恒定电流的磁场

磁场的描述

磁感应强度：$\left|\vec{B}\right| = \dfrac{F_m}{q\,v}$

磁感应线：方向及密度

磁通量：$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$

电流的磁场

- 比-萨-拉定律：
  $$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{Id\vec{l} \times \hat{r}_0}{r^2}$$
  叠加原理：$\vec{B} = \int d\vec{B}$

  运动电荷的磁场：
  $$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{q\vec{v} \times \hat{r}_0}{r^2}$$
- 基本方程

  高斯定理：
  $$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$
  安培环路定律：
  $$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum I$$

计算与应用

长直电流、圆电流、螺线管、圆柱电流、对称面电流等产生的磁场。

磁场对电流的作用

- 安培定律：
  $$d\vec{F} = Id\vec{l} \times \vec{B}$$
  $$\vec{F} = \int_L Id\vec{l} \times \vec{B}$$
  洛仑兹力：
  $$\vec{F} = q\left(\vec{v} \times \vec{B}\right)$$
- 磁场对载流线圈的力矩：
  $$\vec{M} = \vec{p}_m \times \vec{B}$$
  $$\vec{p}_m = N \cdot IS\hat{n}$$

计算与应用

电流受力、定义“安培”、电磁仪表、磁透镜、加速器、质谱仪、霍尔效应等。

磁介质：

磁场强度：

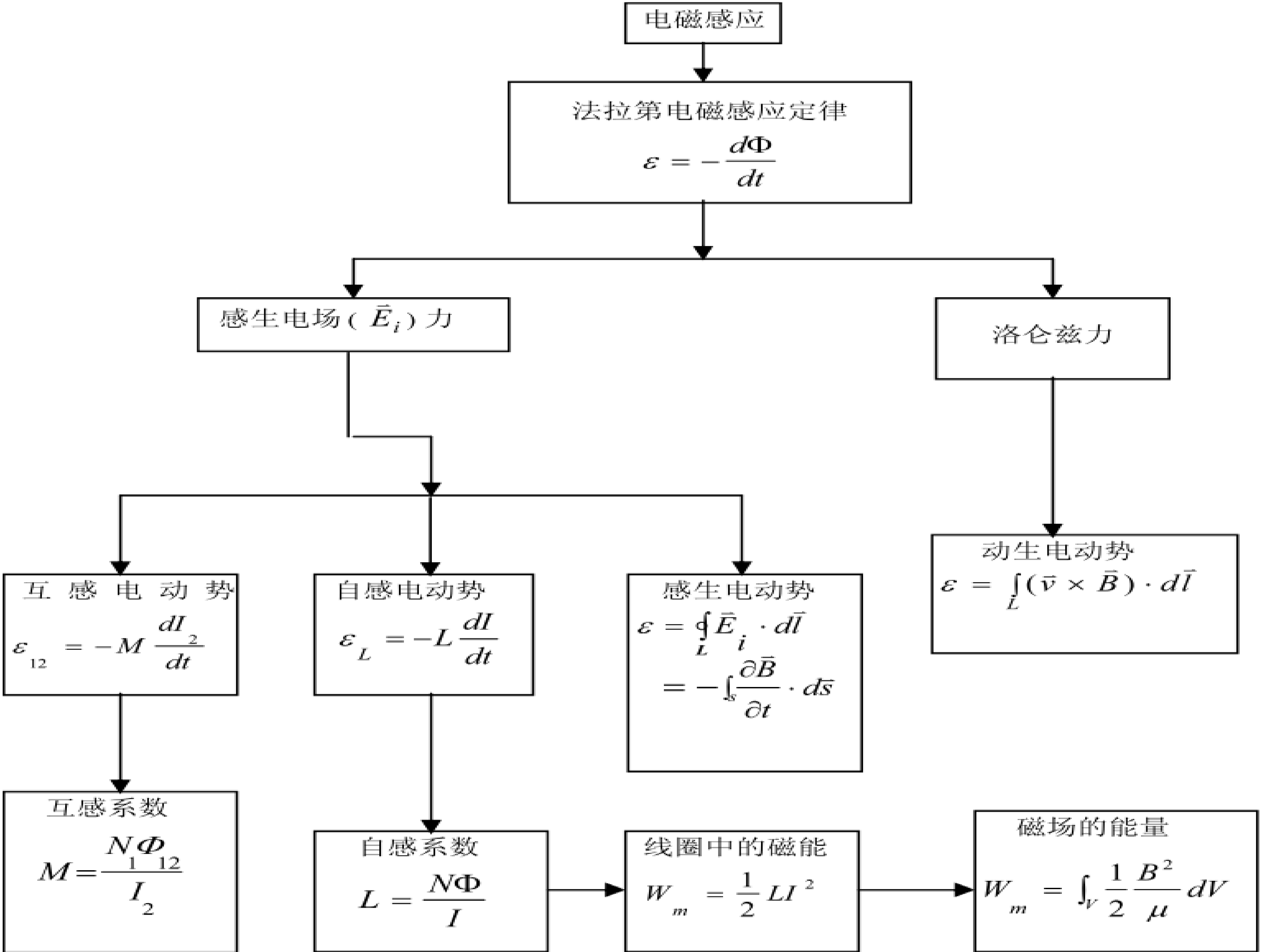
$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$$

