Dr. K. Maurischat
Dr. S. Bleß

Aachen, 28. September 2020

Grundlagen der Mathematik

im Vorkurs Mathematik 2020, RWTH Aachen University

— Logik —

Aufgabe 1

Stellen Sie Wahrheitstafeln für die folgenden Formeln auf:

a) $A \wedge (B \vee C)$, b) $(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$, c) $\neg A \vee \neg B$, d) $A \vee \neg A$.

Aufgabe 2

Man beweise die folgenden Aussagen durch Vergleich der Wahrheitstafeln beider Seiten:

a) $A \wedge (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \wedge C$,
b) $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$,
c) $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$,
d) $\neg(\neg A) \Leftrightarrow A$,
e) $A \vee (B \wedge \neg B) \Leftrightarrow A$,
f) $A \wedge (\neg A \vee B) \Rightarrow B$.

Aufgabe 3

Geben Sie für die logischen Aussagen

a) $3x - 7 = 2 \quad \Rightarrow \quad 3x = 9 \quad \Rightarrow \quad x = 3$

b) $3x - 7 = 2 \quad \Leftrightarrow \quad 3x = 9 \quad \Leftrightarrow \quad x = 3$

c) $3x - 7 = 2 \quad \Leftarrow \quad 3x = 9 \quad \Leftarrow \quad x = 3$

jeweils an, für welche der folgenden Aussagen sie als Begründung dienen können:

(1) Die Lösungsmenge der Gleichung $3x - 7 = 2$ für $x \in \mathbb{R}$ ist $\{3\}$.

(2) 3 ist eine Lösung der Gleichung $3x - 7 = 2$ für $x \in \mathbb{R}$.

(3) Höchstens 3 ist eine Lösung der Gleichung $3x - 7 = 2$ für $x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 4

Welche der folgenden Ausführungen stellen einen Beweis der Tatsache $(m-n)^2 + 4mn = (m+n)^2$ für alle $m, n \in \mathbb{N}$ dar?

(1) Für $m, n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned}
&(m-n)^2 + 4mn = (m+n)^2 && \Rightarrow \\
&m^2 - 2mn + n^2 + 4mn = m^2 + 2mn + n^2 && \Rightarrow \\
&-2mn + 4mn = 2mn && \Rightarrow \\
&2mn = 2mn,
\end{aligned}$$

und da $2mn = 2mn$ stets eine wahre Aussage ist, muß $(m-n)^2 + 4mn = (m+n)^2$ für alle $m, n \in \mathbb{N}$ gelten.

(2) Für $m, n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned}
&(m-n)^2 + 4mn = (m+n)^2 && \Leftrightarrow \\
&m^2 - 2mn + n^2 + 4mn = m^2 + 2mn + n^2 && \Leftrightarrow \\
&-2mn + 4mn = 2mn && \Leftrightarrow \\
&2mn = 2mn,
\end{aligned}$$

und da $2mn = 2mn$ stets eine wahre Aussage ist, muß $(m-n)^2 + 4mn = (m+n)^2$ für alle $m, n \in \mathbb{N}$ gelten.

(3) Für $m, n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned}
&(m-n)^2 + 4mn = (m+n)^2 && \Leftarrow \\
&m^2 - 2mn + n^2 + 4mn = m^2 + 2mn + n^2 && \Leftarrow \\
&-2mn + 4mn = 2mn && \Leftarrow \\
&2mn = 2mn,
\end{aligned}$$

und da $2mn = 2mn$ stets eine wahre Aussage ist, muß $(m-n)^2 + 4mn = (m+n)^2$ für alle $m, n \in \mathbb{N}$ gelten.

(4) Für alle $m, n \in \mathbb{N}$ gilt

$$(m-n)^2 + 4mn = m^2 - 2mn + n^2 + 4mn = m^2 + 2mn + n^2 = (m+n)^2.$$

Aufgabe 5

Geben Sie an, welche der folgenden Rechnungen aus welchem Grund als Begründung für

$$(a-b)^2 + ab - b^2 = a\frac{a^2 - b^2}{a+b}$$

für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \neq -b$ gut beziehungsweise weniger gut sind.

(1) $(a-b)^2+ab-b^2 = a^2-2ab+b^2+ab-b^2 = a^2-ab = a(a-b) = a\frac{(a-b)(a+b)}{a+b} = a\frac{a^2-b^2}{a+b}$.

(2) $(a-b)^2+ab-b^2 = a^2-2ab+b^2+ab-b^2 = a^2-ab = a\frac{a^2-b^2}{a+b} = a\frac{(a-b)(a+b)}{a+b} = a(a-b) = a^2-ab$.

(3) $(a-b)^2+ab-b^2 = a^2-2ab+b^2+ab-b^2 = a^2-ab$ und $a\frac{a^2-b^2}{a+b} = a\frac{(a-b)(a+b)}{a+b} = a(a-b) = a^2-ab$.

Aufgabe 6

Finden Sie den Fehler in der folgenden ¨Aufgabenlösung¨. Lösen Sie danach die Aufgabe korrekt.

Aufgabe: Man bestimme alle $x \in \mathbb{R}$, die sowohl $1+x^2=0$ als auch $1+x^3=0$ erfüllen.

Lösungsversuch: Es gilt

$$\begin{aligned}
&1+x^2=0 \quad \text{und} \quad 1+x^3=0 && \Rightarrow \\
&1+x^2=1+x^3 && \Rightarrow \\
&x^2=x^3 && \Rightarrow \\
&x=0 \quad \text{oder} \quad 1=x,
\end{aligned}$$

also erfüllen 0 und 1 gleichzeitig $1+x^2=0$ und $1+x^3=0$.

Aufgabe 7

a) Geben Sie für jede der folgenden Bedingungen an, ob sie notwendig und/oder hinreichend dafür ist, dass ein Dreieck gleichseitig ist.

(i) Alle drei Seiten sind gleich lang.

(ii) Zwei Seiten des Dreiecks sind gleich lang.

(iii) Alle drei Winkel im Dreieck sind gleich 60 °.

(iv) Zwei Winkel im Dreieck sind gleich 60 °.

(v) Alle drei Seiten habe eine Länge von $5\,$cm.

(vi) Für eine Seite a des Dreiecks gilt $h_{\mathrm{a}} = \frac{a}{2}\sqrt{3}$, wobei a die Länge der Seite a und h_{a} die Länge der Höhe auf a bezeichnet.

b) Geben Sie für jede der folgenden Bedingungen an, ob sie notwendig und/oder hinreichend dafür ist, dass ein Viereck ein Parallelogramm ist.

(i) Alle vier Seiten sind gleich lang.

(ii) Zwei Seiten sind gleich lang.

(iii) Es gibt zwei Paare gleich langer Seiten.

(iv) Gegenüberliegende Seiten sind gleich lang.

(v) Alle vier Winkel sind gleich groß.

(vi) Zwei Winkel sind gleich groß.

(vii) Es gibt zwei Paare gleich großer Winkel.

(viii) Gegenüberliegende Winkel sind gleich groß.

(ix) Die Diagonalen halbieren sich.

Aufgabe 8

Schreiben Sie die folgenden Aussagen mit den Quantoren $\forall$ und $\exists$, und bilden Sie dann die formale Verneinung (ebenfalls in Quantorenschreibweise).

a) Es gibt ein $x \in \mathbb{Z}$ mit $x > 0$.

b) Für alle $x \in \mathbb{Z}$ gilt $x > 0$.

c) Für alle $x \in \mathbb{Z}$ gibt es ein $y \in \mathbb{Z}$ mit $x > y$.

d) Es gibt ein $x \in \mathbb{Z}$, so dass für alle $y \in \mathbb{Z}$ gilt: $x > y$.

