GRAFI: INTRODUZIONE

[Deme, seconda edizione] cap. 12

dall'inizio fino alla sez. 12.2 esclusa

Grafi: una presentazione informale

In informatica, ma più in generale nella società dell'informazione, il genere di informazione riconducibile/rappresentabile tramite **grafi** è decisamente il più diffuso.

In maniera informale, tutto ciò che implica l'idea di **«connessioni»** o **«relazioni»** tra **coppie di oggetti** può essere rappresentato tramite grafi.

- La rete **Internet**, ad esempio, è rappresentabile con un grafo in cui gli oggetti sono i singoli calcolatori, mentre le relazioni sono i collegamenti tra di essi
- Le **relazioni personali** sono rappresentabili con grafi in cui gli oggetti sono le persone, e le relazioni sono, ad esempio, «amico/conoscente di»
- Una **mappa** è rappresentabile tramite un grafo in cui gli oggetti sono i luoghi, mentre le relazioni sono le strade tra di esse

Grafi: risoluzione di problemi

Già solo considerando gli esempi precedenti, diversi **«problemi»** possono emergere:

- Posso **connettermi**, dal mio pc, al server di un particolare sito?
- Ho qualche **amico in comune** con x?
- Quale **strada/e posso fare** per raggiungere Vercelli da Torino? Quale è la più corta? E la più conveniente economicamente?

Come in tutti i problemi informatici, dobbiamo:

1. Definire un'entità matematica astratta (ADT) per descrivere questi problemi (appunto, i **grafi**)
2. Definire delle operazioni su tale entità (che ci permettano di risolvere i problemi)
3. Implementare delle strutture dati per rappresentarla
4. Implementare degli algoritmi che lavorino su tali strutture dati per eseguire le operazioni

Grafi: Definizione Formale

Un grafo è una coppia $\boldsymbol{G = (V, E)}$ e consiste in:

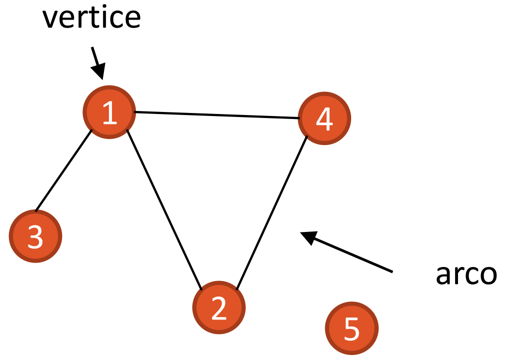
- un insieme V di **vertici** (o nodi)
- un insieme E ($E \subseteq V \times V$) di coppie di vertici, detti **archi** o spigoli: ogni arco connette due vertici

Esempio 1: V={persone},

E={coppie di persone che si conoscono}

Esempio 2: V={città},

E={coppie di città tra cui c'è una strada}



Grafi **Orientati** e **Non Orientati**

Non tutti i grafi sono uguali. La prima distinzione riguarda il tipo di relazioni che modellano. Queste possono essere **simmetriche** (es. conoscenza) o **asimmetriche** (ad es., una certa strada si può percorrere solo in un senso di marcia).

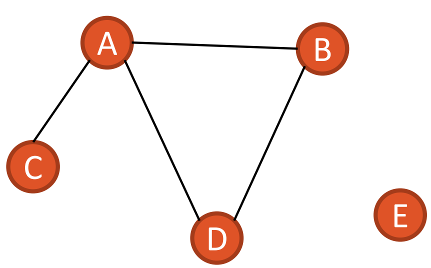
Grafo **Non Orientato**: relazioni **simmetriche**.

E è un insieme di coppie non ordinate.

$V = \{A, B, C, D, E\}$

$E = \{(A, B), (A, C), (A, D), (B, D)\}$

Non ordinate significa che (A, B) e (B, A) indicano la stessa coppia



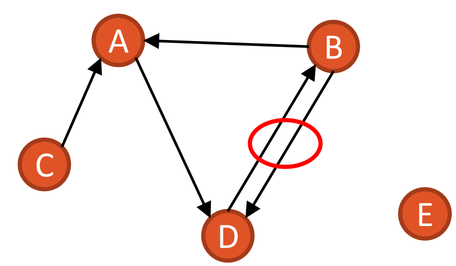
Grafo **Orientato**: relazioni **asimmetriche**.

E è un insieme di coppie ordinate.

$V = \{A, B, C, D, E\}$

$E = \{\langle A, D\rangle, \langle B, A\rangle, \langle B, D\rangle, \langle C, A\rangle, \langle D, B\rangle\}$

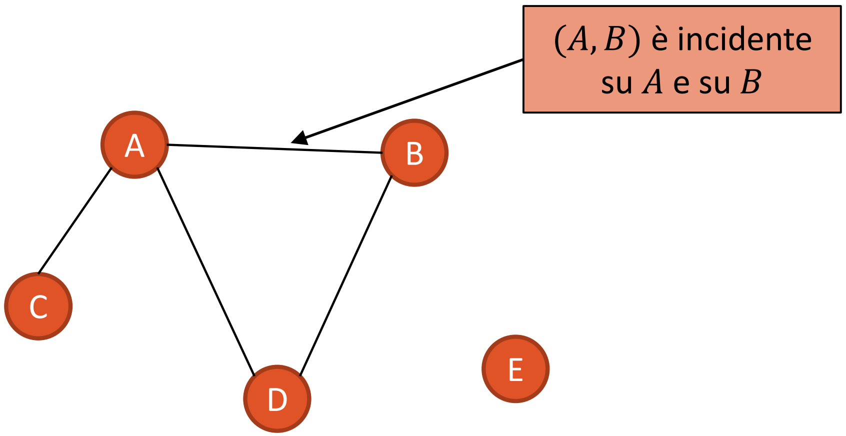
Ordinate: $\langle B, D\rangle$ e $\langle D, B\rangle$ sono differenti