介质中的环路定理：

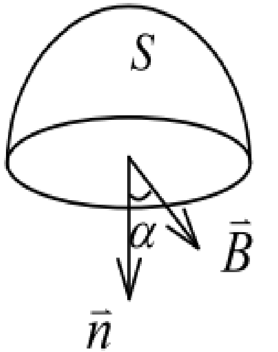
$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum I$$

介质中的场强：

$$B = \mu H$$


电磁感应
法拉第电磁感应定律
$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt}$
感生电场（$\vec{E}_i$）力
洛仑兹力
互 感 电 动 势
$\varepsilon_{12} = -M\frac{dI_2}{dt}$
自感电动势
$\varepsilon_L = -L\frac{dI}{dt}$
感生电动势
$\varepsilon = \oint_L \vec{E}_i \cdot d\vec{l} = -\int_s \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{s}$
动生电动势
$\varepsilon = \int_L (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$
互感系数
$M = \frac{N_1 \Phi_{12}}{I_2}$
自感系数
$L = \frac{N\Phi}{I}$
线圈中的磁能
$W_m = \frac{1}{2} L I^2$
磁场的能量
$W_m = \int_V \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu} dV$

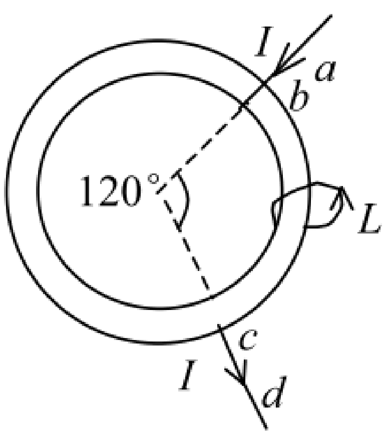
在磁感强度为 $\vec{B}$ 的均匀磁场中作一半径为 r 的半球面 S，S 边线所在平面的法线方向单位矢量 $\vec{n}$ 与 $\vec{B}$ 的夹角为 α ，则通过半球面 S 的磁通量(取弯面向外为正)为



(A) $\pi r^2 B$.　　(B) $2\pi r^2 B$.

(C) $-\pi r^2 B\sin\alpha$.　　(D) $-\pi r^2 B\cos\alpha$.　　[(D)]

如图，两根直导线 ab 和 cd 沿半径方向被接到一个截面处处相等的铁环上，稳恒电流 I 从 a 端流入而从 d 端流出，则磁感强度 $\vec{B}$ 沿图中闭合路径 L 的积分 $\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$ 等于



(A) $\mu_0 I$.　　(B) $\frac{1}{3}\mu_0 I$.