Aufgabe 9

Entscheiden Sie jeweils, ob die zweite Aussage die formale Verneinung der ersten Aussage ist. Falls das nicht der Fall sein sollte, geben Sie für beide Aussagen jeweils eine korrekte Verneinung an.

a) Die Zahl 4 ist durch 2 teilbar. – Die Zahl 4 ist durch 3 teilbar.

b) Die Zahl 6 ist durch 3 teilbar. – Die Zahl 6 ist nicht durch 3 teilbar.

c) Alle natürlichen Zahlen sind gerade. – Alle natürlichen Zahlen sind ungerade.

d) Alle natürlichen Zahlen sind ganze Zahlen. – Keine natürliche Zahl ist eine ganze Zahl.

e) Jede gerade Zahl ist durch 4 teilbar. – Es gibt eine gerade Zahl, die nicht durch 4 teilbar ist.

f) Es gibt eine natürliche Zahl, die nicht durch 1 teilbar ist. – Es gibt eine natürliche Zahl, die durch 1 teilbar ist.

g) Alle natürlichen Zahlen, die durch 6 teilbar sind, sind auch durch 3 teilbar. – Es gibt natürliche Zahlen, die weder durch 6 noch durch 3 teilbar sind.

h) Jede gerade Zahl größer 2 läßt sich als Summe zweier Primzahlen darstellen. – Es gibt eine gerade Zahl n größer 2, so dass für alle Primzahlen p und q gilt: $p + q \neq n$.

i) Zu jeder reellen Zahl $r > 0$ gibt es eine natürliche Zahl N, so dass für alle $n \geqslant N$ gilt: $0 < \frac{1}{n}(1 + (-1)^n) < r$. – Es gibt eine reelle Zahl $r > 0$, so dass für alle natürlichen Zahlen N stets ein $n \geqslant N$ existiert mit $\frac{1}{n}(1 + (-1)^n) > r$. (Schreiben Sie zunächst beide Aussagen in Quantorenschreibweise!)

Aufgabe 10

Bestimmen Sie die Wahrheitswerte der folgenden Aussagen.

a) $\forall x \in \mathbb{Z} : x > 0$, b) $\exists x \in \mathbb{Z} : x > 0$, c) $\forall x \in \mathbb{Z}\, \forall y \in \mathbb{Z} : x > y$,
d) $\forall x \in \mathbb{Z}\, \exists y \in \mathbb{Z} : x > y$, e) $\exists y \in \mathbb{Z}\, \forall x \in \mathbb{Z} : x > y$, f) $\exists x \in \mathbb{Z}\, \exists y \in \mathbb{Z} : x > y$.

Aufgabe 11

Tragen Sie in den folgenden Sätzen für (1) und (2) eine Bedingung beziehungsweise eine Aussage ein, so dass der erste Satz eine wahre Aussage und der zweite Satz eine falsche Aussage ist.

¨Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit (1) gilt (2).¨ – ¨Es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ mit (1), das (2) erfüllt.¨

Aufgabe 12 (∗)

Seien A und B zwei Aussagen und $Z(A, B)$ eine aus A und B zusammengesetzte Aussage, d.h. eine Aussage, deren Wahrheitswert durch die Wahrheitswerte von A und B eindeutig bestimmt ist.

1. Wieviele solche Aussagen $Z(A, B)$ gibt es (bis auf Äquivalenz) ?
2. Wieviele davon sind symmetrisch in A und B, d.h. $Z(A, B) \Leftrightarrow Z(B, A)$?
3. Geben Sie für jede Aussage $Z(A, B)$ eine Darstellung mit Hilfe der Symbole $\neg, \vee$ und $\wedge$ an.

Aufgabe 13

Der Kommissar hat einen Fall mit drei Verdächtigen P,Q und R. Die Ermittlungsergebnisse sind:

1. Falls P und Q nicht beide beteiligt waren, dann ist R außer Verdacht.
2. Ist Q schuldig oder R unschuldig, dann kann P nicht der Täter sein.
3. Mindestens einer der drei war der Täter.

Ermitteln Sie den oder die Täter.

Aufgabe 14

Der Kommissar hat einen neuen Fall mit vier Verdächtigen P,Q,R und S. Die Ermittlungsergebnisse sind:

1. Ist P unschuldig, dann ist auch Q unschuldig. R wäre aber dann ganz sicher einer der Täter.

2. Ist S unschuldig, dann ist Q einer der Täter.
3. Ist S schuldig, dann ist auch R schuldig.
4. R hat ein todsicheres Alibi.

Ermitteln Sie den oder die Täter.

— Mengenlehre —

Aufgabe 15

Seien $A = \{1,2\}$, $B = \{2,3\}$ und $C = \{1,2,3,4\}$. Man bilde die folgenden Mengen:

a) $A \cup B$, b) $A \cap B$, c) $(A \cup B) \cup C$, d) $(A \cap B) \cap C$,
e) $(A \cup B) \cap C$, f) $(A \cap B) \cup C$, g) $\complement_A B$, h) $\complement_B A$,
i) $(A \setminus B) \setminus C$, j) $A \setminus (B \setminus C)$, k) $\mathfrak{P}(\emptyset)$, l) $\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(\emptyset))$,
m) $\mathfrak{P}(A)$, n) $\mathfrak{P}(A \cap B)$, o) $\mathfrak{P}((A \cup B) \cap C)$.

Aufgabe 16

Geben Sie jeweils an, wie viele Elemente die Menge enthält.

a) $\emptyset$, b) $\{\emptyset\}$, c) $\{\{\emptyset\}\}$,
d) $\{1,2,3\}$, e) $\{\{1,2,3\}\}$, f) $\{1,\{2,3\}\}$,
g) $\{1,\{2,\{3\}\}\}$, h) $\{\emptyset,1,\{1\},\{1,1\}\}$, i) $\{\{\emptyset\},\{2\},\{2,\{2\}\}\}$,
j) $\{1,2\} \cup \{2,4\}$, k) $\{1,2\} \cap \{2,4\}$, l) $\{1,2\} \setminus \{2,4\}$,
m) $\{1,2,3\} \setminus \{2,3\}$, n) $\{1,2,3\} \setminus \{\{2,3\}\}$, o) $\{1,2,3\} \setminus \{\{2\},3\}$,
p) $\{1,\{2,3\}\} \setminus \{2,3\}$, q) $\{1,2,\{3\}\} \setminus \{\{2\},\{3\}\}$, r) $\{1,2,\{1,2,3\}\} \setminus \{\{1,2\}\}$.

Aufgabe 17

Es seien A und B zwei Mengen mit $A \subseteq B$. Bestimmen Sie

a) $A \cup \emptyset$, b) $A \cap \emptyset$, c) $A \cup B$, d) $A \cap B$, e) $\complement_B B$, f) $\complement_A (A \cap B)$,
g) $\complement_B \emptyset$, h) $\emptyset \setminus B$, i) $\complement_B(\complement_B A)$, j) $A \cup \complement_B A$, k) $A \cap \complement_B A$, l) $A \cup \complement_B \emptyset$,
m) $A \cap \complement_B \emptyset$, n) $A \setminus \complement_B B$, o) $A \setminus \complement_B A$.

Aufgabe 18

Man beweise für beliebige Mengen A, B und C:

a) $A \subseteq B \ \wedge\ B \subseteq C \quad \Rightarrow \quad A \subseteq C$.

b) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.

c) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

d) $A \cap B = B \quad \Leftrightarrow \quad B \subseteq A$.

e) $A \subseteq B \quad \Rightarrow \quad \complement_C B \subseteq \complement_C A$.

f) Falls $A \subseteq C$ gilt, folgt aus $\complement_C B \subseteq \complement_C A$ stets $A \subseteq B$. Man gebe ein Beispiel dafür an, dass im Falle $A \not\subseteq C$ aus $\complement_C B \subseteq \complement_C A$ nicht notwendigerweise $A \subseteq B$ folgen muss.

g) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$.

