Dr. K. Maurischat
Dr. S. Bleß

Aachen, 19. Oktober 2020

Lineare Algebra

Übungsaufgaben mit Lösungen

im Vorkurs Mathematik 2020, RWTH Aachen University

— Lineare Gleichungssysteme I —

Aufgabe 1

Übersetzen Sie jeweils die Textaufgabe in ein lineares Gleichungssystem und lösen Sie es.

a) Vor drei Jahren war Monika dreimal so alt wie Peter. In vier Jahren ist Monika nur noch doppelt so alt wie Peter. Wie alt sind Peter und Monika?

b) Drei normale Brötchen kosten so viel wie zwei Körnerbrötchen. Fünf normale Brötchen sind um 17 Cent teurer als drei Körnerbrötchen. Wie viel kosten normale Brötchen und Körnerbrötchen?

c) Bei Zählungen am Gleisdreieck Mannheim-Friedrichsfeld wird festgestellt, dass in dem beobachteten Zeitraum 38 Züge nach Mannheim fuhren oder aus Mannheim kamen, 33 Züge passierten das nördliche Ende Richtung Weinheim bzw. von Weinheim kommend, und 45 Züge fuhren nach Heidelberg oder kamen aus Heidelberg. Wie viele Züge fuhren auf der Strecke Mannheim–Weinheim, wieviele auf der Strecke Heidelberg–Mannheim und wie viele auf der Strecke Heidelberg–Weinheim?

Lösung:

a) Das Gleichungssystem lautet

$$\begin{aligned} m - 3 &= 3(p-3) \\ m + 4 &= 2(p+4), \end{aligned}$$

in Standardform

$$\begin{aligned} m - 3p &= -6 \\ m - 2p &= 4. \end{aligned}$$

Multipliziert man die erste Gleichung mit -1 und addiert dann die Gleichungen, erhält man

$$3p - 2p = 6 + 4 \Rightarrow p = 10.$$

In die erste Gleichung eingesetzt: $m - 3 \cdot 10 = -6$, also $m = 30 - 6 = 24$.
Eine Probe zeigt, dass $\binom{p}{m} = \binom{10}{24}$ auch wirklich beide Gleichungen erfüllt.

b) Das Gleichungssystem lautet

$$3n = 2k$$
$$5n = 3k + 17,$$

in Standardform

$$3n - 2k = 0$$
$$5n - 3k = 17.$$

Löst man die erste Gleichung nach k auf, erhält man $k = \frac{3}{2}n$. Dies in die zweite Gleichung eingesetzt ergibt: $5n = \frac{9}{2}n + 17 \Rightarrow \frac{1}{2}n = 17 \Rightarrow n = 34$. Daraus erhält man: $k = \frac{3}{2} \cdot 34 = 51$. Eine Probe zeigt, dass $\binom{n}{k} = \binom{34}{51}$ auch wirklich beide Gleichungen erfüllt.

c) Sind x_1 die Anzahl der Züge auf der Strecke Mannheim–Weinheim, x_2 für die Strecke Heidelberg–Mannheim und x_3 für die Strecke Heidelberg–Weinheim, erhält man

$$\begin{array}{llll} x_1 & +x_2 & & = 38 \quad \text{(Züge aus/nach Mannheim)} \\ x_1 & & +x_3 & = 33 \quad \text{(Züge aus/nach Weinheim)} \\ & x_2 & +x_3 & = 45 \quad \text{(Züge aus/nach Heidelberg)} \end{array}$$

Zieht man die zweite von der ersten Gleichung ab, erhält man $x_2 - x_3 = 38 - 33 = 5$. Addiert man diese Gleichung zur dritten Gleichung erhält man $2x_2 = 45 + 5 = 50$, also $x_2 = 25$. Dies in die erste bzw. dritte Gleichung eingesetzt ergibt: $x_1 = 38 - 25 = 13$ und $x_3 = 45 - 25 = 20$. Eine Probe zeigt, dass $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 25 \\ 20 \end{pmatrix}$ auch wirklich alle drei Gleichungen erfüllt.

Aufgabe 2

Geben Sie jeweils ein (möglichst einfaches) Beispiel eines linearen Gleichungssystems mit drei Gleichungen und drei Unbekannten an,

a) das genau eine Lösung hat,

b) das unendliche viele Lösungen hat,

c) das keine Lösung hat.

Lösung:
Zum Beispiel

$$\text{a)} \quad \begin{array}{rcl} x_1 & = & 1 \\ x_2 & = & 2 \\ x_3 & = & 3 \end{array} \qquad \text{b)} \quad \begin{array}{rcl} x_1 & = & 1 \\ x_1 & = & 1 \\ x_2 + x_3 & = & 1 \end{array} \qquad \text{c)} \quad \begin{array}{rcl} x_1 & = & 1 \\ x_1 & = & 0 \\ x_2 + x_3 & = & 1 \end{array}$$

Aufgabe 3

In Abbildung 1 sind verschiedene (sphärische) Polyeder abgebildet.
Für jeden solchen Polyeder gilt, dass die Anzahl k der Kanten genau um 2 kleiner ist als die Summe der Eckenanzahl e und der Flächenanzahl f. Bestehen alle Flächen aus Dreiecken, so

ist das Doppelte der Kantenanzahl gleich dem Dreifachen der Flächenanzahl (zählt man nämlich für jedes Dreieck die Kanten, je 3, so hat man am Ende jede Kante doppelt gezählt, weil jede Kante zu zwei Seitenflächen gehört). Ähnlich erhält man einen Zusammenhang zwischen der Eckenanzahl und der Kantenanzahl, wenn an jeder Ecke gleich viele Kanten enden.

a) Stellen Sie ein lineares Gleichungssystem für k, e und f für den Fall des Oktaeders (lauter Dreiecke und an jeder Ecke enden 4 Kanten) auf, und lösen Sie dieses.

b) Stellen Sie entsprechend ein lineares Gleichungssystem auf für ein Polyeder, dessen Seitenflächen lauter Dreiecke sind und bei dem an jeder Ecke fünf Kanten enden. Lösen Sie auch dieses.

c) Stellen Sie entsprechend ein lineares Gleichungssystem auf für ein Polyeder, dessen Seitenflächen lauter Fünfecke sind und bei dem an jeder Ecke drei Kanten enden.

d) Gibt es ein Polyeder aus lauter Dreiecken, bei dem an jeder Ecke sechs Kanten enden?

e) Gibt es ein Polyeder aus lauter Fünfecken, bei dem an jeder Ecke vier Kanten enden?

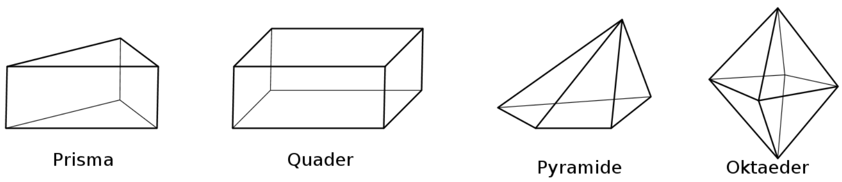


Abbildung 1: Verschiedene Polyeder

Lösung:

a)

$$\begin{aligned} e \quad +f \quad -k &= 2 \\ 3f \quad -2k &= 0 \\ 4e \qquad\quad -2k &= 0 \end{aligned}$$

Zweite Gleichung nach f auflösen und dritte nach e. Dann beides in erste Gleichung einsetzen liefert $k = 12$. Anschließend rechnet man mit zweiter und dritter Gleichung aus, dass $f = 8$ und $e = 6$ sind.
Probe nicht vergessen!

b)

$$\begin{aligned} e \quad +f \quad -k &= 2 \\ 3f \quad -2k &= 0 \\ 5e \qquad\quad -2k &= 0 \end{aligned}$$

Ausrechnen wie oben: Lösung ist $e = 12$, $f = 20$ und $k = 30$ (Ikosaeder).

c)

$$\begin{array}{rrrl} e & +f & -k & = 2 \\ & 5f & -2k & = 0 \\ 3e & & -2k & = 0 \end{array}$$

Fast das gleiche LGS. Lediglich die Rollen von e und f sind vertauscht. $\Rightarrow$ (Ohne nochmal etwas zu rechnen) Lösung ist $e = 20$, $f = 12$ und $k = 30$ (Dodekaeder).

d)

$$\begin{array}{rrrl} e & +f & -k & = 2 \\ & 3f & -2k & = 0 \\ 6e & & -2k & = 0 \end{array}$$

Löst man hier die zweite und dritte Gleichung nach f bzw. e auf und setzt in die erste ein, erhält man

$$\tfrac{1}{3}k + \tfrac{2}{3}k - k = 2,$$

Also $0 \cdot k = 2$, was nicht erfüllbar ist.
Es gibt daher kein solches Polyeder.

e)

$$\begin{array}{rrrl} e & +f & -k & = 2 \\ & 5f & -2k & = 0 \\ 4e & & -2k & = 0 \end{array}$$

Hier erhält man nach obigem Schema die Gleichung

$$\tfrac{1}{2}k + \tfrac{2}{5}k - k = 2 \Rightarrow -\tfrac{1}{10}k = 2 \Rightarrow k = -20.$$

Das Gleichungssystem ist lösbar mit Lösung $k = -20$, $e = -10$ und $f = -8$. Da die Anzahlen aber natürliche Zahlen sein müssen, ergibt das keine Lösung für das Problem.

Aufgabe 4

Bestimmen Sie jeweils die Lösungsmenge der folgenden linearen Gleichungssysteme.

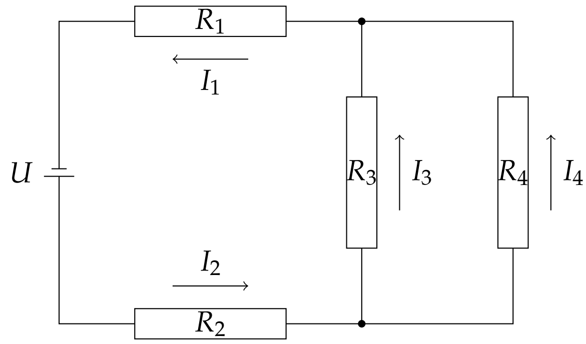
a) $\begin{array}{rrcr} 2x_1 & -x_2 & = & 4 \\ x_1 & +\frac{1}{2}x_2 & = & -2 \end{array}$ b) $\begin{array}{rrcr} 3x_1 & +2x_2 & = & 1 \\ x_1 & -2x_2 & = & 11 \\ -2x_1 & +x_2 & = & 5 \end{array}$ c) $\begin{array}{rrrcr} x & +3y & +z & = & 1 \\ 3x & +9y & +4z & = & 0 \\ x & +3y & +2z & = & 3 \end{array}$

Lösung:

a) $\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix} \right\}$, b) $\mathbb{L} = \emptyset$, a) $\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} -3r-1 \\ r \\ 2 \end{pmatrix} \mid r \in \mathbb{R} \right\}$

Aufgabe 5

Gegeben sei das folgende Gleichstromnetz:



In einem Gleichstromnetz gelten die Kirchhoffschen Regeln. Die *Knotenregel* besagt, dass in jedem Knoten im Netz die Summe der Ströme, deren Pfeil auf den Knoten hinweist, gleich der Summe der Ströme ist, deren Pfeil vom Knoten wegweist. Die *Maschenregel* besagt, dass, wenn man einen geschlossenen Weg durch das Netz läuft und dabei die Produkte $\pm R_k I_k$ an den durchlaufenen Widerständen aufsummiert (mit positivem Vorzeichen, wenn der Weg in Pfeilrichtung verläuft, und mit negativem Vorzeichen, wenn der Weg entgegen der Pfeilrichtung verläuft), man die Summe der Spannungen der Spannungsquellen auf diesem Weg erhält. Berechnen Sie mit diesen Regeln die Stromstärken in obigem Netz, wenn die Spannungsquelle $36\,\mathrm{V}$ hat und für die Widerstände $R_1 = 200\,\Omega$ sowie $R_2 = 400\,\Omega$ und $R_3 = 300\,\Omega$ sowie $R_4 = 200\,\Omega$ gilt.

