Dr. K. Maurischat
Dr. S. Bleß

Aachen, 19. Oktober 2020

Lineare Algebra

Übungsaufgaben

im Vorkurs Mathematik 2020, RWTH Aachen University

— Lineare Gleichungssysteme I —

Aufgabe 1

Übersetzen Sie jeweils die Textaufgabe in ein lineares Gleichungssystem und lösen Sie es.

a) Vor drei Jahren war Monika dreimal so alt wie Peter. In vier Jahren ist Monika nur noch doppelt so alt wie Peter. Wie alt sind Peter und Monika?

b) Drei normale Brötchen kosten so viel wie zwei Körnerbrötchen. Fünf normale Brötchen sind um 17 Cent teurer als drei Körnerbrötchen. Wie viel kosten normale Brötchen und Körnerbrötchen?

c) Bei Zählungen am Gleisdreieck Mannheim-Friedrichsfeld wird festgestellt, dass in dem beobachteten Zeitraum 38 Züge nach Mannheim fuhren oder aus Mannheim kamen, 33 Züge passierten das nördliche Ende Richtung Weinheim bzw. von Weinheim kommend, und 45 Züge fuhren nach Heidelberg oder kamen aus Heidelberg. Wie viele Züge fuhren auf der Strecke Mannheim–Weinheim, wieviele auf der Strecke Heidelberg–Mannheim und wie viele auf der Strecke Heidelberg–Weinheim?

Aufgabe 2

Geben Sie jeweils ein (möglichst einfaches) Beispiel eines linearen Gleichungssystems mit drei Gleichungen und drei Unbekannten an,

a) das genau eine Lösung hat,

b) das unendliche viele Lösungen hat,

c) das keine Lösung hat.

Aufgabe 3

In Abbildung 1 sind verschiedene (sphärische) Polyeder abgebildet.
Für jeden solchen Polyeder gilt, dass die Anzahl k der Kanten genau um 2 kleiner ist als die Summe der Eckenanzahl e und der Flächenanzahl f. Bestehen alle Flächen aus Dreiecken, so ist das Doppelte der Kantenanzahl gleich dem Dreifachen der Flächenanzahl (zählt man nämlich für jedes Dreieck die Kanten, je 3, so hat man am Ende jede Kante doppelt gezählt, weil jede Kante zu zwei Seitenflächen gehört). Ähnlich erhält man einen Zusammenhang zwischen der Eckenanzahl und der Kantenanzahl, wenn an jeder Ecke gleich viele Kanten enden.

a) Stellen Sie ein lineares Gleichungssystem für k, e und f für den Fall des Oktaeders (lauter Dreiecke und an jeder Ecke enden 4 Kanten) auf, und lösen Sie dieses.

b) Stellen Sie entsprechend ein lineares Gleichungssystem auf für ein Polyeder, dessen Seitenflächen lauter Dreiecke sind und bei dem an jeder Ecke fünf Kanten enden. Lösen Sie auch dieses.

c) Stellen Sie entsprechend ein lineares Gleichungssystem auf für ein Polyeder, dessen Seitenflächen lauter Fünfecke sind und bei dem an jeder Ecke drei Kanten enden.

d) Gibt es ein Polyeder aus lauter Dreiecken, bei dem an jeder Ecke sechs Kanten enden?

e) Gibt es ein Polyeder aus lauter Fünfecken, bei dem an jeder Ecke vier Kanten enden?

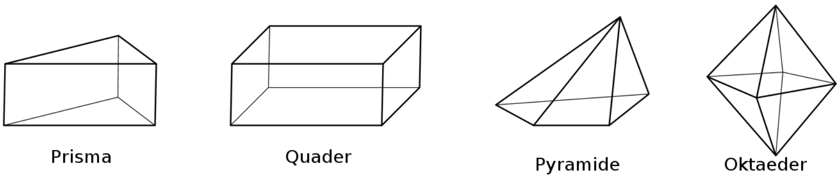


Abbildung 1: Verschiedene Polyeder

Aufgabe 4

Bestimmen Sie jeweils die Lösungsmenge der folgenden linearen Gleichungssysteme.

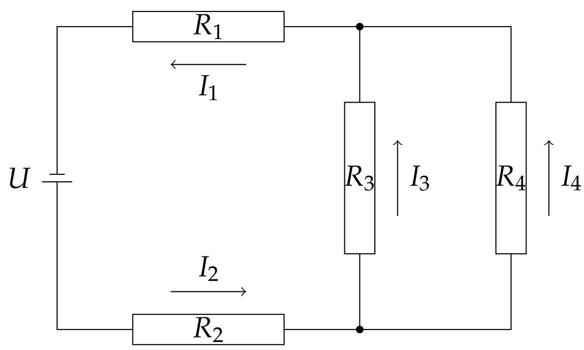
a) $$\begin{array}{rrcr} 2x_1 & -x_2 & = & 4 \\ x_1 & +\frac{1}{2}x_2 & = & -2 \end{array}$$

b) $$\begin{array}{rrcr} 3x_1 & +2x_2 & = & 1 \\ x_1 & -2x_2 & = & 11 \\ -2x_1 & +x_2 & = & 5 \end{array}$$

c) $$\begin{array}{rrrcr} x & +3y & +z & = & 1 \\ 3x & +9y & +4z & = & 0 \\ x & +3y & +2z & = & 3 \end{array}$$

Aufgabe 5

Gegeben sei das folgende Gleichstromnetz:



