Семинар 1

Пределы

По видимому одна из самых важных тем в математическом анализе – это пределы. Она добротно обросла непролазным формализмом, которым мучают студентов всех технических и математических вузов. И по этому поводу я хочу сказать несколько общих слов. Изначально пределы возникли как необходимый аппарат для определения производных, которые в свою очередь возникли в работах двух математиков Лейбница и Ньютона. Ньютон пытался решать физические задачи и производные у него служили для определения скоростей и ускорений. Лейбниц же больше тяготел к построению удобного мат аппарата, не вдаваясь в физический и сельскохозяйственный смысл построенных вещей.

Сегодня мы привыкли к страшным определениям пределов через ε и δ, написанным на языке машинного кода понятном любой символьной среде вычислений. Однако, если посмотреть на рассуждения Лейбница, то он рассуждал в терминах бесконечно больших и бесконечно малых величин. Позже Вейерштрасс, будучи недовольным такой нестрогостью, и придумал известный нам язык ε и δ для определения пределов строго. Он, можно сказать, поставил математический анализ на строгие рельсы, решив проблемы не строгости!?.. Все бы хорошо, да только в 40-ые годы прошлого века Абрахам Робинсон продемонстрировал нестандартную модель вещественных чисел, в которой есть бесконечно малые и бесконечно большие величины. Кроме того, любая теорема, которая доказана в нестандартной модели, верна и в обычных вещественных числах и наоборот. Тем самым, Робинсон показал, что все рассуждения Лейбница были строгими, только он рассуждал в нестандартной модели. В 80-е годы в штатах даже проводили эксперимент и в высших учебных заведениях занятия по математическому анализу преподавали через бесконечно малые и бесконечно большие. Эксперимент был призван успешным и студенты осваивали анализ методами Лейбница ничуть не хуже, чем классическими методами Вейерштрасса.

Кроме того, чуть позже, когда появился функциональный анализ, люди поняли, что можно брать пределы даже от несходящихся, но ограниченных последовательностей. Правда, таких пределов бывает много разных. Методами теории моделей и алгебры можно описать вообще все подобные операция взятия пределов от любых последовательностей, правда с некоторыми неудобными сайд-эффектами. И вообще, математики постарались с придумыванием сложных и непонятных вещей за последние пару сотен лет.

В сухом остатке. Все изложенное выше говорит нам вот о чем. Есть такая процедура как предел. Она важна и нужна. Однако, эту процедуру можно определять очень по-разному так, что одно определение хуже другого. Вместо того, чтобы избирать какой-то конкретный путь, я встану на сторону интерфейсного подхода. Я скажу какими свойствами должен обладать предел и как с помощью этих свойств его считать. Объясню его геометрический смысл и интуицию за ним. А вот в имплементацию (то есть строгое формальное определения) я залазить не буду. Хотя бы потому, что оно не сильно нужно для реальных вычислений и понимания пределов. А во-вторых, существует несколько разных имплементаций, совершенно не похожих друг на друга с разными сильными и слабыми сторонами.

Пределы последовательностей

Давайте начнем с пределов последовательностей. Пусть $a_n \in \mathbb{R}$, где $n \in \mathbb{N}$, – некоторая последовательность чисел. Тогда операция $\lim_{n\to\infty}$ – это такая процедура, которая перерабатывает последовательности в число, которое будет называться пределом.

Геометрический смысл предела Пусть у нас есть некоторая последовательность $a_n \in \mathbb{R}$, где $n \in \mathbb{N}$, и пусть $a \in \mathbb{R}$ – некоторое число. Я хочу объяснить, что значит, что число a является пределом последовательности a_n. Идейно это значит, что с увеличением номера n число a_n становится все ближе и ближе к числу a. Например, если взять $a_n = \frac{1}{n}$, то с увеличением номера n число $\frac{1}{n}$ все ближе и ближе к 0. Или еще более дурацкий пример, если $a_n = 0$ для всех n, то число a_n все время совпадает с нулем (большей близости между $a = 0$ и a_n добиться сложно).