Aufgabe 19

Man beweise für beliebige Mengen X und Y:

a) $X \subseteq Y \quad \Rightarrow \quad \mathfrak{P}(X) \subseteq \mathfrak{P}(Y)$.

b) $\mathfrak{P}(X) \cup \mathfrak{P}(Y) \subseteq \mathfrak{P}(X \cup Y)$. Man gebe ein Beispiel dafür an, dass im Allgemeinen nicht $\mathfrak{P}(X) \cup \mathfrak{P}(Y) = \mathfrak{P}(X \cup Y)$ gilt.

Aufgabe 20 (∗)

Berechnen Sie $\bigcap\limits_{r \in \mathbb{R}} \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant r\}$, und beweisen Sie Ihr Ergebnis.

Aufgabe 21 (∗)

Es bezeichne A eine Menge. Zeigen Sie die Äquivalenz der Aussagen

(i) $B \setminus A = B$ für alle Mengen B

(ii) $(A \cup B) \setminus A = B$ für alle Mengen B

(iii) $A = \emptyset$

durch einen Ringschluss, das heißt: Zeigen Sie (i) ⇒ (ii), (ii) ⇒ (iii) und (iii) ⇒ (i).

— Abbildungen —

Aufgabe 22

Welche der folgenden Ausdrücke definieren Abbildungen? Falls eine Abbildung vorliegt, untersuchen Sie diese auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität.

a) $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$; $\quad f_2 : \mathbb{R} \to [0, \infty)$, $x \mapsto x^2$; $\quad f_3 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $x \mapsto x^2$;

b) $g_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3$; $\quad g_2 : \mathbb{R} \to [0, \infty)$, $x \mapsto x^3$; $\quad g_3 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $x \mapsto x^3$;

c) $w_1 : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{x}$; $\quad w_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \pm\sqrt{x^2}$;

d) $d : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, $(m, n) \mapsto m - n$;

e) $p_m : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $n \mapsto m \cdot n$ (Untersuchung in Abhängigkeit von $m \in \mathbb{N}$);

f) $F_M : \mathfrak{P}(M) \to \mathfrak{P}(M)$, $A \mapsto \complement_M A$ (Untersuchung in Abhängigkeit von $M \neq \emptyset$);

g) $H_M : M \to \mathfrak{P}(M)$, $x \mapsto \{x\}$ (Untersuchung in Abhängigkeit von der Menge $M \neq \emptyset$);

h) $u : (0, \infty) \to [2, \infty)$, $x \mapsto \frac{1}{x}(x^2+1)$;

i) $v : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{Z}$ mit $u(n) = \frac{n}{2}$ falls n gerade und $u(n) = -\frac{n+1}{2}$ falls n ungerade;

j) $h_c : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x + \frac{c}{x}$ (Untersuchung in Abhängigkeit von $c \in \mathbb{R}$).

Aufgabe 23

Seien $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 2x+1$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto (x-1)^2$ zwei Abbildungen.

a) Bestimmen Sie $g \circ f$ und $f \circ g$.

b) Bestimmen Sie den Wertebereich von f, g, $f \circ g$ und $g \circ f$.

Aufgabe 24

Was ist an Sprechweisen wie 'die Funktion x^2' oder 'die Funktion $f(x)$' formal gesehen falsch? Formulieren Sie die Zitate so um, dass sie formal korrekt sind.

Aufgabe 25 ($*$)

a) Beweisen Sie: Die Abbildung $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, $n \mapsto \begin{cases} \frac{n-1}{2} & n \text{ ungerade} \\ -\frac{n}{2} & n \text{ gerade} \end{cases}$ ist bijektiv.

b) Konstruieren Sie eine bijektive Abbildung $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Aufgabe 26 ($*$)

Seien X und Y beliebige nichtleere Mengen und $f : X \to Y$ eine Abbildung. Man definiert für alle Mengen $A \subseteq X$ und $B \subseteq Y$ die Schreibweisen $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$ und $f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}$. Zeigen Sie für alle Mengen $A, A' \subseteq X$ sowie $B, B' \subseteq Y$:

a) $f(A \cap A') \subseteq f(A) \cap f(A')$.

b) $f^{-1}(B \cup B') = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B')$.

c) $A \subseteq f^{-1}(f(A))$.

Geben Sie Beispiele dafür an, dass in (a) und (c) im Allgemeinen nicht Gleichheit gilt.

— Teilbarkeit —

Aufgabe 27

Untersuchen Sie die folgenden Zahlen darauf, ob sie Primzahlen sind. Bestimmen Sie anderenfalls deren Primfaktorzerlegung.

a) 15, b) 37, c) 61, d) 91, e) 192, f) 269, g) 445, h) 1001.

Aufgabe 28

Bestimmen Sie jeweils den größten gemeinsamen Teiler der gegebenen Zahlen.

a) 12, 16,	b) 17, 72,	c) 33, 99,	d) 91, 192,
e) 84, 110,	f) 84, 135,	g) 110, 135,	h) 84, 110, 135.

Aufgabe 29

Geben Sie für die folgenden Brüche jeweils die vollständig gekürzte Darstellung an.

a) $\frac{6}{21}$	b) $\frac{60}{12}$,	c) $\frac{28}{49}$,	d) $\frac{25}{21}$,
e) $\frac{105}{60}$,	f) $\frac{17}{34}$,	g) $\frac{34}{153}$,	h) $\frac{200}{3200}$,
i) $\frac{228}{209}$,	j) $\frac{315}{255}$,	k) $\frac{210}{315}$,	l) $\frac{840}{1050}$.

Aufgabe 30

Vergleichen Sie jeweils die beiden gegebenen Brüche, indem Sie sie auf ihren Hauptnenner bringen. Schreiben Sie das richtige Relationszeichen ($<$, $=$ oder $>$) zwischen die Brüche.

a) $\frac{5}{14} \quad \frac{6}{21}$,	b) $\frac{27}{5} \quad \frac{23}{3}$,	c) $\frac{3}{13} \quad \frac{21}{91}$,	d) $\frac{1}{3} \quad \frac{1}{2}$,
e) $\frac{5}{4} \quad \frac{4}{5}$,	f) $\frac{7}{3} \quad \frac{6}{4}$,	g) $\frac{5}{8} \quad \frac{95}{152}$,	h) $-\frac{7}{4} \quad -\frac{8}{3}$.

Aufgabe 31

Schreiben Sie als vollständig gekürzten Bruch ganzer Zahlen:

a) $\frac{0{,}3}{0{,}4}$, b) $\frac{0{,}5}{1{,}5}$, c) $\frac{0{,}008}{0{,}02}$, d) $\frac{0{,}1}{0{,}004}$, e) $\frac{10{,}5}{6}$, f) $\frac{1{,}23}{3{,}6}$.

Aufgabe 32

Schreiben Sie die folgenden Doppelbrüche als vollständig gekürzten Bruch ganzer Zahlen:

a) $\frac{7}{\frac{5}{6}}$,	b) $\frac{\frac{13}{7}}{\frac{26}{14}}$,	c) $\frac{\frac{72}{17}}{\frac{12}{17}}$,	d) $\frac{\frac{13}{5}}{\frac{15}{7}}$
e) $\frac{13}{\frac{5}{\frac{15}{7}}}$,	f) $\frac{13}{\frac{\frac{5}{15}}{7}}$,	g) $\frac{\frac{21}{5}}{\frac{10}{3}}$,	h) $\frac{\frac{5}{21}}{\frac{3}{10}}$.

Aufgabe 33

Berechnen Sie (ohne Taschenrechner!):

a) $\frac{17}{33}+\frac{5}{33}$, b) $\frac{1}{10}+\frac{1}{15}$, c) $\frac{18}{25}-\frac{13}{25}$, d) $\frac{13}{14}-\frac{2}{21}$,

e) $\frac{2}{21}-\frac{13}{14}$, f) $\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{7}$, g) $\frac{12}{25}\cdot\frac{15}{8}$, h) $\frac{14}{17}:\frac{21}{17}$,

i) $\frac{16}{21}:\frac{20}{9}$, j) $6\cdot\frac{3}{10}+\frac{1}{5}$, k) $\left(\frac{2}{9}-\frac{1}{10}\right):\frac{2}{45}$, l) $\frac{1}{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}$,

m) $\left(\left(\left(\frac{4}{3}+\frac{5}{2}\right)\cdot\frac{6}{5}\right)-\frac{2}{5}\right)\cdot\frac{5}{2}$, n) $\frac{2}{9}:\left(\frac{17}{18}-\frac{2}{9}\cdot\left(\frac{3}{7}+\frac{1}{14}\right)\right)+\frac{15}{2}$.