(C) $\mu_0 I/4$.　　(D) $2\mu_0 I/3$.　　[(D)]

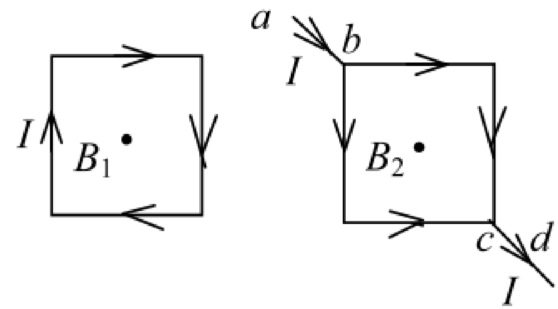
边长为 l 的正方形线圈，分别用图示两种方式通以电流 I (其中 ab、cd 与正方形共面)，在这两种情况下，线圈在其中心产生的磁感强度的大小分别为

(A) $B_1=0$，$B_2=0$.

(B) $B_1=0$，$B_2=\dfrac{2\sqrt{2}\mu_0 I}{\pi l}$.

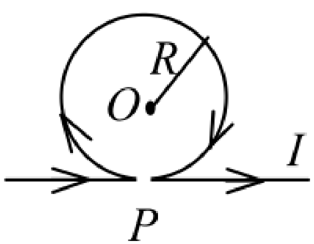
(C) $B_1=\dfrac{2\sqrt{2}\mu_0 I}{\pi l}$，$B_2=0$.

(D) $B_1=\dfrac{2\sqrt{2}\mu_0 I}{\pi l}$，$B_2=\dfrac{2\sqrt{2}\mu_0 I}{\pi l}$.

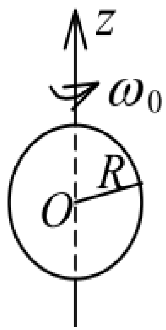


[(C)]

一根无限长直导线通有电流 I，在 P 点处被弯成了一个半径为 R 的圆，且 P 点处无交叉和接触，则圆心 O 处的磁感强度大小为 $\dfrac{\mu_0 I}{2R}(1-\dfrac{1}{\pi})$，方向为垂直纸面向里.



如图所示．电荷 q (>0)均匀地分布在一个半径为 R 的薄球壳外表面上，若球壳以恒角速度 ω_0 绕 z 轴转动，则沿着 z 轴从 $-\infty$ 到 $+\infty$ 磁感强度的线积分等于_____ $\dfrac{\mu_0\omega_0 q}{2\pi}$ ______.



有一 N 匝细导线绕成的平面正三角形线圈，边长为 a，通有电流 I，置于均匀外磁场 $\vec{B}$ 中，当线圈平面的法向与外磁场同向时，该线圈所受的磁力矩 M_m 值为

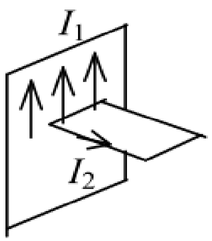
(A) $\sqrt{3}Na^2IB/2$.　　(B) $\sqrt{3}Na^2IB/4$.

(C) $\sqrt{3}Na^2IB\sin 60°$.　　(D) 0.　　[(D)]

如图，在一固定的载流大平板附近有一载流小线框能自由转动或平动．线框平面与大平板垂直．大平板的电流与线框中电流方向如图所示，则通电线框的运动情况对着从大平板看是：

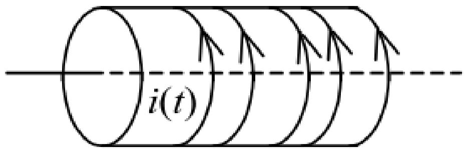
(A) 靠近大平板.　　(B) 顺时针转动.

(C) 逆时针转动.　　(D) 离开大平板向外运动.



[(B)]

如图所示，空气中有一无限长金属薄壁圆筒，在表面上沿圆周方向均匀地流着一层随时间变化的面电流 $i(t)$，则



(A) 圆筒内均匀地分布着变化磁场和变化电场.

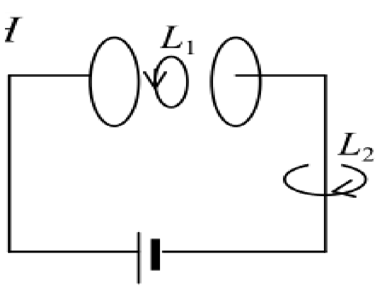
(B) 任意时刻通过圆筒内假想的任一球面的磁通量和电通量均为零.

(C) 沿圆筒外任意闭合环路上磁感强度的环流不为零.

