruch ist also nicht vollständig gekürzt im Widerspruch zur Annahme. Damit ist die Annahme falsch und $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. □

Lehrstuhl A für Mathematik
RWTH AACHEN UNIVERSITY

3.5 Potenzgesetze - Ganzzahlige Exponenten

Als Anwendung der Körpereigenschaften werden wir die Potenzgesetze für **reelle Basis** und **rationale Exponenten folgern**. Die allgemeine Gültigkeit der Potenzgesetze ist die Motivation für die Definition von Potenzen mit negativen bzw. rationalen Exponenten. Für Exponenten in $\mathbb{N}_0$ setzen wir:

Definition 16

Bei Exponenten $n \in \mathbb{N}_0$ und $a \in \mathbb{R}$ wird die **n-te Potenz** *wie folgt definiert:*

1. $a^0 := 1$ *für alle* $a \in \mathbb{R}$ *(insbesondere gilt* $0^0 = 1$*).*
2. $a^n := \underbrace{a \ldots a}_{n \text{ mal}}, \; n \in \mathbb{N}.$

Wir beweisen zunächst die Potenzgesetze in diesem Fall.

Lehrstuhl A für Mathematik RWTH AACHEN UNIVERSITY

3.5 Potenzgesetze - Exponenten in $\mathbb{N}_0$

Satz 12

Für $n, m \in \mathbb{N}_0$ und $a, b \in \mathbb{R}$ gilt:

1. $a^n\, a^m = a^{n+m}$,
2. $(a^n)^m = a^{(nm)}$,
3. $(ab)^n = a^n\, b^n$.

Beweis: (a) Aufgrund von (M.2) können wir jeweils die Klammern weglassen und erhalten für $n, m \geq 1$:

$$(1) \quad a^n\, a^m = \underbrace{(a...a)}_{\text{n mal}}\underbrace{(a...a)}_{\text{m mal}} = \underbrace{(a...a)}_{\text{n+m mal}} = a^{n+m}$$

$$(2) \quad (a^n)^m = \underbrace{(a^n)...(a^n)}_{\text{m mal}} = \underbrace{(a...a)}_{\text{nm mal}} = a^{(nm)}.$$

3.5 Potenzgesetze - Exponenten in $\mathbb{N}_0$

Sind n oder m gleich Null, so wird ersichtlich, warum $a^0 = 1$ gesetzt wurde. Denn wegen $a^0 a^m = 1 \cdot a^m = a^m = a^{0+m}, (a^0)^m = 1^m = 1 = a^0 = a^{(0 \cdot m)}$ gelten die Potenzgesetze auch in diesem Fall.

(b) Die dritte Gleichung folgt aus (M.2) und (M.1)

$$(ab)^n = \underbrace{(ab)...(ab)}_{\text{n mal}} = \underbrace{ab...ab}_{\text{n mal}} = \underbrace{(a...a)}_{\text{n mal}}\underbrace{(b...b)}_{\text{n mal}} = a^n b^n. \quad \square$$

3.5 Potenzgesetze - Ganzzahlige Exponenten

Definition 17

Für negative Exponenten $-n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}_0$ *und* $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *definieren wir:*

$$a^{-n} := \frac{1}{a^n}.$$

Bemerkung. Diese Definition ist kompatibel mit Satz 12 (1): Angenommen, wir können $1/a$ eine ganzzahlige Potenz zuordnen (d.h. $1/a = a^k$ mit $k \in \mathbb{Z}$), so dass Satz 12 (1) noch richtig ist. Dann ist $1 = a \cdot \frac{1}{a} = a^1\, a^k = a^{1+k}$ und wegen $1 = a^0$ ist somit notwendigerweise $k = -1$.
Die Potenzgesetze gelten genauso für ganzzahlige Exponenten:

Satz 13

Mit Definition 17 gilt für $n, m \in \mathbb{Z}$ *dieselbe Aussage wie in Theorem 12, wenn alle Ausdrücke links und rechts des Gleichheitszeichens definiert sind, d.h. wenn bei negativem Exponenten die Basis ungleich Null ist.*

Lehrstuhl A für Mathematik RWTH AACHEN UNIVERSITY

3.5 Potenzgesetze - Wurzelfunktionen

Wurzeln sind die Umkehrfunktionen zu ganzzahligen Potenzen. Wie wir bereits in den Beispielen 21 und 22 gesehen haben, besteht ein Unterschied zwischen den Umkehrfunktionen zu geradzahligen und zu ungeradzahligen Potenzen. Wir haben in Definition 2 nur die Wurzelfunktionen für nicht negative reelle Zahlen definiert. Dies hat mit der einfachen Erweiterbarkeit der Potenzgesetze zu tun.

Definition 18

Für Exponenten der Form $1/n$ mit $n \in \mathbb{N}$ und $a \in \mathbb{R}_0^+$ definieren wir:

$$a^{\frac{1}{n}} := \sqrt[n]{a}.$$

Bemerkung. Diese Definition ist ebenfalls kompatibel mit Satz 12 (2): Angenommen, wir können $\sqrt[n]{a}$ eine rationale Potenz zuordnen (d.h. $\sqrt[n]{a} = a^r$ mit $r \in \mathbb{Q}$), so dass Satz 12 (2) noch richtig ist. Dann ist $a = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n = \left(a^r\right)^n = a^{rn}$ und wegen $a = a^1$ ist somit notwendigerweise $r = 1/n$.

3.5 Potenzgesetze - Wurzeln und Rationale Exponenten

Nun definieren wir Potenzen mit rationalen Exponenten:

Definition 19

Für $r = p/q \in \mathbb{Q}$ und $a \in \mathbb{R}_0^+$ sei:

$$a^r := \left(\sqrt[q]{a}\right)^p ,$$

wobei wir beachten müssen, dass im Fall $r < 0$ (d.h. $p < 0$) die Basis a echt größer als Null sein muss.

Bemerkung. Diese Definition ist der Grund, warum die Wurzelfunktion nur für nicht-negative Zahlen definiert wird. Eine rationale Potenz a^r einer Zahl $a \in \mathbb{R}$ solllte nur vom Bruch $r \in \mathbb{Q}$ abhängen, d.h. egal, wie man diese genau definiert, sollte in jedem Fall $a^{1/3} = a^{2/6}$ gelten, da ja $1/3$ und $2/6$ dieselbe Bruchzahl darstellen. Mit Definition 19 würde sich aber die linke Seite für alle $a \in \mathbb{R}$ definieren lassen, die rechte Seite aber nur für $a \geq 0$.

Lehrstuhl A für Mathematik
RWTH AACHEN UNIVERSITY

3.5 Potenzgesetze - Rationale Exponenten

Mit diesen Definitionen gilt:

Satz 14

Mit Definition 10.4 gilt für alle $r, s \in \mathbb{Q}$ *und* $a, b \in \mathbb{R}_0^+$*:*

1. $a^r a^s = a^{r+s}$,
2. $(a^r)^s = a^{(rs)}$,
3. $(ab)^r = a^r b^r$,

wobei wiederum die Basen aller vorkommenden Potenzen mit negativem Exponenten echt positiv sein müssen.

Die Potenzgesetze für natürliche Exponenten lassen sich also ebenfalls sinngemäß auf rationale Exponenten übertragen.

Lehrstuhl A für Mathematik
RWTH AACHEN UNIVERSITY

3.5 Potenzgesetze - Reelle Exponenten

Bemerkung. Die Potenzgesetze lassen sich genausogut auf reelle Exponenten übertragen. Ohne Analysis, d.h. den Begriff der Konvergenz, können wir aber nicht einmal den Ausdruck a^x für $x \in \mathbb{R}$ definieren. Sie kennen aber aus der Schule eine Funktion, die genau durch einen solchen Ausdruck gegeben ist.

