Mengen

Definition

Eine Menge ist eine Sammlung von Objekten, genannt Elementen der Menge. Eine Menge wird durch eine Vorschrift festgelegt, die eindeutig bestimmt, ob ein gegebenes Objekt zur Menge gehört oder nicht.

Bsp:
- Die Menge der natürlichen Zahlen 1, 2, 3, ...
- Die Menge der Zahlen 1, 5, 7
- Die Menge der Orangen und Zitronen
- Die Menge der Buchstaben a, b, c, k
- Die Menge der geraden, natürl. Zahlen 2, 4, 6, 8, ...

Schreibweisen

- Mengen werden meist mit Großbuchstaben benannt, oft schlicht M.
- Bei prominenten Beispielen gibt es extra Bezeichnungen, z. B. die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$.
- Die Aufzählung der Elemente erfolgt in geschweiften Klammern.
  - $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$
  - $\{\text{Orangen}, \text{Zitronen}\}$
  - $\{1, 5, 7\}$
  - $\{a, b, c, k\}$
  - $\{\} = \emptyset$ leere Menge
- $x \in M$ steht für „x ist ein Element der Menge M.“, z.B. $1 \in \{1, 5, 7\}$ oder $2 \notin \{1, 5, 7\}$.
- Oft wird die Mengenvorschrift in die Mengenschreibweise aufgenommen:
  $G = \{2, 4, 6, 8, \dots\} = \{2 \cdot x \mid x \in \mathbb{N}\} = \{x \in \mathbb{N} \mid \frac{x}{2} \in \mathbb{N}\}$

Intervalle auf der reellen Zahlengeraden:

Für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$:

- abgeschlossenes Intervall
  $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$
- offenes Intervall
  $(a, b) =]a, b[$
  $= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$
- halboffene Intervalle
  $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$,
  $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$.

Definition

Seien M und N zwei Mengen.

(1) N heißt **Teilmenge** von M, $N \subset M$, wenn alle Elemente von N auch zu M gehören, d.h. $\forall x \in N : x \in M$. Dann heißt M **Obermenge** von N, $M \supset N$.

(2) M und N heißen **gleich**, wenn $M \subset N$ und $N \subset M$.

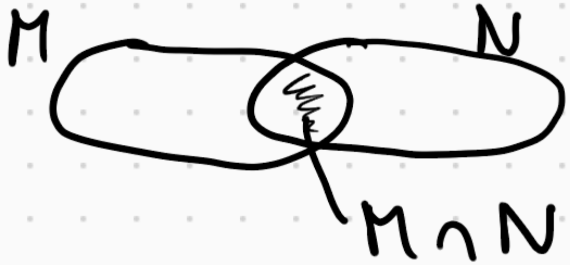
(3) Der **Durchschnitt** $M \cap N$ von M und N ist die Menge $M \cap N = \{x \mid (x \in M) \wedge (x \in N)\}$.

(4) Die **Vereinigung** $M \cup N$ von M und N ist die Menge $M \cup N = \{x \mid (x \in M) \vee (x \in N)\}$.

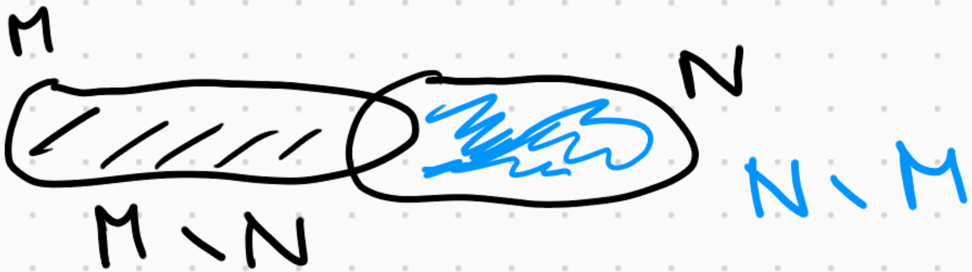
(5) Die **Differenz** $M \setminus N$ von M und N ist die Menge $M \setminus N = \{x \in M \mid x \notin N\}$.

(6) M und N heißen **disjunkt**, wenn $M \cap N = \emptyset$.

$N \subset M$



$$(M \cap N) \subset (M \cup N)$$



$$\boxed{M \setminus N \neq N \setminus M}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} M \cup N = N \cup M \\ M \cap N = N \cap M \end{array}}$$

Die leere Menge ist Teilmenge <u>jeder</u> Menge M : $\emptyset \subset M$.