(D) 沿圆筒内任意闭合环路上电场强度的环流为零.　　　　[(B)]

一自感线圈中，电流强度在 0.002 s 内均匀地由 10 A 增加到 12 A，此过程中线圈内自感电动势为 400 V，则线圈的自感系数为 $L =$ <u>0.400 H</u>.

如图，平板电容器(忽略边缘效应)充电时，沿环路 L_1 的磁场强度 $\vec{H}$ 的环流与沿环路 L_2 的磁场强度 $\vec{H}$ 的环流两者，必有：



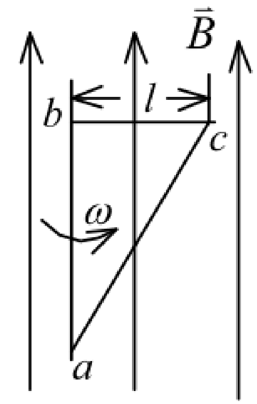
(A) $\oint_{L_1}\vec{H}\cdot d\vec{l}\,' > \oint_{L_2}\vec{H}\cdot d\vec{l}\,'$.

(B) $\oint_{L_1}\vec{H}\cdot d\vec{l}\,' = \oint_{L_2}\vec{H}\cdot d\vec{l}\,'$.

(C) $\oint_{L_1}\vec{H}\cdot d\vec{l}\,' < \oint_{L_2}\vec{H}\cdot d\vec{l}\,'$.

(D) $\oint_{L_1}\vec{H}\cdot d\vec{l}\,' = 0$.　　　　[(C)]

如图所示，直角三角形金属框架 abc 放在均匀磁场中，磁场 $\vec{B}$ 平行于 ab 边，bc 的长度为 l．当金属框架绕 ab 边以匀角速度 ω转动时，abc 回路中的感应电动势$\mathcal{E}$和 a、c 两点间的电势差 $U_a - U_c$ 为



(A) $\mathcal{E}=0$，$U_a - U_c = \frac{1}{2}B\omega l^2$．

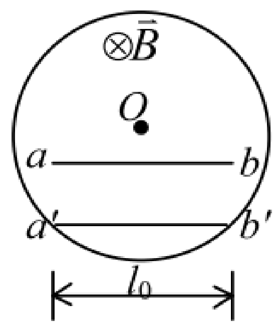
(B) $\mathcal{E}=0$，$U_a - U_c = -\frac{1}{2}B\omega l^2$．

(C) $\mathcal{E}=B\omega l^2$，$U_a - U_c = \frac{1}{2}B\omega l^2$．

(D) $\mathcal{E}=B\omega l^2$，$U_a - U_c = -\frac{1}{2}B\omega l^2$．

[(B)]

在圆柱形空间内有一磁感强度为$\vec{B}$ 的均匀磁场，如图所示，$\vec{B}$ 的大小以速率 $\mathrm{d}B/\mathrm{d}t$ 变化．有一长度为 l_0 的金属棒先后放在磁场的两个不同位置 $1(ab)$和 $2(a'\ b')$，则金属棒在这两个位置时棒内的感应电动势的大小关系为



(A) $\mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_1 \neq 0$．　　(B) $\mathcal{E}_2 > \mathcal{E}_1$．

(C) $\mathcal{E}_2 < \mathcal{E}_1$．　　(D) $\mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_1 = 0$．

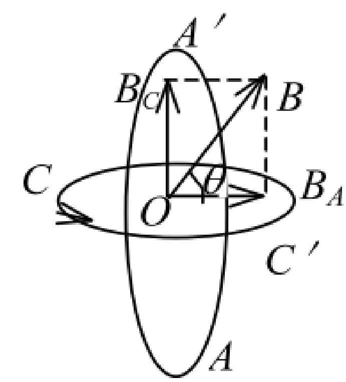
[(B)]

AA' 和 CC' 为两个正交地放置的圆形线圈，其圆心相重合．AA' 线圈半径为 20.0 cm，共 10 匝，通有电流 10.0 A；而 CC' 线圈的半径为 10.0 cm，共 20 匝，通有电流 5.0 A．求两线圈公共中心 O 点的磁感强度的大小和方向．