Lösung:
Die Knotenregel liefert die Bedingungen $I_3 + I_4 = I_1$ (oberer Knoten) und $I_2 = I_3 + I_4$ (unterer Knoten), und aus der Maschenregel erhält man $R_2 I_2 + R_3 I_3 + R_1 I_1 = U$ (linke Masche gegen den Uhrzeigersinn durchlaufen) sowie $R_4 I_4 - R_3 I_3 = 0$ (rechte Masche gegen den Uhrzeigersinn durchlaufen). Man hat also in Standardform (und ohne Einheiten) das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} I_1 - I_3 - I_4 &= 0 \\ I_2 - I_3 - I_4 &= 0 \\ 200I_1 + 400I_2 + 300I_3 &= 36 \\ -300I_3 + 200I_4 &= 0 \end{aligned}$$

Lösung: $I_1 = 0{,}05$ und $I_2 = 0{,}05$ sowie $I_3 = 0{,}02$ und $I_4 = 0{,}03$ (jeweils in Ampere)

— Gauß Algorithmus —

Aufgabe 6

Es seien folgende lineare Gleichungssysteme gegeben. Geben Sie jeweils die zugehörige Koeffizientenmatrix und erweiterte Koeffizientenmatrix an:

a)

$$
\begin{aligned}
3x_1 - 7x_2 + x_3 + 2x_4 &= 3 \\
5x_1 + 4x_3 - x_4 &= 0 \\
-3x_2 + 5x_3 + x_4 - 1 &= 1
\end{aligned}
$$

b)

$$
\begin{aligned}
2x_1 - 3x_3 + x_2 &= 0 \\
x_3 + 4x_1 - 3x_2 &= 0 \\
6x_2 + x_1 + 3x_3 - 1 &= -1
\end{aligned}
$$

c)

$$
\begin{aligned}
2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 0 \\
5x_4 - x_1 - x_5 + x_2 - 2 &= 0
\end{aligned}
$$

Lösung:
Die Koeffizientenmatrix beziehungsweise erweiterte Koeffizientenmatrix lauten

a)

$$
\begin{pmatrix} 3 & -7 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & -3 & 5 & 1 \end{pmatrix} \text{ beziehungsweise } \begin{pmatrix} 3 & -7 & 1 & 2 & | & 3 \\ 5 & 0 & 3 & -1 & | & 0 \\ 0 & -3 & 5 & 1 & | & 2 \end{pmatrix}
$$

b)

$$
\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & 6 & 3 \end{pmatrix} \text{ beziehungsweise } \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & | & 0 \\ 4 & -3 & 1 & | & 0 \\ 1 & 6 & 3 & | & 0 \end{pmatrix}
$$

c)

$$
\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 5 & -1 \end{pmatrix} \text{ beziehungsweise } \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 4 & 0 & | & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 5 & -1 & | & 2 \end{pmatrix}
$$

Aufgabe 7

Bestimmen Sie die Lösungsmengen der durch die folgenden Begleitmatrizen gegebenen Gleichungssysteme:

$$
\text{a) } \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right), \quad \text{b) } \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{array}\right), \quad \text{c) } \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \end{array}\right)
$$

$$
\text{d) } \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 3 \end{array}\right), \quad \text{e) } \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 4 & 0 \end{array}\right), \quad \text{f) } \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 3 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right).
$$

Lösung:

a) Wir machen die elementaren Zeilenumformung $I \to I - 2 \cdot II$ und erhalten

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right).$$

Vertauschen der beiden Zeilen und dann $II \to -\frac{1}{3} \cdot II$ ergibt

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1/3 & 0 \end{array}\right).$$

Schließlich liefert $I \to I + II$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5/3 & 0 \\ 0 & 1 & -1/3 & 0 \end{array}\right).$$

und somit

$$\mathbb{L} = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} -5/3 \\ 1/3 \\ 1 \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

b) Wie zuvor machen wir elementare Zeilenumformungen und erhalten

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1/5 \\ 0 & 1 & 2/5 \end{array}\right).$$

Damit hat das System die eindeutige Lösung $\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 1/5 \\ 2/5 \end{pmatrix} \right\}$.

c) Wie zuvor machen wir elementare Zeilenumformungen und erhalten

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 9/35 \\ 0 & 1 & 0 & -31/35 \\ 0 & 0 & 1 & 4/5 \end{array}\right).$$

Damit hat das System die eindeutige Lösung $\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 9/35 \\ -31/35 \\ 4/5 \end{pmatrix} \right\}$.

d) Die einzige mögliche Umformung ist eine Multiplikation welche

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/2 & 3/2 & 3/2 \end{array}\right)$$

ergibt, sodass die Lösungsmenge gegeben ist durch $\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 3/2 - 1/2y - 3/2z \\ y \\ z \end{pmatrix} : y, z \in \mathbb{R} \right\}$.

e) Wie zuvor machen wir elementare Zeilenumformungen und erhalten

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 4 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Damit hat das System keine Lösung, d.h. es gilt $\mathbb{L} = \{\}$.

f) Wie zuvor machen wir elementare Zeilenumformungen und erhalten

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 3 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \to \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 & 3/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 3/4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -5/4 \end{array}\right)$$

und somit

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 3/2 - 4\lambda \\ 3/4 + \lambda \\ -5/4 + \lambda \\ \lambda \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 3/2 \\ 3/4 \\ -5/4 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

Aufgabe 8

Lösen Sie die in Aufgabe 1 aufgestellten linearen Gleichungssysteme mit dem Gauß-Verfahren.

Lösung:

Alle angegebenen Umformungen sind diejenigen, die man erhält, wenn man dem in der Vorlesung angegebenen Gauß-Verfahren streng folgt.

a) Umformungen:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & -6 \\ 1 & -2 & 4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & -6 \\ 0 & 1 & 10 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 24 \\ 0 & 1 & 10 \end{array}\right)$$

Einzige Lösung $\binom{m}{p} = \binom{24}{10}$.

b) Umformungen:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & -2 & 0 \\ 5 & -3 & 17 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -\frac{2}{3} & 0 \\ 5 & -3 & 17 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 17 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 51 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 34 \\ 0 & 1 & 51 \end{array}\right)$$

Einzige Lösung $\binom{n}{k} = \binom{34}{51}$.

c) Umformungen:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 38 \\ 1 & 0 & 1 & 33 \\ 0 & 1 & 1 & 45 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 38 \\ 0 & -1 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & 45 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 38 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & -1 & -1 & -45 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 38 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & -40 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 38 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 20 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 38 \\ 0 & 1 & 0 & 25 \\ 0 & 0 & 1 & 20 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 13 \\ 0 & 1 & 0 & 25 \\ 0 & 0 & 1 & 20 \end{array}\right)$$

Einzige Lösung $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 25 \\ 20 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 9

Lösen Sie jeweils das lineare Gleichungssystem mit dem Gauß-Verfahren.

a)
$$\begin{aligned} x + 3y + z &= 1 \\ 3x + 9y + 4z &= 5 \\ x + 3y + 2z &= 3 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 6x_3 - x_4 &= 0 \\ -x_1 + x_2 - 4x_3 + x_4 &= 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + 10x_3 - 2x_4 &= 0 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 1 \\ 2y + 2z &= 0 \\ 2x + 5y + 3z &= 1 \end{aligned}$$

Lösung:

a) $\left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ p \\ -1 \end{pmatrix} \mid p \in \mathbb{R} \right\}$, b) $\left\{ \begin{pmatrix} -2p \\ 2p-q \\ p \\ q \end{pmatrix} \middle| p, q \in \mathbb{R} \right\}$, c) $\emptyset$

Aufgabe 10

Lösen Sie jeweils das lineare Gleichungssystem mit dem Gauß-Verfahren.

a)
$$\begin{aligned} x + y - z &= 1 \\ 2x + 6y + 3z &= 8 \\ x - 7y - 4z &= 3 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} 2x + 8y &= 0 \\ 6x + 24y + 3z &= 0 \\ 2x + 8y + z &= 0 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} x + 2z &= 1 \\ x + y + z &= 3 \\ 3x + y + 5z &= 6 \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 5x_3 + x_4 &= 3 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 6x_3 + x_4 &= 5 \end{aligned}$$

e)
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_3 + 3x_4 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 + 5x_4 &= 0 \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 &= 0 \\ 2x_2 + x_3 + 4x_4 &= 0 \end{aligned}$$

f)
$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 + 8x_4 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 6x_4 &= 0 \\ 2x_3 + 4x_4 + x_5 &= 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 8x_4 &= 0 \end{aligned}$$

Lösung:

a) $\{(4 \quad -1 \quad 2)^{\mathsf{T}}\}$, b) $\{(-4p \quad p \quad 0)^{\mathsf{T}} \mid p \in \mathbb{R}\}$, c) $\emptyset$,

d) $\{(-2p-1 \quad -p+2 \quad p \quad 3)^{\mathsf{T}} \mid p \in \mathbb{R}\}$, e) $\{(0 \quad 0 \quad 0 \quad 0)^{\mathsf{T}}\}$,

f) $\{(-p-4q \quad p \quad -2q \quad q \quad 0)^{\mathsf{T}} \mid p, q \in \mathbb{R}\}$.

Aufgabe 11

Bestimmen Sie jeweils alle Parameter a, b, c, $d \in \mathbb{R}$, für die die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto ax^3 + bx^2 + cx + d$ die gewünschten Bedingungen erfüllt.

a) Es gilt $f(1) = 1$ und $f(2) = 2$ sowie $f(-1) = 5$.

b) Es gilt $f(1) = 1$ und $f'(1) = -1$ sowie $f(-1) = 1$.

c) Die Gerade mit der Gleichung $y = 3x$ ist die Wendepunkttangente des Graphen von f, und die Wendestelle ist 1.

Lösung:

a) Gleichungssystem:

$$a + b + c + d = 1$$

$$8a + 4b + 2c + d = 2$$

$$-a + b - c + d = 5$$

Lösung: $a = \frac{p}{2} - 1$ und $b = -p + 3$ sowie $c = -\frac{p}{2} - 1$ und $d = p$ für beliebiges $p \in \mathbb{R}$

b) Gleichungssystem:

$$a+b+c+d=1$$
$$3a+2b+c=-1$$
$$-a+b-c+d=1$$

Lösung: $a=p-\frac{3}{2}$ und $b=-p+1$ sowie $c=-p+\frac{3}{2}$ und $d=p$ für beliebiges $p\in\mathbb{R}$

c) Dass die Gerade $y=3x$ ein Tangente an den Graphen von f an der Stelle $x=1$ ist, ist äquivalent zu $f(1)=3\cdot 1=3$ und $f'(1)=3$. Die Bedingung, dass 1 die Wendestelle ist, ist äquivalent zu $f''(1)=0$ und $f'''(1)=6a\neq 0$ (d.h. $a\neq 0$). Somit hat man das Gleichungssystem

$$a+b+c+d=3$$
$$3a+2b+c=3$$
$$6a+2b=0$$

sowie die Zusatzbedingung $a\neq 0$.
Lösung: $a=-p$ und $b=3p$ sowie $c=-3p+3$ und $d=p$ für beliebiges $p\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$

Aufgabe 12

Untersuchen Sie jeweils in Abhängigkeit von $a\in\mathbb{R}$, ob das gegebene lineare Gleichungssystem keine, genau eine oder unendlich viele Lösungen hat.

a)
$$\begin{aligned} 2x+4y+az&=5\\ 3x+(a+5)y+z&=7\\ x+2y+az&=3 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} ax+y+z&=a\\ ax+(a+2)y+(2a+1)z&=a-2\\ (a^2+a)y+(3a^2-1)z&=-2 \end{aligned}$$

Lösung:

a) für $a=0$ unlösbar, für $a=1$ unendlich viele Lösungen, sonst genau eine Lösung

b) für $a=-1$ unlösbar, für $a\in\{0,1\}$ unendlich viele Lösungen, sonst genau eine Lösung

— Vektorräume —

Aufgabe 13

Berechnen Sie:

a) $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$, c) $2\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\-5\end{pmatrix}+(-2)\cdot\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}$,

d) $\frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}10\\9\\1\end{pmatrix}+6\cdot\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$, e) $\frac{3}{4}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+\frac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, f) $4\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}-\frac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}\right)$.

