# GRAFI: MINIMO ALBERO RICOPRENTE

[Deme, seconda edizione] cap. 13

Fino a Sezione 13.1 inclusa

# Problemi (reali)

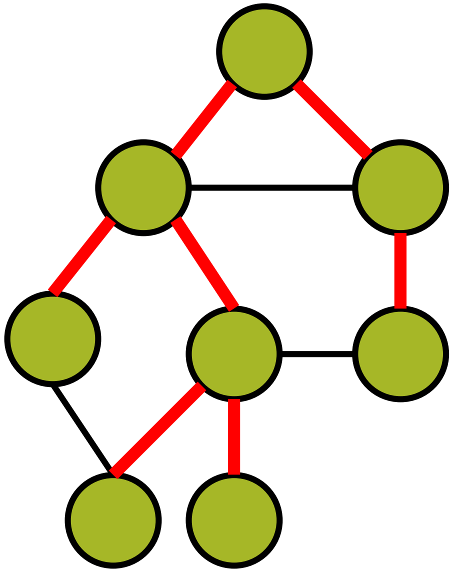
- Infostrada vuole prendere in affitto da Telecom **la minor lunghezza possibile** di linee telefoniche (**archi**) ma in modo tale da poter raggiungere tutti gli utenti (**vertici**).
- Il problema della **tassonomia nelle scienze naturali** (vedi il libro di Demetrescu).
- Progettazione (routing) di **circuiti VLSI**.
- Partizionamento di dati in **cluster**.
- … ecc.

# Albero Ricoprente

**Albero ricoprente:** dato un grafo G=(V,E) **non orientato** e **connesso**, un albero ricoprente è un **sottografo** $T \subseteq G$ tale che:

T è un **albero libero** (cioè un sottografo connesso aciclico)

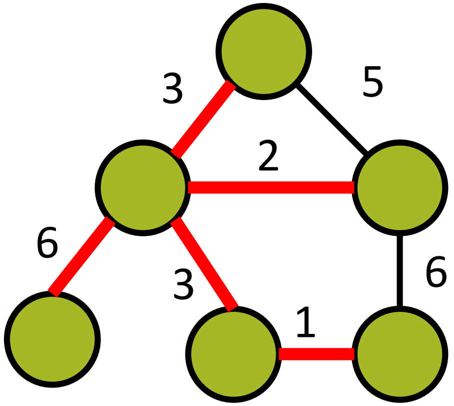
T contiene **tutti i vertici** di G



# **Minimo** Albero Ricoprente

**Minimo albero ricoprente o Minimo albero di copertura (abbreviazioni MAR o MST - Minimum Spanning Tree -):** dato un grafo G **connesso**, **non orientato** e **pesato**, minimo albero ricoprente (MAR) per G è un **albero ricoprente** in cui la somma dei pesi degli archi nell’albero è minima. Cioè è un sottografo di G tale che:

- è un **albero libero**;
- contiene **tutti i nodi di G**;
- (**ammissibilità:**) fra tutti i sottografi di G soddisfacenti le due condizioni precedenti, è quello (o uno di quelli) tale che (**ottimalità:**) **la somma dei pesi degli archi è minima**.

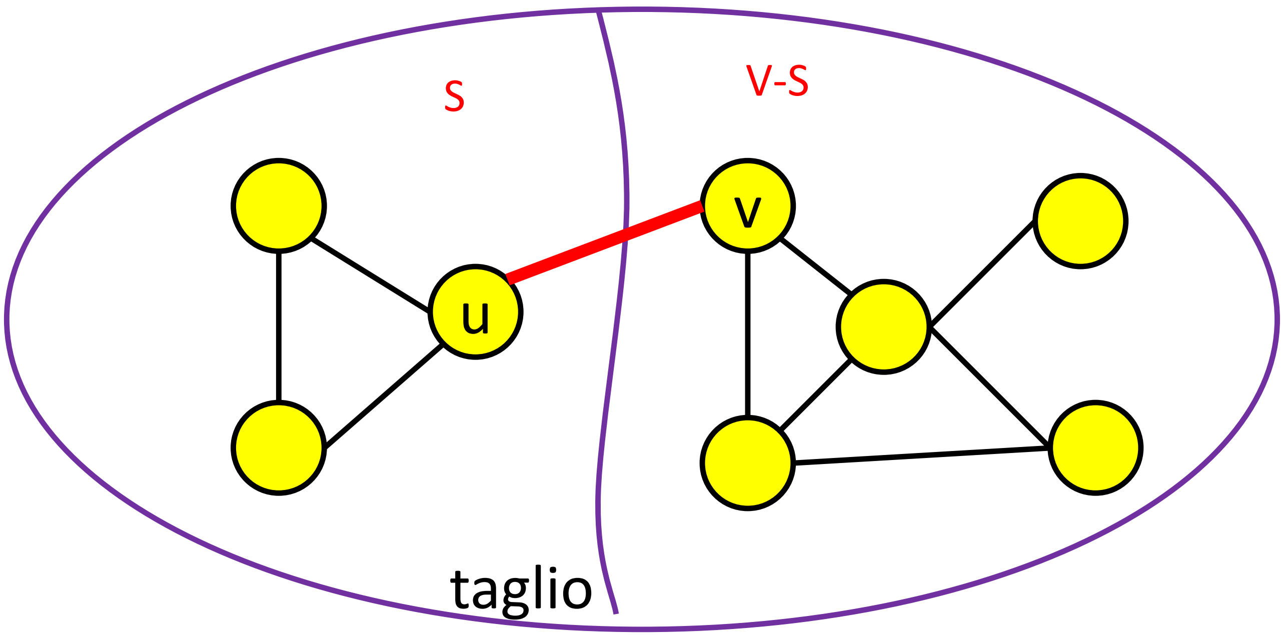


# Taglio e archi attraversanti un taglio

Un ***taglio*** è una **partizione** dell'insieme V di tutti i nodi di un grafo in due parti non vuote, S e V-S.

Si dice che un arco (u, v) **attraversa il taglio** se i suoi estremi u e v appartengono **uno a una parte e l'altro all'altra**.

Esempio:




L'arco **(u, v)** attraversa il taglio.