$\forall x \in \emptyset : \; x \in M$

Weiteres zu Mengen

Definition

Sei M eine Menge.

- Eine Teilmenge N von M heißt **echte** Teilmenge $N \subsetneq M$, wenn $N \neq M$, das heißt $\exists x \in M : x \notin N$.
- Analog gibt es die Schreibweise $N \subseteq M$, wenn man betont, dass $N = M$ nicht ausgeschlossen ist.
- Es sei $N \subseteq M$. Dann bezeichnet man die Differenz $M \setminus N$ auch als Komplement von N (in M).
- Die Anzahl der Elemente von M heißt ihre **Mächtigkeit** $\sharp M$.
- M heißt **endlich**, wenn ihre Mächtigkeit endlich ist.

d.h. M hat nur endlich viele Elemente,

d.h. die Anzahl der Elemente von M ist eine nat. Zahl oder 0.

Sei $N \subseteq M$. Dann:

($N \subsetneq M \iff N \neq M$

$\iff M \setminus N \neq \emptyset$.)

Sei M eine endliche Menge.
Wieviele Teilmengen hat M?

<u>Bsp:</u>
- $M = \emptyset$: 1 Teilmenge: $\emptyset$
- $M = \{a\}$: 2 Teilmengen: $\emptyset$, $\{a\} = M$
- $M = \{a_1, a_2\}$: 4 Teilmengen: $\emptyset$, $\{a_1\}, \{a_2\}, \{a_1, a_2\} = M$
- $M = \{a_1, a_2, a_3\}$: 8 Teilmengen $\emptyset$, $\{a_j\}$ $(j = 1, 2, 3)$, $\{a_1, a_2\}, \{a_1, a_3\}, \{a_2, a_3\}, M$

Allgemein? $M = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$

Möglichkeiten: $\underbrace{2 \cdot 2 \cdots 2}_{n \text{ Stück}} = 2^n$ = Anzahl der Teilmengen von M.

-3-

Definition

Es sei M eine Menge. Die Menge, deren Elemente genau die Teilmengen von M sind, heißt **Potenzmenge** $\mathfrak{P}(M)$ von M.

Wir haben gesehen: Ist M endlich, das heißt ist $\sharp M = n < \infty$, dann gilt für die Mächtigkeit der Potenzmenge $\sharp\mathfrak{P}(M) = 2^n$.

<u>Bsp</u>: $M = \{a\}$: $\mathfrak{P}(M) = \{\emptyset, \{a\}\}$

$M = \{a_1, a_2\}$: $\mathfrak{P}(M) = \{\emptyset, \{a_1\}, \{a_2\}, M\}$

Mengen - Gesetze

Satz

(a) Für Mengen A, B, C gilt:

- Kommutativität: $A \cap B = B \cap A$ und $A \cup B = B \cup A$.
- Assoziativität: $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ und $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
- Distributivität: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ und $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

(b) Für Teilmengen $A, B \subseteq M$ derselben Obermenge M gelten die **Morganschen Regeln**:

- $\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$
- $\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$

