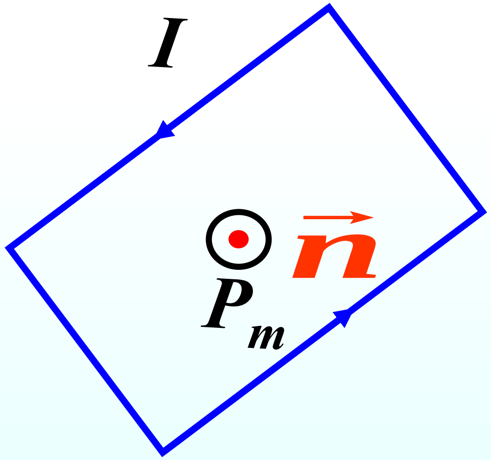
若线圈有N匝，则线圈所受力矩为

$$\boxed{M = NBIS\sin\varphi}$$

设平面载流线圈的面积$S$，电流强度$I$，定义：

线圈的磁矩为 $\boxed{\vec{P}_m = NIS\vec{n}}$

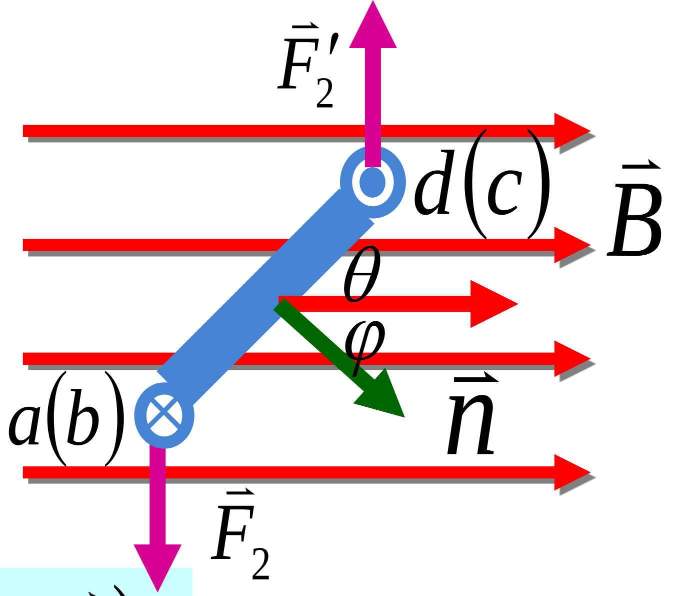



矢量式为 $\boxed{\vec{M} = \vec{P}_m \times \vec{B}}$

——上式适用于任何形状的平面载流线圈

讨论：

$$M = P_m B \sin\varphi$$




(1) 当 $\varphi = 0$ 时 $(\vec{n} // \vec{B}$ 或线圈平面 $\perp \vec{B})$，

$M = 0$ 为稳定平衡状态；

(2) 当 $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$ 时 $(\vec{n} \perp \vec{B}$ 或线圈平面 $// \vec{B})$，

$$M = M_{\max} = P_m B$$

力矩最大，且这一力矩有使φ减小的趋势。

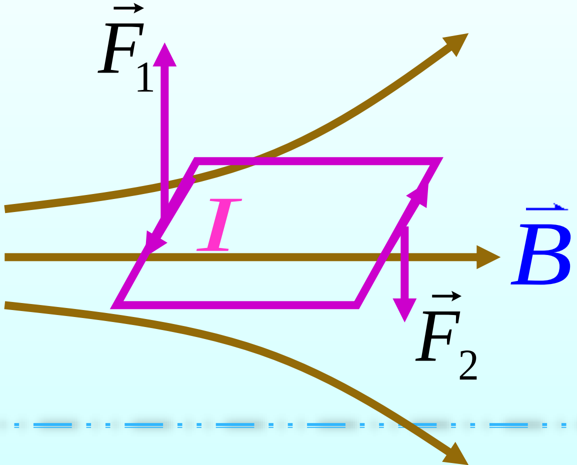
$(3)$当$\varphi=\pi$时$\left(\vec{n}\right.$与$\vec{B}$反平行或线圈平面$\perp\vec{B}\left.\right)$,

$M=0$为不稳定平衡状态

$\vec{B}$与 $\vec{P}_m$ 反向，微小扰动，磁场的力矩使线圈转向稳定平衡状态。

**结论：** 任意形状的平面载流线圈在均匀外磁场中，受到的合力为零，合力矩使线圈的磁矩转到磁感应强度的方向。

## 2、非均匀磁场中的载流线圈




作用在线圈上的磁力与磁力矩均不为零

# 三、平行载流导线间的相互作用力

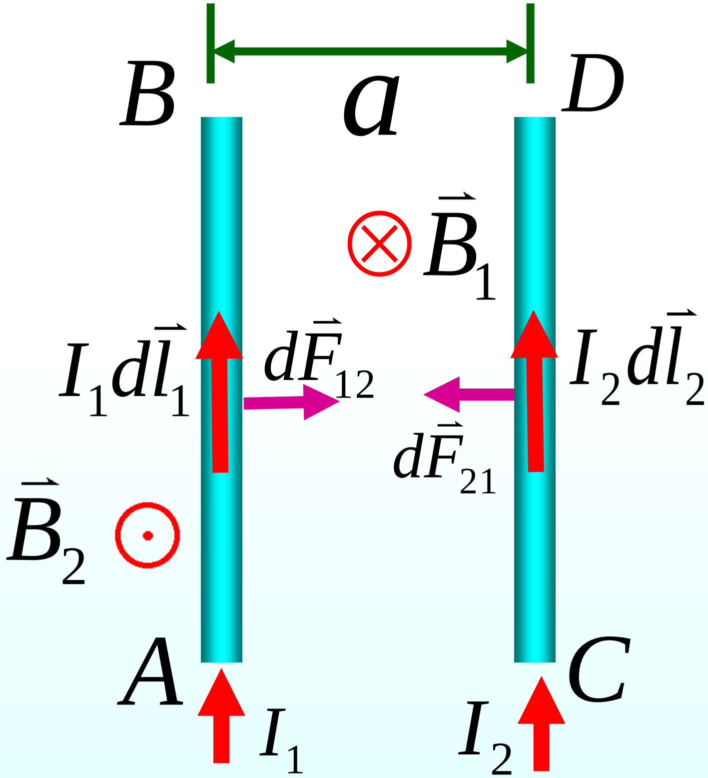
在导线**CD**上任取一电流元 $I_2 d\vec{l}_2$ ，由安培定律得

$$dF_{21} = I_2 B_1 dl_2$$

***AB*** 中的电流 $I_1$ 在 $I_2 d\vec{l}_2$ 处产生的磁场大小为

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi a}$$

$$\Rightarrow \quad dF_{21} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a} dl_2$$



