

# Zweite Kenntnisüberprüfung mit Lösungen

im Vorkurs Mathematik 2020, RWTH Aachen University

## Lösen Sie die folgenden Aufgaben:

A 1: Bestimmen Sie alle Primfaktoren von 195.

3, 5, 13

A 2: Berechnen Sie  $\left(\frac{1}{9} + \frac{2}{10}\right) : \frac{8}{45}$  in vollständig gekürzter Form.

$\frac{7}{4}$

A 3: Seien  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $a \neq 0, \pm b$ . Vereinfachen Sie  $\frac{a(a+b)^2 - 4a^2b}{a^3 - ab^2}$  so weit wie möglich.

$\frac{a-b}{a+b}$

A 4: Seien  $r, s \in \mathbb{Q}$  und  $x, y \in \mathbb{R}$ ,  $x, y > 0$ . Vereinfachen Sie  $\frac{x^{2r-1}}{y^{1-s}} : \frac{x^{r-s}}{y^{3s}}$ .

$\frac{x^{r+s-1}}{y^{1-4s}}$

A 5: Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichung  $x^3 + 5x^2 - 6x = 0$ .

$x_1 = -6, x_2 = 0, x_3 = 1$

A 6: Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichung  $|x + 1| = 2x - 1$ .

$x = 2$

A 7: Bestimmen Sie alle Lösungen der Ungleichung  $x^2 - x \leq x - 1$ .

$x = 1$

A 8: Seien  $A$  und  $B$  Aussagen. Ergänzen Sie die Wahrheitstafel:

$A$	$B$	$\neg A$	$B \vee (\neg A)$	$(B \vee (\neg A)) \wedge B$
$F$	$F$	$W$	$W$	$F$
$F$	$W$	$W$	$W$	$W$
$W$	$F$	$F$	$F$	$F$
$W$	$W$	$F$	$W$	$W$

A 9: Sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar und  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Sei  $A = "f \text{ hat in } x_0 \text{ ein lokales Extremum.}"$  sowie  $B = "Es gilt } f'(x_0) = 0."$ . Welche der folgenden Aussagen sind immer (für jedes solche  $f$ ) wahr?

☐  $A \implies B$     ☐  $B \implies A$     ☐  $A \iff B$

ja, nein, nein

A 10: Kreuzen Sie alle wahren Aussagen über die Funktion  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ,  $n \mapsto n + 1$  an.

☐  $f$  ist injektiv    ☐  $f$  ist surjektiv    ☐  $f$  ist bijektiv

ja, nein, nein

A 11: Seien  $A = \{1, 2\}$ ,  $B = \{2, 3\}$  und  $C = \{3, 4\}$ . Bestimmen Sie  $\mathfrak{P}((A \cup B) \setminus C)$ .

$\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$

**Bitte wenden!**

A 12: Geben Sie den maximalen Definitionsbereich  $D \subseteq \mathbb{R}$  einer durch die Abbildungsvorschrift  $f(x) = \sqrt{(x-2)(x+4)}$  definierten Funktion  $f$  an.

$$(-\infty, -4] \cup [2, \infty)$$

A 13: Bestimmen Sie die Ableitung der Funktion  $f : D \setminus \{-4, 2\} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{(x-2)(x+4)}$  (wobei  $D$  der maximale Definitionsbereich aus der letzten Aufgabe sei).

$$f'(x) = \frac{x+1}{\sqrt{(x-2)(x+4)}}$$

A 14: Kreuzen Sie alle wahren Aussagen über die Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} -x^2 & , x < 0 \\ x^2 & , x \geq 0 \end{cases}$  an.

☐  $f$  ist stetig      ☐  $f$  ist streng monoton steigend      ☐  $f$  ist streng monoton fallend

ja,    ja,    nein

A 15: Bestimmen Sie  $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$ .

1

A 16: Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichung  $5 \log_x 9 = 10$ .

$$x = 3$$

A 17: Bestimmen Sie die Ableitung von  $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{e^x + 1}{1+x}$ .

$$f'(x) = \frac{xe^x - 1}{(1+x)^2}$$

A 18: Bestimmen Sie  $f'(1)$  für  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \ln(x^2 + 1)$ .

1

A 19: Bestimmen Sie eine Stammfunktion von  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x \cos(x)$ .

$$F(x) = x \sin(x) + \cos(x)$$

A 20: Bestimmen Sie eine Stammfunktion von  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{e^x}{1+e^x}$ .

$$F(x) = \ln(1 + e^x)$$

A 21: Geben Sie die Matrix  $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$  mit Einträgen  $a_{ij} := \sum_{k=1}^i j \cdot k$  explizit an.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

A 22: Bestimmen Sie die Lösungsmenge des nebenstehenden Gleichungssystems.

$$\begin{aligned} x - 2y &= 8 \\ x + y + 10z &= 9 \\ x &+ 5z = 7 \end{aligned}$$

$$x = 2 \text{ und } y = -3 \text{ sowie } z = 1$$

A 23: Für welche reellen Zahlen  $a$  hat das nebenstehende lineare Gleichungssystem genau eine Lösung?

$$\begin{aligned} x + ay &= 1 \\ ax + y &= a^2 \end{aligned}$$

für alle  $a$  mit  $a \neq 1$  und  $a \neq -1$