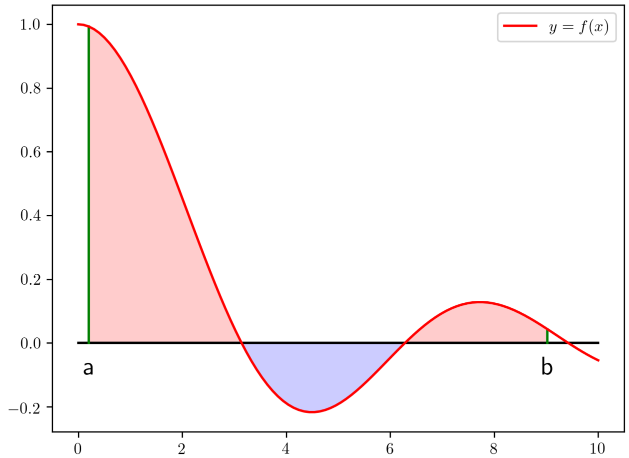
Семинар 2

Интеграл

Задача на сегодня – разобраться с тем, что такое интеграл. Как обычно мы преследуем три цели:

- Понять сельскохозяйственный смысл интеграла.
- Освоить техническую составляющую о том, как вычислять интеграл.
- Посмотреть какие-то применения интегрирования.

Что такое интеграл Пусть у нас задана функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и отрезок $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$. И мы хотим найти площадь под графиком функции на отрезке $[a, b]$, причем если график лежит выше оси OX, то площадь будем считать положительной, а если ниже, то отрицательной. Например, ниже изображен график некоторой функции f. Площади, которые мы считаем положительными изображены красным цветом, а отрицательные синим.



Интеграл функции f на отрезке $[a, b]$ обозначается следующим образом

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx$$

Я выше взял функцию, которая определена на всей прямой, но это на самом деле не обязательно. Функция может быть определена в меньшей части, как, например, логарифм. Главное, чтобы отрезок $[a, b]$ попал в область определения функции. Еще можно рассматривать случаи $a = -\infty$ или $b = +\infty$. То есть можно считать интегралы вида

$$\int\limits_{-\infty}^b f(x)\,dx \quad \int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx \quad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$$

Как бы вы ни определяли интеграл, вы всегда хотите выполнение следующих свойств

$$\int\limits_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int\limits_a^b f(x)\,dx \quad \int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)\,dx \quad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty}}\int\limits_a^b f(x)\,dx$$

Кроме того, про интеграл можно думать вот как: если мы идем по отрезку $[a, b]$ слева на право (то есть $a < b$) то мы с плюсом берем площади выше оси OX, а с минусом ниже. А если мы идем по отрезку $[b, a]$

(опять же $a < b$), то мы наоборот, будем считать площади выше оси с минусом, а ниже с плюсом. Таким образом мы можем учитывать направления интегрирования, что дает формулу

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = -\int\limits_b^a f(x)\,dx$$

Таким образом интеграл учитывает не только знак функции, но и направления движения по прямой. Вычисления интеграла – это вычисление ориентированной площади.

Еще очень полезно понимать, что интеграл не всегда существует. Если функция $f(x)$ очень поганая, то вообще говоря, для нее может быть не определено понятие $\int_a^b f(x)\,dx$. Но это зависит от вида интеграла, который вы используете. Существует много разных определений интеграла и где не срабатывает одно, помогает другое. А есть ситуации, когда интеграл не существует по объективным причинам, а из-за дефекта конструкции. Например, $\int_0^1 1/x\,dx = +\infty$ независимо от конструкции. То есть площадь под графиком этой функции бесконечна на отрезке $[0, 1]$.

Формальная сторона На самом деле, читая всякие умные книжки по разным видам анализов, вы ничего нового про интеграл не узнаете. Это все та же площадь под графиком функции. Почему же тогда существует так много разных видов интеграла? Вас наверняка уже пугали: интергал Римана, интеграл Лебега, интеграл Римана-Стильтеса, интеграл Макшейна, интеграл Курцвеля-Хинстока и т.д. Все это связано с тем, что математиков не устраивает слово «площадь» в формулировке выше. Надо строго сказать как ее считать. И вот для строгого определения площади есть вагон и маленькая тележка различных конструкций, которые на разные лады считают одну и ту же площадь. Обычно разница лишь в запасе функций, которые поддаются той или иной конструкции.

