# Algebra di Boole

Corso di Architettura degli Elaboratori 1

Fulvio Valenza

A.A. 2018-2019

Polo di Vercelli

- L'algebra Booleana prende il nome dal matematico inglese George Boole (1815-1864) autore del testo *The mathematical analysis of logic*. A lui è legato lo sviluppo della logica simbolica e degli operatori binari.

- Nel 1938 Shannon ha dimostrato come l'algebra booleana potesse essere presa a fondamento per la progettazione di circuiti logici digitali (Prossimo modulo).

# Costante e Variabili booleane

- **Costante booleana**: un simbolo cui è permanentemente assegnato uno dei possibili valori presi dall’insieme {0,1}, ovvero Vero o Falso
- **Variabile booleana**: un simbolo che può assumere indifferentemente uno dei due valori presi dall’insieme {0,1}
- Utilizzeremo le lettere dell’alfabeto per indicare variabili booleane.

# Operatori booleani fondamentali: **NOT**

- **NOT** che corrisponde alla negazione logica
- È un operatore unario
- Lo esprimiamo come: $\overline{\mathrm{A}}$
  - $oppure\ \neg A\ \ oppure\ !A\ oppure\ not\ A$
- L'operazione NOT è detta di complementazione, perché trasforma una variabile nel suo complemto
  - Se X=1 allora $\bar{X} = 0$
  - Se X=0 allora $\bar{X} = 1$

# Operatori booleani fondamentali: **AND**

- AND che corrisponde al prodotto logico
- È un operatore Binario
- Lo esprimiamo come: $AB$
  - $oppure\ A \cdot B\ oppur\ A \wedge B\ \ oppure\ A * B\ \ oppure\ A\ and\ B$
- Nell'operazione di and Il risultato è 1 se e solo se entrambi gli operandi valgono 1

# Operatori booleani fondamentali: **OR**

- OR che corrisponde alla somma logica
- È un operatore Binario
- Lo esprimiamo come: $A + B$
  - $oppure\ A \vee B\ oppure\ A\ or\ B$
- Nell'operazione di or Il risultato è 0 se e solo se entrambi gli operandi valgono 0

# Tavole della verità (NOT, AND, OR)

- Il valore di una espressione in corrispondenza di tutti i possibili assegnamenti è riassunto nella tavola (o tabella) di verità
- Gli operatori possono essere definiti tramite tavole di verità:

| x | x |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 0 |

| x | y | xy |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

| x | y | x + y |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 |

# Tavole della verità

| # | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $\overline{x}_1\overline{x}_2$ | $x_2x_3$ | $\overline{x}_1\overline{x}_2 + x_2x_3 = f_1$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 2 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 3 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 4 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 5 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 6 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 7 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |

# Espressioni booleane

- È possibile costruire espressioni booleane che coinvolgono più variabili ed operatori booleani oltre alle costanti 0 e 1. Si possono utilizzare parentesi per definire l'ordine di applicazione degli operatori ( in assenza di parentesi l'operatore *and* ha precedenza sull'*or*, come la moltiplicazione sulla somma)

Esempi:

$$\overline{AB} + CD$$

$$Z(X + Y) + XY$$

# Funzioni booleane

- Le funzioni booleane sono funzioni espresse tramite variabili booleane che possono assumere soltanto il valore di vero o falso (1 o 0)

- Le funzioni booleane possono essere specificate usando la tabella di verità oppure tramite espressioni

$$F = X + Y\bar{Z}$$

Equivalenti

| x | y | z | F(x,y,z) |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

# Proprietà dell'algebra

- **Elemento neutro**

$$x + 0 = x$$
$$x1 = x$$

- **Elemento nullo**:

$$x + 1 = 1$$
$$x0 = 0$$

- **Unicità dell'elemento inverso**:
  - Il complemento di x e $\bar{x}$ è unico

# Proprietà dell'algebra

- **Commutativa**

$$x + y = y + x$$
$$xy = yx$$

- **Associativa**:

$$x + (y + z) = (x + y) + z$$
$$x(yz) = (xy)z$$

- **Distributiva**:

$$x(y + z) = xy + xz$$
$$x + yz = (x + y)(x + z)$$

# Proprietà dell'algebra

- Idempotenza:

$$x + x = x$$
$$xx = x$$

- Complementazione:

$$x + \bar{x} = 1$$
$$x\bar{x} = 0$$

- Involuzione:

$$\bar{\bar{x}} = \mathrm{x}$$

# Proprietà dell'algebra

- Assorbimento

$$x + (xy) = x$$

$$x(x + y) = x$$

- Semplificazione

$$x + \bar{x}\,y = x + y$$

$$x(\bar{x} + y) = xy$$

- Implicazione

$$x \leq x + y$$

$$xy \leq x$$

# Proprietà dell'algebra

- Consenso

$$xy + \bar{x}z + yz = xy + \bar{x}z$$
$$(x + y)(\bar{x} + z)(y + z) = (x + y)(\bar{x} + z)$$