In einem Gleichstromnetz gelten die Kirchhoffschen Regeln. Die *Knotenregel* besagt, dass in jedem Knoten im Netz die Summe der Ströme, deren Pfeil auf den Knoten hinweist, gleich der Summe der Ströme ist, deren Pfeil vom Knoten wegweist. Die *Maschenregel* besagt, dass, wenn man einen geschlossenen Weg durch das Netz läuft und dabei die Produkte $\pm R_k I_k$ an den durchlaufenen Widerständen aufsummiert (mit positivem Vorzeichen, wenn der Weg in Pfeilrichtung verläuft, und mit negativem Vorzeichen, wenn der Weg entgegen der Pfeilrichtung verläuft), man die Summe der Spannungen der Spannungsquellen auf diesem Weg erhält. Berechnen Sie mit diesen Regeln die Stromstärken in obigem Netz, wenn die Spannungsquelle $36\,\mathrm{V}$ hat und für die Widerstände $R_1 = 200\,\Omega$ sowie $R_2 = 400\,\Omega$ und $R_3 = 300\,\Omega$ sowie $R_4 = 200\,\Omega$ gilt.

— Gauß Algorithmus —

Aufgabe 6

Es seien folgende lineare Gleichungssysteme gegeben. Geben Sie jeweils die zugehörige Koeffizientenmatrix und erweiterte Koeffizientenmatrix an:

a)

$$\begin{aligned} 3x_1 - 7x_2 + x_3 + 2x_4 &= 3 \\ 5x_1 + 4x_3 - x_4 &= 0 \\ -3x_2 + 5x_3 + x_4 - 1 &= 1 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_3 + x_2 &= 0 \\ x_3 + 4x_1 - 3x_2 &= 0 \\ 6x_2 + x_1 + 3x_3 - 1 &= -1 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 0 \\ 5x_4 - x_1 - x_5 + x_2 - 2 &= 0 \end{aligned}$$

Aufgabe 7

Bestimmen Sie die Lösungsmengen der durch die folgenden Begleitmatrizen gegebenen Gleichungssysteme:

a) $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right)$, b) $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{array}\right)$, c) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \end{array}\right)$

d) $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 3 \end{array}\right)$, e) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 4 & 0 \end{array}\right)$, f) $\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 3 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right)$.

Aufgabe 8
Lösen Sie die in Aufgabe 1 aufgestellten linearen Gleichungssysteme mit dem Gauß-Verfahren.

Aufgabe 9
Lösen Sie jeweils das lineare Gleichungssystem mit dem Gauß-Verfahren.

a)
$$\begin{aligned} x+3y+z&=1\\ 3x+9y+4z&=5\\ x+3y+2z&=3 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} 2x_1-x_2+6x_3-x_4&=0\\ -x_1+x_2-4x_3+x_4&=0\\ 3x_1-2x_2+10x_3-2x_4&=0 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} x+2y+z&=1\\ 2y+2z&=0\\ 2x+5y+3z&=1 \end{aligned}$$

Aufgabe 10
Lösen Sie jeweils das lineare Gleichungssystem mit dem Gauß-Verfahren.

a)
$$\begin{aligned} x+y-z&=1\\ 2x+6y+3z&=8\\ x-7y-4z&=3 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} 2x+8y&=0\\ 6x+24y+3z&=0\\ 2x+8y+z&=0 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} x+2z&=1\\ x+y+z&=3\\ 3x+y+5z&=6 \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} 2x_1+x_2+5x_3+x_4&=3\\ x_1+x_2+3x_3&=1\\ 2x_1+2x_2+6x_3+x_4&=5 \end{aligned}$$

e)
$$\begin{aligned} x_1+2x_3+3x_4&=0\\ 2x_1+x_2+5x_3+5x_4&=0\\ -x_1+x_2-2x_3+x_4&=0\\ 2x_2+x_3+4x_4&=0 \end{aligned}$$

f)
$$\begin{aligned} 2x_1+2x_2+8x_4&=0\\ x_1+x_2+x_3+6x_4&=0\\ 2x_3+4x_4+x_5&=0\\ x_1+x_2+2x_3+8x_4&=0 \end{aligned}$$

Aufgabe 11
Bestimmen Sie jeweils alle Parameter a, b, c, $d \in \mathbb{R}$, für die die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto ax^3 + bx^2 + cx + d$ die gewünschten Bedingungen erfüllt.

a) Es gilt $f(1) = 1$ und $f(2) = 2$ sowie $f(-1) = 5$.

b) Es gilt $f(1) = 1$ und $f'(1) = -1$ sowie $f(-1) = 1$.

c) Die Gerade mit der Gleichung $y = 3x$ ist die Wendepunkttangente des Graphen von f, und die Wendestelle ist 1.

Aufgabe 12
Untersuchen Sie jeweils in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$, ob das gegebene lineare Gleichungssystem keine, genau eine oder unendlich viele Lösungen hat.

a)
$$\begin{aligned} 2x+4y+az&=5\\ 3x+(a+5)y+z&=7\\ x+2y+az&=3 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} ax+y+z&=a\\ ax+(a+2)y+(2a+1)z&=a-2\\ (a^2+a)y+(3a^2-1)z&=-2 \end{aligned}$$

Aufgabe 13

Berechnen Sie:

a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$, c) $2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} + (-2) \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

d) $\frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} + 6 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, e) $\frac{3}{4} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, f) $4 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

Aufgabe 14

1. Verifizieren Sie die Vektorraumeigenschaften für $\mathbb{R}^n$ mit der in Definition 2 erklärten Addition und Skalarenmultiplikation.
2. Zeigen Sie, dass die Menge der komplexen Nullfolgen $(a_k)_{k\geqslant 1}$ mit $a_k \in \mathbb{C}$, $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$ mit der Addition $(a_k)_{k\geqslant 1} + (b_k)_{k\geqslant 1} := (a_k + b_k)_{k\geqslant 1}$ und der Skalarenmultiplikation $\lambda(a_k)_{k\geqslant 1} := (\lambda a_k)_{k\geqslant 1}$, $\lambda \in \mathbb{C}$ ein $\mathbb{C}$-Vektorraum ist.