Сложно выделить самую лучшую конструкцию. Обычно одна хороша в одних обстоятельствах другая в других. А в случае приложений, так нам вообще плевать, какая из этих конструкций используется. Мы просто считаем площади по формулам и точно знаем, что полученные числа будут площадями. Но можно выделить две самые популярные: интеграл Римана и интеграл Лебега. Интеграл Римана пытается приблизить нашу функцию ступенчатой ломаной, считает площадь под ломаной, а потом переходит в некотором смысле к пределу, чтобы получить площадь под кривой. Думаю, что больше вам знать по этому вопросу не положено. А даже если и положено, то пользы оно вам не принесет. Прочитав 100500 страниц текста, вы лишь убедитесь, что знаете как считать площадь со знаком и все.

У моего решения не выбирать конкретный интеграл есть свои последствия. Я нигде не говорю точные условия существования интегралов ибо они все зависят от конкретного вида интеграла. На это можно смотреть как на полуобман. Ибо все равно никаких плохих функций в вашей жизни не встретится, а так хоть интегрировать научитесь. В любом случае, если требовать, чтобы все функции встречаемые под знаком интеграла были непрерывны, то этого хватит всегда и для любых теорем, но оговаривать это я не буду ни в каком виде.

Вычисление интегралов

Тонкости вычисления интегралов можно разбить на несколько частей:

- Как считать интегралы у конкретных функций.
- Какие свойства есть у интегралов.
- Какие трюки в работе с интегралами можно использовать: различные оценки, связь с производной и т.д.

По поводу интегрирования и дифференцирования есть одна мудрость: дифференцировать можно научить и кролика, если за каждую правильно взятую производную ему давать морковку, а интегрировать – это уже искусство. Процесс дифференцирования полностью описывался алгоритмами к действию. Что бы вам ни скормили, все можно продифференцировать по правилам. А вот с интегрированием дела обстоят хуже. Вообще говоря существуют так называемые неберущиеся интегралы, то есть такие, для которых ответ нельзя записать формулой.[1] В связи с таким делом, в теории интегрирования есть лишь рецепты о том, как можно пытаться найти интеграл.

[1] У кого случился флеш-бэк с корнями многочленов пятой степени и выше, это не случайно. Именем Галуа потоптались и по теории дифференциально-интегральных уравнений и доказали кучу разных результатов о неинтегрируемости различных функций. Вообще, если вы возьмете случайно написанную функцию, то она с наверняка не интегрируется.

Удобный формализм Интеграл состоит из двух картинок самого значка интеграла $\int\limits_a^b$ и подынтегрального выражения $f(x)\,dx$. Можно придать смысл этим отдельным выражениям, но тогда придется объяснять всякую абстрактную лабуду, потому проще относиться к ним как к картинкам. И как полагается, с картинками можно удобно поиграться. Например, можно определить дифференциал функции следующим образом $df = f'(x)\,dx$. При этом будут выполняться следующие свойства:

1. $d(f+g) = df + dg$.
2. $d(\lambda f) = \lambda df$.
3. $d(fg) = fdg + gdf$.

Свойства интегралов

1. Линейность по функции.

$$\int\limits_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx + \int\limits_a^b g(x)\,dx, \quad \int\limits_a^b \lambda f(x)\,dx = \lambda \int\limits_a^b f(x)\,dx$$

2. Линейность по отрезку интегрирования.

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx, \quad \int\limits_a^b f(x)\,dx = -\int\limits_b^a f(x)\,dx$$

3. Формула Ньютона-Лейбница (она же одномерная формула Стокса).

$$\int\limits_a^b f'(x)\,dx = f(x)|_a^b = f(b) - f(a)$$

Подчеркнем, что $f(x)|_a^b = f(b) - f(a)$ – это удобное сокращение и ничего более. В терминах дифференциалов то же самое правило превращается в

$$\int\limits_a^b df = f(x)|_a^b = f(b) - f(a)$$

На него можно смотреть так: знак интегрирования убивает знак дифференциала и меняется на знак $|_a^b$.