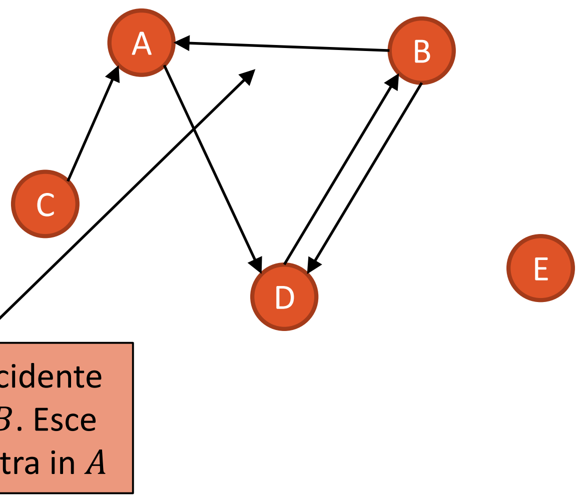


Relazione arco-vertice: **Incidenza** di un arco

Arco Incidente: sia (v, w) o $\langle v, w\rangle \in E$. L'arco (v, w) (o $\langle v, w\rangle$) è **incidente** sui vertici v e w.

Inoltre, se l'arco è orientato ($\langle v, w\rangle$), si dice che **esce** da v ed **entra** in w.

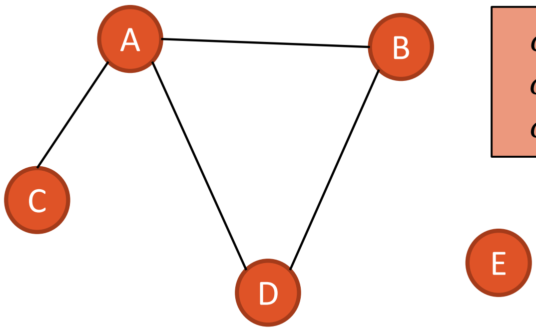




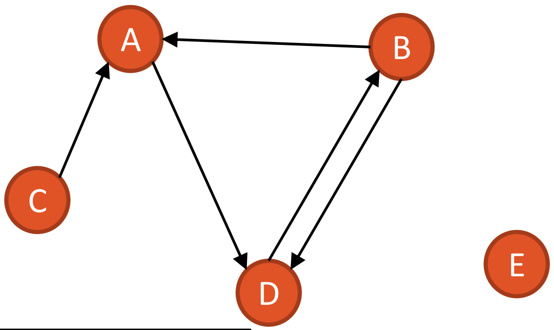
Caratteristica di un vertice: **Grado** di un vertice

Grado: il grado di un vertice v (a volte denotato con $\delta(v)$) è dato dal numero di archi ad esso **incidenti**.

Se il grafo è **orientato**, distinguiamo tra **grado entrante** $\delta_{in}(v)$ (archi incidenti **in** v) e **grado uscente** $\delta_{out}(v)$ (archi incidenti **da** v). $\delta(v) = \delta_{in}(v) + \delta_{out}(v)$.



$$\delta(A) = 3$$
$$\delta(B) = 2$$
$$\delta(E) = 0$$



$$\delta(A) = \delta_{in}(A) + \delta_{out}(A) = 2 + 1 = 3$$
$$\delta(B) = \delta_{in}(B) + \delta_{out}(B) = 1 + 2 = 3$$
$$\delta(E) = \delta_{in}(E) + \delta_{out}(E) = 0$$

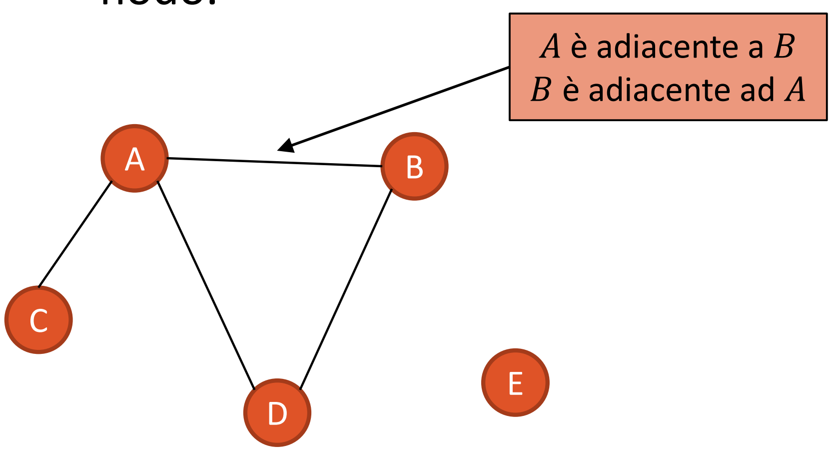
Relazione vertice-vertice: **Adiacenza** di vertici

