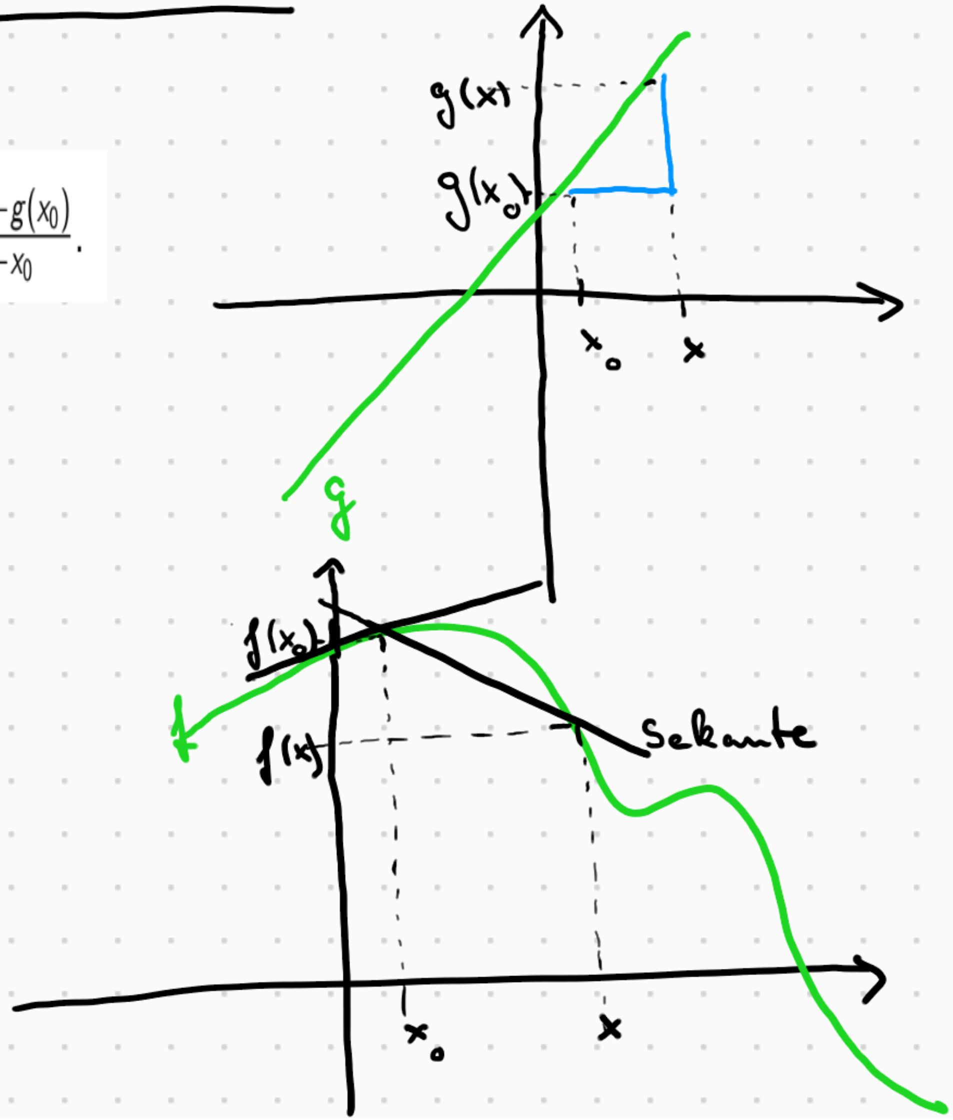
Differenzierbarkeit

$f: D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$

Die **Steigung** m der Geraden g ist gegeben durch $m = \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$.



Die Steigung der Sekante [= Gerade durch die Punkte $(x_0, f(x_0))$ und $(x, f(x))$] ist ebenso $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

Lässt man $x \to x_0$ gehen, so nähert sich (hoffentlich!) dieser Wert der Tangentensteigung in x_0 an.

Definition

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine reelle Funktion und $x_0 \in D$. Dann heißt f **differenzierbar in** x_0, wenn für **jede** Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n \in D \setminus \{x_0\}$ und $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ die Folge der

$$y_n = \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0}$$

konvergiert und der Grenzwert für alle solche Folgen derselbe ist.
In diesem Fall heißt der Grenzwert $f'(x_0) = \lim_{n\to\infty} y_n$ die **Ableitung von** f **in** x_0.
Der Bruch $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ heißt **Differenzenquotient**.
Die gesamte Funktion f heißt **differenzierbar**, wenn f in jedem $x_0 \in D$ differenzierbar ist.
Die damit entstehende Funktion $x \mapsto f'(x)$ heißt die **Ableitungsfunktion** von f.

Beispiel: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \longmapsto c$ ($c \in \mathbb{R}$ fest) ist differenzierbar.
Sei $x_0 \in \mathbb{R}$. Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge $x_n \neq x_0$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$

$$y_n = \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} = \frac{c - c}{x_n - x_0} = \frac{0}{x_n - x_0} = 0, \text{ also: } f'(x_0) = \lim_{n\to\infty} y_n = 0.$$

D.h.: $f' \equiv 0$ und f ist diff'bar.

Bsp: $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto mx+c$ ($m,c\in\mathbb{R}$ fest)

Sei $x_0\in\mathbb{R}$ bel. fest., $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge mit $x_n\neq x_0$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$.

$$y_n = \frac{g(x_n)-g(x_0)}{x_n-x_0} = \frac{mx_n+c-(mx_0+c)}{x_n-x_0} = \frac{m(x_n-x_0)}{x_n-x_0} = m$$

D.h. $f'(x_0) \overset{!}{=} \lim\limits_{n\to\infty} y_n = m$ für bel. Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wie oben

D.h.: $f':\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\longmapsto m$.

Bsp: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto x^2$. Sei $x_0\in\mathbb{R}$ bel. fest.

Schreibe bel. Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $x_n\neq x_0$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$,

$x_n = x_0+h_n$ $\quad (h_n = x_n - x_0)$, es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} h_n = 0$.