Beispiel 26. Die **e-Funktion** oder **Exponentialfunktion** $exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto e^x$ genügt der Funktionalgleichung

$$e^{x+y} = e^x \, e^y,$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$. Die Gleichung liefert die sinngemäße Erweiterungen der Potenzgesetze auf reelle Exponenten. Ohne dies an dieser Stelle genauer erklären zu können: Die Exponentialfunktion wird für reelle Werte genau so *definiert*, dass diese Gleichung richtig ist.

3.6 Die Anordnung auf $\mathbb{R}$

Wir wollen neben Gleichungen im folgenden Abschnitt auch Ungleichungen betrachten. Dazu müssen wir uns zuächst mit dem Konzept der Anordnung befassen:

Definition 20

Auf der Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen ist eine **Anordnung** $<$ *(***kleiner***) definiert, die folgenden Regeln genügt:*

(Q.1) *Für je zwei Zahlen $x, y \in \mathbb{R}$ gilt genau eine der Beziehungen $x < y, y < x, x = y$ (***Trichotomie***)*

(Q.2) *Aus $x < y$ und $y < z$ folgt $x < z$ (***Transitivität***)*

(Q.3) *Aus $x < y$ folgt $x + z < y + z$ für alle $z \in \mathbb{R}$ (***Monotonie der Addition***)*

(Q.4) *Aus $x < y$ und $0 < z$ folgt $xz < yz$ (***Monotonie der Multiplikation***)*

Wegen der Existenz einer solchen Anordnung heißt $\mathbb{R}$ ein **angeordneter Körper**

3.7 Die Anordnung auf $\mathbb{R}$ – Folgerungen

Mit Hilfe der Anordnung auf $\mathbb{R}$ können wir auch Relationen der Form **kleiner gleich**, bzw. **größer gleich** definieren.

Definition 21

Statt $x < y$ schreibt man auch $y > x$ (gelesen y größer x) und definiert:

$$x \leq y \;:\Leftrightarrow\; x < y \vee x = y,$$
$$x \geq y \;:\Leftrightarrow\; x > y \vee x = y.$$

Die so definierten Relationen heißen **kleiner gleich** bzw. **größer gleich**.

Definition 22

Für $x \in \mathbb{R}$ ist der **(absolute) Betrag** *definiert durch:*

$$|x| := \begin{cases} x & , x \geq 0 \\ -x & , x < 0 \end{cases}.$$

Lehrstuhl A für Mathematik RWTH AACHEN UNIVERSITY

3.8 Besondere Ausdrücke – Die Fakultät

Definition 23

Für $n \in \mathbb{N}_0$ ist $n!$ (lies: n Fakultät*) gegeben durch*

$$n! := \begin{cases} 1 & , n = 0 \\ 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n & , n \geq 1 \end{cases} .$$

Beispiel 27. (1) $n!$ ist die Anzahl der Möglichkeiten, n verschiedene Objekte in einer Reihenfolge anzuordnen. Für die Zahlen 1,2 und 3 gibt es zum Beispiel $3! = 6$ Möglichkeiten $123, 132, 213, 231, 312, 321$. (2) Um 8 Türme auf einem Schachbrett so zu positionieren, dass sie sich nicht gegenseitig schlagen können, gibt es $8!$ Möglichkeiten. (3) Sind $f^{(0)}(0) = f(0), f^{(1)}(0) = f'(0), f^{(2)}(0) = f''(0), \ldots, f^{(n)}(0)$ die ersten n Ableitungen einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ im Punkt $x_0 = 0$. Dann ist das **Taylorpolynom** von f gegeben durch

$$p_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

3.8 Besondere Ausdrücke – Der Binomialkoeffizient

Definition 24

Für $n, k \in \mathbb{N}_0$, $0 \leq k \leq n$ ist der Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$ (lies: n über k*) gegeben durch*

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

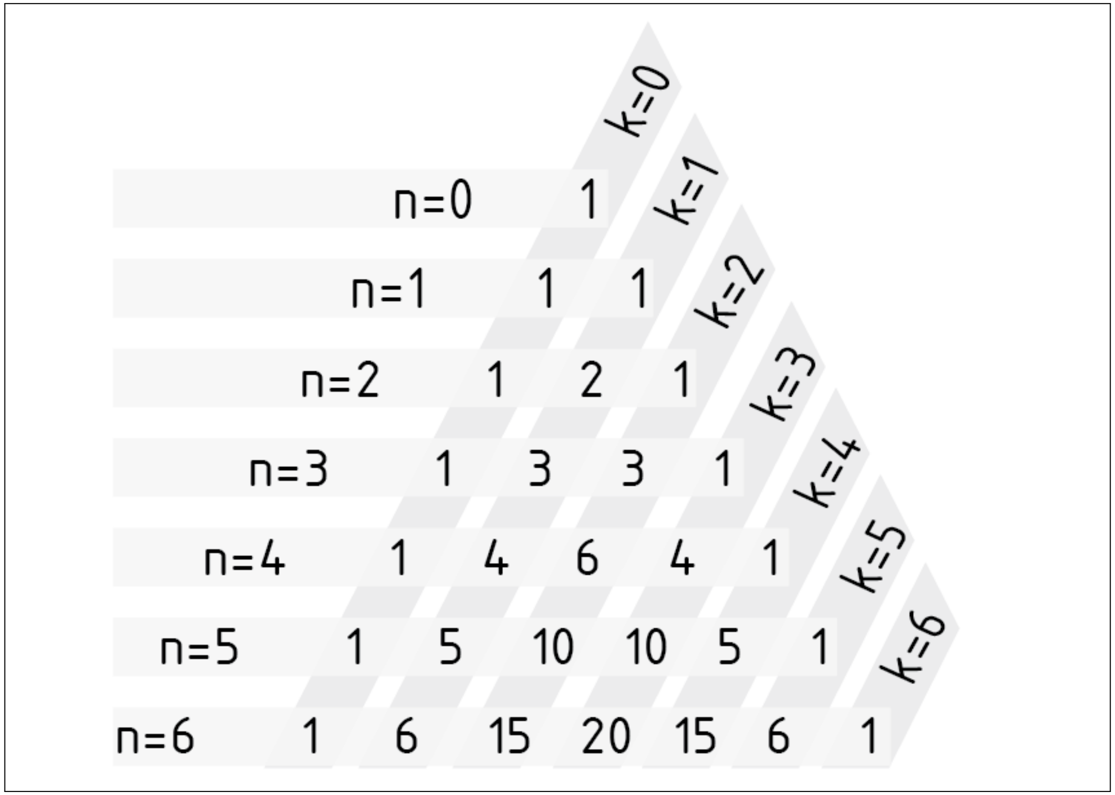
Beispiel 28. (a) Eine $n-$elementige Menge hat genau $\binom{n}{k}$ $k-$elementige Teilmengen. (b) Die Wahrscheinlichkeit beim Lotto 6 aus 49 sechs Richtige zu tippen, beträgt $\binom{49}{6}^{-1}$.

Satz 15

Für Binomialkoeffizienten gilt: $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$.

Lehrstuhl A für Mathematik RWTH AACHEN UNIVERSITY

3.8 Besondere Ausdrücke – Das Pascalsche Dreieck



Jede Zahl im Pascalschen Dreieck ist die Summe der beiden direkt darüber stehenden Zahlen. Aufgrund von Satz 11 sind die Einträge in Zeile n und Spalte k dieses Dreiecks die entsprechenden Binomialkoeffizienten.

Lehrstuhl A für Mathematik
RWTH AACHEN UNIVERSITY

3.9 Summen- und Produktzeichen

Wenn wir n Zahlen $a_1, \ldots, a_n$ gegeben haben, dann gibt es, um Schreibarbeit zu sparen, eine abkürzende Schreibweise für die Summe $a_1 + \ldots + a_n$ und das Produkt $a_1 a_2 \ldots a_n$ dieser Zahlen.