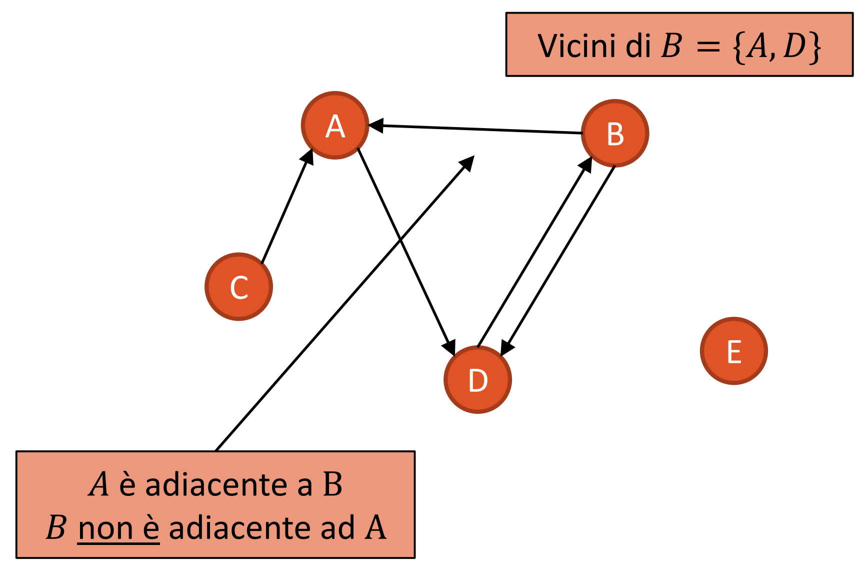
Vertice Adiacente: sia $(\mathrm{v}, \mathrm{w}) \in \mathrm{E}$. Il nodo w è **adiacente** a v

Se il grafo è **non orientato**, v a sua volta è adiacente a w.

Se il grafo è **orientato** e $\langle \mathrm{v}, \mathrm{w} \rangle \in \mathrm{E}$, w è adiacente a v (la relazione non è simmetrica).

L'insieme dei nodi adiacenti ad un nodo si chiama insieme dei **vicini** del nodo.

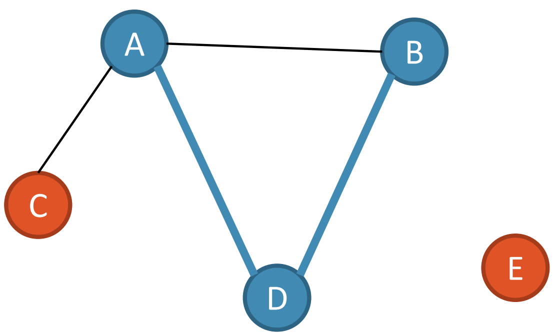




Sottografo

Sia $\boldsymbol{G = (V, E)}$ un grafo.

Un **sottografo** di G (notazione $H \subseteq G$) è un grafo $\boldsymbol{H = (V^*, E^*)}$ tale che $\boldsymbol{V^*} \subseteq \boldsymbol{V}$ e $\boldsymbol{E^*} \subseteq \boldsymbol{E}$ (e poiché H è un grafo, deve valere che $\boldsymbol{E^*} \subseteq \boldsymbol{V^*} \times \boldsymbol{V^*}$).

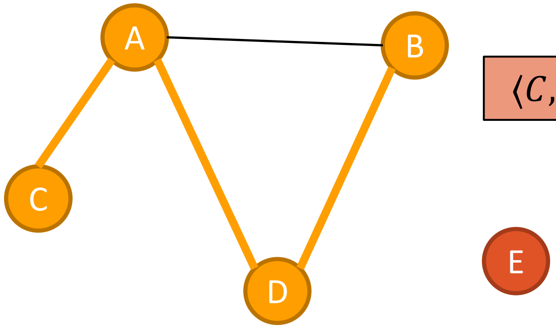


$V^* = \{A, B, D\}$
$E^* = \{(A, D), (B, D)\}$

Cammini

Cammino: un **cammino** nel grafo è **una sequenza ordinata di vertici** $\langle w_1, w_2, \dots, w_n \rangle$ tale che $(w_i, w_{i+1}) \in E$ per $1 \leq i \leq n-1$.

(equivalentemente, un cammino può essere visto come una **sequenza ordinata di archi**, e alcune volte sfrutteremo questa variante)

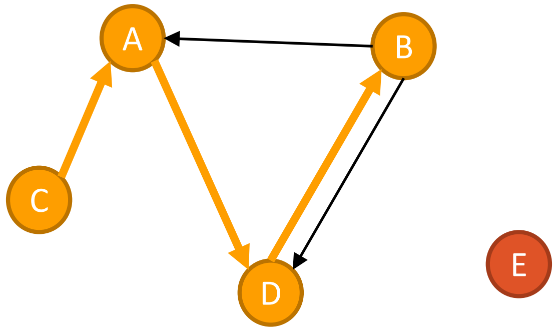


$\langle C, A, D, B \rangle$ è un cammino

Nota: un cammino è una sequenza **ordinata**. Quindi $\langle C, A, D, B \rangle$ è un cammino e $\langle C, A, B, D \rangle$ è un altro cammino

Cammini in grafi **orientati**

Poiché i grafi orientati rappresentano relazioni non simmetriche, dobbiamo considerare il **verso** di tali relazioni.