- Il prodotto *YZ*, può essere eliso dalla somma logica in cui i due fattori *Y* e *Z* appaiono in altri due prodotti che differiscono per una unica variabile, diretta in un prodotto (*X Y*) e negata nell'altro (*X' Z*)
- E' utile nella semplificazione di funzioni per via algebrica (tecnica SAR, *systematic algebraic reduction*)

# Proprietà dell'algebra

- Consenso

$$xy + \bar{x}z + yz = xy + \bar{x}z$$

$$(x + y)(\bar{x} + z)(y + z) = (x + y)(\bar{x} + z)$$

- Dimostrazione

$$\begin{aligned} XY + \bar{X}Z + YZ &= XY + \bar{Z} + YZ(X + \bar{X}) \\ &= XY + \bar{X}Z + XYZ + \bar{X}YZ \\ &= XY + XYZ + \bar{X}Z + \bar{X}YZ \\ &= XY(1 + Z) + \bar{X}Z(1 + Y) \\ &= XY + \bar{X}Z \end{aligned}$$

# Proprietà dell'algebra

- Legge di De Morgan

$$\overline{x+y} = \bar{x}\bar{y}$$
$$\overline{xy} = \bar{x} + \bar{y}$$

  - Passo da una forma in OR in una in AND e viceversa
  - Dimostrazione tramite tabella di verità

$$\overline{X_1 + X_2 + \ldots + X_n} = \overline{X_1}\,\overline{X_2}\ldots\overline{X_n}$$
$$\overline{X_1 X_2 \ldots X_n} = \overline{X_1} + \overline{X_2} + \ldots + \overline{X_n}$$

$$\overline{A + B + C + D} = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}$$

**TABLE 2-4**
**Truth Tables to Verify DeMorgan's Theorem**

| A) X | Y | X + Y | $\overline{X+Y}$ | B) X | Y | $\overline{X}$ | $\overline{Y}$ | $\overline{X}\cdot\overline{Y}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |

Table 2-4 Truth Tables to Verify DeMorgan's Theorem

# Semplificazione di una Funzione

- La semplificazione di una funzione permette di rimuovere letterali non significativi
  - Una funzione semplificata mantiene costante la sua tavola di verità

$$F = \bar{X}YZ + \bar{X}Y\bar{Z} + XZ$$

Semplificando:

$$F = \bar{X}YZ + \bar{X}Y\bar{Z} + XZ = \bar{X}Y(Z + \bar{Z}) + XZ = \bar{X}Y + XZ$$

# Funzioni logiche equivalenti

- *Una funzione logica può ammettere più espressioni booleane differenti che la definiscono.*
- Esse hanno tutte lo stesso comportamento (cioè la medesima tabella di verità), ma possono avere struttura (e costo) differente.

- Per vedere se due *reti combinatorie* siano equivalenti, basta confrontarne le tabelle di verità.
- Alternativamente, si può cercare di trasformare un'espressione booleana nell'altra (ciò in genere è più difficile del ricavarne le tabelle di verità).

# Funzioni logiche equivalenti

- le funzioni $x\,(y + z)$ e $x\,y + x\,z$ sono equivalenti

| # | $x$ | $y$ | $z$ | $y+z$ | $x\,(y+z)$ | $x\,y$ | $x\,z$ | $x\,y + x\,z$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 3 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 4 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 5 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 6 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 7 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

# Forme Canoniche

- Le funzioni booleane possono essere espresse in forme equivalenti, ovvero aventi la stessa tabella di verità
- Si dice forma canonica una espressione booleana che contenga una somma logica di prodotti (forma SOP, sum-of-products) ovvero un prodotto logico di somme (forma POS, product-of-sums)
- Data la funzione
  $F = X' Y Z' + X Y Z' + (X' + Z)'$
  - *SOP:* $F = X' Y Z' + X Y Z' + X Z'$
  - *POS:* $F = (X + Y' + Z)' (X' + Y' + Z)' (X' + Z)'$

Nota: SOP= SP e POS= PS

# Forme Canoniche

Ogni funzione in forma canonica PS può essere trasformata in forma canonica SP e viceversa, attraverso manipolazione algebrica delle espressioni.

$$
\begin{aligned}
F(x, y, z) &= \\
&= (x + y + \overline{z}) \cdot (x + \overline{y} + z) \cdot (\overline{x} + y + \overline{z}) \cdot (\overline{x} + \overline{y} + \overline{z}) \\
&= (x + x\overline{y} + xz + xy + y\overline{y} + yz + x\overline{z} + \overline{y}\,\overline{z} + \overline{z}z) \cdot (\overline{x} + \overline{z}) \\
&= x\overline{z} + \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z} + \overline{y}\,\overline{z} + \overline{x}yz \\
&= x(y + \overline{y})\overline{z} + \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z} + (x + \overline{x})\overline{y}\,\overline{z} + \overline{x}yz \\
&= xy\overline{z} + x\overline{y}\,\overline{z} + \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z} + \overline{x}yz
\end{aligned}
$$