Dann $y_n = \dfrac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0} = \dfrac{(x_0+h_n)^2-x_0^2}{x_0+h_n-x_0} = \dfrac{x_0^2+2x_0h_n+h_n^2-x_0^2}{h_n} = 2x_0+h_n$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty}(2x_0+h_n) = 2x_0$ existiert und ist unabhängig von der Wahl der Folge $\Rightarrow f'(x_0)=2x_0$ für alle $x_0\in\mathbb{R}$, $f':\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto 2x$.

Rechenregeln

Sind $f : D_1 \to \mathbb{R}$, $g : D_2 \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen, die differenzierbar sind in $x_0 \in D_1 \cap D_2$, dann gilt:

(i) $f + g$ ist differenzierbar in x_0 und $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$.

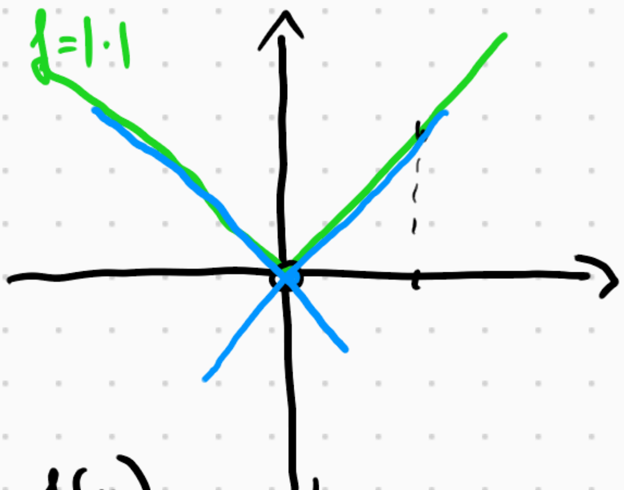
(ii) Für jedes $a \in \mathbb{R}$ ist $a \cdot f$ differenzierbar in x_0 und $(a \cdot f)'(x_0) = a \cdot f'(x_0)$.

Das heißt: **Die Ableitung in x_0 ist linear.**

<u>Bsp</u>: Die Ableitung von $f : x \longmapsto 5x^2 + 7x + 1$

ist $f' : x \longmapsto 5 \cdot 2x + 7 \cdot 1 + 0 = 10x + 7$

Differenzierbarkeit – Gegenbeispiele



Beispiel

Die Betragsfunktion $|\cdot| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |x|$ ist **nicht differenzierbar in** $x_0 = 0$. Sie ist aber in jedem anderen Punkt differenzierbar.

Differenzenquotienten, $x_0 \in \mathbb{R}$

$\frac{x>0}{x_0>0}$ $\quad \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{x-x_0}{x-x_0} = 1$

$\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0, \underset{x \leq 0}{x_n \neq 0} : \lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(x_n)-f(x_0)}{x-x_0} = 1 \Big\}$

$\Rightarrow$ In $x_0 > 0$ diff'bar mit $f'(x_0) = 1$.

$\begin{matrix} x<0 \\ x_0 \leq 0 \end{matrix}$: $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{-x-(-x_0)}{x-x_0} = -1$

$\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0, \underset{x_n < 0}{x_n \neq x_0 > 0}$ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(x_n)-f(x_0)}{x-x_0} = -1 \Big\}$

$\Rightarrow$ In $x_0 < 0$ diff'bar mit $f'(x_0) = -1$ | Für $x_0 = 0$ ex. limes nicht
$\Rightarrow f$ nicht diff'bar in $x_0 = 0$.

-2-

Tangente

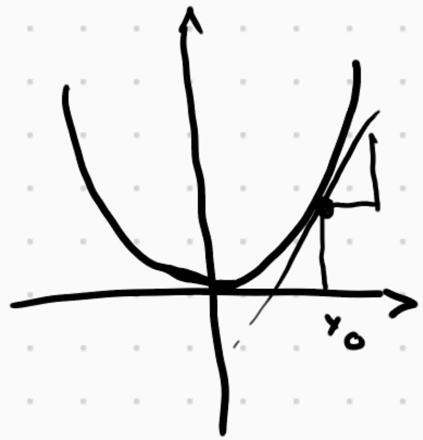
Ist eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $x_0 \in D$, so können wir die **Tangentengleichung in** x_0 aufstellen

$$t(x) = \underbrace{f'(x_0)}_{\text{Steigung}} \cdot (x - x_0) + \underbrace{f(x_0)}_{\text{Funktionswert}} \quad .$$

Bsp: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$, $x_0 = 1$.

$f(1) = 1$, $f'(x) = 2x \Rightarrow f'(1) = 2$

$$\Rightarrow t(x_0) = 2 \cdot (x-1) + 1$$
$$= 2x - 1$$

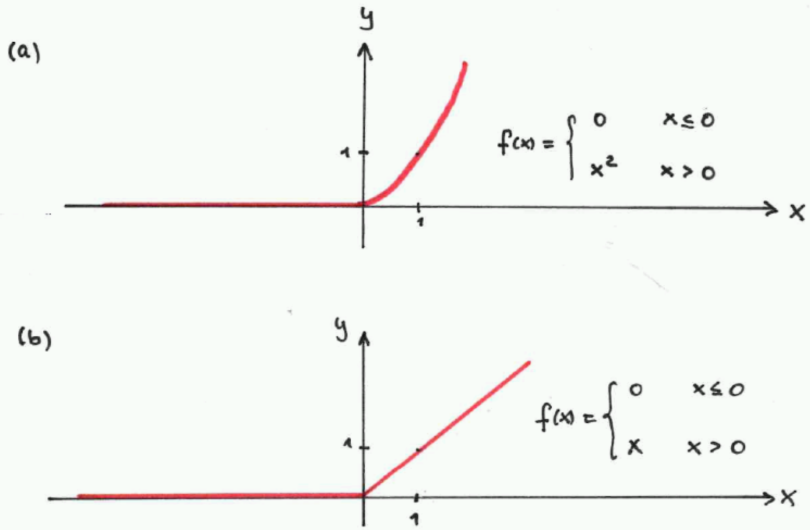


Beispiel:

(b) Ist nicht diff'bar in $x_0 = 0$:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+}\underbrace{\frac{x-0}{x-0}}_{1} = 1$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-}\frac{0-0}{\underbrace{x-0}_{0}} = 0$$



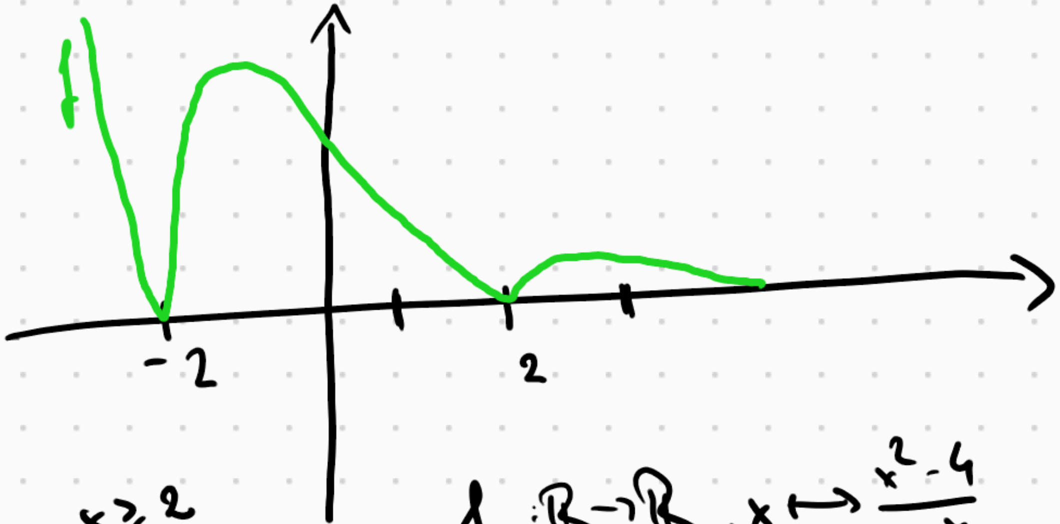
(a) $\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+}\frac{x^2-0}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} x = 0$$

$\Rightarrow f$ ist diff'bar in $x_0 = 0$.

Beispiel: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{|x^2-4|}{2e^x}$$



Kritische Stellen

$x_1 = 2$, $x_2 = -2$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{2e^x} & x \geq 2 \\[2mm] \dfrac{-(x^2-4)}{2e^x} & -2 < x < 2 \end{cases}$$

$f_1 : \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x \mapsto \dfrac{x^2-4}{2e^x}$

$f_2 : \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x \mapsto \dfrac{-(x^2-4)}{2e^x}$ sind diff'bare Fkten

$$f = \begin{cases} f_1 & , x \geq 2 \\ f_2 & , -2 < x < 2 \end{cases}$$

$$f_1'(x) = \frac{2x\cdot 2e^x - (x^2-4)2e^x}{(2e^x)^2} = \frac{2x - x^2 + 4}{2e^x}$$

$$f_1'(2) = \frac{+4}{2e^2} = 2e^{-2}$$

$$f_2'(x) = \frac{-2x\cdot 2e^x + (x^2-4)2e^x}{(2e^x)^2} = \frac{-2x + x^2 - 4}{2e^x}, \quad f_2'(2) = \frac{-4}{2e^2} = -2e^{-2} \neq f_1'(2)$$

$\Rightarrow$ f nicht diff'bar $x_1 = 2$. // Ebenso: f nicht diff'bar in x_2.

Minimum und Maximum

Definition

Sei $S \subseteq \mathbb{R}$ eine Menge.

(i) Exisitiert ein Element $S_0 \in S$ so, dass für alle $s \in S$ gilt $s \leq S_0$, so heißt S_0 Maximum von S, $S_0 = \max S$.

(ii) Exisitiert ein Element $s_0 \in S$ so, dass für alle $s \in S$ gilt $s_0 \leq s$, so heißt s_0 Minimum von S, $s_0 = \min S$.

Bsp: $S = \{-1, 5, 17\}$: $\max S = 17$, $\min = -1$

Allg: Jede endl. Teilmenge von $\mathbb{R}$ besitzt Minimum/Maximum.

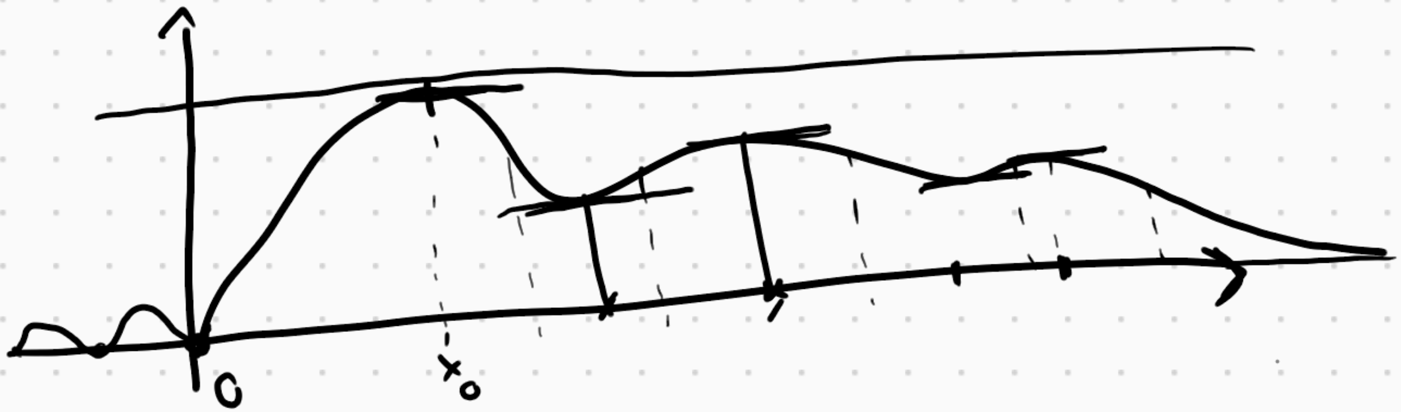
Bsp: $S = [0,5] = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 5\} \Rightarrow \min = 0$, $\max = 5$

$[a,b] \Rightarrow \max = b$, $\min a$

Bsp: $S = [0,5)$, $\Rightarrow \min S = 0$,

$s_0 < s_0 + \frac{5-s_0}{2} \in S \Rightarrow s_0$ ist kein Maximum.

