在无铁磁质情况下，当回路形状、大小、位置和周围磁介质种类极其分布都不变时：

$$\Psi = LI$$

$$\varepsilon_L = -L\frac{dI}{dt}$$

L与$\frac{dI}{dt}, I$ 均无关。

$$\Psi_{21} = N_2\Phi_{21} = M_{21}I_1$$
$$\Psi_{12} = N_1\Phi_{12} = M_{12}I_2$$

$$\varepsilon_{21} = -M\frac{dI_1}{dt}$$
$$\varepsilon_{12} = -M\frac{dI_2}{dt}$$

M与$\frac{dI}{dt}, I$均内无关。

单位（SI）：

亨利(H):$1H = 1\frac{Wb}{A} = 1\frac{V}{A/s}$

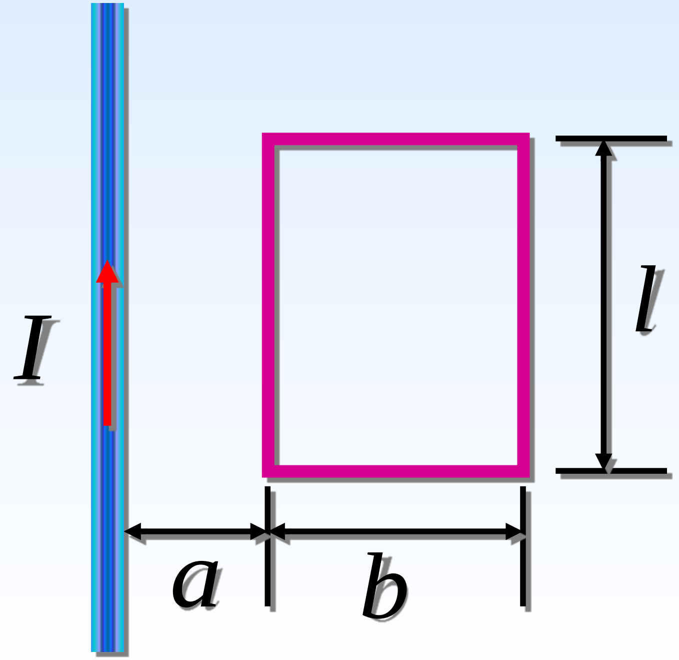
例、 如图（a），在磁导率为μ的均匀无限大的磁介质中，有一无限长直导线，与一边长分别为 b 和 l 的矩形线圈在同一平面内，直导线与矩形线圈的一边相距为 a ，求它们的互感系数。若长直导线与矩形线圈按图（b）放置，互感系数又为多少？

解： 穿过矩形线圈的磁通量为

$$\Phi = \frac{\mu I l}{2\pi} \ln \frac{a+b}{a}$$

由互感系数定义得

$$M = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu l}{2\pi} \ln \frac{a+b}{a}$$