# Mintermini

- Il *mintermine* di ordine *i* di una funzione di *n* variabili è una funzione prodotto delle *n* variabili in forma diretta o in forma negata che vale 1 in corrispondenza alla sola combinazione *i* delle variabili.
- Nel *mintermine* di ordine *i* compaiono in forma diretta le variabili il cui valore è 1 nella tavola della verità e compaiono in forma negata le variabili il cui valore è 0 nella tavola della verità.

| $x$ | $y$ | *minterm* |
|---|---|---|
| 0 | 0 | $\overline{x}\,\overline{y}$ |
| 0 | 1 | $\overline{x}\,y$ |
| 1 | 0 | $x\,\overline{y}$ |
| 1 | 1 | $x\,y$ |

# Mintermini

- La seguente tavola della verità riporta i *mintermini* per una funzione di 3 variabili.

| $x$ | $y$ | $z$ | *minterm* |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | $\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}$ |
| 0 | 0 | 1 | $\overline{x}\,\overline{y}\,z$ |
| 0 | 1 | 0 | $\overline{x}\,y\,\overline{z}$ |
| 0 | 1 | 1 | $\overline{x}\,y\,z$ |
| 1 | 0 | 0 | $x\,\overline{y}\,\overline{z}$ |
| 1 | 0 | 1 | $x\,\overline{y}\,z$ |
| 1 | 1 | 0 | $x\,y\,\overline{z}$ |
| 1 | 1 | 1 | $x\,y\,z$ |

# Forma canonica *Somma di Prodotti*

- Forma canonica Somma di Prodotti (SP) di una funzione logica si ottiene sommando i mintermini in corrispondenza dei quali la funzione vale 1
- Data la funzione F espressa dalla seguente tavola della verità:

| $x$ | $y$ | $z$ | $F$ | *minterm* |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 | $\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}$ |
| 0 | 0 | 1 | 0 | |
| 0 | 1 | 0 | 0 | |
| 0 | 1 | 1 | 1 | $\overline{x}\,y\,z$ |
| 1 | 0 | 0 | 1 | $x\,\overline{y}\,\overline{z}$ |
| 1 | 0 | 1 | 0 | |
| 1 | 1 | 0 | 1 | $x\,y\,\overline{z}$ |
| 1 | 1 | 1 | 0 | |

$$F(x, y, z) = \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z} + \overline{x}\,y\,z + x\,\overline{y}\,\overline{z} + x\,y\,\overline{z}$$

# Maxtermini

- Il maxtermine di ordine i di una funzione di n variabili è una funzione somma delle n variabili in forma diretta o in forma negata che vale 0 in corrispondenza alla sola combinazione i delle variabili.
- Nel maxtermine di ordine i compaiono in forma diretta le variabili il cui valore è 0 nella tavola della verità e compaiono in forma negata le variabili il cui valore è 1 nella tavola della verità.

| $x$ | $y$ | *maxterm* |
|---|---|---|
| 0 | 0 | $x + y$ |
| 0 | 1 | $x + \overline{y}$ |
| 1 | 0 | $\overline{x} + y$ |
| 1 | 1 | $\overline{x} + \overline{y}$ |

# Maxtermini

- La seguente tavola della verità riporta i *maxterm* per una funzione di 3 variabili.

| $x$ | $y$ | $z$ | *maxterm* |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | $x + y + z$ |
| 0 | 0 | 1 | $x + y + \overline{z}$ |
| 0 | 1 | 0 | $x + \overline{y} + z$ |
| 0 | 1 | 1 | $x + \overline{y} + \overline{z}$ |
| 1 | 0 | 0 | $\overline{x} + y + z$ |
| 1 | 0 | 1 | $\overline{x} + y + \overline{z}$ |
| 1 | 1 | 0 | $\overline{x} + \overline{y} + z$ |
| 1 | 1 | 1 | $\overline{x} + \overline{y} + \overline{z}$ |

