Dr. K. Maurischat
Dr. S. Bleß

Aachen, 12. Oktober 2020

Analysis

Übungsaufgaben mit Lösungen

im Vorkurs Mathematik 2020, RWTH Aachen University

— Folgen, Konvergenz —

Aufgabe 1

a) Zeigen Sie mit Hilfe der Definition der Konvergenz: Eine Folge $(a_n)_{n\geqslant 1}$ konvergiert genau dann gegen Null, wenn die Folge der Beträge $(|a_n|)_{n\geqslant 1}$ gegen Null konvergiert.

b) Konstruieren Sie ein Beispiel einer divergenten Folge $(a_n)_{n\geqslant 1}$, so dass die Folge der Beträge konvergiert.

Lösung:

a) Zunächst gilt $|a_n - 0| = |a_n| = ||a_n| - 0|$. Gibt es also zu jedem $\epsilon > 0$ ein $n_0 = n_0(\epsilon)$, so dass $|a_n - 0| < \epsilon$ ist für alle $n > n_0$, so gilt auch $||a_n| - 0| < \epsilon$ für alle $n > n_0$ (mit demselben n_0) und umgekehrt. Daraus folgt die Behauptung.

b) Ein einfaches Beispiel ist die Folge $a_n = (-1)^n$. Wie oben gesehen hat sie zwei Häufungspunkte, die Betragsfolge ist aber $|a_n| = 1$ konstant und somit konvergent.

Aufgabe 2

Zeigen Sie mit Hilfe der Definition der Konvergenz: Ist $(a_n)_{n\geq 1}$ eine Nullfolge und $(b_n)_{n\geq 1}$ beschränkt, so ist $(a_n \cdot b_n)_{n\geq 1}$ eine Nullfolge.

Lösung:

Da $(b_n)_n$ eine beschränkte Folge ist, existiert ein $C \in \mathbb{R}$, $C > 0$, sodass $|b_n| \leq C$, für alle $n \in \mathbb{N}$.
Sei nun $\varepsilon > 0$.
Da $(a_n)_n$ eine Nullfolge ist, gilt nach Definition, dass ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, mit

$$|a_n - 0| < \frac{\varepsilon}{C}, \quad \text{für alle } n \geq n_0.$$

Also gilt auch für alle $n \geq n_0$:

$$|a_n \cdot b_n - 0| = |a_n \cdot b_n| = |a_n| \cdot |b_n| = |a_n - 0| \cdot |b_n| < \frac{\varepsilon}{C} \cdot C = \varepsilon,$$

also folgt die Behauptung.

Aufgabe 3

Bestimmen Sie den Grenzwert a der Folgen $(a_n)_n, n \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie Ihre Vermutung, indem Sie zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{R}$ bestimmen mit $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n > n_0(\varepsilon)$.

a) $a_n = \dfrac{n}{n+1}$, b) $a_n = \dfrac{3}{n^2}$, c) $a_n = 5 + \dfrac{1}{\sqrt{n}}$,

d) $a_n = \sqrt{1 + \dfrac{1}{n}}$, e) $a_n = e^{-n}$, f) $a_n = \dfrac{\sin(n)}{n}$.

Lösung:

a) Es gilt $a_n = \frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$. Wir behaupten $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$. Sei dazu $\varepsilon > 0$. Dann gilt

$$|a_n - 1| = \left|\frac{n}{n+1} - 1\right| = \left|-\frac{1}{n+1}\right| = \frac{1}{n+1} < \varepsilon \Leftrightarrow n + 1 > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon} - 1.$$

Für $n_0(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} - 1$ gilt damit $|a_n - 1| < \varepsilon$ für alle $n > n_0$.

b) Wir behaupten $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Sei dazu $\varepsilon > 0$. Dann gilt

$$\left|\frac{3}{n^2} - 0\right| = \frac{3}{n^2} < \varepsilon \Leftrightarrow n^2 > \frac{3}{\varepsilon} \overset{n>0}{\Longleftrightarrow} n > \sqrt{\frac{3}{\varepsilon}}.$$

Für $n_0(\varepsilon) = \sqrt{\frac{3}{\varepsilon}}$ gilt damit $|a_n - 0| < \varepsilon$ für alle $n > n_0$.

c) Wir behaupten $\lim_{n\to\infty} = 5$. Sei dazu $\varepsilon > 0$. Dann gilt

$$|a_n - 5| = \left|5 + \frac{1}{\sqrt{n}} - 5\right| = \frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon \Leftrightarrow \sqrt{n} > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon^2}.$$

Für $n_0(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^2}$ gilt damit $|a_n - 5| < \varepsilon$ für alle $n > n_0$.

d) Wir behaupten $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$ und betrachten den Ausdruck $a_n - 1 = \sqrt{1 + \frac{1}{n}} - 1$. Nach der 3. binomischen Formel gilt

$$\left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - 1\right) \cdot \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1\right) = \sqrt{1 + \frac{1}{n}}^2 - 1 = \frac{1}{n},$$

also

$$a_n - 1 = \frac{1}{n} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1}}_{<1} < \frac{1}{n}.$$

Also ist $|a_n - 1| < \varepsilon$, sobald nur $\frac{1}{n} < \varepsilon$, das heißt $n > \frac{1}{\varepsilon} =: n_0(\varepsilon)$ ist.

e) Wir behaupten $\lim_{n\to\infty} e^{-n} = 0$. Sei dazu $\varepsilon > 0$. Dann gilt

$$|e^{-n} - 0| = e^{-n} < \varepsilon \Leftrightarrow \ln e^{-n} = -n < \ln \varepsilon \Leftrightarrow n > -\ln \varepsilon.$$

Für $n_0(\varepsilon) = -\ln \varepsilon$ gilt dann $|a_n - 0| < \varepsilon$ für alle $n > n_0$.

f) Zunächst gilt $|\sin(n)| \leqslant 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir behaupten $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Sei dazu $\varepsilon > 0$. Dann gilt

$$|a_n - 0| = |a_n| = \frac{|\sin(n)|}{n} \leqslant \frac{1}{n}.$$

Damit ist $|a_n - 0| < \varepsilon$, sobald $\frac{1}{n} < \varepsilon$, das heißt $n > \frac{1}{\varepsilon} =: n_0(\varepsilon)$ ist.

Aufgabe 4

Bestimmen Sie den Grenzwert a (falls er existiert) der angegebenen Folgen $(a_n)_n$. Hinweis: Die Grenzwertsätze können hierbei hilfreich sein.

a) $a_n = \dfrac{n+1}{2n}$,
b) $a_n = \dfrac{1}{n^2\sqrt{n}} + \dfrac{1}{n^3}$,
c) $a_n = (-1)^n \dfrac{1}{n+3}$,
d) $a_n = \dfrac{2n^3 - n + 1}{n^3 + 3n^2}$,
e) $a_n = n \cdot \dfrac{1 - 4^{-n}}{3n+5}$,
f) $a_n = \sqrt[2n]{5^{n+1}}$,
g) $a_n = \dfrac{\binom{n}{3}}{n^3}$,
h) $a_n = n\sqrt{1 + \dfrac{1}{n^2}} - n$,
i) $a_n = \frac{1}{3}\left(1 - \dfrac{1}{10^n}\right)$,
j) $a_n = \dfrac{n^2}{2^n}$,
k) $a_n = \sqrt{n^2 + n} - n$,
l) $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n!}$.

Lösung:

Wir benutzen die Grenzwertsätze.

a)

$$a_n = \frac{n+1}{2n} = \frac{1 + \frac{1}{n}}{2} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2}$$

b)

$$a_n = \frac{1}{n^2\sqrt{n}} + \frac{1}{n^3} = \left(\frac{1}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} + \left(\frac{1}{n}\right)^3 \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0^2 \cdot \sqrt{0} + 0^3 = 0$$

c) Es gilt

$$|a_n| = \frac{1}{n+3} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

das heißt $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

d)

$$a_n = \frac{2n^3 - n + 1}{n^3 + 3n^2} = \frac{2 - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3}}{1 + \frac{3}{n}} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{2 - 0 + 0}{1 + 0} = 2$$

e) Es gilt $\lim_{n\to\infty} 4^{-n} = 0$ (vgl. A 3 (e)). Es folgt

$$a_n = n \cdot \frac{1 - 4^{-n}}{3n+5} = (1 - 4^{-n}) \cdot \frac{n}{3n+5} = (1 - 4^{-n}) \cdot \frac{1}{3 + \frac{5}{n}} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} (1-0) \cdot \frac{1}{3+0} = \frac{1}{3}.$$

f)

$$a_n = \sqrt[2n]{5^{n+1}} = 5^{\frac{n+1}{2n}} = 5^{b_n} \text{ mit } b_n = \frac{n+1}{2n}$$

Es gilt $\lim_{n\to\infty} b_n = \frac{1}{2}$ und damit $\lim_{n\to\infty} a_n = 5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$. (Streng genommen benutzt man hier schon die Stetigkeit der Exponentialfunktion).

g)

$$a_n = \frac{\binom{n}{3}}{n^3} = \frac{\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}}{n^3} = \frac{1}{6} \cdot \frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{6}.$$

h) Es gilt $a_n = n\sqrt{1+\frac{1}{n^2}} - n = \sqrt{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)} - n = \sqrt{n^2+1} - n$. Mit der 3. binomischen Formel erhält man dann

$$(\sqrt{n^2+1} - n) \cdot (\sqrt{n^2+1} + n) = n^2 + 1 - n^2 = 1.$$

Es folgt $0 \leqslant a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n} \leqslant \frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$, das heißt $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

i) Wegen $\lim_{n\to\infty} 10^{-n} = 0$ gilt

$$a_n = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{10^n}\right) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \cdot 10^{-n} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \cdot 0 = \frac{1}{3}.$$

j) Nach der allgemeinen binomischen Formel gilt $2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} > \binom{n}{3}$. Es folgt

$$0 \leqslant a_n = \frac{n^2}{2^n} < \frac{n^2}{\binom{n}{3}} = 3! \cdot \frac{n^2}{n(n-1)(n-2)} = 3! \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{n}{n-1} \cdot \frac{n}{n-2} \xrightarrow{n\to\infty} 3! \cdot 0 \cdot 1 \cdot 1 = 0$$

und damit $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

k) Es gilt

$$(\sqrt{n^2+n} - n) \cdot (\sqrt{n^2+n} + n) = n^2 + n - n^2 = n,$$

also

$$a_n = \sqrt{n^2+n} - n = \frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n} = \frac{1}{\sqrt{\frac{n^2+n}{n^2}}+1} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+0}+1} = \frac{1}{2}.$$

l) Es gilt $n! \geqslant n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Es folgt

$$|a_n| = \frac{1}{n!} \leqslant \frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

und damit auch $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Aufgabe 5 (Fibonacci-Folge)

Vom italienischen Mathematiker Leonardo da Pisa, genannt Fibonacci, wurde 1202 folgendes Problem untersucht: Ein junges Kaninchenpaar befindet sich zum Zeitpunkt $t = 0$ in einem Garten. Nach einem Monat ist das Paar erwachsen und bringt ein neues Paar Kaninchen zur Welt. Dieses Paar Jungtiere braucht wieder einen Monat, bis es erwachsen ist und selbst ein Paar als Nachkommen hat. Dieser Prozess wiederholt sich nun immer weiter und jedes Kaninchenpaar verhält sich gleichermaßen. Fibonacci untersuchte die Frage, wie sich die Population entwickelt unter den beiden folgenden vereinfachten Annahmen:

1. Jedes erwachsene Paar bekommen jeden Monat ein Paar Jungtiere. Jungtiere sind nach einem Monat erwachsen.
2. Es kommen keine weiteren Kaninchen von außen hinzu.
3. Kaninchen sind unsterblich (keine Kaninchen verschwinden).

Untersuchen Sie die Frage, wie viele Kaninchenpaare nach $n \in \mathbb{N}$ Monaten vorhanden sind. Geben Sie dazu die ersten 10 Folgenglieder explizit an. Finden Sie danach eine Rekursionsformel für diese Folge. Welchen Grenzwert erwarten Sie für $n \to \infty$?

Lösung:

Es bezeichne a_n die Anzahl der Paare am Ende des n-ten Monats. Außerdem sie im Folgenden e_n die Anzahl der erwachsenen Paare und j_n die Anzahl der Jungtiere (am Ende des n-ten Monats). Zunächst gilt dann $a_n = e_n + j_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Anfangs ist ein Paar Jungtiere vorhanden, d.h. $j_0 = 1$ und $e_0 = 0$. Nach einem Monat ist das Paar Jungtiere erwachsen, also $e_1 = 1$ und es gibt keine Jungtiere mehr, also $j_1 = 0$. Das bedeutet auch wir haben die Anfangsbedingungen $a_0 = 1$ und $a_1 = 1$. Wir verfahren analog weiter: Im zweiten Monat wird ein Paar Jungtiere geboren, das erwachsene Paar bleibt erwachsen, also $a_2 = 2$. Im dritten Monat wächst das Paar Jungtiere heran und es kommt ein weiteres Paar Jungtiere durch das Erwachsenenpaar hinzu, also $a_3 = 3$ usw. Es ergibt sich für die gesuchte Folge

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \ldots$$

Die Rekursionsformel ergibt sich dann aus den folgenden Beobachtungen

1. $e_{n+1} = e_n + j_n$ (erwachsene Tiere bleiben erwachsen und Jungtiere reifen zu Erwachsenen)
2. $j_{n+1} = e_n$ (Jedes erwachsene Paar bekommt ein Paar Jungtiere)

Daraus ergibt sich durch Einsetzen von 2 in 1 zunächst $e_{n+1} = e_n + e_{n-1}$ und für a_n gilt dann auch

$$a_n = e_n + j_n = e_n + e_{n-1} = e_{n+1}.$$

Damit verhält sich die gesuchte Formel nach der gleichen Rekursionsvorschrift: $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ mit Anfangsbedingungen wie oben.

Der Grenzwert ist klarerweise gegeben durch $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$.

Man nennt a_n die Fibonacci Zahlen.

