Mathematische Aussagen

Mathe benötigt eine exakte Sprache!

Aussagen? Einige Versuche:

- Die Sonne scheint. ✓
- Es regnet. ✓
- Der Wal ist ein Fisch. ✓
- Fahren Sie am besten mit dem Rad! ✗
- Sind Sie neu in Aachen? ✗
- $f(3) > 5$. ✓
- $2 = 0$. ✓

Für Aussagen wichtig: - Bewertbarkeit
- Wahrheitsgehalt selbst kontext -
abhängig.

Definition

Die Objekte der Aussagenlogik sind

- Aussagenvariablen (kurz Variablen), die im folgenden meist mit A, B, C, ... bezeichnet werden,
- die Wahrheitswerte (auch Konstanten genannt) „wahr“ und „falsch“, bezeichnet mit W und F, und
- die Junktoren

  $\neg$ Negation, gelesen „nicht“,
  $\wedge$ Konjunktion, gelesen „und“,
  $\vee$ Disjunktion, gelesen „oder“.

Eine Formel aus Variablen, Wahrheitswerten und Junktoren wird auch Aussageform genannt.

Wir bilden daraus folgende elementare Formeln für Variablen A und B.

A	Formel, die nur aus der Variablen besteht,
$\neg A$	Negation von A, „nicht A“,
$A \wedge B$	„A und B“
$A \vee B$	„A oder B“

Kompliziertere Formeln wie

$\neg(A \wedge (\neg B))$ Negation von „A und nicht B“

Auch die Konstanten W und F können in Formeln auftauchen, z.B.

$A \vee F$, $(A \vee B) \vee W$, oder $\neg(F \wedge B)$.

Beispiel: A: Die Sonne scheint.

B: Es regnet.

$\neg A$: Die Sonne scheint nicht.

$A \wedge B$: Die Sonne scheint und es regnet.

$A \vee B$: Die Sonne scheint oder es regnet.

$\neg(A \wedge (\neg B))$: Es gilt nicht, dass die Sonne scheint und es nicht regnet.

Ordnet man allen Variablen einen Wahrheitswert zu, dann spricht man von einer <u>Bewertung</u> der Aussageform.

Definition

Eine (mathematische) Aussage ist eine bewertete Aussageform/Formel.

Wahrheitstafeln

Definition

Eine (mathematische) Aussage ist eine bewertete Aussageform/Formel.

Definition

Per Definition gelten:

(i) A bekommt denselben Wahrheitswert wie die Variable A.

(ii) $\neg A$ ist wahr, wenn die Variable A den Wahrheitswert F bekommt, und falsch, wenn A den Wahrheitswert W hat.

(iii) $A \wedge B$ ist genau dann wahr, wenn A und B wahr sind.

(iv) $A \vee B$ ist genau dann wahr, wenn A oder B wahr sind (oder beide).

Man spricht bei „oder“ auch vom einschließenden „oder“, da die Formel wahr ist, wenn mindestens eine der beiden Variablen wahr ist. Dies ist bewusst zu unterscheiden vom ausschließenden „(entweder) oder“, welches im Sprachgebrauch häufig verwendet wird.

(ii)

A	$\neg A$
W	F
F	W

(iii)

A	B	$A \wedge B$
W	W	W
W	F	F
F	W	F
F	F	F

(iv)

A	B	$A \vee B$
W	W	W
W	F	W
F	W	W
F	F	F

Bsp: Wahrheitswert der Formel: $(\neg A) \lor B$:

A	B	$\neg A$	$(\neg A) \lor B$
W	W	F	W
W	F	F	F
F	W	W	W
F	F	W	W

Bsp: Wahrheitswert der Formel $\neg(F \wedge B)$

B	F	$F \wedge B$	$\neg(F \wedge B)$
W	F	F	W
F	F	F	W

Diese Formel hat für jede Belegung von B den Wahrheitswert wahr!

Definition

Eine Formel, die für alle Bewertungen wahr ist, heißt Tautologie oder allgemeingültige Formel.
Eine Formel, die für alle Bewertungen falsch ist, heißt Widerspruch, Kontradiktion oder unerfüllbare Formel.