## 单位长度受力：

$$\frac{dF_{21}}{dl_2}=\frac{\mu_o I_1 I_2}{2\pi a}$$

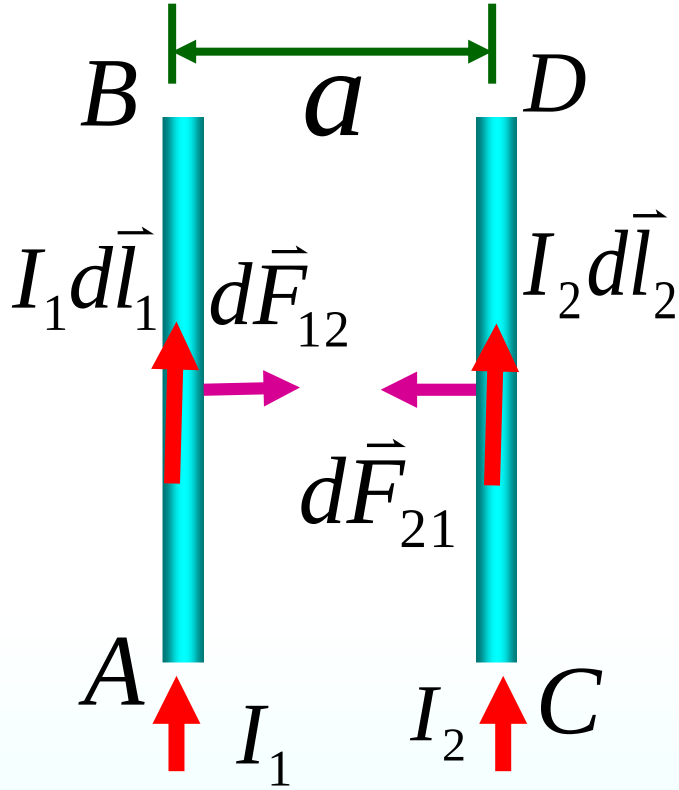
同理得导线 $AB$ 上单位长度受力

$$\frac{dF_{12}}{dl_1}=\frac{\mu_o I_1 I_2}{2\pi a}$$

方向如图

同向电流相互吸引

反向电流相互排斥




安培基准

# 四、电流单位“安培”的定义

在真空中相距1米的两条无限长平行直导线，通以大小相等的电流，当导线上每单位长度受力恰为 $2\times10^{-7}$（N）时，则两导线中通过的电流定义为“1安培”（A）。

**单位长度导线受到的磁力：**

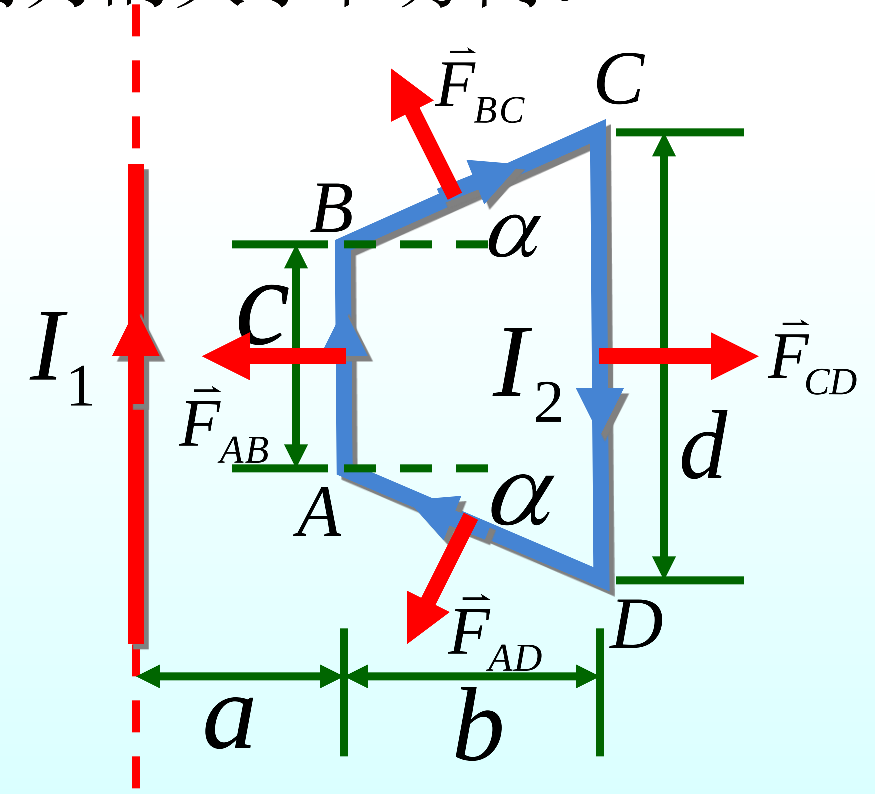
$$\frac{dF}{dl}=\frac{\mu_o I_1 I_2}{2\pi a}=\frac{4\pi\times10^{-7}\times1\times1}{2\pi\times1}=2\times10^{-7}N\cdot m^{-1}$$

$$\boxed{\frac{2\times10^{-7}N}{1m}=\frac{\mu_0 1A\times1A}{2\pi\times1m}}$$

$$\boxed{\mu_0=4\pi\times10^{-7}\left(N\cdot A^{-2}\right)}$$

例、在长直电流 $I_1$ 旁有一等腰梯形载流线框 $ABCD$，通有电流 $I_2$ ，已知 $BC$，$AD$ 边的倾角为 $\alpha$，$AB$ 边与 $I_1$ 平行，距 $I_1$ 为 $a$，梯形高 $b$，上、下底长分别为 $c$、$d$ 。