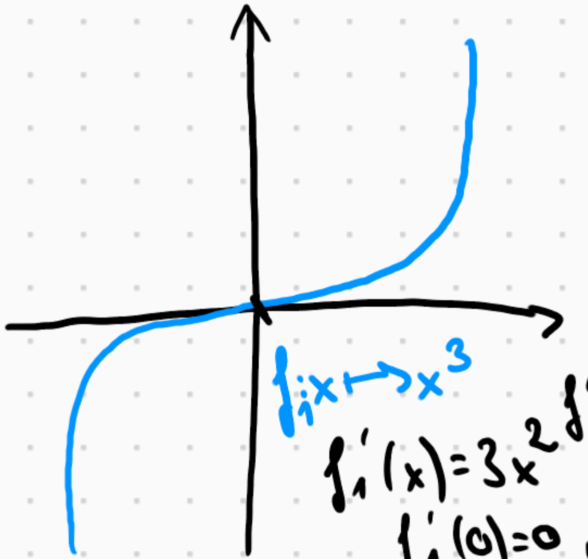
S besitzt kein Maximum. $(a,b) \Rightarrow$ min/max existieren nicht.



Definition

(i) Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ **besitzt** ein **globales Maximum** [globales Minimum], wenn das Bild $f(D) \subseteq \mathbb{R}$ ein Maximum [Minimum] besitzt.

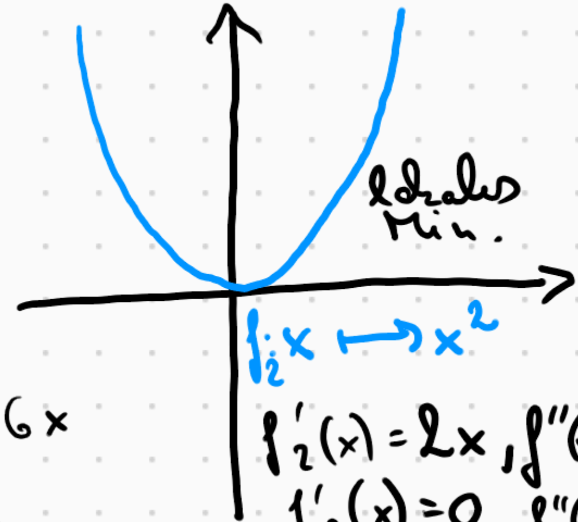
(ii) Ein Element $x \in D$ **heißt** globales Maximum [globales Minimum], wenn $f(x) = \max f(D)$ $[f(x) = \min F(D)]$.
Dann heißt $f(x)$ globaler Maximalwert [globaler Minimalwert].
item[(iii)] Ein Element $x \in D$ heißt **lokales Maximum** [lokales Minimum] von f, wenn es ein offenes Intervall $I = (a, b) \subset D$ gibt so, dass der Funktionswert $f(x)$ das Maximum [Minimum] von $f(I)$ ist.
Dann heißt $f(x)$ lokaler Maximalwert [lokaler Minimalwert].



$f_1: x \mapsto x^3$

$f_1'(x) = 3x^2$, $f''(x) = 6x$

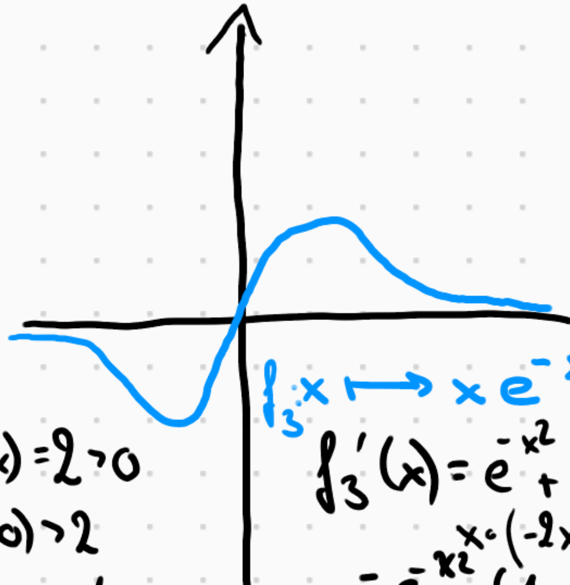
$f_1'(0) = 0$, $f''(x) = 0$



$f_2: x \mapsto x^2$

$f_2'(x) = 2x$, $f''(x) = 2 > 0$

$f_2'(x) = 0$, $f''(0) > 2$



$f_3: x \mapsto x e^{-x^2}$

$f_3'(x) = e^{-x^2} + x \cdot (-2x) e^{-x^2}$
$= e^{-x^2}(1-2x^2)$

f diff'bar: notwendig für lokales Min/Max in x_0: $f'(x_0) = 0$

NSt von f': $\pm \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$f_3''(x) = -2x e^{-x^2}(1-2x^2) + e^{-x^2}(-4x)$$
$$= -2x e^{-x^2}(1-2x^2+2)$$
$$= -2x e^{-x^2}(3-2x^2)$$

$f_3''\left(+\frac{\sqrt{2}}{2}\right) < 0 \Rightarrow$ lokales Max $x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$f_3''\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) > 0 \Rightarrow$ lokales Min $x_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Definition

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Ist die Ableitungsfunktion $f' : D \to \mathbb{R}$ wiederum differenzierbar, dann heißt deren Ableitung $f'' := (f')' : D \to \mathbb{R}$ die **zweite Ableitung**sfunktion von f, und f heißt zwei mal differenzierbar.
Etc.: f heißt n-mal differenzierbar, wenn (mindestens) n Iterationen dieses Vorgangs möglich sind, d.h. wenn

$$f', f'' = (f')', f''' = (f'')', \dots, f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$$

existieren.