Aufgabe 6 ($\star$)

Untersuchen Sie die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Monotonie und Beschränktheit.
Hinweis: Man nennt eine Folge monoton fallend (wachsend), falls $a_{n+1} \leq a_n$ ($a_{n+1} \geq a_n$) gilt. Man nennt eine Folge streng monoton fallend (wachsend), falls $a_{n+1} < a_n$ ($a_{n+1} > a_n$) gilt.

a) $a_n = \frac{1}{n^2}$, b) $a_n = \frac{n+1}{5n}$, c) $a_n = \frac{n}{n^2+1}$,

d) $a_n = \frac{(-1)^n}{n+3}$, e) $a_n = \frac{n^2-1}{n}$, f) $a_n = \frac{3n-2n^2}{n^2+1}$,

g) $a_n = \frac{\sqrt{5n}}{\sqrt{n+1}}$, h) $a_n = \frac{n\sqrt{n}+10}{n^2}$, i) $a_n = \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$.

Lösung:

Hinweis für Tutoren: Wir machen Beschränktheit und Monotonie nicht in der Vorlesung, ihr dürft das Konzept aber gerne erklären und mit den Studis diese Aufgabe hier machen.

a) Es gilt

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n^2} = \frac{n^2-(n+1)^2}{n^2\cdot(n+1)^2} = -\frac{2n+1}{n^2\cdot(n+1)^2} < 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Also ist $(a_n)_n$ streng monoton fallend. (Alternativ: Die Funktion $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ ist streng monoton fallend auf $(0,\infty)$.) Weiter ist $0 < a_n \leqslant a_1 = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und damit $(a_n)_n$ nach oben und unten beschränkt.

b) Es gilt $a_n = \frac{n+1}{5n} = \frac{1}{5}(1+\frac{1}{n})$. Mit $\left(\frac{1}{n}\right)_n$ ist auch $(a_n)_n$ streng monoton fallend. Insbesondere ist damit $a_1 > a_n > 0$ für alle n, das heißt die Folge ist nach oben und unten beschränkt.

c) Wir betrachten wieder $a_{n+1} - a_n$. Es gilt

$$\begin{aligned}
a_{n+1} - a_n = \frac{n+1}{(n+1)^2+1} - \frac{n}{n^2+1} &= \frac{(n+1)(n^2+1) - n((n+1)^2+1)}{(n^2+1)((n+1)^2+1)} < 0 \\
&\Leftrightarrow n^3+n^2+n+1-n(n^2+2n+2) < 0 \\
&\Leftrightarrow -(n^2+n-1) < 0.
\end{aligned}$$

Wegen $n^2+n-1 \geqslant 1^2+1-1 = 1 > 0$ ist dies für alle n eine wahre Aussage. Also ist $(a_n)_n$ streng monoton fallend. Wegen $a_1 > a_n > 0$ für alle n ist damit $(a_n)_n$ nach oben und unten beschränkt.

d) Es gilt $|a_n| = \frac{1}{n+3} < 1$ für alle n. Damit ist $(a_n)_n$ nach oben und nach unten beschränkt. Wegen

$$\begin{aligned}
a_{n+1} - a_n &= \frac{(-1)^{n+1}}{n+4} - \frac{(-1)^n}{n+3} = \frac{(-1)^{n+1}(n+3) - (-1)^n(n+4)}{(n+3)(n+4)} \\
&= (-1)^{n+1}\underbrace{\frac{2n+7}{(n+3)(n+4)}}_{>0}.
\end{aligned}$$

ist damit $a_{n+1} - a_n > 0$ für n ungerade und $a_{n+1} - a_n < 0$ für n gerade. Also ist die Folge $(a_n)_n$ nicht monoton.

e) Es gilt

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{(n+1)^2 - 1}{n+1} - \frac{n^2 - 1}{n} = \frac{n((n+1)^2 - 1) - (n+1)(n^2 - 1)}{n(n+1)} \\ &= \frac{n^3 + 2n^2 - n^3 + n - n^2 + 1}{n(n+1)} = \frac{n^2 + n + 1}{n(n+1)} > 0 \end{aligned}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Damit ist $(a_n)_n$ streng monoton wachsend. (Alternativ: Man schreibt $a_n = n - \frac{1}{n}$ als Summe zweier streng monoton wachsender Funktionen.) Weiter hat man $a_n \geqslant 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, das heißt $(a_n)_n$ ist nach unten beschränkt. Wegen

$$\frac{n^2 - 1}{n} = \underbrace{\frac{n+1}{n}}_{>1} \cdot (n-1) > n - 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

ist $(a_n)_n$ nach oben unbeschränkt.

f) Es gilt

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{3(n+1) - 2(n+1)^2}{(n+1)^2 + 1} - \frac{3n - 2n^2}{n^2 + 1} \\ &= \frac{(3(n+1) - 2(n+1)^2)(n^2 + 1) - (3n - 2n^2)((n+1)^2 + 1)}{((n+1)^2 + 1)(n^2 + 1)} < 0 \\ &\Leftrightarrow -3n^2 - 7n + 1 < 0. \end{aligned}$$

Wegen $3n^2 + 7n - 1 \geqslant 3 \cdot 1^2 + 7 \cdot 1 - 1 = 9 > 0$ ist die letzte Ungleichung für alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllt. Damit ist $(a_n)_n$ streng monoton fallend. Also ist $(a_n)_n$ nach oben beschränkt durch a_1. Schließlich folgt aus

$$\frac{3n - 2n^2}{n^2 + 1} = 3 \underbrace{\frac{n}{n^2 + 1}}_{>0} - 2 \frac{n^2}{n^2 + 1} > -2 \underbrace{\frac{n^2}{n^2 + 1}}_{<1} > -2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

die Beschränktheit nach unten.

g) Es gilt zunächst

$$a_n = \sqrt{5} \cdot \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} = \sqrt{5} \cdot \sqrt{\frac{n}{n+1}} = \sqrt{5} \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{n+1}}.$$

Die Folge $b_n := 5\left(1 - \frac{1}{n+1}\right), n \in \mathbb{N}$ ist streng monoton wachsend. Da $x \mapsto \sqrt{x}$ auch streng monoton wächst, ist damit auch $(a_n)_n = (\sqrt{b_n})_n$ streng monoton wachsend. Desweiteren gilt $0 \leqslant a_n \leqslant \sqrt{5}$ für alle n, woraus die Beschränktheit folgt.

h) Es gilt

$$a_n = \frac{n\sqrt{n}+10}{n^2} = \frac{n\sqrt{n}}{n^2} + \frac{10}{n^2} = \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{10}{n^2}.$$

Die Folgen $(b_n)_n = (\frac{1}{\sqrt{n}})_n$ und $(c_n)_n = (\frac{10}{n^2})_n$ sind streng monoton fallend. Damit ist auch $(a_n)_n$ streng monoton fallend mit $0 \leqslant a_n \leqslant a_1$ für alle n.

i) Mit der 3. binomischen Formel gilt zunächst

$$a_n \cdot (\sqrt{n+1} + \sqrt{n}) = (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \cdot (\sqrt{n+1} + \sqrt{n}) = n + 1 - n = 1,$$

also

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Die Funktionen $n \mapsto \sqrt{n}$ bzw. $n \mapsto \sqrt{n+1}$ sind streng monoton wachsend. Es folgt, dass $(a_n)_n$ streng monoton fällt. Desweiteren gilt $0 \leqslant a_n \leqslant a_1$ für alle n, woraus die Beschränktheit folgt.

— Funktionen —

Aufgabe 7

Bestimmen Sie jeweils, ob es sich bei den angegebenen Mengen um Intervalle handelt. Geben Sie in diesem Fall bitte die Intervallschreibweise an.

a) $[0,1] \cup (1,2]$,
b) $[-1,0] \cup [2,3]$
c) $[-2,3] \cap (-2,4)$,
d) $(2,5] \setminus (4,5]$,

e) $(-\infty,5] \cap (1,6)$,
f) $\{x^2 : x \in \mathbb{R}\}$,
g) $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$,
h) $\{-1,7\}$,

i) $\{x \in \mathbb{R} : x < 0\}$,
j) $(0,2) \cap \mathbb{Q}$,
k) $\{x \in \mathbb{R} : x^2 < 1\}$,
l) $\{x \in \mathbb{R} : x^2 > 7\}$.

Lösung:

a) $[0,2]$,
b) kein Intervall,
c) $(-2,3]$,
d) $(2,4]$,

e) $(1,5]$,
f) $[0,\infty)$,
g) kein Intervall,
h) kein Intervall,

i) $(-\infty,0)$,
j) kein Intervall,
k) $(-1,1)$,
l) kein Intervall.

Aufgabe 8

Bestimmen Sie jeweils den Definitionsbereich von f/g. Untersuchen Sie, ob sich f/g in den Definitionslücken noch sinnvoll erklären lässt. Falls ja, mit welchem Funktionswert?

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2, \quad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = x^2 - 7x + 12$

b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x - 3, \quad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = x^2 - 10x + 21$

c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 1, \quad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = |x| - 5$

d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x - 1, \quad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = x^3 - 1$

Lösung:

a) Es gilt $x^2 - 7x + 12 = (x-3)(x-4)$. Also ist $D = \mathbb{R} \setminus \{3,4\}$. Da die Nennerfunktion die Nullstellen $x_0 = 3$ und $x_0 = 4$ besitzt, die Zählerfunktion allerdings nicht, kann die Funktion dort nicht sinnvoll fortgesetzt werden.

b) Es gilt $x^2 - 10x + 21 = (x-3)(x-7)$. Also ist $\frac{f}{g}$ zunächst auf $D = \mathbb{R} \setminus \{3,7\}$ definiert. Allerdings gilt nach Kürzung $\frac{f}{g}(x) = \frac{1}{x-7}$ für alle $x \in D$. Damit kann f im Punkt $x_0 = 3$ noch sinnvoll erklärt werden mit $\frac{f}{g}(3) := -\frac{1}{4}$.

c) Es gilt $|x| - 5 = 0 \Leftrightarrow x \in \{-5,5\}$. Damit ist $D = \mathbb{R} \setminus \{-5,5\}$.

d) Es gilt $x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1)$. Das Polynom $x^2 + x + 1$ ist auf $\mathbb{R}$ nullstellenfrei. Damit ist der Definitionsbereich $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Nach Kürzung erhält man

$$\frac{f}{g}(x) = \frac{1}{x^2 + x + 1} \quad \text{für alle } x \in D.$$

Dieser Ausdruck ist auch noch für $x = 1$ definiert. Eine sinnvolle Fortsetzung ist damit $\frac{f}{g}(1) := \frac{1}{3}$.

Aufgabe 9

Gegeben seien die Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 1 - x^2$ und $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R},\ g(x) = \sqrt{x}$. Bestimmen Sie die Definitionsbereiche $D(f \circ g)$ und $D(g \circ f)$ und geben Sie $f \circ g$ und $g \circ f$ explizit an.

Lösung:
Es gilt

$$D(f \circ g) = \{x \in D(g) : g(x) \in D(f)\} = \{x \in \mathbb{R}_+ : \sqrt{x} \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}_+.$$

Für alle $x \in \mathbb{R}_+$ gilt $(f \circ g)(x) = f(\sqrt{x}) = 1 - \sqrt{x}^2 = 1 - x$. Offensichtlich kann $x \mapsto 1 - x$ auf ganz $\mathbb{R}$ erklärt werden. Der Definitionsbereich von $g \circ f$ bestimmt sich zu

$$\begin{aligned} D(g \circ f) &= \{x \in D(f) : f(x) \in D(g)\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : 1 - x^2 \in \mathbb{R}_+\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x^2 \leqslant 1\} = [-1,1]. \end{aligned}$$

Für $x \in [-1,1]$ gilt $(g \circ f)(x) = g(1 - x^2) = \sqrt{1 - x^2}$. Im Allgemeinen müssen $f \circ g$ und $g \circ f$ also nicht übereinstimmen.

Aufgabe 10

Finden Sie Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sodass

a) $f \circ g = g \circ f$,

b) $f \circ g \neq g \circ f$.

Benutzen Sie nicht die Beispiele aus den vorangegangenen Aufgaben und betrachten Sie nicht die Identitätsabbildung, d.h. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) := x$ oder $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) := x$ ist nicht zulässig.

Lösung:

a) Wähle zum Beispiel $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = x^3$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^5$. Dann gilt

$$g \circ f(x) = g(x^5) = (x^5)^3 = x^{15}, \quad f \circ g(x) = f(x^3) = (x^3)^5 = x^{15}.$$

b) Wähle zum Beispiel $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = x^2 + 1$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 2x + 3$. Dann gilt

$$\begin{aligned} g \circ f(x) &= g(2x+3) = (2x+3)^2 + 1 = 4x^2 + 12x + 10, \\ f \circ g(x) &= f(x^2+1) = 2(x^2+1) + 3 = 2x^2 + 5. \end{aligned}$$

— Monotonie —

Aufgabe 11

Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf ihrem Definitionsbereich auf (strenge) Monotonie. Bestimmen Sie die maximalen Monotoniebereiche **ohne** Zuhilfenahme von Methoden der Differentialrechnung. Versuchen Sie dabei möglichst die jeweils voranstehenden Aufgabenteile zu benutzen.

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^5$,

b) $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{x}$,

c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2$,

d) $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{x}$,

e) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = |x|$,

f) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2 + 2x + 2$,

g) $f : [-1, 1] \to \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{1 - x^2}$,

h) $f : \mathbb{R} \setminus \{3, 4\} \to \mathbb{R},\ f(x) = (x^2 - 7x + 12)^{-1}$.

Hinweis: Benutzen Sie in Teil d) die 3. Binomische Formel.