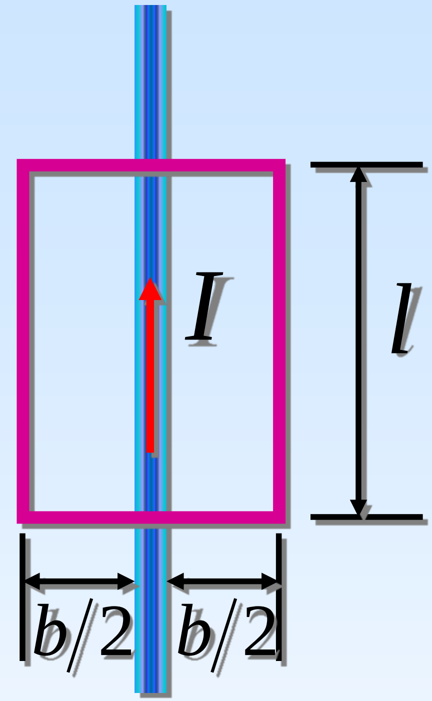
（a）

对如图所示情况，则有

$$\boxed{\Phi = 0}$$

互感系数为

$$\boxed{M = 0}$$



（b）

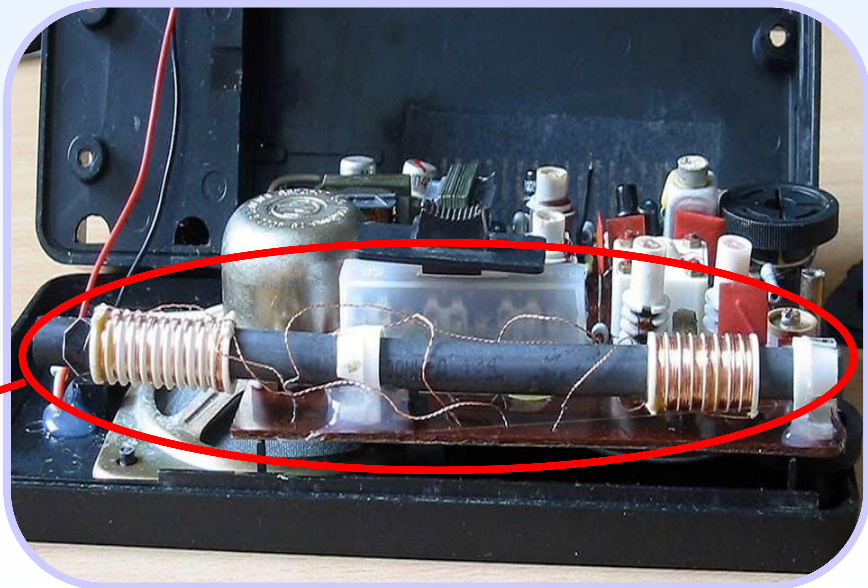
互感系数与形状、介质磁导率及相对位置有关。

3. 互感现象的应用

◎传递能量

◎传递信息

变压器



收音机里的
“磁性天线”

思考： 当小线圈插入大线圈过程中，为何声音大小有变化？

§9-5　磁场的能量

- 线圈的磁场能量

建立电流磁场

外力作功

克服电磁感应反抗电动势

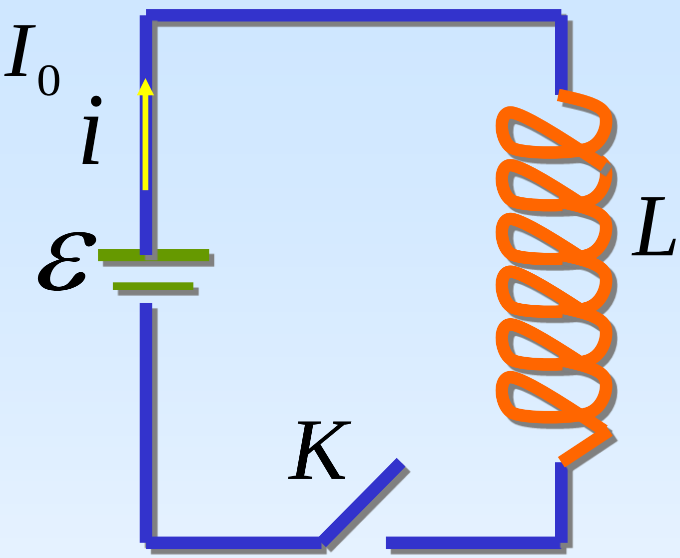
消耗电源电能

转化

磁场能量

线圈
（储存磁能的器件）

当闭合K时，线圈中电流i从$0 \rightarrow I_0$



线圈自感电动势为 $\varepsilon_L = -L\dfrac{di}{dt}$

dt内电源电动势ε反抗ε_L作功为

$$dA = -\varepsilon_L i dt = Lidi$$

由功能原理得 $dA = dW_m$

即 $$W_m = \int dW_m = \int dA = \int_0^I Lidi$$

当 L 不变时，有 $W_m = \dfrac{1}{2}LI^2$ ——L，I 的线圈的磁场能量公式

- 磁场的能量、磁场能量密度

以长直螺线管为例：

通以电流 *I*，管内磁场及自感为：

$$B = \mu n I, L = \mu n^2 V$$

代入

$$W_m = \frac{1}{2} L I^2$$

得

$$W_m = \frac{1}{2} L I^2 = \frac{1}{2} \mu n^2 V \left(\frac{B}{\mu n} \right)^2 = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu} V$$

管内磁场均匀，得磁场能量密度为

$$w_m = \frac{W_m}{V} = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu} = \frac{1}{2}BH$$ ——普遍适用

在任何磁场中，某点的磁场能量密度，只与该点的磁感应强度和介质有关，是空间位置的点函数（变化场与 t 也有关）。

<u>磁能定域在场中</u>

均匀磁场：

$$W_m = w_m V$$

非均匀磁场：

$$dW_m = w_m dV = \frac{1}{2} BHdV$$

$$W_m = \int dW_m = \frac{1}{2}\int_V BHdV$$

（*V* 为磁场不为零的空间）

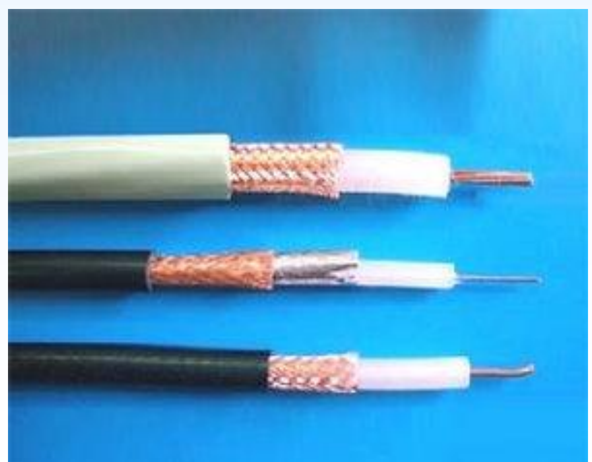
例、 一根半径为r_0的铜导线，包一层厚为d，磁导率为μ的介质，介质外面是导体，它们组成同轴电缆。求高低频下此电缆单位长度的自感系数和磁场能量。