Lösung:
Wir erhalten:

a) $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -12 \end{pmatrix}$,
d) $\begin{pmatrix} 46/3 \\ 15 \\ 19/3 \end{pmatrix}$, e) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, f) $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 14

1. Verifizieren Sie die Vektorraumeigenschaften für $\mathbb{R}^n$ mit der in Definition 2 erklärten Addition und Skalarenmultiplikation.
2. Zeigen Sie, dass die Menge der komplexen Nullfolgen $(a_k)_{k\geqslant 1}$ mit $a_k \in \mathbb{C}$, $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$ mit der Addition $(a_k)_{k\geqslant 1} + (b_k)_{k\geqslant 1} := (a_k + b_k)_{k\geqslant 1}$ und der Skalarenmultiplikation $\lambda(a_k)_{k\geqslant 1} := (\lambda a_k)_{k\geqslant 1}$, $\lambda \in \mathbb{C}$ ein $\mathbb{C}$-Vektorraum ist.

Lösung:
1. Die Vektorraum-Eigenschaften folgen komponentenweise aus den entsprechenden Eigenschaften reeller Zahlen; Nullvektor ist $o = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

2. Summen und skalare Vielfache von Nullfolgen sind Nullfolgen aufgrund der Grenzwertsätze; Nullvektor ist die Folge $(a_k)_k$ mit $a_k = 0$ für alle $k \geqslant 1$, sie konvergiert auch gegen Null; die Vektorraum-Eigenschaften folgen komponentenweise aus den entsprechenden Eigenschaften komplexer Zahlen.

Aufgabe 15

Welche der folgenden Teilmengen des $\mathbb{R}^3$ bilden einen reellen Vektorraum?

a) $M_1 = \left\{ r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \middle| r \in \mathbb{R} \right\}$,

b) $M_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \middle| s \in \mathbb{R} \right\}$

c) $M_3 = \left\{ \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| v_1 + v_2 + v_3 = 2 \right\}$

d) $M_4 = \left\{ \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| v_1 + v_2 + v_3 = 0 \right\}$

Lösung:
a) und d) sind Vektorräume, b) und c) nicht.

Aufgabe 16

Bilden die Polynome vom Grad höchstens 3, d.h. die Polynome $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit der üblichen Addition und der Multiplikation mit reellen Zahlen einen reellen Vektorraum?

Lösung:
Ja: Axiome (A1),(A2) folgen aus Rechenregeln für reelle Zahlen (koeffizientenweise), (A3) Nullpolynom $f(x) = 0$ ist Nullvektor und $-f(x) = -ax^3 - bx^2 - cx - d$ ist additiv Inverses zu $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ (A4)
Regeln (M1), (M2), (D1),(D2) erhält man auch aus Rechenregeln für reelle Zahlen (koeffizientenweise).

Aufgabe 17

Zeigen Sie: Die Vektoren $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ sind linear unabhängig genau dann, wenn $ad - bc \neq 0$.

Lösung:
Wenn beide Vektoren gleich dem Nullvektor sind, sind die beiden linear abhängig und $ad - bc = 0$. Wir nehmen also an, dass mindestens einer der Einträge ungleich Null ist. Ohne Einschränkung können wir annehmen, dass dies d ist (begründen).
(1) Ist $ad - bc = 0$, so ist $a = bc/d$ und somit

$$\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \frac{c}{d} \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$$

und die beiden Vektoren sind linear abhängig.
(2) Sind die beiden Vektoren linear abhängig, so ist einer der beiden ein Vielfaches des anderen, also z.B.

$$\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}.$$

Dann gilt aber $ad - bc = \mu bd - b\mu c = 0$.

Daraus folgt die Behauptung.

Aufgabe 18

Ist ein einzelner Vektor $v \in V$ linear unabhängig ?

Lösung:
Wenn $v \neq o$ ist, ist das richtig. $v = o$ ist aber linear abhängig im Sinne der Definition.

Aufgabe 19

Stellen Sie die Vektoren

$$a = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, d = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

als Linearkombinationen der drei Basisvektoren

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

dar.

Lösung:
Die Koeffizienten sind jeweils

	b_1	b_2	b_3
a	0	1/2	2
b	1	1/2	-1
c	1	0	-1
d	-1	1	-2

Der Koeffizient von b_2 ist eindeutig durch die zweite Koordinate der Zielvektoren bestimmt, der Koeffizient von b_1 durch die dritte; es lohnt sich also, damit anzufangen.

Aufgabe 20

Untersuchen Sie jeweils, ob der dritte Vektor linear abhängig von den ersten beiden Vektoren ist. Falls ja, stellen Sie ihn auch als Linearkombination der ersten beiden Vektoren dar.

(a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix},$

(b) $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix},$

(c) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -10 \\ 9 \end{pmatrix}.$

Lösung:
a) nicht linear abhängig, b) nicht linear abhängig, c) linear abhängig.

Aufgabe 21

Untersuchen Sie jeweils, ob die gegebenen Vektoren linear abhängig oder linear unabhängig sind.

(a) $\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\7\\1\end{pmatrix}$,

(b) $\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\7\\43\end{pmatrix}$,

(c) $\begin{pmatrix}0\\3\\6\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\4\\7\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\5\\8\end{pmatrix}$.

Lösung:
a) linear unabhängig, b) linear abhängig, c) linear abhängig.

Aufgabe 22

Argumentieren Sie möglichst geschickt, ob die gegebenen Vektoren linear abhängig oder linear unabhängig sind.

(a) $\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}6\\-2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\-3\\1\end{pmatrix}$,

(b) $\begin{pmatrix}2\\7\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}6\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\12\end{pmatrix}$,

(c) $\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\3\\-1\end{pmatrix}$.

Lösung:

(a) dritter Vektor ist das Negative des ersten Vektors $\Rightarrow$ linear abhängig

(b) Die Summe der ersten beiden Vektoren ist gleich der Summe der letzten beiden Vektoren $\Rightarrow$ linear abhängig

(c) Wir nehmen an, dass die Linearkombination der gegebenen Vektoren mit Koeffizienten r, s, t der Nullvektor ist. Aufgrund der ersten Einträge der Vektoren ist dann $s = 0$. Es spielen also nur der erste und der dritte Vektor eine Rolle. Ihre dritten Einträge implizieren $t = 0$. Aus dem zweiten Eintrag des ersten Vektors folgt dann auch $r = 0$. Also sind die gegebenen Vektoren linear unabhängig.

Aufgabe 23

Bestimmen Sie jeweils eine Parameterform der Geraden durch die gegebenen Punkte.

(a) $p = \begin{pmatrix} 2, & 2, & -3 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 4, & 0, & 1 \end{pmatrix}$,

(b) $p = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 3 \end{pmatrix}\, und \begin{pmatrix} 5 & 5 & 2 \end{pmatrix}$,

(c) $(2, 1)$ und $(2, 4)$.

Lösung:

a) $\{\begin{pmatrix} 2, & 2, & -3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2, & -2, & 4 \end{pmatrix} \mid r \in \mathbb{R}\}$, oder auch $\{\begin{pmatrix} 2, & 2, & -3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1, & -1, & 2 \end{pmatrix} \mid r \in \mathbb{R}\}$,

b) $\{\begin{pmatrix} 7, & 8, & 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2, & -3, & -1 \end{pmatrix} \mid r \in \mathbb{R}$ oder auch $\{\begin{pmatrix} 1, & -1, & 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2, & 3, & 1 \end{pmatrix} \mid r \in \mathbb{R}\}$,

c) z.B. $\{)2, 1) + r(0, 1) \mid r \in \mathbb{R}\}$.

Aufgabe 24

Untersuchen Sie jeweils, ob die drei Punkte auf einer Geraden liegen.

a) $(3, 2, -4)$ und $(1, 1, 0)$ sowie $(7, 4, 8)$,

b) $(1, 1, 0$ und $(3, -3, 2)$ sowie $(4, -5, 3)$,

c) $(2, -5, 2)$ und $(1, -2, 4)$ sowie $(3, -7, 6)$.

Lösung:

a) nein, b) ja, c) nein.

Aufgabe 25

Bestimmen Sie eine Parameterform der Ebene, welche die angegebenen Punkte bzw. Geraden enthält.

a) $(1, 0, 1)$ und $(5, 2, -1)$ sowie $(1, -3, 0)$,

b) $(3, 2, 2)$ und $(4, 3, 3)$ sowie $(4, 3, 4)$,

c) $(0, 1, 0)$ und $\{(1, 0, 1) + r \cdot (2, 1, -2) \mid r \in \mathbb{R}\}$,

Lösung:

a) $\{(1, 0, 1) + r \cdot (4, 2, -2) + s \cdot (0, -3, -1) \mid r, s \in \mathbb{R}\}$ oder auch $\{(1, 0, 1) + r \cdot (2, 1, -1) + s \cdot (0, 3, 1) \mid r, s \in \mathbb{R}\}$,

b) $\{(3, 2, 2) + r \cdot (1, 1, 1) + s \cdot (1, 1, 2) \mid r, s \in \mathbb{R}\}$ oder auch $\{(1, 0, 0) + r \cdot (1, 1, 1) + s \cdot (0, 0, 1) \mid r, s \in \mathbb{R}\}$,

c) $\{(0, 1, 0) + r \cdot (1, -1, 1) + s \cdot (2, 1, -2) \mid r, s \in \mathbb{R}\}$.

Aufgabe 26

Untersuchen Sie jeweils, ob die gegebenen Vektoren Vielfache voneinander sind.

a) $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$, d) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Lösung:

a) keine Vielfachen, b) zweiter ist das 0-fache des ersten, c) zweiter ist das $-\frac{3}{2}$-fache des ersten, d) keine Vielfachen.

Aufgabe 27

Erzeugen die Vektoren

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, d = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

den Vektorraum $\mathbb{R}^3$? Falls nicht, bestimmen Sie die Dimension des von den Vektoren erzeugten Unterraumes von $\mathbb{R}^3$.

Lösung:

Die Vektoren erzeugen $\mathbb{R}^3$ nicht, da $c = 2a + b$ und $d = 5a + b$. a und b sind linear unabhängig wegen ihrer ersten beiden Komponenten. Es ist also

$$\dim \operatorname{span}(a, b, c, d) = \dim \operatorname{span}(a, b) = 2.$$

Aufgabe 28

Geben Sie jeweils einen weiteren Vektor v an, so dass

(1) die Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, v$$

eine Basis des Vektorraums $\mathbb{R}^3$ bilden.