4. Интегрирование по частям. По правилу Лейбница имеем $(fg)' = f'g + fg'$. Если проинтегрировать это равенство, получим

$$\int\limits_a^b (fg)'\,dx = \int\limits_a^b (f'g + fg')\,dx = \int\limits_a^b f'g\,dx + \int\limits_a^b fg'\,dx$$

Применив правило Ньютона-Лейбница из предыдущего пункта к левой части и перекинув слагаемые, это правило обычно пишут так

$$\int\limits_a^b fg'\,dx = f(x)g(x)|_a^b - \int\limits_a^b f'g\,dx$$

Или в терминах дифференциалов

$$\int\limits_a^b f\,dg = f(x)g(x)|_a^b - \int\limits_a^b g\,df$$

Запас живых интегралов Табличные интегралы берутся из известных нам производных. Вот примеры того, что стоит знать

1. $\int\limits_a^b x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1}\Big|_a^b$

2. $\int\limits_a^b \frac{1}{x}\,dx = \ln x\Big|_a^b$

3. $\int\limits_a^b \cos x\,dx = \sin x\Big|_a^b$ и $\int\limits_a^b \sin x\,dx = -\cos x\Big|_a^b$

4. $\int\limits_a^b e^x\,dx = e^x\Big|_a^b$

5. $\int\limits_a^b \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \operatorname{tg} x\Big|_a^b$ и $\int\limits_a^b \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\operatorname{ctg} x\Big|_a^b$

6. $\int\limits_a^b \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x\Big|_a^b$ и $\int\limits_a^b \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctg} x\Big|_a^b$

Примеры Как и с производными, мы обычно сводим неизвестные нам интегралы к известным с помощью свойств. Только в случае с интегралом правила менее гибкие и не всегда работают. Вот пара примеров.

- Интегрирование рациональной дроби.

$$\int\limits_a^b \frac{p(x)}{q(x)}\,dx \quad \text{где } p \text{ и } q \text{ – многочлены}$$

Вообще говоря все такие интегралы считаются и делается это с помощью разложения в простейшие дроби вида $\frac{a}{(x-b)^d}$ или $\frac{ax+b}{(x^2+cx+d)^f}$, где во второй дроби находится многочлен без вещественных корней. Оказывается, что любую рациональную функцию можно разложить в сумму многочлена и дробей указанного вида. А для них интегралы берутся с помощью табличных. Я не буду разбирать общий случай а приведу пару примеров. Пусть $[a,b] \subseteq (-1,1)$, тогда

$$\int\limits_a^b \frac{1}{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_a^b \left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}\right)\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_a^b \frac{1}{1+x}\,dx + \frac{1}{2}\int\limits_a^b \frac{1}{1-x}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_a^b \frac{1}{1+x}\,d(x+1) - \frac{1}{2}\int\limits_a^b \frac{1}{1-x}\,d(1-x) = \frac{1}{2}\int\limits_a^b d\ln(x+1) - \frac{1}{2}\int\limits_a^b d\ln(1-x) = \frac{1}{2}\ln(x+1)\Big|_a^b - \frac{1}{2}\ln(1-x)\Big|_a^b$$

Другой пример интеграла

$$\int\limits_a^b \frac{x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_a^b \frac{1}{1+x^2}\,dx^2 = \frac{1}{2}\int\limits_a^b \frac{1}{1+x^2}\,d(1+x^2) = \frac{1}{2}\int\limits_a^b d\ln(1+x^2) = \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_a^b$$

- Давайте найдем интеграл от логарифма, воспользовавшись интегрированием по частям

$$\int\limits_1^y \ln x\,dx = x\ln x\Big|_1^y - \int\limits_1^y x\,d\ln x = y\ln y - 1\ln 1 - \int\limits_1^y dx = y\ln y - x\Big|_1^y = y\ln y - y + 1$$

Оценки интегралов Из-за того, что интегралы вообще говоря не считаются, а если и считаются, то получившееся выражение не всегда помогает понять, а что же мы получили, бывает требуется оценить значения интеграла сверху или снизу. В этих случаях полезно знать, какие бывают оценки на интегралы. Вот некоторые из них

1. Если функция f ограничена на отрезке $[a, b]$ следующим образом $m \leqslant f(x) \leqslant M$ для $x \in [a, b]$, то верно
$$m(b-a) \leqslant \int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a)$$

2. В более общем виде, если для двух функций f и g выполнено неравенство $f(x) \leqslant g(x)$ для всех $x \in [a, b]$, то выполнено
$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant \int\limits_a^b g(x)\,dx$$

3. Внесение модуля под интеграл
$$\left|\int\limits_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int\limits_a^b |f(x)|\,dx$$
Это, наверное, самое важное неравенство на свете. На нем строится весь функциональный анализ и смежные дисциплины.