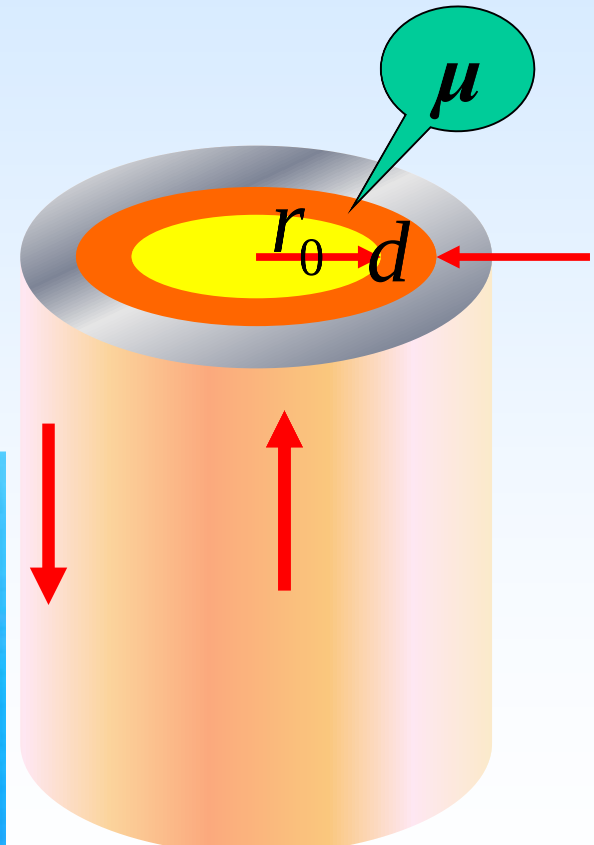
解：（1）低频：I沿轴均匀体分布

$r<r_0$ $$H\cdot 2\pi r=\frac{I}{\pi r_0^2}\cdot\pi r^2$$

$$H=\frac{Ir}{2\pi r_0^2}$$

$$B=\mu_0 H=\frac{\mu_0 Ir}{2\pi r_0^2}$$



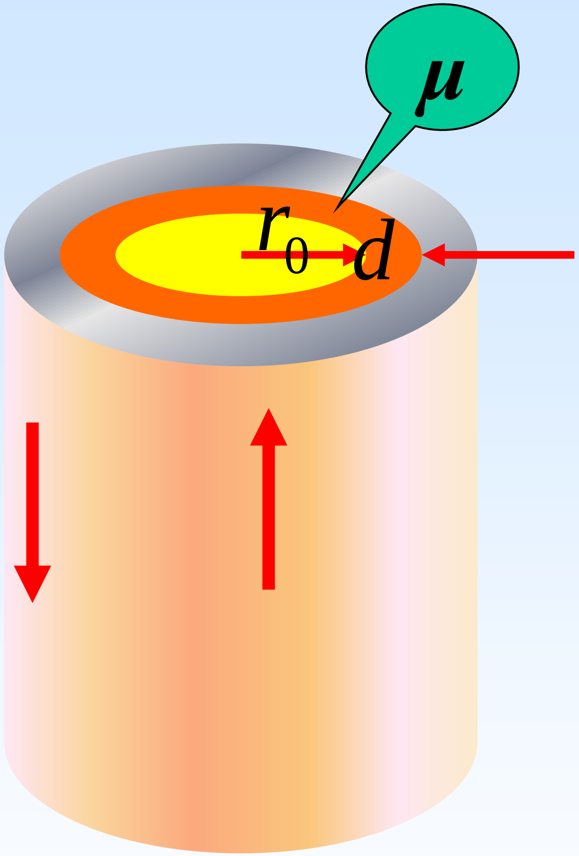


$$r_0 \langle r \langle r_0 + d \qquad H \cdot 2\pi r = I$$

$$H = \frac{I}{2\pi r}$$

$$B = \mu H = \frac{\mu I}{2\pi r}$$

$$r \rangle r_0 + d \qquad H = 0 \quad B = 0$$



$$W_{m1} = \frac{1}{2}\int_V HBdV$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{r_0}\left(\frac{\mu_0 I^2 r^2}{4\pi^2 r_0^4}\right)2\pi r dr + \frac{1}{2}\int_{r_0}^{r_0+d}\left(\frac{\mu I^2}{4\pi^2 r^2}\right)2\pi r dr$$

$$= \frac{\mu_0 I^2}{4\pi\ r_0^4}\int_0^{r_0} r^3 dr + \frac{\mu I^2}{4\pi}\int_{r_0}^{r_0+d}\frac{dr}{r}$$

$$= \frac{\mu_0 I^2}{16\pi} + \frac{\mu I^2}{4\pi}\ln\frac{r_0+d}{r_0}$$

$$L_1 = \frac{2W_{m1}}{I^2} = \frac{\mu_0}{8\pi} + \frac{\mu}{2\pi}\ln\frac{d+r_0}{r_0}$$