Definition 25

Sei I eine endliche Menge. Wir betrachten Zahlen a_i mit $i \in I$, d.h. jedem Element der Menge i wird eine Zahl zugeordnet. i heißt **Index** *und I* **Indexmenge**. *Wir schreiben dann $\sum_{i \in I} a_i$ für die* **Summe**, *und $\prod_{i \in I} a_i$ für das* **Produkt** *der Zahlen a_i mit $i \in I$.*

Beispiel 29. (1) Im Fall der Zahlen $a_1, \ldots, a_n$ ist die Indexmenge $I = \{1, 2, \ldots, n\}$ und wir schreiben auch

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i \in I} a_i = a_1 + \ldots + a_n, \quad \prod_{i=1}^{n} a_i = \prod_{i \in I} a_i = a_1 \, a_2 \ldots a_n.$$

(2) Die Formel für die Fakultät lässt sich ausdrücken durch $n! = \prod_{k=1}^{n} k$.

Lehrstuhl A für Mathematik
RWTH AACHEN UNIVERSITY

3.9 Summen- und Produktzeichen – Indexverschiebung

Wenn wir n Zahlen $a_1, \ldots, a_n$ gegeben haben, dann sind Summe und Produkt nur von diesen Zahlen abhängig und nicht von der gewählten Indexmenge und der Indizierung. Diese Wahl ist nicht eindeutig

Beispiel 30. Wählen wir als Indexmenge $J = \{2, 3, \ldots, n+1\}$, so liefert der Ausdruck

$$\sum_{j \in J} a_{j-1} = \sum_{j=2}^{n+1} a_{j-1} = a_1 + \ldots + a_n$$

ebenfalls die Summe $a_1 + \ldots + a_n$ derselben Zahlen. Da die Indexmenge nur in eine Richtung verschoben wurde, was von der neuen Indizierung $j-1$ statt i wieder kompensiert wird, sprechen wir in diesem Fall von einer **Indexverschiebung**.

Lehrstuhl A für Mathematik RWTH AACHEN UNIVERSITY

3.9 Summen- und Produktzeichen – Die Freiheit bei der Indizierung

Die kreative Wahl der Indizierung kann bei bestimmten Problemen sehr hilfreich sein.

Beispiel 31. Sei $I := \{i \in \mathbb{N} : 1 \leq i \leq 100\}$ die Menge der natürlichen Zahlen von Eins bis Hundert. Sei $a_i = i$, also

$$S = \sum_{i=1}^{100} a_i = \sum_{i=1}^{100} i = 1 + 2 + \ldots + 99 + 100$$

die Summe der Zahlen von 1 bis 100. Dann können wir die Zahlen aber auch anders indizieren, z. B. mit $b_i = 101 - i$ und

$$S = \sum_{i=1}^{100} (101 - i) = \sum_{i=1}^{100} b_i = 100 + 99 + \ldots + 2 + 1$$

liefert immer noch dieselbe Summe.

Lehrstuhl A für Mathematik
RWTH AACHEN UNIVERSITY

3.9 Summen- und Produktzeichen – Die Freiheit bei der Indizierung

Also ist, da wegen (A.1) Addition kommutativ ist und wir somit die Summanden beliebig anordnen können (siehe (!)):

$$2S = \sum_{i=1}^{100} i + \sum_{i=1}^{100}(101 - i) \overset{(!)}{=} \sum_{i=1}^{100}(101 - i + i) = \sum_{i=1}^{100} 101,$$

wobei die rechte Seite bedeutet, dass I immer noch dieselbe Indexmenge, aber $a_i = 101$ ist für alle $i \in I$.

Das heißt nichts anderes, als dass 100 mal die Zahl 101 aufsummiert wird. Also ist $2S = 100 \times 101$ oder $S = 50 \times 101 = 5050$ die Summe der Zahlen von 1 bis 100.

Lehrstuhl A für Mathematik
RWTH AACHEN UNIVERSITY

3.10 Die Beweismethode der vollständigen Induktion

Zum Abschluss diese Abschnitts befassen wir uns noch kurz mit einer weiteren grundlegenden Beweismethode, der *Methode der vollständigen Induktion*.

Satz 16

Sei $A(n)$, $n \in \mathbb{N}$ eine Aussage, die von einer natürlichen Zahl n abhängt. Um zu beweisen, dass die Aussage für alle $n \geq n_0$ richtig ist, genügt es, zu beweisen:

1. *$A(n)$ ist wahr für $n = n_0$* **(Induktionsanfang)**
2. *$A(n) \Rightarrow A(n+1)$ für $n \geq n_0$* **(Induktionsschritt)**

Diese Beweismethode heißt **Methode der vollständigen Induktion**.

Als Beispiel für diese Vorgehensweise betrachten wir nun einen möglichen Beweis des sogenannten Binomischen Satzes.

Lehrstuhl A für Mathematik
RWTH AACHEN UNIVERSITY

Satz 17 (Der binomische Satz)

Für alle $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k.$$

Die Aussage A(n) ist also:

$$\mathrm{A(n)} : \textit{Für alle } x \in \mathbb{R} \textit{ gilt } (1+x)^n = \textstyle\sum_{k=0}^{n} \displaystyle\binom{n}{k} x^k.$$

A(n) soll richtig sein für alle $n \in \mathbb{N}$. Also ist $n_0 = 1$.

Lehrstuhl A für Mathematik
RWTH AACHEN UNIVERSITY

Beweis des Binomischen Satzes: (1) **Induktionsanfang.** Für $n = 1$ gilt

$$1 + x = \binom{1}{0} + \binom{1}{1} x^1 = \sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} x^k,$$

also ist die Aussage $A(1)$ richtig.

Der Induktionsschritt ist meistens der schwierige Teil. Insbesondere benötigt man ein bisschen Routine, um in der Aussage $A(n+1)$ die Aussage $A(n)$ zu finden.

(2) **Induktionsschritt.** Angenommen, $A(n)$ ist richtig. Dann können wir $A(n)$ in der zweiten Zeile einsetzen:

$$\begin{aligned} (1+x)^{n+1} &= (1+x)(1+x)^n \\ &\overset{A(n)}{=} (1+x)\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \end{aligned}$$

Jetzt multiplizieren wir die rechte Seite aus und Verschieben den Index in der zweiten Summe:

$$\begin{aligned}(1+x)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{k+1}\\ &= 1+\sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}\right)x^k+x^{n+1}.\end{aligned}$$

Ausnutzen von Satz 15 liefert schließlich $A(n+1)$:

$$1+\sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}\right)x^k+x^{n+1}=\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}x^k.$$

Damit ist die Aussage bewiesen. □

Bemerkung. Für $n = 2$ ist der binomische Satz gegeben durch (für die Binomialkoeffizienten vergleiche die entsprechenden Einträge im Pascalschen Dreieck) $(1+x)^2 = 1+2x+x^2$. Dies ist eine aus der Schule bekannte binomische Formel.

Lehrstuhl A für Mathematik
RWTH AACHEN UNIVERSITY

4.1 Gleichungen und Ungleichungen

Egal, welche mathematischen Modelle man betrachtet und ob Anwender oder Theoretiker ist, am Ende des Tages geht es nach längerem Nachdenken meistens doch darum, einzelne oder Systeme von Gleichungen und Ungleichungen zu lösen. Eine gewisse Routine ist hierfür extrem hilfreich. Einerseits gibt es ein paar Grundprinzipien, die man immer anwenden kann, insbesondere auch dafür, eine Lösung des Problems gegebenenfalls mit Hilfe von Computereinsatz anzugehen. Andererseits sollte man auch eine Klasse von Beispielproblemen beherrschen, auf die man die gegebenen Probleme gegebenenfalls zurückführen kann. Außerdem sind gewisse Vorkenntnisse über das Verhalten von Gleichungen und ihrer Lösungen unerläßlich, um überhaupt erst geeignete Kandidaten für die Modellierung eines Problems zu finden.

