Gleichungen und Ungleichungen

Grundprinzipien für die Lösung von

(i) linearen (Un-)Gleichungen

(ii) quadratischen (Un-)Gleichungen,

(iii) Betrags(un-)gleichungen,

(iv) Wurzel(un-)gleichungen,

(v) Bruch(un-)gleichungen.

$2x - 3 = 5$

$5x^2 - \frac{7}{8}x = \pi$

$| \cdot |$

$\sqrt[n]{}$

$\frac{x}{x-1} = 7$

Definition

1. Sei M eine Menge, die sogenannte Grundgesamtheit. Alle Lösungen sollen Elemente dieser Menge sein.
2. Sei $f(x) = 0$ eine Gleichung, wobei $f : M \to \mathbb{K}$ ($\mathbb{K}$ ein Körper) eine Abbildung ist.

Dann ist die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ der Gleichung die Menge der Elemente von M, die die Gleichung erfüllen,

$$\mathbb{L} = \{x \in M \mid f(x) = 0\}.$$

$$3x = 5 \iff \underbrace{3x - 5}_{} = 0$$

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto 3x - 5$$

Ist $\mathbb{L} = \emptyset$, so ist (Un-)Gleichung unlösbar.

Definition

1. Sei M eine Menge, die sogenannte Grundgesamtheit. Alle Lösungen sollen Elemente dieser Menge sein.
2. Sei $f(x) \geq 0$ oder $f(x) > 0$ eine Ungleichung, wobei $f : M \to \mathbb{K}$ eine Abbildung ist.

Dann ist die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ der Ungleichung die Menge der Elemente von M, die die Ungleichung erfüllen,

$$\mathbb{L} = \{x \in M \mid f(x) \geq 0\} \quad \text{bzw.} \quad \mathbb{L} = \{x \in M \mid f(x) > 0\}.$$

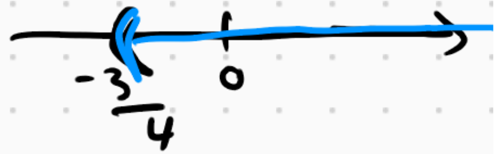
Ist $\# \mathbb{L} = 1$, dann ist (Un-)Gleichung eindeutig lösbar.

Beispiel: Ungleichung $4x+1 > -2$

$\forall x \in \mathbb{R}: \quad 4x+1>-2 \overset{|+2}{\Longleftrightarrow} 4x+3>0$

Ist $M=\mathbb{R}$ Grundgesamtheit, dann $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto 4x+3$,

$$\mathbb{L} = \{x\in\mathbb{R} \mid 4x+3>0\} = \{x\in\mathbb{R} \mid x>-\tfrac{3}{4}\}$$
$$= \left(-\tfrac{3}{4}, \infty\right)$$



Systeme von Ungleichungen
Sind Abbildungen $f_1, \dots, f_n : M \to \mathbb{K}$ und Gleichungen $f_1(x) = 0, \dots, f_j(x) = 0$ sowie Ungleichungen $f_{j+1}(x) \geq (>)0, \dots, f_n(x) \geq (>)0$ gegeben, so ist die Schnittmenge

$$\mathbb{L}_{system} = \mathbb{L}_1 \cap \dots \mathbb{L}_n$$

der zugehörigen einzelnen Lösungesmengen die Lösungsmenge des Systems von (Un-)Gleichungen.

Löse $f_k(x) \left\{ \begin{matrix} = \\ \geq \\ > \end{matrix} \right\} 0 \rightsquigarrow \mathbb{L}_k$ Lösungsmenge

$$\mathbb{L}_{system} = \mathbb{L}_1 \cap \dots \cap \mathbb{L}_n$$

<u>Bsp:</u> Lin. Gleichungssystem $5x + 2y = 1 \wedge 3x + 2y = 7$

$M = \mathbb{R}^2$

$\Leftrightarrow 5x + 2y - 1 = 0 \wedge 3x + 2y - 7 = 0$

$$\mathbb{L} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \underbrace{5x + 2y - 1}_{\rightsquigarrow f_1(x,y)} = 0 \wedge \underbrace{3x + 2y - 7}_{\rightsquigarrow f_2(x,y)} = 0\}$$