Aufgabe 15

Welche der folgenden Teilmengen des $\mathbb{R}^3$ bilden einen reellen Vektorraum?

a) $M_1 = \left\{ r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \middle| r \in \mathbb{R} \right\}$,

b) $M_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \middle| s \in \mathbb{R} \right\}$

c) $M_3 = \left\{ \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| v_1 + v_2 + v_3 = 2 \right\}$

d) $M_4 = \left\{ \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| v_1 + v_2 + v_3 = 0 \right\}$

Aufgabe 16

Bilden die Polynome vom Grad höchstens 3, d.h. die Polynome $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit der üblichen Addition und der Multiplikation mit reellen Zahlen einen reellen Vektorraum?

Aufgabe 17

Zeigen Sie: Die Vektoren $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ sind linear unabhängig genau dann, wenn $ad - bc \neq 0$.

Aufgabe 18

Ist ein einzelner Vektor $v \in V$ linear unabhängig ?

Aufgabe 19

Stellen Sie die Vektoren

$$a = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, d = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

als Linearkombinationen der drei Basisvektoren

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

dar.

Aufgabe 20

Untersuchen Sie jeweils, ob der dritte Vektor linear abhängig von den ersten beiden Vektoren ist. Falls ja, stellen Sie ihn auch als Linearkombination der ersten beiden Vektoren dar.

(a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix},$

(b) $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix},$

(c) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -10 \\ 9 \end{pmatrix}.$

Aufgabe 21

Untersuchen Sie jeweils, ob die gegebenen Vektoren linear abhängig oder linear unabhängig sind.

(a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix},$

(b) $\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\7\\43\end{pmatrix},$

(c) $\begin{pmatrix}0\\3\\6\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\4\\7\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\5\\8\end{pmatrix}.$

Aufgabe 22

Argumentieren Sie möglichst geschickt, ob die gegebenen Vektoren linear abhängig oder linear unabhängig sind.

(a) $\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}6\\-2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\-3\\1\end{pmatrix},$

(b) $\begin{pmatrix}2\\7\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}6\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\12\end{pmatrix},$

(c) $\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\3\\-1\end{pmatrix}.$

Aufgabe 23

Bestimmen Sie jeweils eine Parameterform der Geraden durch die gegebenen Punkte.

(a) $p = \begin{pmatrix}2, & 2, & -3\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}4, & 0, & 1\end{pmatrix}$,

(b) $p = \begin{pmatrix}7 & 8 & 3\end{pmatrix}\, und \begin{pmatrix}5 & 5 & 2\end{pmatrix}$,

(c) $(2,1)$ und $(2,4)$.

Aufgabe 24

Untersuchen Sie jeweils, ob die drei Punkte auf einer Geraden liegen.

a) $(3,2,-4)$ und $(1,1,0)$ sowie $(7,4,8)$,

b) $(1,1,0$ und $(3,-3,2)$ sowie $(4,-5,3)$,

c) $(2,-5,2)$ und $(1,-2,4)$ sowie $(3,-7,6)$.

Aufgabe 25

Bestimmen Sie eine Parameterform der Ebene, welche die angegebenen Punkte bzw. Geraden enthält.

a) $(1,0,1)$ und $(5,2,-1)$ sowie $(1,-3,0)$,

b) $(3,2,2)$ und $(4,3,3)$ sowie $(4,3,4)$,

c) $(0,1,0)$ und $\{(1,0,1) + r \cdot (2,1,-2) \mid r \in \mathbb{R}\}$,

Aufgabe 26

Untersuchen Sie jeweils, ob die gegebenen Vektoren Vielfache voneinander sind.

a) $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$, d) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 27

Erzeugen die Vektoren

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, d = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

den Vektorraum $\mathbb{R}^3$? Falls nicht, bestimmen Sie die Dimension des von den Vektoren erzeugten Unterraumes von $\mathbb{R}^3$.

Aufgabe 28

Geben Sie jeweils einen weiteren Vektor v an, so dass

(1) die Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, v$$

eine Basis des Vektorraums $\mathbb{R}^3$ bilden.

(2) die Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v$$

eine Basis des Vektorraums $\mathbb{R}^2$ bilden.

Aufgabe 29

Für welche Parameter $a, b \in \mathbb{R}$ sind die Vektoren

$$\begin{pmatrix} a \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ b \end{pmatrix}$$

linear unabhängig ?

Aufgabe 30

1. Zeigen Sie, dass vier Vektoren in $\mathbb{R}^3$ immer linear abhängig sind.
2. Zeigen Sie, dass $n+1$ Vektoren in $\mathbb{R}^n$ immer linear abhängig sind.

Aufgabe 31

Untersuchen Sie jeweils, ob der Punkt $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ auf der Geraden bzw. Ebene liegt.

a) $\{\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \mid r \in \mathbb{R}\}$,

b) $\{\begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \mid s \in \mathbb{R}\}$,

c) $\{\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \mid r, s \in \mathbb{R}\}$,

d) $\{\begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid r, s \in \mathbb{R}\}$.