Aufgabe 34

a) Geben Sie Dezimaldarstellungen der folgenden Brüche an: $\frac{7}{10}$, $\frac{3}{16}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{2}{11}$ und $\frac{123}{990}$.
Hinweis: Schriftliche Division

b) Schreiben Sie die folgenden Dezimaldarstellungen als (vollständig gekürzte) Brüche: $0{,}1$; $0{,}2$; $0{,}375$; $0{,}1\overline{6}$; $0{,}\overline{2}$; $0{,}41\overline{6}$; $0{,}1\overline{4}$; $0{,}\overline{14}$ und $0{,}1\overline{18}$.

Aufgabe 35 ($*$)

Warum ist es nicht sinnvoll, eine Addition von Brüchen durch folgende Vorschrift zu definieren: Der Zähler des Ergebnisses ist die Summe der Zähler der Summanden, und der Nenner des Ergebnisses ist die Summe der Nenner der Summanden?

— Potenzrechnung —

Aufgabe 36

Schreiben Sie die folgenden Zahlen in der Form $a\cdot 10^z$ für eine ganze Zahl z und eine reelle Zahl a, bei der genau eine Ziffer vor dem Komma steht und diese von 0 verschieden ist.

a) $23{,}4$, b) $0{,}062$, c) 100, d) $0,000293$, e) $14\cdot 10^6$, f) $1{,}8$.

Aufgabe 37

Wandeln Sie die folgenden Zehnerpotenz-Darstellungen in Dezimaldarstellungen um.

a) $6{,}7\cdot 10^2$, b) $1{,}54\cdot 10^{-1}$, c) $23\cdot 10^5$, d) $8{,}11\cdot 10^{-3}$, e) $3{,}3\cdot 10^0$.

Aufgabe 38

Berechnen Sie:

a) 3^3, b) 5^2, c) 2^9, d) 1^8, e) 7^0, f) 0^3, g) 0^0,
h) 4^{-2}, i) 3^{-1}, j) $(-4)^2$, k) $(-1)^{77}$, l) $(-5)^{-2}$, m) $(-4)^3$, n) $(-6)^1$.

Aufgabe 39
Schreiben Sie als eine Potenz mit einer ganzzahligen Basis zwischen 1 und 9 und ganzzahligem Exponenten:

a) 49, b) 81, c) $\frac{1}{128}$, d) 125, e) $\frac{1}{36}$, f) 1024, g) 1296.

Aufgabe 40
Schreiben Sie als *eine* Potenz:

a) $3^4 \cdot 3^2$, b) $7^3 \cdot 2^3$, c) $2^4 \cdot 4^3$, d) $6^4 \cdot 2^{-4}$, e) $\dfrac{3^5}{3^3}$, f) $\dfrac{10^4}{5^4}$,
g) $(7^7)^2$, h) 7^{7^2}, i) $5^6 \cdot 5^7$, j) $3^{-4} \cdot 9^4$, k) $\left(4^3\right)^7$, l) $3^3 \cdot 3^3$.

Aufgabe 41
Berechnen Sie:

a) $4^{\frac{1}{2}}$, b) $27^{\frac{2}{3}}$, c) $32^{0,2}$, d) $\sqrt[4]{256}$, e) $\sqrt{\dfrac{9}{16}}$,
f) $\left(\dfrac{8}{27}\right)^{-\frac{2}{3}}$, g) $\left(\dfrac{1}{4}\right)^{-0.5}$, h) $\sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{4}$, i) $\sqrt[5]{4} \cdot \sqrt[5]{8}$, j) $\sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[3]{3}$.

Aufgabe 42
Schreiben Sie als Wurzel einer Zahl:

a) $4^{\frac{1}{5}}$, b) $2^{\frac{3}{4}}$, c) $3^{0,3}$, d) $4^{-\frac{2}{7}}$, e) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, f) $\dfrac{5}{\sqrt{5} \cdot \sqrt[3]{5}}$, g) $4^{\frac{2}{5}} \cdot 2^{-\frac{1}{2}}$.

Aufgabe 43
Berechnen Sie geschickt:

a) $\sqrt{5 \cdot 5^3}$, b) $(27\sqrt{8})^{\frac{2}{3}}$, c) $\sqrt{\dfrac{(-4)^6 \cdot 9}{2^4 \cdot 4^2}}$, d) $\sqrt[3]{12} \cdot \sqrt[6]{9^2 \cdot 4}$, e) $\sqrt{5}\sqrt{2}\sqrt{20}\sqrt{18}$.

— Natürliche Zahlen und vollständige Induktion —

Aufgabe 44
Geben Sie den Zahlenwert der folgenden Summen an:

a) $\sum_{j=1}^{3} j(j+1)$, b) $\sum_{n=1}^{1}(3n+7)$, c) $\sum_{k=1}^{101} 3$, d) $\sum_{k=1}^{5}\left(\dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}\right)$.

Aufgabe 45

Schreiben Sie mit dem Summenzeichen:

a) $3^4 + 5^5 + 7^6 + 9^7$,   b) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n+5}$,

c) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{1024}$,   d) $q - q^2 + q^3 - q^4 + \cdots - q^{10}$.

Aufgabe 46

Berechnen Sie:

a) $\prod_{j=2}^{4} \frac{1}{j}$,   b) $\prod_{l=0}^{7} 2$,   c) $\prod_{j=2}^{4} (3j)$,   d) $\prod_{k=1}^{5} \frac{k}{k+1}$.

Aufgabe 47

Schreiben Sie mit dem Produktzeichen:

a) $4 \cdot 7 \cdot 10 \cdot 13$,   b) $n!$,   c) $\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}$,   d) $9 \cdot 16 \cdot 25 \cdot 36 \cdot 49$.

Aufgabe 48

Ersetzen Sie jeweils "$\square$" durch einen Term, der dazu führt, dass die Gleichheit für den allgemeinen Fall gültig wird. Geben Sie für (b) zwei verschiedene Lösungen an.

a) $\sum_{j=-2}^{n} a_j = \sum_{k=1}^{\square} a_{k-3}$,   b) $\prod_{j=1}^{n} a_j = \prod_{k=0}^{n-1} a_{\square}$.

Aufgabe 49

Beweisen Sie für $n \in \mathbb{N}$ und $a_1, \ldots, a_{n+1} \in \mathbb{R}$ beziehungsweise $b_1, \ldots, b_{n+1} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$:

a) $\sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k+1}) = a_1 - a_{n+1}$,   b) $\prod_{k=0}^{n-1} \frac{b_k}{b_{k+2}} = \frac{b_0 b_1}{b_n b_{n+1}}$,

c) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$,   d) $\prod_{k=1}^{n} \frac{n-k+1}{k} = 1$.

Aufgabe 50

Geben Sie die Werte der folgenden Binomialköffizienten an:

a) $\binom{3}{1}$,   b) $\binom{5}{0}$,   c) $\binom{6}{3}$,   d) $\binom{50}{49}$,   e) $\binom{50}{51}$,   f) $\binom{0}{0}$,   g) $\binom{0}{1}$.