(2) die Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v$$

eine Basis des Vektorraums $\mathbb{R}^2$ bilden.

Lösung:
Vieles ist hier möglich; viel kann auch darüber diskutiert werden; ich nehme

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ bzw. } v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 29

Für welche Parameter $a, b \in \mathbb{R}$ sind die Vektoren

$$\begin{pmatrix} a \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ b \end{pmatrix}$$

linear unabhängig ?

Lösung:
(i) Angenommen, $a = 0$: Dann ist das Problem der linearen Unabhängigkeit der drei Vektoren äquivalent zum Problem der linearen Unabhängigkeit der drei ebenen Vektoren, die wir durch Streichen der ersten Zeile erhalten. Wegen $\dim \mathbb{R}^2 = 2$ sind diese aber immer linear abhängig. Für $a = 0$ sind also die Vektoren linear abhängig.
(ii) Angenommen, $a \neq 0$: Aus

$$o = \lambda \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ b \end{pmatrix}$$

folgt dann sofort $\lambda = 0$, d.h.

$$o = \begin{pmatrix} 0 \\ \mu + \nu \\ 3\mu + b\nu \end{pmatrix},$$

d.h. $\mu = -\nu$ und $0 = 3\mu + b\nu = (3 - b)\mu$. Für $a \neq 0, b \neq 3$ ist somit $\lambda = \mu = \nu = 0$, die Vektoren sind linear unabhängig. Für $a \neq 0, b = 3$ ist $\mu \in \mathbb{R}$ beliebig und somit sind die Vektoren linear abhängig.

Aufgabe 30

1. Zeigen Sie, dass vier Vektoren in $\mathbb{R}^3$ immer linear abhängig sind.
2. Zeigen Sie, dass $n + 1$ Vektoren in $\mathbb{R}^n$ immer linear abhängig sind.

Lösung:
1. Je nachdem welche Aussagen aus den Folien verwendet werden, ist hier unterschiedlich viel zu zeigen. Aus Beispiel 10 wissen wir, dass die kanonischen Erzeuger e_1, e_2, e_3 eine Basis des

$\mathbb{R}^3$ bilden. Aus Satz 1 folgt dann, dass je m Vektoren im $\mathbb{R}^3$ mit $m > 3$ schon linear abhängig sind. Daher sind vier Vektoren im $\mathbb{R}^3$ immer linear abhängig.

Da Satz 1 im Skript nicht bewiesen wird, ist es empfehlenswert, den Beweis an dieser Stelle für den Spezielfall zu führen. Seien dazu $v, w, y, z \in \mathbb{R}^3$ vier Vektoren und

$$B := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \{e_1, e_2, e_3\}.$$

die Standardbasis des $\mathbb{R}^3$. Dann kann v geschrieben werden als

$$v = v_1 e_1 + v_2 e_2 + v_3 e_3. \tag{1}$$

Ist v der Nullvektor, so sind v, w, y, z linear abhängig. Sei also v nicht der Nullvektor. Dann gibt es ein i, sodass $v_i \neq 0$. Ohne Einschränkung können wir annehmen, dass $i = 1$ gilt (wieso? Sonst Umbenennung der e_i). Also haben wir $v_1 \neq 0$.
Behauptung: B_v, wobei e_1 durch v in B ersetzt wurde, ist eine Basis von $\mathbb{R}^3$.
Wir müssen zeigen, dass die Elemente in B_v linear unabhängig und ein Erzeugendensystem sind.
Erzeugendensystem: Es reicht zu zeigen, dass e_1 erzeugt werden kann. Wit schreiben (1) um zu

$$e_1 = \frac{1}{v_1} v - \frac{v_2}{v_1} e_2 - \frac{v_3}{v_1} e_3$$

was möglich ist, da $v_1 \neq 0$ gilt. Damit erzeugt B_v e_1 und damit $\mathbb{R}^3$.
Lineare Unabhängigkeit: Es seien $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ Koeffizienten mit

$$\begin{aligned} 0 &= c_1 v + c_2 e_2 + c_3 e_3 \\ &= c_1(v_1 e_1 + v_2 e_2 + v_3 e_3) + c_2 e_2 + c_3 e_3 \\ &= (c_1 v_1) e_1 + (c_1 v_2 + c_2) e_2 + (c_1 v_3 + c_3) e_3. \end{aligned}$$

Da e_1, e_2, e_2 linear unabhängig sind, folgt

$$c_1 v_1 = c_1 v_2 + c_2 = c_1 v_3 + c_3 = 0$$

und daher $c_1 = 0$ da $v_1 \neq 0$. Damit erhalten wir direkt $c_2 = c_3 = 0$, also sind v, e_2, e_3 linear unabhängig und B_v ist eine Basis von $\mathbb{R}^3$. Im nächsten Schritt betrachten wir w und gehen bis auf ein Argument genauso vor. Da B_v eine Basis ist, kann w geschrieben werden als

$$w = w_1 v + w_2 e_2 + w_3 e_3.$$

Ist w der Nullvektor, so sind v, w, y, z linear abhängig. Sei also w nicht der Nullvektor. Dann gibt es ein $i \in \{2, 3\}$, sodass $w_i \neq 0$. Ist nämlich nur $w_1 \neq 0$, so sind v und w schon linear abhängig. Ohne Einschränkung können wir annehmen, dass $i = 2$ gilt. Also haben wir $w_2 \neq 0$.
Behauptung: $B_{v,w}$, wobei e_2 durch w in B_v ersetzt wurde, ist eine Basis von $\mathbb{R}^3$.
Der Beweis geht analog zu oben. Im dritten Schritt betrachten wir y und zeigen genau wie vorher, dass $B_{v,w,y}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ ist. Damit lässt sich z aber schon als Linearkombination von v, w und y schreiben und per Definition sind demnach v, w, y, z linear abhängig.

2. Es reicht aus, an dieser Stelle zu verstehen, dass der Beweis analog zu 1. geführt werden kann.

Aufgabe 31

Untersuchen Sie jeweils, ob der Punkt $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ auf der Geraden bzw. Ebene liegt.

a) $\{ \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \mid r \in \mathbb{R}\}$,

b) $\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \mid s \in \mathbb{R}\}$,

c) $\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \mid r, s \in \mathbb{R}\}$,

d) $\{ \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid r, s \in \mathbb{R}\}$.

Lösung:

a) ja (für $r = -2$), b) nein, c) nein, d) ja (für $r = -2$ und $s = -3$).

Aufgabe 32

Untersuchen Sie jeweils, ob der Punkt P auf der Geraden QR liegt.

a) $P = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$,

b) $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $R = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$,

c) $P = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $R = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Lösung:

Genau die gleiche Rechnung wie in Aufgabe 24. Lösungen sind also:

a) nein, b) ja, c) nein.

Aufgabe 33

Untersuchen Sie jeweils, ob die vier Punkte in einer Ebene liegen.

a) $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}1\\-1\\-3\end{pmatrix}$ sowie $\begin{pmatrix}4\\2\\0\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}-3\\1\\8\end{pmatrix}$,

b) $\begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}3\\1\\-1\end{pmatrix}$ sowie $\begin{pmatrix}4\\5\\2\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}2\\-2\\-2\end{pmatrix}$,

c) $\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ sowie $\begin{pmatrix}3\\-5\\2\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}-1\\9\\1\end{pmatrix}$.

Lösung:

a) ja, b) nein, c) ja.

Aufgabe 34

Geben Sie die folgenden Matrizen A explizit an.

a) $A = (a_{i,j}) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit $a_{i,j} = i \cdot j$ für alle $i, j \in \{1,2,3\}$.

b) $A = (a_{i,j}) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit $a_{i,j} = i^j$ (die j-te Potenz von i) für alle $i, j \in \{1,2,3\}$.

c) $A = (a_{i,j}) \in \mathbb{R}^{2\times 3}$ mit $a_{i,j} = i - j$ für alle $i \in \{1,2\}$ und $j \in \{1,2,3\}$.

d) $A = (a_{i,j}) \in \mathbb{R}^{3\times 4}$ mit $a_{i,j} = (i+1) \cdot (j-2)$ für alle $i \in \{1,2,3\}$ und $j \in \{1,2,3,4\}$.

Lösung:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 9 & 27 \end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 & 4 \\ -3 & 0 & 3 & 6 \\ -4 & 0 & 4 & 8 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 35

Wie lauten die Einträge $(2,1)$, $(1,2)$, $(2,3)$, $(1,1)$ beziehungsweise $(3,1)$ (falls sie existieren) der folgenden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 7 & 18 & 6 \\ \frac{1}{2} & 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 3 & 9 \\ 8 & 1 & \frac{1}{4} & 13 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad C = \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}?$$

Lösung:

Es gilt

1. $a_{21} = 7,\ a_{12} = 3,\ a_{23} = 6,\ a_{11} = 1,\ a_{31} = \frac{1}{2}$
2. $b_{21} = 8,\ b_{12} = 0,\ b_{23} = \frac{1}{4},\ b_{11} = 7$. Der Eintrag b_{31} existiert nicht.
3. $c_{21} = 1,\ c_{12} = 0,\ c_{11} = 12$. Die Einträge c_{23} und c_{31} existieren nicht.

Aufgabe 36

Welche der folgenden Matrizen sind gleich?

- $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit $a_{ij} = i \cdot j$
- $B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit $b_{ij} = i + j$
- $C = (c_{ij}) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit $c_{ij} = \max\{i,j\}$
- $D = (d_{ij}) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit $d_{ij} = \frac{i+j}{2} + \frac{|j-i|}{2}$

- $E = (e_{ij}) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit $e_{ij} = i \cdot \left(\frac{j^2-1}{j+1} + 1\right)$
- $F = (f_{ij}) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit $f_{ij} = (i+1) + (j-1)$

Argumentieren Sie geschickt.

Lösung:
Zur Gleichheit: Es gilt $A = E$, $B = F$ und $C = D$. Es genügt, die Definitionen der Matrizen zu vergleichen. Die Gleichheit der Matrizen A und E sieht man ein, wenn man die dritte binomische Formel bei e_{ij} verwendet. Bei der Gleichheit der Matrizen B und F muss lediglich in den f_{ij} zusammengerechnet werden. Für die letzte Gleichheit muss man die Fälle unterscheiden, dass $j \geqslant i$ ist bzw. dass $j < i$ ist. Im ersten Fall ist nämlich $|j-i| = j-i$ und der Term bei d_{ij} vereinfacht sich zu j, und auch $\max\{i,j\}$ ist gleich j. Im zweiten Fall ist $|j-i| = i-j$ und der Term bei d_{ij} vereinfacht sich zu i, was wiederum gleich dem Maximum $\max\{i,j\}$ ist.

Aufgabe 37

Schreiben Sie in Matrixform

1. die Matrix $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ mit Koeffizienten $a_{ij} = |i-j|$,
2. die Matrix $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ mit Koeffizienten $a_{ij} = i-j$,
3. die Matrix $A \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ mit Koeffizienten
$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & ,i=j \\ 0 & ,i \neq j \end{cases}$$
4. die Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit Koeffizienten
$$a_{ij} = i^2 + j.$$

Lösung:
Es ist:

1) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, 2) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 & -3 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, 3) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 4) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 38

Geben Sie jeweils an, durch welche elementare Zeilenumformung die Matrix A in die Matrix B transformiert werden kann.

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 7 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Lösung:

a) Vertauschen der ersten und dritten Zeile,

b) Multiplikation der zweiten Zeile mit $\frac{1}{2}$,

c) Addition des Dreifachen der dritten Zeile zur ersten.

