Natürliche Zahlen, ganze Zahlen

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$ natürliche Zahlen

$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\} = \mathbb{N} \cup \{0\}$

$\mathbb{Z} = \{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$

Wichtiges Konzept: Teilbarkeit, Primfaktorzerlegung

Definition

Eine natürliche Zahl $m \in \mathbb{N}$ heißt **Teiler** der natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}$ (kurz: $m \mid n$), wenn es eine weitere natürliche Zahl $b \in \mathbb{N}$ gibt mit $n = b \cdot m$.

Insbesondere:

- Jeder Teiler m von n eine natürliche Zahl zwischen 1 und n, $1 \leq m \leq n$.
- Jede natürliche Zahl hat die Teiler 1 und n.
- 2 ist Teiler jeder geraden Zahl.

$n = 1 \cdot n \Rightarrow 1 \mid n$

$n = n \cdot 1 \Rightarrow n \mid n$

-3-

Definition

Eine **Primzahl** ist eine natürliche Zahl $p \geq 2$, die nur durch 1 und sich selber teilbar ist.

<u>Bsp</u>:

- $2, 3, 5, 7, 11, 13, \ldots, 31, \ldots, 97, 2^{607}-1, \ldots$ sind Primzahlen
- Die einzige gerade Primzahl ist 2.
- $42 = 2 \cdot 21 = 2 \cdot 3 \cdot 7$ ist keine Primzahl.

Lemma

Ist k ein Teiler von m und m ein Teiler von n, dann ist k auch ein Teiler von n. Das heißt

$$k \mid m \wedge m \mid n \Rightarrow k \mid n.$$

Beweis:

Weil $k \mid m$, existiert $a \in \mathbb{N}$ mit $m = a \cdot k$

Weil $m \mid n$, existiert $b \in \mathbb{N}$ mit $n = b \cdot m$ $\Rightarrow$

$$n = b \cdot m = \underbrace{b \cdot a \cdot}_{\in \mathbb{N}} k \Rightarrow k \mid n \quad \blacksquare$$

Lemma

Jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit $n > 1$ besitzt einen Primteiler, d.h. einen Teiler, der eine Primzahl ist.

Beweis: Weil $n > 1$, hat n einen Teiler $\neq 1$, z.B sich selbst.

Jeder solche Teiler t erfüllt $1 < t \leq n$

Wir nehmen den kleinsten solchen Teiler, nennen ihn t^*.

Beh: t^* ist Primzahl.

Denn: Ein Teiler von t^* ist auch ein Teiler von n.

(siehe letztes Lemma.)

Ein echter Teiler$^{a \neq 1}$ $(a \mid t^*, a \neq t^*)$, wäre ein kleinerer Teiler von n als t^* selbst. Im Widerspruch dazu, dass t^* der kleinste Teiler von n war. Also ist t^* Primzahl ∎

Folgerung

Jede natürliche Zahl $n > 1$ ist ein Produkt von Primzahlen

$$n = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_r,$$

wobei die Primzahlen p_j öfter vorkommen können.

$p_1, \dots, p_r$ Primzahlen

Bsp: $\cdot\, 4 = 2 \cdot 2$

Bsp: Für $n > 1$ finden wir nach dem vorigen Lemma einen Primteiler p_1, also $n = m_1 \cdot p_1 = p_1 \cdot m_1$, $m_1 \in \mathbb{N}$.

$m_1 < n$: 1. Fall: $m_1 = 1$ dann sind wir fertig.

2. Fall: $m_1 > 1$, dann suche Primteiler p_2 von m_1, $m_1 = p_2 \cdot m_2$, $m_2 \in \mathbb{N}$. Etc.

Irgendwann (in endlich vielen Schritten r): $m_r = p_r$ PZ.

Es folgt $n = p_1 \cdot \dots \cdot p_r$. $\blacksquare$

-7-

Quintessenz:

Satz
Jede natürliche Zahl $n > 1$, besitzt eine (bis auf die Reihenfolge) eindeutige Zerlegung in Primfaktoren.

Bsp.: $42 = 2 \cdot 21 = 2 \cdot 3 \cdot 7 = 3 \cdot 2 \cdot 7 = 7 \cdot 2 = 3 = \ldots$

$= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7$

1 ist keine Primzahl!

Beispiel: $96 = 2 \cdot 48 = 2 \cdot 2 \cdot 24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 12$

$= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 6 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$

$= 2^5 \cdot 3$

Beweisstrategien

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A) \Leftrightarrow (A \wedge \neg B \Rightarrow F)$$

direkter Beweis

Kontraposition

indirekter Beweis

Widerspruchs-beweis

Lemma

Es seien $m, n \in \mathbb{N}$ und p ein Primteiler von $m \cdot n$. Dann ist p ein Primteiler von m oder n.

Beweis: Durch Kontraposition $(\neg B \Rightarrow \neg A)$, d.h.

$$p \nmid m \wedge p \nmid n \Rightarrow p \nmid m \cdot n.$$

Seien $p_1, \dots, p_r$ die Primteiler von $m = p_1 \cdot \ldots \cdot p_r$,
$q_1, \dots, q_s$ die Primteiler von $n = q_1 \cdot \ldots \cdot q_s$.

Weil $p \nmid m$, $p \nmid n$, gilt $p \neq p_j$ $(j = 1, \dots, r)$, $p \neq q_j$ $(j = 1, \dots, s)$.

Außerdem ist $m \cdot n = p_1 \cdot \ldots \cdot p_r \cdot q_1 \cdot \ldots \cdot q_s$ eine Primfaktorzerlegung von $m \cdot n$, also (bis auf Reihenfolge) eindeutig.

also: $p \nmid m \cdot n$. $\blacksquare$

Satz (Euklid)

Es gibt unendliche viele Primzahlen.

A: Sei $\mathbb{P}$ die Menge der Primzahlen in $\mathbb{N}$

B: $\#\mathbb{P} = \infty$ ($\mathbb{P}$ hat ∞ viele Elemente)

<u>Beweis</u>: $(A \wedge \neg B \Rightarrow F)$. $\neg B$: $\#\mathbb{P} = r < \infty$ ist endlich.

Seien also $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_r$ alle verschiedenen Primzahlen. Die Zahl $n = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_r + 1 \in \mathbb{N}$, $n > 1$, besitzt einen Primteiler q.

Aber $q \notin \mathbb{P}$, denn beim Teilen durch p_j lässt n den Rest 1, d.h. $q \neq p_j$ für $j = 1, \ldots, r$. ↯ $\#\mathbb{P} = r$.