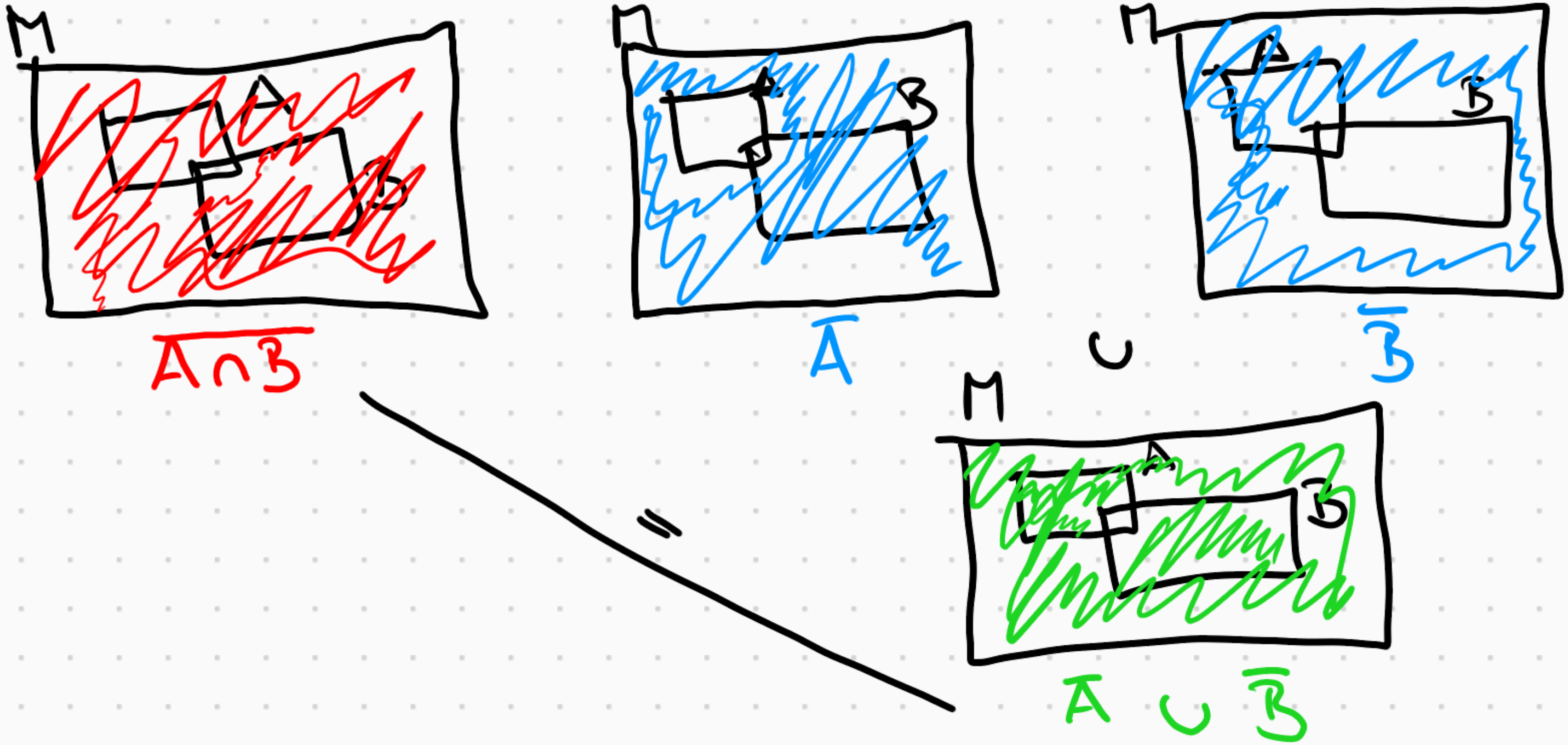
$$\overline{A} = M \setminus A$$

$$(A \cap B) \cup (A \cap C) = (B \cup C) \cap A$$

Satz

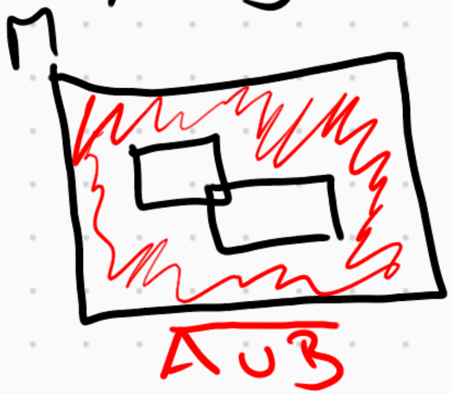
Für Variablen A, B und C gelten die folgenden Aussagen.

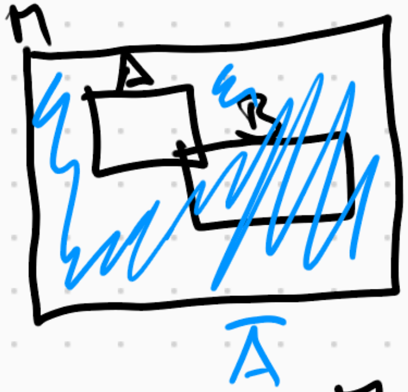
1. $A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$ und $A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$.
2. $(A \wedge B) \wedge C \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$ und $(A \vee B) \vee C \Leftrightarrow A \vee (B \vee C)$.
3. $\neg(\neg A) \Leftrightarrow A$.
4. $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A) \vee (\neg B)$ und $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A) \wedge (\neg B)$.
5. $(A \vee B) \wedge C \Leftrightarrow (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$.
6. $(A \wedge B) \vee C \Leftrightarrow (A \vee C) \wedge (B \vee C)$.
7. $A \wedge (A \vee B) \Leftrightarrow A \Leftrightarrow A \vee (A \wedge B)$.
8. $A \vee W \Leftrightarrow W$ und $A \wedge F \Leftrightarrow F$.
9. $A \wedge W \Leftrightarrow A$ und $A \vee F \Leftrightarrow A$.