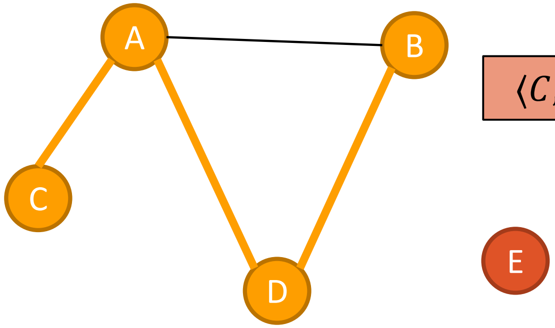


$\langle C, A, D, B \rangle$ è un cammino,
$\langle C, A, B, D \rangle$ <u>non lo è</u> perché $\langle A, B \rangle \notin E$

Caratteristiche di un camino: **contenimento** e **lunghezza**

Il cammino $\langle w_1, w_2, \dots, w_n \rangle$ **contiene** i vertici $w_1, w_2, \dots, w_n$ e gli archi $(w_1, w_2), (w_2, w_3), \dots, (w_{n-1}, w_n)$.

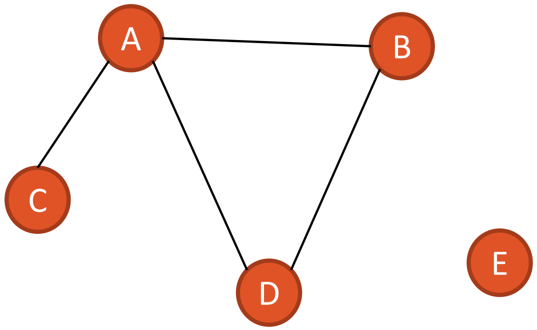
La **lunghezza** del cammino è il numero totale di archi che collegano i vertici della sequenza (uno in meno del numero di vertici).



$\langle C, A, D, B \rangle$ ha lunghezza = 3

Caratteristica di un cammino: **cammino semplice**

Un cammino si dice **semplice** se tutti i suoi vertici sono **distinti** (cioè compaiono una sola volta), escluso il primo e l'ultimo che possono essere lo stesso.



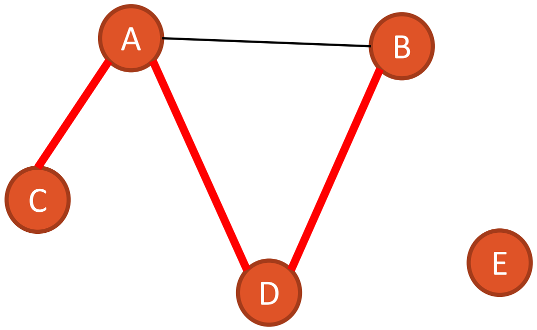
$\langle C, A, D, B \rangle$ è semplice
$\langle A, D, B, A \rangle$ è semplice
$\langle C, A, D, B, A \rangle$ non è semplice

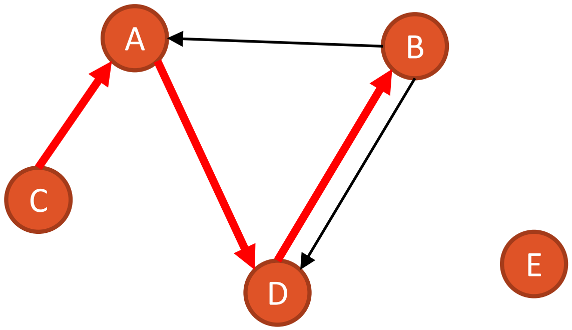
Nota bene: se un cammino non è semplice (e gli archi non hanno pesi o hanno pesi non negativi), sicuramente non è il più corto cammino che collega il vertice di partenza con quello di arrivo.

Relazione tra vertici: **Raggiungibilità**

Se esiste (almeno) un **cammino** p tra i vertici v e w si dice che w è **raggiungibile** da v e si indica con $\mathrm{v} \underset{\mathrm{p}}{\rightarrow} \mathrm{w}$ (o $\mathrm{v} \rightarrow \mathrm{w}$).

Inoltre v è un **antenato** di w e w è un **discendente** di v.





$C \rightarrow B$ e $B \rightarrow C$,
E non è raggiungibile da nessun vertice

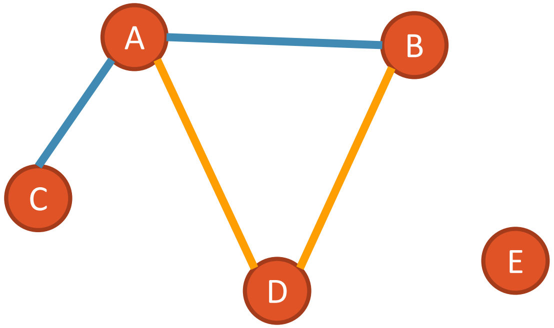
$C \rightarrow B$ ma <u>non</u> $B \rightarrow C$

Caratteristiche di un camino: **cammino minimo** e **distanza**

Un cammino tra due nodi v e w si dice **minimo** se tra v e w non esiste nessun altro cammino di lunghezza/peso minore.

La lunghezza del cammino minimo tra due nodi v e w in cui w è raggiungibile da v si dice **distanza**. Se w non è raggiungibile da v la loro distanza è infinita.

La distanza tra due nodi si indica con $\boldsymbol{\delta}(\mathbf{v}, \mathbf{w})$.



$\langle C, A, D, B \rangle$ ha lunghezza = 3
$\langle C, A, B \rangle$ ha lunghezza 2 e non esistono cammini più corti tra C e B, quindi $\boldsymbol{\delta}(\mathbf{C}, \mathbf{B}) = \mathbf{2}$.
$\boldsymbol{\delta}(\mathbf{C}, \boldsymbol{E}) = +\infty$.