∎

Körperaxiome

Rechenregeln für die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$:

$\mathbb{K}$

Addition: Für alle $x, y, z \in \mathbb{Q}$ gilt:

(A1) $x + y = y + x$ (Kommutativität)

(A2) $(x + y) + z = x + (y + z)$ (Assoziativität)

(A3) Es gibt ein Element $0 \in \mathbb{Q}$ mit $0 + x = x$ für alle $x \in \mathbb{Q}$. (Nullelement, neutrales Element der Addition)

(A4) Zu x gibt es $-x \in \mathbb{Q}$ mit $x + (-x) = 0$. (Inverses Element der Addition)

Multiplikation: Für alle $x, y, z \in \mathbb{Q}$ gilt:

(M1) $x \cdot y = y \cdot x$ (Kommutativität)

(M2) $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ (Assoziativität)

(M3) Es gibt ein Element $1 \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ mit $1 \cdot x = x$ für alle $x \in \mathbb{Q}$. (Einselement, neutrales Element der Multiplikation)

(M4) Zu $x \neq 0$ gibt es $x^{-1} \in \mathbb{Q}$ mit $x \cdot x^{-1} = 1$. (Inverses Element der Multiplikation)

Verträglichkeit: Für alle $x, y, z \in \mathbb{Q}$ gilt:

(AM) $x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$ (Distributivität)

Bem:

- Punkt-vor-Strich-Regel
  $$a \cdot b + c = (a \cdot b) + c$$
- Setzt man
  $$a - b = a + (-b),$$
  $$a : b = \frac{a}{b} = a \cdot b^{-1} \quad (\text{für } b \neq 0),$$
  dann sind alle 4 Grundrechenarten erklärt!

Definition

Eine Menge $\mathbb{K}$ heißt **Körper**, wenn für sie eine Addition „+" und eine Multiplikation „·" definiert ist, also für alle $x, y \in \mathbb{K}$ gilt
Summe $x + y \in \mathbb{K}$ und Produkt $x \cdot y \in \mathbb{K}$,
so, dass die **Körperaxiome** (A1)–(A4), (M1)–(M4) und (AM) erfüllt sind.

Satz

Die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ bilden einen Körper, den Körper der rationalen Zahlen.

Ein weiteres Beispiel: $\mathbb{R}$ ist der Körper der reellen Zahlen.

Binomische Formeln

Bemerkung

In jedem Körper $\mathbb{K}$ gilt für alle $a, b \in \mathbb{K}$:

1. Binomische Formel: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
2. Binomische Formel: $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.
3. Binomische Formel: $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$.

Bem: $\forall \; a, b \in \mathbb{K} \; : \; -(a \cdot b) = (-a) \cdot b$.

Denn: $a \cdot b + (-a) \cdot b \overset{(AM)}{=} (a + (-a)) \cdot b \overset{(A4)}{=} 0 \cdot b$

$= 0$

Also $(-a) \cdot b = -(a \cdot b)$.

$\blacksquare$

Zeige 2. Bin. formel:

$$\underline{(a-b)}^2 = (a-b)(a-b) \overset{(AM)}{=} a\cdot a + a\cdot(-b) - b\cdot a - b\cdot(-b)$$

$$\overset{(M1)}{=} a^2 + (-b)\cdot a - b\cdot a - (-b)\cdot b$$

$$\overset{S.v.}{=} a^2 - b\cdot a - b\cdot a - (-b^2)$$

$$\overset{(A4)}{=} a^2 - 2\cdot b\cdot a + b^2$$

$$\overset{(M1)}{=} \underline{a^2 - 2ab + b^2}$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 + \underline{ba} - \underline{ab} - b^2 = a^2 - b^2$$

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ba + ab + b^2$$

$$= a^2 + 2ab + b^2$$

Folgerungen aus den Körperaxiomen

Die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ bilden keinen Körper, denn multiplikativen Inversen gehören nicht zu $\mathbb{Z}$, sondern erst zu $\mathbb{Q}$.

Satz

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper.

(a) Das Nullelement 0 ist eindeutig bestimmt, d.h. erfüllt $n \in \mathbb{K}$ die Gleichung $n + a = a$ für alle $a \in \mathbb{K}$, dann ist $n = 0$.

(b) Das Einselement ist eindeutig bestimmt, d.h. erfüllt $e \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ die Gleichung $e \cdot a = a$ für alle $a \in \mathbb{K}$, dann ist $e = 1$.

(c) Das Inverse der Addition ist eindeutig bestimmt, d.h. ist für $a \in \mathbb{K}$ ein $b \in \mathbb{K}$ gefunden mit $a + b = 0$, dann ist $b = -a$.

(d) Das Inverse der Multiplikation ist eindeutig bestimmt, d.h. ist für $a \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ ein $b \in \mathbb{K}$ gefunden mit $a \cdot b = 1$, dann ist $b = a^{-1}$.

Beispiel: (a) Für $a, b \in \mathbb{K}$ hat die Gleichung $a + x = b$ eine eindeutig bestimmte Lösung, nämlich $x = (-a) + b$.

Bsp: $\frac{7}{11} + x = 15 \iff \underbrace{\frac{7}{11} + \left(-\frac{7}{11}\right)}_{=0} + x = 15 + \left(-\frac{7}{11}\right)$

$\iff x = 15 - \frac{7}{11} = \frac{165 - 7}{11}$

$= \frac{158}{11}$

(b) Für $a, b \in \mathbb{K}$, $a \neq 0$, hat die Gleichung $a \cdot x = b$ genau eine Lösung $x \in \mathbb{K}$, nämlich $x = a^{-1} \cdot b$.

Bsp: $\frac{7}{11} \cdot x = 15 \iff x = \left(\frac{7}{11}\right)^{-1} \cdot 15 = \frac{165}{7}$

(c) Jeder Bruch $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ kann geschrieben werden als $\pm \frac{m}{n}$, wo $m \in \mathbb{N}_0$, $n \in \mathbb{N}$.

(d) Ein Bruch $\frac{m}{n}$ wie in (c), $m \in \mathbb{N}_0$, $n \in \mathbb{N}$, heißt vollständig gekürzt, wenn m und n teilerfremd sind. ($ggT(m,n) = 1$)

(e) Jeder Bruch in $\mathbb{Q}$ kann vollständig gekürzt werden. [Grund: eindeutige Primfaktorzerlegung]

Nullteilerfreiheit

Satz

In einem Körper $\mathbb{K}$ ist ein Produkt genau dann gleich null, wenn einer der Faktoren null ist:

$$\forall a, b \in \mathbb{K} : a \cdot b = 0 \Leftrightarrow \big(a = 0 \vee b = 0\big).$$

Addition: Für alle $x, y, z \in \mathbb{Q}$ gilt:

(A1) $x + y = y + x$ (Kommutativität)

(A2) $(x + y) + z = x + (y + z)$ (Assoziativität)

(A3) Es gibt ein Element $0 \in \mathbb{Q}$ mit $0 + x = x$ für alle $x \in \mathbb{Q}$. (Nullelement, neutrales Element der Addition)

(A4) Zu x gibt es $-x \in \mathbb{Q}$ mit $x + (-x) = 0$. (Inverses Element der Addition)

Multiplikation: Für alle $x, y, z \in \mathbb{Q}$ gilt:

(M1) $x \cdot y = y \cdot x$ (Kommutativität)

(M2) $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ (Assoziativität)

(M3) Es gibt ein Element $1 \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ mit $1 \cdot x = x$ für alle $x \in \mathbb{Q}$. (Einselement, neutrales Element der Multiplikation)

(M4) Zu $x \neq 0$ gibt es $x^{-1} \in \mathbb{Q}$ mit $x \cdot x^{-1} = 1$. (Inverses Element der Multiplikation)

Verträglichkeit: Für alle $x, y, z \in \mathbb{Q}$ gilt:

(AM) $x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$ (Distributivität)

Beweis: "$\Leftarrow$" Sei $a=0$ oder $b=0$. Zunächst $a=0$.