（2）高频：产生趋肤效应——内部电流沿表面分布：

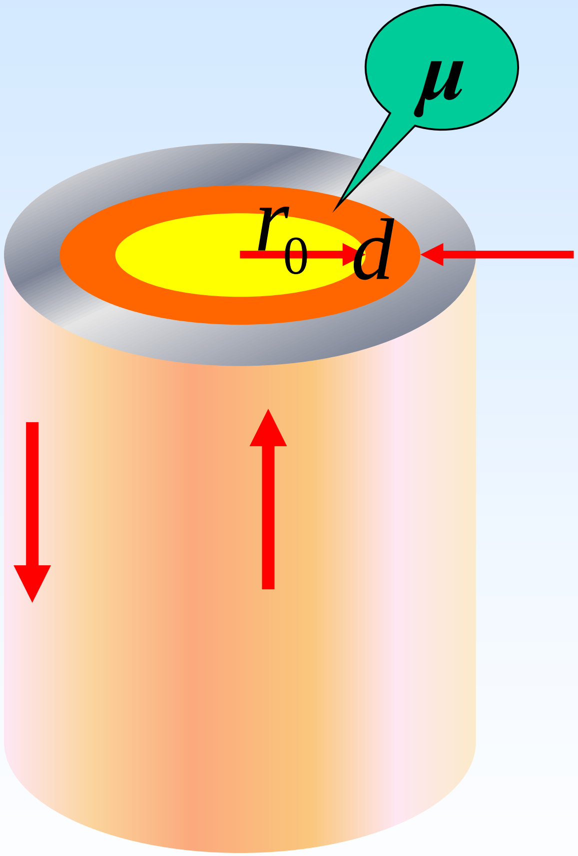
$$r_0 \langle r \langle r_0 + d \qquad H \cdot 2\pi r = I$$

$$H = \frac{I}{2\pi r}$$

$$B = \mu H = \frac{\mu I}{2\pi r}$$

$$r \langle r_0 , r \rangle r_0 + d$$

$$H = 0 \qquad B = 0$$



$$W_{m2} = \frac{1}{2}\int_{r_0}^{r_0+d} \frac{\mu I^2}{4\pi^2 r^2} \cdot 2\pi r dr$$

$$= \frac{\mu I^2}{4\pi} \ln \frac{r_0 + d}{r_0}$$

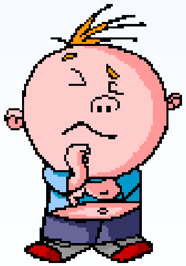
$$L_2 = \frac{2W_{m2}}{I^2} = \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{d + r_0}{r_0}$$

$$\left(W_2 \langle W_1, L_2 \langle L_1\right)$$

§9-6 位移电流 电磁场理论

电场
- 静电场 ⟵ 静止的电荷
- 感生电场 ⟵ 变化的磁场

磁场
- 稳恒磁场 ⟵ 恒定的电流
- 感生磁场 ⟵ ? 变化的电场

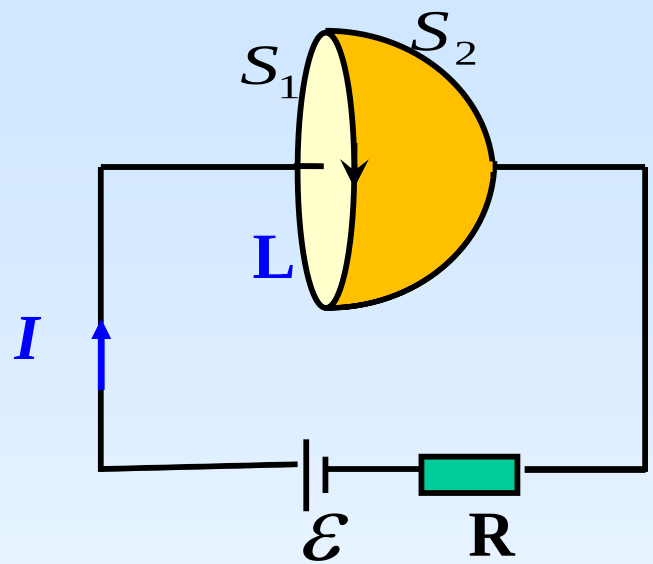


一、问题的提出

* **稳恒电流时：**

$$\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l}=\iint_{S_1}\vec{j}\cdot d\vec{S}=I$$

$$\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l}=\iint_{S_2}\vec{j}\cdot d\vec{S}=I$$