Bsp.:

- $A \vee (\neg A)$ Tautologie
- $A \wedge (\neg A)$ Widerspruch
- Ist $\mathcal{A}$ Tautologie, dann ist $\neg\mathcal{A}$ ein Widerspruch.
- Ist $\mathcal{A}$ Widerspruch, so ist $\neg\mathcal{A}$ eine Tautologie.

Äquivalenz

Definition

Zwei Aussageformen (Formeln) $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ heißten äquivalent (geschrieben $\mathcal{F} \Leftrightarrow \mathcal{G}$), wenn für alle Bewertungen der Variablen in $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ die entsprechenden Aussagen denselben Wahrheitswert haben.

Bsp:

- Ist A Tautologie, so ist $A \Longleftrightarrow W$.
- Ist A Widerspruch, so ist $A \Longleftrightarrow F$.
- $A \wedge (\neg A) \Longleftrightarrow F$
-

A	B	$A \Longleftrightarrow B$
W	W	W
W	F	F
F	W	F
F	F	W

Satz

Für Variablen A, B und C gelten die folgenden Aussagen.

1. $A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$ und $A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$.
2. $(A \wedge B) \wedge C \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$ und $(A \vee B) \vee C \Leftrightarrow A \vee (B \vee C)$.
3. $\neg(\neg A) \Leftrightarrow A$.
4. $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A) \vee (\neg B)$ und $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A) \wedge (\neg B)$.
5. $(A \vee B) \wedge C \Leftrightarrow (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$.
6. $(A \wedge B) \vee C \Leftrightarrow (A \vee C) \wedge (B \vee C)$.
7. $A \wedge (A \vee B) \Leftrightarrow A \Leftrightarrow A \vee (A \wedge B)$.
8. $A \vee W \Leftrightarrow W$ und $A \wedge F \Leftrightarrow F$.
9. $A \wedge W \Leftrightarrow A$ und $A \vee F \Leftrightarrow A$.

1. Kommutativität
2. Assoziativität

! $(A \vee B) \wedge C \not\Leftrightarrow$
$(A \wedge B) \vee C$!

-2-

Wir machen das beispielhaft für den zweiten Teil von (iv): $\neg(A \vee B) \iff (\neg A) \wedge (\neg B)$:

A	B	$A \vee B$	$\neg(A \vee B)$	$\neg A$	$\neg B$	$(\neg A) \wedge (\neg B)$
W	W	W	F	F	F	F
W	F	W	F	F	W	F
F	W	W	F	W	F	F
F	F	F	W	W	W	W

Implikation

Wenn ..., dann ...

[Wenn $x > 2$, dann $x > 0$.]

Folgerungen

Definition

Für zwei Aussagen A und B wird die Folgerung (Implikation) „Wenn A wahr ist, dann ist auch B wahr." ausgedrückt durch die Schreibweise $A \Rightarrow B$ oder $B \Leftarrow A$, und gelesen „aus A folgt B", „A impliziert B" oder „B folgt aus A". Dabei heißt A die Prämisse und B die Konklusion der Folgerung.

Die Wahrheitstafel für $A \Rightarrow B$ ist per Definition:

A	B	$A \Rightarrow B$
W	W	W
W	F	F
F	W	W
F	F	W

Bsp: A: Max ist größer als Kai.

B: Kai ist kleiner als Max.

$A \Rightarrow B$: Wenn Max größer ist als Kai, dann ist Kai kleiner als Max.

-2-

<u>Bsp</u>: Seien a, b, c Zahlen.

$A: \ a > b$

$B: \ b > c$

$C: \ a > c$

• $(A \wedge B) \Rightarrow C$:

$(a > b) \wedge (b > c) \Rightarrow a > c$

• $A \Rightarrow B$ in konkreten Situationen:

- $a=4, b=3, c=2$: $\left(\underset{W}{4>3} \Rightarrow \underset{W}{3>2} \right)$ W
- $a=2, b=3, c=4$: $\left(\underset{F}{2>3} \Rightarrow \underset{F}{3>4} \right)$ W
- $a=c=4, b=3$: $\left(\underset{W}{4>3} \Rightarrow \underset{F}{3>4} \right)$ F

Der Wahrheitswert einer Implikation ist wahr, wenn

- Prämisse und Konklusion wahr sind
- Prämisse falsch ist.