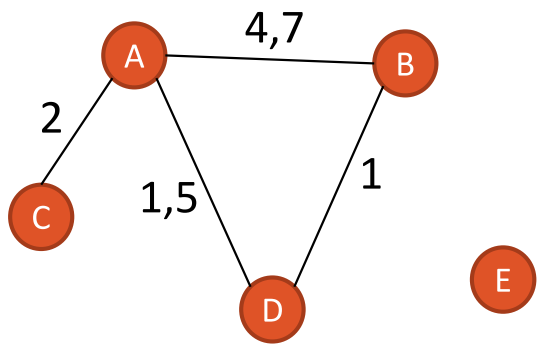
Grafo **pesato**

Definiamo una funzione peso $\boldsymbol{W}: \boldsymbol{E} \rightarrow \mathbb{R}$ (dove $\mathbb{R}$ è l'insieme dei numeri reali).

Per ogni arco $(\mathrm{v}, \mathrm{w}) \in E$, $W(\mathrm{v}, \mathrm{w})$ definisce il **peso** di (v, w).

La coppia (G, W) è definita **grafo pesato**.

In un grafo pesato, la lunghezza/peso di un cammino si calcola **sommando i pesi degli archi che contiene**.



$$W(C,A) = 2$$
$$W(A,B) = 4{,}7$$
$$W(A,D) = 1{,}5$$
$$W(D,B) = 1$$

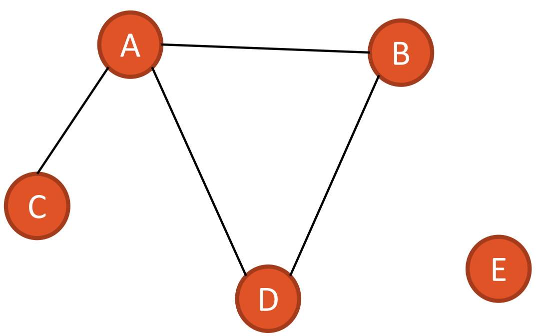
Qual è ora la distanza tra C e B?
Qual è il cammino minimo?
Non possiamo più contare gli archi, dobbiamo sommare i loro pesi.

$\langle C, A, D, B \rangle$ ha peso = 4,5
$\langle C, A, B \rangle$ ha peso = 6,7.
La distanza tra C e B è quindi 4,5 ed il cammino minimo è $\langle C, A, D, B \rangle$.

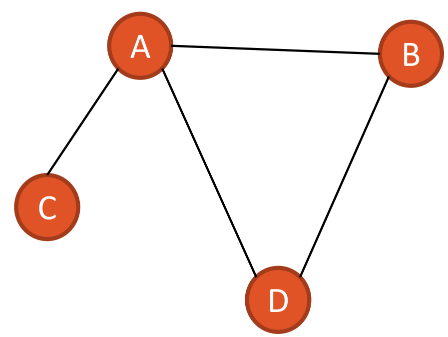
Caratteristica di un grafo non orientato: Grafo **connesso**

Se in un grafo G (**non orientato**) esiste un cammino da ogni vertice verso ogni altro vertice, si dice che G è **connesso**. Questa è una caratteristica importante. Ci permette di sapere che ovunque si sia nel grafo si può raggiungere qualsiasi altro elemento.

Questo grafo non orientato non è connesso



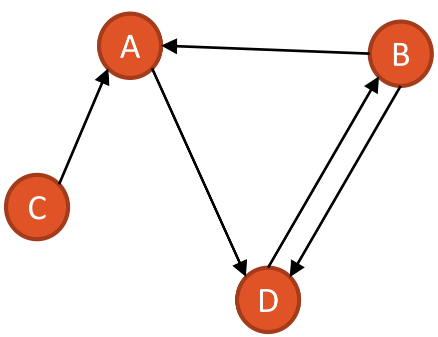
Questo grafo non orientato è connesso



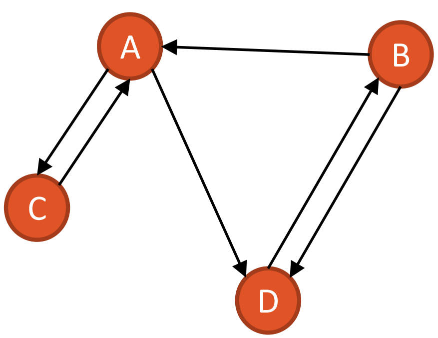
Caratteristica di un grafo orientato: Grafo **fortemente connesso**

Se in un grafo G (**orientato**) esiste un cammino da ogni vertice verso ogni altro vertice, si dice che G è **fortemente connesso**. Vale lo stesso discorso di importanza fatto per la connessione (grafi non orientati).