Lösung:

a) Diese Funktion ist streng monoton wachsend wachsend auf ganz $\mathbb{R}$: Aus der Vorlesung wissen wir bereits, dass $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^3$ eine auf $\mathbb{R}$ streng monoton wachsende Funktion ist. Seien $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x < y$. Wir verfahren wie dort und machen zunächst eine Fallunterscheidung:

- $\underline{xy > 0}$:
  In diesem Fall sind $x, y \neq 0$ und damit ist

$$x^5 = x \cdot (x^4) \overset{x^4>0}{<} y \cdot (x^4) = xy \cdot (x^3) \overset{\text{VL 1}}{<} xy \cdot (y^3) = x \cdot y^4 \overset{y^4>0}{<} y \cdot (y^4) = y^5.$$

- $\underline{xy = 0}$:
  In diesem Fall ist $x = 0$ oder $y = 0$. Aus $x = 0$ folgt $y > 0$ und damit $x^5 = 0 < y^5$. Aus $y = 0$ folgt $x < 0$ und damit $x^5 < 0 = y^5$.

- $\underline{xy < 0}$:
  In diesem Fall gilt $x < 0 < y$ und damit $x^5 < 0 < y^5$.

b) Diese Funktion ist nicht monoton auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Es gilt $f(-1) = -1 < 1 = f(1)$, das heißt f ist nicht monoton fallend. Weiter ist $f(-1) = -1 < -\frac{1}{2} = f(-2)$, das heißt f ist auch nicht monoton wachsend. Damit ist f nicht (streng) monoton auf seinem Definitionsbereich. Für $0 < x < y$ gilt hingegen $f(x) = \frac{1}{x} > \frac{1}{y} = f(y)$. Damit ist f streng monoton fallend auf $(0, \infty)$. Für $x < y < 0$ hat man $f(x) = \frac{1}{x} = -\frac{1}{-x} > -\frac{1}{-y} = f(y)$. Damit ist f streng monoton fallend auf $(-\infty, 0)$.

c) Diese Funktion ist nicht monoton auf $\mathbb{R}$. Es gilt $f(-1) = 1 > 0 = f(0)$, das heißt f ist nicht monoton wachsend. Weiter ist $f(0) = 0 < 1 = f(1)$, das heißt f ist auch nicht monoton fallend. Für $0 \leqslant x < y$ gilt $x^2 < y^2$ und für $x < y \leqslant 0$ hat man $x^2 > y^2$. Damit ist f streng monoton wachsend auf $[0, \infty)$ und streng monoton fallend auf $(-\infty, 0]$.

d) Diese Funktion ist streng monoton wachsend auf ganz $\mathbb{R}_+$: Seien $x, y \in \mathbb{R}_+$ mit $x < y$. Es gilt zunächst $\sqrt{x} + \sqrt{y} > 0$, da $\sqrt{y} > 0$. Mit der 3. binomischen Formel erhalten wir $(\sqrt{y} - \sqrt{x}) \cdot (\sqrt{y} + \sqrt{x}) = y - x > 0$ nach Voraussetzung an x und y. Also gilt $\sqrt{y} - \sqrt{x} = \frac{y-x}{\sqrt{y}+\sqrt{x}} > 0$, das heißt $f(x) = \sqrt{x} < \sqrt{y} = f(y)$.

e) Diese Funktion ist nicht monoton auf $\mathbb{R}$. Es gilt $f(0) = |0| = 0 < 1 = |1| = f(1)$, das heißt f ist nicht monoton fallend. Umgekehrt ist $f(-1) = |-1| = 1 > 0 = |0| = f(0)$, das heißt f ist nicht monoton wachsend. Für $x \geqslant 0$ gilt $f(x) = x$. Also ist f streng monoton wachsend auf $[0, \infty)$. Für $x \leqslant 0$ hat man $f(x) = -x$, also ist f streng monoton fallend auf $(-\infty, 0]$.

f) Diese Funktion ist nicht monoton auf $\mathbb{R}$. Wir schreiben f in Scheitelpunktform, also

$$f(x) = x^2 + 2x + 2 = x^2 + 2x + 1 + 1 = (x+1)^2 + 1.$$

Für $-1 \leqslant x < y$ gilt $0 \leqslant x + 1 < y + 1$. Weil $x \mapsto x^2$ auf $[0, \infty)$ streng monoton wachsend ist, folgt $f(x) = (x+1)^2 + 1 < (y+1)^2 + 1 = f(y)$. Damit ist f streng monoton wachsend auf $[-1, \infty)$. Für $x < y \leqslant -1$ gilt $x + 1 < y + 1 \leqslant 0$, also auch $f(x) = (x+1)^2 + 1 > (y+1)^2 + 1 = f(y)$. Damit ist f streng monoton fallend auf $(-\infty, -1]$.

g) Diese Funktion ist nicht monoton auf $[-1, 1]$. Es gilt $f(0) = \sqrt{1} = 1 > 0 = \sqrt{0} = f(1)$, das heißt f ist nicht monoton wachsend. Umgekehrt hat man $f(-1) = 0 < 1 = f(0)$, das heißt f ist auch nicht monoton fallend. Für $x, y \in [0, 1]$ mit $x < y$ hat man $1 - x^2, 1 - y^2 \in \mathbb{R}_+$ sowie

$1-x^2 > 1-y^2$, da die Funktion $x \mapsto -x^2$ auf $[0,1] \subset \mathbb{R}_+$ streng monoton fällt. Es folgt $f(x) = \sqrt{1-x^2} > \sqrt{1-y^2} = f(y)$, da $x \mapsto \sqrt{x}$ auf $\mathbb{R}_+$ streng monoton wächst. Damit ist f auf $[0,1]$ streng monoton fallend. Genauso zeigt man, dass f auf $[-1,0]$ streng monoton wächst.

h) Diese Funktion ist nicht monoton auf $\mathbb{R} \setminus \{3,4\}$. Wir bestimmen die Monotoniebereiche. Sei dazu zunächst $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^2 - 7x + 12$. Mit quadratischer Ergänzung erhält man

$$g(x) = x^2 - 7x + \left(\frac{7}{2}\right)^2 - \left(\frac{7}{2}\right)^2 + 12 = \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}.$$

Wie in Aufgabe f) sieht man, dass g auf $\left(-\infty, \frac{7}{2}\right]$ streng monoton fallend, sowie auf $\left[\frac{7}{2}, \infty\right)$ streng monoton wachsend ist. Weiter gilt $g(x) < 0$ genau dann, wenn $x \in (3,4)$. Für $x \in \mathbb{R} \setminus (3,4)$ gilt $g(x) > 0$. Seien jetzt also $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{3,4\}$ mit $x < y$. Für $x, y \in (-\infty, 3)$ erhält man $g(x) > g(y) > 0$, also

$$f(x) = \frac{1}{g(x)} < \frac{1}{g(y)} = f(y),$$

das heißt f ist streng monoton wachsend auf $(-\infty, 3)$. Für $x, y \in \left(3, \frac{7}{2}\right]$ ist $0 > g(x) > g(y)$ und damit $f(x) = \frac{1}{g(x)} < \frac{1}{g(y)} = f(y)$, also ist f streng monoton wachsend auf $\left(3, \frac{7}{2}\right]$. Für $x, y \in \left[\frac{7}{2}, 4\right)$ gilt $g(x) < g(y) < 0$, also $f(x) = \frac{1}{g(x)} > \frac{1}{g(y)} = f(y)$. Damit ist f streng monoton fallend auf $\left[\frac{7}{2}, 4\right)$. Schließlich folgt für $x, y \in (4, \infty)$ sofort $0 < g(x) < g(y)$ und damit $f(x) = \frac{1}{g(x)} > \frac{1}{g(y)} = f(y)$, das heißt f ist streng monoton fallend auf $(4, \infty)$.

Aufgabe 12

Seien $D, E \subseteq \mathbb{R}$ nichtleere Teilmengen. Zeigen Sie:

a) Ist $f : D \to \mathbb{R}$ eine (streng) monoton wachsende Funktion, so ist $-f : D \to \mathbb{R}$ mit $(-f)(x) := -f(x)$ (streng) monoton fallend.

b) Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ monoton wachsende Funktionen mit $f, g \geqslant 0$ auf D, so ist auch $f \cdot g : D \to \mathbb{R}$ mit $(f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x)$ monoton wachsend.

c) Seien $f : D \to \mathbb{R}$ und $g : E \to \mathbb{R}$ monoton mit $g(E) \subseteq D$. Zeigen Sie, dass dann auch $f \circ g : E \to \mathbb{R}$ monoton ist. Welche Art von Monotonie liegt jeweils vor?

d) Sei $f : D \to W$ streng monoton und bijektiv. Zeigen Sie, dass dann auch $f^{-1} : W \to D$ streng monoton ist.

Lösung:

a) Sei f monoton wachsend. Seien $x, y \in D$ mit $x < y$. Dann gilt $f(x) \leqslant f(y)$, also $-f(x) \geqslant -f(y)$. Damit ist $-f$ monoton fallend. Analog zeigt man die Behauptung für streng monoton wachsendes f.

b) Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ monoton wachsend. Seien $x, y \in D$ mit $x < y$. Dann gilt

$$f(x) \cdot g(x) \overset{g \text{ mon. } \nearrow, f \geqslant 0}{\leqslant} f(x) \cdot g(y) \overset{f \text{ mon. } \nearrow, g \geqslant 0}{\leqslant} f(y) \cdot g(y).$$

c) Wir zeigen exemplarisch die Aussage

$$\text{“}f \text{ mon. fallend, } g \text{ mon. wachsend} \Rightarrow f \circ g \text{ mon. fallend ”.}$$

Seien dazu $x, y \in E$ mit $x < y$. Dann gilt $g(x) \leqslant g(y)$, da g monoton steigt. Da f monoton fällt, folgt

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) \geqslant f(g(y)) = (f \circ g)(y).$$

Analog formuliert und beweist man die übrigen Fälle

- “f mon. fallend, g mon. fallend $\Rightarrow f \circ g$ mon. wachsend ”,
- “f mon. wachsend, g mon. wachsend $\Rightarrow f \circ g$ mon. wachsend ”,
- “f mon. wachsend, g mon. fallend $\Rightarrow f \circ g$ mon. fallend ”.

d) Sei f zunächst streng monoton wachsend. Seien $y, y' \in W$ mit $y < y'$. Seien $x = f^{-1}(y)$ und $x' = f^{-1}(y')$. Angenommen $x \geqslant x'$. Dann wäre auch $y = f(x) \geqslant f(x') = y'$ im Widerspruch zur Annahme. Es folgt $f^{-1}(y) = x < x' = f^{-1}(y')$. Ist f streng monoton fallend, so wendet man das eben Bewiesene auf $(-f)^{-1} = -f^{-1}$ an.

Aufgabe 13

Bestimmen Sie den Wertebereich der folgenden Funktionen.

a) $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{1}{x}$,

b) $f : [-1, 2] \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{1}{x-3}$

c) $f : (-4, -1] \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2 + 2x + 2$,

d) $f : [-1, 1] \to \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{1 - x^2}$

e) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$,

f) $f : (-1, 1) \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

g) $f : (4, 5] \to \mathbb{R},\ f(x) = (x^2 - 7x + 12)^{-1}$.

Lösung:

a) Sei $\mathbb{R}^* := \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Für $x \neq 0$ gilt zunächst $\frac{1}{x} \neq 0$ und damit $f(\mathbb{R}^*) \subseteq \mathbb{R}^*$. Zu $y \in \mathbb{R}^*$ wählen wir $x = \frac{1}{y}$. Dann gilt $f(x) = \frac{1}{x} = \left(\frac{1}{y}\right)^{-1} = y$. Es folgt $f(\mathbb{R}^*) = \mathbb{R}^*$.
Bemerkung: Schränken wir den Zielbereich von f auf $\mathbb{R}^*$ ein, so folgt $f \circ f = id_{\mathbb{R}^*}$, das heißt, f ist bijektiv mit $f^{-1} = f$.

b) Für $x \in [-1, 2]$ gilt $x - 3 \in [-4, -1]$. Mit Aufgabe 11 b) sieht man damit, dass f auf $D = [-1, 2]$ streng monoton fällt, also

$$-\frac{1}{4} = f(-1) \geqslant f(x) \geqslant f(2) = -1$$

für alle $x \in D$. Damit haben wir $f([-1, 2]) \subseteq [-1, -\frac{1}{4}]$. Sei umgekehrt $y \in [-1, -\frac{1}{4}]$. Es gilt $f(x) = y \Leftrightarrow x = \frac{1}{y} + 3$. Da $y \to \frac{1}{y} + 3$ auf $(-\infty, 0)$ monoton fällt, folgt

$$-1 = \frac{1}{-\frac{1}{4}} + 3 \leqslant \frac{1}{y} + 3 \leqslant \frac{1}{-1} + 3 = 2,$$

also $x \in [-1, 2]$. Damit ist $f(x) = y$ und somit $f([-1, 2]) = [-1, -\frac{1}{4}]$.

c) Die Funktion f ist auf $(-4,-1]$ streng monoton fallend, das heißt es gilt $10 = f(-4) > f(x) \geqslant f(-1) = 1$. Es folgt $f((-4,1]) \subseteq [1,10)$. Sei umgekehrt $y \in [1,10)$. Für $y = 1$ hat man $f(-1) = 1 = y$. Sei also $y \in (1,10)$. Wir machen den Ansatz

$$y = f(x) = x^2 + 2x + 2 = (x+1)^2 + 1.$$

Wegen $y \geqslant 1$ hat die obige quadratische Gleichung in x über $\mathbb{R}$ die beiden Lösungen $x_1 = -1 - \sqrt{y-1}$ und $x_2 = -1 + \sqrt{y-1}$. Wegen $0 < y-1 < 9$ hat man aufgrund der strengen Monotonie von $x \mapsto \sqrt{x}$ dann $-4 = -1 - \sqrt{10-1} < x_1 < -1 - \sqrt{1-1} = -1$, also $x_1 \in (-4,-1]$. Es gilt $f(x_1) = y$. Im Übrigen gilt $x_2 \notin (-4,-1]$. Insgesamt haben wir damit $f((-4,1]) = [1,10)$ gezeigt.