$(\mu_0 = 4\pi\times10^{-7}\ \mathrm{N\cdot A^{-2}})$

解：AA' 线圈在 O 点所产生的磁感强度

$$B_A = \frac{\mu_0 N_A I_A}{2r_A} = 250\mu_0 \quad (\text{方向垂直 } AA' \text{ 平面}) \qquad 3\text{ 分}$$



CC' 线圈在 O 点所产生的磁感强度

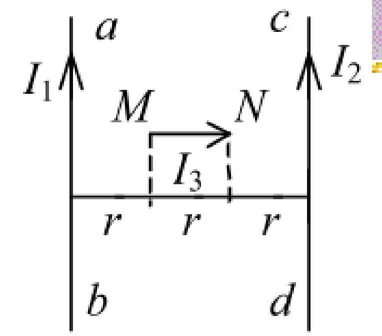
$$B_C = \frac{\mu_0 N_C I_C}{2r_C} = 500\mu_0 \quad (\text{方向垂直 } CC' \text{ 平面}) \qquad 3\text{ 分}$$

O 点的合磁感强度 $B = (B_A^2 + B_C^2)^{1/2} = 7.02\times10^{-4}$ T 2 分

B 的方向在和 AA'、CC' 都垂直的平面内，和 CC' 平面的夹角

$$\theta = \mathrm{tg}^{-1}\frac{B_C}{B_A} = 63.4° \qquad 2\text{ 分}$$

如图所示，载有电流 I_1 和 I_2 的长直导线 ab 和 cd 相互平行，相距为 $3r$，今有载有电流 I_3 的导线 $MN=r$，水平放置，且其两端 MN 分别与 I_1、I_2 的距离都是 r，ab、cd 和 MN 共面，求导线 MN 所受的磁力大小和方向.



解：载流导线 MN 上任一点处的磁感强度大小为：

$$B=\frac{\mu_0 I_1}{2\pi(r+x)}-\frac{\mu_0 I_2}{2\pi(2r-x)}$$ 3 分

MN 上电流元 $I_3\mathrm{d}x$ 所受磁力： $\mathrm{d}F=I_3B\,\mathrm{d}x=I_3[\frac{\mu_0 I_1}{2\pi(r+x)}-\frac{\mu_0 I_1}{2\pi(2r-x)}]\mathrm{d}x$ 2 分

$$F=I_3\int_0^r[\frac{\mu_0 I_1}{2\pi(r+x)}-\frac{\mu_0 I_2}{2\pi(2r-x)}]\mathrm{d}x$$

$$=\frac{\mu_0 I_3}{2\pi}[\int_0^r\frac{I_1}{r+x}\mathrm{d}x-\int_0^r\frac{I_2}{2r-x}\mathrm{d}x]$$

$$=\frac{\mu_0 I_3}{2\pi}[I_1\ln\frac{2r}{r}+I_2\ln\frac{r}{2r}]$$

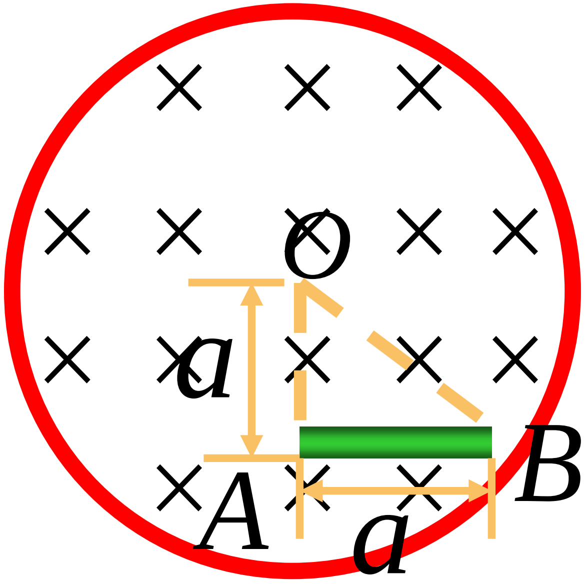
$$=\frac{\mu_0 I_3}{2\pi}[I_1\ln 2-I_2\ln 2]$$

$$=\frac{\mu_0 I_3}{2\pi}(I_1-I_2)\ln 2$$ 3 分

若 $I_2>I_1$，则 $\vec{F}$ 的方向向下，$I_2<I_1$，则 $\vec{F}$ 的方向向上 2 分

例、有一载流长直密绕螺线管长度为 L，匝数为 N，管中介质是空气。螺线管中部的磁场可以看作均匀磁场。在螺线管内部垂直于磁场方向放置一段长度为 a 的直导线，求：当螺线管上的电流变化率 dI/dt（为正）时，直导线两端产生的感应电动势的大小和方向。