试求此梯形线框所受 $I_1$ 的作用力的大小和方向。




**解：** 由安培定律

$$d\vec{F} = Id\vec{l} \times \vec{B}$$

**AB 边：**

$$F_{AB} = I_2 \overline{AB} \cdot B = I_2 c \cdot \frac{\mu_0 I_1}{2\pi a}$$

$$= \frac{\mu_0 I_1 I_2 c}{2\pi a}$$

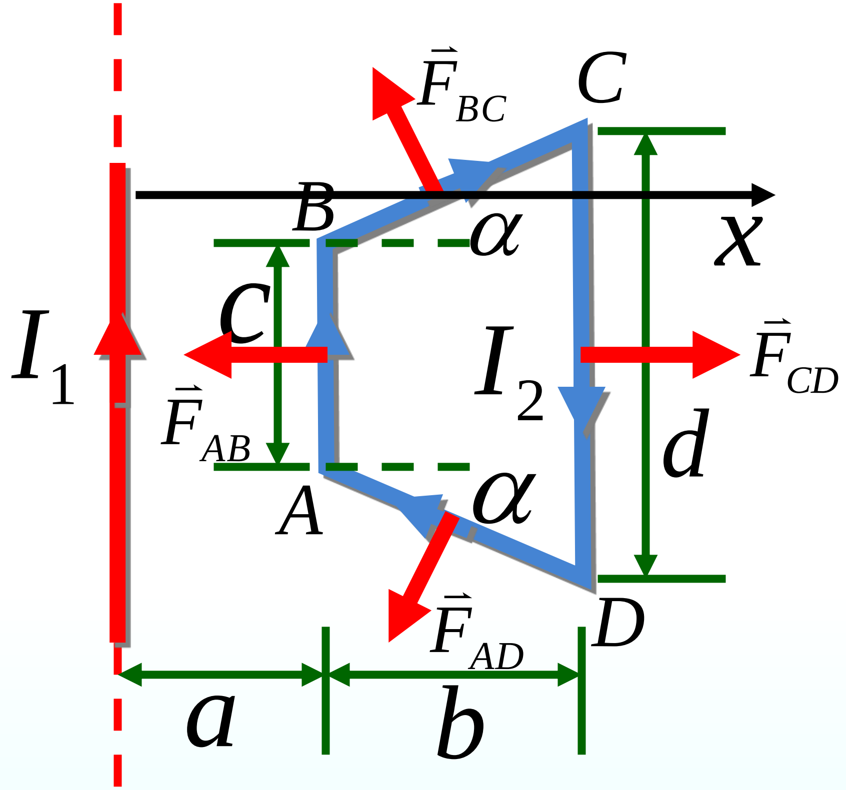
**CD边：** 同理得 $F_{CD}=\dfrac{\mu_0 I_1 I_2 d}{2\pi(a+b)}$

**BC边：**

$$d\vec{F}_{BC}=I_2 dlB=I_2 dl\cdot\frac{\mu_0 I_1}{2\pi x}=\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi x}dl$$

因为 $dl=\dfrac{dx}{\cos\alpha}$

所以 $dF_{BC}=\dfrac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi x\cos\alpha}dx$




各电流元方向所受安培力方向相同

积分得

$$F_{BC}=\int dF_{BC}=\int_a^{a+b}\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi\cos\alpha}\frac{dx}{x}=\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi\cos\alpha}\ln\frac{a+b}{a}$$

**AD边：** 同理得 $$\boxed{F_{AD}=F_{BC}=\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi\cos\alpha}\ln\frac{a+b}{a}}$$

将 $F_{BC}$ ，$F_{AD}$ 沿 $x$，$y$ 轴分解得 $$\boxed{F_y=0}$$

$$F_x=2F_{BC}\sin\alpha=2\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi\cos\alpha}\ln\frac{a+b}{a}\cdot\sin\alpha$$

$$=\frac{\mu_0 I_1 I_2}{\pi}tg\alpha\cdot\ln\frac{a+b}{a}=\frac{\mu_0 I_1 I_2}{\pi}\cdot\frac{d-c}{2b}\cdot\ln\frac{a+b}{a}$$

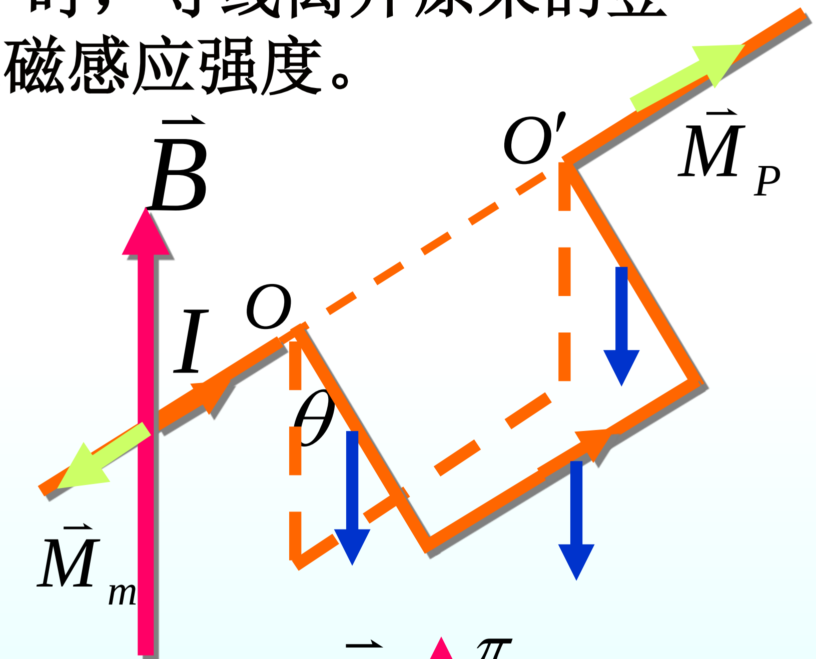
整个线框 $ABCD$ 所受 $I_1$ 的作用力大小为

$$F_{合}=F_{AB}-F_{CD}+F_x$$

$$=\frac{\mu_0 I_1 I_2 c}{2\pi a}-\frac{\mu_0 I_1 I_2 d}{2\pi(a+b)}+\frac{\mu_0 I_1 I_2}{\pi}\frac{d-c}{2b}\ln\frac{a+b}{a}$$

$$=\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}\left[\frac{c}{a}-\frac{d}{a+b}+\frac{d-c}{b}\ln\frac{a+b}{a}\right]$$

**例、** 截面积为 $S$，密度为$\rho$ 的铜导线，被弯成正方形的三边，可以绕水平轴转动。导线放在方向为竖直向上的匀强磁场中，当导线中的电流为 $I$ 时，导线离开原来的竖直位置偏转一角度为$\theta$ 而平衡。求磁感应强度。



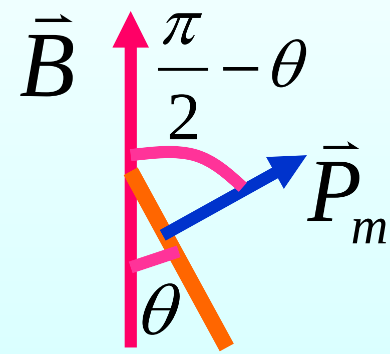

**解：** 铜导线所受的重力矩为

$$M_P = 2mg\cdot\frac{l}{2}\sin\theta + mgl\sin\theta$$
$$= 2mgl\sin\theta = 2lS\rho\cdot gl\sin\theta$$
$$= 2\rho l^2 Sg\sin\theta$$