d) Die Funktion ist auf dem Bereich $[-1,0]$ streng monoton wachsend und auf $[0,1]$ streng monoton fallend mit $f(-1) = f(1) = 0$ und $f(0) = 1$. Es folgt $f([-1,1]) \subseteq [0,1]$. Sei $y \in [0,1]$. Der Ansatz $y = \sqrt{1-x^2}$ liefert die notwendige Bedingung $y^2 = 1 - x^2$. Dies ist eine quadratische Gleichung in x, welche wegen $0 \leqslant y \leqslant 1$ die beiden Lösungen $x_{1,2} = \pm\sqrt{1-y^2} \in [-1,1]$ hat. Eine Probe zeigt

$$f(x_{1,2}) = \sqrt{1 - \sqrt{1-y^2}^2} = \sqrt{y^2} = |y| = y,$$

da $y \geqslant 0$. Ingesamt haben wir damit $f([-1,1]) = [0,1]$ gezeigt.

e) Es gilt zunächst

$$0 < \frac{1}{1+x^2} \leqslant 1$$

für alle $x \in \mathbb{R}$, wobei Gleichheit genau für $x = 0$ besteht. Es folgt damit zunächst $f(\mathbb{R}) \subseteq (0,1]$. Sei nun umgekehrt $y \in (0,1)$. Der Ansatz $y = f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ ist äquivalent zu $x^2 = \frac{1}{y} - 1$. Aus $y \in (0,1)$ folgt $\frac{1}{y} > 1$, das heißt die Lösungen dieser quadratischen Gleichung sind $x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{1}{y} - 1}$ und es gilt $f(x_{1,2}) = y$. Damit haben wir $f(\mathbb{R}) = (0,1]$ gezeigt.

f) Wir betrachten zunächst $h : (-1,1) \to \mathbb{R},\ h(x) = \sqrt{1-x^2}$. Es gilt $h(x) = 0$ genau dann, wenn $x = \pm 1$. Mit d) erhält man also $h((-1,1)) = (0,1]$. Wir betrachten jetzt $g : (0,1] \to \mathbb{R},\ g(x) = \frac{1}{x}$. Wie in Teil a) schließt man $g((0,1]) = [1,\infty)$. Nun ist aber $f = g \circ h$, also $f((-1,1)) = g(h((-1,1))) = g((0,1]) = [1,\infty)$.

g) Wir betrachten zunächst wieder $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = x^2 - 7x + 12$ und bestimmen $g((4,5])$. Nach Aufgabe 11 h) ist g streng monoton wachsend auf $(4,5]$, das heißt

$$0 = g(4) < g(x) \leqslant g(5) = 2 \text{ für alle } x \in (4,5]$$

und damit $g((4,5]) \subseteq (0,2]$. Sei nun also umgekehrt $y \in (0,2]$. Der Ansatz $y = g(x) = \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$ liefert eine quadratische Gleichung in x mit den beiden Lösungen $x_{1,2} = \frac{7}{2} \pm \sqrt{y + \frac{1}{4}}$. Wegen der strengen Monotonie von $y \mapsto \sqrt{y}$ folgt

$$4 = \frac{7}{2} + \sqrt{0 + \frac{1}{4}} < x_1 = \frac{7}{2} + \sqrt{y + \frac{1}{4}} \leqslant \frac{7}{2} + \sqrt{2 + \frac{1}{4}} = 5$$

und damit $x_1 \in (4,5]$. Wegen $g(x_1) = y$ folgt insgesamt $g((4,5]) = (0,2]$. Abschließend betrachten wir nun $h : (0,2] \to \mathbb{R}$, $h(x) = \frac{1}{x}$. Man zeigt leicht, dass $h((0,2]) = [\frac{1}{2}, \infty)$. Für $f = h \circ g$ gilt folglich $f((4,5]) = h((0,2]) = [\frac{1}{2}, \infty)$.

— Stetigkeit —

Aufgabe 14

Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf Stetigkeit in den angegebenen Punkten.

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2|x|$ in $x_0 = 0$.

b)

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

in $x_0 = 0$.

c)

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-2x+1}{x-1}, & x \neq 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$$

in $x_0 = 1$.

d)

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & x \geqslant 0 \\ \sqrt{1-x}, & x < 0 \end{cases}$$

in $x_0 = 0$.

Lösung:

a) Es gilt

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} 2|x| = \lim_{x\to 0+} 2x = 0 \text{ und } \lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-} 2|x| = \lim_{x\to 0-} -2x = 0.$$

Also ist f stetig in $x_0 = 0$.

b) Es gilt

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} \frac{1}{x} = \infty.$$

Also ist f unstetig in $x_0 = 0$.

c) Es gilt

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 1} = \frac{(x-1)^2}{x-1} = x - 1$$

für alle $x \in \mathbb{R}, x \neq 1$. Wegen $f(1) = 0 = 1 - 1$ folgt dann $f(x) = x - 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Also ist f stetig in $x_0 = 1$.

d) Es gilt

$$\lim_{x \to 0+} f(x) = \lim_{x \to 0+} \sqrt{x} = 0 \text{ und } \lim_{x \to 0-} f(x) = \lim_{x \to 0-} \sqrt{1-x} = \sqrt{1} = 1.$$

Also ist f unstetig in $x_0 = 0$.

Aufgabe 15

Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf Stetigkeit in ihrem Definitionsbereich.

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x + 4$

b) $f : \mathbb{R} \setminus \{4\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{x^2 - 16}{x - 4}$

c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} x + 4, & -\infty < x \leqslant 4 \\ x + 6, & 4 < x < \infty \end{cases}$

d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 16}{x - 4}, & x \neq 4 \\ 10, & x = 4 \end{cases}$

Lösung:

a) Als lineares Polynom ist f stetig.

b) Als rationale Funktion auf ihrem Definitionsbereich ist f stetig.

c) Als lineare Funktion auf den Bereichen $(-\infty, 4)$ und $(4, \infty)$ ist f dort stetig. Wir betrachten also $x_0 = 4$. Es gilt

$$\lim_{x \to 4+} f(x) = \lim_{x \to 4+} x + 6 = 4 + 6 = 10 \neq 8 = f(4).$$

Damit ist f unstetig in $x_0 = 4$.

d) Als rationale Funktion ist f stetig auf $\mathbb{R} \setminus \{4\}$. Wir betrachten also $x_0 = 4$. Es gilt

$$\lim_{x \to 4} f(x) = \lim_{x \to 4} \frac{x^2 - 16}{x - 4} = \lim_{x \to 4} x + 4 = 8 \neq 10 = f(4).$$

Damit ist f unstetig in $x_0 = 4$.

Aufgabe 16

Bestimmen Sie alle $\alpha \in \mathbb{R}$, sodass

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} x^2 + \alpha \cdot x, & x \geq 1 \\ \sqrt{x}, & x < 1 \end{cases}$$

stetig in $x_0 = 1$ ist.

Lösung:

Es gilt

$$\lim_{x \to 1+} f(x) = \lim_{x \to 1+} x^2 + \alpha x = 1^2 + \alpha \cdot 1 = 1 + \alpha = f(1)$$

und

$$\lim_{x \to 1-} f(x) = \lim_{x \to 1-} \sqrt{x} = 1.$$

Damit f stetig in $x_0 = 1$ ist, muss gelten $1 + \alpha = 1$, also $\alpha = 0$.

— Differenzierbarkeit —

Aufgabe 17

Untersuchen Sie die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto |x^2 - 1|$$

auf Differenzierbarkeit.

Lösung:

Falls $x^2 > 1$, also $x \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1]$, so gilt $f(x) = x^2 - 1$. Falls $x^2 < 1$, also $x \in (-1, 1)$, so gilt $f(x) = 1 - x^2$. In beiden Fällen ist f ein Polynom und damit differenzierbar. Es bleiben die Randpunkte $x_0 = 1$ und $x_0 = -1$ zu untersuchen. Für $x > 1$ gilt

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{x^2 - 1 - 0}{x - 1} = x + 1 \overset{x \to 1+}{\longrightarrow} 2.$$

Sei nun $0 < x < 1$. Dann ist

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{1 - x^2 - 0}{x - 1} = -x - 1 \overset{x \to 1-}{\longrightarrow} = -2.$$

Also ist f in $x_0 = 1$ nicht differenzierbar. Genauso zeigt man, dass f auch in $x_0 = -1$ nicht differenzierbar ist.

Aufgabe 18

Untersuchen Sie die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x|x|$$

auf Differenzierbarkeit im Nullpunkt. Bestimmen Sie gegebenenfalls $f'(0)$.

Lösung:
Wir bestimmen wieder den Differenzenquotienten. Für $x > 0$ gilt

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x \cdot x - 0}{x - 0} = x \xrightarrow{x \to 0+} 0.$$

Für $x < 0$ gilt

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x \cdot (-x) - 0}{x - 0} = -x \xrightarrow{x \to 0-} 0.$$

Damit ist f in $x_0 = 0$ differenzierbar mit $f'(0) = 0$.

— Differentialrechnung —

Aufgabe 19

Zeigen Sie durch vollständige Induktion und mit Hilfe der Definition der Ableitung, dass für die Funktionen $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^n$ gilt:

$$f_n'(x) = nx^{n-1}.$$

Hinweis: Produktregel.

Lösung:
(1) Induktionsanfang: Für $n = 1$ gilt für jede Folge (x_n) mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, dass

$$f_1'(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{f_1(x_n) - f_1(x)}{x_n - x} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x}{x_n - x} = \lim_{n\to\infty} 1 = 1,$$

also ist $f'(x) = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$. (2) Induktionsschluss: Sei die Aussage für $n - 1$ bewiesen. Dann ist nach der Produktregel

$$f_n'(x) = (f_1 \cdot f_{n-1})' = f_1' \cdot f_{n-1} + f_1 \cdot f_{n-1}' = 1 \cdot x^{n-1} + x \cdot (n-1)x^{n-2} = nx^{n-1}.$$

Damit ist die Behauptung bewiesen.

Aufgabe 20

Bestimmen Sie jeweils die Ableitung f' der Funktionen f, welche auf geeigneten Definitionsbereichen durch folgende Abbildungsvorschriften gegeben sind:

a) $f(x) = 5x^3 + 7x^2 - 4x + 9$,

b) $f(x) = \frac{1}{3}x^6 + x + \sqrt{x}$,

c) $f(x) = 4x^4 - \sqrt{4x}$,

d) $f(x) = 8x^2 - x + 2 + 6\sqrt[3]{x^4}$,

e) $f(x) = \frac{1}{2}x^{-2} + 2x^{-3} - 3x^{-4}$,

f) $f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^5}}$,

g) $f(x) = e^x \cdot x^2 + 3x^5$,

h) $f(x) = 4x^4 \cdot 4^x$,

i) $f(x) = 2x \cdot \ln(x) + \ln(x^3)$,

j) $f(x) = 3x^4 \cdot \sin(x)$,

k) $f(x) = (e^{-x} + 4^x)^2$,

l) $f(x) = \ln(x)^2 \cdot e^x$,

m) $f(x) = \frac{3x^2 + 4}{2x}$,

n) $f(x) = \frac{1}{2 + \sqrt{x}}$,

o) $f(x) = \frac{7x^2 + 3x + 1}{x^2 + x}$,

p) $f(x) = (5x - 3)^5$

q) $f(x) = \left(3x^4 - \frac{2}{x} + 7\right)^4$,

r) $f(x) = \sqrt[3]{(2x^3 + 3x)^5}$.

Lösung:

a) $f'(x) = 15x^2 + 14x - 4$,

b) $f'(x) = 2x^5 + 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$,

c) $f'(x) = 16x^3 - \frac{1}{\sqrt{x}}$,

d) $f'(x) = 16x - 1 + 8\sqrt[3]{x}$,

e) $f'(x) = -x^{-3} - 6x^{-4} + 12x^{-5}$,

f) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x^3}} - \frac{5}{3\sqrt[3]{x^8}}$,

g) $f'(x) = e^x x(x + 2) + 15x^4$,

h) $f'(x) = 4x^3 \cdot 4^x \cdot (4 + x\ln(4))$,

i) $f'(x) = 2\ln(x) + 2 + \frac{3}{x}$,

j) $f'(x) = 3x^3(4\sin(x) + x\cos(x))$,

k) $f'(x) = -2e^{-2x} + 2\ln(4)16^x + 2\left(\frac{4}{e}\right)^x(\ln(4) - 1)$,

l) $f'(x) = e^x \ln(x)\left(\frac{2}{x} + \ln(x)\right)$,

m) $f'(x) = \frac{3}{2} - \frac{2}{x^2}$,

n) $f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x}(2 + \sqrt{x})^2}$,

o) $f'(x) = \frac{4x^2 - 2x - 1}{(x^2 + x)^2}$,

p) $f'(x) = 25(5x - 3)^4$,

q) $f'(x) = \left(48x^3 + \frac{8}{x^2}\right)\left(3x^4 - \frac{2}{x} + 7\right)^3$,

r) $f'(x) = (10x^2 + 5)\sqrt[3]{(2x^3 + 3x)^2}$.

Aufgabe 21

Bestimmen Sie zunächst die Definitionsbereiche der Funktionen f, welche durch die folgenden Abbildungsvorschriften gegeben sind. Bestimmen Sie im Anschluss f'.

a) $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2+1}$, b) $f(x) = \dfrac{3x+2}{(x^2-4)^3}$, c) $f(x) = \dfrac{2x-1}{(x^2-4x+3)^2}$.

Lösung:

a) Es ist $D(f) = \mathbb{R}$ und

$$f'(x) = \frac{-x^2+2x+1}{(x^2+1)^2}.$$

b) Es ist $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{\pm 2\}$ und

$$f'(x) = \frac{-15x^2-12x-12}{(x^2-4)^4}.$$

c) Es ist $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1,3\}$ und

$$f'(x) = \frac{-2(3x^2-6x+1)}{(x^2-4x+3)^3}.$$

Aufgabe 22

Bestimmen Sie die maximalen Definitionsbereiche der Funktionen f, welche durch die folgenden Abbildungsvorschriften gegeben sind. Bestimmen Sie in jedem Punkt, in welchem f differenzierbar ist, die Ableitung. (Randpunkte des Definitionsbereichs sind dabei zu vernachlässigen.)

a) $f(x) = \sqrt[3]{x^3+4x-5}$, b) $\sqrt{x+\sqrt[4]{x}+\sqrt[5]{x}}$, c) $f(x) = \cos\big(\tan(1+x^2)\big)$.

