§8-4　安培环路定理

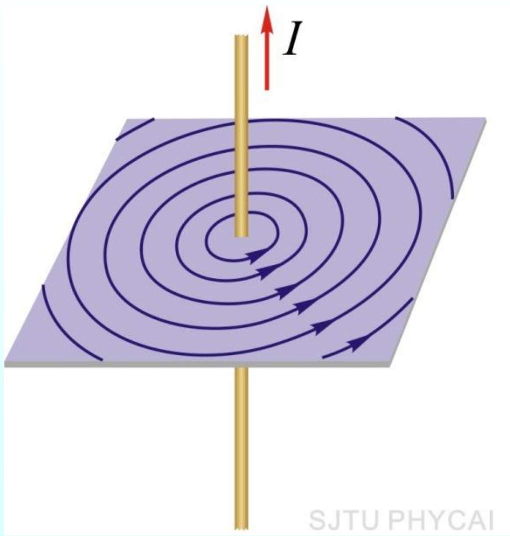
静电场 → $\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l}=0$ → 有源无旋场 → 保守场

稳恒磁场 → $\int_L \vec{B}\cdot d\vec{l}=\mu_0\sum I$ → 无源有旋场 → 非保守场

安培

安培环路定理

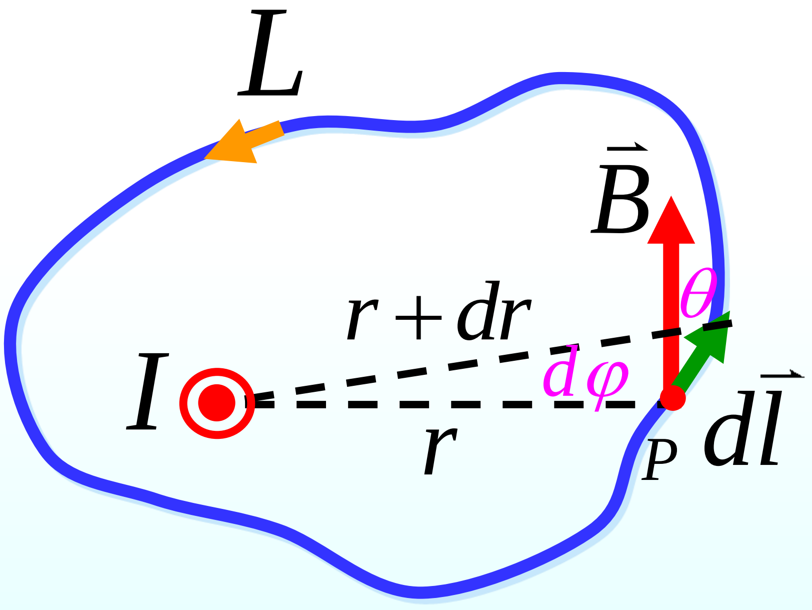
以长直载流导线的磁场为例



设在真空中有一电流强度为 I 的无限长直导线

（1）在垂直于电流 I 的平面上任取一包围电流的闭合路径 L，线上任一点P的磁感应强度为：

$$B=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$



所以 $\vec{B}$ 的环流为

$$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l}=\oint_L B\cos\theta dl$$

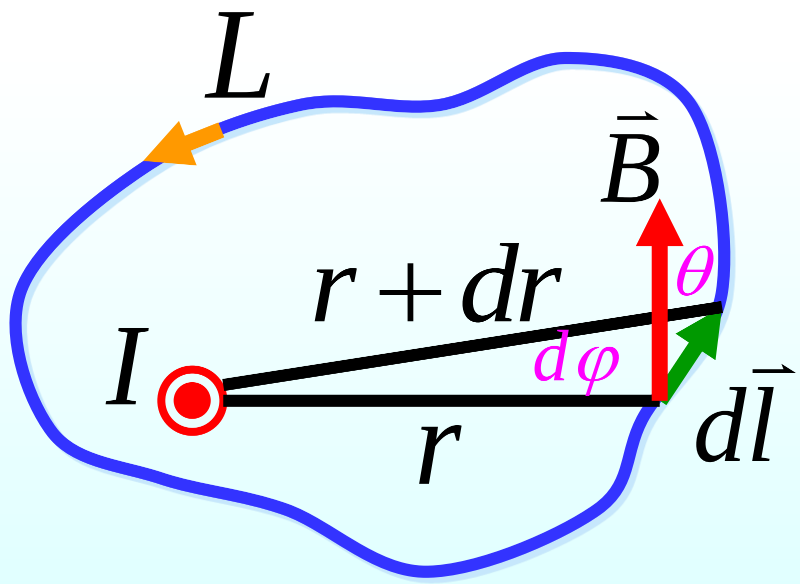
由几何关系得：

$$dl\cdot\cos\theta=rd\varphi$$

$$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = \oint_L B\cos\theta dl = \oint_L Br\,d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{r} r\,d\varphi = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi$$