Definition

Eine Funktion heißt n-mal **stetig differenzierbar** (in x_0), wenn sie n-mal differenzierbar ist und $f, f', \dots, f^{(n)}$ stetig sind (in x_0).

Bemerkung

Man zeigt: Eine differenzierbare Funktion ist stetig.
Deshalb ist eine Funktion n-mal stetig differenzierbar, wenn sie n-mal differenzierbar ist und die n-te Ableitung stetig ist.

Satz

Es sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ eine 2-mal stetig differenzierbare Funktion. Dann gilt:

(i) Ist $x_0 \in (a, b)$ ein lokales Minimum oder Maximum, dann ist $f'(x_0) = 0$.

(ii) Verschwindet für $x_0 \in (a, b)$ die Ableitung, $f'(x_0) = 0$, und ist

$$\begin{cases} f''(x_0) > 0, & \text{so ist } x_0 \text{ ein lokales Minimum.} \\ f''(x_0) < 0, & \text{so ist } x_0 \text{ ein lokales Maximum.} \end{cases}$$

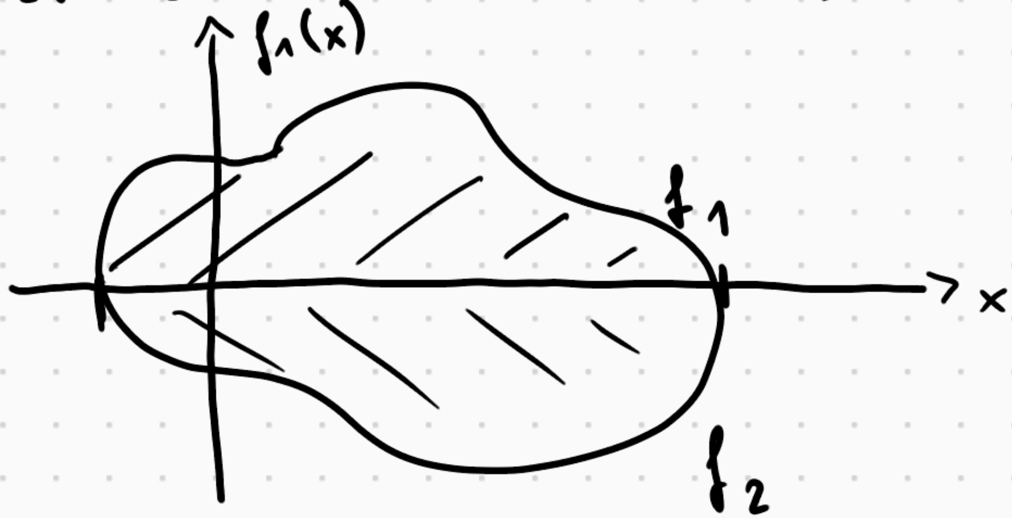
notwendig!

-5-

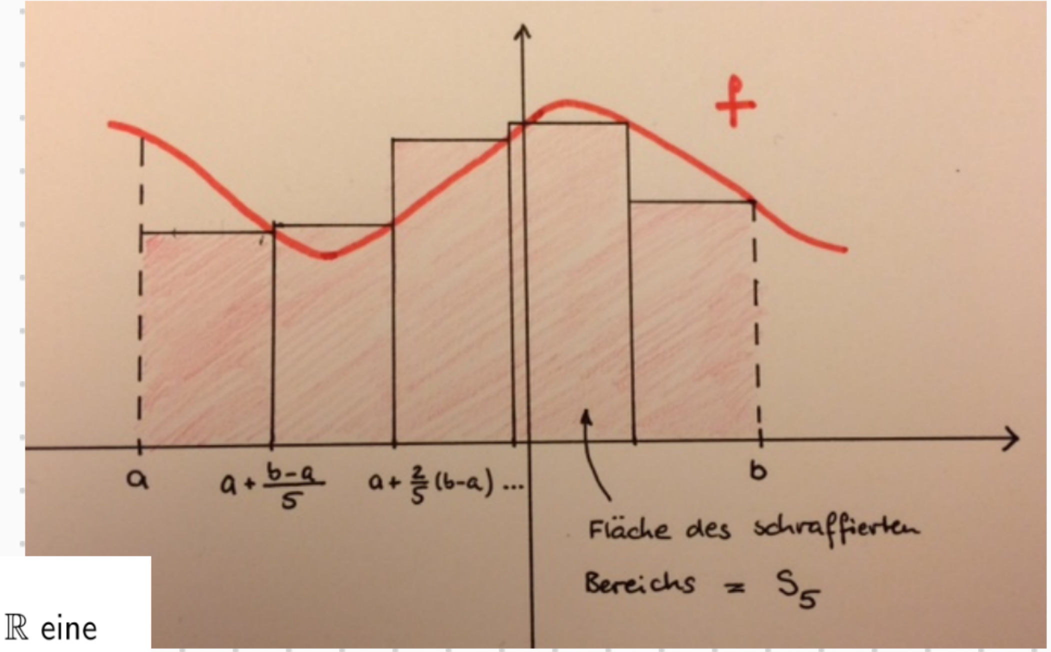
Die Beschreibung einer Funktion durch Ihre Extremstellen und Monotonieeigenschaften heißt Kurvendiskussion.

Integrale

Idee: Ein Integral ist ein Flächeninhalt.



Das Integral soll den Flächeninhalt zwischen Funktionsgraph und x-Achse angeben.