解：设想构成回路 $OABO$，则



$$\varepsilon_i = \left| -\frac{d\Phi}{dt} \right| = \frac{d(BS)}{dt}$$

$$= \frac{a^2}{2}\frac{d}{dt}\left(\mu_0 \frac{N}{L} I\right) = \frac{\mu_0 a^2 N}{2L}\frac{dI}{dt}$$

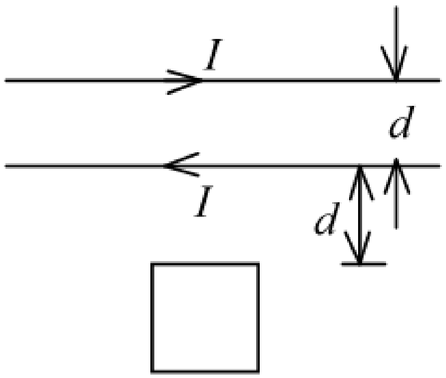
又
$$\varepsilon_i = \oint_l \vec{E}_k \cdot d\vec{l}$$
$$= \int_O^A \vec{E}_k \cdot d\vec{l} + \int_A^B \vec{E}_k \cdot d\vec{l} + \int_B^O \vec{E}_k \cdot d\vec{l}$$

因为
$$\int_O^A \vec{E}_k \cdot d\vec{l} = \int_B^O \vec{E}_k \cdot d\vec{l} = 0\left(\vec{E}_k \perp d\vec{l}\right)$$

所以
$$\varepsilon_i = \oint_l \vec{E}_k \cdot d\vec{l} = \int_A^B \vec{E}_k \cdot d\vec{l} = \varepsilon_{AB} = \frac{\mu_0 a^2 N}{2L}\frac{dI}{dt}$$

方向：$A \rightarrow B$

两根平行无限长直导线相距为 d，载有大小相等方向相反的电流 I，电流变化率 $\mathrm{d}I/\mathrm{d}t=\alpha>0$．一个边长为 d 的正方形线圈位于导线平面内与一根导线相距 d，如图所示．求线圈中的感应电动势$\mathcal{E}$，并说明线圈中的感应电流是顺时针还是逆时针方向．



解：(1) 载流为 I 的无限长直导线在与其相距为 r 处产生的磁感强度为：

$$B=\mu_0 I/(2\pi r)$$ 2 分

以顺时针绕向为线圈回路的正方向，与线圈相距较远的导线在线圈中产生的磁通量为：

$$\Phi_1=\int_{2d}^{3d} d\cdot\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\mathrm{d}r=\frac{\mu_0 Id}{2\pi}\ln\frac{3}{2}$$

与线圈相距较近的导线对线圈的磁通量为：

$$\Phi_2=\int_{d}^{2d} -d\cdot\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\mathrm{d}r=-\frac{\mu_0 Id}{2\pi}\ln 2$$