Формальное определение Для полноты картины я сформулирую формальное определение.

- Пусть $a_n \in \mathbb{R}$, где $n \in \mathbb{N}$, – некоторая последовательность. Тогда число $a \in \mathbb{R}$ называется ее пределом, если для любого $\varepsilon > 0$, существует номер $n_0 \in \mathbb{N}$, что для всех $n \geqslant n_0$ выполнено $|a_n - a| < \varepsilon$.

  Расшифровка определения следующая. Для любого интервала $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ для числа a все члены последовательности a_n попадают в этот интервал начиная с некоторого номера n_0.

- Это определение можно расширить на случай $a = \infty$ или $a = -\infty$. А именно, мы будем говорить, что ∞ является пределом a_n, если для любого $A \in \mathbb{R}$, существует $n \in \mathbb{N}$, что для всех $n \geqslant n_0$ выполнено $a_n > A$.

  Расшифровка определения следующая. Для любого интервала (A, ∞) для ∞ все члены последовательности a_n попадают в этот интервал начиная с некоторого номера n_0.

- Аналогично дается определение для $a = -\infty$. А именно, мы будем говорить, что $-\infty$ является пределом a_n, если для любого $A \in \mathbb{R}$, существует $n \in \mathbb{N}$, что для всех $n \geqslant n_0$ выполнено $a_n < A$.

  Расшифровка определения следующая. Для любого интервала $(-\infty, A)$ для $-\infty$ все члены последовательности a_n попадают в этот интервал начиная с некоторого номера n_0.

Примеры поведения последовательностей Хочу обратить внимание, что не всякая последовательность сходится и потому не всякая имеет предел (даже ∞ или $-\infty$). Я хочу продемонстрировать, какие ситуации бывают.

1. Последовательность a_n сходится.[1] Например $a_n = 1 + \frac{1}{n}$ сходится к 1.

2. Последовательность a_n сходится в расширенном смысле.[2] Например, $a_n = n$ сходится к ∞, а $a_n = -n^2$ сходится к $-\infty$. Обратите внимание, что в литературе сходимость к ∞ или $-\infty$ часто тоже считается расходимостью, но специального вида.

3. Последовательность не сходится. Например $a_n = (-1)^n$. То есть по четным номерам a_n будет 1, а по нечетным номерам a_n будет -1. В итоге нет одного числа, к которому накапливаются члены нашей последовательности. Но есть 2 числа вокруг которых вертятся члены нашей последовательности.

4. Последовательность не сходится, но при этом «крутится вокруг большого числа чисел». Например $a_n = \sin n$. Можно показать, что для любого числа $a \in [0, 1]$, можно найти подпоследовательность n_k такую, что $\sin n_k$ сходится к a. То есть эта последовательность все время находится близко ко всем точкам отрезка $[0, 1]$, постоянно возвращается к каждой точке, подходя к ней сколь угодно близко при любых больших номерах.[3]

Вычисления пределов

Самое главное для нас не определение предела, а вычисление пределов. Вычисления пределов устроены по следующей схеме. Для начала по определению люди доказывают руками, что какие-то последовательности сходятся к каким-то пределам. А после того, как у нас есть некоторый запас последовательностей, для которых мы знаем пределы, мы сводим вычисления любых других пределов к известным последовательностям с помощью свойств пределов.

Зверинец примеров Начнем с запаса примеров.

1. Если $a_0 > 0$, то
$$\lim_{n\to\infty}(a_0 n^d + a_1 n^{d-1} + \ldots + a_{d-1} n + a_d) = \infty$$
   Если $a_0 < 0$, то
$$\lim_{n\to\infty}(a_0 n^d + a_1 n^{d-1} + \ldots + a_{d-1} n + a_d) = -\infty$$

2. Если $a_0 \neq 0$, то
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_0 n^d + a_1 n^{d-1} + \ldots + a_{d-1} n + a_d} = 0$$

3. $\lim_{n\to\infty} n! = \infty$

[1] В классическом смысле сходимость имеется в виду к конечному пределу.
[2] Разрешены еще и бесконечные пределы.
[3] Это совершенно не очевидно и требует аккуратных доказательств.