Definition

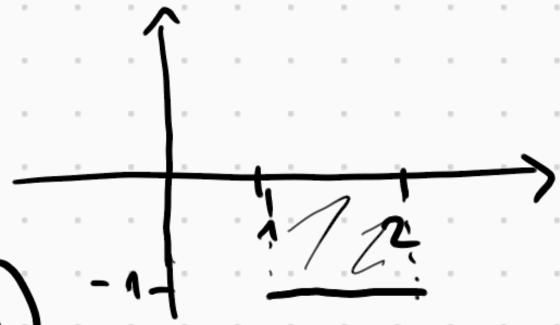
Sei $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Das **bestimmte Integral** von f über das Intervall I ist der Grenzwert der Folgen $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Treppensummen

$$S_n = \underbrace{\frac{b-a}{n}}_{\text{Balkenbreite}} \cdot \sum_{k=1}^{n} \underbrace{f(a + \frac{k}{n}(b-a))}_{\text{Balkenhöhe}} .$$

Schreibe

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} S_n .$$

Beispiel: $f: [1,2] \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto -1$



$$\underline{S_n} = \frac{2-1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} f\Big(\underbrace{1 + \frac{k}{n}\underbrace{(2-1)}_{1}}_{\frac{n+k}{n}}\Big)$$

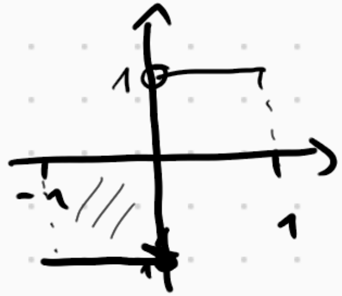
$$= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} -1$$

$$= \frac{1}{n} \cdot n \cdot (-1) = \underline{-1}$$

$$\int_1^2 f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} -1 = -1$$

$$\boxed{\text{Flächen unterhalb der x-Achse sind negativ!}}$$

Beispiel $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$, $x \longmapsto \begin{cases}-1, & x\le 0\\ +1, & x>0\end{cases}$



$$S_n = \frac{1-(-1)}{n}\cdot \sum_{k=1}^{n} f\left(-1+\frac{k}{n}(1-(-1))\right)$$

$$= \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{2k-n}{n}\right) = \frac{2}{n}\cdot\left(\sum_{k=1}^{[\frac{n}{2}]}(-1) + \sum_{k=[\frac{n}{2}]+1}^{n} 1\right)$$

Gaußklammer: größte ganze Zahl $\le \frac{n}{2}$.

$$= \frac{2}{n}\cdot\begin{cases}0, & \text{falls } n \text{ gerade}\\ 1, & \text{falls } n \text{ ungerade}\end{cases}$$

$$= \begin{cases}0, & n \text{ gerade}\\ \frac{2}{n} \xrightarrow{(n\to\infty)} 0, & n \text{ ungerade}\end{cases} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = 0, \text{ also } \int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 0$$

Rechenregeln

Weil auch das Integral als Grenzwert definiert ist, folgt aus den Grenzwertsätzen sofort für Funktionen $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$:

(i) $\int_a^b (f+g)(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$.

(ii) Für jedes $c \in \mathbb{R}$ ist $\int_a^b (c \cdot f)(x)\,dx = c \cdot \int_a^b f(x)\,dx$.

Das heißt, **das Integral ist linear.**

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} S_n \quad \Big| \quad \text{„}\int (f+g) = \int f + \int g\text{"}$$

$$\text{„}\int c \cdot f = c \cdot \int f\text{"}$$

Bsp: $\int_a^b (2x+3)\,dx = 2\int_a^b x\,dx + 3\int_a^b 1\,dx = 2 \cdot \frac{b^2 - a^2}{2} + 3 \cdot (b-a) \cdot 1$

$$= (b-a)(b+a+3)$$

Bsp: $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto x$

$$\underset{\sim\sim}{S_n} = \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} \left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right)$$

$$= \frac{b-a}{n} \cdot a \cdot \sum_{k=1}^{n} 1 + \left(\frac{b-a}{n}\right)^2 \sum_{k=1}^{n} k$$

$$= \frac{(b-a)\cdot a}{n} \cdot n + \left(\frac{b-a}{n}\right)^2 \frac{n(n+1)}{2}$$

$$= a(b-a) + \frac{(b-a)^2}{2} \cdot \underbrace{\frac{n+1}{n}}_{= \frac{1+\frac{1}{n}}{1} \xrightarrow{n\to\infty} 1}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = a(b-a) + \frac{(b-a)^2}{2}$$

$$= \frac{(b-a)(2a+b-a)}{2} = \frac{(b-a)(b+a)}{2} = \frac{1}{2}\left(b^2 - a^2\right)$$

$$\boxed{\text{D.h.:} \quad \int_a^b x \, dx = \frac{1}{2}\left(b^2 - a^2\right)}$$

Stammfunktion

Definition
Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Eine differenzierbare Funktion $F : D \to \mathbb{R}$ heißt Stammfunktion von f, wenn ihre Ableitung $F' = f$ erfüllt.

Bem: Ist F eine Stammfkt von f, dann ist auch $\tilde{F} = F + c$ ($c \in \mathbb{R}$ fest) eine Stammfkt von f.

Denn: $\tilde{F}' = F' + c'$
$= f + 0 = f$

Bsp: $f = c$ const. Dann ist $F(x) = c \cdot x$,
denn $F'(x) = c \cdot 1 = c = f$

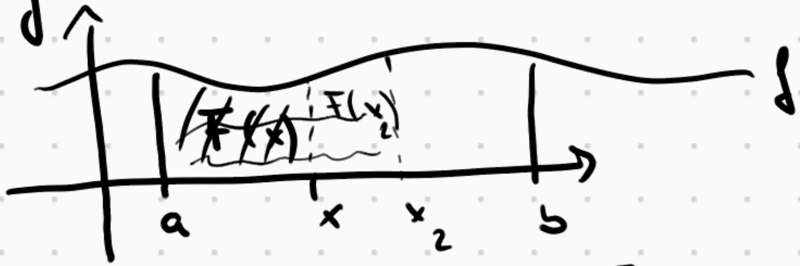
Satz (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)

Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine **stetige** Funktion. Dann ist die Funktion $F : [a, b] \to \mathbb{R}$,

$$x \mapsto \int_a^x f(t)\, dt$$

eien Stammfunktion von f.
Jede andere Stammfunktion $\widetilde{F}$ von f ist von der Gestalt $\widetilde{F} = F + c$ für ein beliebige Konstante $c \in \mathbb{R}$.
Für jede Stammfunktion $\widetilde{F}$ und jedes Teilintervall $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$ gilt $\int_\alpha^\beta f(t)\, dt = \widetilde{F}(\beta) - \widetilde{F}(\alpha)$.