# *Prodotto di Somme*

- Forma canonica *Prodotto di Somme (PS)* di una funzione logica si ottiene facendo il prodotto dei maxtermini in corrispondenza dei quali la funzione vale 0.
- Data la funzione *F* espressa dalla seguente tavola:

| $x$ | $y$ | $z$ | $F$ | *maxterm* |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 | |
| 0 | 0 | 1 | 0 | $x + y + \overline{z}$ |
| 0 | 1 | 0 | 0 | $x + \overline{y} + z$ |
| 0 | 1 | 1 | 1 | |
| 1 | 0 | 0 | 1 | |
| 1 | 0 | 1 | 0 | $\overline{x} + y + \overline{z}$ |
| 1 | 1 | 0 | 1 | |
| 1 | 1 | 1 | 0 | $\overline{x} + \overline{y} + \overline{z}$ |

$$F(x, y, z) = (x + y + \overline{z}) \cdot (x + \overline{y} + z) \cdot (\overline{x} + y + \overline{z}) \cdot (\overline{x} + \overline{y} + \overline{z})$$

# Notazione compatta forme canoniche SP

Per la forma SP si usa la seguente notazione compatta:

$$F = \sum_n \{ i_1, i_2, \ldots, i_k \}$$

dove $n$ è il numero di variabili, e $i_1, i_2, \ldots, i_k$ il valore (espresso come numero decimale), dell'indice delle righe nella tavola della verità della funzione in cui la funzione stessa vale 1.

*ESEMPIO* - La funzione di pag. 6 ha la seguente espressione compatta:

$$F = \sum_3 \{0, 3, 4, 6\}$$

# Notazione compatta forme canoniche SP

*ESEMPIO* - Sia data la seguente funzione, espressa in forma compatta:

$$F = \sum\nolimits_4 \{1, 5, 9, 10, 11, 14, 15\}$$

Indicando con $(a, b, c, d,)$ le 4 variabili (nell'ordine), l'espressione canonica PS della funzione è data da:

$$F = \overline{a}\overline{b}\overline{c}d + \overline{a}b\overline{c}d + a\overline{b}\overline{c}d + a\overline{b}c\overline{d} + a\overline{b}cd + abc\overline{d} + abcd$$

# Notazione compatta forme canoniche PS

Per la forma PS si usa la seguente notazione compatta:

$$F = \prod_n \{ i_1, i_2, \ldots, i_k \}$$

dove $n$ è il numero di variabili, e $i_1, i_2, \ldots, i_k$ il valore (espresso come numero decimale), dell'indice delle righe nella tavola della verità della funzione in cui la funzione stessa vale 0.

*ESEMPIO* - La funzione di pg 12 ha la seguente espressione compatta:

$$F = \prod_3 \{ 1, 2, 5, 7\}$$

# Notazione compatta forme canoniche PS

*ESEMPIO* - Sia data la seguente funzione, espressa in forma compatta:

$$F = \prod_4 \{0,\ 2,\ 12,\ 15\}$$

Indicando con $(a,\ b,\ c,\ d,)$ le 4 variabili (nell'ordine), l'espressione canonica SP della funzione è data da:

$$F = (a+b+c+d)\cdot(a+b+\overline{c}+d)\cdot(\overline{a}+\overline{b}+c+d)\cdot(\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}+\overline{d})$$

# Le Mappe di Karnaugh (K-map)

- La mappa di Karnaugh associata ad una funzione F di n variabili è una matrice contenente $2^n$ celle, ogni cella corrisponde ad una delle $2^n$ righe della corrispondente tavola della verità.

- Pertanto ogni cella è etichettata con una delle $2^n$ configurazioni delle n variabili, ed il valore in essa contenuto corrisponde al valore che assume la funzione F quando le variabili assumono i valori definiti dall'etichetta della cella.

# Le Mappe di Karnaugh (K-map)

- Mappa di Karnaugh (K-map)
  - *diagramma composto da celle*
  - *ogni singola cella rappresenta un mintermine*
- ∀ forma SOP è identificabile graficamente su una mappa di Karnaugh come l'insieme delle celle corrispondenti ai mintermini inclusi nella funzione
- Le espressioni semplificate prodotte dalla mappa di Karnaugh sono sempre espresse nella forma SOP o POS

# Le Mappe di Karnaugh (K-map)

- Le celle di una K-map corrispondono ai mintermini di una funzione ad n variabili.
- ATTENZIONE!!!
  - *Tutta la mappa meno la cella i corrisponde al maxtermine i.*
- Forme SOP:
  - *Si impostano ad 1 le celle corrispondenti ai mintermini che implicano la funzione*
  - *Le rimanenti celle sono impostate a 0 (in assenza di non-specificazioni)*
- Forme POS:
  - *Si impostano a 0 le celle corrispondenti ai maxtermini che specificano la funzione*
  - *Le rimanenti celle sono impostate a 1 (in assenza di non-specificazioni)*