铜导线所受的磁力矩为

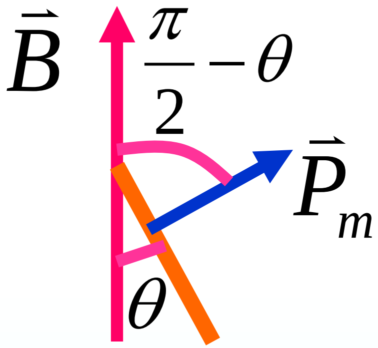
$$\boxed{\vec{M}_m = \vec{P}_m \times \vec{B}}$$

方向如图



大小为 $$M_m = P_m B\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = IBl^2\cos\theta$$

其中 $$\vec{P}_m = IS\vec{n} = Il^2\vec{n}$$




由题意导线平衡时有 $$\vec{M}_P = \vec{M}_m$$

即 $$2\rho l^2 Sg\sin\theta = Il^2 B\cos\theta$$

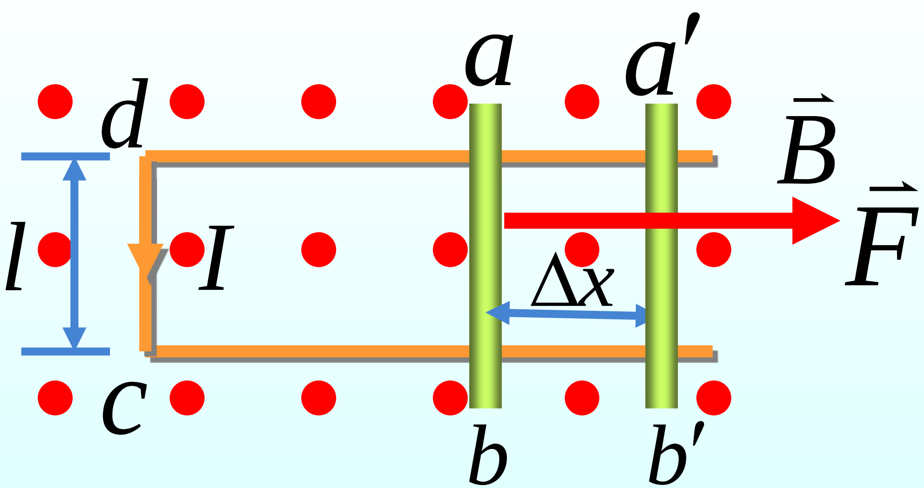
得 $$B = \frac{2\rho Sg}{I}tg\theta$$

# 五、磁场力的功

当载流导线或载流线圈在磁场中受到磁场力或磁力矩而运动时，磁场力和磁力矩要作功，并将电磁能转换为机械能。

## 1、载流导线在磁场中运动时磁场力所作的功

载流闭合矩形导线框 abcd 通有电流 I，ab 长为 *l* 可在 da 和 cb 两导线上自由滑动。均匀磁场方向如图：




磁场力：**F = BIL**

当$I=$常量，导线$ab \to a'b'$,磁场力作功为

$$\boxed{A = F \cdot \Delta x = BIl \cdot \Delta x = BIl\left(da' - da\right)}$$

其中 **BLΔx=BΔS** $= \Delta\Phi_m$

∴ 磁场力作的功为： $$\boxed{A = I\Delta\Phi_m}$$

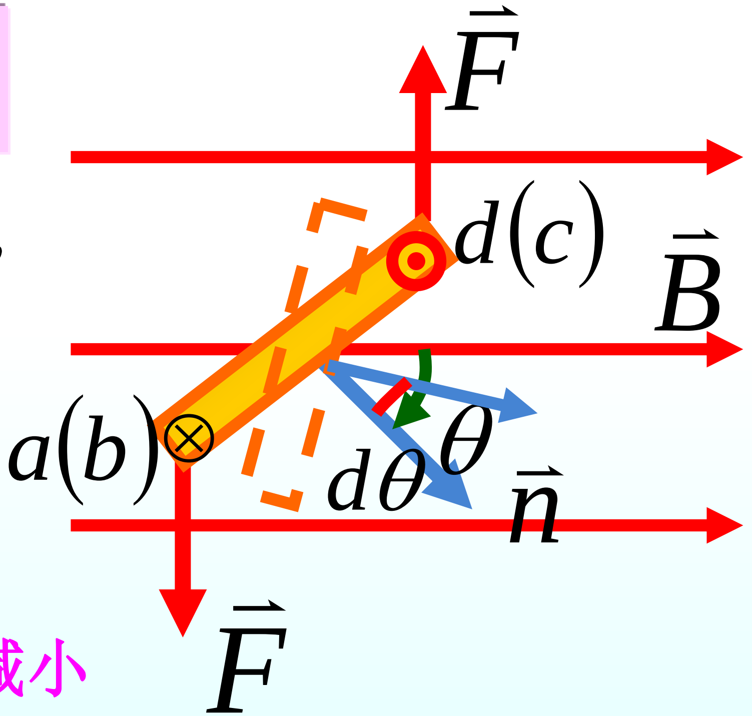
$\Delta\Phi_m$为回路线框$abcd$所包围面积磁通量的增量

磁场力对运动载流导线的功等于回路中电流乘以穿过回路所包围面积内磁通量的增量，或等于电流乘以载流导线在运动中切割的磁感应线数。

## 2、载流线圈在磁场中转动时磁场力的功

一载流线圈在匀强磁场中转动，若电流不变，则所受磁力矩的大小为

$$\boxed{M = P_m B\sin\theta = ISB\sin\theta}$$




当线圈从$\theta \to \theta - d\theta$时，磁力矩作功为

$$\boxed{A = \int -M d\theta}$$

负号“–”表示磁力矩作正功时将使$\theta$减小

$$\boxed{A = \int -BIS\sin\theta\, d\theta = I\int d\left(BS\cos\theta\right) = I\int d\Phi_m}$$

当线圈在磁力矩作用下从$\theta_1 \to \theta_2$，相应穿过线圈的磁通量从$\Phi_{m1} \to \Phi_{m2}$，磁力矩作的总功为

$$A = \int dA = \int_{\Phi_{m1}}^{\Phi_{m2}} I d\Phi_m = I\Delta\Phi_m$$

任意形状平面闭合电流回路，在均匀磁场中产生形变或处在转动过程，磁场力或磁力矩作功上式均可用。

当回路中电流 $I$ 变化时，磁力矩作功为 $A = \int_{\Phi_{m1}}^{\Phi_{m2}} I d\Phi_m$

**注意：**

恒定磁场不是保守力场，

磁场力的功不等于磁场能的减少，

而且，洛伦兹力是不做功的，

磁场力所作的功是消耗电源的能量来完成的。

例、有一半径为R的闭合载流线圈，通过电流I。今把它放在均匀磁场中，磁感应强度为B，其方向与线圈平面平行。求：（1）以直径为转轴，线圈所受磁力矩的大小和方向。（2）在力矩作用下，线圈转过90°，力矩做了多少功?