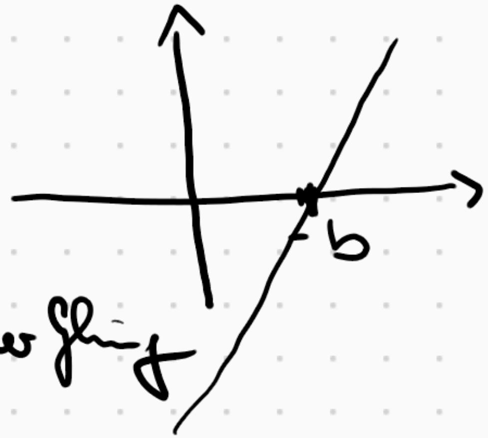
Lineare Gleichungen

Gegeben sei eine Gleichung der Form $ax = b$, wobei $a, b \in \mathbb{R}$ feste reelle Zahlen sind. Wir suchen die Lösungsmenge

$$\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid ax - b = 0\}.$$

$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto ax - b$



- Ist $a \neq 0$ (und b beliebig), dann ist $\forall x \in \mathbb{R}: \ ax = b \Leftrightarrow x = \frac{b}{a}$.
  Also ist $x = \frac{b}{a}$ eindeutig best. Lsg der Glng
  $\Rightarrow \mathbb{L} \{ \frac{b}{a} \}$
- Ist $a = 0$, so lautet die Gleichg: $\forall x \in \mathbb{R}: \ 0 \cdot x = b \Leftrightarrow 0 = b$
  Ist dann $b = 0$ (also $0 \cdot x = 0$), dann $\mathbb{L} = \mathbb{R}$.

  Ist dann $b \neq 0$, dann ist $\mathbb{L} = \emptyset$.

Satz

Sei $M = \mathbb{R}$ und $a, b \in \mathbb{R}$ gegeben. Die Gleichung $ax - b = 0$ hat die Lösungsmenge

$$\mathbb{L} = \begin{cases} \{\frac{b}{a}\}, & \text{falls } a \neq 0, \\ \mathbb{R}, & \text{falls } a = b = 0, \\ \emptyset, & \text{falls } a = 0 \land b \neq 0. \end{cases}.$$

Bsp: 1) $\pi \cdot y = \sqrt{5}$ $(a = \pi, b = \sqrt{5})$: $\mathbb{L} = \{\frac{\sqrt{5}}{\pi}\}$

2) $0 \cdot x = 8$ $(a = 0, b = 8)$: $\mathbb{L} = \emptyset$

3) Ist $M = \mathbb{Z}$ und $3y - 2 = 0$ dann gilt (in reelle Zahlen $y = \frac{2}{3}$ Lösung)

$\mathbb{L} = \emptyset$, weil $\frac{2}{3} \notin \mathbb{Z}$.

Ist $M' = \mathbb{Q}$, dann: $\mathbb{L} = \{\frac{2}{3}\}$.

Quadratische Gleichungen

$x \longmapsto ax^2+bx+c$

In der Grundmenge $M = \mathbb{R}$ suchen wir Lösungen der quadratischen Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ für festgelegte $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Ist $a = 0$, dann lautet die Gleichung

$$bx + c = 0.$$

Das ist eine lineare Gleichung, die wir lösen können.

Nun sei $a \neq 0$. Dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}$:

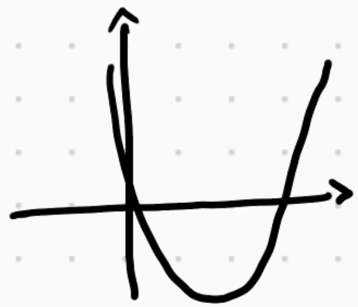
$$ax^2 + bx + c = 0 \iff x^2 + \underbrace{\frac{b}{a}}_{p} \cdot x + \underbrace{\frac{c}{a}}_{q} = 0.$$

$$\iff x^2 + px + q = 0$$

Wenn $a \neq 0$, setzen wir $p = \frac{b}{a}$ und $q = \frac{c}{a}$. Dann gilt:

$$\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid ax^2 + bx + c = 0\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + px + q = 0\}.$$

Die Gleichung $x^2 + px + q$ heißt **Normalform** der Gleichung.



Aus der Schule Lösung: $x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$ „p-q-Formel"

$D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$ Diskriminante.

Reelle Lösungen gibt es nur, wenn $D \geq 0$, d.h. wenn $\sqrt{D} \in \mathbb{R}$ existiert.