Ja, richtig: Wir haben die Variable in der Integralgrenze!



Bsp: $f : x \mapsto 1$, im Intervall $[0, b]$

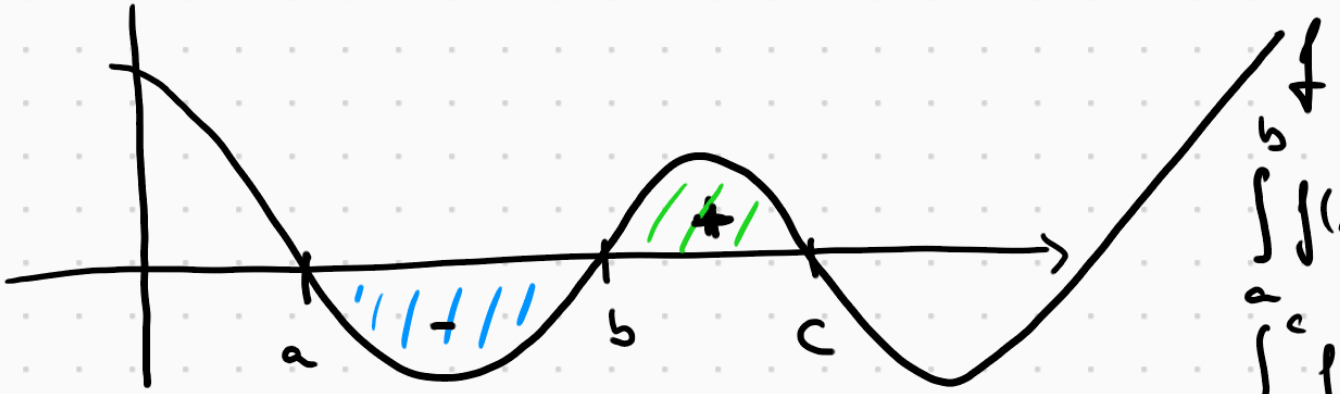
$$\int_0^x 1\, dt = 1 \cdot (x - 0) = x$$

Beispiel: $\quad f : x \longmapsto 1 \qquad a \in [0, b]$

$$\tilde{F}(x) = \int_a^x 1 \, dt = 1 \cdot (x - a) = x - a$$

$\tilde{F}$ ist Stammfkt von f.

Flächenberechnungen



$$\int_a^b f(x)\,dx < 0$$

$$\int_b^c f(x)\,dx > 0$$

Vertauschen der Integralgrenzen:

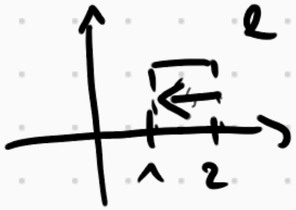
Definition

Für $a \leq b$ setze

$$\int_b^a f(x)\ dx = -\int_a^b f(x)\ dx.$$

Es ist insbesondere $\int_a^a f(x)\ dx = 0$.

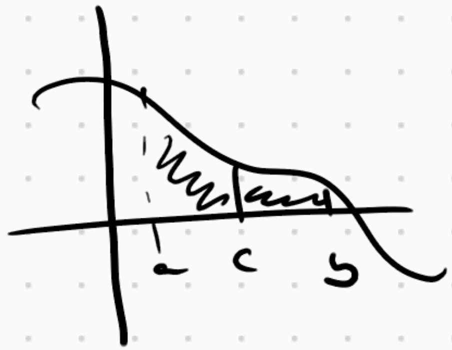
Beispiel: $\int_2^1 1 \, dx = -\int_1^2 1 \, dx = -(2-1) = -1$

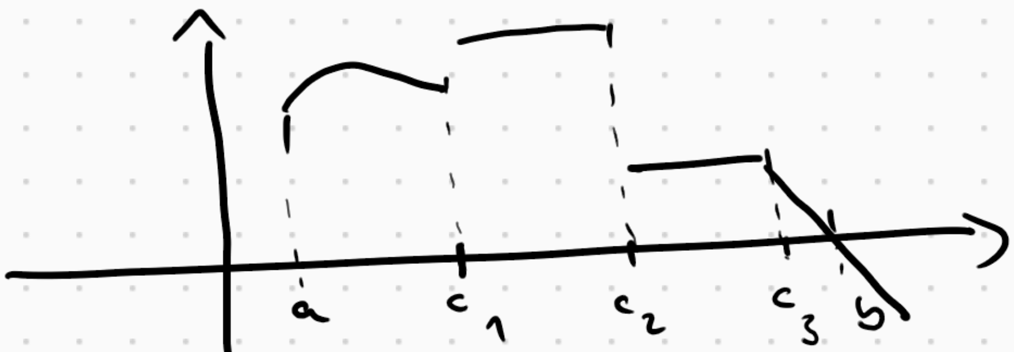


Satz

Ist $c \in [a, b]$, so gilt

$$\int_a^b f(x)\; dx = \int_a^c f(x)\; dx + \int_c^b f(x)\; dx.$$



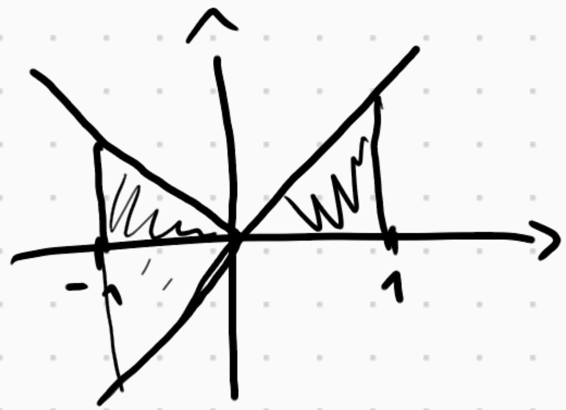


Beispiel:

$$\int_{-1}^{+1} |x| \, dx = \int_{-1}^{0} (-x) \, dx + \int_{0}^{1} x \, dx$$

$$= -\int_{-1}^{0} x \, dx + \int_{0}^{1} x \, dx = -\frac{\left(0^2 - (-1)^2\right)}{2} + \frac{\left(1^2 - 0^2\right)}{2}$$

$$= -\frac{-1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$



Kettenregel und Substitutionsregel

Satz

Sind $f : D_1 \to \mathbb{R}$, $g : D_2 \to \mathbb{R}$ zwei differenzierbare Funktionen mit $f(D_1) \subset D_2$, dann ist die Komposition $g \circ f : D_1 \to \mathbb{R}$ differenzierbar und es gilt

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x).$$

Anders gesagt: Die Funktion $g \circ f$ ist eine Stammfunktion von $(g' \circ f) \cdot f'$.