4. Неравенство Коши-Шварца[2]
$$\left(\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx\right)^2 \leqslant \left(\int\limits_a^b f(x)^2\,dx\right)\left(\int\limits_a^b g(x)^2\,dx\right)$$
На это утверждение можно смотреть так. На интеграл от произведения можно смотреть как на скалярное произведение
$$(f, g) = \int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx$$
Тогда «длина» функции относительно этого скалярного произведения
$$|f| = \sqrt{(f, f)} = \sqrt{\int\limits_a^b f(x)^2\,dx}$$
Но мы знаем, что каким бы ни было пространство со скалярным произведением, для него выполнено $(f, g) = |f||g|\cos\alpha$, где α – угол между функциями f и g. Потому неравенство Коши-Шварца говорит, что косинус угла по модулю не превосходит единицы, что понятно.

5. Неравенство Гельдера. Пусть $p, q \geqslant 1$ такие, что $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
$$\left|\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx\right| \leqslant \left(\int\limits_a^b |f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int\limits_a^b |g(x)|^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}}$$
Это как бы несимметричная версия неравенства Коши.

[2] В России очень популярно название неравенство Коши-Буняковского. Ну нам же нужны русские фамилии в названии математических утверждении.

6. Неравенство Минковского. Пусть $p \geqslant 1$, тогда

$$\left(\int\limits_a^b |f(x)+g(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\int\limits_a^b |f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int\limits_a^b |g(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

На это неравенство можно смотреть так. Мы можем ввести «длину функции», которая не происходит из скалярного произведения следующим образом

$$\|f\|_p = \left(\int\limits_a^b |f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

Тогда для этой длины выполняется неравенство треугольника $\|f+g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p$. По нормальному, то есть по математическому, у этой длины есть более приличное название, подобные длины называются нормами. О них я поговорю чуть позже. Поверьте пригодится.

Замена переменной Пусть у нас есть два отрезка $[a,b]$ и $[c,d]$, координату на $[a,b]$ я буду обозначать за t, а координату на $[c,d]$ за x. Пусть у нас есть отображение $g\colon [a,b]\to[c,d]$ по правилу $x=g(t)$ причем $g(a)=c$ и $g(b)=d$. То есть мы переводим один отрезок в другой и при этом начало переходит в начало и конец в конец. На это можно смотреть так: мы задали параметризацию отрезка $[c,d]$ с помощью функции g определенной на отрезке $[a,b]$.

Пусть теперь у нас есть функция f на отрезке $[c,d]$. В этом случае интеграл f на отрезке $[c,d]$ можно посчитать с помощью параметризации следующим образом

$$\int\limits_c^d f(x)\,dx = \boxed{\int\limits_{g(a)}^{g(b)} f(x)\,dx = \int\limits_a^b f(g(t))\,d(g(t))} = \int\limits_a^b f(g(t))g'(t)\,dt$$

Важная часть формулы обведена в рамку. Левая и правая части от рамки – это всего лишь переобозначения. Думать про эту формулу можно так: если мы интегрируем по отрезку $[g(a),g(b)]$, то можно делать замену переменной, то есть надо вместо x подставить $g(t)$.

Дифференцирование интеграла Давайте рассмотрим интеграл с переменным верхним пределом, а именно, для произвольной функции f рассмотрим функцию

$$F(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt$$

В этом случае оказывается, что производная F это f, то есть

$$F'(x) = \left(\int\limits_a^x f(t)\,dt\right)' = f(x)$$

То есть если вам надо продифференцировать интеграл по верхнему пределу, то вы должны стереть значок интеграла и подставить значение верхнего предела в подинтегральную функцию. Если верхний предел сложно зависит от параметра, то дифференцирование идет по правилу дифференцирования сложной функции

$$\left(\int\limits_a^{g(x)} f(t)\,dt\right)' = F(g(x))' = F'(g(x))g'(x) = f(g(x))g'(x)$$

Дифференцирование по нижнему пределу происходит аналогично и следует из того, что мы можем сменить нижний и верхний предел, поменяв знак интеграла

$$\left(\int\limits_x^b f(x)\,dx\right)' = -\left(\int\limits_b^x f(x)\,dx\right)' = -f(x)$$

Есть еще одна ситуация, которую стоит иметь в виду, когда функция f зависит от двух параметров x и t, в этом случае получается правило

$$\left(\int\limits_a^b f(x,t)\,dt\right)' = \int\limits_a^b \frac{\partial}{\partial x} f(x,t)\,dt$$

здесь значок $\frac{\partial}{\partial x}$ означает частную производную по x, то есть вы смотрите на функцию $f(x,t)$ как на функцию от x, считая t постоянной величиной и дифференцируете в обычном смысле по x. Результат будет функцию, которая зависит и от x и от t, вот ее и называют $\frac{\partial}{\partial x} f(x,t)$.