Sei $D \geq 0$. Einsetzen: $\left(-\frac{p}{2} \pm \sqrt{D}\right)^2 + p \cdot \left(-\frac{p}{2} \pm \sqrt{D}\right) + q$

$= \left(\frac{p}{2}\right)^2 \pm 2 \cdot \left(-\frac{p}{2}\right)\sqrt{D} + \sqrt{D}^2 - \frac{p^2}{2} \pm p \cdot \sqrt{D} + q$

$= \frac{p^2}{4} \mp p\sqrt{D} + D - \frac{p^2}{2} \pm p \cdot \sqrt{D} + q = \frac{p^2}{4} + \underbrace{\frac{p^2}{4} - q}_{D} - \frac{p^2}{2} + q = 0$

Satz

Es seien $p, q \in \mathbb{R}$ und $D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$. Die quadratische Gleichung $x^2 + px + q$ hat über der Grundmenge $\mathbb{R}$ die Lösungsmenge

$$\mathbb{L} = \begin{cases} \{-\frac{p}{2} + \sqrt{D}, -\frac{p}{2} - \sqrt{D}\}, & \text{falls } D > 0, \\ \{-\frac{p}{2}\}, & \text{falls } D = 0, \\ \emptyset, & \text{falls } D < 0. \end{cases}$$

Bsp: $\forall x \in \mathbb{R}$: $2x^2 + 5x + 7 = 0 \iff x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{7}{2} = 0$ Normalform

mit $p = \frac{5}{2}$, $q = \frac{7}{2}$.

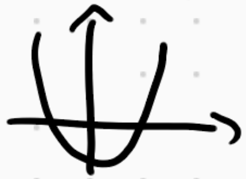
$$D = \left(\frac{5}{2 \cdot 2}\right)^2 - \frac{7}{2} = \frac{25}{16} - \frac{7}{2} = \frac{25 - 7 \cdot 8}{16} = \frac{-31}{16} < 0$$

$\Rightarrow \mathbb{L} = \emptyset$ über der Grundmenge $\mathbb{R}$.

Visualisierung:

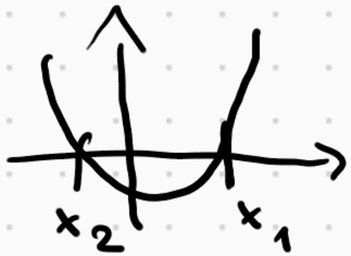
$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad x\longmapsto x^2+px+q$

$\mathrm{Graph}(f) = \{(x,\ x^2+px+q) \mid x\in\mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^2$

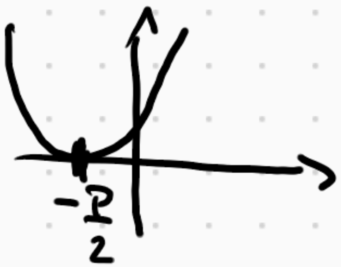


- Lösungsmenge der Gleichung $x^2+px+q=0$:

- Ist $\mathbb{L} = \{\underbrace{-\frac{p}{2}+\sqrt{D}}_{x_1},\ \underbrace{-\frac{p}{2}-\sqrt{D}}_{x_2}\}$ $(D>0)$



- Ist $\mathbb{L} = \{-\frac{p}{2}\}$ $(D=0)$:



Ist $\mathbb{L} = \emptyset$ $(D<0)$:

Forme um:

$$x^2+px+q = \underbrace{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2}_{x^2+px+\frac{p^2}{4}} - \frac{p^2}{4} + q = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 - D$$

(quadratische Ergänzung).

Der Punkt $\left(-\frac{p}{2}, -D\right)$ liegt auf der Parabel, d.h. $f\left(-\frac{p}{2}\right) = -D$, und ist der Scheitelpkt der Parabel.

Faktorisierung quadratischer Polynome

$x \longmapsto x^2 + px + q$ quadratisches Polynom

Die Nullstellen des Polynoms sind die Lösungen der Gleichung $x^2 + px + q = 0$.