Aufgabe 39

Geben Sie für jede der folgenden Matrizen an, ob sie in (Zeilen-)Stufenform bzw. sogar reduzierter Stufenform ist.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Lösung:

In Stufenform sind die Matrizen A, C, E und F, aber nicht B und D. Die Matrizen C, E und F sind sogar in reduzierter Stufenform.

Aufgabe 40

Transformieren Sie die nachfolgenden Matrizen jeweils durch elementare Umformungen in eine Matrix in reduzierter Stufenform.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 6 \\ -1 & 1 & -3 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 10 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & -3 & 2 \\ 0 & 4 & -12 & 13 \\ 1 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 10 & 0 & 13 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 11 \\ 4 & 1 & 12 & -1 & 11 \\ 3 & 0 & 6 & 1 & 15 \end{pmatrix}.$$

Lösung:
Die Matrix A formt man wie folgt um:

$$\begin{pmatrix}-1&-2&1\\2&4&1\\3&6&-1\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}1&2&-1\\2&4&1\\3&6&-1\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}1&2&-1\\0&0&3\\0&0&2\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}1&2&-1\\0&0&1\\0&0&2\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}1&2&-1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix} \text{ (ZSF)}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix}1&2&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix} \qquad \text{(red. ZSF).}$$

Die Matrix B wird wie folgt umgeformt:

$$\begin{pmatrix}0&1&-2&6\\-1&1&-3&2\\2&0&2&10\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}-1&1&-3&2\\0&1&-2&6\\2&0&2&10\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}1&-1&3&-2\\0&1&-2&6\\2&0&2&10\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}1&-1&3&-2\\0&1&-2&6\\0&2&-4&14\end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix}1&-1&3&-2\\0&1&-2&6\\0&0&0&2\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}1&-1&3&-2\\0&1&-2&6\\0&0&0&1\end{pmatrix} \text{ (ZSF)}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix}1&-1&3&0\\0&1&-2&0\\0&0&0&1\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&-2&0\\0&0&0&1\end{pmatrix} \qquad \text{(red.ZSF).}$$

Die Matrix C wird wie folgt umgeformt:

$$\begin{pmatrix}2&4&0&-2\\1&3&-3&2\\0&4&-12&13\\1&1&5&4\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}1&2&0&-1\\1&3&-3&2\\0&4&-12&13\\1&1&5&4\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}1&2&0&-1\\0&1&-3&3\\0&4&-12&13\\0&-1&5&5\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}1&2&0&-1\\0&1&-3&3\\0&0&0&1\\0&0&2&8\end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix}1&2&0&-1\\0&1&-3&3\\0&0&2&8\\0&0&0&1\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}1&2&0&-1\\0&1&-3&3\\0&0&1&4\\0&0&0&1\end{pmatrix} \text{ (ZSF)}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix}1&2&0&0\\0&1&-3&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}1&2&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix} \text{(red. ZSF).}$$

Die Matrix D schließlich wird wie folgt umgeformt:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 10 & 0 & 13 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 11 \\ 4 & 1 & 12 & -1 & 11 \\ 3 & 0 & 6 & 1 & 15 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 10 & 0 & 13 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 11 \\ 0 & -7 & -28 & -1 & -41 \\ 0 & -6 & -24 & 1 & -24 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 10 & 0 & 13 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 36 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 42 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 10 & 0 & 13 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 42 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -2 & -9 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{(ZSF)} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{(red. ZSF).}$$

— Lineare Gleichungssysteme II —

Aufgabe 41

Untersuchen Sie jeweils, ob das gegebene lineare Gleichungssystem keine, genau eine oder unendlich viele Lösungen hat, indem Sie die Stufenform bestimmen.

a) $$\begin{aligned} 2x + y - 5z &= 10 \\ 2x + 4y + z &= 1 \\ 2y + 4z &= -6 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} x + 3y + 5z &= 0 \\ x + y + z &= 0 \\ x + 5y + 15z &= 0 \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} 2x - 3y + z &= 5 \\ 4x - 5y + 4z &= 14 \\ 2x - 2y + 3z &= 14 \end{aligned}$$

Lösung:

a) Zeilenstufenform hat (bei drei Variablen) zwei Treppenstufen und eine $(0 = 0)$-Zeile $\Rightarrow$ unendlich viele Lösungen

b) Zeilenstufenform hat (bei drei Variablen) drei Treppenstufen $\Rightarrow$ genau eine Lösung

c) Zeilenstufenform hat zwei Treppenstufen und eine $(0 = 5)$-Zeile $\Rightarrow$ keine Lösung

Aufgabe 42

Untersuchen Sie die folgenden linearen Gleichungssysteme in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$ auf Lösbarkeit.

a) $$\begin{aligned} x + ay + 3z &= a \\ y - az &= 1 \\ x + (a-2)y + (2a+3)z &= -a^2 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} x + z &= 0 \\ x + y + (a+1)z &= 2 \\ 3x + y + (a+3)z &= a + 2 \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} 2x + 4y &= -2a \\ x + (a+2)y &= 1 - a \end{aligned}$$

d) $$\begin{aligned} x + a^2 y &= 1 \\ a^2 x + y &= a \end{aligned}$$

Lösung:

a) lösbar genau für $a = 1$ oder $a = -2$, b) lösbar genau für $a = 0$,
c) lösbar genau für $a \neq 0$, d) lösbar genau für $a \neq -1$

Aufgabe 43

Bestimmen Sie aus dem Ergebnis von Aufgabe 9 a) die Lösungsmenge von

$$\begin{aligned} x + 3y + z &= 0 \\ 3x + 9y + 4z &= 0 \\ x + 3y + 2z &= 0 \end{aligned}$$

(ohne erneutes Lösen eines Gleichungssystems).

Lösung:
$$\{ \begin{pmatrix} -3p \\ p \\ 0 \end{pmatrix} \mid p \in \mathbb{R} \}$$

Aufgabe 44

Untersuchen Sie jeweils für die gegebene Matrix A, ob das Gleichungssystem $A \cdot x = b$ für alle $b \in \mathbb{R}^3$ lösbar ist.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 5 & 5 \\ 2 & 7 & 1 \end{pmatrix}$, b) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 4 & -2 & 6 & 7 \\ -4 & 4 & -6 & -12 \end{pmatrix}$, c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$.

Lösung:

a) Zeilenstufenmatrix zu A hat genau 2 Treppenstufen $\Rightarrow$ das Gleichungssystem ist nicht für alle $b \in \mathbb{R}^3$ lösbar

b) Zeilenstufenmatrix zu A hat genau 3 Treppenstufen $\Rightarrow$ das Gleichungssystem ist für alle $b \in \mathbb{R}^3$ lösbar

c) Matrix A hat nur zwei Spalten $\Rightarrow$ Zeilenstufenmatrix zu A hat höchstens 2 Treppenstufen $\Rightarrow$ Gleichungssystem nicht für alle $b \in \mathbb{R}^3$ lösbar

Aufgabe 45

Bestimmen Sie die möglichen Lagen zweier Ebenen $E_1, E_2 \subset \mathbb{R}^3$, d.h. diskutieren Sie die verschiedenen Fälle für den Durchschnitt $E_1 \cap E_2$.

Lösung:

Die Systemmatrix für das Gleichungssystem, welches wir benötigen, um den Durchschnitt zu bestimmen, ist $S \in \mathbb{R}^{3\times 4+1}$. Für den Rang der Koeffizientenmatrix r gibt es die Möglichkeiten $1 \leqslant r \leqslant 3$, wobei $r = 1$ aus demselben Grund wie in der Vorlesung für den Schnitt Gerade/Ebene nicht vorkommt. (Zwei Vektoren, die eine Ebene aufspannen, müssen immer linear unabhängig sein.) *Vorsicht:* Das eigentlich hier angezeigte Argument Zeilenrang = Spaltenrang könnt Ihr hier nicht bringen, das hat sich als zu schwierig für den Vorkurs herausgestellt.

(1) Für $r = 3$ ist das Gleichungssystem immer lösbar und der Kern des assoziierten homogenen Gleichungssystems ist eindimensional. Die beiden Ebenen schneiden sich also in einer Geraden.

(2) Ist $r = 2$ und das Gleichungssytem ist lösbar, so ist der Kern des assoziierten homogenen Gleichungssystems zweidimensional. Die beiden Ebenen stimmen also notwendigerweise überein.

In allen anderen Fällen ist der Durchschnitt leer. *Insbesondere können zwei Ebenen im $\mathbb{R}^3$ niemals einen Durchschnitt haben, der nur aus einem Punkt besteht.*

Aufgabe 46

Bestimmen Sie die möglichen Lagen zweier Geraden $L_1, L_2 \subset \mathbb{R}^3$, d.h. diskutieren Sie die verschiedenen Fälle für den Durchschnitt $L_1 \cap L_2$.

Lösung:
Die Systemmatrix für das Gleichungssystem, welches wir benötigen, um den Durchschnitt zu bestimmen, ist $S \in \mathbb{R}^{3\times 2+1}$. Für den Rang der Koeffizientenmatrix r gibt es die Möglichkeiten $1 \leqslant r \leqslant 2$, da die Länge der Zeilenvektoren der Koeffizientenmatrix nur zwei ist. (Eine der Zeilen ist also in jedem Fall Linearkombination der beiden übrigen.) Unter der Voraussetzung der Lösbarkeit des Systems ist somit:

(1) Ist für $r = 2$ ist das Gleichungssystem ein eindeutige lösbares Gleichungssystem in zwei Variablen, die Geraden schneiden sich in einem Punkt.

(2) Ist $r = 1$ und das Gleichungssytem ist lösbar, so ist der Kern des assoziierten homogenen Gleichungssystems eindimensional. Die beiden Gerade stimmen also überein.

In allen anderen Fällen ist der Durchschnitt leer, man spricht von *windschiefen Geraden*.

Aufgabe 47

Untersuchen Sie jeweils die gegenseitige Lage der gegebenen Geraden (sind gleich; sind nicht gleich, aber parallel; haben genau einen Schnittpunkt; sind windschief) und bestimmen Sie gegebenenfalls den Schnittpunkt.

a) $\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + p \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \mid p \in \mathbb{R}\}$ und $\{ \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 9 \end{pmatrix} + q \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \mid q \in \mathbb{R}\}$,

b) $\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + p \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \mid p \in \mathbb{R}\}$ und $\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R}\}$,

c) $\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \mid r \in \mathbb{R}\}$ und $\{ \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R}\}$,

d) $\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} \mid r \in \mathbb{R}\}$ und $\{ \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R}\}$,

e) $\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R}\}$ und $\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \mid u \in \mathbb{R}\}$,

f) $\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R}\}$ und $\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \mid u \in \mathbb{R}\}$.

Lösung:

a) schneiden sich in genau einem Punkt, nämlich in $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) parallel, aber nicht gleich

c) schneiden sich in genau einem Punkt, nämlich in $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

d) gleich

e) windschief

f) schneiden sich in genau einem Punkt, nämlich in $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 48

Untersuchen Sie jeweils die gegenseitige Lage von Gerade und Ebene (Gerade liegt in der Ebene; Gerade liegt nicht in der Ebene, ist aber parallel zu ihr; Gerade und Ebene haben genau einen Schnittpunkt) und bestimmen Sie gegebenenfalls den Schnittpunkt.

a) $\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \mid s \in \mathbb{R}\}$ und $\{ \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \mid q, r \in \mathbb{R}\}$,

b) $\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 16 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \mid r \in \mathbb{R}\}$ und $\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \mid s, t \in \mathbb{R}\}$,

c) $\{ \begin{pmatrix} 14 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -8 \end{pmatrix} \mid q \in \mathbb{R}\}$ und $\{ \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \mid r, s \in \mathbb{R}\}$.