Aufgabe 32

Untersuchen Sie jeweils, ob der Punkt P auf der Geraden QR liegt.

a) $P = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$,

b) $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $R = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$,

c) $P = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $R = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 33

Untersuchen Sie jeweils, ob die vier Punkte in einer Ebene liegen.

a) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$ sowie $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$,

b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ sowie $\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$,

c) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ sowie $\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -1 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 34

Geben Sie die folgenden Matrizen A explizit an.

a) $A = (a_{i,j}) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit $a_{i,j} = i \cdot j$ für alle $i, j \in \{1,2,3\}$.

b) $A = (a_{i,j}) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit $a_{i,j} = i^j$ (die j-te Potenz von i) für alle $i, j \in \{1,2,3\}$.

c) $A = (a_{i,j}) \in \mathbb{R}^{2\times 3}$ mit $a_{i,j} = i - j$ für alle $i \in \{1,2\}$ und $j \in \{1,2,3\}$.

d) $A = (a_{i,j}) \in \mathbb{R}^{3\times 4}$ mit $a_{i,j} = (i+1)\cdot(j-2)$ für alle $i \in \{1,2,3\}$ und $j \in \{1,2,3,4\}$.

Aufgabe 35

Wie lauten die Einträge $(2,1)$, $(1,2)$, $(2,3)$, $(1,1)$ beziehungsweise $(3,1)$ (falls sie existieren) der folgenden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 7 & 18 & 6 \\ \frac{1}{2} & 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 3 & 9 \\ 8 & 1 & \frac{1}{4} & 13 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad C = \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}?$$

Aufgabe 36

Welche der folgenden Matrizen sind gleich?

- $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit $a_{ij} = i \cdot j$
- $B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit $b_{ij} = i + j$
- $C = (c_{ij}) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit $c_{ij} = \max\{i,j\}$
- $D = (d_{ij}) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit $d_{ij} = \frac{i+j}{2} + \frac{|j-i|}{2}$
- $E = (e_{ij}) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit $e_{ij} = i \cdot \left(\frac{j^2-1}{j+1} + 1\right)$
- $F = (f_{ij}) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit $f_{ij} = (i+1) + (j-1)$

Argumentieren Sie geschickt.

Aufgabe 37

Schreiben Sie in Matrixform

1. die Matrix $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ mit Koeffizienten $a_{ij} = |i-j|$,
2. die Matrix $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ mit Koeffizienten $a_{ij} = i - j$,
3. die Matrix $A \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ mit Koeffizienten

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & ,i = j \\ 0 & ,i \neq j \end{cases}$$

4. die Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit Koeffizienten

$$a_{ij} = i^2 + j.$$

Aufgabe 38

Geben Sie jeweils an, durch welche elementare Zeilenumformung die Matrix A in die Matrix B transformiert werden kann.

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 7 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Aufgabe 39

Geben Sie für jede der folgenden Matrizen an, ob sie in (Zeilen-)Stufenform bzw. sogar reduzierter Stufenform ist.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 40

Transformieren Sie die nachfolgenden Matrizen jeweils durch elementare Umformungen in eine Matrix in reduzierter Stufenform.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 6 \\ -1 & 1 & -3 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 10 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & -3 & 2 \\ 0 & 4 & -12 & 13 \\ 1 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 10 & 0 & 13 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 11 \\ 4 & 1 & 12 & -1 & 11 \\ 3 & 0 & 6 & 1 & 15 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 41

Untersuchen Sie jeweils, ob das gegebene lineare Gleichungssystem keine, genau eine oder unendlich viele Lösungen hat, indem Sie die Stufenform bestimmen.

a)
$$\begin{aligned} 2x + y - 5z &= 10 \\ 2x + 4y + z &= 1 \\ 2y + 4z &= -6 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} x + 3y + 5z &= 0 \\ x + y + z &= 0 \\ x + 5y + 15z &= 0 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} 2x - 3y + z &= 5 \\ 4x - 5y + 4z &= 14 \\ 2x - 2y + 3z &= 14 \end{aligned}$$

Aufgabe 42

Untersuchen Sie die folgenden linearen Gleichungssysteme in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$ auf Lösbarkeit.

a)
$$\begin{aligned} x + ay + 3z &= a \\ y - az &= 1 \\ x + (a-2)y + (2a+3)z &= -a^2 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} x + z &= 0 \\ x + y + (a+1)z &= 2 \\ 3x + y + (a+3)z &= a+2 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} 2x + 4y &= -2a \\ x + (a+2)y &= 1 - a \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} x + a^2 y &= 1 \\ a^2 x + y &= a \end{aligned}$$

Aufgabe 43

Bestimmen Sie aus dem Ergebnis von Aufgabe 9 a) die Lösungsmenge von

$$\begin{aligned} x + 3y + z &= 0 \\ 3x + 9y + 4z &= 0 \\ x + 3y + 2z &= 0 \end{aligned}$$

(ohne erneutes Lösen eines Gleichungssystems).

Aufgabe 44

Untersuchen Sie jeweils für die gegebene Matrix A, ob das Gleichungssystem $A \cdot x = b$ für alle $b \in \mathbb{R}^3$ lösbar ist.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 5 & 5 \\ 2 & 7 & 1 \end{pmatrix}$, b) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 4 & -2 & 6 & 7 \\ -4 & 4 & -6 & -12 \end{pmatrix}$, c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 45

Bestimmen Sie die möglichen Lagen zweier Ebenen $E_1, E_2 \subset \mathbb{R}^3$, d.h. diskutieren Sie die verschiedenen Fälle für den Durchschnitt $E_1 \cap E_2$.