Bemerkung

Wir nehmen an, dass die Implikation $A \Rightarrow B$ wahr ist.
Die möglichen Fälle der Wahrheitstabelle sind dann:

A	B	$A \Rightarrow B$
W	W	W
F	W	W
F	F	W

Wir sehen:

- Dafür dass, B wahr ist, ist es **hinreichend** (ausreichend) dass A wahr ist. (Dass A wahr ist, ist aber nicht notwendig dafür, dass B wahr ist.)
- Dagegen ist dafür, dass A wahr ist, B **notwendig** wahr. (Allerdings ist B wahr nicht hinreichend dafür.)

Bemerkung

Die Äquivalenz $A \Leftrightarrow B$ ist gleichbedeutend zu $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$.
Das sieht man aus dem Vergleich der Wahrheitstafeln:

A	B	$A \Leftrightarrow B$	$A \Rightarrow B$	$B \Rightarrow A$	$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$
W	W	W	W	W	W
W	F	F	F	W	F
F	W	F	W	F	F
F	F	W	W	W	W

Bsp: Für Zahlen x: A: $x^2+4=4x$

B: $x^2-4x+4=0$

Sei A wahr, dann gilt: $x^2-4x+4=(x^2+4)-4x \overset{A \text{ wahr}}{=} 4x-4x=0$ B

Sei B wahr, dann gilt $x^2+4 = \underbrace{x^2-4x+4}+4x \overset{B \text{ wahr}}{=} 0+4x = 4x$ A.

Kontraposition

Bemerkung

Es gilt $A \Rightarrow B$ ist gleichbedeutend zu $(\neg B) \Rightarrow (\neg A)$.

Das sieht man wieder mit Hilfe der Wahrheitstabelle:

A	B	$\neg B$	$\neg A$	$(\neg B) \Rightarrow (\neg A)$	$A \Rightarrow B$
W	W	F	F	W	W
W	F	W	F	F	F
F	W	F	W	W	W
F	F	W	W	W	W

Einfache Anwendung: Ein Beweis

Satz

Eine natürliche Zahl $n \in \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ ist genau dann eine gerade Zahl, wenn n^2 eine gerade Zahl ist.

n heißt gerade, wenn $n = 2 \cdot l$ mit einer natürlichen Zahl l gilt. Ist $n = 2 \cdot l + 1$ (mit l nat. Zahl), dann ist n ungerade

A: Die nat. Zahl n ist gerade

B: Das Quadrat n^2 ist gerade.

<u>Satz</u>: $A \Longleftrightarrow B$

Benutze: $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow \big((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A) \big)$.

<u>Zeige:</u> $A \Rightarrow B$

Sei $n = 2 \cdot l$ gerade, l natürliche Zahl.

Dann ist $n^2 = (2 \cdot l)^2 = 2^2 \cdot l^2 = 2 \cdot \underbrace{(2 \cdot l^2)}_{\text{nat. Zahl}}$.

D.h. n^2 ist eine gerade Zahl.

$\#$

Zeige: $B \Rightarrow A$

bzw. zeige $(\neg A) \Rightarrow (\neg B)$

D.h.: $\neg A$: n ist ungerade,

$\neg B$: n^2 ist ungerade.

Sei n ungerade, d.h. $n = 2 \cdot l + 1$ mit einer nat. Zahl l.

Dann ist $n^2 = (2l + 1)^2 \overset{\text{Binom}}{=} (2l)^2 + 2 \cdot 2l \cdot 1 + 1^2$

$$= 2 \cdot \underbrace{(2l^2 + 2l)}_{\text{nat. Zahl}} + 1,$$

d.h. n^2 ist ungerade. # $\blacksquare$

Quantoren

z.B.: Für jede reelle Zahl x gilt $\underbrace{x^2 > 0}_{A(x)}$.