Die Lösungen der quadratischen Gleichung $x^2 + px + q = 0$ sind (falls $D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \geq 0$) gegeben durch

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \quad \text{und} \quad x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

Für das quadratische Polynom $x^2 + px + q$ ergibt sich dann für alle $x \in \mathbb{R}$

$$x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2).$$

Linearfaktoren

Nachrechnen: $\forall x \in \mathbb{R}: \ (x - x_1) \cdot (x - x_2) = x^2 - x_2 \cdot x - x_1 \cdot x + x_1 \cdot x_2$

$$\boxed{\begin{aligned} &= x^2 - (x_1 + x_2) \cdot x + x_1 \cdot x_2 \\ &= x^2 + px + q \end{aligned}}$$

$-(x_1 + x_2) = -\left(-\frac{p}{2} + \sqrt{D} - \frac{p}{2} - \sqrt{D}\right) = -\left(-2\frac{p}{2}\right) = p$

$x_1 \cdot x_2 = \left(-\frac{p}{2} + \sqrt{D}\right)\left(-\frac{p}{2} - \sqrt{D}\right) = \frac{p^2}{4} - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q = \underline{\underline{q}}$

Beziehungsweise:

$$x^2 + px + q = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2 \quad \text{(Satz von Viëta).}$$

Für die Nst x_1, x_2

Bsp: $x^2 + 4x + 1$, $\quad D = \left(\frac{4}{2}\right)^2 - 1 = 4 - 1 = 3 > 0$

$x_1 = -2 + \sqrt{3}$, $x_2 = -2 - \sqrt{3}$,

- $-(x_1 + x_2) = -(-2 + \sqrt{3} - 2 - \sqrt{3}) = +4$
- $x_1 \cdot x_2 = (-2 + \sqrt{3})(-2 - \sqrt{3}) = 4 - 3 = 1$

$$\begin{aligned}
(x^2 + 4x + 1) &= (x - x_1)(x - x_2) \\
&= (x - (-2 + \sqrt{3})) \cdot (x - (-2 - \sqrt{3})) \\
&= (x + 2 - \sqrt{3}) \cdot (x + 2 + \sqrt{3})
\end{aligned}$$

Manchmal erkennt man sehr schnell eine Nst eines quad. Polynoms, z.B.:

$f(x) = x^2 + 2x - 3$ hat Nst $x_1 = 1$.

$f(1) = 1 + 2 - 3 = 0$

<u>1. Möglichkeit</u>: Satz von Vieta: $-p = x_1 + x_2$

hier: $-2 = 1 + x_2 \Leftrightarrow \underline{\underline{x_2 = -3}}$

$\Rightarrow f(x) = x^2 + 2x - 3 = \underline{\underline{(x-1)(x+3)}}$

<u>2. Möglichkeit</u>: Polynomdivision

$$
\begin{array}{l}
(x^2 + 2x - 3) : (x-1) = x + 3 \\
\underline{-(x^2 - x)} \\
\quad\quad 3x - 3 \\
\quad\; \underline{-(3x - 3)} \\
\quad\quad\quad\quad 0
\end{array}
$$

also: $x^2 + 2x - 3 = (x-1)(x+3)$

Nst: $x_1 = 1,\ x_2 = -3$

Was passiert, wenn man für die quad. Gleichung $x^2+px+q=0$ nur eine Lsg $x=-\frac{p}{2}$ erhält?

D.h. im Fall $D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=0 \iff q=\left(\frac{p}{2}\right)^2$

D.h. $$x^2+px+\left(\frac{p}{2}\right)^2=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2$$
$$=\left(x-\left(-\frac{p}{2}\right)\right)\cdot\left(x-\left(-\frac{p}{2}\right)\right)$$

Man sagt: Das Polynom hat eine doppelte Nullstelle.

„Bruchgleichungen"

Beispiel

Wir suchen reelle Lösungen von $-\frac{9}{4x-12} = x$.

Einschränkung der Grundgesamtheit M durch Nullstellen der Nenner: Wann ist $4x-12=0$?

$\Leftrightarrow 4x = 12 \Leftrightarrow x = \frac{12}{4} = 3$

$\Rightarrow M = \mathbb{R} \setminus \{3\}$.

$\forall x \in M: \quad -\frac{9}{4x-12} = x \iff -9 = x(4x-12)$

$\Leftrightarrow -9 = 4x^2 - 12x \quad | +9$

$\Leftrightarrow 0 = 4x^2 - 12x + 9 \quad | :4$

$\Leftrightarrow 0 = x^2 \underbrace{-3}_{p}x + \underbrace{\frac{9}{4}}_{q}$ quad. Gl. in Normalform

$D = \left(\frac{-3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} = 0$, Lsg $x = \frac{-p}{2} = \frac{3}{2}$, also $\mathbb{L} = \left\{\frac{3}{2}\right\}$ //

Beispiel

Wir suchen reelle Lösungen von $\frac{x+5}{x^2+4} = 1$.

Muss die Grundgesamtheit M eingeschränkt werden?