# Sinonimi

Per dire che un arco (u, v) attraversa il taglio si usa anche:

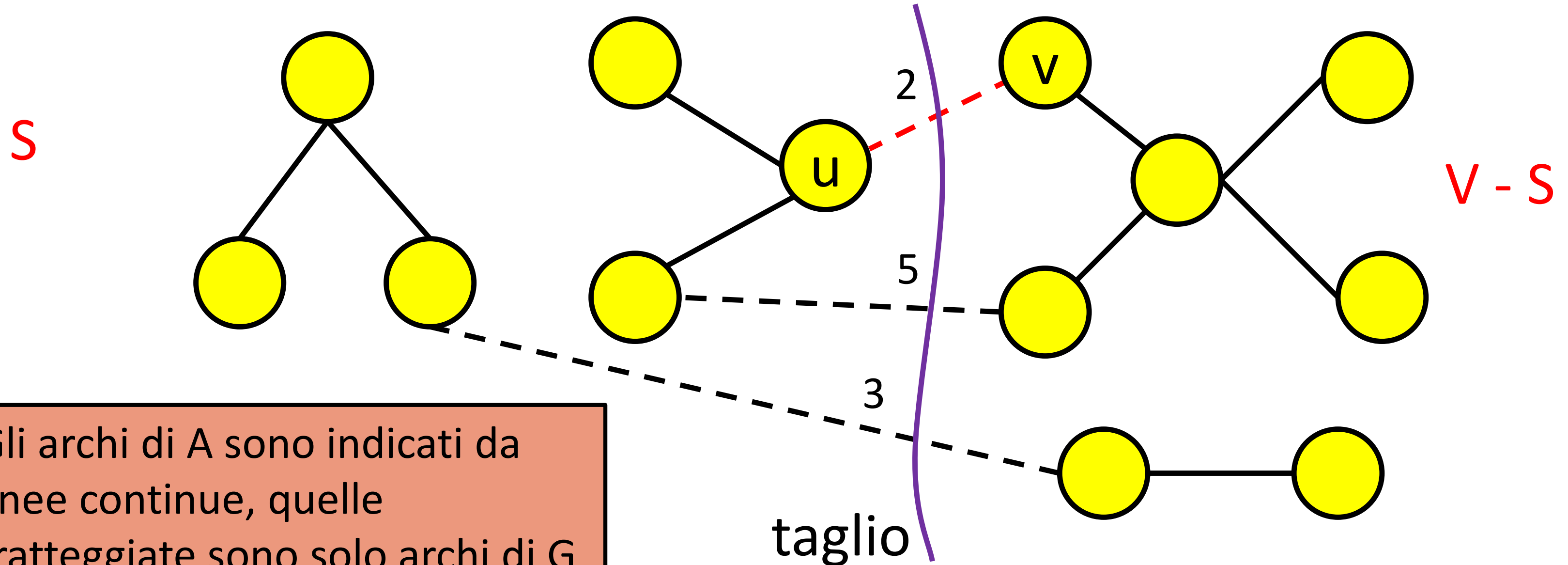
- il taglio (S, V-S) **taglia** l'arco (u, v);
- l'arco (u, v) **è tagliato** dal taglio (S, V-S);
- o anche, nel libro di testo, l'arco (u, v) **appartiene al taglio** (secondo quest'ultima espressione un taglio è visto/definito come un insieme di archi).

# Il lemma del taglio

Sia **A un insieme di archi appartenenti a** (sottoinsieme di) **un MAR** di un grafo G. Consideriamo un **taglio non attraversato da alcun arco di A**; siano S e V-S le sue due parti.

Sia **(u, v)** l'arco (o un arco) di **peso minimo** fra tutti gli archi del grafo che **attraversano il taglio** (**arco leggero**):

allora (u, v) appartiene a un MAR (di G) che estende A, cioè l'insieme **A ∪ {(u, v)} è anch'esso un sottoinsieme di un MAR del grafo G**.

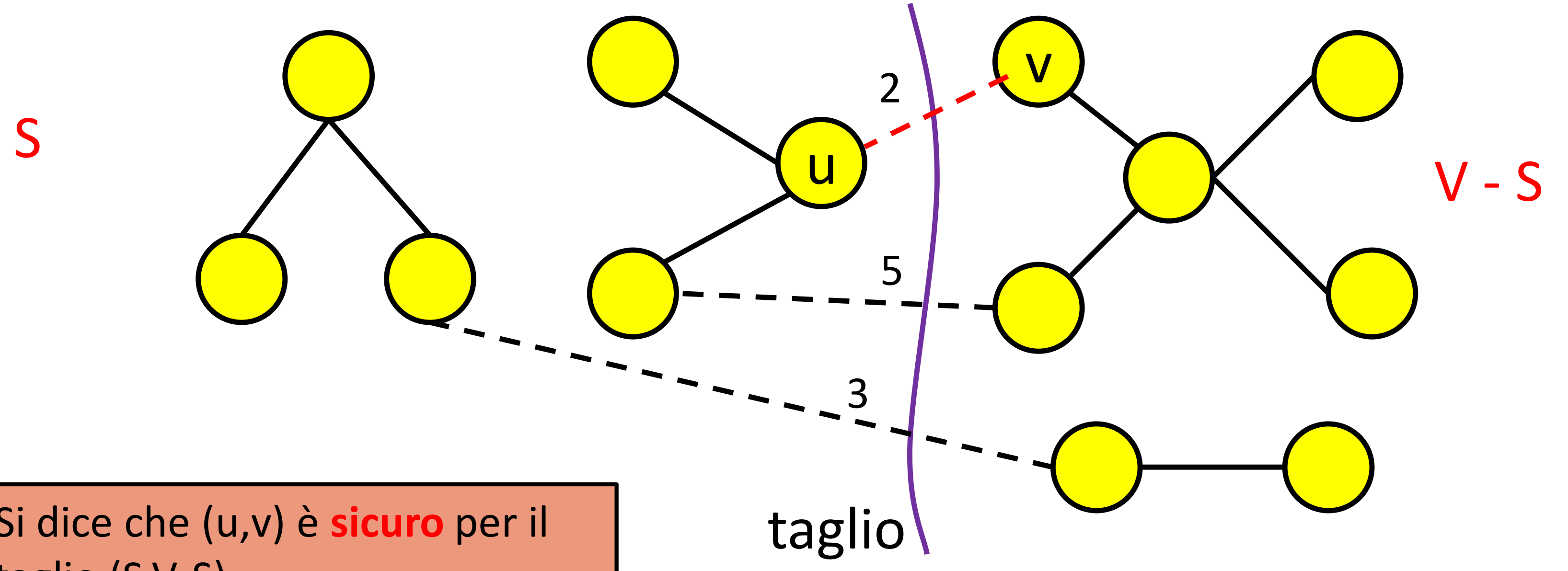



Gli archi di A sono indicati da linee continue, quelle tratteggiate sono solo archi di G