Lehrstuhl A für Mathematik
RWTH AACHEN UNIVERSITY

4.1 Gleichungen und Ungleichungen

An Beispielproblemen betrachten wir:

1. Lineare Gleichungen und Ungleichungen
2. Quadratische Gleichungen und Ungleichungen
3. Betragsgleichungen und Betragsungleichungen
4. Wurzelgleichungen
5. Bruchgleichungen

Wir versuchen dabei, diese Probleme nicht als isoliert zu betrachten und für jedes einzelne ein Lösungsschema anzugeben, sondern konzentrieren uns darauf, die Verbindungen zwischen den verschiedenen Problemen herzustellen.

4.1 Gleichungen und Ungleichungen – Problemstellung

Um das Problem des Lösens einer Gleichung eindeutig zu formulieren, benötigen wir zwei Dinge:

1. Eine Menge M, genannt **Grundgesamtheit**. Alle Lösungen sollen Elemente dieser Menge M sein.
2. Eine **Gleichung** $f(x) = 0$, wobei $f : M \to \mathbb{K}$ eine Abbildung in einen Körper $\mathbb{K}$ ist.

Die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ dieser Gleichung sind nun diejenigen Elemente der Grundgesamtheit, die die Gleichung erfüllen, d.h.

$$\mathbb{L} := \{x \in M \ : \ f(x) = 0\}.$$

Ist $\mathbb{L} = \emptyset$ so ist die Gleichung *nicht lösbar*, besteht $\mathbb{L}$ nur aus einem Element, so ist die Lösung der Gleichung *eindeutig*.

Lehrstuhl A für Mathematik
RWTH AACHEN UNIVERSITY

4.1 Gleichungen und Ungleichungen – Problemstellung

Für Ungleichungen gehen wir analog vor. Wir benötigen:

1. Eine Menge M, genannt **Grundgesamtheit**. Alle Lösungen sollen Elemente dieser Menge M sein.
2. Eine Abbildung $f : M \to \mathbb{K}$, wobei jetzt aber $\mathbb{K}$ ein **angeordneter** Körper ist.
3. Es gibt nun zwei qualitativ verschiedene Ungleichungen, nämlich $f(x) > 0$ und $f(x) \geq 0$.
Die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ der Ungleichung sind nun diejenigen Elemente der Grundgesamtheit, die die Gleichung erfüllen, d.h.

$$\mathbb{L} := \{x \in M \; : \; f(x) R 0\}.$$

Dabei ist die Relation R entweder $>$ oder $\geq$.

Lehrstuhl A für Mathematik
RWTH AACHEN UNIVERSITY

Beispiel 32. (a) Die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ hängt von f, aber auch von der Grundgesamtheit M ab. Für $f(x) = 3x + 2$ folgt zum Beispiel

$$\mathbb{L} := \{x \in M \,:\, 3x + 2 = 0\} = \begin{cases} \emptyset & , M = \mathbb{Z} \\ \{-\frac{2}{3}\} & , M = \mathbb{Q} \end{cases}.$$

(b) Die Gleichung $4x^2 + 3y = \sin(xy)$ mit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ (d.h. $M = \mathbb{R}^2$) schreiben wir in der obigen Form, indem wir $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ setzen als $f(x) = 4x^2 + 3y - \sin(xy)$. Da die Abbildungen in einen Körper abbilden, können wir scheinbar allgemeinere Gleichungen der Form $f(x) = g(x)$ wegen (A.4) und $g(x) \in \mathbb{K}$ immer zu Gleichungen der Form $f(x) + (-g(x)) = g(x) + (-g(x)) = 0$ umformen, ohne die Lösungsmenge zu ändern.

(c) Für die Ungleichungen genügen ebenfalls die Relationen $>$ und $\geq$. Ist zum Beispiel eine Ungleichung $f(x) < 0$ gegeben, so folgt wegen (A.4) und (Q.3) $0 = f(x) + (-f(x)) < -f(x)$ und diese Ungleichung hat dieselbe Lösungsmenge.

Lehrstuhl A für Mathematik

RWTH AACHEN UNIVERSITY

4.1 Gleichungen und Ungleichungen – Systeme

Definition 26

Ein **System von Gleichungen und Ungleichungen** *besteht aus Abbildungen $f_1, \ldots, f_n : M \to \mathbb{K}$ und Zahlen $a, b, c \geq 0$ mit $a + b + c = n$ und Gleichungen bzw. Ungleichungen*

$$f_1(x) = 0, \ldots, f_a(x) = 0, f_{a+1}(x) > 0, \ldots, f_{a+b}(x) > 0, f_{a+b+1}(x) \geq 0, \ldots, f_n(x) \geq 0.$$

Ist $a = n$, genügt es, wenn $\mathbb{K}$ ein Körper ist, ist $a < n$, muss $\mathbb{K}$ ein angeordneter Körper sein.

Beispiel 33. (1) Ein **lineares Gleichungssystem**

$$5x + 2y = 1, 3x + 2y = 7$$

wird in diesem Formalismus dargestellt durch $M = \mathbb{R}^2$, $n = a = 2$, $b = c = 0$ und $f_1(x, y) = 5x + 2y - 1$, sowie $f_2(x, y) = 3x + 2y - 7$.

(2) Für die Ungleichung $4x + 1 > 2$ mit Grundgesamtheit $x \in \mathbb{R}$ ist $M = \mathbb{R}$, $n = b = 1$, $a = c = 0$, sowie $f_1(x) = 4x - 1$.

Lehrstuhl A für Mathematik
RWTH AACHEN UNIVERSITY

4.1 Gleichungen und Ungleichungen – Lösung von Systemen

$x \in M$ ist eine Lösung des Systems, wenn x eine Lösung jeder einzelnen Gleichung des Systems ist. Genauer:

Satz 18

In einem System von Gleichungen und Ungleichungen wie in Definition 26 bezeichnen wir mit $\mathbb{L}_k$ die Lösungsmenge der Gleichung bzw. Ungleichung zur Abbildung $f_k : M \to \mathbb{K}$. Dann ist die Lösungsmenge des Systems gegeben durch

$$\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2 \cap \ldots \cap \mathbb{L}_n.$$

Deswegen kann man die Lösung von Systemen immer auf die Lösung einzelner Gleichungen zurückführen und deswegen betrachten wir im Folgenden nur jeweils einzelne Gleichungen. Dasselbe gilt für Ungleichungen.

Bemerkung: Es kann aber trotzdem von großem Vorteil sein, mehrere Gleichungen in Gleichungssystemen auf systematische Art **gleichzeitig** zu lösen. Das werden Sie bei linearen Gleichungssystemen im Teil über lineare Algebra sehen.

4.2 Lineare Gleichungen in einer Variablen

Gegeben zwei reelle Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ suchen wir nach reellen Lösungen $x \in \mathbb{R}$ der Gleichung $ax = b$, d.h die Lösungsmenge $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} \,:\, ax - b = 0\}$. Abhängig von a, b haben wir folgende Lösungsmengen:

$$\mathbb{L} = \begin{cases} \emptyset & , a = 0, b \neq 0 \\ \mathbb{R} & , a = 0, b = 0 \\ \{\frac{b}{a}\} & , a \neq 0 \end{cases}.$$

Beispiel 34. $3x - 2 = 0$ ist äquivalent zu $3x = 2$ und zu $x = 2/3$, also ist $\mathbb{L} = \{\frac{2}{3}\}$.