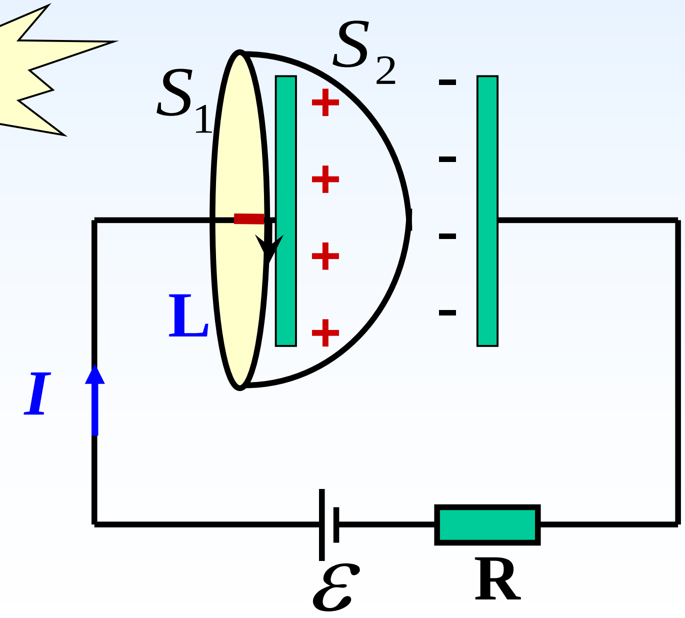


* **非稳恒电流时：**

矛盾

$$\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l}=\iint_{S_1}\vec{j}\cdot d\vec{S}=I$$

$$\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l}=\iint_{S_2}\vec{j}\cdot d\vec{S}=0$$

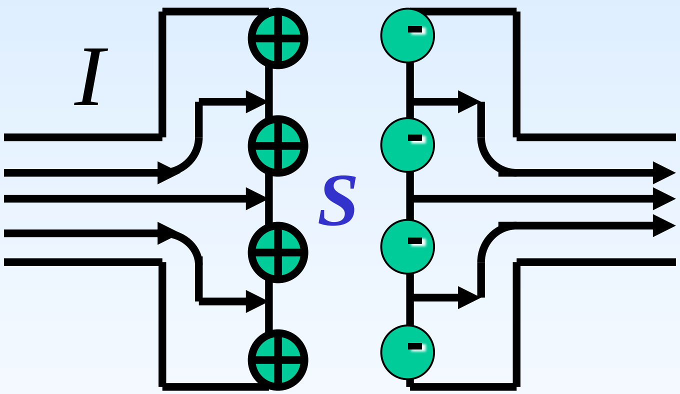


在RC电路中，传导电流不连续。

二、问题的分析

① 传导电流不连续是出现矛盾的原因！

② 寻找**电容器内部电场**和**外部电路中电流**大小的关系



$$\because I = \frac{dq}{dt} \quad \therefore j = \frac{I}{S} = \frac{dq}{Sdt} = \frac{d\sigma}{dt}$$

$$\because D = \sigma \quad \therefore \frac{dD}{dt} = \frac{d\sigma}{dt}$$

$$\Phi_D = DS = \sigma S = q$$

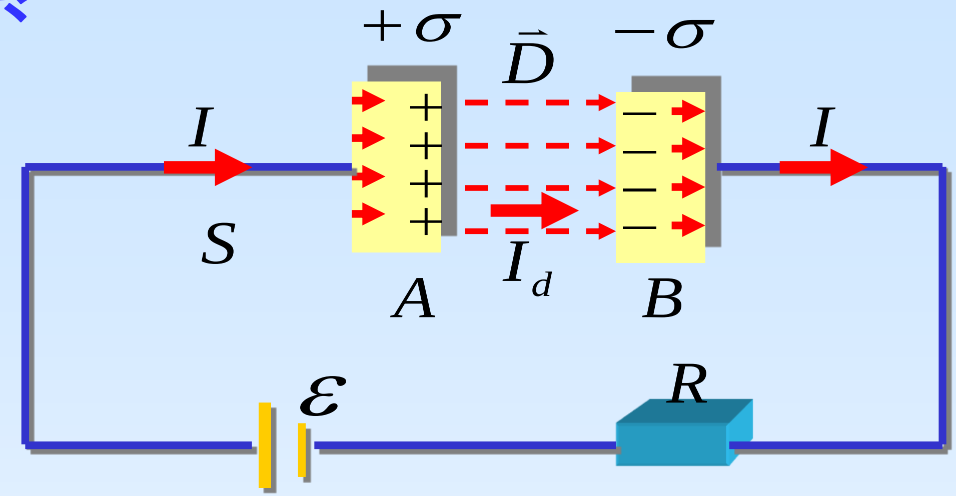
$\vec{D} = \vec{D}(t), \Phi_D(t)$

(有变化电场)