Если же надо продифференцировать интеграл сразу по всему одновременно, то получится следующее

$$\left(\int\limits_{h(x)}^{g(x)} f(x,t)\,dt\right)' = f(x, g(x))g'(x) - f(x, h(x))h'(x) + \int\limits_{h(x)}^{g(x)} \frac{\partial}{\partial x} f(x,t)\,dt$$

Почему это именно так, я расскажу чуть позже, когда будут функции от многих переменных, а сейчас лишь скажу, что надо на это смотреть так. Мы вводим функцию трех переменных

$$F(u,v,w) = \int\limits_v^u f(w,t)\,dt$$

А нам надо посчитать производную функции

$$\phi(x) = F(g(x), h(x), x)$$

Это делается по правилу

$$\phi(x)' = \frac{\partial}{\partial u} F(g(x), h(x), x) g'(x) + \frac{\partial}{\partial v} F(g(x), h(x), x) h'(x) + \frac{\partial}{\partial w} F(g(x), g(x), x)$$

Больше я пока не хочу говорить про частные производные, потому пока надо запомнить правило, а понять его лучше получится на следующем занятии.

Неопределенный интеграл Неопределенным интегралом функции f называется функция F такая, что $F' = f$. Таких функций много, но все они отличаются на константу, то есть если $F_1' = f$ и $F_2' = f$, то $F_2 = F_1 + c$, где $c \in \mathbb{R}$. Неопределенный интеграл обозначается так

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c$$

Понятно, что какую-то функцию F можно посчитать по правилу

$$F(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt$$

Идея неопределенного интеграла в том, чтобы явно не считать константу c. Например, посчитаем интеграл $\int_1^x \ln t\,dt$. Давайте посмотрим на соответствующий неопределенный интеграл

$$\int \ln x\,dx = x\ln x - \int x\,d\ln x = x\ln x - \int x\frac{1}{x}\,dx = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + c$$

Так как неопределенный интеграл – это определенный интеграл с переменным верхним пределом плюс любая константа, то для его вычисления можно использовать любые правила вычисления определенных интегралов и еще в качестве бонуса можно откидывать все константы вне интегралов.

Нормы

Здесь я хочу поговорить о некотором способе мерить расстояния между точками векторных пространств. Мы уже обсуждали с вами один способ с помощью скалярных произведений. Но этот способ не единственный. Бывают принципиально другие методы и иногда они лучше, чем способ через скалярное произведение. Давайте начнем с определения.

Пусть V – векторное пространство. Для простоты можно считать, что $V = \mathbb{R}^n$, но вообще говоря сейчас тот случай, когда я бы хотел пользоваться абстрактным интерфейсом. Тогда нормой на V называется отображение $\|-\|\colon V \to \mathbb{R}$ по правилу $v \mapsto \|v\|$ и обладающее следующими свойствами

1. Для любого вектора $v \in V$ норма неотрицательна $\|v\| \geqslant 0$ при этом $\|v\| = 0$ тогда и только тогда, когда $v = 0$.

2. Для любого вектора $v \in V$ и числа $\lambda \in \mathbb{R}$ выполнено $\|\lambda v\| = |\lambda|\|v\|$.

3. Для любых двух векторов $v, u \in V$ выполнено неравенство треугольника $\|v + u\| \leqslant \|v\| + \|u\|$.

Примеры

- Пусть $V = \mathbb{R}^n$, тогда можно определить различные нормы. Пусть $x = (x_1, \ldots, x_n)$, тогда
  1. $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$. Интегральная норма.
  2. $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$. Евклидова норма, то есть это длина относительно стандартного скалярного произвденеия.
  3. $\|x\|_p = (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}$.
  4. $\|x\|_\infty = \max_{i=1}^n |x_i|$. Равномерная норма.