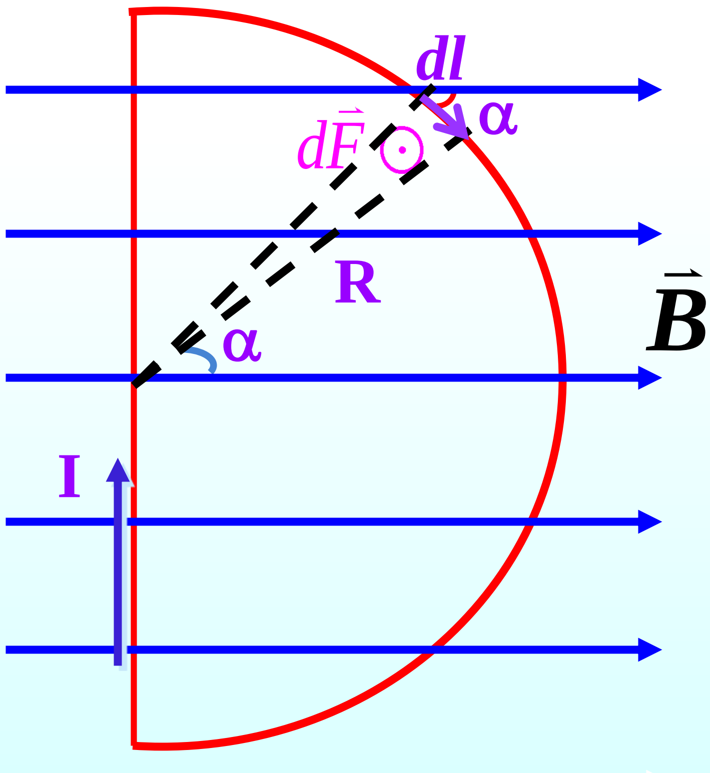
解：法一

$$dF = IB\,dl\sin\alpha = IBR\sin\alpha\, d\alpha$$

作用力垂直于线圈平面

$$dM = dF\cdot R\sin\alpha$$

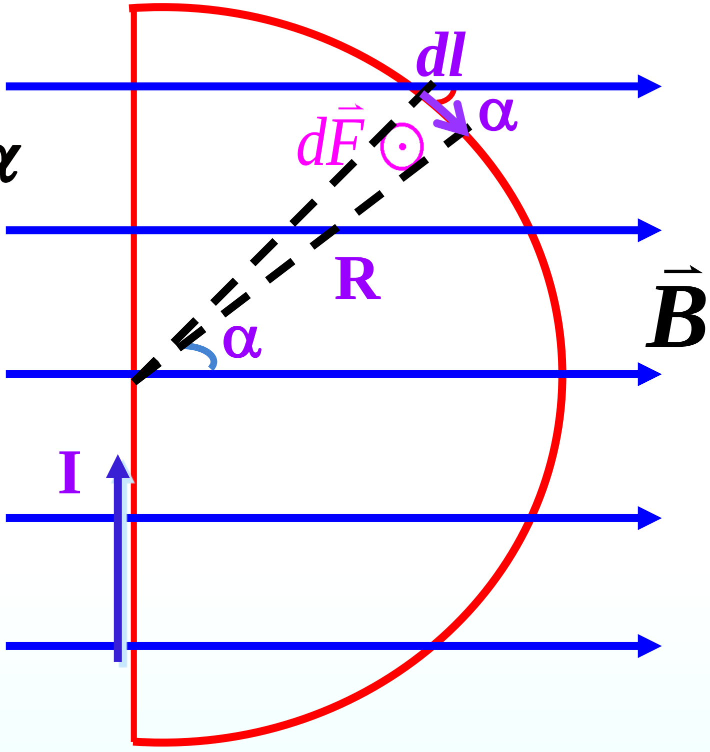
$$= IBR^2\sin^2\alpha\, d\alpha$$



力矩：

$$M=\int dM=\int_0^{\pi} IBR^2\sin^2\alpha\,d\alpha$$

$$=\frac{1}{2}\pi IBR^2$$




力矩的功：

$$A=-\int Md\varphi=-\int_{\pi/2}^{0} p_m B\sin\varphi\,d\varphi$$

$$=\int_0^{\pi/2} p_m B\sin\varphi\,d\varphi=p_m B$$

$$p_m=I\frac{\pi R^2}{2}\qquad A=\frac{1}{2}\pi R^2 IB$$

法二：

$$\vec{M} = \vec{p}_m \times \vec{B}$$

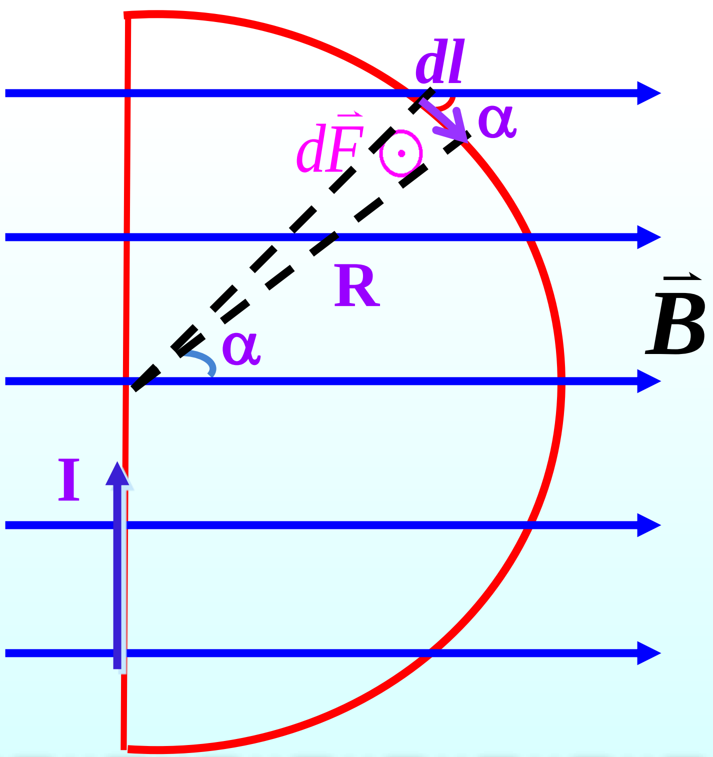
$$M = p_m B \sin\varphi$$

$$\because \quad \varphi = 90° \quad p_m = I \cdot \frac{\pi R^2}{2} \quad \therefore \quad M = \frac{1}{2}\pi IBR^2$$