4. Если $a > 1$, то
$$\lim_{n\to\infty} a^n = \infty \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty} a^{-n} = 0$$
если $0 < a < 1$, то
$$\lim_{n\to\infty} a^n = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty} a^{-n} = \infty$$
5. По определению
$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$
Чуть более общо
$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$$
6. Сравнение скоростей экспоненты и полинома
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_d n^d + \ldots + a_1 n + a_0}{a^n} = 0$$
для любого $a > 1$ и любого многочлена.
7. Сравнение скорости логарифма и линейной
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$$

Свойства пределов

1. $\lim_{n\to\infty} a = a$.
2. $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$.
3. $\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = (\lim_{n\to\infty} a_n)(\lim_{n\to\infty} b_n)$.
4. $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}$
5. Если $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ (или $-\infty$), то $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0$.
6. Если $a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$ и $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = b$, то $\lim_{n\to\infty} b_n = b$.

В свойствах (1)–(4) надо понимать, что если правая часть равенства существует, то и левая часть равенства существует и выполнено указанное равенство.

Обычно беда возникает, когда считается предел вида $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$ и при этом либо $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0$ либо $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \pm\infty$. Вот тупой пример
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2} = \frac{\lim_{n\to\infty} n}{\lim_{n\to\infty} n^2} = \frac{\infty}{\infty} \quad \text{Беда!}$$
Тут надо пойти на ухищрения. Конкретно в этом случае мы видим, что не до сократили
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$
Но бывают ситуации и позапутаннее.

Примеры вычислений

1. Покажем, что $\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$. Заметим, что
$$\frac{-1}{n} \leqslant \frac{(-1)^n}{n} \leqslant \frac{1}{n}$$
Но левая и правая части неравенства стремятся к нулю, значит и центральная часть идет к нулю.

2. Покажем, что $\lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n^3+1} = 0$. Действительно,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n^3+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n^2+\frac{1}{n}} = \frac{2}{\lim_{n\to\infty}(n^2+\frac{1}{n})} = \frac{2}{\infty} = 0$$

3. Покажем, что $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2}\sin(n!)}{n+1} = 0$. В начале заметим, что $-1 \leqslant \sin(n!) \leqslant 1$. Значит

$$-\frac{\sqrt[3]{n^2}}{n+1} \leqslant \frac{\sqrt[3]{n^2}\sin(n!)}{n+1} \leqslant \frac{\sqrt[3]{n^2}}{n+1}$$

Потому достаточно показать, что $\frac{\sqrt[3]{n^2}}{n+1}$ стремится к нулю. Теперь

$$\frac{\sqrt[3]{n^2}}{n+1} = \frac{n^{\frac{2}{3}}}{n}\frac{n}{n+1} = \frac{1}{n^{\frac{1}{3}}}\frac{1}{1+\frac{1}{n}}$$

Теперь мы видим, что $\frac{1}{1+\frac{1}{n}}$ стремится к 1, а $\frac{1}{n^{\frac{1}{3}}}$ стремится к 0.

4. Покажем, что $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n!} = 0$. Действительно,

$$0 \leqslant \frac{2^n}{n!} = \frac{2\cdot 2\ldots 2}{1\cdot 2\ldots n} = \frac{2}{1}\frac{2}{2}\frac{2}{3}\ldots\frac{2}{n} \leqslant \frac{2}{1}\frac{2}{2}\frac{2}{3}\ldots\frac{2}{3} = 2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}$$

Так как правая часть стремится к нулю, то и искомый предел тоже равен нулю.