- Пусть $V = C[a, b]$ – пространство непрерывных функций на отрезке $[a, b]$. Можно определить кучу различных норм. Пусть $f \in C[a, b]$, тогда
  1. $\|f\|_1 = \int\limits_a^b |f(x)|\, dx$. Интегральная норма.
  2. $\|f\|_2 = \sqrt{\int\limits_a^b f(x)^2\, dx}$. Евклидова норма, то есть это длина относительно скалярного произведения заданного интегралом произведения функций.
  3. $\|f\|_p = \left(\int\limits_a^b |f(x)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}}$.
  4. $\|f\|_\infty = \max_{x\in[a,b]} |f(x)|$. Равномерная норма.

- Пусть $V = \mathrm{M}_{n\,m}(\mathbb{R})$. Если задать скалярное произведение по правилу $(A, B) = \operatorname{tr}(A^t B)$, то полученная длина $\|A\|_F = \sqrt{\operatorname{tr}(A^t A)}$ называется Фробениусовой нормой.

- Пусть $V = \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Для любой векторной нормы $\|-\|$ на $\mathbb{R}^n$ можно определить соответствующую индуцированную операторную норму $\|-\|$ на $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ по правилу

$$\|A\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| = \sup_{\|x\|\leqslant 1} \|Ax\|$$

  Как именно эта норма должна считаться по коэффициентам матрицы не всегда очевидно. Давайте приведем пару примеров

  1. Пусть $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$. Тогда для матрицы $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ операторная норма будет считаться так

$$\|A\|_1 = \max_{j=1}^n \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$$

2. Пусть $\|x\|_\infty = \max_{i=1}^n |x_i|$. Тогда для матрицы $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ операторная норма будет считаться так

$$\|A\|_\infty = \max_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

3. Пусть $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$. Тогда для матрицы $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ операторная норма будет считаться так

$$\|A\|_2 = \sigma_1 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^t A)}$$

   То есть $\|A\|_2$ равна максимальному сингулярному значению σ_1 матрицы A, что равно корню из максимального собственного значения $A^t A$. Это уже никак не очевидно и нереально круто.

Сходимость Главное применение нормы – определить сходимость. А именно, как только у нас есть понятие нормы, то мы можем мерить расстояние между векторами $\rho(v, u) = \|v - u\|$. А значит понимаем, что значит близкие векторы, что значит последовательность векторов накапливается к какому-то вектору.

Пусть V – векторное пространство и на нем есть норма $\|-\|$. Тогда если $v_n \in V$ – последовательность векторов и $v \in V$ – некоторый вектор, то говорят, что последовательность v_n сходится к v, если $\|v_n - v\|$ сходится к нулю. Так каждая норма дает нам понятие предела в пространстве V. Бывает, что разные нормы дают один и тот же вид сходимости, а бывает разный. Однако оказывается, что на конечномерном векторном пространстве (то есть если у вас есть конечный базис) все нормы дают одну и ту же сходимость. В частности в $\mathbb{R}^n$ или в $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ или $\mathrm{M}_{m\,n}(\mathbb{R})$ не важно какую норму вы используете для определения сходимости, понятие предела будет одинаковым. А вот в бесконечномерных пространствах вроде пространства $C[a, b]$ непрерывных функций на отрезке $[a, b]$ разные нормы могут дать разные сходимости, например, все нормы перечисленные в примерах выше дают принципиально разные сходимости.

Еще одно полезное утверждение про нормы в $\mathbb{R}^n$ следующее.

Утверждение. *Пусть $\|-\|$ и $\|-\|'$ – две какие-то нормы в $\mathbb{R}^n$, тогда существуют положительные константы $a, b \in \mathbb{R}$ такие, что для любого вектора $x \in \mathbb{R}^n$ выполнено неравенство*

$$a\|x\| \leqslant \|x\|' \leqslant b\|x\|$$

Нормы удовлетворяющие этому неравенству называются эквивалентными. Можно легко проверить, что эквивалентные нормы задают одну и ту же сходимость. То есть последовательность v_n сходится к v для нормы $\|-\|$ тогда и только тогда, когда она сходится к v для нормы $\|-\|'$. Это и объясняет почему в конечномерном пространстве не важно какой нормой пользоваться. Все они отличаются друг от друга на некоторую априорную константу.