4.2 Quadratische Gleichungen in einer Variablen

Wir suchen wiederum nach reellen Lösungen $x \in \mathbb{R}$ einer quadratischen Gleichung der Form $ax^2 + bx + c = 0$. Wenn $a = 0$ ist, ist diese Gleichung linear und wir sind im Fall der linearen Gleichung. Wir nehmen also an, dass $a \neq 0$ ist. Mit $p = \frac{b}{a}$ und $q = \frac{c}{a}$ erhalten wir

$$\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} : ax^2 + bx + c = 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + px + q = 0\}$$

Die Lösungsmenge hängt ab von der **Diskriminante** der Gleichung

$$D := \frac{p^2}{4} - q$$

Es ist dann

$$\mathbb{L} = \begin{cases} \emptyset & , D < 0 \\ \{-\frac{p}{2}\} & , D = 0 \\ \{-\frac{p}{2} + \sqrt{D}, -\frac{p}{2} - \sqrt{D}\} & , D > 0 \end{cases} .$$

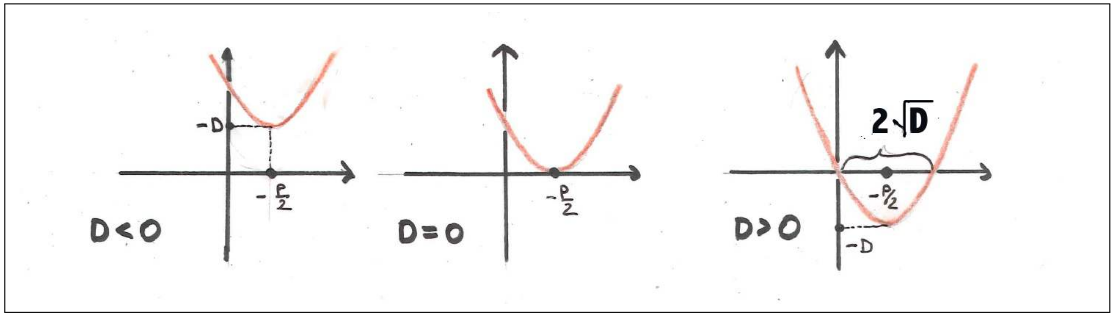
Lehrstuhl A für Mathematik | RWTH AACHEN UNIVERSITY

4.2 Quadratische Gleichungen - Geometrische Deutung

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2 + px + q$ ist eine Parabel. Wegen

$$x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4} = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - D$$

ist f eine verschobene Normalparabel mit Scheitelpunkt $S = (-\frac{p}{2}, -D)$. Für $D < 0$ befindet sich der Graph oberhalb der x-Achse, für $D = 0$ liegt der Graph auf der x-Achse auf (ein Schnittpunkt) und für $D > 0$ (d.h. $-D < 0$) hat der Graph zwei Schnittpunkte mit der x-Achse.



Lehrstuhl A für Mathematik | RWTH AACHEN UNIVERSITY

4.3 Bruchgleichungen – Zwei Beispiele

Die Besonderheit bei der Betrachtung von Bruchgleichungen ist die mitunter notwendige Einschränkung der Grundgesamtheit.

Beispiel 35. Suchen wir nach reellen Lösungen von

$$-\frac{9}{4x-12} = x,$$

so dürfen wir, da die linke Seite der Gleichung für $4x = 12$, d.h. für $x = 3$ nicht definiert ist, nur nach Lösungen in $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ suchen. Da für $x \neq 3$ der Nenner ungleich Null ist, können wir ihn auf beiden Seiten multiplizieren und erhalten $-9 = x(4x - 12) = 4x^2 - 12x$ oder $4x^2 - 12x + 9 = 0$. Diese quadratische Gleichung hat nur die Lösung $x = 3/2$. Da $3/2 \neq 3$ ist, ist die Lösungmenge der Bruchgleichung

$$\mathbb{L} = \{3/2\}.$$

Lehrstuhl A für Mathematik
RWTH AACHEN UNIVERSITY

4.3 Bruchgleichungen – Zwei Beispiele

Beispiel 36. Suchen wir nach reellen Lösungen von

$$\frac{x+5}{x^2+4} = 1,$$

so ist keine Einschränkung der Grundgesamtheit nötig, da für reelle x der Ausdruck x^2+4 immer ungleich Null ist. Multiplikation des Nenners ergibt wiederum $x+5 = 1(x^2+4) = x^2+4$ oder $x^2 - x - 1 = 0$. Diese quadratische Gleichung hat die Lösungsmenge

$$\mathbb{L} = \{(1+\sqrt{5})/2, (1-\sqrt{5})/2\}$$

und dies ist auch die Lösungsmenge der Bruchgleichung.

Lehrstuhl A für Mathematik RWTH AACHEN UNIVERSITY

4.4 Lineare Ungleichungen in einer Variablen

(1) Die Menge reeller Lösungen $x \in \mathbb{R}$ der Ungleichung $ax+b \geq 0$ ist in Abhängigkeit von $a, b \in \mathbb{R}$ gegeben durch

$$\mathbb{L} = \begin{cases} \{x \in \mathbb{R} : x \geq -\frac{b}{a}\} & , a > 0 \\ \{x \in \mathbb{R} : x \leq -\frac{b}{a}\} & , a < 0 \\ \emptyset & , a = 0, b < 0 \\ \mathbb{R} & , a = 0, b \geq 0 \end{cases}.$$

(2) Die Menge reeller Lösungen $x \in \mathbb{R}$ der Ungleichung $ax+b > 0$ ist in Abhängigkeit von $a, b \in \mathbb{R}$ gegeben durch

$$\mathbb{L} = \begin{cases} \{x \in \mathbb{R} : x > -\frac{b}{a}\} & , a > 0 \\ \{x \in \mathbb{R} : x < -\frac{b}{a}\} & , a < 0 \\ \emptyset & a = 0, b \leq 0 \\ \mathbb{R} & , a = 0, b > 0 \end{cases}.$$

Lehrstuhl A für Mathematik
RWTH AACHEN UNIVERSITY

4.4 Quadratische Ungleichungen in einer Variablen

(1) Gesucht werden reelle Lösungen $x \in \mathbb{R}$ der Ungleichung $x^2 + px + q \geq 0$. Mit derselben Umformung, wie bei der Berechnung der Scheitelpunktsform erhalten wir

$$(x + \frac{p}{2})^2 - D \geq 0$$

Damit folgt für die Lösungsmenge

$$\mathbb{L} = \begin{cases} \{x \in \mathbb{R} : x \geq -\frac{p}{2} + \sqrt{D}\} \cup \{x \in \mathbb{R} : x \leq -\frac{p}{2} - \sqrt{D}\} & , D > 0 \\ \mathbb{R} & , D \leq 0 \end{cases} .$$

Die Lösungsmenge für die komplementäre Aussage $x^2 + px + q < 0$ ist $\mathbb{R} \setminus \mathbb{L}$.

(2) Die Menge der reellen Lösungen $x \in \mathbb{R}$ der Ungleichung $x^2 + px + q \leq 0$ ist gegeben durch

$$\mathbb{L} = \begin{cases} \{x \in \mathbb{R} : -\frac{p}{2} + \sqrt{D} \geq x \geq -\frac{p}{2} - \sqrt{D}\} & , D \geq 0 \\ \emptyset & , D < 0 \end{cases} .$$

Die Lösungsmenge für die komplementäre Aussage $x^2 + px + q > 0$ ist $\mathbb{R} \setminus \mathbb{L}$.

4.5 Fallunterscheidungen

Manche Gleichungen und Ungleichungen kann man dadurch lösen, dass man sie durch Fallunterscheidungen in mehrere Gleichungen bzw. Ungleichungen zerlegt, die dann separat gelöst werden können.

Satz 19

Wird eine Gleichung bzw. Ungleichung durch Fallunterscheidung in n verschiedene Gleichungen bzw. Ungleichungen zerlegt und haben diese die Lösungsmengen $\mathbb{L}_k$, $k = 1, \ldots, n$, so ist die Lösungsmenge des ursprünglichen Problems gegeben durch

$$\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \ldots \cup \mathbb{L}_n.$$

Wir betrachten im Folgenden dazu einige Beispiele.