Suche Nst x^2+4. Aber $x^2+4 \geq 4 > 0$, also gibt es keine Nst des Nenners in $\mathbb{R}$, also: $\underline{M = \mathbb{R}}$

$$\forall x \in \mathbb{R}: \quad \frac{x+5}{x^2+4} = 1 \iff x+5 = x^2+4 \quad \Big| -(x-5)$$

$$\iff 0 = x^2 + 4 - x - 5$$

$$\iff 0 = x^2 \underset{-1}{-} x \underset{-1}{-1}$$ quad. Gl. in Normalform

mit Diskriminante $D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4}$

Lsgen $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} = +\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$, also $x_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$

$x_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}$

$$\Rightarrow \mathbb{L} = \left\{ \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right\}$$

Bemerkung

Die zugehörigen Funktionen

$$x \mapsto -\frac{9}{4x-12},$$

$$x \mapsto \frac{x+5}{x^2+4}$$

heißen **gebrochen rationale Funktionen**. Sie sind Brüche von Polynomen.

Rezept: 1) Bestimme Grundgesamtheit dadurch, dass NSt der Nenner ausgeschlossen werden.

2) Multipliziere mit den Nennern durch, um polynomiale Gleichung zu erhalten.

3) Löse diese polynomiale Gleichung <u>auf der Grundgesamtheit</u>.

Lineare Ungleichungen (in einer Variablen)

Lineare Ungleichungen

Für feste $a, b \in \mathbb{R}$ löse $ax + b \geq 0$ bzw. $ax + b > 0$.

Erinnerung: Die Lösungsmenge der Gleichung $ax + b = 0$ ist

$$\mathbb{L} = \begin{cases} \{-\frac{b}{a}\}, & \text{falls } a \neq 0, \\ \mathbb{R}, & \text{falls } a = b = 0, \\ \emptyset, & \text{falls } a = 0 \wedge b \neq 0. \end{cases}$$

$\forall x \in \mathbb{R}$:

$a \neq 0$: $ax + b = 0 \iff x + \frac{b}{a} = 0$

Bei der Umformung einer Ungleichung muss man das Vorzeichen von a bedenken. Teilt man durch eine negative Zahl, $a < 0$ so dreht sich das Relationszeichen um!

Ist $a < 0$: $ax + b \geq 0 \not\iff x + \frac{b}{a} \geq 0$

Wenn $a > 0$: $\forall x \in \mathbb{R}$: $ax + b \geq 0 \iff x + \frac{b}{a} \geq 0 \iff x \geq -\frac{b}{a} \Rightarrow \mathbb{L} = [-\frac{b}{a}, \infty)$

Wenn $a < 0$: $\forall x \in \mathbb{R}$: $ax + b \geq 0 \iff x + \frac{b}{a} \leq 0 \iff x \leq -\frac{b}{a} \Rightarrow \mathbb{L} = (-\infty, -\frac{b}{a}]$

$a = 0$: $b \geq 0$ — W: $\mathbb{L} = \mathbb{R}$
— F: $\mathbb{L} = \emptyset$

Ungleichung

Satz

Die Lösungsmenge der Gleichung $ax + b \geq 0$ für feste $a, b \in \mathbb{R}$ ist gegeben durch

$$\mathbb{L} = \begin{cases} [-\frac{b}{a}, \infty), & \text{falls } a > 0, \\ (-\infty, -\frac{b}{a}], & \text{falls } a < 0, \\ \mathbb{R}, & \text{falls } a = 0 \wedge b \geq 0, \\ \emptyset, & \text{falls } a = 0 \wedge b < 0. \end{cases} .$$

Löse $ax + b > 0$:

- $a > 0$: $\forall x \in \mathbb{R}$: $ax + b > 0 \Leftrightarrow x + \frac{b}{a} > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{b}{a}$: $\mathbb{L} = (-\frac{b}{a}, \infty)$
- $a < 0$: $\forall x \in \mathbb{R}$: $ax + b > 0 \Leftrightarrow x + \frac{b}{a} < 0 \Leftrightarrow x < -\frac{b}{a}$: $\mathbb{L} = (-\infty, -\frac{b}{a})$
- $a = 0$: $b > 0$ — W : $\mathbb{L} = \mathbb{R}$
  — F : $\mathbb{L} = \emptyset$

Ungleichung

Satz

Die Lösungsmenge der Gleichung $ax + b > 0$ für feste $a, b \in \mathbb{R}$ ist gegeben durch

$$\mathbb{L} = \begin{cases} (-\frac{b}{a}, \infty), & \text{falls } a > 0, \\ (-\infty, -\frac{b}{a}), & \text{falls } a < 0, \\ \mathbb{R}, & \text{falls } a = 0 \wedge b \geq 0, \\ \emptyset, & \text{falls } a = 0 \wedge b < 0. \end{cases}$$

Was passiert, wenn wir $ax + b \leq 0$ oder $ax + b < 0$ gegeben haben? – 1. Möglichkeit: System lösen wie oben.