线圈转过90°时，磁通量的增量为：

$$\Delta\Phi_m = \frac{\pi R^2}{2} B$$

$$A = I\Delta\Phi_m = \frac{\pi R^2}{2} IB$$



# § 8-7　磁场中的磁介质

主要讨论磁介质和磁场的
相互作用、相互影响及其规律

## 主要内容

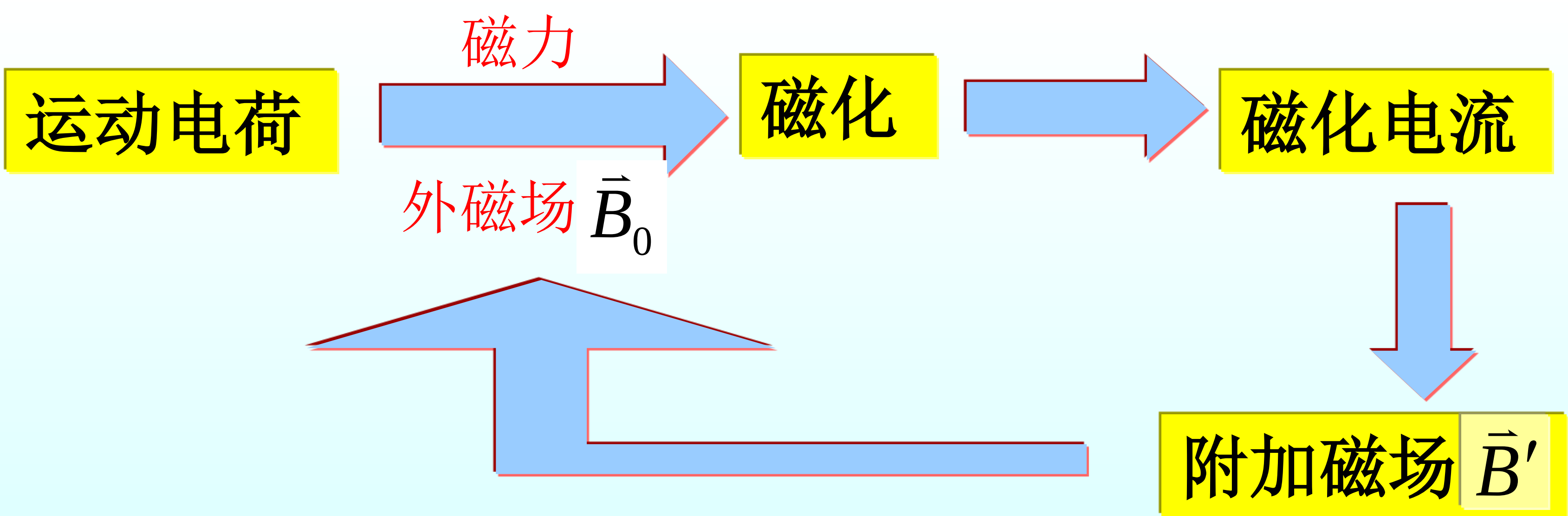
- 磁介质及其磁化机理
- 磁介质中的高斯定理和安培环路定理
- 铁磁质磁化机理

# 一、磁场和磁介质相互影响

## 1、磁场要使磁介质磁化

磁介质——处于磁场中能与磁场发生相互作用的介质

磁　化——磁场对磁场中的物质的作用称为磁化

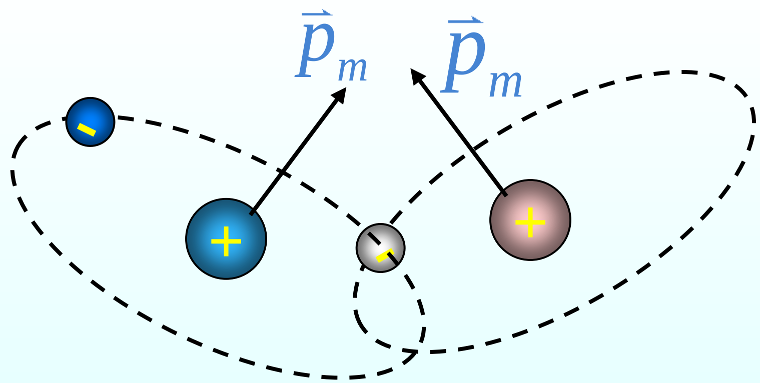


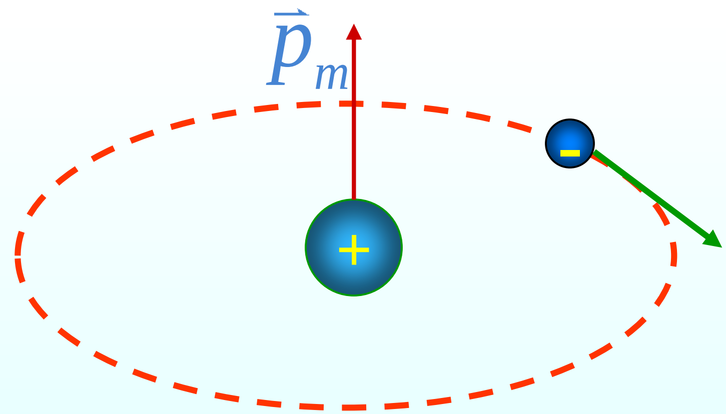
# 分子电流和分子磁矩

近代科学实践证明，分子或原子中的电子存在**轨道运动**和**自旋运动**。这两种运动都能产生磁效应。

分子或原子中各电子对外产生磁效应的总和，等效于一个圆电流，称为“分子电流”。分子电流的磁矩称为“分子磁矩”