Dann ist $a\cdot b = 0\cdot b \overset{(A3)}{=} (0+0)\cdot b \overset{(AM)}{=} 0\cdot b + 0\cdot b$.

Dann gilt $0 \overset{(A4)}{=} 0\cdot b + (-0\cdot b) = 0\cdot b + \underbrace{0\cdot b + (-0 b)}_{0}$

$\overset{(A4)}{=} 0\cdot b + 0 = 0\cdot b$. ✓

Sei nun $b=0$, dann benutze (M1) Kommutativität:

$a\cdot 0 = 0\cdot a$ und machen denselben Schluss mit 'a statt b'.

Beweis "$\Rightarrow$": $a \cdot b = 0 \Rightarrow (a=0 \vee b=0)$

Durch Widerspruch, zeige $a \cdot b = 0 \wedge (a \neq 0 \wedge b \neq 0) \Rightarrow F$.

Ist $a, b \neq 0$, dann gibt es multiplikative Inverse a^{-1}, b^{-1} (M4). Es folgt:

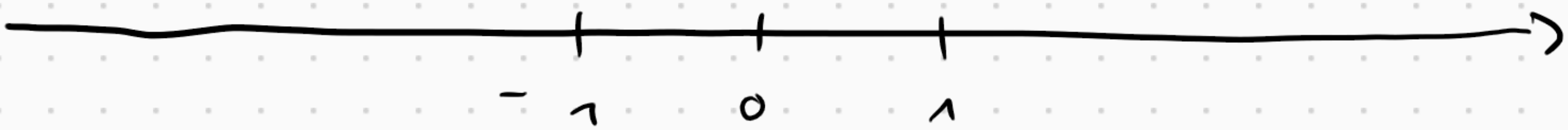
$$0 = (b^{-1} \cdot a^{-1}) \underbrace{a \cdot b}_{=0} \overset{(M2)}{=} b^{-1} \cdot (a^{-1} \cdot a) \cdot b \overset{(M4)}{=} b^{-1} \cdot \underbrace{1 \cdot b}_{b}$$

$$\overset{(M3)}{=} b^{-1} \cdot b \overset{(M4)}{=} 1$$

$\lightning$ zu (M3): $1 \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$

$\blacksquare$

Irrationale Zahlen



$\mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}$

Satz

$\sqrt{2}$ ist nicht rational.

Das heißt: Es existiert keine rationale Zahl $a \in \mathbb{Q}$ mit $a^2 = a \cdot a = 2$.

D. h. $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

Beweis: $^{2.2.}(a \in \mathbb{Q} \wedge a^2 = 2) \Longrightarrow F$

Sei $a \in \mathbb{Q}$, $a^2 = 2$. Schreibe $a = \frac{m}{n}$ gekürzt mit $m, n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{ggT}(m,n) = 1$.

Dann gilt $2 = a^2 = \frac{m^2}{n^2}$ bzw. $\underbrace{2n^2}_{\in \mathbb{N}} = \underbrace{m^2}_{\in \mathbb{N}}$.

Weil $2 \mid m^2$ und $m \in \mathbb{N}$, d.h. m besitzt eind. Primfaktorzerlegung, $2 \mid m$, d.h. es ex. $m' \in \mathbb{N}$: $m = 2m'$.

$2n^2 = (2m')^2 = 4m'^2$. Es folgt $2 \mid n$, d.h. es ex. $n' \in \mathbb{N}$ mit $n = 2 \cdot n'$.

$\Rightarrow$ 2 teilt n und 2 teilt m ↯ $\mathrm{ggT}(m,n) = 1$. ∎

-3-

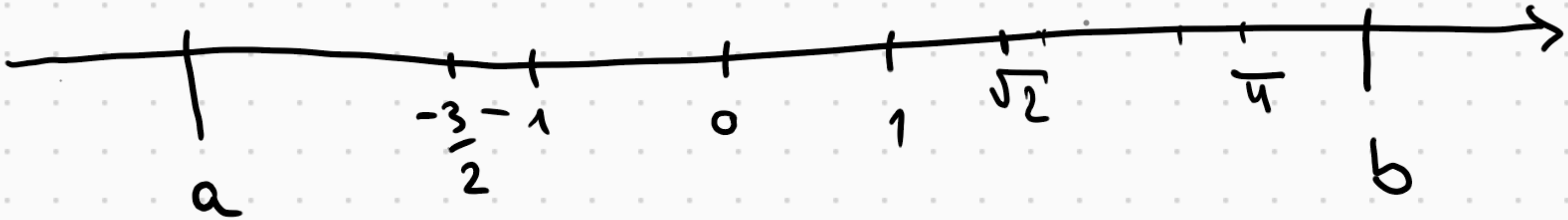
Die Differenz $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ nennt man die Menge der irrationalen Zahlen.
Beispiele für irrationale Zahlen:

- $\sqrt{2} = 1,4142135\ldots$, $\sqrt{\frac{17}{11}}$ etc.
- $\pi = 3,1415926\ldots$ (Kreiszahl)
- $e = 2,7128\ldots$ (Eulersche Zahl)

$\sqrt{p}$ irrat
für p prim

Bsp : $\frac{1}{3} = 0,333\ldots\ldots = 0,\overline{3}$

Anordnung von $\mathbb{R}$



Wir können stets entscheiden, ob gilt

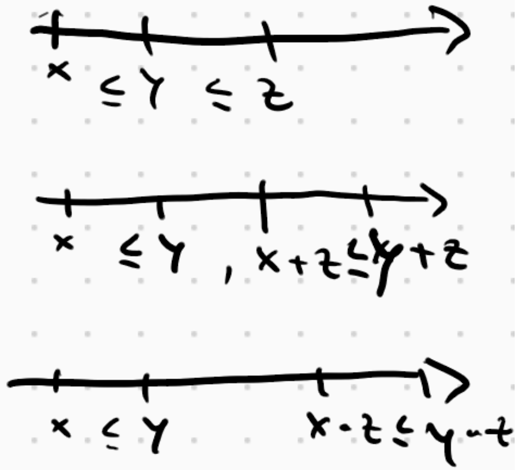
$$a \leq b \quad \text{oder} \quad b \leq a.$$

Satz

Auf den reellen Zahlen $\mathbb{R}$ gibt es eine Anordnung (nämlich die Relation „$\leq$“) mit den folgenden Eigenschaften für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$:

- $x \leq y \vee y \leq x$
- Reflexivität: $x \leq x$
- Antisymmetrie: $x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y$
- Transitivität: $x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z$
- Monotonie bzgl. „$+$“: $x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$
- Monotonie bzgl. „$\cdot$“: $x \leq y \wedge 0 \leq z \Rightarrow x \cdot z \leq y \cdot z$

Gilt $0 \leq a$ und $a \neq 0$, so heißt a positiv.
Gilt $a \leq 0$ und $a \neq 0$, so heißt a negativ.