Пределы функций

До этого мы вычисляли предел от выражения вида a_n, где $n \in \mathbb{N}$. Но можно вычислять пределы в случае, когда индекс не обязательно натуральное число. Самый популярный случай – пределы функций. Пусть у нас $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – некоторая функция на прямой и $x_0 \in \mathbb{R}$ – произвольная точка. Тогда можно определить понятие предела функции в точке $\lim_{x\to x_0} f(x)$. Неформально, число a будет пределом $f(x)$ в точке x_0, если для всех точек x близких (но не равных) x_0 значения функции $f(x)$ будут близки к a.

Нам как обычно будет все равно, какое там правильное формальное определение. Надо лишь знать, как считать эти пределы для конкретных случаев, а для все остальные случаи сводить к известным с помощью правил вычисления.

Формальное определение Для полноты картины приведу формальное определение. Пусть $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – некоторая функция и $x_0 \in \mathbb{R}$. Тогда число $a \in \mathbb{R}$ называется пределом f в точке x_0, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для любого x с условием $0 < |x - x_0| < \delta$ выполнено, что $|f(x) - a| < \varepsilon$.

Расшифровка определения такая. Число a называется пределом f в точке x_0, если для любой окрестности $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ точки a найдется окрестность $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ точки x_0 такая, что проколотая окрестность $(x_0-\delta, x_0+\delta)\setminus\{x_0\}$ отображается с помощью функции f внутрь окрестности $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$.

Хочу отметить, что это определение обобщается на случай, когда точка $x_0 = \pm\infty$.

Приемы вычислений

Как и в случае последовательностей для начала нам нужно запастись зверинцем примеров. В случае функций нам поможет понятие непрерывной функции. Функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ называется непрерывной в точке x_0, если $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. Непрерывные функции хороши тем, что их пределы легко считать. Неформально их график изображается непрерывной линией. Вот список непрерывных функций:

- Любой многочлен $a_d x^d + \ldots + a_1 x + a_0$ является непрерывным в любой точке $x_0 \in \mathbb{R}$.
- Рациональная функция вида $\frac{a_d x^d + \ldots a_1 x + a_0}{b_q x^q + \ldots + b_1 x + b_0}$ является непрерывной в любой точке, кроме нулей знаменателя.
- Функции e^x, $\sin x$, $\cos x$ непрерывны на всей прямой.
- $\ln x$ непрерывен для всех положительных x.

- $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$ непрерывны во всех точках, где они определены.
- Функции x^α непрерывны во всех точках, где они определены. При $\alpha \geqslant 0$ непрерывны при $x \geqslant 0$, а при $\alpha < 0$ непрерывны при $x > 0$.

Свойства у пределов функций такие же, как и у пределов последовательностей. Пределы можно брать у сумм, произведений, отношений.

Пример Пределы легко считать через непрерывные функции.

$$\lim_{x\to\pi}\sqrt{\frac{e^{\sin(x)}}{1+\cos(\ln x)}} = \sqrt{\lim_{x\to\pi}\frac{e^{\sin(x)}}{1+\cos(\ln x)}} = \sqrt{\frac{\lim_{x\to\pi} e^{\sin(x)}}{\lim_{x\to\pi}(1+\cos(\ln x))}} = \sqrt{\frac{e^{\lim_{x\to\pi}\sin(x)}}{1+\cos(\lim_{x\to\pi}\ln x)}} = \frac{1}{\sqrt{1+\cos(\ln(\pi))}}$$

Однако бывают и проблемы вида $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$. Вот известный случай

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \frac{\lim_{x\to 0}\sin x}{\lim_{x\to 0} x} = \frac{0}{0} \quad \text{Беда!}$$