Lehrstuhl A für Mathematik
RWTH AACHEN UNIVERSITY

Beispiel 37. Gesucht sind reelle Lösungen der Gleichung $ax + b = |cx + d|$. Die Idee bei der Lösung derartiger Gleichungen ist, sie durch **Fallunterscheidungen** in ein System normaler Gleichungen umzuwandeln. Wir nehmen dabei an, dass $c > 0$ ist. Der Fall $c < 0$ folgt analog. Es gilt:

$$|cx + d| = \begin{cases} cx + d & , cx + d \geq 0 \\ -cx - d & , cx + d < 0 \end{cases} = \begin{cases} cx + d & , x \geq -\frac{d}{c} \\ -cx - d & , x < -\frac{d}{c} \end{cases} .$$

Wir haben also eine Fallunterscheidung:

1. Fall. Für $x \geq -\frac{d}{c}$ müssen wir die Gleichung $ax + b = cx + d$ lösen.

2. Fall. Für $x < -\frac{d}{c}$ müssen wir die Gleichung $ax + b = -(cx + d)$ lösen.

4.5 Fallunterscheidungen – Betragsgleichungen in einer Variablen

Im ersten Fall suchen wir die Lösungsmenge $\mathbb{L}_1$ des Systems

$$(a-c)x+(b-d)=0, x \geq -\frac{d}{c},$$

im zweiten Fall suchen wir die Lösungsmenge $\mathbb{L}_2$ des Systems

$$(a+c)x+(b+d)=0, x < -\frac{d}{c}.$$

Wie wir die Lösungsmenge der beiden Systeme bestimmen, wissen wir bereits. Die Systeme bestehen aus einer linearen Gleichung, die wir schon behandelt haben, und einer einfachen Ungleichung. Wenn die Lösung der linearen Gleichung die Ungleichung erfüllt, bildet sie die Lösungsmenge des Systems. Wenn nicht, ist die Lösungsmenge des Systems leer.

Die Lösungsmenge der ursprünglichen Betragsgleichung ist dann $\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2$.

4.5 Fallunterscheidungen – Betragsgleichungen in einer Variablen

Beispiel 38. Wir suchen reelle Lösungen von $x = |3x + 4|$. Durch die Fallunterscheidung erhalten wir die beiden Gleichungssysteme $2x + 4 = 0, x \geq -4/3$ und $4x + 4 = 0, x < -4/3$. Die Lösungsmengen der Systeme sind

$$\mathbb{L}_1 = \{-2\} \cap \{x \in \mathbb{R} : x \geq -\frac{4}{3}\} = \emptyset, \mathbb{L}_2 = \{-1\} \cap \{x \in \mathbb{R} : x < -\frac{4}{3}\} = \emptyset.$$

und somit ist $\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 = \emptyset$.

Bemerkung. Bei Betragsgleichungen, die mehrere Ausdrücke mit Beträgen enthalten, sind weitere Fallunterscheidungen nötig.

Beispiel 39. Wir betrachten hier wieder nur, wie man aus einer Ungleichung, die einen Betragsausdruck enthält, durch Fallunterscheidung, zwei gewöhnliche Ungleichungssysteme erhält. Gesucht sind also wieder die reellen Lösungen $x \in \mathbb{R}$ der Ungleichung $|cx + d| \geq a$. Wieder nehmen wir $c > 0$ an, der andere Fall geht analog. Wegen

$$|cx + d| = \begin{cases} cx + d & , x \geq -\frac{d}{c} \\ -cx - d & , x < -\frac{d}{c} \end{cases} .$$

erhalten wir wie eben eine Fallunterscheidung:

1. Fall. Für $x \geq -\frac{d}{c}$ müssen wir die Ungleichung $a \leq cx + d$ lösen.

2. Fall. Für $x < -\frac{d}{c}$ müssen wir die Gleichung $a \leq -(cx + d)$ lösen.

Dies führt auf die Systeme $cx + d - a \geq 0, x \geq -d/c$ und $-cx - (d + a) \geq 0, x < -d/c$ mit Lösungsmengen

$$\mathbb{L}_1 = \{x \in \mathbb{R} : cx \geq a - d, x \geq -d/c\}, \mathbb{L}_2 = \{x \in \mathbb{R} : -cx \geq d + a, x < -d/c\}$$

und die Lösungsmenge der ursprünglichen Ungleichung ist dann $\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2$.

4.5 Fallunterscheidungen – Wurzelgleichungen in einer Variablen

Beispiel 40. Wir betrachten als Beispiel eine Wurzelgleichung der Form:

$$\sqrt{3x+2} = x - 1.$$

1) Gesucht sind Lösungen $x \in \mathbb{R}$. Die linke Seite ist nur definiert für diejenigen $x \in \mathbb{R}$, für die $3x + 2 \geq 0$ ist. Wenn es also eine reelle Lösung x gibt, so ist $x \geq -2/3$. Wir suchen also nach gemeinsamen Lösungen von

$$\sqrt{3x+2} = x - 1, x \geq -2/3.$$

2) Andererseits ist immer $\sqrt{3x+2} \geq 0$. Damit $x \in \mathbb{R}$ die Gleichung löst, muss also auch $x - 1 \geq 0$ sein, also $x \geq 1$. Da $-2/3 < 1$ ist, suchen wir also genauer nach Lösungen des Systems

$$\sqrt{3x+2} = x - 1, x \geq 1.$$

4.5 Fallunterscheidungen – Wurzelgleichungen in einer Variablen

3) Durch die Zusatzbedingung $x \geq 1$ sind die rechte und die linke Seite der ersten Gleichung nicht negativ. Das bedeutet, wir dürfen beide Seiten quadrieren und erhalten das äquivalente System:

$$3x + 2 = (x-1)^2, x \geq 1.$$

4) Umformen der ersten Gleichung ergibt $x^2 - 5x - 1 = 0, x \geq 1$. Die Lösungsmenge der quadratischen Gleichung ist $\mathbb{L}_1 = \{(5+\sqrt{29})/2, (5-\sqrt{29})/2\}$. Nur die erste Lösung ist größer als 1 und somit ist $\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2 = \{(5+\sqrt{29})/2\}$ die Lösung des Gleichungssystems.

4.5 Fallunterscheidungen – Wurzelgleichungen in einer Variablen

Bemerkung. Das Gleichungssystem ohne weitere Untersuchungen direkt zu quadrieren liefert falsche Lösungen. Wie gesehen liefert das Quadrieren der Gleichung $\sqrt{3x+2} = x - 1$ nach Umformen die quadratische Gleichung $x^2 - 5x - 1 = 0$ mit Lösungen $\mathbb{L}_1 = \{5 + \sqrt{29})/2, (5 - \sqrt{29})/2\}$.
Für die zweite Lösung $x = (5 - \sqrt{29})/2$ ist die Wurzelfunktion auf der linken Seite der Ausgangsgleichung definiert mit

$$\sqrt{3x+2} = \sqrt{\frac{19}{2} - \frac{3\sqrt{29}}{2}},$$

aber auf der rechten Seite ist

$$x - 1 = \frac{3 - \sqrt{29}}{2} = -\sqrt{\frac{19}{2} - \frac{3\sqrt{29}}{2}}.$$

Aufgrund der Äquivalenz $x^2 = a^2 \Leftrightarrow (x = a) \vee (x = -a)$ hat die quadrierte Gleichung hier also mehr Lösungen als die ursprüngliche. Die zweite Bedingung $x \geq 1$ ist also notwendig, um die richtige Lösung zu ermitteln.

Lehrstuhl A für Mathematik | RWTH AACHEN UNIVERSITY

4.6 Lösung durch Substitution

Mit Hilfe der diskutierten Gleichungen und Ungleichungen kann man auch andere Gleichungen lösen, die zunächst nicht die gegebene Form zu haben scheinen. Wir beschränken uns auf ein Beispiel.

Beispiel 41. Wir suchen reelle Lösungen $x \in \mathbb{R}$ der Gleichung $x^4 - 2x^2 - 3 = 0$. Eine solche Gleichung haben wir nicht behandelt, aber mit einer Substitution der Form $U = x^2$ erhalten wir für U eine Gleichung, die wir schon kennen, nämlich eine **quadratische Gleichung**

$$U^2 - 2U - 3 = 0$$

mit Lösungsmenge $\mathbb{L}_s = \{3, -1\}$.