→ 2. Möglichkeit: Multiplizieren mit (-1) führt auf eine der diskutierten Gleichungen.

-3-

Beispiel: Löse über $\mathbb{R}$:

- $3x-7 \geq 0 \overset{|+7}{\iff} x \geq \frac{7}{3}$, d.h. $\mathbb{L} = \left[\frac{7}{3}, \infty\right)$
- $-2x > -5 \iff x < \frac{-5}{-2} \iff x < \frac{5}{2}$, d.h. $\mathbb{L} = \left(-\infty, \frac{5}{2}\right)$

Beispiel: (1) $3x-8 \leq 0 \iff 3x \leq 8 \iff x \leq \frac{8}{3}$, d.h. $\mathbb{L}_1 = \left(-\infty, \frac{8}{3}\right]$

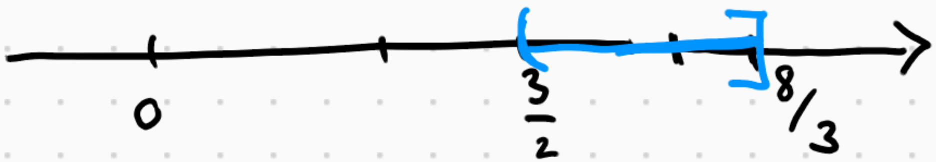
(2) $-2x+3<0 \iff -2x<-3 \iff x > \frac{-3}{-2} \iff x > \frac{3}{2}$,

d.h. $\mathbb{L}_2 = \left(\frac{3}{2}, \infty\right)$

Das System $\left\{\begin{array}{l} 3x-8 \leq 0 \\ -2x+3<0 \end{array}\right\}$ hat die Lösungsmenge $\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2$

d.h. $\mathbb{L} = \left(-\infty, \frac{8}{3}\right] \cap \left(\frac{3}{2}, \infty\right)$

$= \left(\frac{3}{2}, \frac{8}{3}\right]$



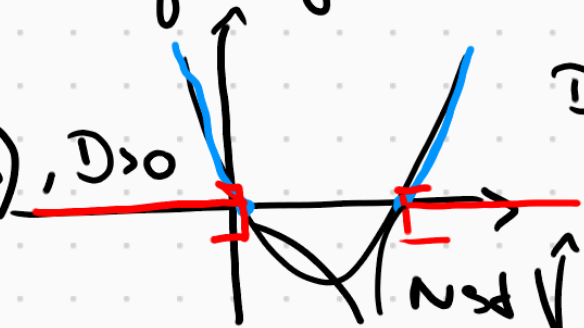
Quadratische Ungleichungen

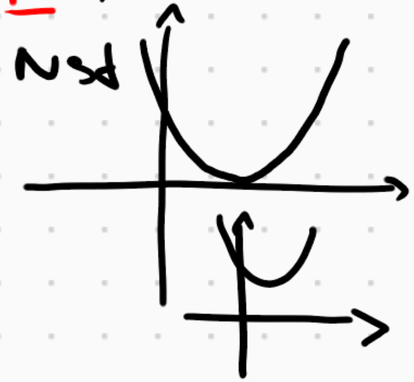
(in einer Variablen)

1) Suche reelle Lösungen $x \in \mathbb{R}$ der Ungleichung $x^2 + px + q \geq 0$ (für feste $p, q \in \mathbb{R}$).