总磁通量

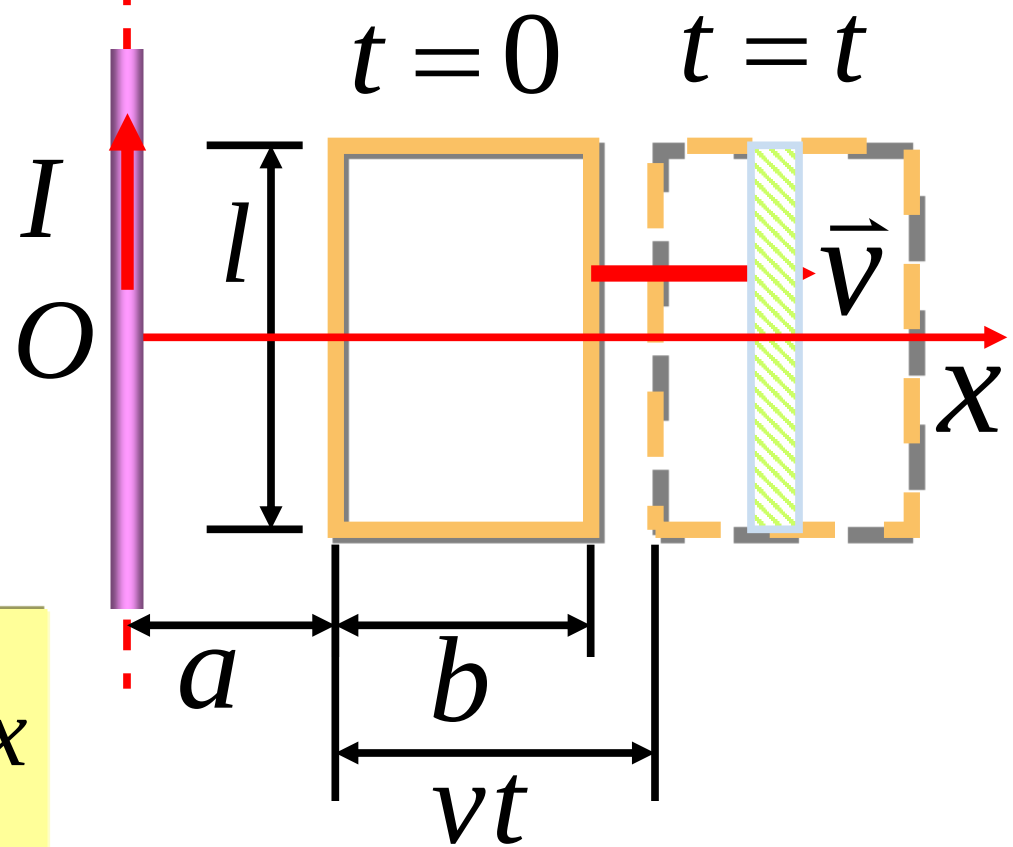
$$\Phi=\Phi_1+\Phi_2=-\frac{\mu_0 Id}{2\pi}\ln\frac{4}{3}$$ 4 分

感应电动势为：

$$\mathcal{E}=-\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}=\frac{\mu_0 d}{2\pi}(\ln\frac{4}{3})\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=\frac{\mu_0 d}{2\pi}\alpha\ln\frac{4}{3}$$ 2 分

由$\mathcal{E}>0$ 和回路正方向为顺时针，所以$\mathcal{E}$的绕向为顺时针方向，线圈中的感应电流亦是顺时针方向． 2 分

例、 长直导线与矩形线圈共面，$t=0$ 时位置如图，若导线通以变化电流 $I=I_0\sin\omega t$，线圈以恒定速度 v 往右运动。求任一时刻矩形线圈内感应电动势的大小。



解： 建立坐标系，t 时刻，在 x 处取面积元

$$dS=ldx$$

$$d\Phi=\vec{B}\cdot d\vec{S}=\frac{\mu_0 I}{2\pi x}ldx$$

所以

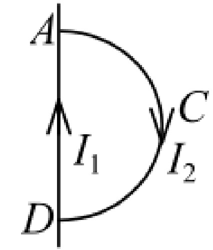
$$\Phi = \int d\Phi = \int_{a+vt}^{a+b+vt} \frac{\mu_0 Il}{2\pi} \frac{dx}{x}$$

$$= \frac{\mu_0 l}{2\pi} I_0 \sin \omega t \ln \frac{a+b+vt}{a+vt}$$

$$\varepsilon_i = \left| -\frac{d\Phi}{dt} \right| = \frac{d}{dt} \left(\frac{\mu_0 l}{2\pi} I_0 a \sin \omega t \ln \frac{a+b+vt}{a+vt} \right)$$

$$= \frac{\mu_0 I_0 l}{2\pi} \left[\omega \cos \omega t \ln \frac{a+b+vt}{a+vt} - \frac{bv \sin \omega t}{(a+vt)(a+b+vt)} \right]$$