Definition

Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gelte:

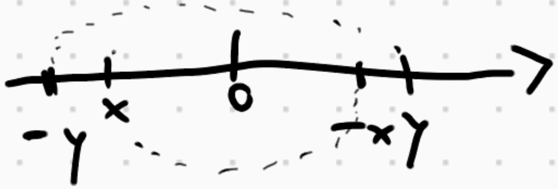
- $x < y \Leftrightarrow (x \leq y \wedge x \neq y)$
- $x \geq y \Leftrightarrow y \leq x$
- $x > y \Leftrightarrow y < x$

Beispiel

$\underline{x<y}$ gilt genau dann, wenn $\underline{-x>-y}$.

Beweis: Aus der Monotonie bzgl. „+" folgt

$$\begin{aligned}
\underline{x<y} &\overset{|+(-x)}{\iff} x-x<y-x \\
&\overset{|+(-y)}{\iff} x-x-y<y-x-y \\
&\iff 0-y<0-x \\
&\iff \underline{-y<-x}
\end{aligned}$$



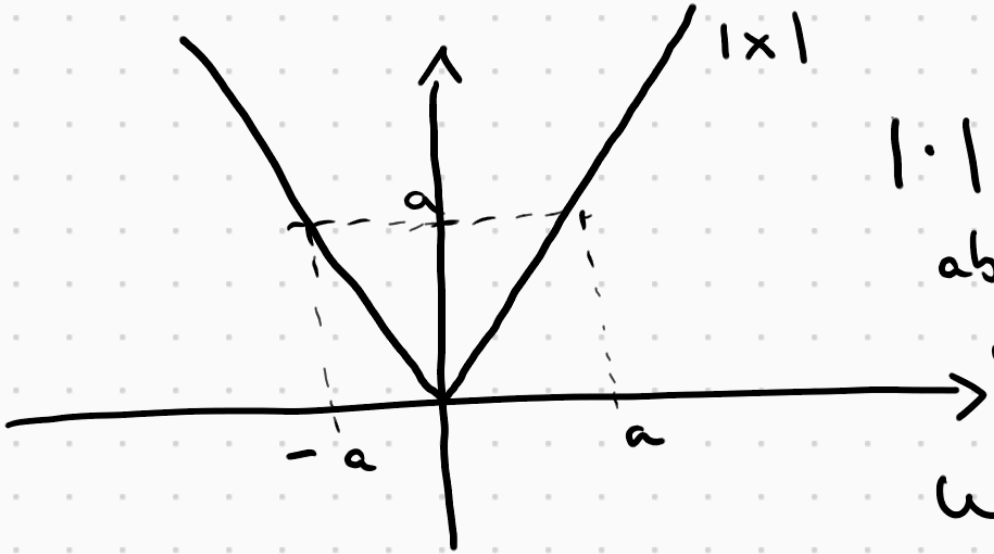
Definition

Der (Absolut-)Betrag ist definiert als die Funktion

$$|\cdot|:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}_{\geq 0},\ x\mapsto |x| = \begin{cases} x, & \text{falls } x\geq 0\\ -x, & \text{falls } x\leq 0\end{cases}.$$

[$0+0=0$, also $-0=0$]

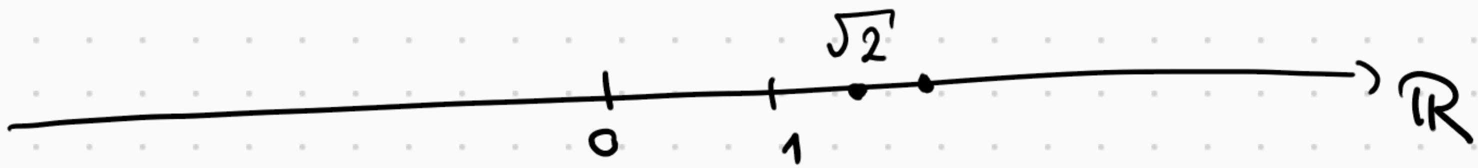
Bsp: • $|7|=7$, $|0|=0$, $|-7|=-(-7)=7$



$|\cdot|$ ist surjektiv, aber nicht injektiv, denn für $a>0$ sind $-a$, a Urbilder: $|-a|=a=|a|$

- Auch die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ ist anordbar als Teilmenge von $\mathbb{R}$, erstrecht $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$.

Der Unterschied zwischen $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$, d.h. irrat. Zahlen, liegt darin, dass dadurch der Zahlenstrahl „vollständig" wird, also keine Lücken mehr hat.



Potenzen mit natürlichen und ganzzahligen Exponenten

Es sei $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.

$a \cdot a = a^2$

$a \cdot a \cdot a = a^3$

$\vdots$

$\underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{n\text{-mal}} = a^n$

Definition

Das n-fache Produkt einer reellen Zahl a mit sich selbst heißt n-fache Potenz von a,

$$\underbrace{a \cdot \cdots \cdot a}_{n-\text{mal}} = a^n.$$

Insbesondere ist $a^1 = a$.
Dabei heißt a Basis und n Exponent von a^n.

<u>Bsp:</u>

- $3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 9 \cdot 9 = 81$
- $1^{5737818} = \underbrace{1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1}_{5\,737\,818\text{-mal}} = 1$
- $(-1)^2 = -(-1) = 1$, $(-1)^3 = (-1) \cdot (-1)^2 = (-1) \cdot 1 = -1$

  [Erinnere: $-(a \cdot b) = (-a) \cdot b$]

  Allgemein $(-1)^{2n} = 1$, $(-1)^{2n+1} = -1$, wobei $n \in \mathbb{N}$.
- $\forall x \in \mathbb{R}: \left(\frac{1}{2} - x\right)^2 = \frac{1}{4} - 2 \cdot \frac{1}{2} x + x^2 = \frac{1}{4} - x + x^2$
- $\forall a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0: \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$
- $\left(-\frac{2}{3}\right)^3 = \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{-2}{3}\right) \cdot \left(\frac{-2}{3}\right) = \frac{(-2) \cdot (-2) \cdot (-2)}{3 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{(-2)^3}{3^{\cancel{2}3}} = \frac{-8}{27}$.

Potenzgesetze:

Satz

Für alle $a \in \mathbb{R}$ und alle $n, m \in \mathbb{N}$ gilt:

(a) $a^m \cdot a^n = \underbrace{\underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_{m-\text{fach}} \cdot \underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_{n-\text{fach}}}_{(m+n)-\text{fach}} = a^{m+n}$

(b) $(a^n)^m = \underbrace{a^n \cdot \dots \cdot a^n}_{m-\text{fach}} = \underbrace{\underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_{n-\text{fach}} \cdot \dots \cdot \underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_{n-\text{fach}}}_{m-\text{fach}} = \underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_{m \cdot n-\text{fach}} = a^{m \cdot n}.$

Ganzzahlige Exponenten

Für jedes $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt

$$1 = a^n \cdot \frac{1}{a^n} = a^n \cdot (a^{-1})^n$$

Sinnvoll:

Definition
Für alle $a \in \mathbb{R}$ definiere

$$a^0 = 1 \quad \text{und} \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}. \qquad (a \neq 0)$$

Denn dann gilt $a^n \cdot a^0 = a^n \cdot 1 = a^n$
$= a^{n+0} = a^n$

sowie $1 = a^0 = a^{1-1} = a^1 \cdot a^{-1} = a \cdot \frac{1}{a}$.