# Dalla tabella di Verità alle k-map

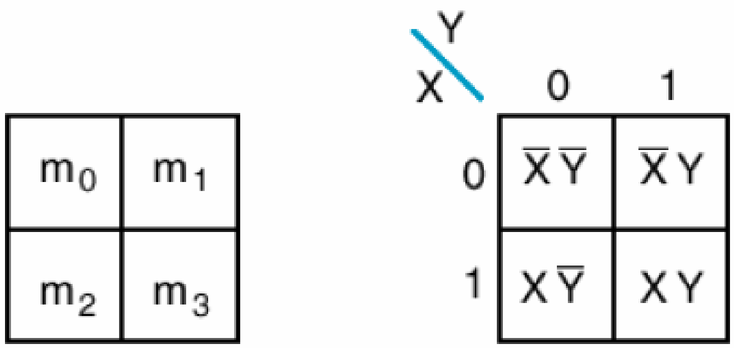
- Si riordinano le righe in modo che ogni riga differisca dalla successiva solo per un letterale, negato nell'una e diretto nell'altra
- Ad ogni riga corrisponde una cella
- Le variabili meno significative etichettano le colonne e quelle più significative le righe della K-map

| A | B | C | $m_i$ o $M_i$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 3 |
| $\boxed{0}$ | $\boxed{1}$ | $\boxed{0}$ | $\boxed{2}$ |
| 1 | 0 | 0 | 4 |
| 1 | 0 | 1 | 5 |
| 1 | 1 | 1 | 7 |
| 1 | 1 | 0 | 6 |

| A \ B,C | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 3 | 2 |
| 1 | 4 | 5 | 7 | 6 |

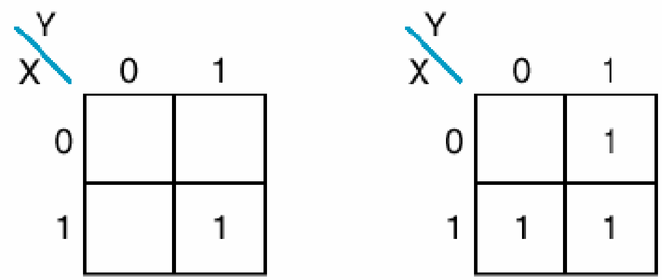
# K-map a due variabili

- Individuazione dei mintermini
- Rappresentazione di funzioni nella K-map




(a) (b)

Fig. 2-8 Two-Variable Map




(a) XY (b) X + Y

Fig. 2-9 Representation of Functions in the Map

# K-map a tre variabili

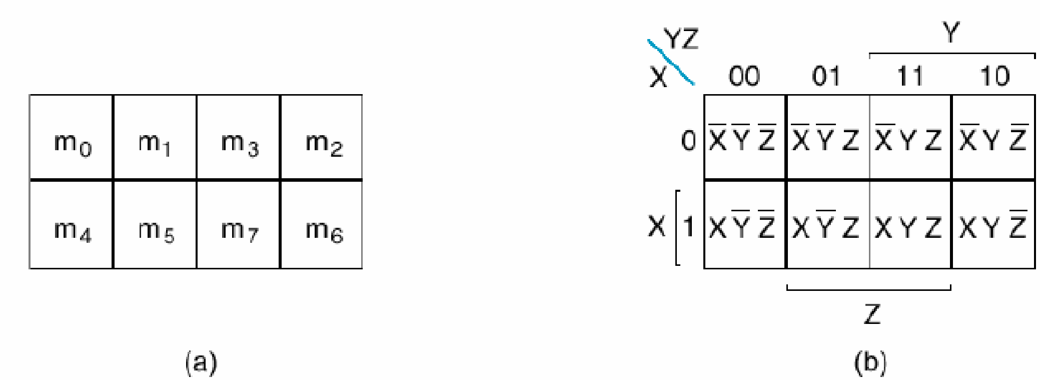
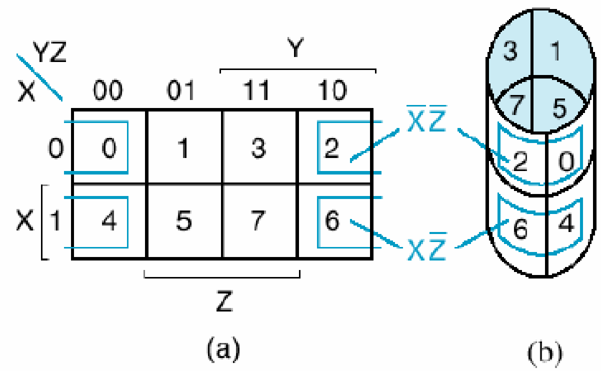



Fig. 2-10 Three-Variable Map




La mappa a tre variabili è lo sviluppo nel piano di un cilindro.

Le celle 0-2, 4-6 sono adiacenti.