Aufgabe 46

Untersuchen Sie jeweils die gegenseitige Lage der gegebenen Geraden (sind gleich; sind nicht gleich, aber parallel; haben genau einen Schnittpunkt; sind windschief) und bestimmen Sie gegebenenfalls den Schnittpunkt.

a) $\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + p \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \mid p \in \mathbb{R}\}$ und $\{ \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 9 \end{pmatrix} + q \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \mid q \in \mathbb{R}\}$,

b) $\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + p \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \mid p \in \mathbb{R}\}$ und $\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R}\}$,

c) $\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \mid r \in \mathbb{R}\}$ und $\{ \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R}\}$,

d) $\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} \mid r \in \mathbb{R}\}$ und $\{ \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R}\}$,

e) $\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R}\}$ und $\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \mid u \in \mathbb{R}\}$,

f) $\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R}\}$ und $\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \mid u \in \mathbb{R}\}$.

Aufgabe 47

Untersuchen Sie jeweils die gegenseitige Lage von Gerade und Ebene (Gerade liegt in der Ebene; Gerade liegt nicht in der Ebene, ist aber parallel zu ihr; Gerade und Ebene haben genau einen Schnittpunkt) und bestimmen Sie gegebenenfalls den Schnittpunkt.

a) $\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \mid s \in \mathbb{R}\}$ und $\{ \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \mid q, r \in \mathbb{R}\}$,

b) $\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 16 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \mid r \in \mathbb{R}\}$ und $\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \mid s, t \in \mathbb{R}\}$,

c) $\{ \begin{pmatrix} 14 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -8 \end{pmatrix} \mid q \in \mathbb{R}\}$ und $\{ \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \mid r, s \in \mathbb{R}\}$.

Aufgabe 48

Untersuchen Sie jeweils die gegenseitige Lage der gegebenen Ebenen (sind gleich; sind nicht gleich, aber parallel; haben eine Gerade als Schnittmenge) und bestimmen Sie gegebenenfalls die Schnittgerade.

a) $\{\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}+p\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}q\begin{pmatrix}-1\\0\\3\end{pmatrix}\mid p,q\in\mathbb{R}\}$ und $\{\begin{pmatrix}6\\2\\6\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}3\\2\\5\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\mid r,s\in\mathbb{R}\}$,

b) $\{\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-1\\0\\3\end{pmatrix}\mid r,s\in\mathbb{R}\}$ und $\{\begin{pmatrix}9\\2\\3\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}+u\begin{pmatrix}4\\1\\-1\end{pmatrix}\mid t,u\in\mathbb{R}\}$,

c) $\{\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}+q\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}-1\\0\\3\end{pmatrix}\mid q,r\in\mathbb{R}\}$ und $\{\begin{pmatrix}3\\1\\4\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}0\\1\\5\end{pmatrix}t\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}s,t\in\mathbb{R}\}$,

d) $\{\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}+u\begin{pmatrix}-1\\0\\3\end{pmatrix}\mid t,u\in\mathbb{R}\}$ und $\{\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}5\\4\\5\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}6\\5\\7\end{pmatrix}\mid r,s\in\mathbb{R}\}$.

— Euklidische Räume —

Aufgabe 49

Skizzieren Sie die folgenden Teilmengen der Ebene:

1. $M_1=\{x\in\mathbb{R}^2\,:\,\langle\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},x\rangle\geqslant\sqrt{2}\}$.

Skizzieren Sie die folgenden Teilmengen des Raumes:

1. $N_1=\{o\neq x\in\mathbb{R}^3\,:\,\frac{\langle e_1,x\rangle}{\|x\|}\geqslant\frac{1}{\sqrt{2}}\}\cup\{o\}$,
2. $N_2=\{x\in\mathbb{R}^3\,:\,\|x-\langle e_1,x\rangle e_1\|=1\}$.

(Hierbei bezeichnet $e_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ den kanonischen Basisvektor.)

Aufgabe 50

Begründen Sie nochmal die Aussage von Aufgabe 3, diesmal mit Hilfe der Formel für die Fläche eines Parallelogramms.

Aufgabe 51

Berechnen Sie die Norm einer beliebigen Linearkombination der Vektoren

1. $v_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},v_2=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix},v_3=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$

2. $w_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}, w_3 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \\ \sqrt{2/3} \end{pmatrix}$.

Was beobachten Sie ? Erklären Sie ihre Beobachtung.

Aufgabe 52

Sei $\Delta(A,B,C)$ ein Dreieck α,β,γ die Innenwinkel an den Eckpunkten A,B,C und a,b,c die Längen der A,B,C jeweils gegenüberliegenden Seiten. F bezeichne die Fläche des Dreiecks. Beweisen Sie:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = \frac{abc}{2F}.$$

Aufgabe 53

Bestimmen Sie alle Seitenlängen eines Dreiecks $\Delta(A,B,C)$ aus der Länge der Seite c und den Winkeln α,β. (c ist die Länge der Seite, die A und B verbindet und α bzw. β sind die Innenwinkel in den Punkten A bzw. B.) Hinweis: Aufgabe 27.

Zusatz: Wenn nun $A = o$, $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\alpha = \pi/6$ und $\beta = \pi/6$ ist, wo liegt dann der Punkt C ?