D.h.: Diese Def. ist genau so gemacht, dass die Potenzgesetze für alle $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und alle $m, n \in \mathbb{Z}$ gelten

Für die Basis $a=0$ ergibt sich noch keine Bedingung. Nur 0^n ist für $n<0$ <u>nicht definiert</u>. [$m>0$: $\left(\frac{1}{0}\right)^m$ ↯ ; aber sollte 0^{-m} sein.]

Allerdings Konvention: $\boxed{0^0 := 1}$

x^2, x^3, x^n ; x^0 = konstantes Polynom (gleich 1 für alle Einsetzungen $x \in \mathbb{R}$)

<u>Beispiele:</u> $$\frac{4^8}{(2^4 \cdot 3^2)^3} = \frac{4^8}{2^{12} \cdot 3^6} = \frac{(2^2)^8}{2^{12} \cdot 3^6}$$

$$= \frac{2^{16}}{2^{12} \cdot 3^6} = \frac{2^{16-12}}{3^6} = \frac{2^4}{3^6}$$

<u>Beispiel:</u> $$\left(\frac{5}{7}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{5}{x-y}\right)^2 = \frac{5^{-1}}{7^{-1}} \cdot \frac{5^2}{(x-y)^2}$$

$$\overset{\cdot \frac{5}{5} \cdot \frac{7}{7}}{=} \frac{5^{-1} \cdot 5 \cdot 7}{7^{-1} \cdot 5 \cdot 7} \cdot \frac{5^2}{(x-y)^2} = \frac{7}{5} \cdot \frac{5^2}{(x-y)^2} = \frac{7 \cdot 5}{1 \cdot (x-y)^2}$$

$$= \frac{35}{(x-y)^2}$$

Das gilt für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x \neq y$.

Vergleich von Binär- und SI-Präfixen

Grundspeichereinheit 1 Byte = 8 Bit auf Rechnern.

[Binärcode ⇝ 1 Byte ermöglicht $2^8 = 256$ Zeichen]

Oft werden zu Byte SI-Präfixe verwendet: $1\,kB = 1000\,B$

$$= 10^3 \cdot B$$

$$= 10^3 \cdot 2^3\,Bit$$

$$\hat{=}\ 10^3 \cdot 2^8\ \text{Zeichen}$$

Viel sinnvoller wäre es, Dezimal- und Binärzählung nicht zu vermischen. Weil $2^{10} = 1024$

Oft bezeichnet 1 Kilobyte auch 1024 Byte

IEC: Verwende bei Angaben im Binärsystem das Präfix „bi".

1024 Byte = 1 KiB.

Symbol	# Byte
1 kB	$10^3 = 1000$
1 MB	10^6
1 GB	10^9
1 TB	10^{12}
1 PB	10^{15}

Symbol	# Byte
1 KiB	$2^{10} = 1024$
1 MiB	$2^{20} = 1'048'576$
1 GiB	$2^{30} = 1'073'741'824$
1 TiB	$2^{40} = 1'099'511'627'776$
1 PiB	$2^{50} = \ldots\ldots$

		Abweichung in %
$\frac{KiB}{kB}$	1,024	2,4%
$\frac{MiB}{MB}$	1,049	4,9%
$\frac{GiB}{GB}$	1,074	7,4%
$\frac{TiB}{TB}$	1,099	9,9% ≈ 10%

⚠ Herstellerangaben uneindeutig ...

Window: 128 GB Speichermedium
zeigt an als 119,2 GB, aber es sind 119,2 GiB ....

Wurzeln

Für jede nichtnegative reelle Zahl $a \geq 0$ ist die $\boxed{\text{Quadratwurzel } \sqrt{a} \geq 0}$ die nichtnegative Zahl, die quadriert a ergibt:

$$(\sqrt{a})^2 = \sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = a$$

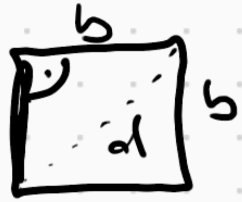
- **Bsp**: $\sqrt{4} = 2$, $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ist irrational.
  $$\sqrt{\frac{25}{9}} = \frac{5}{3}$$
- **Bem**: $(-b)^2 = b^2 \geq 0$. Ist also $a > 0$, so gibt es stets zwei Zahlen, die quadriert a ergeben: $\sqrt{a}$, $-\sqrt{a}$.
  [Für $a = 0$: $\sqrt{0} = 0 = -\sqrt{0}$.]

-1-

- Für jedes $a \in \mathbb{R}$ ist $\sqrt{a^2} = |a|$.
- Negative Zahlen $a<0$ haben keine Quadratwurzel (in $\mathbb{R}$).

Bsp: (i) $\sqrt{2\cdot 2} = 2$, $\sqrt{(-2)\cdot(-2)} = 2 = |-2|$

(ii) Ist $b>0$ Kantenlänge eines Quadrats,



dann ist die Länge der Diagonalen $d=\sqrt{2}\cdot b$

Pythagoras: $d^2=b^2+b^2 \Leftrightarrow d^2 = 2b^2 \underset{d\geq 0}{\Longleftrightarrow} \underline{\underline{d=\sqrt{2}\cdot b}}$.

(iii) Die Gleichung $x^2-7=0$ hat die positive Lösung $x=\sqrt{7}$, denn $\sqrt{7}^2-7=7-7=0$.

Die negative Lsg ist $x=-\sqrt{7}$

(iv)! $-1 \neq \sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{1} = 1$ ist falsch!!!

-3-

Definition

Für jede nicht negative Zahl $a \geq 0$ ist die n-te Wurzel aus a die nicht negative Zahl $\sqrt[n]{a} \geq 0$, deren n-te Potenz gleich a ist, also $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$.

Bsp: (i) $\sqrt[3]{27} = 3$, $\sqrt[6]{4096} = 4$, $\sqrt[3]{\frac{1}{125}} = \frac{\sqrt[3]{1}}{\sqrt[3]{125}} = \frac{1}{5}$

$\left(3 \cdot 3 \cdot 3 = 27,\ 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 4096,\ \left(\frac{1}{5}\right)^3 = \frac{1}{125}\right)$.