Questo grafo orientato <u>non è</u> fortemente connesso (C non è raggiungibile da nessun nodo)



Questo grafo orientato è fortemente connesso

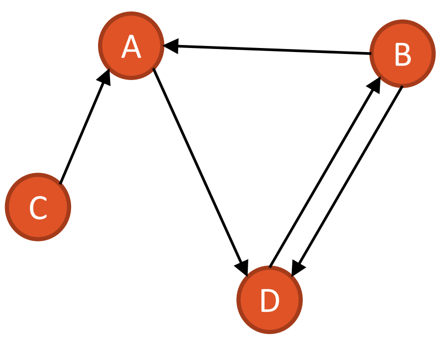


NOTA: non ci devono essere «tutti» gli archi perché il grafo sia fortemente connesso

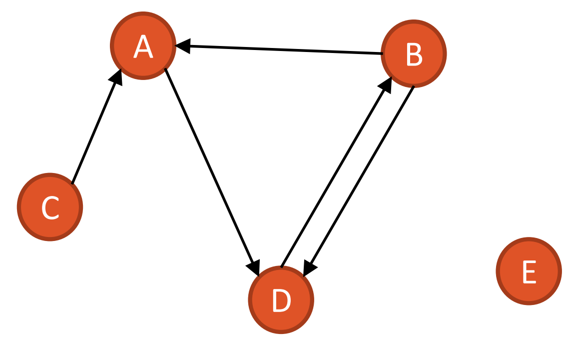
Caratteristica di un grafo orientato: Grafo **debolmente connesso**

Se in un grafo G (**orientato**) ignorando il verso degli archi esiste un cammino da ogni vertice verso ogni altro vertice, si dice che G è **debolmente connesso**

Questo grafo orientato è debolmente connesso



Questo grafo orientato <u>non è</u> debolmente connesso

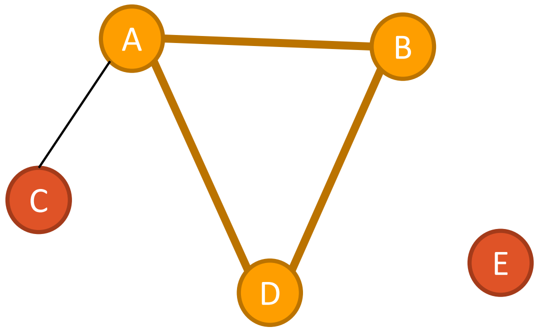


Ciclo

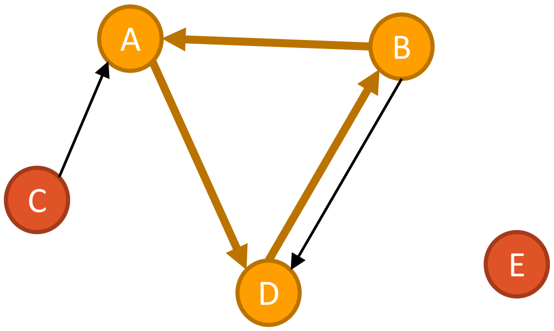
Un cammino $\langle w_1, w_2, \dots, w_n \rangle$ si dice **chiuso** se $w_1 = w_n$.

Un cammino chiuso, semplice, di lunghezza almeno 1 si dice **ciclo**.

$\langle A, B, D, A \rangle$ è un ciclo



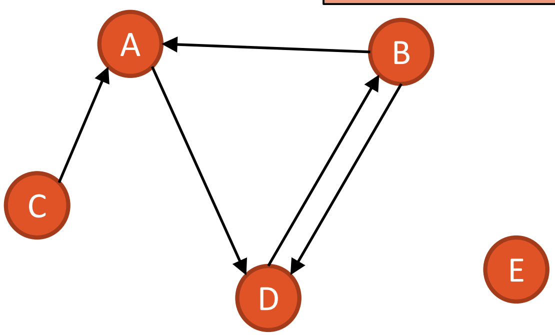
$\langle A, D, B, A \rangle$ è un ciclo



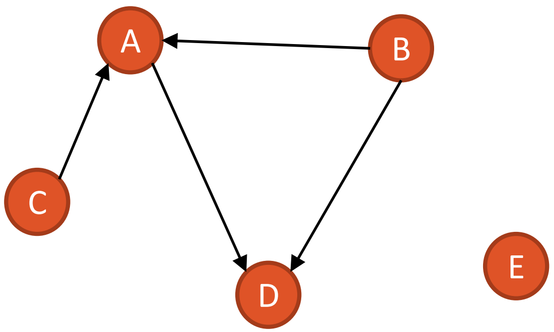
Grafo **aciclico**

Se un grafo non contiene cicli, si dice **aciclico**

Questo grafo orientato contiene il ciclo $\langle A, D, B, A \rangle$ (quindi non è aciclico)



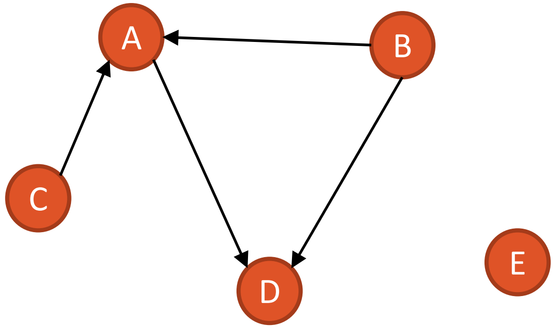
Rimuovendo l'arco $\langle D, B \rangle$ il grafo diventa aciclico



Grafo Diretto Aciclico – DAG

- Un grafo **orientato aciclico** si chiama **DAG** (**D**irected **A**cyclic **G**raph). I DAG si usano spesso per rappresentare relazioni di precedenza tra processi da eseguire.
- In particolare, dato un DAG, è sempre possibile ordinare i nodi in un **ordine topologico**, cioè in modo che non ci sia nessun arco all'indietro.