Lösung:

a) Zunächst gilt $x^3+4x-5 = (x^2+x+5)(x-1)$. Die erste Faktor ist für alle $x \in \mathbb{R}$ positiv, der zweite genau für $x \geqslant 1$. Also ist $D(f) = [1,\infty)$. Weiter ist f ist als Komposition differenzierbarer Funktionen auf $(1,\infty)$ differenzierbar mit

$$f'(x) = \frac{1}{3}\left(x^3+4x+5\right)^{-\frac{2}{3}}(3x^2+4).$$

b) Es gilt $D(f) = [0,\infty)$ und f ist als Komposition differenzierbarer Funktionen auf $(0,\infty)$ differenzierbar mit

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(x+\sqrt[4]{x}+\sqrt[5]{x}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(1+\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}+\frac{1}{5}x^{-\frac{4}{5}}\right).$$

c) Es gilt $D(\tan) = \mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2}+\mathbb{Z}\pi\right)$, sowie

$$1+x^2 = \frac{\pi}{2}+k\pi \iff x = \pm\sqrt{\frac{\pi}{2}+k\pi-1}, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Damit ist

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \bigcup_{k \in \mathbb{N}_0} \left\{ \pm\sqrt{\frac{\pi}{2} + k\pi - 1} \right\}.$$

Die Ableitung bestimmt sich zu

$$f'(x) = -\sin(\tan(1+x^2))\frac{2x}{\cos^2(1+x^2)}.$$

— Integralrechnung —

Aufgabe 23

Bestimmen Sie ohne Rechnung und nur mit der Definition des bestimmten Integrals

$$\int_{-1}^{3}(6x+1)dx, \quad \int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}dx,$$
$$\int_{-4}^{4}||x|-2|dx.$$

Lösung:

Das Integral ist die Fläche zwischen dem Graph der Funktion und der x-Achse, wobei Fläche unter der x-Achse negativ gezählt wird. (Hinweis: Es hilft den Graph der Funktionen zu skizzieren.) a) Das erste Integral ist die Differenz der Flächen der beiden Dreiecke (Nullstelle der Funktion ist bei $x = -\frac{1}{6}$) $19 \cdot 19/12 - 5 \cdot 5/12 = 28$. b) Das zweite Integral ist die Fläche eines Halbkreises vom Radius 2, also $\pi 2^2/2 = 2\pi$. c) Die Fläche besteht aus vier Dreiecken, die zusammen ein Quadrat der Kantenlänge $2\sqrt{2}$ ergeben. Damit ist das Integral gleich $(2\sqrt{2})^2 = 8$.

Aufgabe 24

Bestimmen Sie jeweils eine Stammfunktion F der Funktionen f, welche durch folgende Abbildungsvorschriften gegeben sind.

a) $f(x) = 4x^3 + 3x + 1$, b) $f(x) = \sqrt[5]{x^3}$, c) $f(x) = 2e^x$,

d) $f(x) = \frac{1}{4\sqrt[4]{x}}$, e) $f(x) = 5x^4 + 4 + \frac{6}{x}$, f) $f(x) = \frac{2x+3}{\sqrt{x}}$,

g) $f(x) = (x-2)^2$, h) $f(x) = 4^x$.

Lösung:

a) $F(x) = x^4 + \frac{3}{2}x^2 + x$, b) $F(x) = \frac{5}{8}x\sqrt[5]{x^3}$, c) $F(x) = 2e^x$,

d) $F(x) = \frac{1}{3}\sqrt[4]{x^3}$, e) $F(x) = x^5 + 4x + 6\ln|x|$, f) $F(x) = \frac{4}{3}x\sqrt{x} + 6\sqrt{x}$,

g) $F(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 4x$, h) $F(x) = \frac{4^x}{\ln(4)}$.

Aufgabe 25

Bestimmen Sie:

a) $\int\limits_0^2 (3x+1)^2 \, dx$, b) $\int\limits_1^4 (\sqrt{x}+x) \, dx$, c) $\int\limits_0^1 (2-x) \, dx + \int\limits_0^1 2(x-1) \, dx$,

d) $\int\limits_0^1 x^4 \, dx - \int\limits_3^1 x^4 \, dx + \int\limits_3^5 x^4 \, dx$, e) $\int\limits_1^4 x(x^2+x) \, dx + \int\limits_4^7 (x^3+x^2) \, dx - \int\limits_1^7 (x^3+x^2) \, dx$,

f) $\int\limits_1^2 \left(\frac{1}{x^4}+\frac{1}{x^5}\right) dx$, g) $\int\limits_1^4 5\sqrt[4]{x} \, dx$, h) $\int\limits_{-1}^1 \left(e^{\frac{x}{3}}+3x^2\right) dx$,

i) $\int\limits_0^1 5^x \, dx$, j) $\int\limits_{-3}^{-1} \frac{4}{x} \, dx$.

Lösung:

a) 38, b) $\frac{73}{6}$, c) $\frac{1}{2}$, d) 625, e) 0,

f) $\frac{101}{192}$, g) $16\sqrt{2}-4$, h) $3\left(\sqrt[3]{e}-\frac{1}{\sqrt[3]{e}}\right)+2$, i) $\frac{4}{\ln(5)}$, j) $-4\ln(3)$.

Aufgabe 26

Bestimmen Sie mit Hilfe der Substitutionsmethode jeweils eine Stammfunktion F der Funktionen f, welche durch folgende Abbildungsvorschriften gegeben sind.

a) $f(x) = (2x+3)^3$, b) $f(x) = \frac{2e^x}{3+2e^x}$, c) $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2+3}}$,

d) $f(x) = \frac{9x^2+1}{x(3x^2+1)}$, e) $f(x) = \frac{3}{3x\ln(x)+2x}$, f) $f(x) = \frac{1}{(x+2)\ln(x+2)}$.

Lösung:

a) $\varphi(t) = 2t+3$ und $F(x) = \frac{1}{8}(2x+3)^4$, $D_f = \mathbb{R}$,

b) $\varphi(t) = 3+2e^t$ und $F(x) = \ln(3+2e^x)$, $D_f = \mathbb{R}$,

c) $\varphi(t) = t^2+3$ und $F(x) = 2\sqrt{x^2+3}$, $D_f = \mathbb{R}$,

d) $\varphi(t) = t(3t^2+1)$ und $F(x) = \ln(|3x^3+x|)$, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

e) $\varphi(t) = 3\ln(t)+2$ und $F(x) = \ln(|3\ln(x)+2|)$, $D_f = (0,\infty)$,

f) $\varphi(t) = \ln(t+2)$ und $F(x) = \ln(|\ln(x+2)|)$, $D_f = (-2,\infty)$.

Aufgabe 27

Bestimmen Sie den Wert I der folgenden Integrale mit Hilfe der Substitutionsmethode.

a) $\int\limits_0^1 (2x+3)^4 \,\mathrm{d}x$, b) $\int\limits_0^1 (1+x^3)^2 \cdot 3x^2 \,\mathrm{d}x$, c) $\int\limits_3^5 \frac{2x+4}{x^2+4x} \,\mathrm{d}x$,

d) $\int\limits_2^{10} \frac{x}{\sqrt{2x+5}} \,\mathrm{d}x$, e) $\int\limits_0^1 (6x+5) \cdot e^{3x^2+5x} \,\mathrm{d}x$, f) $\int\limits_{-4}^{12} 4x\sqrt[4]{x+4} \,\mathrm{d}x$.

Lösung:

a) $\varphi(t) = 2t+3,\ I = \frac{2882}{10}$, b) $\varphi(t) = 1+t^3,\ I = \frac{7}{3}$, c) $\varphi(t) = t^2+4t,\ I = \ln\frac{15}{7}$,

d) $\varphi(t) = 2t+5,\ I = \frac{34}{3}$, e) $\varphi(t) = 3t^2+5t,\ I = e^8-1$, f) $\varphi(t) = t+4,\ I = \frac{22528}{45}$.

Aufgabe 28

Bestimmen Sie mit Hilfe der partiellen Integration jeweils eine Stammfunktion F der Funktionen f, welche durch folgende Abbildungsvorschriften gegeben sind.

a) $f(x) = x \cdot e^x$, b) $f(x) = e^x(x^2+3x)$, c) $f(x) = \ln(x)$,

d) $f(x) = x^2 \cdot \ln(x)$, e) $f(x) = \log_2(x)$, f) $f(x) = \ln(x)^2$.

Lösung:

a) $f(x) = x,\ g'(x) = e^x,\ F(x) = (x-1)e^x$,

b) $f(x) = x^2+3x,\ g'(x) = e^x,\ F(x) = e^x\left(x^2+x-1\right)$,

c) $f(x) = \ln(x),\ g'(x) = 1,\ F(x) = x(\ln(x)-1)$,

d) $f(x) = \ln(x),\ g'(x) = x^2,\ F(x) = \frac{x^3}{9}(3\ln(x)-1)$,

e) $f(x) = \log_2(x),\ g(x) = 1,\ F(x) = \frac{x}{\ln(2)}(\ln(x)-1)$,

f) $f(x) = \ln(x),\ g'(x) = \ln(x),\ F(x) = x\ln(x)^2 - 2x\ln(x) + 2x$.

Aufgabe 29

Bestimmen Sie die folgenden Integrale unter Benutzung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung.

a) $\displaystyle\int_0^{1/\sqrt{7}} \frac{1}{3+7x^2}\,\mathrm{d}x$, b) $\displaystyle\int_0^{2/\sqrt{3}} \frac{1}{4+9x^2}\,\mathrm{d}x$, c) $\displaystyle\int_6^{11} \frac{1}{x^2-2x-15}\,\mathrm{d}x$,

d) $\displaystyle\int_{-8}^{-4} \frac{1}{x^2-2x-15}\,\mathrm{d}x$, e) $\displaystyle\int_2^{3} \frac{1}{4x^2-5x+1}\,\mathrm{d}x$, f) $\displaystyle\int_2^{3} \frac{8x-5}{4x^2-5x+1}\,\mathrm{d}x$,

g) $\displaystyle\int_0^{2\pi/3} \frac{\sin(x)}{2+3\cos(x)}\,\mathrm{d}x$, h) $\displaystyle\int_0^{\pi/6} \frac{\cos(x)}{3+4\sin(x)}\,\mathrm{d}x$.

Lösung:

a)

$$\int_0^{1/\sqrt{7}} \frac{1}{3+7x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int_0^{1/\sqrt{7}} \frac{1}{1+\frac{7}{3}x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\left[\sqrt{\frac{3}{7}}\arctan\left(\sqrt{\frac{7}{3}}x\right)\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{7}}} = \frac{\pi}{6\sqrt{21}}.$$

b)

$$\int_0^{2/\sqrt{3}} \frac{1}{4+9x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int_0^{2/\sqrt{3}} \frac{1}{1+\frac{9}{4}x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\left[\frac{2}{3}\arctan\left(\frac{3}{2}x\right)\right]_0^{2/\sqrt{3}} = \frac{\pi}{18}.$$

c) Es gilt $x^2-2x-15=(x+3)(x-5)$. Damit erhalten wir die Partialbruchzerlegung

$$\frac{1}{(x+3)(x-5)} = \frac{-1}{8(x+3)} + \frac{1}{8(x-5)}.$$

Es folgt

$$\begin{aligned}\int_6^{11} \frac{1}{x^2-2x-15}\,\mathrm{d}x &= -\frac{1}{8}\int_6^{11}\frac{1}{x+3}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{8}\int_6^{11}\frac{1}{x-5}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{8}\left(\ln(6)-\ln(14)+\ln(9)\right) = \frac{1}{8}\left(3\ln(3)-\ln(7)\right).\end{aligned}$$

d)

$$\int_{-8}^{-4} \frac{1}{x^2-2x-15}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{8}\left(\ln(13)-\ln(5)-2\ln(3)\right).$$

e) Es gilt $4x^2-5x+1=(x-1)(4x-1)$. Damit erhalten wir die Partialbruchzerlegung

$$\frac{1}{4x^2-5x+1} = \frac{1}{3(x-1)} - \frac{4}{3(4x-1)}.$$

Es folgt

$$\int_2^{3} \frac{1}{4x^2-5x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\left(\ln(2)-\ln(11)+\ln(7)\right).$$

f) Aus $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(4x^2-5x+1\right)=8x-5$ folgt mit der Substitutionsmethode

$$\int_2^3 \frac{8x-5}{4x^2-5x+1}\,\mathrm{d}x = \Big[\ln(4x^2-5x+1)\Big]_2^3 = \ln(22)-\ln(7).$$

g) Aus $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(2+3\cos(x)\right)=-3\sin(x)$ folgt mit der Substitutionsmethode

$$\int_0^{2\pi/3} \frac{\sin(x)}{2+3\cos(x)}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{3}\Big[\ln(2+3\cos(x))\Big]_0^{2\pi/3} = \frac{1}{3}\left(\ln(2)+\ln(5)\right).$$

h) Aus $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(3+4\sin(x)\right)=4\cos(x)$ folgt mit der Substitutionsmethode

$$\int_0^{\pi/6} \frac{\cos(x)}{3+4\sin(x)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\Big[\ln(3+4\sin(x))\Big]_0^{\pi/6} = \frac{1}{4}(\ln(5)-\ln(3)).$$

Aufgabe 30

Bestimmen Sie mit Hilfe partieller Integration die folgenden Integrale.

a) $\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/4} \cos(x)\ln(\sin(x))\,\mathrm{d}x,$ b) $\displaystyle\int_0^{\pi} x^2\sin(x)\,\mathrm{d}x,$

c) $\displaystyle\int_0^1 x^5\ln(x^3+1)\,\mathrm{d}x,$ d) $\displaystyle\int_0^1 x^3e^{2x}\,\mathrm{d}x.$