Aufgabe 51
Beweisen Sie:

a) Für alle $k, n \in \mathbb{N}_0$ mit $k \leqslant n$ gilt $(n+1)\binom{n}{k} = (n-k+1)\binom{n+1}{k}$.

b) Für alle $k, n \in \mathbb{N}$ mit $k \leqslant n$ gilt $\frac{\binom{n}{k}}{\binom{n}{k-1}} = \frac{n-k+1}{k}$.

c) Für alle $k, n \in \mathbb{N}_0$ mit $k < n$ gilt $\binom{n}{k} + \binom{n+1}{k+1} = \frac{n+k+2}{n-k}\binom{n}{k+1}$.

Aufgabe 52
Eine Aussage $A(n)$ soll mit vollständiger Induktion für alle $n \in \mathbb{N}$ bewiesen werden. Der Induktionsanfang wurde für $n = 1$ durchgeführt. Entscheiden Sie jeweils, ob die Formulierung der Induktionsvoraußetzung in diesem Beweis korrekt ist.

(1) (IV) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gelte $A(n)$.

(2) (IV) Sei $n \in \mathbb{N}$, und es gelte $A(n)$.

(3) (IV) Es gelte $A(n)$ für ein $n \in \mathbb{N}$.

(4) (IV) Es gelte $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(5) (IV) Es gelte $A(n)$ für $n \in \mathbb{N}$.

(6) (IV) Es gelte $A(n+1)$ für ein $n \in \mathbb{N}$.

(7) (IV) Es gelte $A(n)$ und $A(n+1)$ für ein $n \in \mathbb{N}$.

(8) (IV) Sei $n \in \mathbb{N}$ so, dass $A(n)$ gilt.

(9) (IV) Sei $n \in \mathbb{N}$ so, dass $A(n+1)$ gilt.

Aufgabe 53
Beweisen Sie die folgenden Aussagen mit vollständiger Induktion:

a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\sum_{j=1}^{n} j \cdot j! = (n+1)! - 1$.

b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = \frac{2^{n+1} - n - 2}{2^n}$.

c) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\sum_{j=1}^{2n-1} (-1)^{j-1} j^2 = n(2n-1)$.

d) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $n! \geqslant 2^{n-1}$.

e) Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und $x \in \mathbb{R}$ mit $x > -1$ gilt $(1+x)^n \geqslant 1 + nx$.

f) Für alle $k, n \in \mathbb{N}_0$ mit $k \leqslant n$ gilt $\binom{n+1}{k+1} = \sum_{m=k}^{n} \binom{m}{k}$.

Aufgabe 54

Beweisen Sie durch Anwendung des binomischen Satzes:

a) Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.

b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$.

Aufgabe 55

Beweisen Sie durch Anwendung von Aufgabe 54 (a):

a) $2^n \geqslant n$ für alle $n \in \mathbb{N}$,
b) $2^n \geqslant \frac{1}{4}n^2$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqslant 2$,
c) $2^n \geqslant \frac{1}{27}n^3$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqslant 3$,
d) $2^n \geqslant \frac{1}{16}n^3$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqslant 4$.

Aufgabe 56 ($*$)

Beweisen Sie die folgenden Aussagen mit vollständiger Induktion:

a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \neq b$ gilt $\frac{a^n - b^n}{a - b} = \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-k-1}$.

b) Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und $a, b \in \mathbb{R}$ gilt $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

c) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$.

d) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\sum_{k=1}^{n} (k+1) \binom{n}{k} = 2^{n-1}(n+2) - 1$.

e) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \leqslant 2\sqrt{n} - 1$.

Aufgabe 57 ($*$)

Stellen Sie jeweils (anhand einer Wertetabelle) eine Vermutung auf, für welche $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichung gilt. Beweisen Sie Ihre Vermutung mit der Wertetabelle und vollständiger Induktion.

a) $n! \geqslant 2^n$, b) $n! < 3^{n-1}$, c) $2^n \geqslant n^2$, d) $n! \geqslant n^n$.

Aufgabe 58

Multiplizieren Sie aus:

a) $2 \cdot (x+3)$, b) $(y-3)(y+6)$, c) $(a+2)^2$, d) $(2x-3)(4a-2b)$,
e) $(3a-b)^2$, f) $(7x+yz)(yz-7x)$, g) $(a-b)(a^2+ab+b^2)$, h) $(-4x+2y)^2$,
i) $(a+1)^3$, j) $(a-b)^3$, k) $(a+1)(b+2)(c+3)$, l) $(a-b)^2 \cdot (a+b)$.

Aufgabe 59

Fassen Sie zu einem Produkt zusammen:

a) $3a-3b$, b) $ac+2c-ad-2d$, c) $12ax+6ay+20bx+10by$,
d) $4x^2+12xy+9y^2$, e) $ab-3a+7b-21$, f) $4ax+14ax^2+50a^2b$.

Aufgabe 60

Vereinfachen Sie unter geeigneten Einschränkungen an die Variablen:

a) $1-\frac{n-1}{n}$, b) $\frac{1}{a+b}\left(\frac{1}{ab^2}+\frac{1}{a^2b}\right)$, c) $\left(\frac{4}{xy}+\frac{3}{yz}\right)\left(\frac{xz-y}{y}+1\right)$,

d) $\frac{\frac{x}{y}-\frac{z}{x}}{\frac{2}{x}-\frac{z}{y}}$, e) $\frac{x-2}{x-3}-\frac{x-1}{x-2}$, f) $\left(\frac{x^2}{2y}-\frac{y^2}{2x}\right):\left(\frac{2}{x}-\frac{2}{y}\right)$,

g) $\frac{\frac{2}{x}+\frac{x}{2}}{\frac{2}{x}-\frac{x}{2}}$, h) $\frac{\frac{1}{1-x}+\frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}}$, i) $\frac{1}{2+\frac{1}{2x+\frac{1}{2x^2}}}$.

Aufgabe 61

Es seien $y>0$ und $w<0$. Weiter seien m, n ganze Zahlen. Vereinfachen Sie unter geeigneten Einschränkungen an die restlichen Variablen:

a) $\sqrt{x^2}$, b) $\sqrt{y^2}$, c) $\sqrt{w^2}$,

d) $\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt[4]{a^3}$, e) $\frac{r^{z+1}-r^{1-z}}{r^{-z}-r^{z}}$, f) $\frac{r^{-s}-s^{-r}}{s^r-r^s}-\frac{1}{s^r r^s}$,

g) $\frac{(2r^{-6}s^3)^{-3}}{(2r^5s^{-2})^4}$, h) $-\frac{(-r)^{3m}(-s^{5n})}{(-s)^{2m}(-r)^{4n+3}}$, i) $\frac{(r^3)^2r^5s^{-3^2}}{(r^{-1})^{-6}r^2s^{-2\cdot 4}}$.

Aufgabe 62

Es seien a, b, r, s, x reelle Zahlen mit $a \geqslant b \geqslant 0$ und $x \geqslant 0$ sowie $a \neq x, s \neq 0$ und $r \neq -s$. Vereinfachen Sie mit Hilfe der binomischen Formeln:

a) $\sqrt{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\cdot\sqrt{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$,

b) $\dfrac{a\sqrt{ax}-x\sqrt{ax}}{\sqrt{a}-\sqrt{x}}$,

c) $\dfrac{s^3-r^2s}{rs+s^2}$,

d) $\dfrac{(r-s)^2+4rs}{(r+s)^2}$.

Aufgabe 63

Bringen Sie die folgenden Terme durch Erweitern auf eine Form, in der im Nenner keine Wurzeln mehr stehen. Dabei seien a und b reelle Zahlen mit $a,b \geqslant 0$ und $a \neq b$.

a) $\dfrac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$, b) $\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$, c) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}$, d) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}$.

— Gleichungen und Ungleichungen —

Aufgabe 64

Bringen Sie die folgenden Terme durch quadratische Ergänzung auf die Scheitelpunktform $a(x-b)^2+c$, und lesen Sie daran Art und Lage des lokalen Extremums sowie die Anzahl der Nullstellen der Parabel ab.

a) x^2-4x+5, b) $\frac{1}{2}x^2+x-\frac{9}{2}$, c) $-3x^2+12x-11$, d) $2x^2-4x+2$.