各电子磁矩



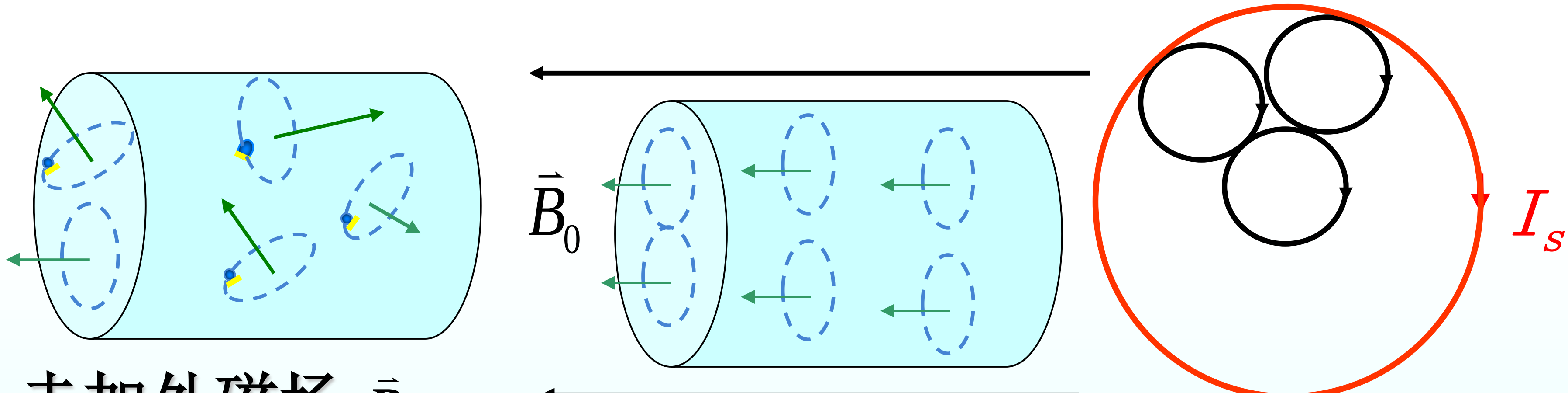

分子磁矩

单个电子绕核： $i \simeq 1.1\times10^{-3}\,\mathrm{A}$

$$p_m \simeq 1.1\times10^{-3}\pi(5.1\times10^{-11})^2 = 9\times10^{-24}\,\mathrm{Am}^2$$

## ➢ 磁介质的微观电结构

电子绕原子核的轨道运动 + 电子的自旋运动 ⇒ **磁矩**




未加外磁场 $\vec{B}_0$

介质磁化以后，由于分子磁矩的有序排列，其宏观效果是在介质横截面边缘出现环形电流，这种电流称为**磁化电流** $I_s$ 又叫**分子面电流**。

## 磁化电流与传导电流的区别：

**磁化电流**——是分子电流规则排列的宏观反映，并不伴随电荷的定向运动，不产生热效应。

**传导电流**——是由大量电荷作定向运动形成的

## 2、处于磁化状态的磁介质使磁场发生变化

未放入磁介质的磁场（传导电流I激发）$\vec{B}_0$

放入磁介质的磁场 $$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}'$$

总磁感应强度

外加磁感应强度

附加磁感应强度

定义:

$$\vec{B}/\vec{B}_0 = \mu_r$$

相对磁导率

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}'$$

## 二、磁介质的分类

**（1）顺磁性介质:** 介质磁化后呈弱磁性。

附加磁场B′与外场$B_0$同向。 $B > B_0$、$\mu_r > 1$ 如Mn; Cr等

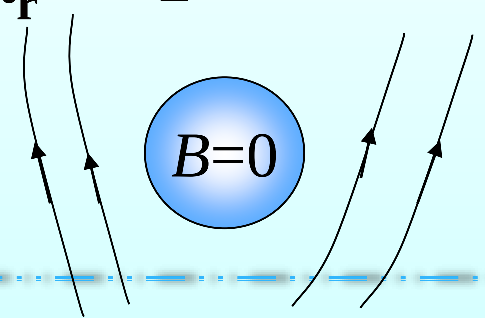
**（2）抗磁性介质:** 介质磁化后呈弱磁性。

附加磁场B′与外场$B_0$反向。 $B < B_0$、$\mu_r < 1$ 如Pb; Zn等

**（3）铁磁性介质:** 介质磁化后呈强磁性。

附加磁场B′与外场$B_0$同向。 $B >> B_0$ ， $\mu_r >> 1$

**（4）超导体(完全抗磁体）:**



# 三、磁化强度　磁化电流

## 1. 磁化强度

反映磁介质磁化程度(大小与方向)的物理量。

磁化强度：单位体积内所有分子固有磁矩的矢量和$\sum \vec{p}_m$加上附加磁矩的矢量和$\sum \Delta\vec{p}_m$，称为磁化强度，用$\vec{M}$表示。