Lösung:
a) schneiden sich in genau einem Punkt, nämlich in $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$,

b) schneiden sich in genau einem Punkt, nämlich in $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 12 \end{pmatrix}$,

c) die Gerade liegt in der Ebene.

Aufgabe 49

Untersuchen Sie jeweils die gegenseitige Lage der gegebenen Ebenen (sind gleich; sind nicht gleich, aber parallel; haben eine Gerade als Schnittmenge) und bestimmen Sie gegebenenfalls die Schnittgerade.

a) $\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + p\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} q\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \mid p, q \in \mathbb{R}\}$ und $\{\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \mid r, s \in \mathbb{R}\}$,

b) $\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \mid r, s \in \mathbb{R}\}$ und $\{\begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \mid t, u \in \mathbb{R}\}$,

c) $\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + q\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \mid q, r \in \mathbb{R}\}$ und $\{\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} s, t \in \mathbb{R}\}$,

d) $\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \mid t, u \in \mathbb{R}\}$ und $\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} \mid r, s \in \mathbb{R}\}$.

Lösung:
a) haben eine Gerade als Schnittmenge: $\{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R}\}$,

b) haben eine Gerade als Schnittmenge: $\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + a\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R}\}$,

c) sind gleich, d) sind nicht gleich, aber parallel.

Aufgabe 50

Skizzieren Sie die folgenden Teilmengen der Ebene:

1. $M_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \,:\, \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, x \rangle \geqslant \sqrt{2}\}$.

Skizzieren Sie die folgenden Teilmengen des Raumes:

1. $N_1 = \{o \neq x \in \mathbb{R}^3 \,:\, \frac{\langle e_1, x \rangle}{\|x\|} \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}\} \cup \{o\}$,
2. $N_2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \,:\, \|x - \langle e_1, x \rangle e_1\| = 1\}$.

(Hierbei bezeichnet $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ den kanonischen Basisvektor.)

Lösung:
1) M_1: Halbebene oberhalb und einschließlich der Geraden senkrecht zu $(1, 1)$ im Abstand 1 vom Nullpunkt.

4) N_1: Doppelkegel mit der x_1-Achse als Symmetrieachse.

5) N_2: Zylinder um die x_1-Achse mit Radius 1.

Aufgabe 51

Begründen Sie nochmal die Aussage von Aufgabe 3, diesmal mit Hilfe der Formel für die Fläche eines Parallelogramms.

Lösung:
Die Vektoren $o \neq \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ sind linear unabhängig genau dann, wenn sie den $\mathbb{R}^2$ aufspannen. Insbesondere hat das von ihnen aufgespannte Parallelogramm genau dann auch einen positiven Flächeninhalt. Dieser Flächeninhalt ist A und somit ist nach der Formel für den Flächeninhalt

$$0 < A^2 = \langle \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \rangle \langle \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \rangle - \langle \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \rangle^2 = (ad - bc)^2.$$

Also folgt $ad - bc \neq 0$.

Aufgabe 52

Beschreiben Sie die Menge
$$G := \{x \in \mathbb{R}^2 \,:\, \langle x, v \rangle = c\}$$
mit $o \neq v \in \mathbb{R}^2$. Zeigen Sie: G ist eine Gerade, deren Abstand von $o \in \mathbb{R}^2$ durch $d = |c| / \|v\|$ gegeben ist.

Lösung:
G ist die Lösungsmenge der Gleichung mit Systemmatrix (o.E. nehmen wir an, dass $v_1 \neq 0$ ist)

$$S = (v_1\, v_2 | c) \overset{I \to \frac{1}{v_1} I}{\to} (1\, v_2/v_1 | c/v_1),$$

also ist

$$G = \left\{ x = \begin{pmatrix} c/v_1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -v_2/v_1 \\ 1 \end{pmatrix} \,:\, t \in \mathbb{R} \right\}$$

eine Gerade. Durch Berechnung des Skalarproduktes sehen wir, dass der Richtungsvektor senkrecht auf v steht. Das bedeutet, um das Lot vom Nullpunkt auf die Gerade zu fällen, benötigen wir nur einen Vektor $x^* = \mu v$, der auf der Geraden liegt. Wegen

$$c = \langle x^*, v \rangle = \mu \langle v, v \rangle = \mu \|v\|^2$$

folgt somit $\mu = c/\|v\|^2$ und der Abstand Gerade zu Nullpunkt ist dann $\|x^*\| = |\mu| \|v\| = |c|/\|v\|$.

Aufgabe 53

Berechnen Sie die Norm einer beliebigen Linearkombination der Vektoren

1. $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$
2. $w_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}, w_3 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \\ \sqrt{2/3} \end{pmatrix}.$

Was beobachten Sie ? Erklären Sie ihre Beobachtung.

Lösung:
(1) Wir haben

$$\langle v_1, v_1 \rangle = 3, \langle v_1, v_2 \rangle = 3, \langle v_1, v_3 \rangle = 0, \langle v_2, v_2 \rangle = 5, \langle v_2, v_3 \rangle = 1, \langle v_3, v_3 \rangle = 2.$$

Damit ist

$$\|\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_3 v_3\|^2 = \sum_{i,j=1}^{3} \lambda_i \lambda_j \langle v_i, v_j \rangle = 3\lambda_1^2 + 5\lambda_2^2 + 2\lambda_3^2 + 2(3\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3).$$

(2) Die zweite Basis *ist eine Orthonormalbasis*, daher ist viel einfacher

$$\|\lambda_1 w_1 + ... + \lambda_3 w_3\|^2 = \sum_{i,j=1}^{3} \lambda_i \lambda_j \langle v_i, v_j \rangle = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2.$$

Aufgabe 54

Sei $\Delta(A,B,C)$ ein Dreieck α,β,γ die Innenwinkel an den Eckpunkten A,B,C und a,b,c die Längen der A,B,C jeweils gegenüberliegenden Seiten. F bezeichne die Fläche des Dreiecks. Beweisen Sie:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = \frac{abc}{2F}.$$

Lösung:

Sind die Dreiecksseiten gegeben durch die Vektoren u, v und $u-v$. Dann gibt es drei Möglichkeiten, die Fläche F zu berechnen, nämlich jeweils als die Hälfte der Flächen der von u,v, $u,v-u$, und $v,v-u$ aufgespannten Parallelogramme. Dies liefert ausgedrückt durch die Seitenlängen und Winkel

$$2F = cb\sin(\alpha) = ab\sin(\gamma) = ac\sin(\beta).$$

Daraus folgt

$$\frac{abc}{2F} = \frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}.$$

Aufgabe 55

Bestimmen Sie alle Seitenlängen eines Dreiecks $\Delta(A,B,C)$ aus der Länge der Seite c und den Winkeln α,β. (c ist die Länge der Seite, die A und B verbindet und α bzw. β sind die Innenwinkel in den Punkten A bzw. B.) Hinweis: Aufgabe 27.

Zusatz: Wenn nun $A=o$, $B=\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$ $\alpha=\pi/6$ und $\beta=\pi/6$ ist, wo liegt dann der Punkt C ?

Lösung:

Die Winkelsumme im Dreieck ist gleich π, also ist $\gamma=\pi-\alpha-\beta$ und somit nach Aufgabe 27:

$$a=\sin(\alpha)\frac{c}{\sin(\gamma)}, b=\sin(\beta)\frac{c}{\sin(\gamma)}.$$

Für die Zusatzaufgabe müssen wir den Durchschnitt der beiden Kreise $K(0;a)\cap K(B;b)$ bestimmen. Es gibt dann zwei Möglichkeiten für den Punkt C. Da alle drei Winkel gleich sind, ist $a=b=c=2$ und somit müssen wir das System

$$\|x\|^2=4, \|x-B\|^2=4$$

lösen. Wie in der Vorlesung ist dies äquivalent zu

$$\|x\|^2=4, 2x_2=\langle x, \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}\rangle = 2, 0$$

oder $\|x\|^2=4, x_2=1$. Damit ist $x=\begin{pmatrix}t\\1\end{pmatrix}$ mit $t\in\mathbb{R}$ und wir müssen wir die quadratische Gleichung $t^2+1=\|x\|^2=4$ lösen. Die Lösung ist $t=\pm\sqrt{3}$ und somit ist entweder $C=\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\1\end{pmatrix}$ oder $C=\begin{pmatrix}-\sqrt{3}\\1\end{pmatrix}$.

Aufgabe 56
Berechnen Sie jeweils das Skalarprodukt der beiden Vektoren.

$$\text{a) } \binom{2}{1}, \binom{1}{3}, \qquad \text{b) } \binom{3}{-2}, \binom{2}{3}, \qquad \text{c) } \binom{4}{1}, \binom{-1}{4}, \qquad \text{d) } \binom{3}{4}, \binom{3}{4}.$$

Lösung:
a) 5, b) 0, c) 0, d) 25.

Aufgabe 57
Berechnen Sie jeweils das Skalarprodukt der beiden Vektoren.

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{b) } \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \text{c) } \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Lösung:
a) 1, b) 0, c) 14.

Aufgabe 58
Seien $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^m$ mit $\vec{a} \bullet \vec{a} = 5$, $\vec{a} \bullet \vec{b} = 10$ und $\vec{b} \bullet \vec{b} = 21$. Berechnen Sie

$$\text{a) } \vec{a} \bullet (\vec{a} + 3 \cdot \vec{b}), \quad \text{b) } 3 \cdot (\vec{a} + \vec{b}) \bullet (\vec{a} - \vec{b}), \quad \text{c) } (5 \cdot \vec{a} + 2 \cdot \vec{b}) \bullet (3 \cdot \vec{a} - 4 \cdot \vec{b}).$$

Lösung:
Aufgrund des Kommutativ- und Distributivgesetzes für das Skalarprodukt gilt
a) $a \bullet (a + 3 \cdot b) = a \bullet a + 3 \cdot a \bullet b = 5 + 3 \cdot 10 = 35$,
b) $3 \cdot (a + b) \bullet (a - b) = 3 \cdot (a \bullet a - a \bullet b + b \bullet a - b \bullet b) = 3 \cdot (a \bullet a - b \bullet b) = 3 \cdot (5 - 21) = -48$,
c) $(5 \cdot a + 2 \cdot b) \bullet (3 \cdot a - 4 \cdot b) = 15 \cdot a \bullet a - 20 \cdot a \bullet b + 6 \cdot b \bullet a - 8 \cdot b \bullet b = 15 \cdot a \bullet a - 14 \cdot a \bullet b - 8 \cdot b \bullet b = 15 \cdot 5 - 14 \cdot 10 - 8 \cdot 21 = 75 - 140 - 168 = -233$.

Aufgabe 59
Berechnen Sie jeweils die Länge des Vektors.

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix}, \quad \text{c) } \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \text{d) } \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \text{e) } \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \text{f) } \begin{pmatrix} 8 \\ 11 \\ -16 \end{pmatrix}.$$

Lösung:
a) 2, b) 13, c) 3, d) 3, e) $\sqrt{3}$, f) 21.

Aufgabe 60
Die drei Punkte $A = (1;0;3)$, $B = (2;1;5)$ und $C = (-1;1;5)$ bilden ein Dreieck. Untersuchen Sie, ob das Dreieck ABC gleichschenklig ist (d.h. zwei Seiten gleich lang sind) oder sogar gleichseitig ist (d.h. alle drei Seiten gleich lang sind).