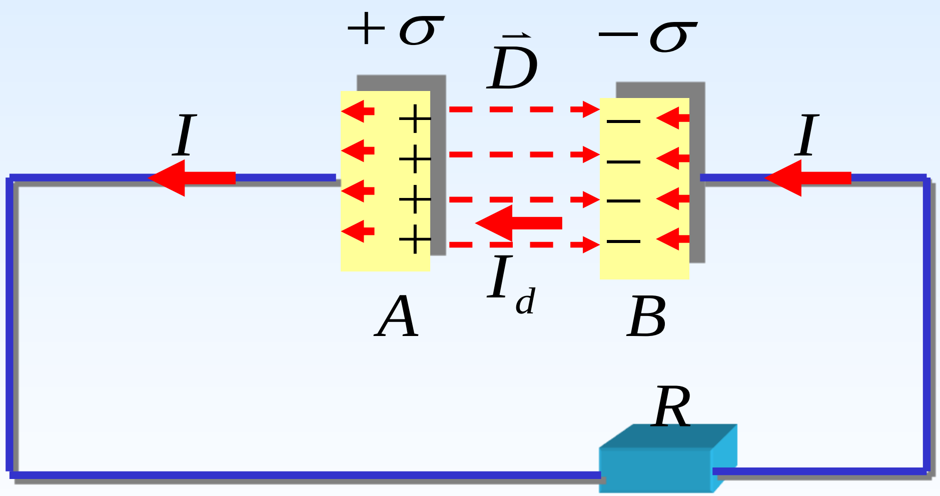
$$\boxed{j_d = \frac{dD}{dt}} \qquad \boxed{I_d = \frac{d\Phi_D}{dt}}$$

③ 方向的关系

充电



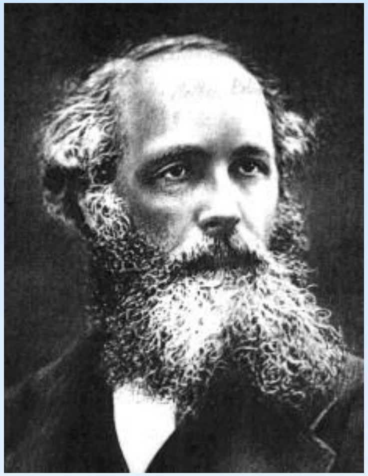
放电



充电：$\vec{E}\uparrow$，$\vec{D}\uparrow$，$\dfrac{d\vec{D}}{dt}$与$\vec{E}$同方向，与I同方向。

放电：$\vec{E}\downarrow$，$\vec{D}\downarrow$，$\dfrac{d\vec{D}}{dt}$与$\vec{E}$反方向，与I同方向。

三、问题的解决——位移电流的提出



麦克斯韦：变化的电场也是一种电流！

① 位移电流：

$$\boxed{I_d = \frac{d\Phi_D}{dt}} \qquad \boxed{\vec{j}_d = \frac{d\vec{D}}{dt}}$$

位移电流 I_d 和传导电流 I 按相同的规律激发磁场！

$$I_d = \frac{d\Phi_D}{dt} = \frac{d}{dt}\iint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = \iint_S \frac{d\vec{D}}{dt}\cdot d\vec{S} = \iint_S \vec{j}_D \cdot d\vec{S}$$

② 全电流：

$$I_{全} = I + I_d$$

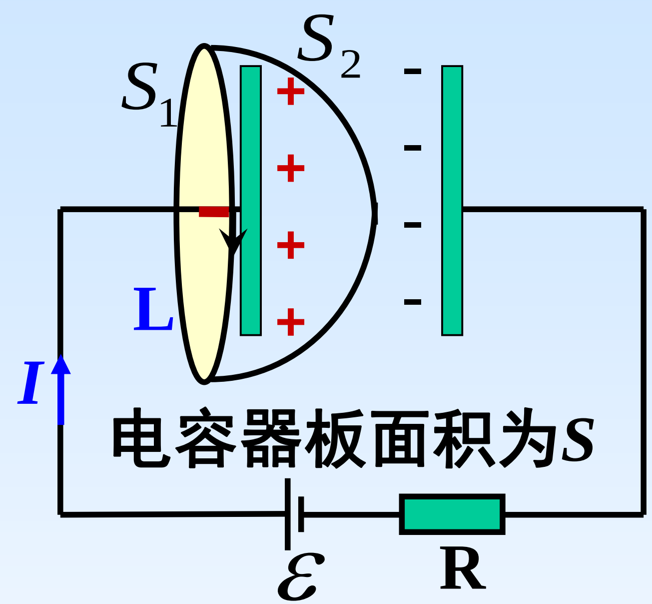
传导电流可以不连续，但全电流永远是连续的！

③ 全电流下的安培环路定理（全电流定律）：

$$\boxed{\oint_L \vec{H} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = I + I_{\mathrm{d}} = \iint_S \vec{j} \cdot \mathrm{d}\vec{S} + \iint_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\vec{S}}$$