Lösung:

a) Aus $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin(x)=\cos(x)$ folgt mit partieller Integration

$$\begin{aligned}\int_{\pi/6}^{\pi/4} \cos(x)\ln(\sin(x))\,\mathrm{d}x &= \Big[\sin(x)\ln(\sin(x))\Big]_{\pi/6}^{\pi/4} - \int_{\pi/6}^{\pi/4}\sin(x)\frac{\cos(x)}{\sin(x)}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}} - \Big[-\sin(x)\Big]_{\pi/6}^{\pi/4} = \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}-1}{2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

b) Aus $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos(x)=-\sin(x)$ folgt mit partieller Integration

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} x^2\sin(x)\,\mathrm{d}x &= \Big[-x^2\cos(x)\Big]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} 2x\cos(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \pi^2 + 2\Big[x\sin(x)\Big]_0^{\pi} - 2\int_0^{\pi}\sin(x)\,\mathrm{d}x = \pi^2-4.\end{aligned}$$

c)

$$\int_0^1 x^5 \ln(x^3+1)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{3}x^3 \cdot 3x^2 \ln(x^3+1)\,\mathrm{d}x$$

$$= \left[\frac{1}{3}\Big((x^3+1)\ln(x^3+1) - (x^3+1)\Big)\right]_0^1 - \int_0^1 x^2(x^3+1)\ln(x^3+1) - x^2(x^3+1)\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{3}(2\ln(2)-2) - \int_0^1 x^5\ln(x^3+1)\,\mathrm{d}x - \int_0^1 x^2\ln(x^3+1)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 x^5 + x^2\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{3}(2\ln(2)-2) - \int_0^1 x^5\ln(x^3+1)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{3}(2\ln(2)-2) - \frac{1}{3} + \frac{1}{2}.$$

Es folgt

$$\int_0^1 x^5 \ln(x^3+1)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{12}.$$

d)

$$\int_0^1 x^3\, e^{2x}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}x^3e^{2x}\right]_0^1 - \int_0^1 3x^2 \cdot \frac{1}{2}e^{2x}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}e^2 - \frac{3}{2}\int_0^1 x^2\, e^{2x}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}e^2 - \frac{3}{2}\left[\frac{1}{2}x^2e^{2x}\right]_0^1 + \frac{3}{2}\int_0^1 2x \cdot \frac{1}{2}e^{2x}\,\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{1}{4}e^2 + \frac{3}{2}\left[\frac{1}{2}xe^{2x}\right]_0^1 - \frac{3}{2}\int_0^1 \frac{1}{2}e^{2x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{8}(e^2+3).$$

— Extremwerte —

Aufgabe 31

Bestimmen Sie jeweils, ob die angegebenen Mengen beschränkt sind. Geben Sie – falls diese existieren – auch die Maxima und Minima der Mengen an.

a) $[0,1]$,	b) $(0,1)$,	c) $\{2,7\}$,	d) $\{\pi, e\}$
e) $\left\{1+\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$,	f) $\{0\}$,	g) $[0,1] \cup [2,3]$,	h) $\{r \in \mathbb{Q} : r < 2\}$
i) $\{r \in \mathbb{Q} : r^2 < 4\}$,	j) $\{r \in \mathbb{Q} : r^2 < 2\}$,	k) $\left\{1, \frac{\pi}{3}, \pi^2, 10\right\}$	l) $\{p : p$ Primzahl$\}$,
m) $\{(-1)^n n : n \in \mathbb{N}\}$,	n) $\{x^2+1 : x \in \mathbb{R}\}$,	o) $\{x \in \mathbb{R} : x^2 = -2x\}$,	p) $\{3^{-n} : n \in \mathbb{N}\}$.

Lösung:

a) beschränkt, 0 (min), 1 (max),	b) beschränkt,	c) beschränkt 2 (min), 7 (max),	d) beschränkt, e (min), π (max),
e) beschränkt, 2 (max),	f) beschränkt, 0 (min), 0 (max),	g) beschränkt, 0 (min), 3 (max),	h) unbeschränkt
i) beschränkt,	j) beschränkt,	k) beschränkt, 1 (min), 10 (max),	l) 2 (min), n. o. unb.,
m) unbeschränkt,	n) unbeschränkt, 1 (min)	o) beschränkt -2 (min), 0 (max),	p) $beschrnkt,$ $\frac{1}{3}$ (max).

Aufgabe 32

Seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Hat die Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, $f(x) = cx + d$ (in Abhängigkeit der Wahl von c und d) ein Minimum? Wenn ja, wo befindet sich das Minimum?
Hinweis: Eine Fallunterscheidung wird hilfreich sein.

Lösung:
f ist eine Polnom ersten Grades (lineare Funktion) und damit stetig differenzierbar.

1. Fall: Es sei $c = 0$. Dann ist f konstant ($f(x) = d$ für alle $x \in [a,b]$). Damit ist jeder Punkt $x \in [a,b]$ ein Minimum.

2. Fall: Es sei $c \neq 0$. Dann unterscheiden wir weiter nach dem Vorzeichen von c.
   - Sei $c > 0$: Da $f'(x) = c > 0$ für alle $x \in [a,b]$ ist f (streng) monoton wachsend. Damit gilt dann, dass bei $x = a$ das Minimum vorliegt.
   - Sei $c < 0$: Dann folgt analog $f'(x) < 0$ für alle $x \in [a,b]$, also f (streng) monoton fallend. Damit liegt das Minimum diesmal am rechten Rand, d.h. $x = b$ ist das Minimum.

Aufgabe 33

Betrachten Sie die Funktion $f : [-2, 2] \to \mathbb{R}$, welche gegeben ist durch

$$f(x) := \begin{cases} x+1, & \text{falls } x \leqslant -1 \\ x^2, & \text{falls } -1 < x < 1 \\ x-1, & \text{falls } x \geqslant 1. \end{cases}$$

Untersuchen Sie die Funktion auf lokale und globale Maxima und Minima.

Lösung:

Wir bestimmen zunächst die Monotoniebereiche von f. Für $x \in [-2, -1]$ gilt $f(x) = x + 1$, das heißt f ist streng monoton wachsend. Für $x \in (-1, 1)$ ist $f(x) = x^2$, also ist f streng monoton fallend auf $(-1, 0]$ und streng monoton wachsend auf $[0, 1)$. Für $x \in [1, 2]$ gilt $f(x) = x - 1$, das heißt f ist streng monoton wachsend auf $[1, 2]$. Da sich in lokalen Extrempunkten das Monotonieverhalten ändert, können lokale Extrema höchstens in den Randpunkten der Monotoniebereiche vorliegen, das heißt in $x \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$. Es genügt also diese Punkte zu untersuchen:

- Für $x \in (-1, 2]$ gilt $f(x) \geqslant 0 \geqslant -1 = f(-2)$ und für $x \in [-2, -1]$ gilt $f(x) \geqslant f(-2)$, da f dort streng monoton steigt. Damit liegt in $x = -2$ ein globales Minimum vor.
- Für $x \in [-2, -1]$ gilt $f(x) \leqslant f(-1) = 0 < 1 = f(2)$ und für $x \in (-1, 2]$ gilt $f(x) \leqslant 1 = f(2)$. Damit liegt in $x = 2$ ein globales Maximum vor.
- Für $x \in [-1, 2]$ gilt $f(x) \geqslant 0 = f(1) = f(0)$. Also liegen in $x = 0$ und $x = 1$ lokale Minima vor, welche nicht global sind.
- Für $x \in (-1, 0)$ gilt $f(x) = x^2 > 0 = f(-1)$ und für $x \in [-2, -1)$ hat man $f(x) = x + 1 < 0$. Damit kann in $x = -1$ kein lokales Extremum vorliegen.

Aufgabe 34

Betrachten Sie die Funktion $f : (-2, 2] \to \mathbb{R}$, welche gegeben ist durch

$$f(x) := \begin{cases} x+1, & \text{falls } x < -1 \\ x^2, & \text{falls } -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ x-1, & \text{falls } x > 1. \end{cases}$$

Untersuchen Sie die Funktion auf lokale und globale Maxima und Minima.

Lösung:

Man verfährt analog zu Aufgabe 33. In $x \in \{-1, 1, 2\}$ besitzt f ein globales Maximum. In $x = 0$ besitzt f ein lokales Minimum, welches nicht global ist. Die Funktion f hat kein globales Minimum.

Aufgabe 35

Betrachten Sie die Funktion $f : (-2, 2) \to \mathbb{R}$, welche gegeben ist durch

$$f(x) := \begin{cases} x+1 & \text{falls } x < -1 \\ x^2 & \text{falls } -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ x-1 & \text{falls } x > 1. \end{cases}$$

Untersuchen Sie die Funktion auf lokale und globale Maxima und Minima.

Lösung:

Man verfährt wieder analog zu Aufgabe 33. In $x \in \{-1, 1\}$ besitzt f ein globales Maximum. In $x = 0$ besitzt f ein lokales Minimum, welches nicht global ist. Die Funktion f hat kein globales Minimum.

Aufgabe 36

Bestimmen Sie die lokalen und globalen Maxima und Minima der Funktionen aus Aufgabe 21.

Lösung:

a) Wir bestimmen zunächst die kritischen Punkte in $D(f) = \mathbb{R}$. Es gilt

$$f'(x) = 0 \Longleftrightarrow -x^2 + 2x + 1 = 0 \Longleftrightarrow (x-1)^2 = 2 \Longleftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{2}.$$

Um zu bestimmen, ob es sich dabei um lokale Extrema handelt, bestimmen wir zunächst die Positivitäts- und Negativitätsbereiche von f' zu

$$\begin{aligned} f' &> 0 && \text{auf } (1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}), \\ f' &< 0 && \text{auf } (-\infty, 1-\sqrt{2}) \cup (1+\sqrt{2}, \infty). \end{aligned}$$

Sei zunächst $x_0 = 1 + \sqrt{2}$. Für $\varepsilon > 0$ gilt also

$$f'(1+\sqrt{2}-\varepsilon) > 0 \qquad \text{und} \qquad f'(1+\sqrt{2}+\varepsilon) < 0.$$

Also wechselt f' in x_0 sein Vorzeichen (monoton fallend) und damit hat f in x_0 ein lokales Maximum. Sei $x_1 = 1 - \sqrt{2}$. Für $0 < \varepsilon < 2\sqrt{2}$ gilt

$$f'(1-\sqrt{2}-\varepsilon) < 0 \qquad \text{und} \qquad f'(1-\sqrt{2}+\varepsilon) > 0.$$

Also wechselt f' in x_1 sein Vorzeichen (monoton wachsend) und damit hat f in x_1 ein lokales Minimum. Direktes Ausrechnen liefert

$$f(x_0) = \frac{1}{2}(\sqrt{2}-1) > 0 \quad \text{und} \quad f(x_1) = -\frac{1}{2}(\sqrt{2}+1) < 0.$$

Wegen $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0 = \lim_{x\to-\infty} f(x)$ sind die Extrema sogar global.

b) Es gilt $-15x^2 - 12x - 12 < 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Damit besitzt f keine kritischen Punkte und damit auch keine lokalen Extrema.

c) Wir bestimmen zunächst die kritischen Punkte in $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1, 3\}$. Es gilt

$$f'(x) = \frac{-2(3x^2 - 6x + 1)}{(x^2 - 4x + 3)^3} = 0 \Longleftrightarrow 3x^2 - 6x + 1 = 0 \Longleftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Wir verfahren wie in a) und bestimmen zunächst die Positivitäts- und Negativitätsbereiche von f' zu

$$\begin{aligned} f' < 0 \qquad & \text{auf} \quad \left(-\infty, 1 - \sqrt{\frac{2}{3}}\right) \cup \left(1, 1 + \sqrt{\frac{2}{3}}\right) \cup (3, \infty), \\ f' > 0 \qquad & \text{auf} \quad \left(1 - \sqrt{\frac{2}{3}}, 1\right) \cup \left(1 + \sqrt{\frac{2}{3}}, 3\right). \end{aligned}$$

Setze nun $x_0 = 1 - \sqrt{\frac{2}{3}}$ und $x_1 = 1 + \sqrt{\frac{2}{3}}$. Für $0 < \varepsilon \ll 1$ gilt

$$f'(x_0 - \varepsilon) < 0 \quad \text{und} \quad f'(x_0 + \varepsilon) > 0.$$

Also besitzt f in x_0 ein lokales Minimum. Weiter ist

$$f'(x_1 - \varepsilon) < 0 \quad \text{und} \quad f'(x_1 + \varepsilon) > 0.$$

Also besitzt f auch in x_1 ein lokales Minimum. Desweiteren ist

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{x \to 3} f(x) = \infty.$$

Folglich besitzt f keine globalen Maxima.

Aufgabe 37

Betrachten Sie die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 3x^5 - 25x^3 + 60x - 3.$$

a) Bestimmen Sie die lokalen Maxima und Minima von f.

b) Bestimmen Sie die größten Intervalle, auf denen f streng monoton wachsend ist.

c) Fertigen Sie eine Skizze von f an.

Lösung:

a) Es gilt

$$\begin{aligned} f'(x) &= 15x^4 - 75x^2 + 60, \\ f''(x) &= 60x^3 - 150x, \\ f'''(x) &= 180x^2 - 150. \end{aligned}$$

Wir bestimmen zunächst die kritischen Punkte von f. Es gilt

$$f'(x) = 0 \iff 15x^4 - 75x^2 + 60 = 0 \iff 15(x^4 - 5x^2 + 4) = 0 \iff x \in \{\pm 1, \pm 2\}.$$

Explizit berechnet man

$$f''(1) = -90, \quad f''(-1) = 90, \quad f''(2) = 240, \quad f''(-2) = -240.$$

Damit liegen in $x_0 = -1$ und $x_0 = 2$ lokale Minima, sowie in $x_0 = 1$ und $x_0 = -2$ lokale Maxima vor.

b) Es gilt $f' > 0$ auf $(-\infty, -2) \cup (-1, 1) \cup (2, \infty)$. Die gesuchten Monotonieintervalle sind damit $(-\infty, -2)$ und $(2, \infty)$.