$A(x)$: Aussage, abhängig von $x \in M$.

Definition

Sei $A(x)$ eine Aussage, die sich auf Elemente x einer Menge M bezieht.

- Die Aussage $\exists x \in M : A(x)$ [Es existiert (mindestens) ein x in M, für das $A(x)$ gilt.] ist genau dann **wahr**, wenn es ein $x \in M$ gibt, für das $A(x)$ wahr ist. **Existenzquantor**
- Die Aussage $\forall x \in M : A(x)$ [Für alle Elemente x in M gilt $A(x)$] ist genau dann **wahr**, wenn $A(x)$ für jedes $x \in M$ wahr ist.

Allquantor

Aus Konsistenzgründen legt man noch fest:
Ist $M = \emptyset$, dann ist die Aussage

- $\exists x \in M : A(x)$ immer falsch,
- $\forall x \in M : A(x)$ immer wahr.

-1-

Bsp.: Sei $M = \mathbb{Z}$ (ganze Zahlen)

$A(x)$: x ist eine natürliche Zahl.

Dann:

- $\exists\, x \in \mathbb{Z} : A(x)$ ist W, denn $A(x)$ gilt für $x \in \mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$
- $\forall\, x \in \mathbb{Z} : A(x)$ ist F, denn $x \in \{0, -1, -2, \dots\} \subseteq \mathbb{Z}$ erfüllt $A(x)$ nicht.

Bsp: In allen Situationen, in denen Anna mehr Gummibärchen hat als Ben, hat Ben auch mehr Gummibärchen als Clara.

Quantorenschreibweise:

a, b, c : Anz. der GB von Anna, Ben, Clara

$$\forall a \in \mathbb{N}_0 : \forall b \in \mathbb{N}_0 : \forall c \in \mathbb{N}_0 :$$

$$a > b \Rightarrow b > c .$$

Bsp $a = 4$, $b = 3$, $c = 7$ ist diese Aussage falsch.

Bsp: (i) $\forall x \in \mathbb{N} : \exists y \in \mathbb{Z} : y - x \in \mathbb{N}$.

(ii) $\exists y \in \mathbb{Z} : \forall x \in \mathbb{N} : y - x \in \mathbb{N}$.

(i) $\not\Leftrightarrow$ (ii), denn:

(i) ist wahr: Denn für $y = x+1 \in \mathbb{Z}$ ist
$$y - x = 1 \in \mathbb{N}.$$

(ii) ist falsch: Es gibt kein $y \in \mathbb{Z}$, das dies erfüllt, denn:

Denn wenn wir ein solches y gefunden hätten, dann wäre $y \in \mathbb{N}$ und dann wäre für $x = y+1 \in \mathbb{N}$ die Differenz $y - x = y - y - 1 = -1 \notin \mathbb{N}$.

! Also: Bei verschiedenen Quantoren ist Reihenfolge wichtig!!

-4-

Negation von Quantoren:

Satz

Für eine Menge M und Aussagen $A(x)$ für $x \in M$ gilt:

(a) $\neg(\forall x : A(x)) \Leftrightarrow (\exists x : \neg A(x))$

(b) $\neg(\exists x : A(x)) \Leftrightarrow (\forall x : \neg A(x))$

(Manchmal wird für (b) auch geschrieben $\nexists x : A(x)$.)

<u>Bsp:</u> „Für alle reellen Zahlen x gilt $x^2 > 0$."

$\forall\ x \in \mathbb{R} : x^2 > 0.$

Negation: $\neg(\forall x \in \mathbb{R} : x^2 > 0) \Leftrightarrow \exists\, x \in \mathbb{R} : \underbrace{x^2 \leq 0}_{\neg(x^2 > 0)}$

diese ist wahr, denn $x = 0$ ist eine solche Zahl.

D.h. die Aussage $(\forall x \in \mathbb{R} : x^2 > 0)$ ist falsch.