④ 位移电流的实质

用全电流定律解决矛盾：



S_1面：只有传导电流 $\oint_L \vec{H}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = I$

S_2面：只有位移电流 $\oint_L \vec{H}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = I_d$

$$\Phi_D = DS = \sigma S = q$$

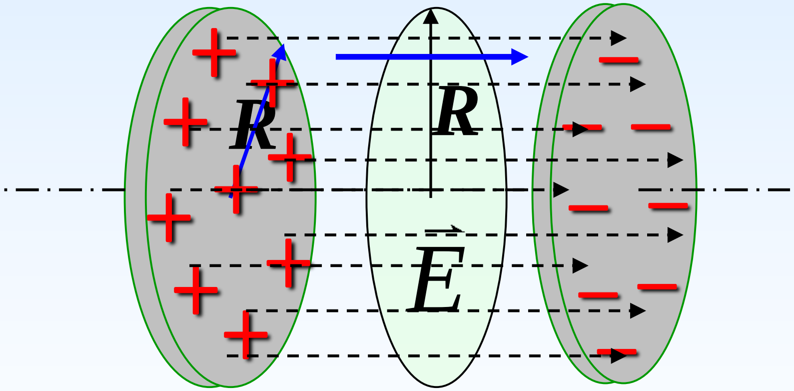
$$I_\mathrm{d} = \frac{\mathrm{d}\Phi_D}{\mathrm{d}t} = \iint_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\cdot d\vec{S} = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = I$$

变化的电场激发涡旋磁场！

⑤ 位移电流 I_d 和传导电流 I 的异同点：

	传导电流 I_0	位移电流 I_d
相同点：	激发涡旋磁场等效，满足右手螺旋关系。	
不同点：	自由电荷定向运动	电场随时间变化率
	产生焦耳热	不产生焦耳热
	在导体内产生	不论导体、介质、真空均可产生
高频：I_0，I_d 同时存在	导体中以 I_0 为主，I_d 忽略	介质中以 I_d 为主，I_0 忽略

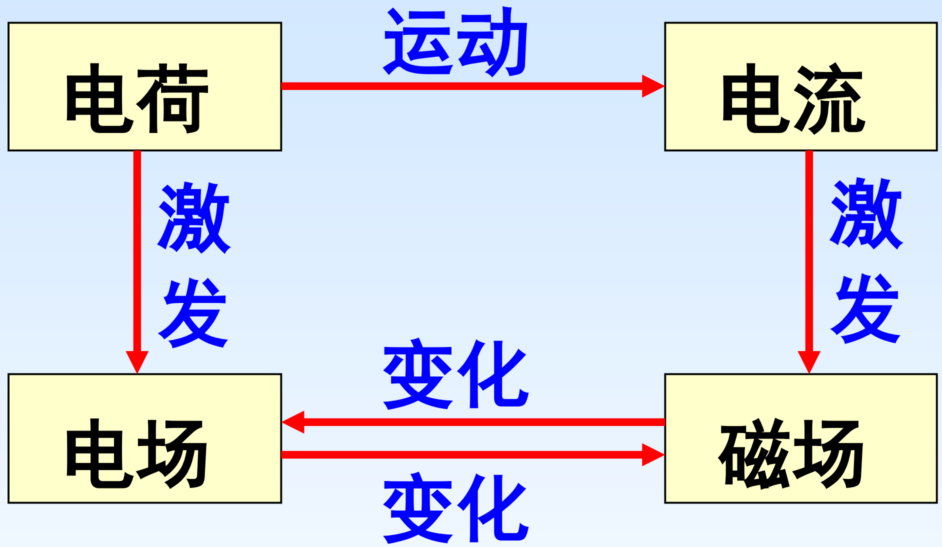
例： 半径为 $R = 0.1$ m 的两块圆板，构成平板电容器。现均匀充电，使电容器两极板间的电场随时间的变化率为10^{13} V/(m·s)，求极板间的位移电流。