Aufgabe 54

Berechnen Sie jeweils das Skalarprodukt der beiden Vektoren.

a) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 55

Seien $\vec{a},\ \vec{b} \in \mathbb{R}^m$ mit $\vec{a} \bullet \vec{a} = 5$, $\vec{a} \bullet \vec{b} = 10$ und $\vec{b} \bullet \vec{b} = 21$. Berechnen Sie

a) $\vec{a} \bullet (\vec{a} + 3 \cdot \vec{b})$, b) $3 \cdot (\vec{a} + \vec{b}) \bullet (\vec{a} - \vec{b})$, c) $(5 \cdot \vec{a} + 2 \cdot \vec{b}) \bullet (3 \cdot \vec{a} - 4 \cdot \vec{b})$.

Aufgabe 56

Berechnen Sie jeweils die Länge des Vektors.

a) $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, d) $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, e) $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, f) $\begin{pmatrix} 8 \\ 11 \\ -16 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 57

Die drei Punkte $A = (1;0;3)$, $B = (2;1;5)$ und $C = (-1;1;5)$ bilden ein Dreieck. Untersuchen Sie, ob das Dreieck ABC gleichschenklig ist (d.h. zwei Seiten gleich lang sind) oder sogar gleichseitig ist (d.h. alle drei Seiten gleich lang sind).

Aufgabe 58

Die drei Punkte $A = (2; -1; 3)$, $B = (-1; 3; 2)$ und $C = (3; 2; -1)$ bilden ein Dreieck. Untersuchen Sie, ob das Dreieck ABC gleichschenklig ist (d.h. zwei Seiten gleich lang sind) oder sogar gleichseitig ist (d.h. alle drei Seiten gleich lang sind).

Aufgabe 59

Welche der folgenden Vektoren sind zueinander senkrecht?

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \vec{z} = \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \\ 23 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 60

Bestimmen Sie jeweils alle $s \in \mathbb{R}$, für die v und w senkrecht aufeinander stehen.

a) $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ s \end{pmatrix}$, b) $v = \begin{pmatrix} s \\ -1 \\ s+1 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 2 \\ s-1 \\ 3 \end{pmatrix}$, c) $v = \begin{pmatrix} s \\ s+1 \\ -1 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} -2 \\ s-1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 61

Bestimmen Sie jeweils alle $s \in \mathbb{R}$, für die u senkrecht auf v und w steht.

a) $u = \begin{pmatrix} 1 \\ s \\ -1 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, b) $u = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ s \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} s \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} s \\ s \\ -1 \end{pmatrix}$,

c) $u = \begin{pmatrix} -1 \\ s \\ 0 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 1 \\ s \\ 1 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 2s-1 \\ s \\ 5 \end{pmatrix}$, d) $u = \begin{pmatrix} 1 \\ s \\ 1 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 1 \\ s^2 \\ 0 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 1 \\ s \\ -1 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 62

Gegeben seien die drei Punkte $A = (1; 6; 1)$, $B = (-1; 3; 2)$ und $C = (4; -1; 0)$.

a) Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC rechtwinklig mit rechtem Winkel bei B ist.

b) Bestimmen Sie den Punkt D so, dass das Viereck $ABCD$ ein Rechteck ist.

Aufgabe 63

Bestimmen Sie jeweils eine Koordinatenform der Geraden $g = \{\vec{u} + r\vec{v} | r \in \mathbb{R}\}$ im $\mathbb{R}^2$, wobei

a) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$,

b) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

c) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 64

Berechnen Sie jeweils eine Parameterform der in Koordinatenform gegebenen Geraden.

a) $\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid 2x + y = 3\}$, b) $\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 = 3\}$.

Aufgabe 65

Berechnen Sie das Kreuzprodukt der Vektoren v und w

$$\text{a)}\quad v = \begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix},\ w = \begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix}, \qquad \text{b)}\quad v = \begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix},\ w = \begin{pmatrix}2\\4\\-1\end{pmatrix},$$

$$\text{c)}\quad v = \begin{pmatrix}3\\9\\1\end{pmatrix},\ w = \begin{pmatrix}15\\45\\5\end{pmatrix}, \qquad \text{d)}\quad v = \begin{pmatrix}s-1\\s\\1\end{pmatrix},\ w = \begin{pmatrix}s\\s+1\\2\end{pmatrix}.$$

Aufgabe 66

Berechnen Sie jeweils das Kreuzprodukt $v \times w$ und geben Sie eine Normalenform und Koordinatenform der Ebene $E = \{\, u + p \cdot v + q \cdot w \mid p, q \in \mathbb{R} \,\}$ an.

a) $u = \begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix},\quad v = \begin{pmatrix}4\\1\\0\end{pmatrix},\quad w = \begin{pmatrix}5\\0\\-1\end{pmatrix},$

b) $u = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix},\quad v = \begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix},\quad w = \begin{pmatrix}4\\1\\2\end{pmatrix},$

c) $u = \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix},\quad v = \begin{pmatrix}1\\0\\4\end{pmatrix},\quad w = \begin{pmatrix}2\\7\\-1\end{pmatrix}.$

Aufgabe 67

Berechnen Sie jeweils eine Normalenform der in Parameterform gegebenen Ebene.