(ii) Für alle $x \geq 0$ ist $\sqrt[1]{x} = x$ $\quad (x^1 = x)$

(iii) Für alle $x \in \mathbb{R}$ und alle geraden $n = 2m \in \mathbb{N}$ ist

$x^n = (x^2)^m \geq 0$ und $\sqrt[n]{x^n} = \sqrt[2m]{x^{2m}} = |x|$

Wurzelgesetze

Satz

Für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $a, b \geq 0$ und $c > 0$ und alle $m, n \in \mathbb{N}$ gilt:

(i) $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$

(ii) $\sqrt[n]{\frac{a}{c}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{c}}$

(iii) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$

Beweis durch Nachrechnen: z. B. (iii)

$$\left(\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}\right)^{n\cdot m} \underset{\text{Potenzgesetz}}{=} \left(\left(\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}\right)^{n}\right)^{m} \underset{\text{Def. n-te Wurzel}}{=} \left(\sqrt[m]{a}\right)^{m} = a \qquad \blacksquare$$

!! $\sqrt[n]{a+b} \neq \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$ für <u>alle</u> $a, b > 0$!!

Bsp: $\sqrt[2]{2+2} = \sqrt[2]{4} = 2$, aber $\sqrt[2]{2} + \sqrt[2]{2} = 2 \cdot \sqrt{2} \approx 2 \cdot 1{,}41\ldots$

Für $n \in \mathbb{N}$, $a > 0$ setzen: $a^{\frac{1}{n}} := \sqrt[n]{a}$, denn $(a^{\frac{1}{n}})^n = a^{\frac{1}{n} \cdot n}$
Pot.gesetz
$= a^1 = a$

Definition

Für alle reellen Zahlen $a > 0$ und jede rationale Zahl $\frac{p}{q}$ (mit $p \in \mathbb{Z}$ und $q \in \mathbb{N}$) ist

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p} = \left(\sqrt[q]{a}\right)^p.$$

Für $\frac{p}{q} > 0$ setzt man weiter $0^{\frac{p}{q}} = 0$.

Potenzgesetze für rationale Exponenten:

Satz

Für alle reellen Zahlen $a, b > 0$ und alle $x, y \in \mathbb{Q}$ gilt:

- $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$
- $a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x$
- $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$

Häufige mathematische Ausdrücke

Für $n \in \mathbb{N}_0$ ist die Fakultät von n gegeben durch

$$n! = \begin{cases} 1 & \text{für } n = 0, \\ 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n & \text{für } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Kombinatorische Bedeutung: $n!$ ist die Anzahl der Möglichkeiten, n Dinge in einer Reihe anzuordnen.

Bsp: $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$, $4! = \underbrace{1 \cdot 2 \cdot 3}_{3!} \cdot 4 = 6 \cdot 4 = 24$

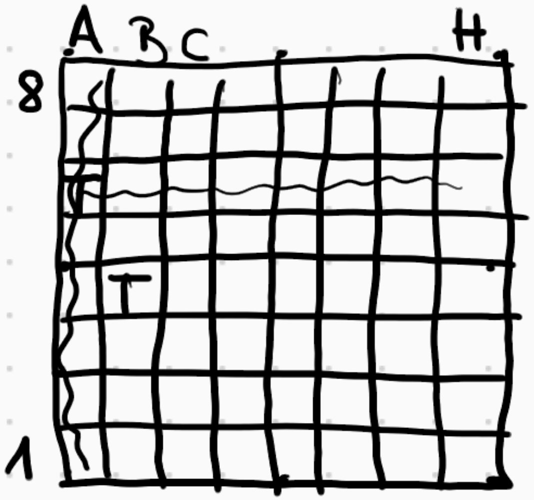
Bsp: Ordnen a, b, c in einer Reihe:

abc, acb,

bac, bca,

cab, cba // 6 Stück, $6 = 3!$

Bsp: 8 Türme so auf einem Schachbrett positionieren, dass sie sich gegenseitig nicht schlagen können:



	A	B	C	……	H
Anzd. Mögl.	8	7	6		1

$$8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 1 = 8!$$

Für $n, k \in \mathbb{N}_0$, $0 \leq k \leq n$, ist der **Binomialkoeffizient** gegeben durch

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

[Sprich „n über k“ oder „k aus n“.]
Kombinatorische Bedeutung: $\binom{n}{k}$ ist die Anzahl der Möglichkeiten aus n verschiedenen Dingen k Stück auszuwählen.
Deswegen setzt man auch $\binom{n}{k} = 0$ für $k > n$.

Bsp:

- $\binom{4}{3} = \frac{4!}{3!(4-1)!} = \frac{4!}{3!\cdot 1!} = \frac{4}{1} = 4$
- $\binom{5}{1} \overset{!}{=} \underline{\underline{5}}$, $\binom{5}{1} = \frac{5!}{1!\cdot(5-1)!} = \frac{5!}{1!\cdot 4!} = \frac{5}{1} = \underline{\underline{5}}$

Allg:

$$\binom{n}{1} = \frac{n!}{1!(n-1)!} = \underline{\underline{n}}$$

$$\binom{n}{n-1} = \frac{n!}{(n-1)!\,1!} = \underline{\underline{n}}$$

Satz: Die Binomialkoeffizienten erfüllen für alle $0 \leq k < n$ die Identität

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} .$$

Bsp: $\binom{3}{2} + \binom{3}{3} = 3 + 1 = 4, \quad \binom{4}{3} = 4$

Wir können Binomialkoeffizienten rekursiv berechnen:

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!\,n!} = 1 , \quad \binom{n}{n} = \frac{n!}{n!\,0!} = 1$$

Beweis: $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!} + \dfrac{n!}{(k+1)!\,(n-(k+1))!}$

Hauptnenner

$$= \frac{n!\,(k+1) + n!\,(n-k)}{(k+1)!\,(n-k)!}$$

$$= \frac{n!\,(k+1+n-k)}{(k+1)!\,(n-k)!} = \frac{n!\,(n+1)}{(k+1)!\,(n-k)!}$$

$$= \frac{(n+1)!}{(k+1)!\,((n+1)-(k+1))!} = \binom{n+1}{k+1}$$

$\blacksquare$

Pascalsches Dreieck

	k=0	k=1	k=2	k=3	k=4	k=5	k=6
n=0	1						
n=1	1	1					
n=2	1	2	1				
n=3	1	3	3	1			
n=4	1	4	6	4	1		
n=5	1	5	10	10	5	1	
n=6	1	6	15	20	15	6	1

Summe und Produkt

Beispiel: • $1+2+3+4+\ldots+n = \sum_{i=1}^{n} i$

• $1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n \; (=n!) = \prod_{i=1}^{n} i$

Σ : großes Sigma, Summenzeichen

Π : großes Pi, Produktzeichen

Definition

Es sei I eine endliche Menge, und es seien a_i mit $i \in I$ Zahlen. [I heißt Indexmenge, i heißt Index.] Dann bezeichnet

- $\sum_{i\in I} a_i$ die Summe der Zahlen a_i, $i \in I$.
- $\prod_{i\in I} a_i$ das Produkt der Zahlen a_i, $i \in I$.

Meistens ist $I = \{1, 2, \ldots, n\}$ oder $I = \{0, 1, 2, \ldots, n\}$

Bsp: $I = \{1, 2, \ldots, n\}$:

- $$\sum_{i \in I} a_i = \sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \ldots + a_n.$$
- $$\prod_{i \in I} a_i = \prod_{i=1}^{n} a_i = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n$$

Bemerkung

Index und Indexmenge sind lediglich eine Art, die Menge der Summanden durchzuzählen. Das kann auf unterschiedliche Weisen geschehen. Die Summanden und die Summe ändern sich dabei nicht.