# Il lemma del taglio – uso

Data una **foresta** A costituente un **sottoinsieme di un MAR di un grafo** G, se operiamo in G un **taglio** (S, V-S) **che non tagli alcun arco di A**, e poi aggiungiamo ad A un **arco di peso minimo fra quelli tagliati da (S, V-S),** otteniamo una nuova foresta A' che **è ancora un sottoinsieme di un MAR**.

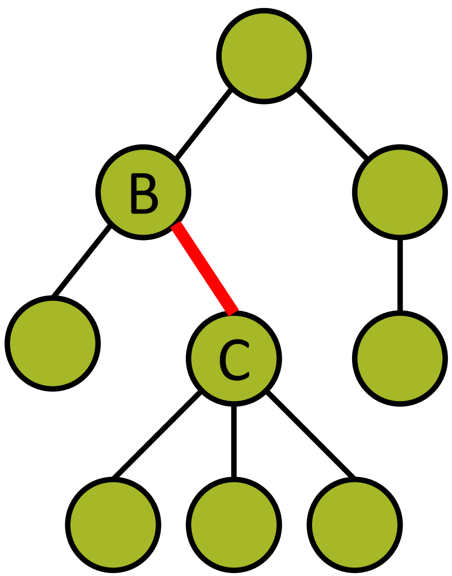
**Nota:** qui identifichiamo un albero o una foresta con l'insieme dei suoi archi.



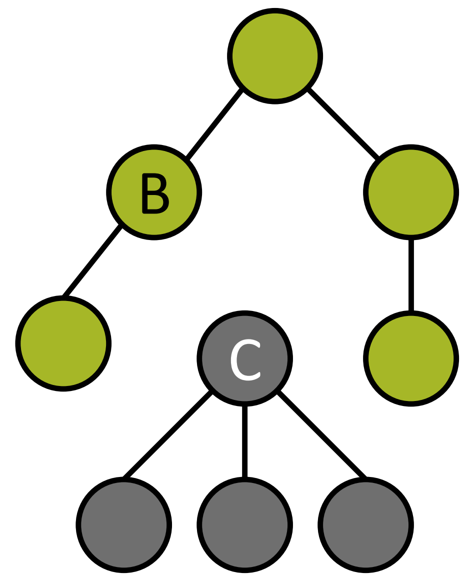

Si dice che (u,v) è **sicuro** per il taglio (S,V-S)

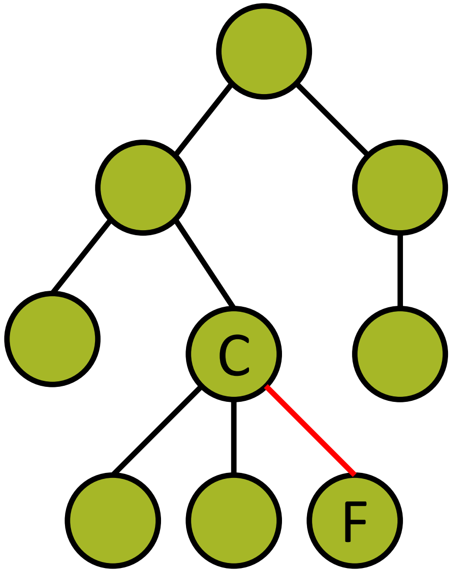
# Due proprietà importanti per il seguito

**PROPRIETÀ P1:** Se in un albero libero, cioè un **grafo non orientato connesso aciclico**, si **elimina un arco**, il grafo (albero) si scinde in **due sottografi (alberi) distinti non connessi fra di loro** (e diventa quindi un grafo non connesso).

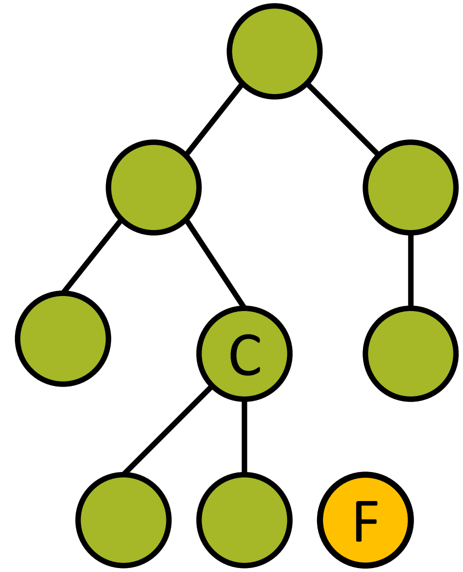



rimuovo l'arco BC:
ottengo due alberi.