Fig. 2-12 Three-Variable Map: Flat and on a Cylinder to Show Adjacent Squares

# K-map a 4 variabili

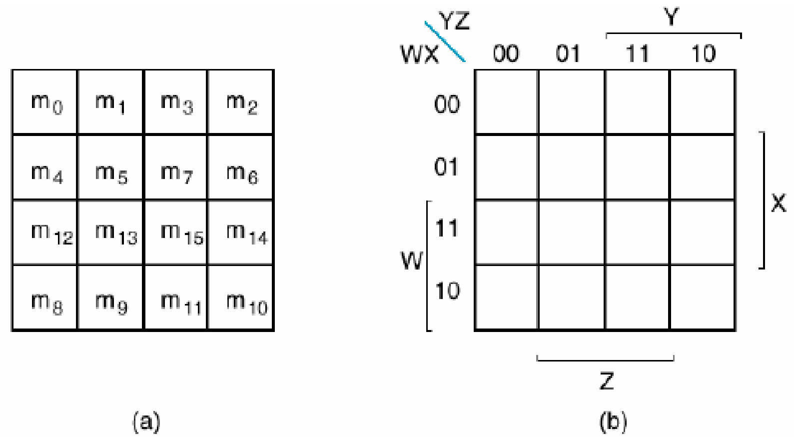



Fig. 2-17 Four-Variable Map

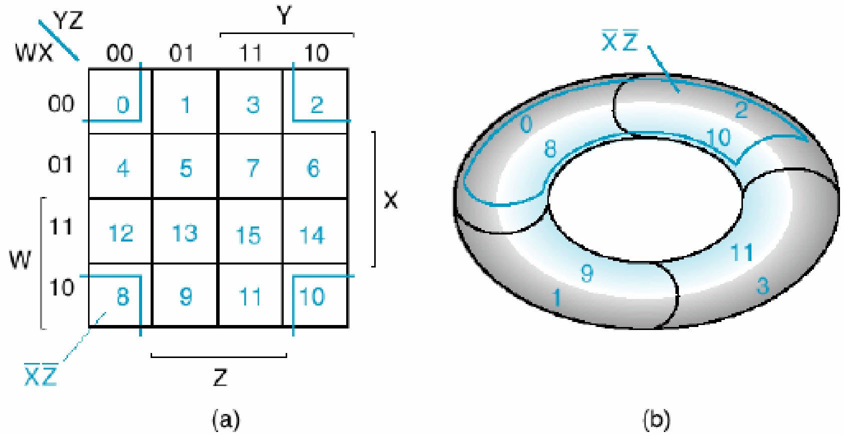



Fig. 2-18 Four-Variable Map: Flat and on a Torus to Show Adjacencies

La mappa a quattro variabili è lo sviluppo nel piano di un toroide.

# Esempio di Rappresentazione

$$F=\sum m(4, 5, 6, 12, 13) = A'\,B\,C'\,D' + A'\,B\,C'\,D + A'\,B\,C\,D' + A\,B\,C'\,D' + A\,B\,C'\,D$$

| a b \ c d | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 00 | | | | |
| 01 | 1 | 1 | | 1 |
| 11 | 1 | 1 | | |
| 10 | | | | |

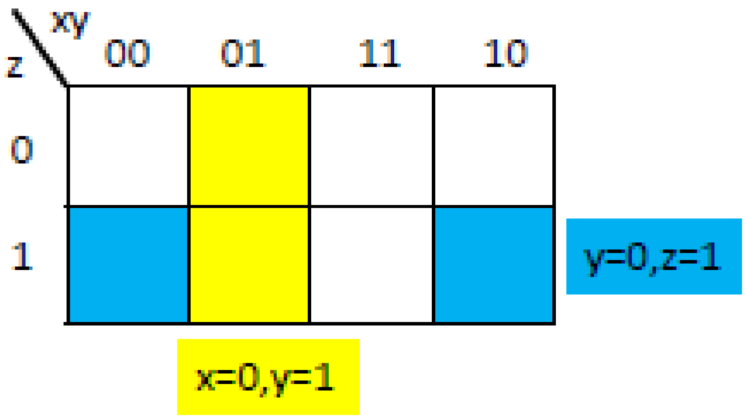
# Adiacenza e accoppiamenti

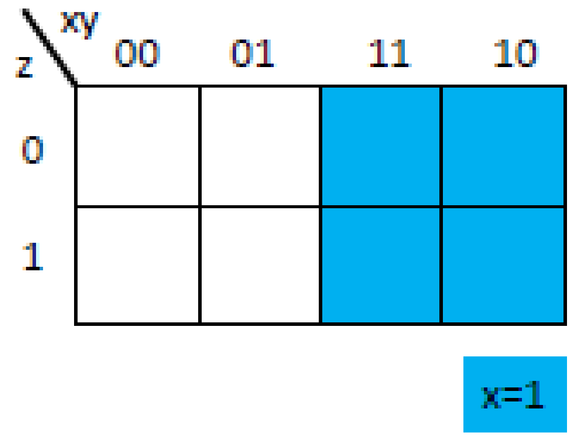
- Adiacenza
  - *In una K-map, due celle si dicono adiacenti se hanno un lato in comune. I bordi superiore e inferiore, e destro e sinistro sono coincidenti*
  - *In K-map, due celle adiacenti corrispondono a mintermini che differiscono tra loro soltanto per una variabile, che risulta in forma diretta in una cella e negata nell'altra*
- La combinazione di celle adiacenti corrisponde ad un prodotto di letterali costituito da tutti i letterali delle celle costituenti tranne quelli che sono diretti in un prodotto e negate nell'altro
- Data una funzione di n variabili (per n>4 la k-map è di poca utilità), la k-map corrispondente contiene 2n celle
- Data una funzione di n variabili, indicato con i il numero di letterali elisi a partire da un mintermine, sono allora possibili N accoppiamenti di 2i celle, dove