Beispiel (Indexverschiebung)

Sei $I = \{1, 2, \ldots, n\}$. Wir betrachten $\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. Sei nun $J = \{2, 3, \ldots, n+1\}$. Dann ist

$$\sum_{j=2}^{n+1} a_{j-1} = a_{2-1} + a_{3-1} + \cdots + a_{(n+1)-1} = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i.$$

<u>Beispiel</u>: $I = \{1, 2, \dots, 100\}$, $a_i = 101 - i$ für $i \in I$

Also: $\displaystyle\sum_{i=1}^{100} a_i = \sum_{i=1}^{n} (101 - i)$ mit Assoz. + Kommut.

$$= \sum_{i=1}^{n} 101 - \sum_{i=1}^{n} i$$

Betrachte Summanden: $a_{100} = 101 - 100 = 1$,

$a_{99} = 2$, ..., $a_1 = 101 - 1 = 100$

Also: $$\boxed{\sum_{i=1}^{100} a_i = \sum_{i=1}^{100} i}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{100} i = \sum_{i=1}^{100} 101 - \sum_{i=1}^{100} i \Rightarrow 2 \cdot \sum_{i=1}^{100} i = \sum_{i=1}^{100} 101 = 100 \cdot 101$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{100} i = \frac{100 \cdot 101}{2} = 50 \cdot 101 = \underline{\underline{5050}}$$

Beispiel: $I \subseteq J$ Indexmengen ineinander enthalten

- $\sum\limits_{j\in J} a_j - \sum\limits_{j\in I} a_j = \sum\limits_{j\in J\setminus I} a_j$.
- $\dfrac{\prod\limits_{j\in J} a_j}{\prod\limits_{j\in I} a_j} = \prod\limits_{j\in J\setminus I} a_j$ (für $a_j \neq 0$ für $j \in I$)

Bemerkung

Für die leere Indexmenge $I = \emptyset$ legt man die folgenden Konventionen fest

$$\sum_{i\in\emptyset} a_i = 0 \quad \text{und} \quad \prod_{i\in\emptyset} a_i = 1.$$

Vollständige Induktion

Aussagen: $\forall n \in \mathbb{N} : A(n)$ beweisen

Beispiel: Summiere $1+2+\dots+(n-1)+n = \sum_{j=1}^{n} j.$

Erinnere: $\sum_{j=1}^{100} j = \frac{100 \cdot 101}{2} = 50 \cdot 101 = 5050$

C.F. Gauß: $1+2+3 \;\dots\dots\; +98+99+100 = 50 \cdot 101 = 5050$

101

Behauptung: $\frac{n}{2} \cdot (n+1) = \sum_{j=1}^{n} j$ $\qquad \underline{\underline{A(n)}}$

n	$\sum_{j=1}^{n} j$	$\frac{n(n+1)}{2}$	$A(n)$
1	1	$\frac{1\cdot 2}{2}=1$	w
2	$1+2=3$	$\frac{2\cdot 3}{2}=3$	w
3	$1+2+3=6$	$\frac{3\cdot 4}{2}=6$	w
4	$\underbrace{1+2+3}_{6}+4=10$	$\frac{4\cdot 5}{2}=10$	w
⋮			
100	$1+\ldots\ldots+100=5050$	$\frac{100\cdot 101}{2}$	w
101	$1+2+\ldots+100+101$ $=5151$	$\frac{101\cdot 102}{2}=5151$	w
⋮ n	$1+\ldots+n$	$\frac{n(n+1)}{2}$	w Annahme
$n+1$	$\frac{n(n+1)}{2}+n+1$	$\frac{(n+1)(n+2)}{2}$	w

$$\frac{n(n+1)}{2}+n+1 = \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Induktionsannahme: Sei $A(n)$: $\sum_{j=1}^{n}(2j-1) = n^2$

sei wahr.

Ind.schritt: $\left(A(n) \overset{z.z.:}{\Longrightarrow} A(n+1)\right)$

$$\sum_{j=1}^{n+1}(2j-1) = \underbrace{\sum_{j=1}^{n}(2j-1)} + 2(n+1)-1 \overset{\text{Ind.ann.}}{=} n^2 + 2(n+1) - 1$$

$$= n^2 + 2n + 2 - 1 = n^2 + 2n + 1 \underset{\text{Binom}}{=} (n+1)^2$$

Also gilt $A(n+1)$: $\sum_{j=1}^{n+1}(2j-1) = (n+1)^2$

$\blacksquare$

Prinzip der vollständigen Induktion

Sei $A(n)$ einen Aussage, die von einer natürlichen Zahl n abhängt. Um zu beweisen, dass $A(n)$ wahr ist für alle $n \geq n_0$, genügt es folgendes zu zeigen:

1. $A(n)$ ist wahr für $n = n_0$. (Induktionsanfang)
2. $A(n) \Rightarrow A(n+1)$ für alle $n \geq n_0$. (Induktionsschritt)
   Die Annahme, Prämisse $A(n)$ sei wahr, heißt dabei Induktionsannahme.

<u>Beispiel</u>: Beh. Addiert man die ersten n ungeraden nat. Zahlen auf, so erhält man n^2

$$\forall\, n \in \mathbb{N}: \quad \sum_{j=1}^{n} (2j-1) = n^2$$

Bew. durch vollständige Induktion:

Induktionsanfang: zeigen $\underline{\sum_{j=1}^{1} (2j-1)} = 1^2$

$$2 \cdot 1 - 1 = 1 = 1^2 \quad ✓$$

Bemerkung

- Nicht immer gilt die Aussage wirklich für alle $n \in \mathbb{N}$. Oft ist n_0 irgendeine natürliche Zahl, ab der eine Behauptung gilt.
- In der Praxis stellt das Finden der Behauptung meist die eigentliche Schwierigkeit dar.
- Das Induktionsprinzip beruht auf **Vollständigkeit**, d.h. die Behauptung muss in der Aussage $A(n_0)$ verankert werden durch direkte Überprüfung. Macht man das nicht, ist die gesamte Schlussfolgerung falsch.

Beispiel: $A(n): 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n = 0$.

Anf: $A(n): 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n = 0$

Schluss: $A(n) \Rightarrow A(n+1)$.

$A(n+1): \underbrace{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}_{A(n)\quad 0} \cdot (n+1) = 0 \cdot (n+1) = 0$

$A(1): \quad 1 = 0$ falsch!

Der Binomische Lehrsatz

Satz
Für alle $x \in \mathbb{R}$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k.$$

Beweis durch vollständige Induktion nach n:

Induktionsanfang: Prüfe $A(1)$: Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$(1+x)^1 = \sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} x^k.$$

Rechte Seite: $\sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} x^k = \binom{1}{0} \cdot x^0 + \binom{1}{1} x^1$

$= 1 \cdot 1 + 1 \cdot x = (1+x)^1$ linke Seite ✓

für alle $x \in \mathbb{R}$.