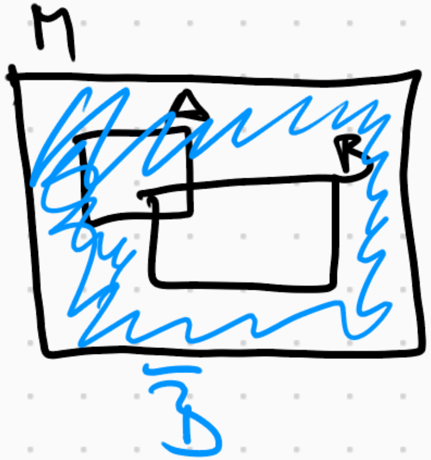

M
A
B
$\overline{A \cap B}$
M
A
B
$\overline{A}$
$\cup$
M
A
B
$\overline{B}$
=
M
A
B
$A \cup \overline{B}$

-3-

$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$:







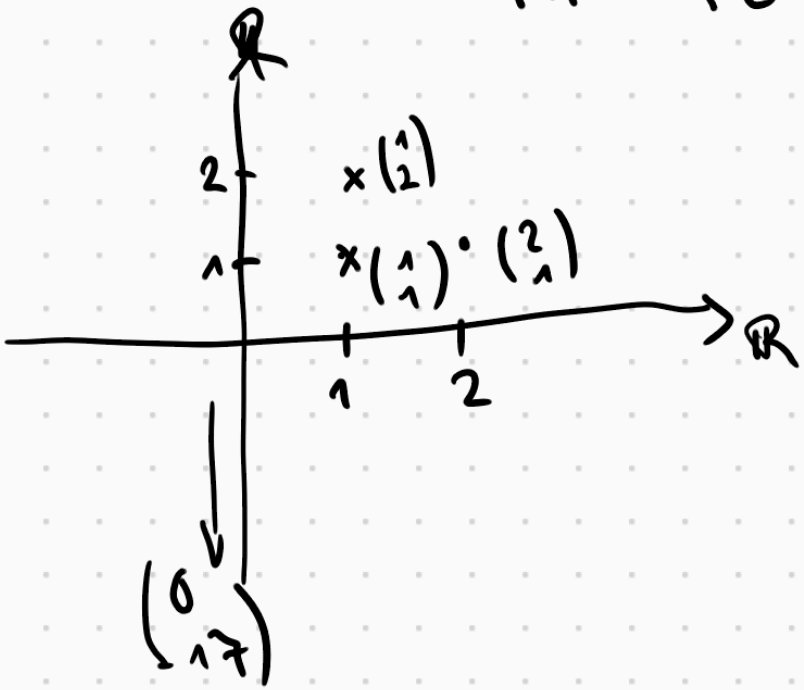
Also: $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$

Venn-Diagramme

Kartesische Produkte

Erinnerung: Vektoren im $\mathbb{R}^2$, ($\mathbb{R}^3$).

$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-17\end{pmatrix}$



Definition

Das **Kartesische Produkt** $M \times N$ zweier Mengen M und N ist die Menge der geordneten Tupel

$$M \times N = \{(x, y) \mid x \in M, y \in N\}.$$

Allgemeiner:
Sind $M_1, M_2, \ldots, M_n$ Mengen, dann ist ihr Kartesisches Produkt

$$M_1 \times M_2 \times \cdots \times M_n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_1 \in M_1, x_2 \in M_2, \ldots, x_n \in M_n\}.$$

$M \times N \neq N \times M$

Bsp: $M = \{1\}$
$N = \{0, -17\}$

$M \times N = \{(1,0), (1,-17)\}$

$N \times M = \{(0,1), (-17,1)\}$

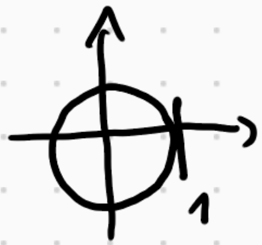
Bsp: $\mathbb{R}^2 := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ kart. Prod. von $\mathbb{R}$ mit sich selbst

ditto $\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}}_{n \text{ Stück}}$

-2-

-3-

Bsp: Sei $S^1 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=1\}$.



$$S^1\times\mathbb{R} = \{((x,y),z) \mid x,y,z\in\mathbb{R},\ x^2+y^2=1\} \subsetneq \mathbb{R}^3$$

$S^1\times\mathbb{R}$ ist ein unendl. langer Zylinder in Richtung z-Achse.

$\mathbb{R}\times S^1$