$$\text{a)}\ \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + p\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix} + q\begin{pmatrix}-2\\4\\1\end{pmatrix} \,\middle|\, p, q \in \mathbb{R} \right\}, \qquad \text{b)}\ \left\{ \begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix} + p\begin{pmatrix}4\\2\\-1\end{pmatrix} + q\begin{pmatrix}-3\\-3\\1\end{pmatrix} \,\middle|\, p, q \in \mathbb{R} \right\}.$$

Aufgabe 68

Berechnen Sie jeweils eine Parameterform der in Koordinatenform gegebenen Ebene.

$$\text{a)}\ \left\{ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x + 2y + 3z = 1 \right\}, \qquad \text{b)}\ \left\{ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, 2x + -1y + -1z = 4 \right\}.$$

Aufgabe 69

Berechnen Sie jeweils eine Parameterform der gesuchten Geraden.

a) Gerade senkrecht zu $\left\{ \begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix} + p\begin{pmatrix}2\\4\\1\end{pmatrix} + q\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} \,\middle|\, p, q \in \mathbb{R} \right\}$ durch $(1;0;3)$,

b) Gerade senkrecht zu $\left\{ \begin{pmatrix}2\\8\\5\end{pmatrix} + p\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \,\middle|\, p \in \mathbb{R} \right\}$ und $\left\{ \begin{pmatrix}2\\8\\5\end{pmatrix} + q\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix} \,\middle|\, q \in \mathbb{R} \right\}$ durch $(2;8;5)$,

c)* Gerade, die senkrecht auf g steht und in E enthalten ist, wobei

$$g = \left\{ \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix} + p\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} \,\middle|\, p \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{und} \quad E = \left\{ \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + q\begin{pmatrix}-2\\2\\3\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}-1\\2\\4\end{pmatrix} \,\middle|\, q, r \in \mathbb{R} \right\}.$$

Aufgabe 70

Berechnen Sie jeweils eine Normalenform und Koordinatenform der gesuchten Ebene.

a) Ebene senkrecht zu $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \,\middle|\, p \in \mathbb{R} \right\}$ durch $(2;2;-1)$,

b) Ebene, die den Punkt $(1;2;-1)$ enthält und senkrecht auf E_1 und E_2 steht, wobei

$$E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \,\middle|\, p, q \in \mathbb{R} \right\} \text{ und } E_2 = \left\{ r \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, r, s \in \mathbb{R} \right\},$$

c) Ebene, die die Gerade g enthält und senkrecht auf die Ebene E steht, wobei

$$g = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} \,\middle|\, p \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{und} \quad E = \left\{ \begin{pmatrix} 9 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, q, r \in \mathbb{R} \right\}.$$

Aufgabe 71

Untersuchen Sie jeweils, ob der Punkt $(3;-2)$ auf der gegebenen Geraden liegt.

a) $\{ \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 \mid 3x_1 + 2x_2 = 5 \}$ b) $\{ \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 - 2x_2 = -1 \}$

Aufgabe 72

Untersuchen Sie jeweils die gegenseitige Lage der Geraden und bestimmen Sie gegebenenfalls den Schnittpunkt.

a) $\{ \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -3 \end{smallmatrix}\right) + r \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 \mid r \in \mathbb{R} \}$ und $\{ \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 \mid 3x_1 + 2x_2 = 5 \}$,

b) $\{ \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -3 \end{smallmatrix}\right) + r \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 \mid r \in \mathbb{R} \}$ und $\{ \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 \mid 4x_1 - 2x_2 = 5 \}$.

Aufgabe 73

Untersuchen Sie jeweils, ob der Punkt $(1;-1;2)$ auf der gegebenen Ebene liegt.

a) $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, 3x + 2y + -1z = 2 \right\}$, b) $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, 4x + 2y + -1z = 0 \right\}$.

Aufgabe 74

Untersuchen Sie jeweils die gegenseitige Lage von Gerade und Ebene (Gerade liegt in der Ebene; Gerade liegt nicht in der Ebene, ist aber parallel zu ihr; Gerade und Ebene haben genau einen Schnittpunkt) und bestimmen Sie gegebenenfalls den Schnittpunkt.

a) $\left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \,\middle|\, p \in \mathbb{R} \right\}$ und $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x + -2y + 3z = 2 \right\}$,

b) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \,\middle|\, p \in \mathbb{R} \right\}$ und $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x + 4y + -1z = -1 \right\}$,

c) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 7 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix} \,\middle|\, p \in \mathbb{R} \right\}$ und $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, 2x + -3y + 1z = 5 \right\}$.

Aufgabe 75

Untersuchen Sie jeweils die gegenseitige Lage der Ebenen (sind gleich; sind nicht gleich, aber parallel; haben eine Gerade als Schnittmenge) und bestimmen Sie ggf. die Schnittgerade.

a) $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x + -2y + 3z = 2 \right\}$ und $\left\{ \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \,\middle|\, p, q \in \mathbb{R} \right\}$,

b) $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x + -2y + 3z = 2 \right\}$ und $\left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 6 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 5 \\ -9 \\ 7 \end{pmatrix} \,\middle|\, p, q \in \mathbb{R} \right\}$,

c) $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, 3x + -5y + 1z = 3 \right\}$ und $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \,\middle|\, p, q \in \mathbb{R} \right\}$,

d) $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x + 2y + 8z = 1 \right\}$ und $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x + 1y + 5z = 1 \right\}$,

e) $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x + 7y + 3z = 2 \right\}$ und $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, 2x + 9y + 1z = -1 \right\}$,

f) $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, 2x + 1y + 8z = 3 \right\}$ und $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x + 1y + 6z = 2 \right\}$,

g) $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x + 2y + 8z = 1 \right\}$ und $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, -x + -2y + -8z = 1 \right\}$,

h) $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x + -3y + 1z = 2 \right\}$ und $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x + -5y + 3z = -2 \right\}$.