$$N = 2^{n-i}\binom{n}{n-i} = 2^{n-i}\frac{n!}{i!(n-i)!}$$

# Semplificazione di funzioni

- Data una mappa di Karnaugh di ordine *n*, si definisce *sottorettangolo* di ordine ($n - k$) un insieme di $2^{(n-k)}$ celle adiacenti.
- Tale sottorettangolo è caratterizzato dall'avere *k* variabili fisse e ($n - k$) variabili che assumono tutti i valori.



# Minimizzazione di funzioni

Per minimizzare la funzione occorre trovare una copertura di tutte le celle che contengono 1 utilizzando il minimo numero di termini più semplici possibile.

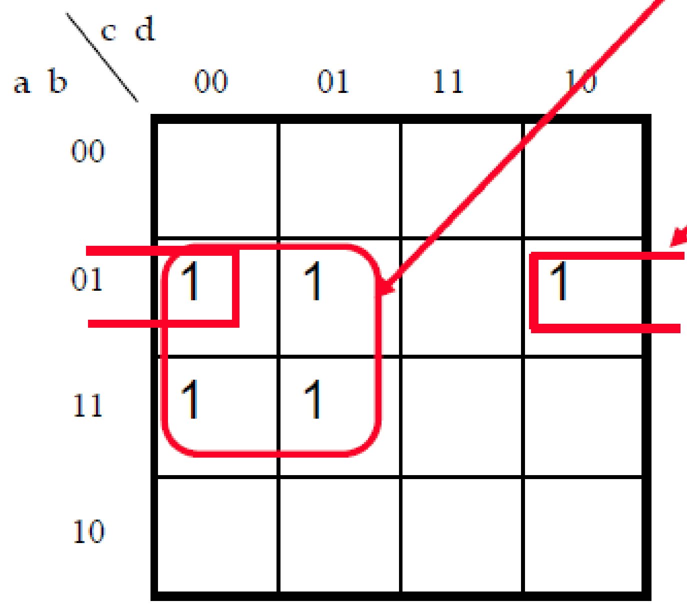
Alcune celle possono appartenere a più rettangoli (non è un problema perché vale la legge di idempotenza)

| z \ xy | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |

$F = xy + xz + yz$

# Esempio di minimizzazione di funzioni

$$F=\sum m(4, 5, 6, 12, 13) = B\,C' + A'\,B\,D'$$



# Esempio di minimizzazione di funzioni

- Semplificare la funzione seguente in forma POS:
  $F = \sum m(0,1,2,5,8,9,10)$

| AB \ CD | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 00 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 01 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 11 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 10 | 1 | 1 | 0 | 1 |

$$\overline{F} = AB + CD + B\overline{D}$$

$$F = (\overline{A} + \overline{B})(\overline{C} + \overline{D})(\overline{B} + D)$$

# Esempio di minimizzazione di funzioni

- Semplificare la funzione seguente in forma SOP:
  $F = \sum m(0,1,2,4,5,6,8,9,12,13,14)$

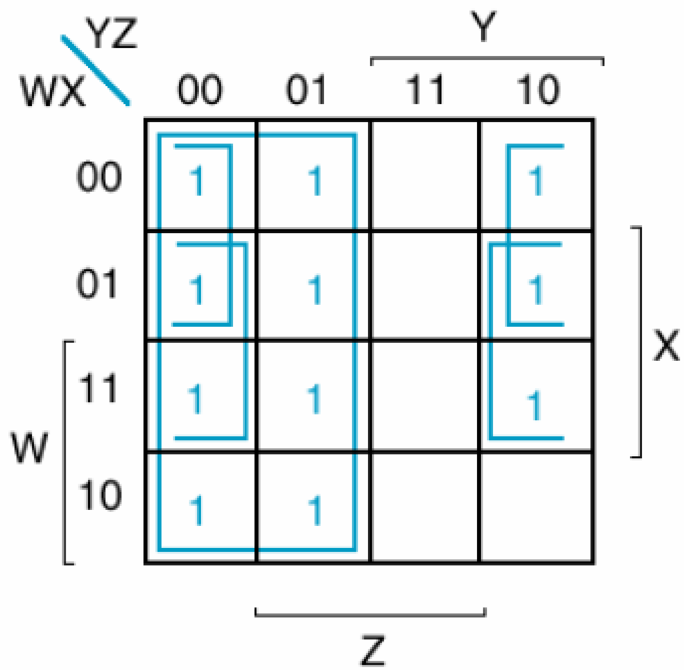



Fig. 2-19 Map for Example 2-5: $F = \overline{Y} + \overline{W}\overline{Z} + X\overline{Z}$