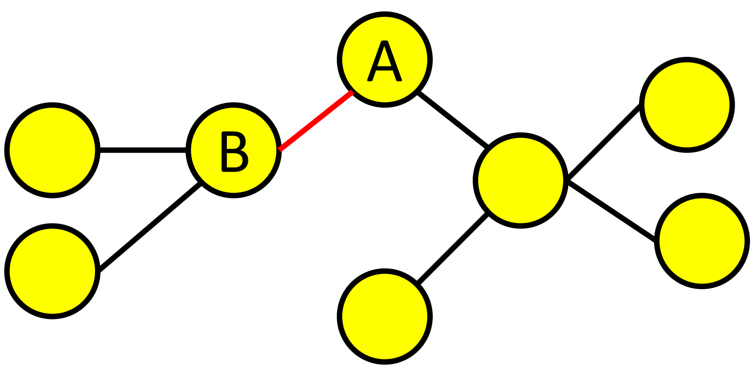


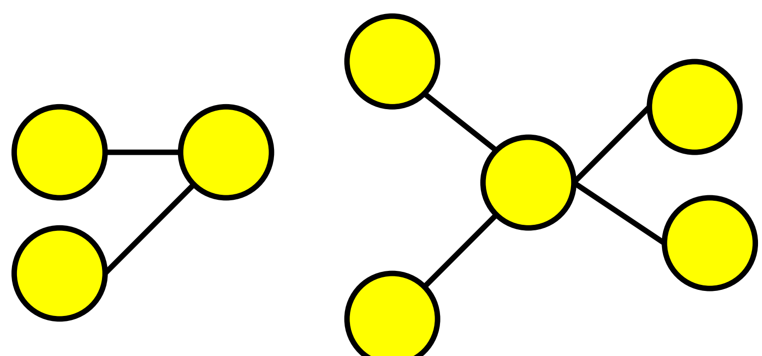



Rimuovo l’arco CF: ottengo due alberi distinti, di cui uno costituito dal solo nodo F.




Rimuovo l’arco AB: ottengo due alberi distinti.

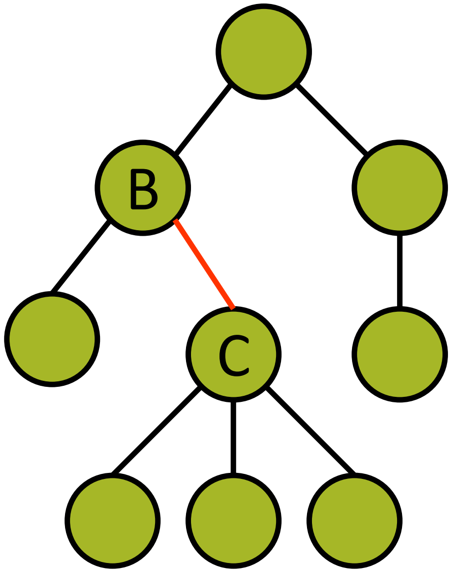


**Dimostrazione P1:**

Fra **due nodi** di un albero vi è **uno e un solo cammino** (perché altrimenti nel grafo non orientato connesso ci sarebbe un ciclo);

Allora se si elimina un arco appartenente a tale cammino **non ci sono altri cammini fra i suoi due estremi**, e quindi nemmeno fra i due sottoalberi,  altrimenti tali due estremi sarebbero ancora connessi.

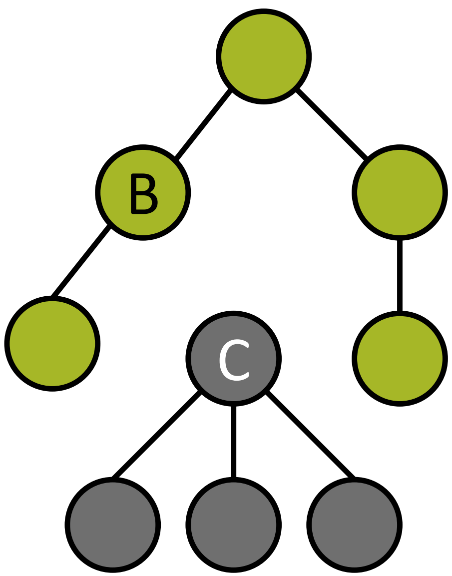



un solo cammino
tra B e C

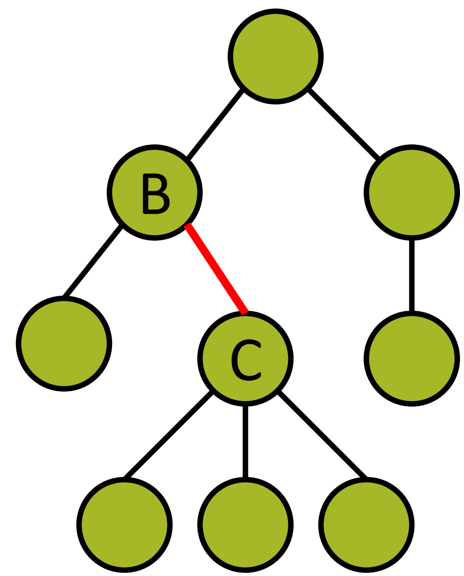
# Due proprietà importanti per il seguito - II

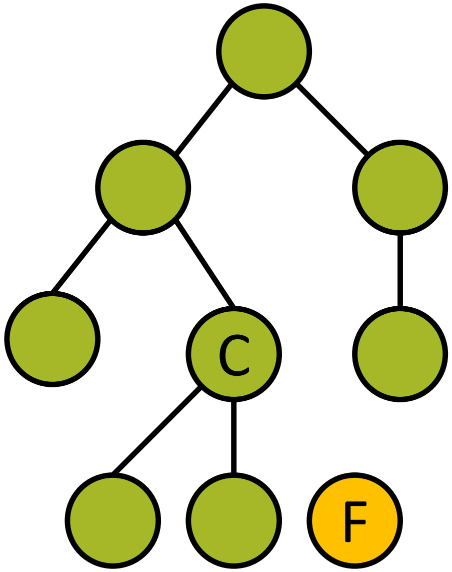
**PROPRIETÀ P2:** Se si connettono con un arco due nodi appartenenti rispettivamente a due alberi fra loro non connessi, si ottiene un albero.

(Dimostrazione ovvia).

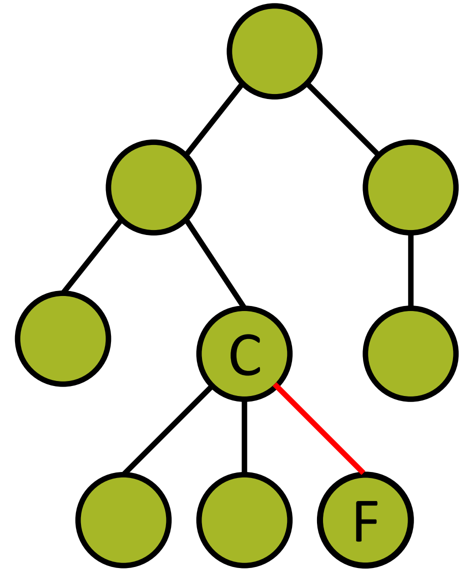



connetto i due alberi per mezzo dell'arco BC: ottengo un albero.