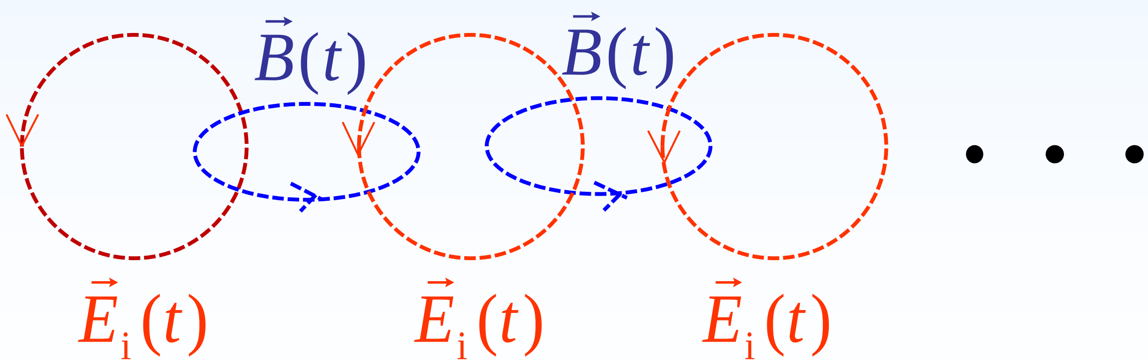
解： $\Phi_D = SD = \pi R^2 \cdot \varepsilon_0 E$

$$I_d = \frac{d\Phi_D}{dt} = \pi R^2 \varepsilon_0 \frac{dE}{dt} = 2.8 \ (A)$$

电场和磁场的内在联系，反映自然界的对称性。



电磁波：



- 麦克斯韦方程组(积分形式)

$$\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = \sum q = \int_V \rho dV$$

$$\oint_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = 0$$

$$\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$$

$$\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l} = I_0 + I_d = \int_S \vec{\delta}\cdot d\vec{S} + \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$$

描述宏观电磁场的运动规律

说明：

在任何电场中，通过任何封闭曲面的电位移通量等于该封闭曲面包围的自由电荷的代数和。

（1） $\vec{D}=\vec{D}_1+\vec{D}_2$

自由电荷产生的电场$\left(\vec{E}_1,\ \vec{D}_1\right)$

$$\oint_S \vec{D}_1\cdot d\vec{S}=\sum q$$

→ 有源无旋场（不闭合）

变化磁场产生的感生电场$\left(\vec{E}_2,\ \vec{D}_2\right)$

$$\oint_S \vec{D}_2\cdot d\vec{S}=0$$

→ 无源有旋场（闭合）

→ $$\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S}=\sum q=\int_V \rho dV$$

（2） $\vec{B}=\vec{B}_1+\vec{B}_2$

在任何磁场中，通过任何封闭曲面的磁通量总是等于零。

传导电流产生的磁场$(\vec{B}_1, \vec{H}_1)$

$$\oint_S \vec{B}_1 \cdot d\vec{S}=0$$

位移电流产生的磁场 $(\vec{B}_2, \vec{H}_2)$

$$\oint_S \vec{B}_2 \cdot d\vec{S}=0$$

都是涡旋场（闭合）

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}=0$$

（3） $\vec{E}=\vec{E}_1+\vec{E}_2$

在任何电场中，电场强度沿任何闭合曲线的线积分等于穿过该曲线所包围面积的磁通量对时间变化率的负值。

自由电荷产生的电场$\left(\vec{E}_1,\ \vec{D}_1\right)$

$$\oint_L \vec{E}_1\cdot d\vec{l}=0$$

无旋场

变化磁场产生的电场$\left(\vec{E}_2,\ \vec{D}_2\right)$

$$\oint_L \vec{E}_2\cdot d\vec{l}=-\frac{d\Phi}{dt}$$

涡旋场

$$\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l}=-\frac{d\Phi}{dt}=-\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$$

（4） $\vec{H}=\vec{H}_1+\vec{H}_2$

在任何磁场中，磁场强度沿任何闭合曲线的线积分等于穿过该闭合曲线所包围面积的全电流。

传导电流产生的磁场 $\left(\vec{B}_1,\ \vec{H}_1\right)$

$$\oint_L \vec{H}_1\cdot d\vec{l}=I_0=\int_S \vec{\delta}\cdot d\vec{S}$$

位移电流(变化电场)产生的磁场$\left(\vec{B}_2,\ \vec{H}_2\right)$

$$\oint_L \vec{H}_2\cdot d\vec{l}=I_d=\int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$$

都是涡旋场（闭合）

$$\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l}=I_0+I_d=\int_S \vec{\delta}\cdot d\vec{S}+\int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$$

- 麦克斯韦方程组(微分形式)

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

散度

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{\delta} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

旋度

哈密顿算符：

$$\nabla = \vec{i}\,\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial}{\partial z}$$

- 麦克斯韦方程式的适用范围

适用于宏观高速领域：与狭义相对论相容

研究高速运动电荷所产生的电磁场及一般的辐射问题

不适用于微观领域：

处理高能基本粒子使用量子电动力学