# Forma Prodotti di Somme

La tecnica di minimizzazione individuata si può utilizzare anche per trovare una rappresentazione minimale nella forma PS anziché in quella SP vista finora. Basta raggruppare le celle contenenti 0.

| zw \ xy | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 00 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 01 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 11 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 10 | 1 | 1 | 1 | 0 |

$$F = (x+z+w)\ (x+\text{not}(y)+z)\ (\text{not}(x) + y + w)$$

# Funzioni non completamente specificate

- Sono funzioni la cui tabella di verità prevede, oltre alle configurazioni in cui la funzione vale 1, configurazioni per le quali sono possibili due situazioni
  - *Sono combinazioni di ingresso che non si possono presentare*
  - *Sono combinazioni di ingresso che si possono presentare, ma per le quali è indifferente il valore che si attribuisce all'uscita*
- I mintermini corrispondenti a tali configurazioni si chiamano condizioni di non-specificazione
- Nella mappa di Karnaugh vengono rappresentate con X
- La scelta di decidere quale valore attribuire alla X in fase di semplificazione è legata alla possibilità di ottenere espressioni più semplici

# Semplificazioni con non-specificazioni

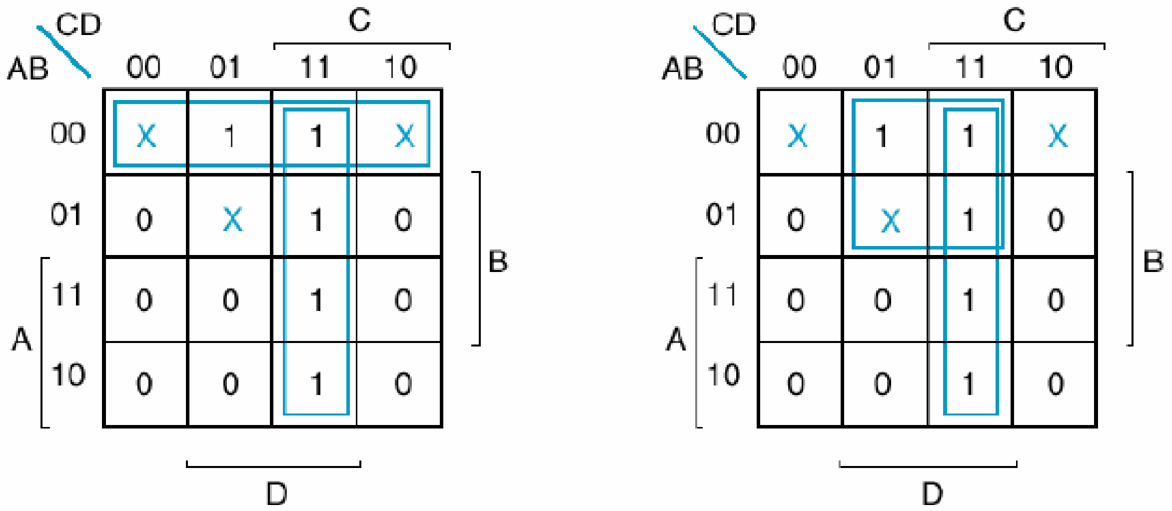
1. Individuare i PI assumendo che X = 1
2. Eliminare dall'elenco dei PI ottenuto tutti i PI costituiti soltanto da non-specificazioni
3. Selezionare i soli PI necessari a coprire la funzione, definita dai soli mintermini che la implicano (coprire i soli 1 della funzione)
4. Le non-specificazioni che fanno parte dei PI selezionati nella copertura saranno impostate a 1, le altre a 0

| z \ xy | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | * | * | * | 1 |
| 1 | 1 | * | 0 | * |

| z \ xy | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | * | * | 1 |
| 1 | 1 | * | 0 | 1 |

# Semplificazioni con non-specificazioni

- Semplificare la funzione:
  F (A,B,C,D)= Σm(1,3,7,11,15),
  con non specificazioni d(A,B,C,D) = Σm(0,2,5)




(a) $F = CD + \overline{A}\overline{B}$  (b) $F = CD + \overline{A}D$

Fig. 2-25 Example with Don't-Care Conditions