半径为 R 的半圆线圈 ACD 通有电流 I_2，置于电流为 I_1 的无限长直线电流的磁场中，直线电流 I_1 恰过半圆的直径，两导线相互绝缘．求半圆线圈受到长直线电流 I_1 的磁力．



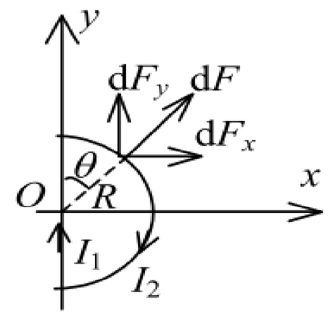
解：长直导线在周围空间产生的磁场分布为 $B=\mu_0 I_1/(2\pi r)$ 取 xOy 坐标系如图，则在半圆线圈所在处各点产生的磁感强度大小为：

$$B=\frac{\mu_0 I_1}{2\pi R\sin\theta},$$ 方向垂直纸面向里， 3 分

式中 θ 为场点至圆心的联线与 y 轴的夹角．半圆线圈上 $\mathrm{d}l$ 段线电流所受的力为：

$$\mathrm{d}F=\left|I_2\,\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{B}\right|=I_2 B\,\mathrm{d}l$$

$$=\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi R\sin\theta}R\,\mathrm{d}\theta$$ 3 分



$$\mathrm{d}F_y=\mathrm{d}F\,\boxed{\cos\theta}$$

根据对称性知： $$F_y=\int\mathrm{d}F_y=0$$

$$\mathrm{d}F_x=\mathrm{d}F\,\boxed{\sin\theta},$$

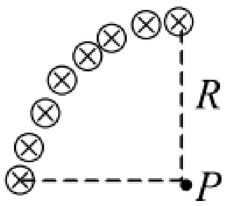
$$F_x=\int_0^{\pi}dF_x=\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}\pi=\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2}$$

∴半圆线圈受 I_1 的磁力的大小为：

$$F=\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2},$$ 方向：垂直 I_1 向右． 4 分

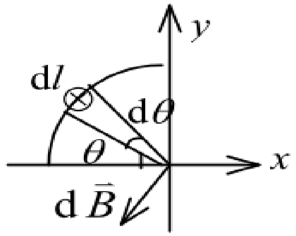
16. (本题10分)(2277)

一半径 $R=1.0$ cm 的无限长 1/4 圆柱形金属薄片，沿轴向通有电流 $I=10.0$ A 的电流，设电流在金属片上均匀分布，试求圆柱轴线上任意一点 P 的磁感强度.



解：取 $\mathrm{d}l$ 段，其中电流为

$$\mathrm{d}I=\frac{I\,\mathrm{d}l}{\frac{1}{2}\pi R}=\frac{2IR\,\mathrm{d}\theta}{\pi R}=\frac{2I\,\mathrm{d}\theta}{\pi}$$ 2 分



在 P 点 $$\mathrm{d}B=\frac{\mu_0\,\mathrm{d}I}{2\pi R}=\frac{\mu_0}{2\pi R}\cdot\frac{2I}{\pi}\mathrm{d}\theta=\frac{\mu_0 I}{\pi^2 R}\mathrm{d}\theta$$ 2 分

选坐标如图

$$\mathrm{d}B_x=\frac{-\mu_0 I\sin\theta\,\mathrm{d}\theta}{\pi^2 R},\quad \mathrm{d}B_y=\frac{-\mu_0 I\cos\theta\,\mathrm{d}\theta}{\pi^2 R}$$

$$B_x=\frac{-\mu_0 I}{\pi^2 R}\int_0^{\pi/2}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta=\frac{-\mu_0 I}{\pi^2 R}$$ 2 分

$$B_y=\frac{-\mu_0 I}{\pi^2 R}\int_0^{\pi/2}\cos\theta\,\mathrm{d}\theta=\frac{-\mu_0 I}{\pi^2 R}$$ 2 分

$$B=(B_x^2+B_y^2)^{1/2}=\frac{\mu_0 I\sqrt{2}}{\pi^2 R}=1.8\times10^{-4}\ \mathrm{T}$$

方向 $\mathrm{tg}\,\alpha=B_y/B_x=1$， $\alpha=225°$ ，α为 $\vec{B}$ 与 x 轴正向的夹角. 2 分