Aufgabe 38

Untersuchen Sie analog zu vorigen Aufgabe die Funktion

$$f : \mathbb{R} \setminus \{-2\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{3x^2(x-2)}{(x+2)}.$$

Hinweis: Die einzige reelle Nullstelle von f'' ist $x_0 = 2\sqrt[3]{2} - 2$.

Lösung:

a) Es gilt

$$f'(x) = 6 \cdot \frac{x \cdot (x^2 + 2x - 4)}{(x+2)^2}.$$

Weiter hat man

$$f(x) = 0 \iff x \in \left\{0, -1 - \sqrt{5}, -1 + \sqrt{5}\right\}.$$

Die Positivitäts- und Negativitätsbereiche von f' bestimmen sich zu

$$\begin{aligned} f' &< 0 \qquad \text{auf } (-\infty, -1-\sqrt{5}) \cup (0, -1+\sqrt{5}), \\ f' &> 0 \qquad \text{auf } (-1-\sqrt{5}, 0) \cup (-1+\sqrt{5}, \infty). \end{aligned}$$

Wie oben sei $0 < \varepsilon \ll 1$. Für $x_0 = 0$ hat man

$$f'(x_0 - \varepsilon) > 0 \quad \text{und} \quad f'(x_0 + \varepsilon) < 0.$$

Damit hat f in $x_0 = 0$ ein lokales Maximum. Für $x_1 = -1 - \sqrt{5}$ gilt

$$f'(x_1 - \varepsilon) < 0 \quad \text{und} \quad f'(x_1 + \varepsilon) > 0.$$

Damit hat f in $x_0 = -1 - \sqrt{5}$ ein lokales Minimum. Für $x_2 = -1 + \sqrt{5}$ gilt

$$f'(x_2 - \varepsilon) < 0 \quad \text{und} \quad f'(x_2 + \varepsilon) > 0.$$

Damit hat f in $x_2 = -1 + \sqrt{5}$ ein lokales Minimum.

b) Die einzige reelle Nullstelle von f'' liegt in $x = 2\sqrt[3]{2} - 2$ vor. Da

$$f''(2\sqrt[3]{2} - 2 - \varepsilon) < 0 \quad \text{und} \quad f''(2\sqrt[3]{2} - 2 + \varepsilon) > 0$$

für ε klein genug, handelt es sich hierbei um einen Wendepunkt.

c) Es ist

$$f' > 0 \quad \text{auf} \quad (-1 - \sqrt{5} - 2) \cup (-2, 0) \cup (-1 + \sqrt{5}, \infty).$$

Damit ist $(-1 + \sqrt{5}, \infty)$ das gesuchte Intervall.

Aufgabe 39

Untersuchen Sie die Funktionen

a) $f : [-2, 3] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 4 - x^2$,

b) $f : [-1, 4] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 7$

auf lokale und globale Maxima und Minima. Bestimmen Sie auch die entsprechenden Extremalwerte.

Lösung:

a) Es gilt $f'(x) = -2x = 0$ genau für $x = 0$. Es gilt $f''(x) = -2 < 0$. Damit liegt in $x_0 = 0$ ein lokales Maximum vor. Es ist $f(-2) = 0$ und $f(3) = -5$. Aus $f(0) = 4$ folgt damit, dass f auf dem Intervall $[-2, 3]$ in $x_0 = 0$ ein globales Maximum und in $x_1 = 3$ ein globales Minimum besitzt.

b) Es ist

$$\begin{aligned} f'(x) &= 5x^4 - 20x^3 + 15x^2 = 5x^2 \left(x^2 - 4x + 3\right) = 5x^2(x-3)(x-1), \\ f''(x) &= 20x^3 - 60x^2 + 30x. \end{aligned}$$

Also sind $x_1 = 0$, $x_2 = 3$ und $x_3 = 1$ die einzigen Nullstellen von f'. Weiterhin gilt

$$f''(1) = -10 < 0, \quad f''(3) = 90 > 0, \quad f''(0) = 0.$$

Im Punkt $x_3 = 1$ besitzt die Funktion also ein lokales Maximum, im Punkt $x_2 = 3$ ein lokales Minimum. Im Punkt $x_1 = 0$ ist keine Aussage möglich, da f' in diesem Punkt keinen Vorzeichenwechsel hat. Schließlich müssen die inneren Extremwerte mit den Randwerten verglichen werden. Man berechnet

$$f(-1) = -4, \quad f(1) = 8, \quad f(3) = -20, \quad f(4) = 71.$$

Damit hat

- f in $x = -1$ ein lokales, aber kein globales Minimum,
- f in $x = 1$ ein lokales, aber kein globales Maximum,

- f in $x = 3$ ein lokales und globales Minimum,
- f in $x = 4$ ein lokales und globales Maximum.

Aufgabe 40

Seien $a \in \mathbb{R}, m, n \in \mathbb{Z}$ mit $m \neq -n$ und $m, n \neq 0$.

a) Zerlegen Sie a so in zwei Summanden, dass deren Produkt möglichst groß wird.

b) Zerlegen Sie a so in zwei Summanden, dass das Produkt der m-ten Potenz des einen Summanden und der n-ten Potenz des anderen Summanden möglichst groß wird.

Lösung:

a) Die beiden Summanden sind $x = y = \frac{a}{2}$.

b) Die beiden Summanden sind $x = \frac{ma}{m+n}$ und $y = \frac{na}{m+n}$.

Aufgabe 41

Die Summe der Kathetenlängen eines rechtwinkligen Dreiecks ergibt k. Wie groß müssen die einzelnen Kathetenlängen gewählt werden, damit die Hypothenusenlänge möglichst klein wird?

Lösung:

Die beiden Katheten müssen die Länge $\frac{k}{2}$ haben.

Aufgabe 42

Der Querschnitt eines Tunnels habe die Form eines Rechtecks mit aufgesetztem Halbkreis. Sein Umfang sei U. Für welchen Halbkreisradius wird der Flächeninhalt des Querschnitts am größten?

Lösung:

Es bezeichne r den Halbkreisradius, a die Höhe des Rechtecks und F die Fläche des Querschnitts. Dann ist

$$U = \pi r + 2a + 2r, \quad \text{also } a = \frac{U - (2+\pi)r}{2}.$$

Für die Fläche erhalten wir

$$F = 2ar + \frac{\pi r^2}{2}.$$

Setzen wir a als Funktion von r ein, so ergibt dies

$$\begin{aligned}
F(r) &= r \cdot (U - (2+\pi)r) + \frac{\pi}{2}r^2 = -\left(2 + \frac{\pi}{2}\right) r^2 + Ur,\\
F'(r) &= -2\left(2 + \frac{\pi}{2}\right) r + U,\\
F''(r) &= -2\left(2 + \frac{\pi}{2}\right).
\end{aligned}$$

Die einzige Nullstelle von F' wird durch $r_0 = \frac{U}{\pi+4}$ gegeben. Wegen $F''(r_0) < 0$ handelt es sich hierbei um ein lokales Maximum. Wegen $\lim_{r\to\infty} F(r) = -\infty$ ist das lokale Maximum sogar global.

— A. Exponentialabbildung und Logarithmus —

Aufgabe 43

Es seien $a, u, v > 0$ und $r \in \mathbb{R}$. Beweisen Sie :

$$\log_a(u^r) = r \log_a(u).$$

Lösung:

Sei $x = \log_a(u)$. Nach Definition ist dann $a^x = u$. Mit den Potenzgesetzen folgt $u^r = (a^x)^r = a^{xr}$, also

$$\log_a(u^r) = rx = r \log_a(u).$$

Aufgabe 44

Bestimmen Sie die folgende Logarithmen.

a) $\log_2(4)$, b) $\log_4(64)$, c) $\log_2\left(\frac{1}{8}\right)$, d) $\log_4(2)$, e) $\log_7(7^x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Lösung:

a) 2, b) 3, c) -3, d) $\dfrac{1}{2}$, e) x.

Aufgabe 45

a) Drücken Sie $2 - \log_3(4)$ als Logarithmus einer einzigen Zahl aus.

b) Vereinfachen Sie

$$\log_2\left(\frac{75}{16}\right) - 2\log_2\left(\frac{5}{9}\right) + \log_2\left(\frac{32}{243}\right).$$

c) Vereinfachen Sie für $a > 0$ den Ausdruck $\dfrac{\log_a(\sqrt{3})}{\log_a(27)}$.

Lösung:

a)

$$2 - \log_3(4) = 2\log_3(3) - \log_3(4) = \log_3(9) - \log_3(4) = \log_3\left(\frac{9}{4}\right)$$

b)

$$\begin{aligned}\log_2\left(\frac{75}{16}\right) - 2\log_2\left(\frac{5}{9}\right) + \log_2\left(\frac{32}{243}\right) &= \log_2\left(\frac{75 \cdot 81 \cdot 32}{16 \cdot 25 \cdot 243}\right)\\ &= \log_2(2) = 1\end{aligned}$$

c)

$$\frac{\log_a(\sqrt{3})}{\log_a(27)} = \frac{\frac{1}{2}\log_a(3)}{3\log_a(3)} = \frac{1}{6}$$

Aufgabe 46

Berechnen Sie noch einmal den Grenzwert aus Aufgabe 4 (j), indem Sie die Identität

$$\frac{n^2}{2^n} = e^{-n\,\ln 2 + 2\,\ln n}$$

(warum ist das richtig?) und die Eigenschaften der Exponentialfunktion benutzen. Hinweis: Sie können ohne Beweis benutzen, dass $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n)}{n} = 0$ ist.

Lösung:
Mit den Logarithmusgesetzen gilt $n^2 = e^{2\ln(n)}$, $2^{-n} = e^{-n\ln(2)}$ und somit

$$\frac{n^2}{2^n} = n^2 2^{-n} = e^{2\ln(n) - n\ln(2)} = e^{-2n(\ln(\sqrt{2}) - \frac{\ln(n)}{n})}.$$

Damit divergiert der Exponent bestimmt mit

$$\lim_{n\to\infty} -2n(\ln(\sqrt{2}) - \frac{\ln(n)}{n} = -\infty$$

und somit ist aufgrund der Existenz des Funktionsgrenzwertes $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$

$$\lim_{n\to\infty} e^{-2n(\ln(\sqrt{2}) - \frac{\ln(n)}{n})} = 0.$$

Aufgabe 47

Bestimmen Sie jeweils Definitionsbereich und Lösungsmenge der folgenden logarithmischen Gleichungen.

a) $\log_2(x) = \log_2(10)$,	b) $\log_{10}(x) = 2\log_{10}(5) - \log_{10}(4)$,	c) $\log_3(x-1) = 2$,
d) $2\ln(3x-3) = 1$,	e) $-\log_4(2x) = \log_4(6)$,	f) $\log_{\sqrt{2}}(x^2-1) = 0$,
g) $\log_{10}(x+1) - \log_{10}(2) = 2$,	h) $\log_2(x) = \log_3(x)$,	i) $\log_{10}(x^2+1) = 1$.

Lösung:
a) Der Definitionsbereich der Gleichung ist $D = \mathbb{R}_{>0}$. Es gilt

$$\log_2(x) = \log_2(10) \Leftrightarrow x = 10.$$

b) Der Definitionsbereich der Gleichung ist $D = \mathbb{R}_{>0}$. Es gilt

$$\log_{10}(x) = 2\log_{10}(5) - \log_{10}(4) \Leftrightarrow \log_{10}(x) = \log_{10}\left(\frac{5^2}{4}\right) \Leftrightarrow x = \frac{25}{4}.$$

c) Der Definitionsbereich der Gleichung ist $D = (1, \infty)$. Es gilt

$$\log_3(x-1) = 2 \Leftrightarrow 3^{\log_3(x-1)} = 3^2 \Leftrightarrow x - 1 = 9 \Leftrightarrow x = 10.$$

d) Der Definitionsbereich der Gleichung ist $D = (1, \infty)$. Es gilt

$$2\ln(3x-3) = 1 \Leftrightarrow \ln(3x-3) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 3x - 3 = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e} \Leftrightarrow x = 1 + \frac{1}{3}\sqrt{e}.$$

e) Der Definitionsbereich der Gleichung ist $(0, \infty)$. Es gilt

$$-\log_4(2x) = \log_4(6) \Leftrightarrow \log_4\left(\frac{1}{2x}\right) = \log_4(6) \Leftrightarrow \frac{1}{2x} = 6 \Leftrightarrow 1 = 12x \Leftrightarrow x = \frac{1}{12}.$$

f) Der Definitionsbereich der Gleichung ist $\mathbb{R} \setminus [-1, 1]$. Es gilt

$$\log_{\sqrt{2}}(x^2-1) = 0 \Leftrightarrow \log_{\sqrt{2}}(x^2-1) = \log_{\sqrt{2}}(1) \Leftrightarrow x^2 - 1 = 1 \Leftrightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}.$$

g) Der Definitionsbereich der Gleichung ist $(-1, \infty)$. Es gilt

$$\log_{10}(x+1) - \log_{10}(2) = 2 \Leftrightarrow \log_{10}\left(\frac{x+1}{2}\right) = 2 \Leftrightarrow \frac{x+1}{2} = 10^2 \Leftrightarrow x = 199.$$

h) Der Definitionsbereich der Gleichung ist $(0, \infty)$. Es gilt

$$\log_2(x) = \log_3(x) \Leftrightarrow \quad \frac{\ln(x)}{\ln(2)} = \frac{\ln(x)}{\ln(3)} \Leftrightarrow \ln(x) = \ln(x)\frac{\ln(2)}{\ln(3)} \Leftrightarrow \ln(x) \cdot \underbrace{\left(1 - \tfrac{\ln(2)}{\ln(3)}\right)}_{\neq 0} = 0,$$

also genau dann, wenn $\ln(x) = 0$, das heißt $x = 1$.

i) Der Definitionsbereich der Gleichung ist $\mathbb{R}$. Es gilt

$$\log_{10}(x^2+1) = 1 \Leftrightarrow x^2 + 1 = 10 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm 3.$$

Aufgabe 48

Bestimmen Sie jeweils den Definitionsbereich der folgenden Terme. Drücken Sie im Anschluss die Terme durch einen Logarithmus aus.

a) $\log_a(x+1) - 3\log_a(1-x) + 2\log_a(x)$,

b) $\log_a\left(\sqrt{x^2-1}\right) + \frac{1}{2}\log_a\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$.