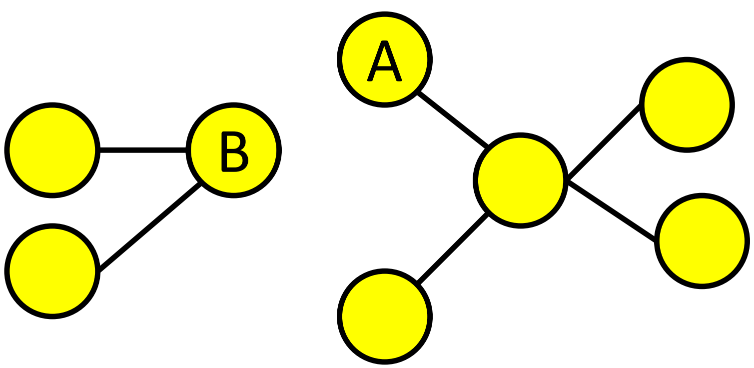


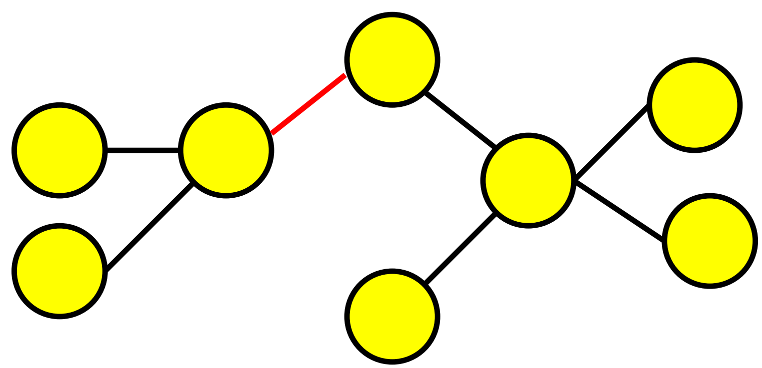



Unisco i due alberi per mezzo dell’arco CF: ottengo un albero.




Unisco i due alberi tramite l’arco AB: ottengo un albero.



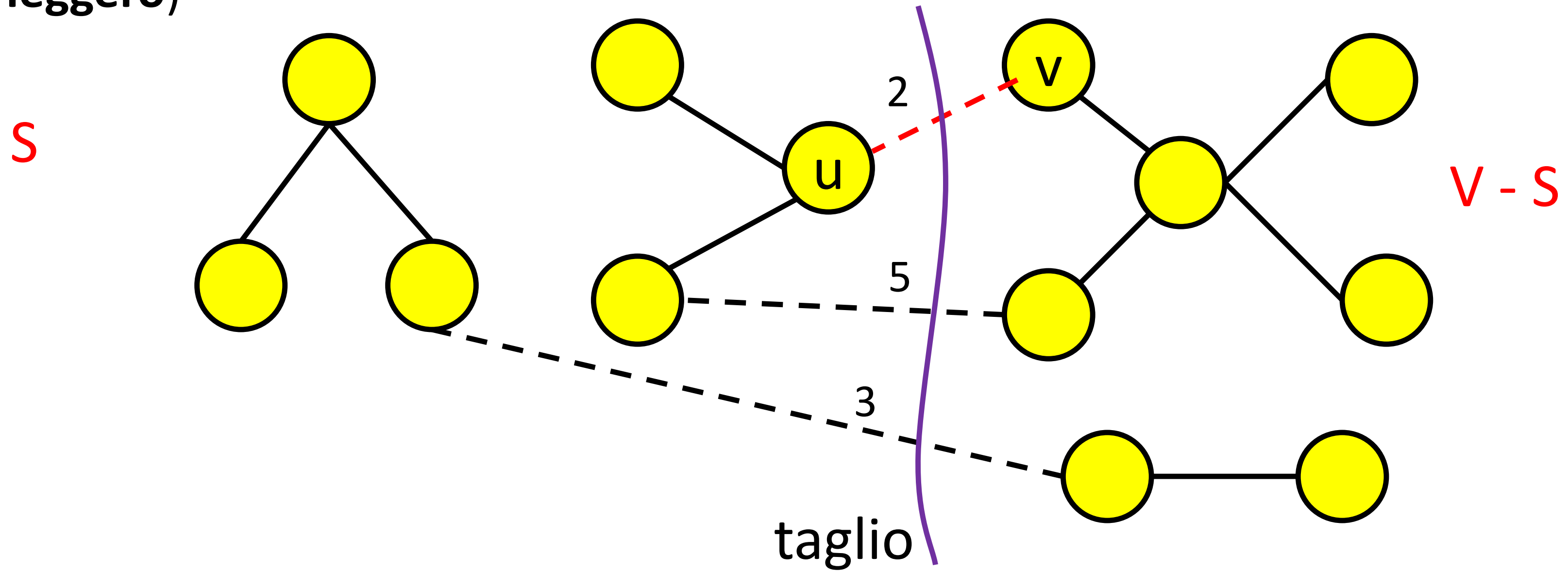
# Dimostrazione del lemma - I

Dato un grafo G, siano dunque:

**A un insieme di archi di G** che supponiamo **appartenenti ad un**(o stesso) **MAR** di G; cioè **A può essere esteso a un MAR**;

(S, V-S) un taglio che **non taglia alcun arco di A** (o che non è attraversato da alcun arco di A);

(u, v) il (o un) **arco di peso minimo fra quelli** di G **tagliati** dal taglio (S, V-S) (**arco leggero**)