<u>Ind. ann.:</u> $A(n)$: Für alle $x \in \mathbb{R}$ und ein beliebiges festes $n \in \mathbb{N}$ gilt $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$.

Ind. schluss: zeige $(A(n) \Rightarrow A(n+1))$. Für alle $x \in \mathbb{R}$:

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n \cdot (1+x) \underset{\text{Ind.ann}}{=} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k\right) \cdot (1+x)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k + \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{k+1}}_{\sum_{k'=1}^{n+1} \binom{n}{k'-1} x^{k'}} \qquad (k' = k+1)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} x^k$$

$$= \binom{n}{0} x^0 + \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right]} \cdot x^k + \binom{n}{n} x^{n+1}$$

$$\overset{\text{Erinnerung}}{=} \binom{n}{0} x^0 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} x^k + \binom{n}{n} x^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^k \qquad \blacksquare$$

-3-

$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$ kann man auch direkt nachrechnen!

Satz
Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

$n=2$:

$$(a+b)^2 = \sum_{k=0}^{2} \binom{2}{k} a^{2-k} b^k$$

$$= \binom{2}{0} a^2 b^0 + \binom{2}{1} a^1 b^1 + \binom{2}{2} a^0 b^2$$

$$= a^2 + 2ab + b^2$$

$a=1$, $b=x$

Beweis: 1. Fall: $a=0$: $b^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \underbrace{a^{n-k}}_{} b^k$

$\begin{cases} 0 & \text{für } n-k \neq 0 \\ 1 & \text{für } n-k=0 \end{cases}$

$= \binom{n}{n} 1 \cdot b^n = b^n$ für alle $b \in \mathbb{R}$. ✓

2. Fall: $a \neq 0$: $a^n \cdot \left(1 + \frac{b}{a}\right)^n = a^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^k$ Satz vorne für $x = \frac{b}{a}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a^n = a^n \\ 0 = 0 \end{cases}$ wahr

$\leftarrow$ für den Fall $\left(1+\frac{b}{a}\right)^n = 0$

Die Ungleichung $2^n \geq n^2$

Probiere: $n=1: \quad 2^1 = 2 \geq 1 = n^2$ ✓

$n=2: \quad 2^2 = 4 \geq 4 = n^2$ ✓

~~$n \in \mathbb{N}$~~

$\boxed{n \in \mathbb{N}, n \geq 4}$

Ind.ann.: Es gelte $2^n \geq n^2$ für bel. festes $n \in \mathbb{N}_{n \geq 4}$.

Ind.schluss: z.z.: Dann ist $(n+1)^2 \leq 2^{n+1}$.

Es gilt: $\underbrace{(n+1)^2}_{\text{Binom}} = n^2 + 2n \underbrace{+1}_{\leq n} \leq n^2 \underbrace{+3n}_{\leq n^2 \text{ für } n \geq 3} \leq 2 \cdot n^2 \underset{\text{Ind.ann.}}{\leq} 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$?□?

Prüfe $n=3$: $2^3 = 8 < 9 = n^2$

Die Ungleichung $2^n \geq n^2$ ist falsch für $n = 3$

Prüfe $n=4$: $2^4 = 16 \geq 16 = n^2$ ✓ | Ind.anfang

Fazit: Die Ungleichung $2^n \geq n^2$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ ausgenommen $n = 3$. Für $n = 1, 2, 3$ zeigt man das direkt, für $n \geq 4$ durch vollständige Induktion nach n.

ggT und kgV

ggT = größter gemeinsamer Teiler zweier natürl. Zahlen

$$ggT(a,b) := \max \underbrace{\{t \in \mathbb{N} \mid t|a \wedge t|b\}}_{M}$$

Bem.: Der ggT existiert immer, denn $1 \in M$ ($1|a \wedge 1|b$), und M wird durch a (und b) beschränkt. Jede nicht leere, beschränkte Menge natürl. Zahlen hat ein Maximum.

<u>Beispiel</u>: $\text{ggT}(244, 318) \overset{?}{=}$

$244 = 4 \cdot 61 = 2^2 \cdot 61$ Primfaktorzerlegung

$318 = 2 \cdot \underbrace{159}_{\text{nicht prim}}, \quad 2 \nmid 159, \quad 61 \nmid 159$

$\Rightarrow \text{ggT}(244, 318) = 2$

Anwendung des ggT: Beim Kürzen von Brüchen

Ist $\frac{a}{b}$ $(a, b \in \mathbb{N})$ geg., dann kann man $t = ggT(a,b)$ aus a und b herausziehen: $a = t \cdot a'$, $b = t \cdot b'$, $a', b' \in \mathbb{N}$.

Dann ist $\frac{a}{b} = \frac{t \cdot a'}{t \cdot b'} = \frac{a'}{b'}$.

Dabei ist $ggT(a', b') = 1$ (denn jeder Teiler von a' und b' ist auch einer von a und b)

(a' und b' sind teiler-fremd)

Der Bruch $\frac{a'}{b'}$ ist dann vollständig gekürzt.

Bsp: $\frac{244}{318} = \frac{2 \cdot 122}{2 \cdot 159} = \frac{122}{159}$ // gekürzt.

Bsp: a, b können auch durch Variable bestimmt sein

- $ggT(s^2 t^3 x \,,\, r s^4 kg x^2 t) = s^2 t x$ // (als Variable)
- $\dfrac{s^2 t^3 x}{r s^4 kg x^2 t} = \dfrac{t}{r s^2 kg x}$ //

<u>Analog</u>: $ggT(a_1, a_2, \ldots, a_n)$

kgV = kleinstes gemeinsames Vielfaches zweier natürlicher Zahlen

$$\mathrm{kgV}(a,b) := \min \underbrace{\{ m \in \mathbb{N} \mid a|m \wedge b|m \}}_{M'}$$

Bem: Das kgV existiert immer, denn jede nicht leere Menge natürlicher Zahlen hat ein Minimum, und $a \cdot b \in M'$, also ist $M' \neq \emptyset$.
$(a | a\cdot b, \ b | a \cdot b)$

Bsp: $\mathrm{kgV}(244, 318) = 2^2 \cdot 61 \cdot 159$

$244 = 2^2 \cdot 61$

$318 = 2 \cdot 159$

Anwendung: Addition von Brüchen

Um $\frac{p}{a} + \frac{q}{b}$ zu addieren, muss man einen Hauptnenner finden. Das kgV(a,b) ist der kleinste Hauptnenner. [Man braucht nicht unbedingt das kgV als Hauptnenner zu nutzen. Aber mit ihm hat man weniger Arbeit beim Kürzen.]

Bsp: $\frac{1}{244} + \frac{1}{318} = \frac{1 \cdot 159}{2^2 \cdot 61 \cdot 159} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 61}{2^2 \cdot 61 \cdot 159} = \frac{159 + 122}{2^2 \cdot 61 \cdot 159}$

$$= \frac{281}{2^2 \cdot 61 \cdot 159}$$ vollständig gekürzt

$ggT(281, \underbrace{159}_{3 \cdot 53}) = 1$ | $kgV(a_1, \ldots, a_n)$ analog