Um nun die ursprüngliche Aufgabe zu lösen, suchen wir somit nach reellen Lösungen der Gleichung $x^2 = U$, also $x^2 = 3$ oder $x^2 = -1$. Die zweite Gleichung besitzt keine Lösung, aus der ersten Gleichung folgern wir $\mathbb{L} = \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$ für die Lösungsmenge der ursprünglichen Gleichung.

Lehrstuhl A für Mathematik RWTH AACHEN UNIVERSITY

5.1 Komplexe Zahlen - Idee

Wir erinnern uns zunächst an die Addition und Multiplikation von Ausdrücken in einer Variablen x:

$$\begin{aligned}(a+bx)+(c+dx) &= (a+c)+(b+d)x,\\ (a+bx)(c+dx) &= ac+(ad+bc)x+bdx^2.\end{aligned}$$

Angenommen, die Variable x hätte die zusätzliche Eigenschaft, dass $x^2 = -1$ ist (eine solche reelle Zahl x gibt es nicht), dann wäre wegen

$$(a+bx)(c+dx) = ac+(ad+bc)x+bdx^2 = ad-bd+(ad+bc)x$$

die Menge der $a+bx$, $a,b\in\mathbb{R}$ bezüglich Multiplikation und Addition abgeschlossen. Das machen wir uns zu Nutze, um einen weiteren Körper neben $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ zu konstruieren.

Lehrstuhl A für Mathematik RWTH AACHEN UNIVERSITY

5.1 Komplexe Zahlen – Definition

Definition 27

Wir bezeichnen die **Menge der komplexen Zahlen** *mit*

$$\mathbb{C} = \{a + bi \ : \ a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Auf $\mathbb{C}$ definieren wir Addition und Multiplikation durch

$$\begin{aligned} (a+bi)+(c+di) &= (a+c)+(b+d)i, \\ (a+bi)(c+di) &= (ac-bd)+(ad+bc)i. \end{aligned}$$

Bemerkung. Wie gesehen ist dies die Multiplikation, die sich ergibt, wenn man i als eine Variable auffasst, die die Relation $i^2 = -1$ erfüllt.

Satz 20

Die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ bilden einen Körper.

5.1 Komplexe Zahlen – Körpereigenschaften

Bemerkung. (1) Eine komplexe Zahl $z = a + ib$ ist durch zwei reelle Zahlen festgelegt, dem **Realteil** $a = \mathrm{Re}(z)$ und dem **Imaginärteil** $b = \mathrm{Im}(z)$ von z. i heißt auch **imaginäre Einheit**.

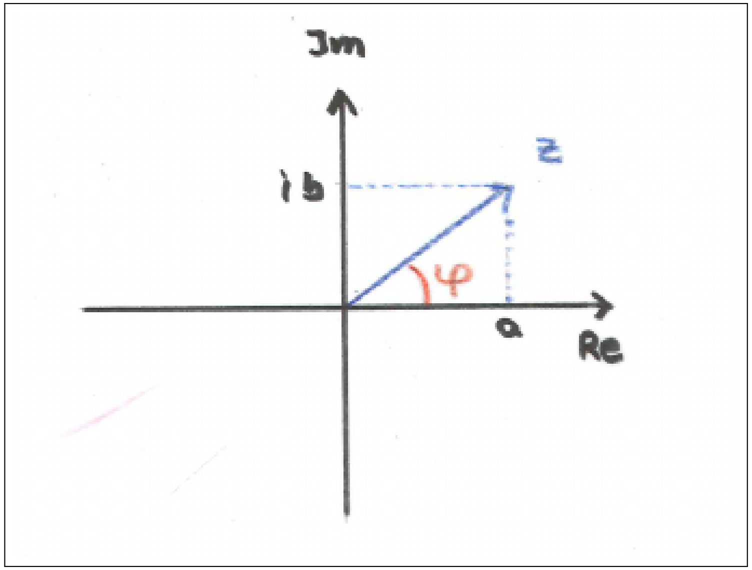
(2) Komplexe Zahlen mit Realteil Null heißen **rein imaginär**. Die Menge der reellen Zahlen ist in der Menge der komplexen Zahlen enthalten. Es ist $\mathbb{R} = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) = 0\} \subset \mathbb{C}$.

(3) Zwei komplexe Zahlen z, z' sind genau dann gleich, wenn ihre Real- und Imaginärteile übereinstimmen.

(4) $\overline{z} := a - ib$ heißt die zu $z = a + ib$ **konjugiert komplexe Zahl**, $|z| := \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{a^2 + b^2} \geq 0$ heißt **Betrag** von z.

5.1 Komplexe Zahlen – Die komplexe Ebene

Da die komplexen Zahlen durch ein Paar von zwei reellen Zahlen gegeben sind, können wir sie als Vektoren in einer Ebene darstellen.



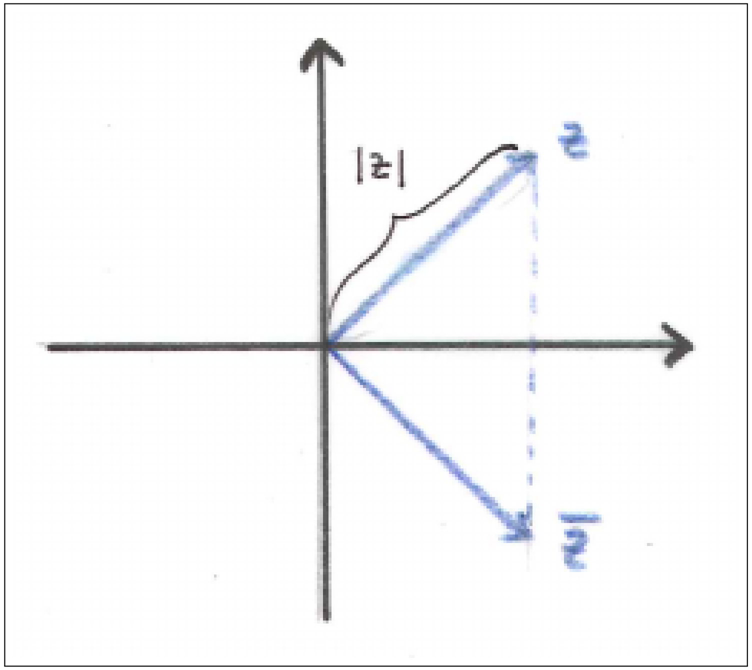
Bemerkung. Die komplexe Zahl kann auch in der Form $z = |z|(\cos(\phi) + i \sin(\phi))$ geschrieben werden, wobei $\phi \in [0, 2\pi)$ der Winkel ist, den die Zahl mit der positiven reellen Achse einschließt. $\phi = \arg(z)$ heißt **Argument** der komplexen Zahl z.