# Dimostrazione del lemma - II

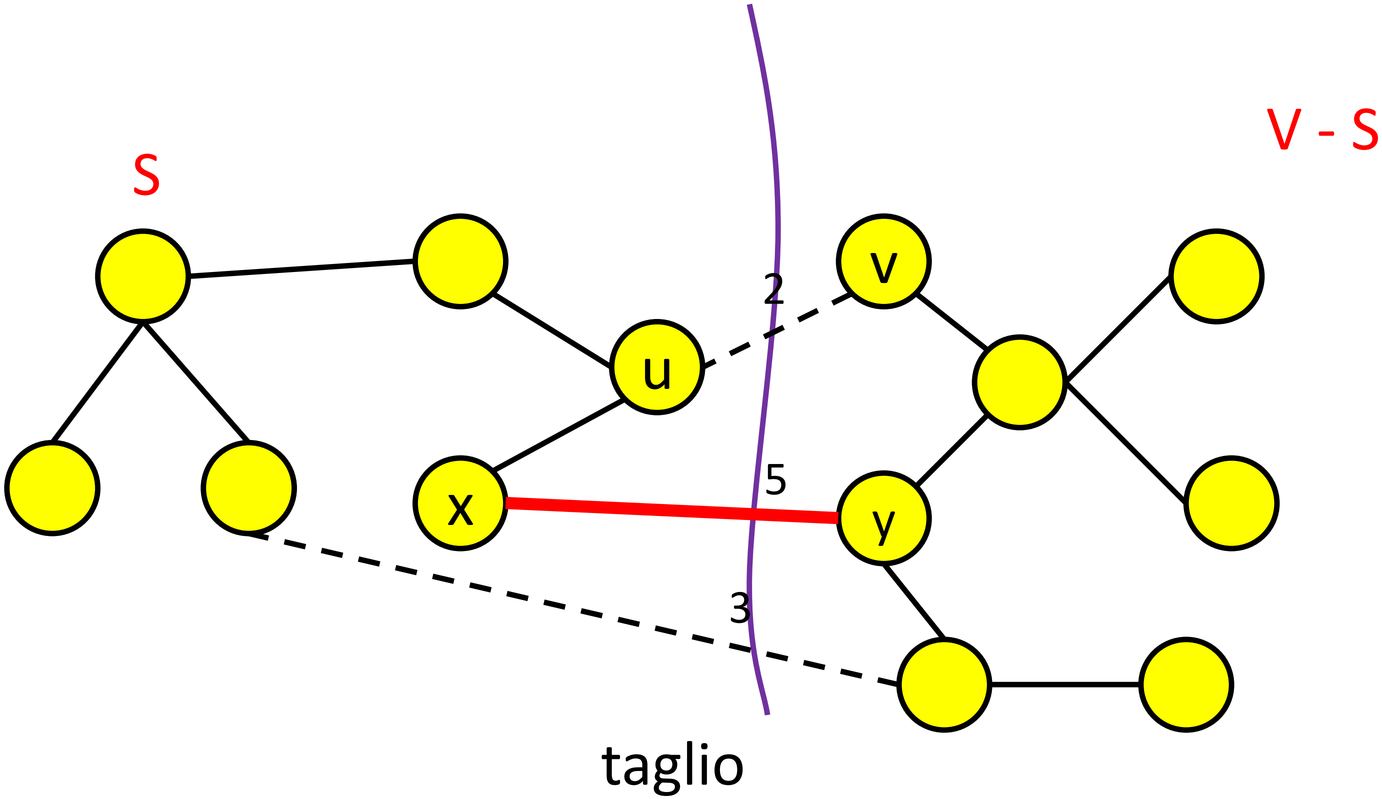
Un **minimo albero ricoprente** di G che estende l'insieme A di archi è per definizione **un albero di peso minimo** fra tutti gli alberi ricoprenti di G **che estendono** (cioè contengono) **A**.

Proviamo quindi a trovare un albero ricoprente (e poi un minimo albero ricoprente) che estenda A.

# Dimostrazione del lemma - III

Un **albero ricoprente** AR contenente A deve connettere **tutti i nodi** di G, quindi deve contenere **un cammino da u a v**.

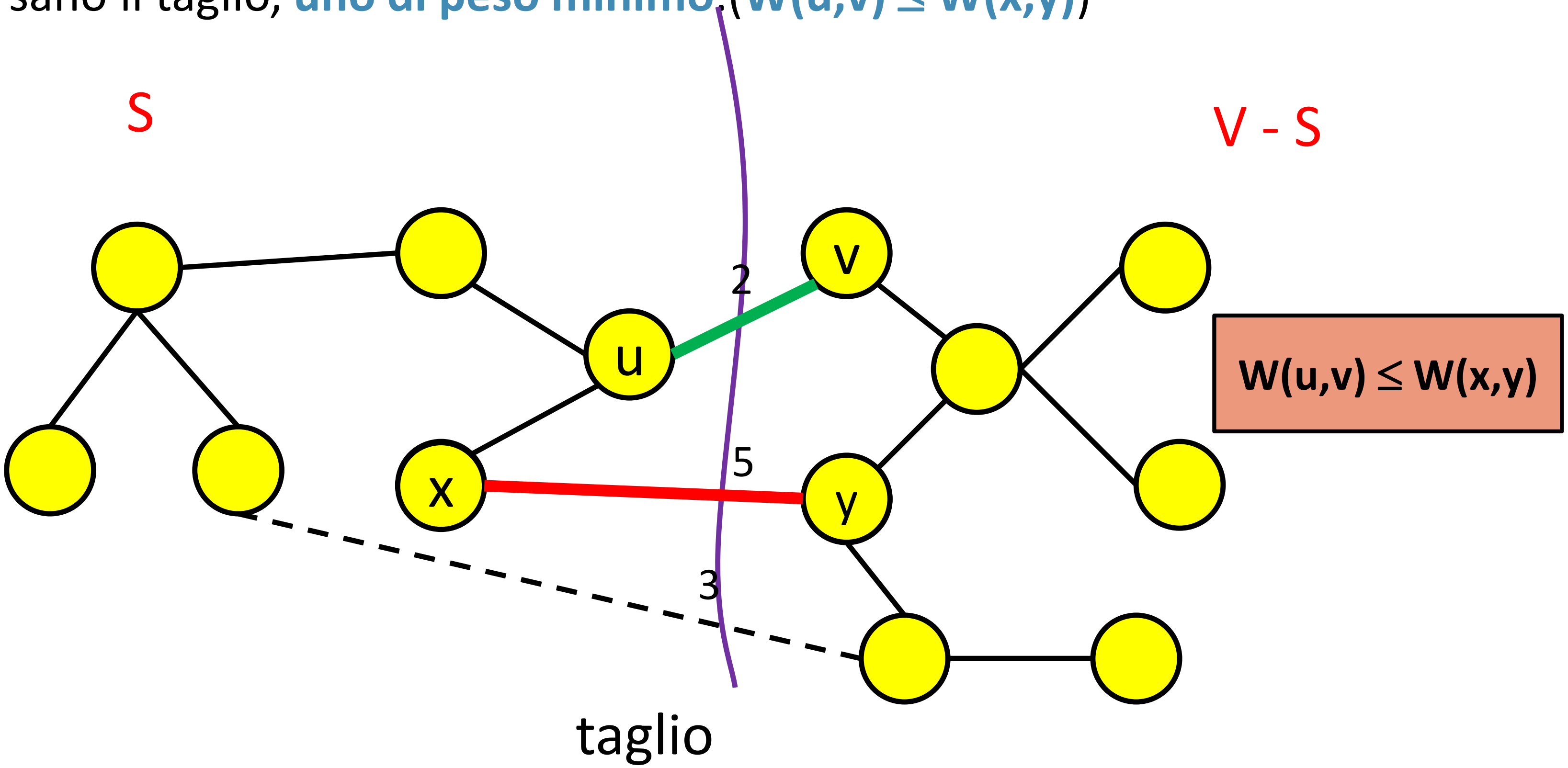
Poiché u e v si trovano da parti opposte del taglio, un tale cammino deve contenere **almeno un arco (x, y)** che **attraversa** il **taglio**.