<u>Bsp:</u> $\left((x^2+1)^7\right)' = 7(x^2+1)^6 \cdot 2x = 14x(x^2+1)^6$

<u>Bsp:</u> $e^{x^2} = e^{x^2} \cdot 2x = 2x e^{x^2}$

$f(x) = x^2,\ g(x) = e^x$

<u>Bsp:</u> $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0},\ x \mapsto \sqrt{x}$, f' ??

$g : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0},\ x \mapsto x^2$, $g'(x) = 2x$

$\mathrm{id}_{\mathbb{R}_{\geq 0}} = g \circ f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0},\ x \xmapsto{f} \sqrt{x} \xmapsto{g} x$

$(g \circ f)'(x) = 1$

Also: $(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$

d.h. $1 = 2 \cdot \sqrt{x} \cdot f'(x)$

Die Formel ist falsch in $x_0 = 0 \Rightarrow f$ nicht diffbar in $x_0 = 0$. Aber $x > 0$:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2} x^{-1/2}$$

-2-

Hauptsatz!

Substitutionsregel:

$$\int_a^b g'(f(x))\cdot f'(x)\,dx = g(f(b)) - g(f(a))$$

$$= \int_{f(a)}^{f(b)} g'(t)\,dt$$

__Beispiel:__ $\displaystyle\int_0^1 x e^{x^2} dx$

$(e^{x^2})' = 2x e^{x^2}$ das ist fast der Integrand!

Setze: $g(t) = e^t$, $f(x) = x^2$, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$g \circ f(x) = g(x^2) = e^{x^2}$ und

$(g \circ f)'(x) = e^{x^2} \cdot 2x$

$$\Rightarrow \int_0^1 x e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \underbrace{2x}_{f'} \underbrace{e^{x^2}}_{g \circ f} dx = \frac{1}{2} \cdot e^{x^2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2}\left(e^1 - e^0\right) = \frac{e-1}{2}$$

Produktregel und partielle Integration

Satz (Produktregel)

Sind $f, g : D \to \mathbb{R}$ zwei differenzierbare Funktionen, so ist ihr Produkt $f \cdot g : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar und es gilt

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'.$$

Anders gesagt: $f \cdot g$ ist eine Stammfunktion von $f' \cdot g + f \cdot g'$.

Beispiel: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \longmapsto x$, $ff = f^2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \longmapsto x^2$; $f' : x \longmapsto 1$.

$(f \cdot f)' = f' \cdot f + f \cdot f'$, d.h.

$\forall x \in \mathbb{R}$: $(f^2)'(x) = 1 \cdot x + x \cdot 1 = 2x$ //

Allgemeiner: $f : x \longmapsto x^n$: $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$

Anm.: Für $f_{n-1} : x \longmapsto x^{n-1}$ gilt $f'(x) = (n-1)\, x^{n-2}$

$\Rightarrow f_n : x \mapsto x^n$: $f_n' = (f_1 f_{n-1})' = 1 \cdot x^{n-1} + x(n-1)\, x^{n-2} = n\, x^{n-1}$ //

Wenden wir den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung an, dann gilt für $[a, b] \subset D$

$$\int_a^b (f' \cdot g + f \cdot g')\, dx = (f \cdot g)(b) - (f \cdot g)(a).$$

$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$

Satz (Partielle Integration)

Es gilt

$$\int_a^b f' \cdot g\, dx = (f \cdot g)(b) - (f \cdot g)(a) - \int_a^b f \cdot g'\, dx.$$

$f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ diff'bar.

-2-

Beispiel: $\int_0^1 x\cdot e^x \, dx$ Voraus.: $(e^x)' = e^x$

$f(x) = x \quad , \quad g'(x) = e^x$

$\Rightarrow f'(x) = 1 \quad , \quad g(x) = e^x \ (+c)$

Also: $\int_0^1 f\cdot g' = (f\cdot g)(1) - (f\cdot g)(0) - \int_0^1 f'\cdot g \, dx$

also $\int_0^1 xe^x \, dx = xe^x\Big|_0^1 - \int_0^1 1\cdot e^x \, dx$

$= 1\cdot e^1 - 0\cdot e^0 - e^x\Big|_0^1 = e - 0 - (\underbrace{e^1}_{e} - \underbrace{e^0}_{1}) = 0 + 1 = \underline{\underline{1}}$

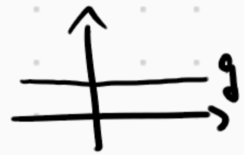
<u>Bsp</u>: $\left(\frac{1}{f}\right)'$? , $f : D \to \mathbb{R}$ diff'bar

$\forall x \in D : f(x) \neq 0$

$$\Big(\underbrace{f \cdot \frac{1}{f}}_{g}\Big)(x) = f(x) \cdot \frac{1}{f(x)} = 1$$

konstante Fkt

$\Rightarrow g' = 0$



And: $g' = f' \cdot \frac{1}{f} + f \cdot \left(\frac{1}{f}\right)'$

Also: $0 = f' \cdot \frac{1}{f} + f \cdot \left(\frac{1}{f}\right)'$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f \cdot f} = \frac{-f'}{f^2}$$

<u>Bsp</u>: $\left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{-1}{x^2}$ //