Aufgabe 76

Berechnen Sie jeweils den Winkel zwischen den beiden Vektoren.

a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 77

Berechnen Sie jeweils den Schnittwinkel der geometrischen Objekte in $\mathbb{R}^3$.

a) $\left\{ \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \,\middle|\, p \in \mathbb{R} \right\}$ und $\left\{ \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \,\middle|\, q \in \mathbb{R} \right\}$,

b) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \,\middle|\, p, q \in \mathbb{R} \right\}$ und $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \,\middle|\, r \in \mathbb{R} \right\}$,

c) $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, p, q \in \mathbb{R} \right\}$ und $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, r, s \in \mathbb{R} \right\}$.

Aufgabe 78

Bestimmen Sie jeweils den Lotfußpunkt L von P auf der Geraden g bzw. der Ebene E.

a) $P = (0; 0; 2)$ und $g = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \,\middle|\, r \in \mathbb{R} \right\}$,

b) $P = (9; 3; -1)$ und $g = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} \,\middle|\, r \in \mathbb{R} \right\}$,

c) $P = (7; 4; -7)$ und $E = \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \,\middle|\, r, s \in \mathbb{R} \right\}$,

d) $P = (5;1;2)$ und $E = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \;\middle|\; r, s \in \mathbb{R} \right\}$.

Aufgabe 79

Bestimmen Sie zu den Daten aus Aufgabe 78 jeweils den Abstand von P und g bzw. E.

Aufgabe 80

Bestimmen Sie jeweils den Abstand des Punktes P von der Geraden g bzw. der Ebene E.

a) $P = (-3;3;1)$ und $g = \left\{ \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \;\middle|\; r \in \mathbb{R} \right\}$,

b) $P = (1;8;4)$ und $g = \left\{ \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \;\middle|\; r \in \mathbb{R} \right\}$,

c) $P = (1;-4;7)$ und $E = \left\{ \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} \;\middle|\; r, s \in \mathbb{R} \right\}$,

d) $P = (-3;-8;4)$ und $E = \left\{ \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ -6 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \;\middle|\; r, s \in \mathbb{R} \right\}$.

Aufgabe 81

Bestimmen Sie jeweils den Abstand des Punktes P von der Ebene E.

a) $P = (-2;9;3)$ und $E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x + 1y + -4z = 13 \right\}$,

b) $P = (2;1;-1)$ und $E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 6x + 2y + 3z = -17 \right\}$.

Aufgabe 82

Berechnen Sie jeweils eine Normalenform oder Koordinatenform von E und bestimmen Sie dann den Abstand von P zu E.

a) $E = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix} \;\middle|\; p, q \in \mathbb{R} \right\}$ und $P = (3;1;2)$,

b) $E = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 12 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; p, q \in \mathbb{R} \right\}$ und $P = (5;3;1)$,

c) $E = \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \;\middle|\; p, q \in \mathbb{R} \right\}$ und $P = (-1;4;-9)$.

Aufgabe 83

Untersuchen Sie jeweils, ob die Gerade g zur Ebene E parallel ist und bestimmen Sie gegebenfalls den Abstand.

a) $g = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \;\middle|\; s \in \mathbb{R} \right\}$ und $E = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; s, t \in \mathbb{R} \right\}$

b) $g = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; s \in \mathbb{R} \right\}$ und $E = \left\{ \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix} \;\middle|\; s, t \in \mathbb{R} \right\}$

Aufgabe 84

Untersuchen Sie jeweils, ob die Ebenen E_1 und E_2 parallel sind und berechnen Sie gegebenenfalls den Abstand von E_1 und E_2.

a) $E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ 7 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \,\middle|\, p, q \in \mathbb{R} \right\}$ und $E_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x + 3y + -2z = 5 \right\}$,

b) $E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \,\middle|\, p, q \in \mathbb{R} \right\}$ und $E_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, 3x + 1y + 2z = 23 \right\}$,

c) $E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, -x + 2y + 2z = 9 \right\}$ und $E_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x + -2y + -2z = -3 \right\}$.

Aufgabe 85

Bestimmen Sie jeweils den Abstand der Gerade g von der Geraden h.

a) $g = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, s \in \mathbb{R} \right\}$ und $h = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\}$

b) $g = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 8 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, s \in \mathbb{R} \right\}$ und $h = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\}$

Aufgabe 86

Bestimmen Sie jeweils den Abstand der Geraden g von der Geraden h bzw. der Ebene E, sofern sie sich nicht schneiden.

a) $g = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, p \in \mathbb{R} \right\}$ und $h = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} \,\middle|\, q \in \mathbb{R} \right\}$,

b) $g = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 8 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, p \in \mathbb{R} \right\}$ und $h = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \,\middle|\, q \in \mathbb{R} \right\}$,

c) $g = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \,\middle|\, p \in \mathbb{R} \right\}$ und $E = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, q, r \in \mathbb{R} \right\}$,

d) $g = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, p \in \mathbb{R} \right\}$ und $E = \left\{ \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix} \,\middle|\, q, r \in \mathbb{R} \right\}$,

e) $g = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \,\middle|\, p \in \mathbb{R} \right\}$ und $E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, 3x + 1y + 2z = 23 \right\}$.