# Dimostrazione del lemma - IV

Se nell'albero AR **sostituiamo l'arco (x, y) con l'arco (u, v),**

**per (la concatenazione del)le proprietà 1 e 2 otteniamo ancora un albero**, $AR_{UV}$, ancora **ricoprente** (perché i nodi sono gli stessi, cioè tutti i nodi del grafo), e il cui peso totale è **minore o uguale** al peso di AR, perché **(u, v)** è, fra gli archi che attraversano il taglio, **uno di peso minimo**.(**$W(u,v) \leq W(x,y)$**)



# Dimostrazione del lemma - V

Ora, sia **T** un minimo albero ricoprente (**MAR**) **che estende A** e che **contiene** l'arco **(x,y).**

Se **(x,y) ≡ (u, v)**, quindi T contiene (u, v), il **lemma vale**.

Se **(x,y) ≠ (u,v)**, T non contiene l'arco (u, v) (altrimenti ci sarebbe un ciclo).
Tuttavia, con la costruzione descritta nelle slide precedenti, possiamo **costruire (a partire da T) un albero T'** che **estende A, contiene l'arco (u, v) e ha peso non maggiore a T**.
T' è quindi anch'esso un MAR che estende A, e che contiene l'arco (u, v) ed **il lemma vale**.

## Come usiamo lemma nella costruzione di un MAR?

Poiché l'arco (u, v) non appartiene ad A, l'insieme **A ∪ {(u, v)}** contiene proprio un arco in più rispetto ad A. Si può quindi, **aggiungendo** successivamente **un arco alla volta**, **costruire effettivamente un minimo albero ricoprente di G**.

# Algoritmo generico per MAR

**trovaMAR (G)**
A <- insieme di archi vuoto
**while** A non contiene tutti i vertici di G
trova un taglio **non attraversato** da alcun arco di A
aggiungi ad A un arco di **peso minimo** fra quelli che attraversano il taglio
**end**

Una delle due parti del taglio, è:
**Prim:** l'insieme di **tutti i nodi che sono estremi di archi di A**, dove A è sempre un albero.
**Kruskal:** l'insieme di **nodi di un (sotto)albero T contenuto in A** e **non connesso ad altri alberi** contenuti in A.

# Teorema dell'unicità del MAR

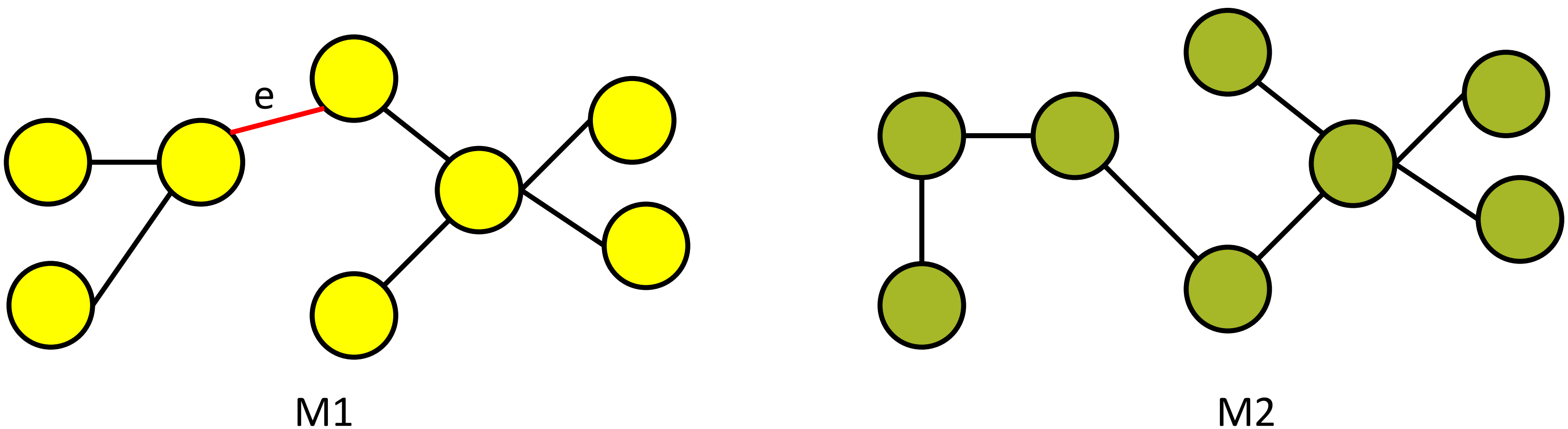
**TEOREMA.** Se i pesi degli archi sono **tutti distinti**, il **MAR è unico**.