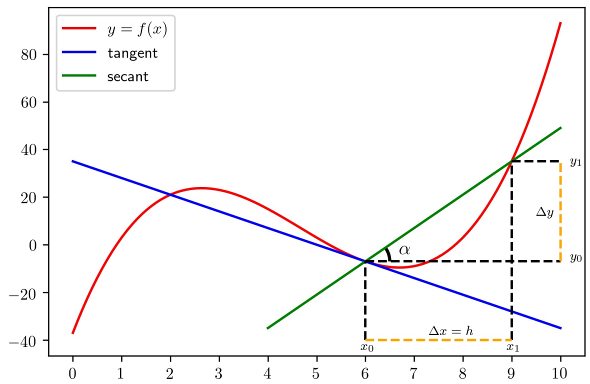
Чтобы справиться с подобным случаем надо либо страдать, либо знать чуть более прогрессивные приемы, например, правило Лопиталя. Что такое правло Лопиталя и как отлопиталить этот пример, я расскажу позже после представления производных.

Производные

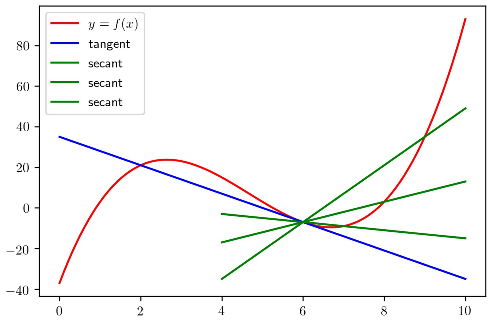
Понятие производной

Есть много всяких разных способов определять производную. Я начну с геометрического определения, которое объяснит зачем нужны производные. После уже обсудим как их вычислять и далее правило Лопитали и приложение производных.

Геометрический подход Давайте начнем с изучения картинки.



Пусть у нас есть некоторая функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и некоторая точка $x_0 \in \mathbb{R}$. Обычно задача изучения производной начинается с построения касательной в точке x_0. Как это делается. Надо отойти в сторону от точки x_0, скажем в точку $x_0 + h$, где $h \in \mathbb{R}$ – вообще говоря любое число. В новой точке у нас будет значение $f(x_0 + h)$. Теперь у нас на плоскости есть две точки: $(x_0, f(x_0))$ и $(x_0 + h, f(x_0 + h))$ и мы можем провести через них прямую. Если мы будем выбирать число h все меньше и меньше, то прямая будет все ближе и ближе подходить к касательной.



Чтобы формально завершить данную процедуру нужно ввести числовую характеристику прямой, за которой мы будем следить и выполнить переход к пределу. Обычно смотрят на тангенс угла наклона прямой, а именно, давайте посмотрим на величину

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Это отношение длины противолежащего катета угла α с картинки к прилежащему катету, то есть – тангенс этого угла (по определению). Если мы устремим h к нулю, то наша секущая прямая превращается в касательную прямую и числовая характеристика $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ стремится к числу, которое и называется производной f в точке x_0 и обозначается $f'(x_0)$. То есть формально

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}, \quad \text{если предел существует}$$

Из предыдущего описания должно быть понятно, что производная $f'(x_0)$ – это тангенс угла наклона касательной к графику $y = f(x)$ в точке x_0. А как будет выглядеть уравнение касательной? Касательная – прямая, а потому ее уравнение будет иметь вид $y = k(x - x_0) + y_0$, где k – тангенс угла наклона, а (x_0, y_0) – какая-то одна точка на прямой. Глядя на это равенство, мы понимаем, что касательная к $y = f(x)$ в точке x_0 должна задаваться уравнением

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Еще одно полезное замечание, напрямую вытекающее из геометрического подхода к производной – это описание поведения функции в зависимости от знака производной. Если $f'(x_0) > 0$, то функция точно растет, а если $f'(x_0) < 0$ то функция обязательно убывает в этой точке. То есть в этих точках понятно, что происходит. Потому интерес представляют обычно точки, где непонятно, что происходит, это точки x_0 такие, что $f'(x_0) = 0$. Такие точки называются критическими точками. Чуть ниже мы обсудим, что происходит в них.