$D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$.

$$\Rightarrow \mathbb{L}_1 = \begin{cases} \left(-\infty, -\frac{p}{2} - \sqrt{D}\right] \cup \left[-\frac{p}{2} + \sqrt{D}, \infty\right), & D > 0 \\ \mathbb{R}, & D \leq 0 \end{cases}$$





2) Suche reelle Lösungen $x \in \mathbb{R}$ von $x^2 + px + q \leq 0$:

$$\Rightarrow \mathbb{L}_2 = \begin{cases} \left[-\frac{p}{2} - \sqrt{D}, -\frac{p}{2} + \sqrt{D}\right] & D > 0 \\ \left\{-\frac{p}{2}\right\} & D = 0 \\ \emptyset & D < 0 \end{cases}$$

-2-

Satz

Die reellen Lösungen der quadratischen Ungleichung $x^2 + px + q \geq 0$ mit Diskriminante $D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$ sind gegeben durch

$$\mathbb{L} = \begin{cases} (-\infty, -\frac{p}{2} - \sqrt{D}] \cup [-\frac{p}{2} + \sqrt{D}, \infty), & \text{falls } D > 0, \\ \mathbb{R}, & \text{falls } D \leq 0. \end{cases}$$

Satz

Die reellen Lösungen der quadratischen Ungleichung $x^2 + px + q \leq 0$ mit Diskriminante $D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$ sind gegeben durch

$$\mathbb{L} = \begin{cases} [-\frac{p}{2} - \sqrt{D}, -\frac{p}{2} + \sqrt{D}], & \text{falls } D > 0, \\ \{-\frac{p}{2}\}, & \text{falls } D = 0, \\ \emptyset, & \text{falls } D < 0. \end{cases}$$

Was ist mit

$\mathbb{L}_1$

- $x^2 + px + q > 0$?

  $\Rightarrow \mathbb{L} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{L}_2$

$\mathbb{L}_2$

- $x^2 + px + q < 0$:

  $\mathbb{L} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{L}_1$

Beispiele:

- $x^2+1 \geq 0$: $\mathbb{L}=\mathbb{R}$
- $x^2-1<0$: $\mathbb{L}=(-1,1)$

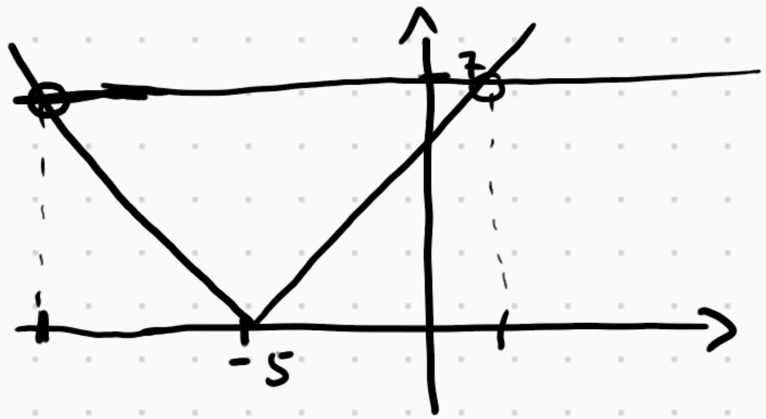
- $x^2-1>0$: $\mathbb{L}=\mathbb{R}\setminus[-1,1]=(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$
- $-x^2<0$

$\forall_{v\in\mathbb{R}}:$ $\Leftrightarrow x^2>0$: $\mathbb{L}=\mathbb{R}\setminus\{0\}$

Betragsgleichungen

Beispiel

Löse in $\mathbb{R}$ die Gleichung $|x+5| = 7$.



1. Fall: $x+5 \geq 0$. Für solche x gilt:

$|x+5| = 7 \iff x+5 = 7 \iff \underline{x = 2}$

Probe: $2+5 = 7 \geq 0$ ✓

2. Fall: $x+5 < 0$. Für solche x gilt:

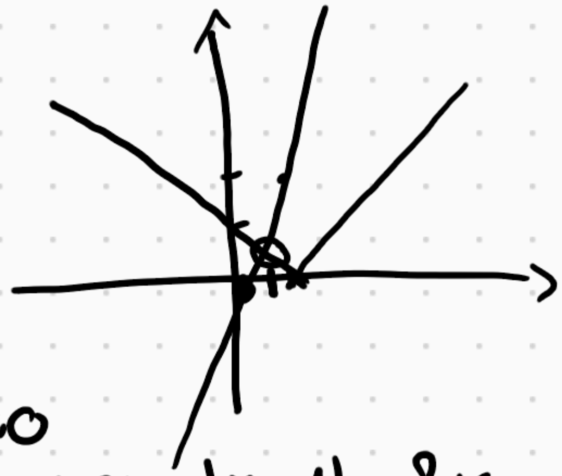
$|x+5| = 7 \iff -(x+5) = 7 \iff x+5 = -7 \iff \underline{x = -12}$

Probe: $-12+5 = -7 < 0$ ✓

Also ist die Lösungsmenge $\mathbb{L} = \{2, -12\}$

Beispiel

Löse in $\mathbb{R}$ die Gleichung $|x-1| = 2x$.