**DIMOSTRAZIONE.**

Per **assurdo**, supponiamo che G abbia due minimi alberi ricoprenti distinti M1 e M2.

Poiché sono distinti, **esiste almeno un arco** in uno dei due alberi **che non appartiene anche all'altro**. Sia **e** l'arco **di peso minimo** che **appartiene solo ad uno dei 2 MAR** ma non all'altro.

Supponiamo che e appartenga a M1.

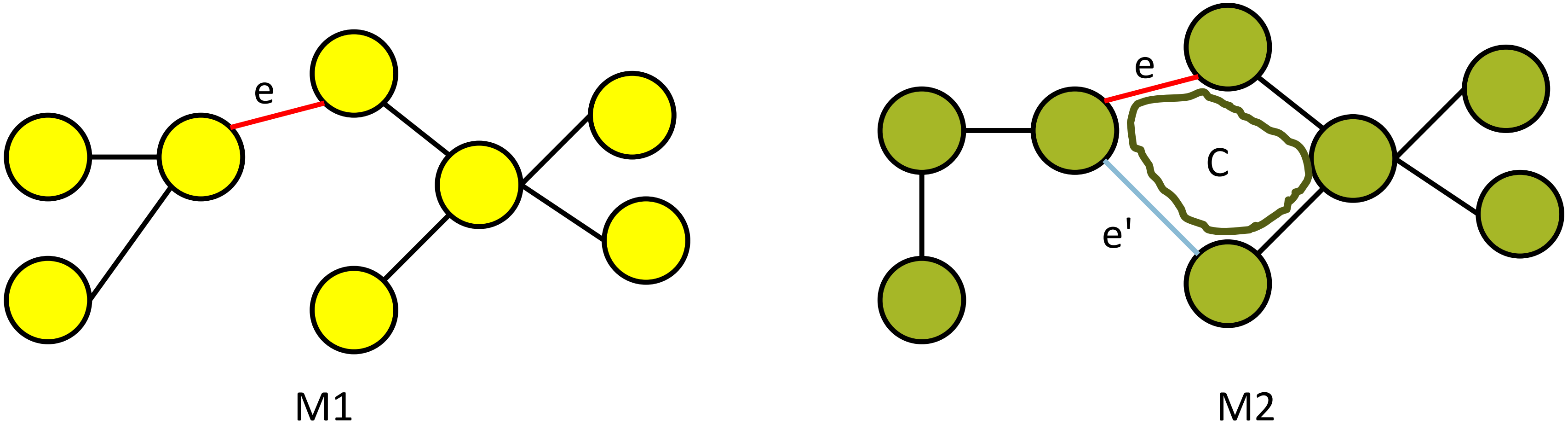


# Teorema dell’unicità del MAR

Allora, se **si aggiunge e ad M2**, si genera un **ciclo** C. Questo perché M2 è un albero ricoprente, quindi è **connesso** e contiene **tutti i nodi** del grafo.

Consideriamo il ciclo C. Poiché M1 non contiene cicli, nel ciclo c’è almeno un arco **e’ che non appartiene a M1**.

Tale arco ha peso **maggiore** di e perché abbiamo scelto e come arco di peso **minimo** che appartiene ad uno dei due alberi ma non all’altro.



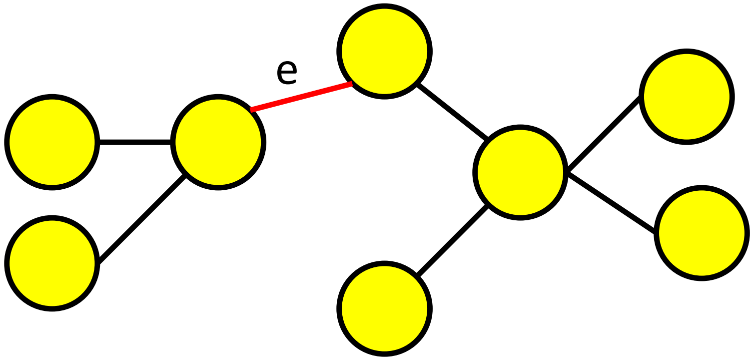
# Teorema dell’unicità del MAR - II

Togliendo e’ dal ciclo (e quindi da M2 modificato) si torna ad avere un albero M’2 diverso da M2 perché contiene l’arco e, e non l’arco e’.

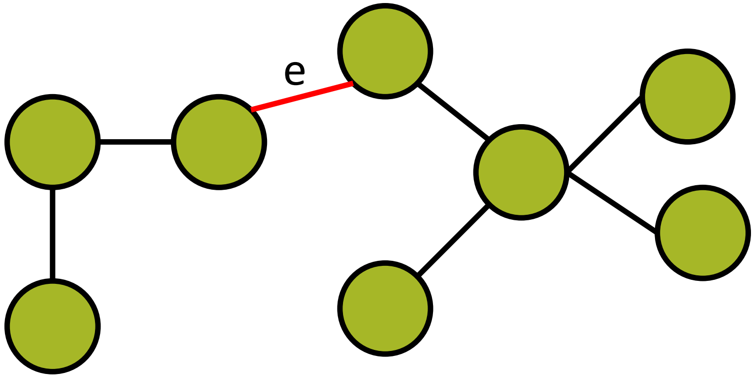
Si tratta di un **albero ricoprente** di G perché il ciclo non esiste più, M’2 ricopre il grafo ed è connesso (perché e’ faceva parte di un ciclo).

Ma M’2 ha peso minore di M2 (poiché e’ è stato sostituito con un arco di peso minore), fatto che **contraddice l’ipotesi che M2 sia un albero ricoprente minimo di G**.

**CVD.**




M1




M’2

# Cosa devo aver capito fino ad ora

- Albero ricoprente in grafi pesati non orientati e connessi
- Minimo albero ricoprente (MAR)
- Lemma del taglio e sua dimostrazione
- Uso del lemma del taglio nella costruzione di un MAR
- Algoritmo generico di costruzione di un MAR
- Unicità del MAR (nel caso di archi con pesi distinti)

# …se non ho capito qualcosa

- Alzo la mano e chiedo
- Ripasso sul libro
- Chiedo aiuto sul forum
- Chiedo o mando una mail al docente