Aufgabe 65

Bringen Sie die folgenden quadratischen Terme durch Raten der richtigen Koeffizienten auf die Form $(x-a)(x-b)$, und lesen Sie daran die Nullstellen der Parabel ab. Hinweis: Ist $x^2+px+q = (x-a)(x-b)$, so muß $q = ab$ gelten; in dieser Aufgabe sind a und b stets ganzzahlig.

a) x^2-2x, b) x^2-5x+6, c) x^2+5x+6, d) x^2+3x-4.

Aufgabe 66

Lösen Sie die folgenden Gleichungen (sofern möglich) mit der p-q-Formel, durch quadratische Ergänzung oder wie in der letzten Aufgabe.

a) $x^2+x-6=0$, b) $\frac{1}{3}x^2+\frac{10}{3}x+\frac{34}{3}=0$, c) $x^2-4x+5=3x^2+7$,
d) $x^2+7x=0$, e) $4x^2-1=0$, f) $x^2=x+1$,
g) $x^4-13x^2+36=0$, h) $x^4+2x^2+1=0$, i) $x^4-2x^2-8=0$.

Aufgabe 67

Geben Sie für die folgenden Gleichungen an, für welche reellen Zahlen x (gegebenenfalls in Abhängigkeit von den Parametern a und b) beide Seiten definiert sind. Lösen Sie dann die Gleichung in x.

a) $\dfrac{x+8}{x+1} = x-4,$ b) $\dfrac{x+4}{x+5} = \dfrac{2x}{x-4},$

c) $\dfrac{x+a+b}{x} + 1 = \dfrac{x+5a-b}{x+a-b}.$

Aufgabe 68

Bestimmen Sie die Lösungsmengen der folgenden Ungleichungen.

a) $x^2 > 9,$ b) $x^2+6x+3 < 10,$
c) $x^2+3x-9 \leqslant -x^2+7x+7,$ d) $2x^2+3 \leqslant 1-4x,$
e) $x^2-4x+6 < 2x^2-12x+28,$ f) $3x^4+4 \leqslant 2x^4+5x^2.$

Aufgabe 69

Für welche $x \in \mathbb{R}$ sind die Ungleichungen definiert? Bestimmen Sie die Lösungsmengen.

a) $\dfrac{x-1}{x+1} < \dfrac{2x-1}{2x+1},$ b) $\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-8x+15} \geqslant 0,$ c) $\dfrac{x}{x+2} < \dfrac{2x-1}{3x-5}.$

Aufgabe 70

Beweisen Sie die folgenden Ungleichungen:

a) $\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} \geqslant 2$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x, y > 0,$

b) $2xy \leqslant \frac{1}{2}(x+y)^2 \leqslant x^2+y^2$ für alle $x, y \in \mathbb{R}.$

Aufgabe 71 ($*$)

Beweisen Sie die folgenden Aussagen. Für den Umgang mit den Ungleichungszeichen $<$ und $>$ dürfen Sie hier nur die aus der Vorlesung bekannten Anordnungsaxiome (O.1) bis (O.4) verwenden.

a) Ist $r \in \mathbb{R}$, so gilt $r < 0 \Leftrightarrow -r > 0.$

b) Für alle $r \in \mathbb{R}$ mit $r \neq 0$ gilt $r^2 > 0.$

c) $1 > 0.$

d) Ist $r \in \mathbb{R}$ mit $r > 0$, so gilt auch $\frac{1}{r} > 0.$

Aufgabe 72

Lösen Sie die Beträge auf, das heißt, geben sie einen gleichwertigen Ausdruck ohne Betragsstriche (dafür gegebenenfalls mit Fallunterscheidung) an.

a) $|x-5|$, b) $|x^2-5x+6|$, c) $|x^2-2x+1|$, d) $\dfrac{|x^2+x-2|}{|x+4|}$.

Aufgabe 73

Für welche $x \in \mathbb{R}$ sind die folgenden Ungleichungen erfüllt?

a) $|x+4| < 2$, b) $|x-1| > 1$, c) $|x-3| > 0$ und $|x+1| < 5$.

Aufgabe 74

Lösen Sie die folgenden Betragsgleichungen.

a) $|x+1| = x+2$, b) $|x-1|-2 = -x+1$,

c) $2|x+1|-1 = 2x+1$, d) $-3|x-2| = 3x+1$.

Aufgabe 75

Für welche $x \in \mathbb{R}$ sind die folgenden Gleichungen definiert? Lösen Sie die Gleichungen.

a) $\dfrac{x^2-3x-4}{2|x^2-4|} = 1$, b) $\left|\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}\right| - 1 = 1$.

Aufgabe 76

Untersuchen Sie, welche $x \in \mathbb{R}$ die folgenden Ungleichungen erfüllen.

a) $|x^2-2x-2| < 2x-1$, b) $|x^2+x-1| > (x-2)^2+1$, c) $|x-1| < |2x-3|-1$.

Aufgabe 77

Für welche $x \in \mathbb{R}$ sind die folgenden Ungleichungen definiert? Lösen Sie die Ungleichungen.

a) $\dfrac{2-|x-1|}{|x-4|} \geqslant \dfrac{1}{2}$, b) $\dfrac{|x|-1}{x^2-1} \geqslant \dfrac{1}{2}$, c) $\dfrac{|(x+2)^2-2|}{x+1} > 1$.

— Komplexe Zahlen —

Aufgabe 78

Schreiben Sie die folgenden komplexen Zahlen in der Form $u+iv$ mit $u, v \in \mathbb{R}$:

a) $(1+2i)+(4+i)$, b) $(1+2i)-(4+i)$, c) $(1+2i)\cdot(4+i)$,
d) $(-11+i)-(5-2i)$, e) $(-11+i)+(5-2i)$, f) $(-11+i)\cdot(5-2i)$,
g) $(10+3i)+(4-2i)$, h) $(10+3i)-(4-2i)$, i) $(10+3i)\cdot(4-2i)$,
j) $(-9+7i)+(-5+2i)$, k) $(-9+7i)-(-5+2i)$, l) $(-9+7i)\cdot(-5+2i)$.

Aufgabe 79

Bestimmen Sie jeweils $\mathrm{Re}(z), \mathrm{Im}(z), \bar{z}$ und $|z|$ für

a) $z = 2,$ b) $z = 5i,$ c) $z = 3 + 4i$, d) $z = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i,$
e) $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i,$ f) $z = 7 - 6i,$ g) $z = 5 + 12i,$ h) $z = 2 + 2\sqrt{3}i.$

Aufgabe 80

Zeigen Sie für $z \in \mathbb{C}$:

a) $\mathrm{Re}\, z = \dfrac{z + \bar{z}}{2},$ b) $\mathrm{Im}(z) = \dfrac{z - \bar{z}}{2i}.$

Aufgabe 81

Zeigen Sie für $z, w \in \mathbb{C}$:

a) $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \overline{w},$ b) $|z|^2 = \bar{z} \cdot z,$ c) $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|.$

Aufgabe 82

Seien $z, w \in \mathbb{C}$. Beweisen Sie mit Hilfe von A 81 (b) die Parallelogrammidentität:

$$|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2|z|^2 + 2|w|^2.$$

Aufgabe 83

Schreiben Sie die folgenden komplexen Zahlen in der Form $u + iv$ mit $u, v \in \mathbb{R}$:

a) $\dfrac{1}{i},$ b) $\dfrac{10 + 3i}{4 - 2i},$ c) $\dfrac{5}{2 - i},$ d) $\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{-1},$

e) $\dfrac{\sqrt{3} + 2\sqrt{2}i}{\sqrt{3} - \sqrt{2}i},$ f) $\dfrac{1}{3 + 4i},$ g) $\dfrac{4 + 3i}{1 - 2i},$ h) $\left(\dfrac{1 + i}{1 - i}\right)^2,$

i) $\dfrac{1}{i + \frac{1}{i+1}},$ j) $\dfrac{(1 + i)^5}{(1 - i)^3},$ k) $\dfrac{3 + 5i}{4 + i},$ l) $\dfrac{2 + 3i}{4 - 5i}.$