Аналитический подход Давайте теперь геометрическую идею облачим в некоторые формулы. Пусть как и выше $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – некоторая функция и x_0 – заданная точка. Давайте сравним уравнение касательной и уравнение функции, а именно, рассмотрим разность $\rho(x - x_0) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$. Оказывается, что для хороших функций $|\rho(x - x_0)| \leqslant C(x - x_0)^2$.[4] Давайте перепишем это равенство по-другому и проанализируем полученное. Положим $h = x - x_0$ – расстояние, на которое мы отошли от точки x_0, тогда

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \rho(h)$$

То есть если мы отойдем в сторону от точки x_0 на расстояние h (оно положительно если отходим вправо и отрицательно, если влево), то расстояние между графиками функции $f(x)$ и ее касательной в точке x_0 будет равно $\rho(h)$. Условие $|\rho(h)| \leqslant Ch^2$ означает, что если отступ растет линейно, то расстояние будет расти квадратично. Это замечание очень полезно при малых h, а именно, когда $|h| < 1$. Давайте для простоты предположим, что $C = 1$. Тогда если мы отойдем вправо на расстояние $1/2$ от точки x_0, то разница между графиком функции и касательной будет не больше $1/4$. Если мы отойдем на расстояние $1/10$, то разница между графиками будет уже не больше $1/100$ и т.д. То есть возле точки касания, график функции меняется медленнее, чем мы удаляемся от точки. В этом смысле касательная прямая является самой близкой прямой к данной функции в данной точке, то есть это лучшая замена функции на прямую возле данной точки.

[4] Я не хочу формулировать общее условие дифференцируемости, так как в жизни достаточно именно приведенной тут оценки.

Приближение квадратным многочленом Написанное выше выражение

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \rho(h)$$

можно понимать так: мы попытались заменить нашу функцию возле точки x_0 на линейную функцию самым лучшим образом (лучшесть здесь измеряется в терминах расстояния ρ, на сколько быстро оно падает). А что, если мы захотим заменить нашу функцию возле точки x_0 не на линейную функцию, а на многочлен степени 2 и тоже самым лучшим способом? Так тоже можно сделать. Оказывается, что полученное разложение будет иметь вид

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{1}{2}f''(x_0)h^2 + \rho(h), \quad \text{где } |\rho(h)| \leqslant C|h|^3.$$ [5]

Давайте разберемся со всеми ингредиентами в формуле. Здесь $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – некоторая функция. Теперь для каждого x_0 мы можем посчитать $f'(x_0)$, то есть мы можем определить еще одну функцию $f'\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ по правилу $x \mapsto f'(x)$. А значит мы можем взять у нее производную в точке x_0, а именно $f''(x_0)$ – это производная f' в точке x_0. Чтобы получить еще лучшую интуицию, давайте думать про $f(x_0+h)$ как про закон движения точки на прямой, где h – это время. Тогда $f(x_0)$ – это стартовая позиция, $f'(x_0)$ – это скорость движения, а $f''(x_0)$ – это ускорение.

Поведение в критических точках Предположим, мы хотим исследовать функцию $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ на наличие минимумов и максимумов. У минимумов и максимумов есть локальный и глобальный вариант. Точка $x_m \in \mathbb{R}$ называется глобальным максимумом, если значение в ней $f(x_m)$ больше, чем любое другое значение функции $f(x)$, то есть $f(x_m) \geqslant f(x)$ для любого $x \in \mathbb{R}$. Точка x_0 будет локальным максимумом, если значение в ней $f(x_0)$ будет самым большим не на всей прямой, а только возле этой точки. Формально, что найдется интервал $(x_0 - h, x_0 + h)$ вокруг точки x_0, что $f(x_0) \geqslant f(x)$ для любой $x \in (x_0 - h, x_0 + h)$. Аналогично определяются точки глобального и локального минимума.