Lösung:
Die Seitenlängen sind

$$\begin{aligned} d(A,B) &= \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(2-1)^2+(1-0)^2+(5-3)^2} = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6}, \\ d(A,C) &= \|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{(-1-1)^2+(1-0)^2+(5-3)^2} = \sqrt{4+1+4} = \sqrt{9} = 3, \\ d(B,C) &= \|\overrightarrow{BC}\| = \sqrt{(-1-2)^2+(1-1)^2+(5-5)^2} = \sqrt{9} = 3. \end{aligned}$$

Das Dreieck ist also gleichschenklig mit Schenkeln AC und BC, aber nicht gleichseitig.

Aufgabe 61

Die drei Punkte $A = (2;-1;3)$, $B = (-1;3;2)$ und $C = (3;2;-1)$ bilden ein Dreieck. Untersuchen Sie, ob das Dreieck ABC gleichschenklig ist (d.h. zwei Seiten gleich lang sind) oder sogar gleichseitig ist (d.h. alle drei Seiten gleich lang sind).

Lösung:
Die Seitenlängen sind

$$\begin{aligned} d(A,B) &= \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(-1-2)^2+(3+1)^2+(2-3)^2} = \sqrt{9+16+1} = \sqrt{26}, \\ d(B,C) &= \|\overrightarrow{BC}\| = \sqrt{(3+1)^2+(2-3)^2+(-1-2)^2} = \sqrt{16+1+9} = \sqrt{26}, \\ d(C,A) &= \|\overrightarrow{CA}\| = \sqrt{(2-3)^2+(-1-2)^2+(3+1)^2} = \sqrt{1+9+16} = \sqrt{26}, \end{aligned}$$

Das Dreieck ist also gleichseitig.

Aufgabe 62

Welche der folgenden Vektoren sind zueinander senkrecht?

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \vec{z} = \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \\ 23 \end{pmatrix}.$$

Lösung:
$\vec{u}$ ist zu allen drei anderen senkrecht. Außerdem sind $\vec{w}$ und $\vec{z}$ zueinander senkrecht.

Aufgabe 63

Bestimmen Sie jeweils alle $s \in \mathbb{R}$, für die v und w senkrecht aufeinander stehen.

a) $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ s \end{pmatrix}$, b) $v = \begin{pmatrix} s \\ -1 \\ s+1 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 2 \\ s-1 \\ 3 \end{pmatrix}$, c) $v = \begin{pmatrix} s \\ s+1 \\ -1 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} -2 \\ s-1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Lösung:
a) $s = 2$, b) $s = -1$, c) $s \in \{3, -1\}$.

Aufgabe 64

Bestimmen Sie jeweils alle $s \in \mathbb{R}$, für die u senkrecht auf v und w steht.

a) $u = \begin{pmatrix} 1 \\ s \\ -1 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},$ b) $u = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ s \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} s \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} s \\ s \\ -1 \end{pmatrix},$

c) $u = \begin{pmatrix} -1 \\ s \\ 0 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 1 \\ s \\ 1 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 2s-1 \\ s \\ 5 \end{pmatrix},$ d) $u = \begin{pmatrix} 1 \\ s \\ 1 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 1 \\ s^2 \\ 0 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 1 \\ s \\ -1 \end{pmatrix}.$

Lösung:

a) $u \bullet v = 0$, $u \bullet w = -2 + 2s$, also $s = 1$,
b) $u \bullet v = 1 + 2s$, $u \bullet w = 0$, also $s = \frac{-1}{2}$,
c) $u \bullet v = -1 + s^2 = (s-1)(s+1)$, $u \bullet w = 1 - 2s + s^2 = (s-1)^2$, also $s = 1$,
d) $u \bullet v = 1 + s^3 = (s+1)((s-\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4})$, $u \bullet w = s^2$, also erfüllt kein $s \in \mathbb{R}$ gleichzeitig $u \bullet v = 0$ und $u \bullet w = 0$.

Aufgabe 65

Gegeben seien die drei Punkte $A = (1;6;1)$, $B = (-1;3;2)$ und $C = (4;-1;0)$.

a) Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC rechtwinklig mit rechtem Winkel bei B ist.

b) Bestimmen Sie den Punkt D so, dass das Viereck $ABCD$ ein Rechteck ist.

Lösung:

a) $\overrightarrow{BA} \bullet \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} = 0$, also sind die Seiten AB und BC zueinander senkrecht.

b) Mit Skizze sieht man, dass

$$\vec{d} = \vec{a} + \overrightarrow{AD} = \vec{a} + \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Also $D = (6;2;-1)$.

Aufgabe 66

Bestimmen Sie jeweils eine Koordinatenform der Geraden $g = \{\vec{u} + r\vec{v} | r \in \mathbb{R}\}$ im $\mathbb{R}^2$, wobei

a) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$,

b) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

c) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Lösung:

a) $\{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 + x_2 = 3\}$,

b) $\{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 + x_2 = 3\}$,

c) $\{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 \mid 2x_1 - x_2 = 3\}$.

Aufgabe 67

Berechnen Sie jeweils eine Parameterform der in Koordinatenform gegebenen Geraden.

$$\text{a)}\quad \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x + y = 3 \right\}, \qquad \text{b)}\quad \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 = 3 \right\}.$$

Lösung:
Mögliche Lösungen:

$$\text{a)}\ \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 3 \end{smallmatrix}\right) + r\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -2 \end{smallmatrix}\right) \mid r \in \mathbb{R} \right\} \qquad \text{b)}\ \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 3 \end{smallmatrix}\right) + r\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \mid r \in \mathbb{R} \right\}$$

Aufgabe 68

Berechnen Sie das Kreuzprodukt der Vektoren v und w

$$\text{a)}\quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix},\ w = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad \text{b)}\quad v = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix},\ w = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$\text{c)}\quad v = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix},\ w = \begin{pmatrix} 15 \\ 45 \\ 5 \end{pmatrix}, \qquad \text{d)}\quad v = \begin{pmatrix} s-1 \\ s \\ 1 \end{pmatrix},\ w = \begin{pmatrix} s \\ s+1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Lösung:
a) $v \times w = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}$, b) $v \times w = \begin{pmatrix} -13 \\ 4 \\ -10 \end{pmatrix}$, c) $v \times w = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, d) $v \times w = \begin{pmatrix} s-1 \\ 2-s \\ -1 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 69

Berechnen Sie jeweils das Kreuzprodukt $v \times w$ und geben Sie eine Normalenform und Koordinatenform der Ebene $E = \{\, u + p \cdot v + q \cdot w \mid p, q \in \mathbb{R} \,\}$ an.

a) $u = \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{smallmatrix}\right), \quad v = \left(\begin{smallmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \quad w = \left(\begin{smallmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \end{smallmatrix}\right),$

b) $u = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \quad v = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{smallmatrix}\right), \quad w = \left(\begin{smallmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right),$

c) $u = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right), \quad v = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{smallmatrix}\right), \quad w = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 7 \\ -1 \end{smallmatrix}\right).$

Lösung:
a) $v \times w = \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 4 \\ -5 \end{smallmatrix}\right)$ und $E = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, -x + 4y + -5z = -1 \right\}$

b) $v \times w = \left(\begin{smallmatrix} 8 \\ -10 \\ -11 \end{smallmatrix}\right)$ und $E = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, 8x + -10y + -11z = 7 \right\}$

c) $v \times w = \left(\begin{smallmatrix} -28 \\ 9 \\ 7 \end{smallmatrix}\right)$ und $E = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, -28x + 9y + 7z = 2 \right\}$

Aufgabe 70

Berechnen Sie jeweils eine Normalenform der in Parameterform gegebenen Ebene.

a) $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+p\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}+q\begin{pmatrix}-2\\4\\1\end{pmatrix}\,\middle|\,p,q\in\mathbb{R}\right\}$, b) $\left\{\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}+p\begin{pmatrix}4\\2\\-1\end{pmatrix}+q\begin{pmatrix}-3\\-3\\1\end{pmatrix}\,\middle|\,p,q\in\mathbb{R}\right\}$.

Lösung:

a) Eine Normalenform und Koordinatenform ist gegeben durch

$$\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3\,\middle|\,\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}\bullet\left(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right)=0\right\}=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3\,\middle|\,2x+1y+0z=2\right\}.$$

b) Eine Normalenform und Koordinatenform ist gegeben durch

$$\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3\,\middle|\,\begin{pmatrix}1\\1\\6\end{pmatrix}\bullet\left(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}\right)=0\right\}=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3\,\middle|\,x+1y+6z=5\right\}.$$

Aufgabe 71

Berechnen Sie jeweils eine Parameterform der in Koordinatenform gegebenen Ebene.

a) $\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3\,\middle|\,x+2y+3z=1\right\}$, b) $\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3\,\middle|\,2x+-1y+-1z=4\right\}$.

Lösung:

a) $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+p\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}+q\begin{pmatrix}3\\0\\-1\end{pmatrix}\,\middle|\,p,q\in\mathbb{R}\right\}$, b) $\left\{\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}+p\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}+q\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}\,\middle|\,p,q\in\mathbb{R}\right\}$.

Aufgabe 72

Berechnen Sie jeweils eine Parameterform der gesuchten Geraden.

a) Gerade senkrecht zu $\left\{\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}+p\begin{pmatrix}2\\4\\1\end{pmatrix}+q\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\,\middle|\,p,q\in\mathbb{R}\right\}$ durch $(1;0;3)$,

b) Gerade senkrecht zu $\left\{\begin{pmatrix}2\\8\\5\end{pmatrix}+p\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\,\middle|\,p\in\mathbb{R}\right\}$ und $\left\{\begin{pmatrix}2\\8\\5\end{pmatrix}+q\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}\,\middle|\,q\in\mathbb{R}\right\}$ durch $(2;8;5)$,

c)* Gerade, die senkrecht auf g steht und in E enthalten ist, wobei

$$g=\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}+p\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\,\middle|\,p\in\mathbb{R}\right\}\quad\text{und}\quad E=\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+q\begin{pmatrix}-2\\2\\3\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}-1\\2\\4\end{pmatrix}\,\middle|\,q,r\in\mathbb{R}\right\}.$$

Lösung:

a) $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}4\\-3\\4\end{pmatrix}\,\middle|\,r\in\mathbb{R}\right\}$, b) $\left\{\begin{pmatrix}2\\8\\5\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}4\\-1\\-3\end{pmatrix}\,\middle|\,r\in\mathbb{R}\right\}$, c) $\left\{\begin{pmatrix}3\\1\\3\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}-4\\2\\1\end{pmatrix}\,\middle|\,r\in\mathbb{R}\right\}$

Aufgabe 73

Berechnen Sie jeweils eine Normalenform und Koordinatenform der gesuchten Ebene.

a) Ebene senkrecht zu $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}+p\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}\,\middle|\,p\in\mathbb{R}\right\}$ durch $(2;2;-1)$,

b) Ebene, die den Punkt $(1;2;-1)$ enthält und senkrecht auf E_1 und E_2 steht, wobei

$$E_1=\left\{\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}+p\begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix}+q\begin{pmatrix}7\\-2\\-1\end{pmatrix}\,\middle|\,p,q\in\mathbb{R}\right\} \text{ und } E_2=\left\{r\begin{pmatrix}3\\-5\\1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\,\middle|\,r,s\in\mathbb{R}\right\},$$

c) Ebene, die die Gerade g enthält und senkrecht auf die Ebene E steht, wobei

$$g=\left\{\begin{pmatrix}-1\\5\\7\end{pmatrix}+p\begin{pmatrix}-2\\1\\6\end{pmatrix}\,\middle|\,p\in\mathbb{R}\right\} \quad \text{und} \quad E=\left\{\begin{pmatrix}9\\-6\\0\end{pmatrix}+q\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}4\\-2\\1\end{pmatrix}\,\middle|\,q,r\in\mathbb{R}\right\}.$$

Lösung:

a) $\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3\,\middle|\,x+-2y+2z=-4\right\}$, b) $\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3\,\middle|\,-13x+5y+4z=-7\right\}$,

c) $\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3\,\middle|\,8x+-2y+3z=3\right\}$

Aufgabe 74

Untersuchen Sie jeweils, ob der Punkt $(3;-2)$ auf der gegebenen Geraden liegt.

a) $\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2 \mid 3x_1+2x_2=5\}$ b) $\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2 \mid x_1-2x_2=-1\}$

Lösung:

a) ja, b) nein.