Aufgabe 84

Berechnen Sie:

a) $i^2 + i^5 + i^3,$ b) $i(-i) - i^2 + i^3 - i^8,$ c) $6i - 3i^2 + 3i^3 + i^9,$ d) $(2i - i^2)^2,$

e) $\dfrac{1}{i^3},$ f) $\dfrac{1}{i^6},$ g) $\dfrac{i^3}{i^5},$ h) $\dfrac{i^4}{i^2},$

i) $i^{-1} - i^{-3},$ j) $i^{-2} + i^2,$ k) $i^{31},$ l) $(1 + i)^{17},$

m) $i^2 - \dfrac{1}{i},$ n) $\left(i - \dfrac{1}{i}\right)^2,$ o) $(-i)^3 + \dfrac{1}{i^4},$ p) $1 - \dfrac{1}{i}.$

Aufgabe 85

Bestimmen Sie die Polarkoordinatendarstellung der folgenden Zahlen. Wählen Sie dabei das Argument φ im Intervall $[0, 2\pi)$.

a) -5, b) $-5i$, c) $\frac{1+i}{2}$, d) $\frac{\sqrt{2}(1-i)}{2}$,

e) $\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$, f) $3+3i$, g) $-\sqrt{3}+i$, h) $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3i}{2}$.

Aufgabe 86

Bestimmen Sie die Lösungen der folgenden Gleichungen über $\mathbb{C}$:

a) $z^2 - 2iz - 2 = 0$, b) $z^2 - 2z - i = 0$, c) $z^3 + z^2 + z + 1 = 0$,
d) $z^4 - 2z^2 + 4 = 0$, e) $z^2 + 2(1-i)z = 2i$, f) $z^3 - 3z^2 + (3-2i)z = 1 - 2i$,
g) $z^2 = i\overline{z}$, h) $z^2 + (2-2i)z = 4i$, i) $z^4 + 2iz^2 = 2$.

— Zusatzmaterial: Prozentrechnung —

Aufgabe 87

Berechnen Sie jeweils den Prozentwert.

a) $10\,\%$ von 130, b) $6\,\%$ von 75, c) $8{,}7\,\%$ von 243, d) $153\,\%$ von $13{,}7$.

Aufgabe 88

Berechnen Sie jeweils den Prozentsatz.

a) 6 von 75, b) 23 von 141, c) $13{,}7$ von 8, d) $66{,}42$ von $3801{,}2$.

Aufgabe 89

Berechnen Sie jeweils den Grundwert.

a) $10\,\%$ sind 73, b) $7\,\%$ sind 12, c) $32\,\%$ sind $5{,}4$, d) $5{,}4\,\%$ sind $2{,}8$.

Aufgabe 90

Bei einer Vorstandswahl in einem Verein stimmten im letzten Jahr 417 von 532 Mitgliedern für einen Kandidaten. In diesem Jahr erhielt derselbe Kandidat 486 von 599 Stimmen.

a) Berechnen Sie für beide Jahre die Zustimmungsquote für den Kandidaten in Prozent.

b) Um wieviele Prozentpunkte stieg die Zustimmungsquote zwischen diesen beiden Wahlen?

c) Um wie viel Prozent stieg die Zustimmungsquote zwischen diesen beiden Wahlen?

Aufgabe 91

Rechnen Sie mit dem aktuellen Umsatzsteuersatz von $19\,\%$.

a) Ein Produkt kostet ohne Umsatzsteuer 120 €. Berechnen Sie den Bruttopreis (Preis mit Einbezug der Umsatzsteuer) des Produktes.

b) Ein Produkt kostet einschließlich Umsatzsteuer $148{,}15$ €. Berechnen Sie den Nettopreis (Preis ohne Einbezug der Umsatzsteuer) des Produktes.

Aufgabe 92

Ein Computer kostete ursprünglich 1795 €. Sein Preis wurde um $15\,\%$ gesenkt. Als ein neues Modell herauskam, wurde er noch einmal um $20\,\%$ billiger.

a) Wie viel Euro kostete der Computer zuletzt?

b) Um wie viel Prozent wurde der Preis insgesamt gesenkt?

Aufgabe 93

Familie Burgner braucht einen neuen Kühlschrank.

a) Im Katalog des Großhandels Qücks ist der Preis ohne Umsatzsteuer mit 739 € angegeben. Auf diesen Preis gibt es $30\,\%$ Rabatt, es kommen dann aber noch $19\,\%$ Umsatzsteuer hinzu. Wie viel Euro kostet der Kühlschrank bei Qücks?

b) Frau Burgner erkundigt sich im Fachgeschäft Elektro-Jürgens. Dort soll der gleiche Kühlschrank 598 € (inklusive Umsatzsteuer) kosten. Bei Barzahlung gibt es $2\,\%$ Skonto. Wie viel Euro kostet der Kühlschrank dort bei Barzahlung?

c) Schließlich entscheiden sie sich für einen Kühlschrank, auf den $20\,\%$ Rabatt gewährt wurden. Da sie bar bezahlen, erhalten sie noch zusätzlich $3\,\%$ Skonto auf den ermäßigten Preis und bezahlen am Ende 582 €.

   (i) Wie viel betrug der Preis vor Abzug von Rabatt und Skonto?

   (ii) Wie viel Prozent hat Familie Burgner jetzt insgesamt gespart?

Aufgabe 94

Meerwasser hat einen Salzgehalt von $3{,}5\,\%$ (alle Prozentangaben in dieser Aufgabe beziehen sich auf das Gewicht).

a) Der menschliche Geschmackssinn ist so empfindlich, dass Wasser mit $0{,}25\,\%$ Salzgehalt gerade noch als salzig wahrgenommen wird. Wie viel reines Wasser muß man zu 1 kg Meerwasser hinzufügen, um den Salzgehalt auf $0{,}25\,\%$ zu erniedrigen?

b) In Frankreich wird an manchen Orten aus Meerwasser durch Verdunsten Salz gewonnen. Aus wie vielen Kilogramm Meerwasser erhält man 1 kg Salz?

Aufgabe 95

a) Man vergleiche die Kosten für einen Kredit über $15\,000$ € für ein Jahr:

(1) $6{,}5\,\%$ Zinsen, 300 € Bearbeitungsgebühr,

(2) $8{,}25\,\%$ Zinsen, keine Bearbeitungsgebühr,

(3) $7\,\%$ Zinsen, 100 € Bearbeitungsgebühr,

b) $15\,000$ € werden jährlich mit $6\,\%$ verzinst. Man berechne das Endkapital mit Zinsen und Zinseszinsen nach fünf Jahren.

Aufgabe 96

Messing ist eine Legierung (Mischung) aus Kupfer und Zink.

a) Bei der Herstellung werden 90 kg Kupfer und 60 kg Zink zusammengeschmolzen. Wie viel Prozent Kupfer und wie viel Prozent Zink enthält die Legierung?

b) Eine andere Sorte Messing soll $65\,\%$ Kupfer enthalten. Für die Legierung sollen 300 kg Kupfer verwendet werden. Wieviele Kilogramm Zink werden benötigt?

c) Es werden 20 kg Messing mit einem Kupferanteil von $55\,\%$ mit 40 kg Messing mit einem Kupferanteil von $70\,\%$ zusammengeschmolzen. Wie viel Kilogramm Kupfer enthält die neue Legierung? Wie hoch ist der Anteil des Kupfers am Gesamtgewicht in Prozent?

Aufgabe 97

Ein Rezept für $0{,}4$ l Cocktail verlangt $0{,}08$ l Rum mit einem Alkoholgehalt von $37{,}5\,\%$ (bezogen auf das Volumen) und hat ansonsten nur nichtalkoholische Zutaten.

a) Welche Menge Alkohol enthält der Cocktail?

b) Welche Menge Bier mit einem Alkoholgehalt von $4{,}9\,\%$ enthält die gleiche Menge Alkohol wie der Cocktail?