Lehrstuhl A für Mathematik

RWTH AACHEN UNIVERSITY

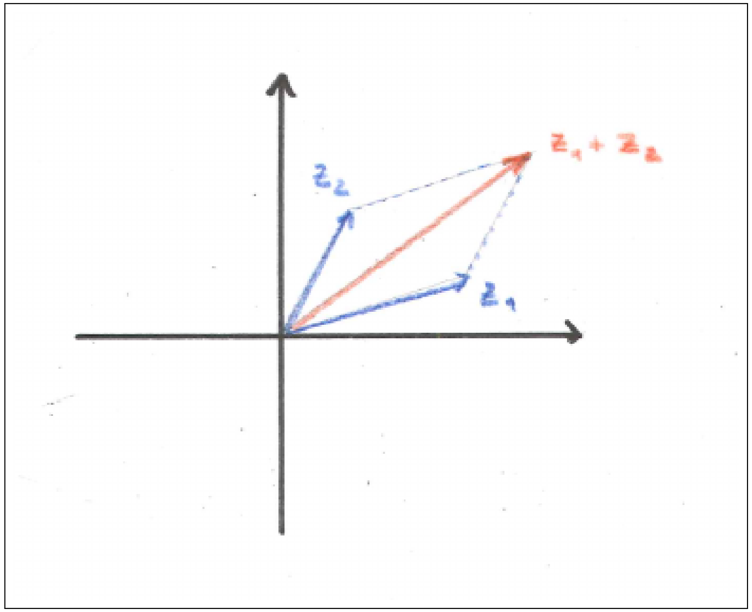
5.1 Komplexe Zahlen - Konjugation

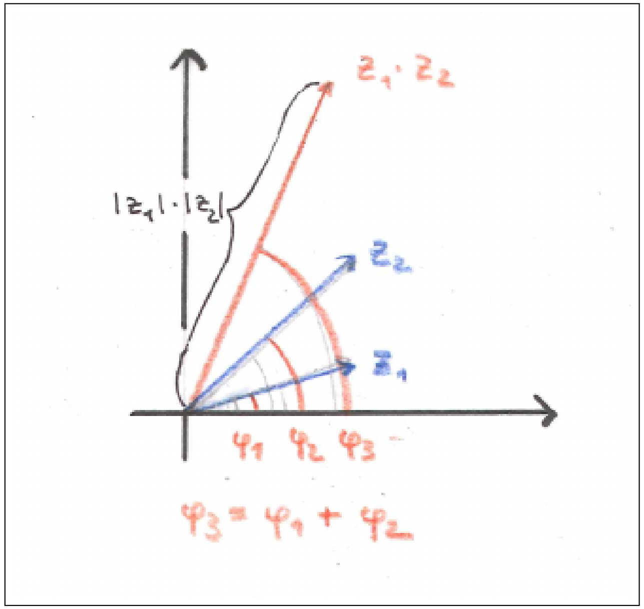
Die konjugiert komplexe Zahl ergibt sich aus dem an der reellen Achse gespiegelten Vektor, der Betrag der komplexen Zahl ist die Länge des Vektors.



Lehrstuhl A für Mathematik
RWTH AACHEN UNIVERSITY

Die Addition ist in dieser Veranschaulichung die Vektoraddition. Die Multiplikation hat ebenfalls eine geometrische Anschauung: Ist $\phi = \arg(z)$ das Argument von z, so ist $z \cdot z'$ derjenige Vektor mit $|zz'| = |z|\,|z'|$ und $\arg(z\,z') = \arg(z) + \arg(z')$.





5.2 Komplexe Zahlen – Lösungen quadratischer Gleichungen

Eine wichtige Eigenschaft komplexer Zahlen ist, dass wir mit Ihnen Lösungen für alle quadratischen Gleichungen finden können. Ist

$$x^2 + px + q = 0$$

mit $p, q \in \mathbb{R}$ und ist die Diskriminante $D = \frac{p^2}{4} - q < 0$, so gibt es wie gesehen keine reelle Lösung dieser Gleichung.

Suchen wir aber nach Lösungen $x = a + ib \in \mathbb{C}$, so finden wir tatsächlich zwei verschiedene Lösungen: Sei

$$\begin{aligned} 0 &= (a+ib)^2 + p(a+ib) + q \\ &= (a^2 + 2iab + (ib)^2) + (pa + ipb) + q \\ &= (a^2 - b^2 + pa + q) + i(2a+p)b. \end{aligned}$$

Lehrstuhl A für Mathematik RWTH AACHEN UNIVERSITY

5.2 Komplexe Zahlen – Lösungen quadratischer Gleichungen

Die komplexe Zahl auf der rechten Seite der Gleichung ist gleich Null, wenn ihr Real- und ihr Imaginärteil gleich Null sind. Damit erhalten wir für a und b die Gleichungen

$$(2a+p)b = 0, \quad a^2 - b^2 + pa + q = 0.$$

b kann nicht gleich Null sein, da wir sonst eine reelle Lösung der Gleichung hätten. Also folgt nach Division durch b aus der ersten Gleichung $2a+p=0$ oder $a=-p/2$.

Wenn wir dieses Resultat für a in die zweite Gleichung einsetzen, erhalten wir

$$0 = a^2 - b^2 + pa + q = -\frac{p^2}{4} + q - b^2 = -D - b^2,$$

also $b^2 = -D$ und somit $b = \pm\sqrt{-D}$, was geht, da ja $-D > 0$ ist. Damit haben wir zwei Lösungen

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm i\sqrt{-D}.$$

Lehrstuhl A für Mathematik

RWTH AACHEN UNIVERSITY

5.2 Komplexe Zahlen – Der Hauptsatz der Algebra

Das folgende fundamentale Resultat wird **Hauptsatz der Algebra** genannt.

Satz 21

Sei $p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + x^n$ ein Polynom vom Grad n mit komplexen Koeffizienten $a_k \in \mathbb{C}$. Dann gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ mit $m \leq n$ und Zahlen $b_1, \ldots, b_m \in \mathbb{C}$ sowie $n_1, \ldots, n_m \in \mathbb{N}$ mit $n_1 + \ldots + n_m = n$ so dass gilt

$$p(x) = \prod_{k=1}^{m} (x - b_k)^{n_k}\,.$$

Ein Beweis dieser Aussage ist völlig außerhalb unserer Reichweite. Die Konsequenz, die diese Aussage für die Lösungen der Gleichung $p(x) = 0$ hat, können wir jedoch leicht folgern:

Lehrstuhl A für Mathematik RWTH AACHEN UNIVERSITY

Satz 22

Sei $p(x)$ wie in Satz 21. Dann ist die Menge der komplexwertigen Lösungen der Gleichung $p(x) = 0$ gegeben durch $\mathbb{L} = \{b_1, ..., b_m\}$.

Beweis. Nach Satz 21 ist $p(x) = \prod_{k=1}^{m} (x - b_k)^{n_k}$. Da $\mathbb{C}$ ein Körper ist, ist nach Satz 10 $p(x) = 0$ genau dann, wenn (mindestens) einer der Faktoren Null ist. $p(x)$ besteht aber (mit Vielfachheiten) nur aus den Faktoren $(x - b_k)$, $k \in \{1, ..., m\}$, und ein solcher Faktor ist dann und nur dann gleich Null, wenn $x = b_k$ ist. $\square$

5.3 Komplexe Zahlen – Die Eulersche Formel

Zum Abschluss schreiben wir noch eine der berühmtesten Formeln der Mathematik hin. Sie verknüpft trigonometrischen Funktionen Sinus und Kosinus mit der Exponentialfunktion. Dieser Zusammenhang ist mehr als überraschend und ein Beweis ebenfalls ganz weit außerhalb unserer Reichweite.

Satz 23 (Eulersche Formel)

Für $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x).$$

Wir hatten bereits bemerkt, dass sich eine komplexe Zahl in der Form

$$z = |z|(\cos(\phi) + i\sin(\phi))$$

mit $\phi = \arg(z) \in [0, 2\pi)$ schreiben lässt. Mit der Eulerschen Formel wird nun die abschließende Definition verständlich.

Lehrstuhl A für Mathematik
RWTH AACHEN UNIVERSITY

5.3 Komplexe Zahlen – Die Eulersche Formel

Definition 28

Für $r \in \mathbb{R}, r \geq 0$ *und* $\phi \in [0, 2\pi)$ *bezeichnet*

$$z = re^{i\phi}$$

die **Polardarstellung** *der komplexen Zahl* z *mit Realteil* $\mathrm{Re}(z) = r\cos(\phi)$, *Imaginärteil* $\mathrm{Im}(z) = r\sin(\phi)$, *Betrag* $|z| = r$ *und Argument* $\arg(z) = \phi$.

Lehrstuhl A für Mathematik
RWTH AACHEN UNIVERSITY