Глобальные минимумы и максимумы хороши тем, что мы бы их хотели найти, решая оптимизационные задачи. Однако, они очень плохо ищутся. Локальные минимумы и максимумы плохи тем, что они не оптимальны, но зато в отличие от глобальных их очень легко искать. А именно, если функция f в точке x_0 принимает минимум, то в $f'(x_0)$ обязана быть нулем, так как если она принимает положительное значение, то функция должна убывать слева от точки, а если $f'(x_0)$ отрицательная, то убывать справа от точки, что противоречило бы локальному минимуму. Оформим это в виде замечания.

Утверждение. *Пусть $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – некоторая функция и $x_0 \in \mathbb{R}$ – точка на прямой. Тогда если точка x_0 является точкой локального минимума или максимума, то $f'(x_0) = 0$, то есть x_0 является критической точкой для f.*

Еще полезно думать про это условие следующим образом. Пусть x – это время, а $f(x)$ – это позиция точки на прямой. Тогда $f'(x)$ – это скорость в момент времени x. Если мы достигли локального максимума, то в перед ним мы двигались с положительной скоростью, а после него с отрицательной. Но в самом максимуме мы должны были остановиться, чтобы сменить знак у скорости. А условие остановки – это и есть условие равенства нулю производной.

Как вычислять производные Теперь я хочу потратить некоторое время на то, чтобы понять, как вычисляются производные. Первый вопрос: а как мы задаем функции. Вообще говоря, теоретически есть куча разных способов, но реально на практике мы используем формульные выражения для задания функций, например, $\sin x + e^{\operatorname{tg} x}$ или что-то в этом духе. Такие формулы обычно состоят из чисел, операций и имен функций. Потому, чтобы уметь дифференцировать подобные функции, нам надо знать как дифференцировать числа, функции, которые присутствуют в выражении и как дифференцировать результаты операций.

Для дифференцирования операций применяются следующие правила. Пусть $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – некоторые функции, тогда

1. $(f \pm g)' = f' \pm g'$
2. $(fg)' = f'g + fg'$
3. $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

[5] Опять же я вас тут немного обманываю с оценкой на ρ, чтобы не усложнять ненужные вещи.

4. $f(g(x))' = f'(g(x))g'(x)$

А теперь несколько правил для дифференцирования знакомых нам функций:

1. $(\lambda)' = 0$ для любого $\lambda \in \mathbb{R}$
2. $x' = 1$
3. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
4. $(\sin x)' = \cos x$ и $(\cos x)' = -\sin x$
5. $(e^x)' = e^x$

Это базовый список функций, которых достаточно, чтобы продифференцировать любую функцию с учетом правил для дифференцирования операций. Действительно,

1. $(x^n)' = nx^{n-1}$, где $n \in \mathbb{Z}$, или более обще $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$, где $\alpha \in \mathbb{R}$
2. $p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots a_n x^n$, тогда $p'(x) = a_1 + 2a_2 x + \ldots + na_n x^{n-1}$.
3. $(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
4. $(a^x)' = (e^{\ln ax})' = \ln a a^x$

Все эти формулы и желание их комбинировать в минуту душевной невзгоды дают вам возможность посчитать производную от любой функции, то есть найти каким выражением будет задаваться производная, если вы знаете выражение для исходной функции. А геометрический смысл, мы уже обсудили, потому вы должны быть полностью вооружены и готовы к бою с функциями нескольких переменных.

Правило Лопиталя Пусть у нас есть две функции $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и x_0 – точка на прямой или $\pm\infty$ и известно, что $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$ (или $= \infty$). Тогда

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Например

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = \frac{1}{1} = 1$$

Обычно правило Лопиталя используют друг за другом, если после дифференцирования все еще осталась неопределенность вида $0/0$ или ∞/∞, то можно продолжить одновременно дифференцировать числитель и знаменатель до тех пор, пока неопределенность не исчезла.