$$\vec{M}=\frac{\sum \vec{p}_m+\sum \Delta\vec{p}_m}{\Delta V}$$

磁化强度的单位：$A/m$

**注意：** 对顺磁质，$\sum \Delta\vec{p}_m$ 可以忽略；

对抗磁质 $\sum \vec{p}_m = 0$ ，

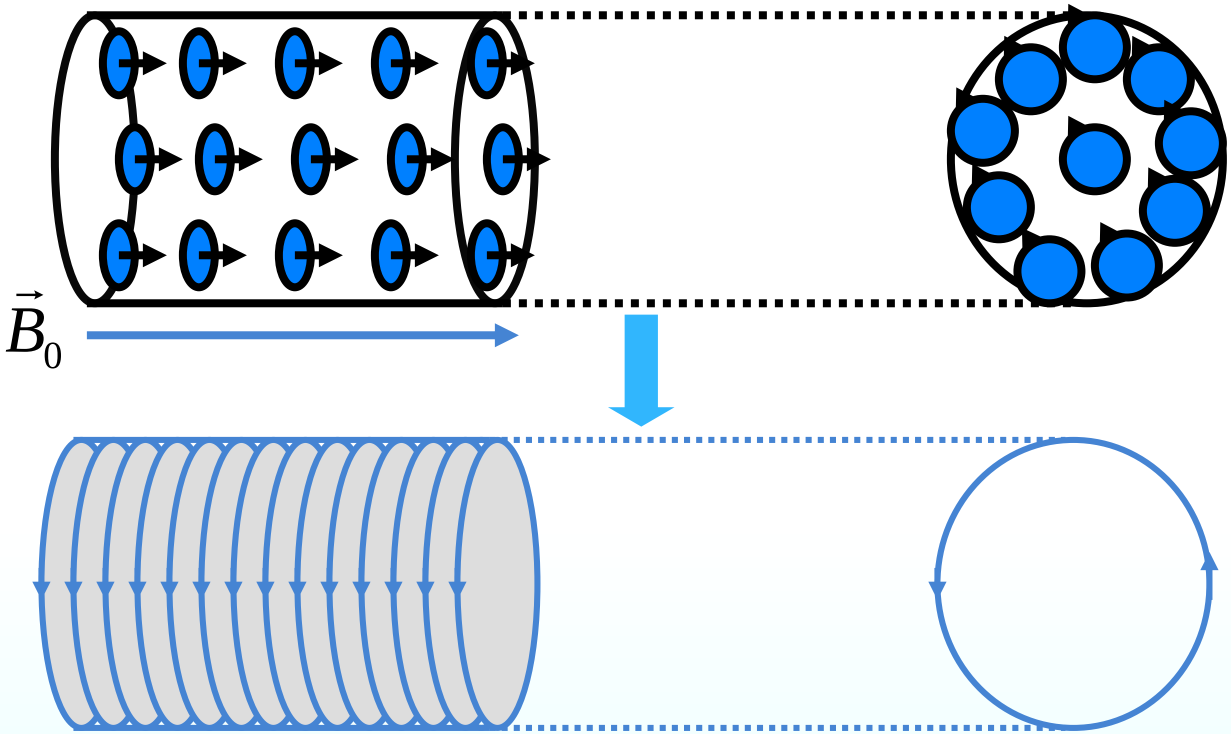
对于真空，$\vec{M} = 0$ 。

外磁场为零，磁化强度为零。

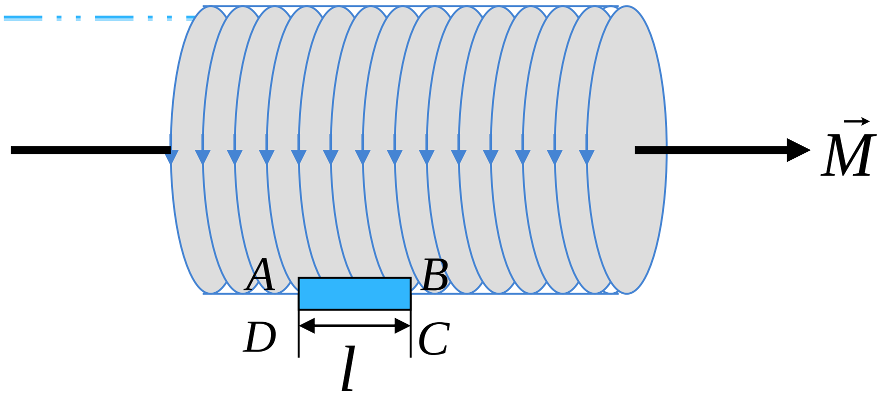
外磁场不为零：

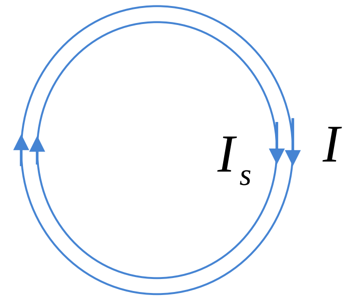
$$\begin{cases} \vec{M}、\vec{B}_0 \text{同向} & \text{顺磁质} \\ \vec{M}、\vec{B}_0 \text{反向} & \text{抗磁质} \end{cases}$$

# 2. 磁化电流




对于各向同性的均匀介质，介质内部各分子电流相互抵消，而在介质表面，各分子电流相互叠加，在磁化圆柱的表面出现一层电流，好象一个载流螺线管，称为**磁化面电流（或安培表面电流）**。



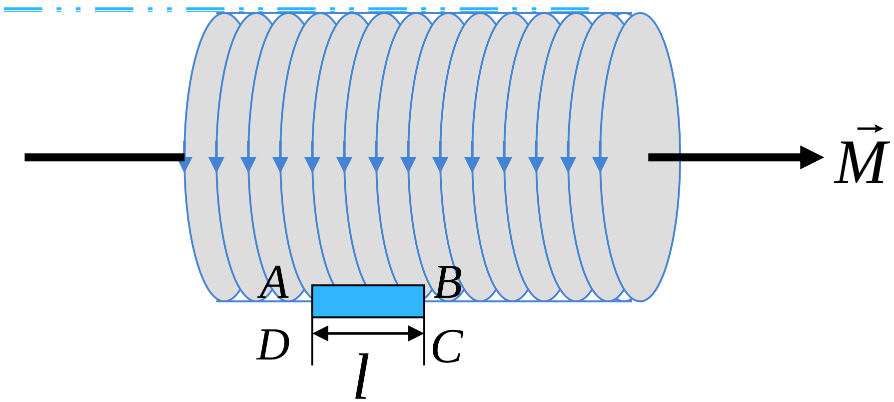


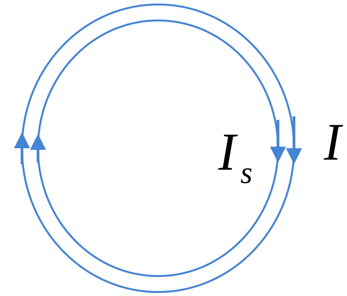

设介质表面沿轴线方向单位长度上的磁化电流为$\alpha_s$（面磁化电流密度），则长为$l$ 的一段介质上的磁化电流强度$I_S$为

$$I_s = \alpha_s l$$

$$\sum P_m = I_s \cdot S = \alpha_s S l$$

$$M = \frac{\sum \vec{p}_m}{\Delta V} = \frac{\alpha_s S l}{S l} = \alpha_s$$




取一长方形闭合回路***ABCD***，***AB***边在磁介质内部，平行与柱体轴线，长度为***l***，而***BC***、***AD***两边则垂直于柱面。

$$\oint \vec{M}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_A^B \vec{M}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = M\cdot \overline{AB} = Ml$$

$$\because M = \alpha_s \qquad \therefore \oint \vec{M}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \alpha_s l = I_s$$

磁化强度对闭合回路的线积分等于通过回路所包围的面积内的总磁化电流

# §8-8 磁介质中的磁场

无磁介质时 $\oint_L \vec{B}_0 \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 \sum_{(L内)} I_0$

磁场中有介质存在时，总磁场有所不同，出现了磁化电流 $I_s$ 和附加磁场 $\vec{B}'$

磁介质中的总磁感应强度为：$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}'$

## 一. 有磁介质时磁场的高斯定理

磁化介质内的附加磁场 $\vec{B}'$ 仍为涡旋场。因此有磁介质存在时，磁场的高斯定理仍成立

$$\oiint_S \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0$$