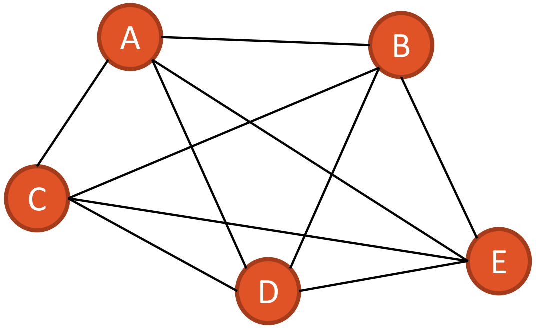
Questo grafo è un DAG



Grafo **completo**

Un **grafo completo** è un grafo con un arco (due per grafi orientati) per ogni coppia di vertici.

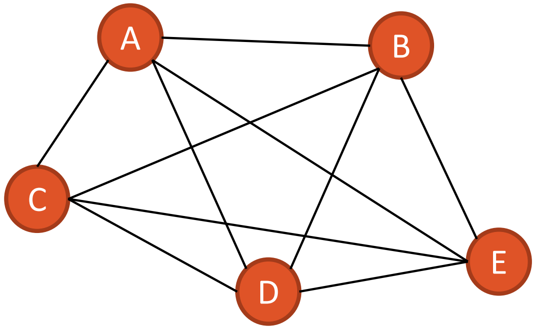
Questo grafo non orientato è completo



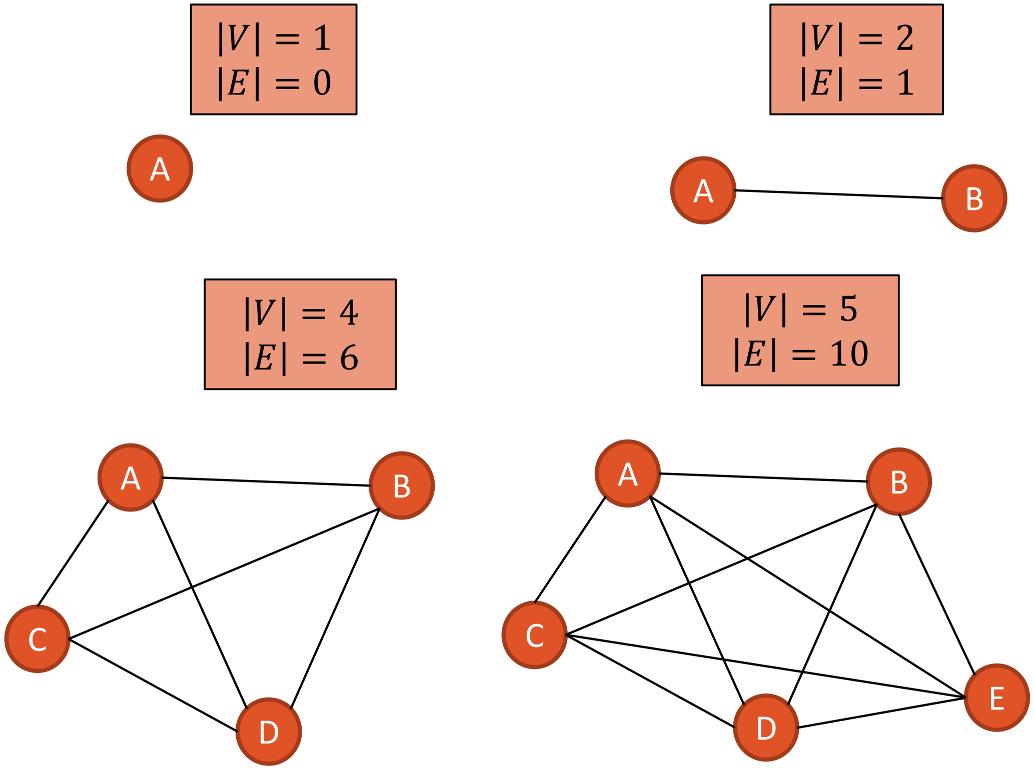
Numero massimo di archi in un grafo

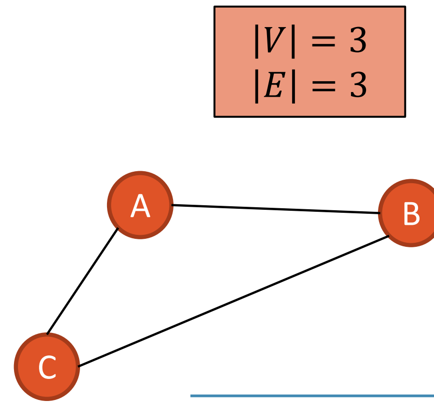
Se $G = (V, E)$ è completo, contiene il **numero massimo di archi** tra i suoi vertici. Data $|V|$ (la cardinalità di V), è possibile calcolare $|E|$ (**la cardinalità di E**) a partire da $|V|$?

$|V| = 5$
$|E| = ???$



Esempio motivante: siamo a tavola e dobbiamo fare un brindisi. Se ogni commensale (rappresentato con un nodo) deve battere il proprio bicchiere (rappresentato con un arco) su quello di ogni altro commensale, quanti saranno i «cin» in totale?





$\|V\|$	$\|E\|$	
1	0	
2	1	+1
3	3	+2
4	6	+3
5	10	+4

Per ogni nuovo nodo n che aggiungo al grafo, devo aggiungere un arco verso ciascuno degli n-1 nodi già esistenti.

Quindi, dato n, ho aggiunto 0 archi (1-1) per il primo nodo, 1 arco (2-1) per il secondo, 2 archi (3-1) per il terzo, …, n-1 archi per l'n-esimo nodo.