1. Fall: $x-1 \geq 0$. Für solche x gilt:

$|x-1| = 2x \iff x-1 = 2x \iff \underline{-1 = x}$

Probe: $-1-1 = -2 < 0$ ↯ $x-1 \geq 0$

Also ist $x = -1$ keine Lsg von $|x-1| = 2x$.

2. Fall: $x-1 < 0$ Für solche x gilt:

$|x-1| = 2x \iff -(x-1) = 2x \iff -x+1 = 2x \iff 1 = 3x \iff \underline{x = \frac{1}{3}}$

Probe: $\frac{1}{3} - 1 = \frac{1}{3} - \frac{3}{3} = -\frac{2}{3} < 0$ ✓

Also ist $\mathbb{L} = \left\{ \frac{1}{3} \right\}$ Lösungsmenge der Gleichg $|x-1| = 2x$.

Betragsungleichungen

Beispiel

Löse in $\mathbb{R}$ die Ungleichung $|-4x-9| > 2$.

1. Fall: $-4x-9 \geq 0$. Für solche x gilt:

$$|-4x-9|>2 \iff -4x-9>2$$

$$\iff -4x > 11 \iff \boxed{x < -\frac{11}{4}}$$

Dabei ist $-4x-9\geq 0 \iff -4x \geq 9 \iff x \leq -\frac{9}{4}$

2. Fall: $-4x-9<0$. Für solche x gilt:

$$|-4x-9|>2 \iff -(-4x-9)>2 \iff 4x+9>2 \iff 4x>-7 \iff \boxed{x>-\frac{7}{4}}$$

Dabei $-4x-9<0 \iff -4x<9 \iff x>-\frac{9}{4}$

Es folgt $\mathbb{L} = (-\infty, -\frac{11}{4}) \cup (-\frac{7}{4}, \infty)$.

Wurzelgleichungen

Beispiel

Für feste $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ löse die Gleichung $\sqrt{ax+b} = cx + d$.

Zu beachten:

- Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist die linke Seite definiert, also wann ist $ax + b \geq 0$?
- Weil die linke Seite $\sqrt{ax+b} \geq 0$, ist dies auch eine Bedingung für die rechte Seite.

Für $x \in \mathbb{R}$ mit $ax+b \geq 0$ und $cx+d \geq 0$ gilt:

$$\sqrt{ax+b} = cx+d \overset{(\,)^2}{\Longleftrightarrow} ax+b = (cx+d)^2$$

$$\Leftrightarrow ax+b = c^2x^2 + 2cdx + d^2$$

$$\Leftrightarrow 0 = c^2x^2 + (2cd-a)x + d^2 - b$$

Die Lösungen $x \in \mathbb{R}$ der Gleichung $\sqrt{ax+b} = cx + d$ sind die Lösungen der quadratischen Gleichung

$$0 = c^2x^2 + (2cd - a)x + d^2 - b,$$

die zusätzlich $ax + b \geq 0$ sowie $cx + d \geq 0$ erfüllen.

-1-

Beispiel: Löse $x \in \mathbb{R}$: $\sqrt{2x+1} = x-17$

Notwendig für Lösungen $x \in \mathbb{R}$ ist: $2x+1 \geq 0 \wedge x-17 \geq 0$.

Für solche x gilt: $\sqrt{2x+1} = x-17 \iff 2x+1 = (x-17)^2$

$\iff 2x+1 = x^2 - 34x + 17^2 \iff 0 = x^2 + (-34-2)x + 289 - 1$

$\iff 0 = x^2 \underbrace{-36}_{p}x + \underbrace{288}_{q}$.

$D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \left(\frac{36}{2}\right)^2 - 288$

$= 324 - 288 = 36 > 0$.

$\iff \underline{x} = -\frac{-36}{2} \pm \sqrt{D}$

$= 18 \pm 6 = \begin{cases} 24 \\ \underline{12} \end{cases}$ ← fällt weg.

Probe: Setze Lösung 24, 12 der quad. Gl. ein in die Voraussetzungen:

$2 \cdot 24 + 1 = 49 \geq 0$ ✓, $24 - 17 = 7 \geq 0$ ✓

$2 \cdot 12 + 1 = 25 \geq 0$ ✓, $12 - 17 = \underline{-5 < 0}$

Daher ist die Lösungsmenge der Wurzelgleich. $\mathbb{L} = \{24\}$.