— Zusatzmaterial: Dreisatz —

Aufgabe 98

Eine Wasserpumpe fördert 10 l Wasser in 50 s.

a) In wievielen Sekunden ist ein Behälter gefüllt, der 15 l Wasser faßt?

b) Wie viel Wasser wird in 2 h gefördert?

Aufgabe 99

Ein Tintenstrahldrucker hat eine qualitätsabhängige Druckleistung von 5–8 Seite pro Minute, wenn ein Dokument nur schwarz/weiß gedruckt wird, bei Farbausdrucken beträgt seine Leistung je nach Qualität 3–4 Seiten pro Minute.

a) Wie viel Zeit muß man mindestens einplanen, um 20 Seiten zu drucken?

b) Wie lange dauert es höchstens, bis ein Dokument, das aus 60 Seiten besteht, ausgedruckt ist?

c) Wie viele Seiten werden in einer Stunde höchstens gedruckt?

Aufgabe 100

Zum Streichen einer 3 m $\times$ 4 m großen Wand werden $2{,}4$ kg Farbe benötigt. Dabei sind 5 kg Wandfarbe mit 750 cm^3 Wasser zu verdünnen.

a) Wie viel Wasser benötigt man, um die für die Wand benötigte Farbmenge zu verdünnen?

b) Wie viel Farbe kann man mit 2 l Wasser höchstens verarbeiten?

c) Wie viel Farbe und wie viel Wasser benötigt man, um die Wände eines 3 m hohen Raumes zu streichen, deßen Grundfläche 4 m $\times$ 5 m ist?

Aufgabe 101

Eine Radtour dauert sechs Tage, wenntäglich 56 km zurückgelegt werden.

a) Wie viele Tage benötigt man bei einer täglichen Fahrstrecke von 84 km?

b) Wie viele Kilometer müßen am Tag gefahren werden, wenn jede Etappe gleich lang sein soll und für die Radtour sieben Tage zur Verfügung stehen?

Aufgabe 102

Zwei Mähdrescher bringen die Ernte eines Feldes in 12 h ein.

a) Wie lange brauchen fünf Mähdrescher für die gleiche Ernte?

b) In wie vielen Stunden ist die Ernte von fünf Feldern eingefahren, wenn drei Mähdrescher zur Verfügung stehen?

c) Wie viele Felder können abgeerntet werden, wenn vier Mähdrescher jeweils 8 h im Einsatz sind?

Aufgabe 103

Joghurt wird in 20 Becher zu je 150 g abgefüllt. Jeder Becher Joghurt kostet $0{,}29$ €.

a) Wie viele 250-Gramm-Becher kann man mit der gleichen Menge Joghurt füllen?

b) Ein 250-Gramm-Becher kostet $0{,}47$ €. Ist es günstiger, drei große oder fünf kleine Becher Joghurt zu kaufen?

Aufgabe 104

In 8 h erzeugen vier Werkzeugmaschinen 960 Formteile. Wie viele Teile erzeugen drei dieser Maschinen in 5 h?

Aufgabe 105

Der Lebensmittelvorrat eines Kreuzfahrtschiffes reicht für 120 Personen für genau 18 Tage. Nach 6 Tagen werden 24 Personen zusätzlich an Bord genommen. Wie lange reicht der Vorrat insgesamt?

Aufgabe 106

Auf einer Teststrecke verbrauchen fünf PKWs des selben Typs auf einer Strecke von $280\,$km bei einer Testfahrt insgesamt $113{,}4\,$l Benzin.

a) Wieviele Liter Benzin verbrauchen unter gleichen Bedingungen acht dieser PKWs auf einer Strecke von $350\,$km?

b) Bei einer Testfahrt unter denselben Bedingungen verbrauchen 7 PKWs einer anderen Automarke auf einer $210\,$km langen Teststrecke zusammen $107{,}31\,$l Benzin. Welcher Autotyp hat den geringeren Durchschnittsverbrauch?

— Polynomdivision —

Aufgabe 107

Lösen Sie die folgenden kubischen Gleichungen, indem Sie sie gegebenenfalls auf die Form $p(x) = 0$ bringen, eine Nullstelle d von p raten, dann $p(x)$ durch $x - d$ dividieren und die verbleibende quadratische Gleichung lösen. *Hinweis:* Ist $p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, so testen Sie zunächst die ganzzahligen Teiler von c darauf, ob sie Nullstellen von p sind.

a) $x^3 - 7x + 6 = 0,$ b) $x^3 - 6x^2 + 5x + 12 = 0,$
c) $x^3 + x + 6 = 4x^2 - x + 2,$ d) $2x^3 + 8x^2 + 12x + 8 = 0.$

— Zusatzmaterial: Knobelaufgaben —

Aufgabe 108 ($*$)

a) In der folgenden Addition stehen die Buchstaben für einzelne Ziffern (gleiche Buchstaben bedeuten stets gleiche Ziffern, verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern): ABBC $+$ DADE $=$ CEDAD. Finden Sie heraus, welche Rechnung durchgeführt wurde.

b) Untersuchen Sie wie in Teil (a) die Addition ABCB $+$ DBBA $=$ CEFC.

c) Warum kann die Rechnung $2962 + 1164 = 4126$ nicht als Grundlage einer Aufgabe wie Teil (a) verwendet werden?

Aufgabe 109 ($*$)

Auf einem Tisch liegen 27 Streichhölzer. Zwei Spieler nehmen nun abwechselnd pro Zug mindestens ein Streichholz und höchstens vier Streichhölzer vom Tisch. Gewonnen hat derjenige, der am Ende eine gerade Anzahl von Streichhölzern besitzt.

a) Zeigen Sie, dass der zuerst nehmende Spieler stets gewinnen kann, indem Sie eine Gewinnstrategie für diesen Spieler angeben.

b) Gewinnt der zuerst nehmende Spieler auch dann stets, wenn zu Beginn 28, 29, 30, 31, 32 oder 33 Streichhölzer auf dem Tisch liegen?

c) Das oben beschriebene Spiel soll nun für beliebige Anfangszahl von Streichhölzern untersucht werden. Überlegen Sie sich eine Darstellung der auftretenden Spielpositionen, und beschreiben Sie alle Positionen, von denen aus der am Zug befindliche Spieler eine Gewinnstrategie besitzt.

d) Untersuchen Sie nun in ähnlicher Weise die Spielvariante, in der pro Zug mindestens ein Streichholz und höchstens drei Streichhölzer vom Tisch genommen werden dürfen.

Aufgabe 110 ($*$)

Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es, das ¨Haus vom Nikolaus¨ (⌂) ohne Absetzen des Stiftes und ohne mehrfaches Durchlaufen derselben Strecke zu zeichnen, wenn in der Ecke links oben unter dem Dach begonnen werden soll?

Aufgabe 111 ($*$)

Der Springer im Schachspiel zieht auf folgende Weise: zunächst ein Feld in gerader Richtung (vorwärts, rückwärts, nach links oder nach rechts) und dann unter weiterer Entfernung vom Startpunkt ein Feld in diagonaler Richtung. Geben Sie für die nachfolgenden Springer-Probleme jeweils entweder eine Lösung an oder zeigen Sie, dass keine Lösung existieren kann (es wird immer ein Springer auf einem Schachbrett der Größe 8×8 betrachtet).

a) Geben Sie eine Springerzugfolge an, die auf einem beliebigen Feld startet, auf demselbem Feld endet und jedes Feld des Schachbretts mit Ausnahme des Startfeldes genau einmal berührt.

b) Geben Sie eine Springerzugfolge an, die auf dem Feld unten links beginnt, auf dem Feld oben rechts endet und jedes Feld des Schachbretts genau einmal berührt.