

GRAFI: COMPONENTI CONNESSE

[Deme, seconda edizione] cap. 12

Sezione 12.4



Quest'opera è in parte tratta da (Damiani F., Giovannetti E., "Algoritmi e Strutture Dati 2014-15") e pubblicata sotto la licenza Creative Commons Attribuzione - Non commerciale - Condividi allo stesso modo 3.0 Italia.

Per vedere una copia della licenza visita <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/it/>.

Relazione di equivalenza

Una relazione di **equivalenza** (su un insieme I) è definita come una relazione binaria \sim ,

Riflessiva $\forall x \in I \quad x \sim x$

Simmetrica $\forall x, y \in I \quad x \sim y \Rightarrow y \sim x$

Transitiva $\forall x, y, z \in I \quad x \sim y \wedge y \sim z \Rightarrow x \sim z$

Un insieme che contiene tutti elementi (quindi **massimale**) equivalenti a x si chiama **classe di equivalenza** di x per la relazione \sim .

L'insieme delle classi di equivalenza di un certo insieme I si chiama **insieme quoziente** di I per \sim .

Esempio

La relazione «**alto come**» (nell'insieme di tutte le persone) è una **relazione di equivalenza**.

È riflessiva: a è alto come se stesso

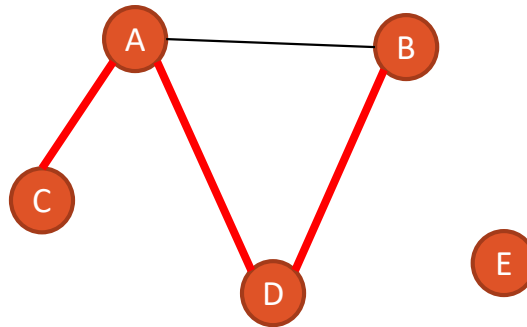
È simmetrica: se a è alto come b, allora b è alto come a

È transitiva: se a è alto come b e b è alto come c, allora a è alto come c

C'è una **classe di equivalenza** per ogni possibile altezza (... 1.50, ... 1.82, ...)

(dall'introduzione) Relazione tra vertici: Raggiungibilità

Se esiste (almeno) un **cammino** p tra i vertici v e w si dice che w è **raggiungibile** da v e si indica con $v \xrightarrow[p]{} w$ (o $v \rightarrow w$).



$C \rightarrow B$ e $B \rightarrow C$,
 E non è raggiungibile
da nessun vertice

Relazione di raggiungibilità

In un grafo **non orientato**, la relazione di **raggiungibilità** (è raggiungibile da) è una **relazione di equivalenza**.

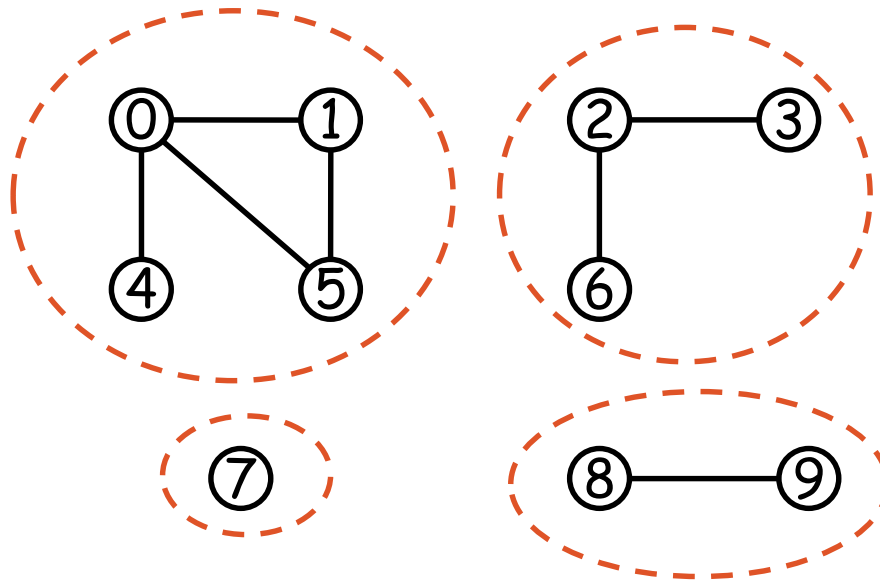
È **riflessiva**: per definizione, ogni vertice è raggiungibile da se stesso con un cammino degenere di lunghezza 0.

È **simmetrica**: se v è raggiungibile da u tramite un cammino p , allora u è raggiungibile da v percorrendo all'indietro lo stesso cammino.

È **transitiva**: se v è raggiungibile da u e w è raggiungibile da v , allora w è raggiungibile da u , percorrendo (in sequenza) il cammino da u a v e da v a w .

Componenti connesse

In un grafo **non orientato** $G=(V,E)$ le **componenti connesse** di G sono le **classi di equivalenza** della relazione di raggiungibilità.



Come calcolo le
componenti connesse di
un grafo?

Calcolo delle componenti connesse

Una **visita** di un grafo restituisce esattamente **una componente connessa di quel grafo (l'albero di visita)**.

Se il grafo è connesso, l'albero di visita conterrà tutti i vertici del grafo.

Altrimenti, **la foresta** restituita da una delle varianti viste per grafi non connessi rappresenta l'insieme quoziente (cioè l'insieme delle componenti connesse) del grafo.

Algoritmo per il calcolo delle componenti connesse

Applichiamo l'algoritmo di visita (usiamo **VISITA** per rimanere generici) per grafi non connessi al problema di **restituire le componenti connesse di un grafo non orientato**.

COMPONENTI-CONNESSE(G)

INIZIALIZZA(G)

$\Pi \leftarrow \{\}$

// Π è la foresta di visita

for ogni $u \in V$ **do**

if color $[u] = \text{white}$

$\pi_u \leftarrow \text{VISITA}(G, u)$

// π_u è l'albero di visita, non il padre di u

$\Pi \leftarrow \Pi + \{\pi_u\}$

return Π

Verifica di connessione

Immaginiamo che un algoritmo di visita restituisca come output π (l'albero di visita), e scegliamo un vertice a caso s .

Il grafo è connesso **se e solo se in π tutti i vertici hanno un predecessore eccetto s** , ossia il vertice di partenza della visita.

CONNESSIONE(G)

INIZIALIZZA(G)

scegli vertice s appartenente a G

$\pi \leftarrow \text{VISITA}(G, s)$

for ogni u appartenente a G

if $u \neq s$ e $\pi[u] = \text{NULL}$ **return** false

return true

Complessità dell'algoritmo: $O(n+m)$ (il costo della visita) + $O(n)$ (il costo del check su π). Costo totale: **$O(n+m)$** .

Cosa devo aver capito fino ad ora

- Cos'è una relazione di equivalenza
- Relazioni di equivalenza (in matematica) e raggiungibilità
- Componenti connesse in un grafo non orientato
- Verifica di connessione basata su visita del grafo
- Trovare le componenti connesse con una visita

...se non ho capito qualcosa

- Alzo la mano e chiedo
- Ripasso sul libro
- Chiedo aiuto sul forum
- Chiedo o mando una mail al docente