Lösung:

a) Der Definitionsbereich des Ausdrucks ist $(0, 1)$. Es gilt

$$\log_a(x+1) - 3\log_a(1-x) + 2\log_a(x) = \log_a\left(\frac{(x+1)x^2}{(1-x)^3}\right).$$

b) Der Definitionsbereich des Ausdrucks ist $\mathbb{R} \setminus [-1,1]$. Es gilt

$$\begin{aligned}\log_a\left(\sqrt{x^2-1}\right) + \frac{1}{2}\log_a\left(\frac{x+1}{x-1}\right) &= \frac{1}{2}\left(\log_a(x^2-1) + \log_a\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\right)\\ &= \frac{1}{2}\big(\log_a|x-1| + \log_a|x+1| + \log_a|x+1| - \log_a|x-1|\big)\\ &= \log_a|x+1|.\end{aligned}$$

Aufgabe 49

Bestimmen Sie jeweils die Lösungsmenge der folgenden Gleichungssysteme.

a)

$$\left\{\begin{matrix} x-y=1 \\ 2^x\cdot 3^y = 432\end{matrix}\right\},$$

b)

$$\left\{\begin{matrix} \log_{10}(x)+\log_{10}(y)=1 \\ \log_{10}(x)-\log_{10}(y)=\log_{10}\left(\frac{5}{2}\right)\end{matrix}\right\}, \quad x,y>0$$

c)

$$\left\{\begin{matrix} 4^x = 5^y \\ 2\cdot 4^x = 7^y\end{matrix}\right\}.$$

Lösung:

a) Es ist $x = y+1$ und damit

$$2^x\cdot 3^y = 432 \Leftrightarrow 2^{y+1}3^y = 432 \Leftrightarrow 2\cdot 6^y = 432 \Leftrightarrow y = \log_6(216) = \log_6(6^3) = 3.$$

Es folgt $x = y+1 = 4$.

b) Es gilt

$$\begin{aligned}1 = \log_{10}(x)+\log_{10}(y) &= \log_{10}(xy) \Leftrightarrow xy = 10,\\ \log_{10}\left(\frac{5}{2}\right) = \log_{10}(x)-\log_{10}(y) &= \log_{10}\left(\frac{x}{y}\right) \Leftrightarrow \frac{5}{2} = \frac{x}{y} \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}y.\end{aligned}$$

Damit ist das Gleichungssystem äquivalent zu $xy = 10$ und $2x = 5y$. Einsetzen von $x = \frac{10}{y}$ in die zweite Gleichung liefert $20 = 5y^2$, also $y = \pm 2$. Es folgt $x = \pm 5$. Mit Hinblick auf den Definitionsbereich des Gleichungssystems ist damit $(x,y) = (5,2)$ die einzige Lösung.

c) Es gilt

$$7^y = 2 \cdot 4^x = 2 \cdot 2^{2x} = 2^{2x+1} \iff 2x + 1 = \log_2(7^y) = y \log_2(7),$$
$$5^y = 4^x = 2^{2x} \iff 2x = \log_2(5^y) = y \log_2(5).$$

Dies impliziert $y \log_2(7) - 1 = y \log_2(5)$. Wir erhalten daher die Lösung

$$y = \frac{1}{\log_2(7) - \log_2(5)}, \quad x = \frac{\log_2(5)}{2(\log_2(7) - \log_2(5))}.$$

Aufgabe 50

Die Intensität von Röntgenstrahlen nehme bei Durchdringen von Aluminiumplatten von 1mm Stärke um 75% ab. Wie viele 1mm starke Platten werden benötigt, damit nur noch höchstens 1% Röntgenstrahlung hindurch kommt? (Nehmen Sie an, dass das Problem von keinerlei weiteren Faktoren, wie z.B. der Luft zwischen den Platten o.ä., abhängt.)
Hinweis: Sie dürfen einen Taschenrechner benutzen.

Lösung:
Die Intensität nimmt um 75% ab, das heißt nach Durchdringen einer Platte bleiben 25% Reststrahlung. Würde nun noch eine zweite 1mm starke Platte durchdrungen werden, bleiben von den 25% Reststrahlung wieder nur 25% übrig (usw.). Bezeichne nun $x \in \mathbb{N}$ die Anzahl Platten, die benötigt wird, dann können wir unser Problem formulieren als $0,25^x = 0,01$. Wir lösen nach x auf und erhalten

$$0,25^x = 0,01 \Leftrightarrow \log_{0,25}(0,25^x) = \log_{0,25}(0,01) \Leftrightarrow x = \log_{0,25}(0,01) = 3,322.$$

Also werden 4 (oder mehr) Platten benötigt, damit die Strahlung echt geringer als 1% ist.

— Trigonometrische Funktionen —

Aufgabe 51

Beweisen Sie die Additionstheoreme für Tangens und Cotangens. Bestimmen Sie auch den Definitionsbereich der Gleichungen.

a) $\tan(\alpha + \beta) = \dfrac{\tan(\alpha) + \tan(\beta)}{1 - \tan(\alpha)\tan(\beta)}$, b) $\cot(\alpha + \beta) = \dfrac{\cot(\alpha)\cot(\beta) - 1}{\cot(\alpha) + \cot(\beta)}$.

Lösung:

a) Die Gleichung ist definiert für $\alpha, \beta, \alpha+\beta \notin \dfrac{\pi}{2} + \mathbb{Z}\pi$. Mit $\tan(\alpha) = \dfrac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$ folgt

$$\begin{aligned}\tan(\alpha+\beta) &= \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}\\ &= \frac{\sin(\alpha)\cos(\beta)+\sin(\beta)\cos(\alpha)}{\cos(\alpha)\cos(\beta)-\sin(\beta)\sin(\alpha)}\\ &= \frac{\tan(\alpha)\cos(\beta)+\sin(\beta)}{\cos(\beta)-\tan(\alpha)\sin(\beta)}\\ &= \frac{\tan(\alpha)+\tan(\beta)}{1-\tan(\alpha)\tan(\beta)}.\end{aligned}$$

b) Die Rechnung verläuft analog.

Aufgabe 52

Zeigen Sie mit Hilfe der Addtionstheoreme:

a) $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(\alpha)$, b) $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(\alpha)$,

c) $\tan\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -\cot(\alpha)$, d) $\cot\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -\tan(\alpha)$.

Lösung:

Man verwende $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ und $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$. Für c) und d) verwende man a) und b).
Bemerkung: Man beachte, dass Aufgabe 51 für die Aufgabenteile c) und d) nicht anwendbar ist.

Aufgabe 53

Bestimmen Sie die Definitionsbereiche der folgenden Gleichungen. Bestimmen Sie im Anschluß die Lösungsmenge.

a) $\tan(x) \ = \sqrt{2}\ \sin(x)$,

b) $\tan(x) = 2\sqrt{3}\cos(x)$,

c) $\sin(2x) = \tan(x)$,

d) $\cos(3x) = 5 - 4\cos^2(x)$.

Hinweis: Beweisen Sie für die Aufgabenteile c) bzw. d) zunächst die Identitäten

$$\sin(2x) = \frac{2\tan(x)}{1+\tan^2(x)}, \quad \cos(3x) = 4\cos^3(x) - 3\cos(x).$$

Lösung:

a) Der Definitionsbereich der Gleichung ist $\mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \mathbb{Z}\pi\right)$. Dort gilt stets $\cos(x) \neq 0$. Es folgt

$$\tan(x) = \sqrt{2}\sin(x) \Leftrightarrow \sin(x) = \sqrt{2}\sin(x)\cos(x) \Leftrightarrow \sin(x)\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \cos(x)\right) = 0.$$

Letzteres ist wiederum äquivalent zu $\sin(x) = 0$ oder $\cos(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, also zu $x \in \pi\mathbb{Z}$ bzw. zu $x \in \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi\mathbb{Z}$.

b) Der Definitionsbereich der Gleichung ist $\mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \mathbb{Z}\pi\right)$. Dort gilt stets $\cos(x) \neq 0$. Es gilt zunächst

$$\begin{aligned}\tan(x) = 2\sqrt{3}\cos(x) \Leftrightarrow \sin(x) &= 2\sqrt{3}\cos^2(x) = 2\sqrt{3}\left(1 - \sin^2(x)\right)\\ &\Leftrightarrow \sin^2(x) + \frac{1}{2\sqrt{3}}\sin(x) - 1 = 0.\end{aligned}$$

Dies ist eine quadratische Gleichung in $t = \sin(x)$. Wir bestimmen also die Lösungen der Gleichung $t^2 + \frac{1}{2\sqrt{3}}t - 1 = 0$. Diese werden (z.B. mit p-q-Formel) gegeben durch

$$t_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad t_2 = -\frac{2}{\sqrt{3}} < -1.$$

Wegen $\sin(x) \geqslant -1$ sind also alle x zu bestimmen mit $t_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin(x)$. Damit ist die Lösungsmenge durch

$$\left(\frac{\pi}{3} + 2\pi\mathbb{Z}\right) \cup \left(\frac{2\pi}{3} + 2\pi\mathbb{Z}\right)$$

gegeben.

c) Der Definitionsbereich der Gleichung ist $\mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \mathbb{Z}\pi\right)$. Es gilt

$$\sin(2x) = \sin(x + x) = 2\sin(x)\cos(x) = \frac{2\sin(x)\cos(x)}{\sin^2(x) + \cos^2(x)} = \frac{2\tan(x)}{1 + \tan^2(x)}.$$

Damit folgt die Äquivalenz

$$\sin(2x) = \tan(x) \Leftrightarrow \frac{2\tan(x)}{1 + \tan^2(x)} = \tan(x) \Leftrightarrow \tan(x)^3 = \tan(x) \Leftrightarrow \tan(x)(\tan(x)^2 - 1) = 0.$$

Also ist die Gleichung äquivalent zu $\tan(x) = 0$ oder $\tan(x)^2 = 1$. Damit wird die Lösungsmenge gegeben durch

$$\pi\mathbb{Z} \cup \left(\frac{\pi}{4} + \pi\mathbb{Z}\right) \cup \left(-\frac{\pi}{4} + \pi\mathbb{Z}\right).$$

d) Es ist $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$. Es gilt

$$\begin{aligned}\cos(3x) &= \cos(2x+x) = \cos(2x)\cos(x) - \sin(2x)\sin(x)\\ &= \cos^3(x) - \sin^2(x)\cos(x) - 2\sin^2(x)\cos(x)\\ &= \cos^3(x) - 3(1-\cos^2(x))\cos(x) = 4\cos^3(x) - 3\cos(x).\end{aligned}$$

Damit ist

$$\cos(3x) = 5 - 4\cos^2(x) \Leftrightarrow 4\cos^3(x) - 3\cos(x) = 5 - 4\cos^2(x).$$

Dies ist eine kubische Gleichung in $t = \cos(x)$. Wegen $\cos(x) \in [-1,1]$ genügt es also die Lösungen der Gleichung $4t^3 + 4t^2 - 3t - 5 = 0$ im Intervall $[-1,1]$ zu bestimmen. Durch Ausprobieren erhält man zunächst die Lösung $t = 1$. Polynomdivision durch $t-1$ liefert

$$4t^3 + 4t^2 - 3t - 5 = (4t^2 + 8t + 5)(t-1) = \Big(4(t+1)^2 + 1\Big)(t-1)$$

Nun ist $4(t+1)^2 + 1 > 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Damit ist $t = 1$ die einzige Nullstelle in $[-1,1]$. Insgesamt ergibt sich damit als Lösungsmenge $2\pi\mathbb{Z}$.

Aufgabe 54

Es seien $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ mit $\alpha + \beta + \gamma = \pi$. Zeigen Sie:

a) $\sin(\beta)\cos(\gamma) + \cos(\beta)\sin(\gamma) = \sin(\alpha)$,

b) $\sin(\alpha)\sin(\beta) - \cos(\beta)\cos(\alpha) = \cos(\gamma)$.

Lösung:

a) Es gilt

$$\begin{aligned}\sin(\beta)\cos(\gamma) + \cos(\beta)\sin(\gamma) &= \sin(\beta+\gamma) = \sin(\pi - \alpha)\\ &= \sin(\pi)\cos(\alpha) - \cos(\pi)\sin(\alpha) = \sin(\alpha),\end{aligned}$$

wegen $\sin(\pi) = 0$ und $\cos(\pi) = -1$.

b) Es gilt

$$\begin{aligned}\sin(\alpha)\sin(\beta) - \cos(\beta)\cos(\alpha) &= -\cos(\alpha+\beta) = -\cos(\pi-\gamma)\\ &= -(\cos(\pi)\cos(\gamma) + \sin(\pi)\sin(\gamma))\\ &= \cos(\gamma),\end{aligned}$$

wegen $\sin(\pi) = 0$ und $\cos(\pi) = -1$.

Aufgabe 55

In einiger Entfernung zu einer Antenne wird ein Lichstrahl vom Boden (Meßebene) auf die Spitze der Antenne gerichtet. Der Winkel des Strahls zur Meßebene wird mit α bezeichnet. Nun geht man a Meter auf den Antennenmast zu und wiederholt die Messung. Man erhält nun einen Winkel β. Es ist insbesondere $0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$. Wie hoch ist der Mast?

Lösung:
Bezeichnet man die unbekannte Höhe des Mastes mit h und die Entfernung des zweiten Messpunktes vom Mast mit b so gelten die Beziehungen

$$\tan(\alpha) = \frac{h}{a+b} \qquad \tan(\beta) = \frac{h}{b}.$$

Dies ist eine Gleichung mit zwei Unbekannten. Insbesondere folgt

$$h = a\tan(\beta)\left(\frac{\tan(\alpha)}{\tan(\beta) - \tan(\alpha)}\right).$$