Aufgabe 75

Untersuchen Sie jeweils die gegenseitige Lage der Geraden und bestimmen Sie gegebenenfalls den Schnittpunkt.

a) $\{\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2 \mid r\in\mathbb{R}\}$ und $\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2 \mid 3x_1+2x_2=5\}$,

b) $\{\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2 \mid r\in\mathbb{R}\}$ und $\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2 \mid 4x_1-2x_2=5\}$.

Lösung:

a) Schnittpunkt bei $(\frac{13}{5};-\frac{7}{5})$.

b) kein Schnittpunkt; echt parallel.

Aufgabe 76

Untersuchen Sie jeweils, ob der Punkt $(1;-1;2)$ auf der gegebenen Ebene liegt.

a) $\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3\,\middle|\,3x+2y+-1z=2\right\}$, b) $\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3\,\middle|\,4x+2y+-1z=0\right\}$.

Lösung:
a) nein, b) ja.

Aufgabe 77

Untersuchen Sie jeweils die gegenseitige Lage von Gerade und Ebene (Gerade liegt in der Ebene; Gerade liegt nicht in der Ebene, ist aber parallel zu ihr; Gerade und Ebene haben genau einen Schnittpunkt) und bestimmen Sie gegebenenfalls den Schnittpunkt.

a) $\left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \,\middle|\, p \in \mathbb{R} \right\}$ und $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x + -2y + 3z = 2 \right\}$,

b) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \,\middle|\, p \in \mathbb{R} \right\}$ und $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x + 4y + -1z = -1 \right\}$,

c) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 7 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix} \,\middle|\, p \in \mathbb{R} \right\}$ und $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, 2x + -3y + 1z = 5 \right\}$.

Lösung:

a) schneiden sich in genau einem Punkt, nämlich in $(9;5;1)$

b) die Gerade liegt nicht in der Ebene, ist aber parallel zu ihr

c) schneiden sich in genau einem Punkt, nämlich in $(1;-1;0)$

Aufgabe 78

Untersuchen Sie jeweils die gegenseitige Lage der Ebenen (sind gleich; sind nicht gleich, aber parallel; haben eine Gerade als Schnittmenge) und bestimmen Sie ggf. die Schnittgerade.

a) $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x + -2y + 3z = 2 \right\}$ und $\left\{ \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \,\middle|\, p, q \in \mathbb{R} \right\}$,

b) $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x + -2y + 3z = 2 \right\}$ und $\left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 6 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 5 \\ -9 \\ 7 \end{pmatrix} \,\middle|\, p, q \in \mathbb{R} \right\}$,

c) $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, 3x + -5y + 1z = 3 \right\}$ und $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \,\middle|\, p, q \in \mathbb{R} \right\}$,

d) $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x + 2y + 8z = 1 \right\}$ und $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x + 1y + 5z = 1 \right\}$,

e) $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x + 7y + 3z = 2 \right\}$ und $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, 2x + 9y + 1z = -1 \right\}$,

f) $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, 2x + 1y + 8z = 3 \right\}$ und $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x + 1y + 6z = 2 \right\}$,

g) $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x + 2y + 8z = 1 \right\}$ und $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, -x + -2y + -8z = 1 \right\}$,

h) $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x + -3y + 1z = 2 \right\}$ und $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x + -5y + 3z = -2 \right\}$.

Lösung:

a) haben eine Gerade als Schnittmenge: $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \,\middle|\, r \in \mathbb{R} \right\}$,

b) haben eine Gerade als Schnittmenge: $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \,\middle|\, r \in \mathbb{R} \right\}$,

c) sind nicht gleich, aber parallel,

d) haben eine Gerade als Schnittmenge: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \,\middle|\, r \in \mathbb{R} \right\}$,

e) haben eine Gerade als Schnittmenge: $\left\{ \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \,\middle|\, r \in \mathbb{R} \right\}$,

f) haben eine Gerade als Schnittmenge: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \,\middle|\, r \in \mathbb{R} \right\}$,

g) sind nicht gleich, aber parallel,

h) haben eine Gerade als Schnittmenge: $\left\{ \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, r \in \mathbb{R} \right\}$.

Aufgabe 79

Berechnen Sie jeweils den Winkel zwischen den beiden Vektoren.

a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Lösung:

a) $30°$, b) $90°$, c) $60°$.

Aufgabe 80

Berechnen Sie jeweils den Schnittwinkel der geometrischen Objekte in $\mathbb{R}^3$.

a) $\left\{ \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \,\middle|\, p \in \mathbb{R} \right\}$ und $\left\{ \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \,\middle|\, q \in \mathbb{R} \right\}$,

b) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \,\middle|\, p, q \in \mathbb{R} \right\}$ und $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \,\middle|\, r \in \mathbb{R} \right\}$,

c) $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, p, q \in \mathbb{R} \right\}$ und $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, r, s \in \mathbb{R} \right\}$.

Lösung:

a) $90°$, b) $60°$, c) $60°$.

Aufgabe 81

Bestimmen Sie jeweils den Lotfußpunkt L von P auf der Geraden g bzw. der Ebene E.

a) $P = (0; 0; 2)$ und $g = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \,\middle|\, r \in \mathbb{R} \right\}$,

b) $P = (9; 3; -1)$ und $g = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} \,\middle|\, r \in \mathbb{R} \right\}$,

c) $P = (7; 4; -7)$ und $E = \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \,\middle|\, r, s \in \mathbb{R} \right\}$,

d) $P = (5;1;2)$ und $E = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \;\middle|\; r, s \in \mathbb{R} \right\}$.

Lösung:
a) $L = (-3;5;1)$, b) $L = (0;2;-3)$, c) $L = (1;2;-3)$, d) $L = (1;3;4)$.

Aufgabe 82

Bestimmen Sie zu den Daten aus Aufgabe 81 jeweils den Abstand von P und g bzw. E.

Lösung:
a) $\sqrt{35}$, b) $\sqrt{86}$, c) $2\sqrt{14}$, d) $2\sqrt{6}$

Aufgabe 83

Bestimmen Sie jeweils den Abstand des Punktes P von der Geraden g bzw. der Ebene E.

a) $P = (-3;3;1)$ und $g = \left\{ \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \;\middle|\; r \in \mathbb{R} \right\}$,

b) $P = (1;8;4)$ und $g = \left\{ \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \;\middle|\; r \in \mathbb{R} \right\}$,

c) $P = (1;-4;7)$ und $E = \left\{ \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} \;\middle|\; r, s \in \mathbb{R} \right\}$,

d) $P = (-3;-8;4)$ und $E = \left\{ \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ -6 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \;\middle|\; r, s \in \mathbb{R} \right\}$.

Lösung:
a) $2\sqrt{6}$, b) 7, c) $2\sqrt{6}$, d) $\sqrt{2}$.

Aufgabe 84

Bestimmen Sie jeweils den Abstand des Punktes P von der Ebene E.

a) $P = (-2;9;3)$ und $E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x + 1y + -4z = 13 \right\}$,

b) $P = (2;1;-1)$ und $E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 6x + 2y + 3z = -17 \right\}$.

Lösung:
a) $3\sqrt{2}$, b) 4.

Aufgabe 85

Berechnen Sie jeweils eine Normalenform oder Koordinatenform von E und bestimmen Sie dann den Abstand von P zu E.

a) $E = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix} \;\middle|\; p, q \in \mathbb{R} \right\}$ und $P = (3;1;2)$,

b) $E = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 12 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; p, q \in \mathbb{R} \right\}$ und $P = (5;3;1)$,

c) $E = \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \,\middle|\, p, q \in \mathbb{R} \right\}$ und $P = (-1; 4; -9)$.

Lösung:

a) $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, 2x + 3y + 6z = 7 \right\}$ und $d(P, E) = 2$

b) $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x + 4y + -8z = -18 \right\}$ und $d(P, E) = 3$

c) $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, 2x + 2y + -1z = 15 \right\}$ und $d(P, E) = 0$ (der Punkt P liegt auf E)

Aufgabe 86

Untersuchen Sie jeweils, ob die Gerade g zur Ebene E parallel ist und bestimmen Sie gegebenfalls den Abstand.

a) $g = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \,\middle|\, s \in \mathbb{R} \right\}$ und $E = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, s, t \in \mathbb{R} \right\}$

b) $g = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, s \in \mathbb{R} \right\}$ und $E = \left\{ \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix} \,\middle|\, s, t \in \mathbb{R} \right\}$

Lösung:

a) Gerade und Ebene schneiden sich,

b) Abstand $\frac{15}{7}$.

Aufgabe 87

Untersuchen Sie jeweils, ob die Ebenen E_1 und E_2 parallel sind und berechnen Sie gegebenenfalls den Abstand von E_1 und E_2.

a) $E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ 7 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \,\middle|\, p, q \in \mathbb{R} \right\}$ und $E_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x + 3y + -2z = 5 \right\}$,

b) $E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \,\middle|\, p, q \in \mathbb{R} \right\}$ und $E_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, 3x + 1y + 2z = 23 \right\}$,

c) $E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, -x + 2y + 2z = 9 \right\}$ und $E_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x + -2y + -2z = -3 \right\}$.

Lösung:

a) Ebenen schneiden sich, b) $\sqrt{14}$, c) 2.

Aufgabe 88

Bestimmen Sie jeweils den Abstand der Gerade g von der Geraden h.

a) $g = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| s \in \mathbb{R} \right\}$ und $h = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} \middle| t \in \mathbb{R} \right\}$

b) $g = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 8 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| s \in \mathbb{R} \right\}$ und $h = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \middle| t \in \mathbb{R} \right\}$

Lösung:

a) 2,

b) 4,

Aufgabe 89

Bestimmen Sie jeweils den Abstand der Geraden g von der Geraden h bzw. der Ebene E, sofern sie sich nicht schneiden.

a) $g = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| p \in \mathbb{R} \right\}$ und $h = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} \middle| q \in \mathbb{R} \right\}$,

b) $g = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 8 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| p \in \mathbb{R} \right\}$ und $h = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \middle| q \in \mathbb{R} \right\}$,

c) $g = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \middle| p \in \mathbb{R} \right\}$ und $E = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| q, r \in \mathbb{R} \right\}$,

d) $g = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| p \in \mathbb{R} \right\}$ und $E = \left\{ \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix} \middle| q, r \in \mathbb{R} \right\}$,

e) $g = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \middle| p \in \mathbb{R} \right\}$ und $E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| 3x + 1y + 2z = 23 \right\}$.

Lösung:

a) 2, b) 4, c) Gerade und Ebene schneiden sich, d) $\frac{15}{7}$, e) $\sqrt{14}$.