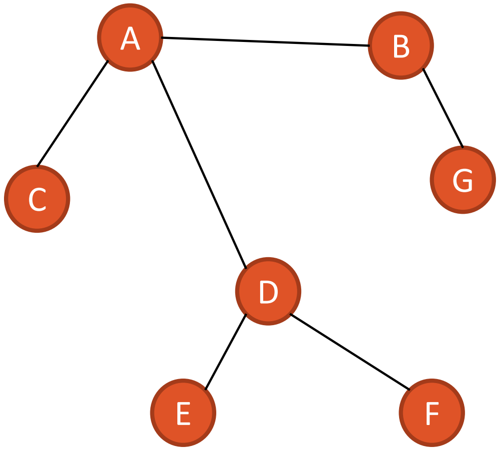
In breve, sto calcolando la sommatoria dei primi n-1 numeri naturali $\sum_{i=0}^{n-1} i$.

SOLUZIONE: **Teorema «del piccolo Gauss»**: $\boldsymbol{\sum_{i=0}^{n-1} i = \frac{n(n-1)}{2} \Rightarrow |E| = \frac{|V|(|V|-1)}{2}}$

Albero libero

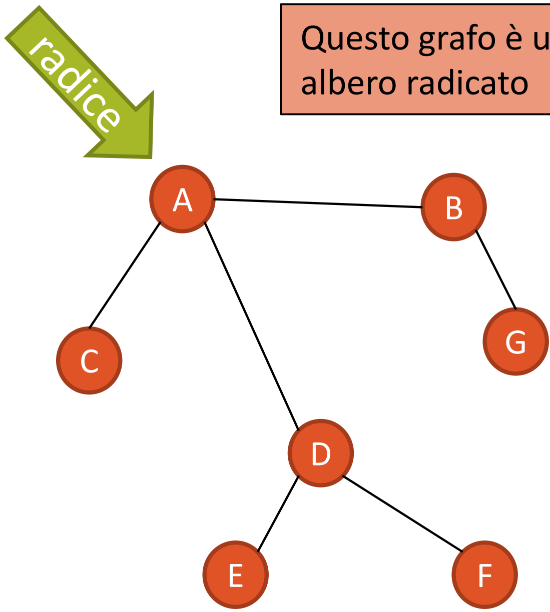
Un grafo non orientato, connesso e aciclico è definito **albero libero** («libero» perché nessun vertice è definito radice)

Questo grafo è un albero libero



Albero radicato

Se un vertice è designato ad essere la radice, si definisce albero radicato.

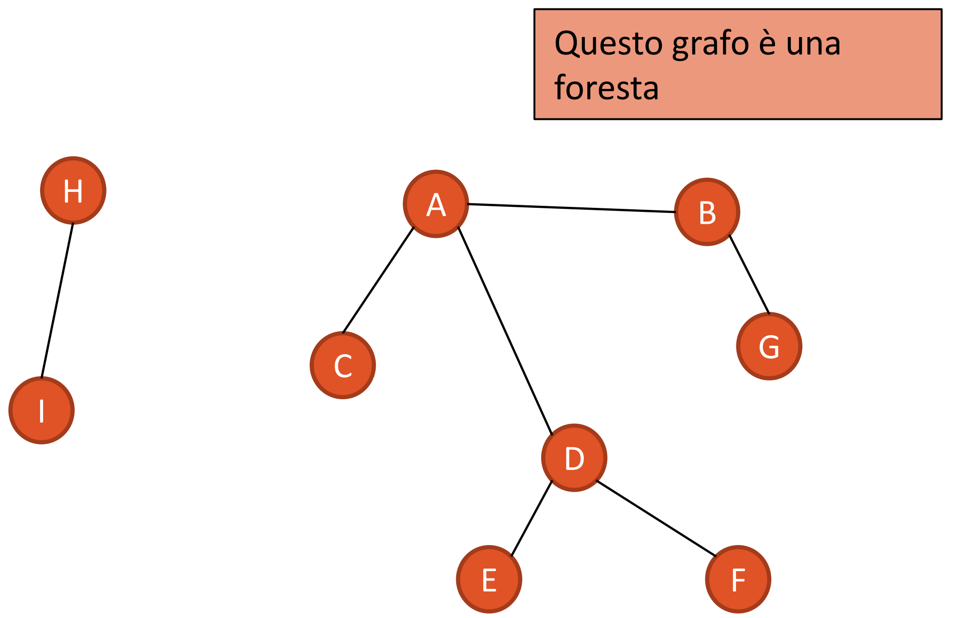


Questo grafo è un albero radicato

La avete già vista questa struttura?

Foresta

Un grafo non orientato, aciclico ma non connesso è definito foresta



Cosa devo aver capito fino ad ora

- Cos’è un grafo
- Differenza tra grafi orientati e non orientati
- I concetti di incidenza ed adiacenza (grado di un arco)
- Cos’è un cammino (lunghezza di un cammino, cammini semplici)
- Grafo pesato
- Raggiungibilità
- Grafo connesso (fortemente, debolmente)
- Cicli (grafo aciclico, DAG)
- Grafo completo
- Teorema di Gauss bambino e sue applicazioni
- Alberi liberi, radicati e foreste

…se non ho capito qualcosa

- Alzo la mano e chiedo
- Ripasso sul libro
- Chiedo aiuto sul forum
- Chiedo o mando una mail al docente