$$= \mu_0 I$$



（2）若闭合路径上某处 $d\vec{l}$ 不在上述平面内，则分解得

$$\boxed{d\vec{l} = d\vec{l}_{\parallel} + d\vec{l}_{\perp}}$$

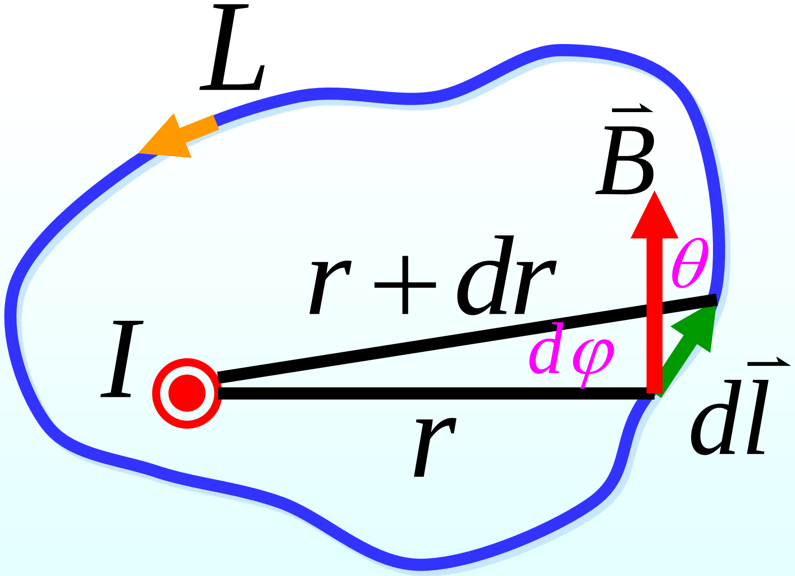
$$\oint_L \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \oint_L \vec{B} \cdot (\mathrm{d}\vec{l}_\perp + \mathrm{d}\vec{l}_{//})$$

$$= \oint_L B\cos 90^\circ \, \mathrm{d}l_\perp + \oint_L B\cos\theta \, \mathrm{d}l_{//}$$

$$= 0 + \oint_L Br \, \mathrm{d}\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{r} r \, \mathrm{d}\varphi$$

$$= \mu_0 I$$



结果一样！

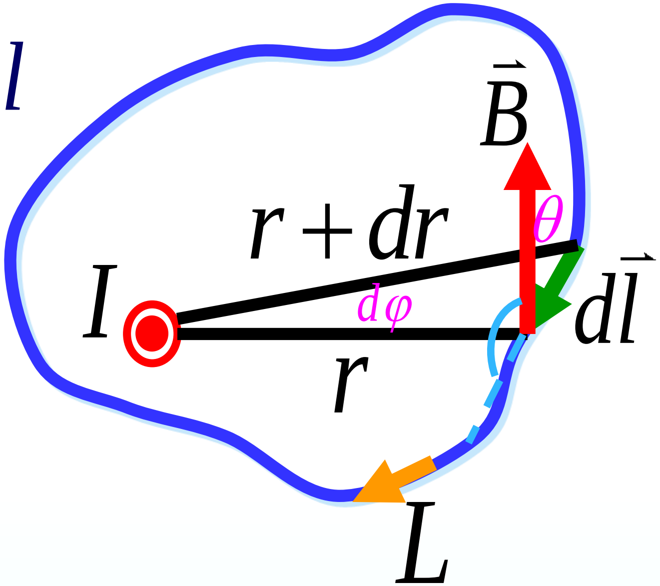
（3）若沿同一路径但改变绕行方向积分：

$$\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \oint_L B\cos(\pi-\theta)\,\mathrm{d}\,l$$

$$= \oint_L -B\cos\theta\,\mathrm{d}l$$

$$= -\int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 I}{2\pi}\mathrm{d}\varphi$$

$$= -\mu_0 I$$



结果为负值！

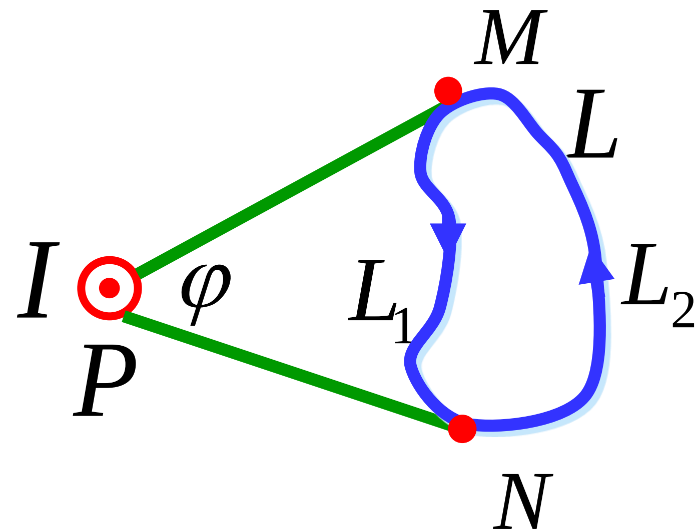
表明：磁感应强度矢量的环流与闭合曲线的形状无关，它只和闭合曲线内所包围的电流有关。

（4）若环路不包围电流

$$\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \oint_{L_1} \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} + \oint_{L_2} \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi}\left(\int_{L_1} \mathrm{d}\varphi - \int_{L_2} \mathrm{d}\varphi\right)$$

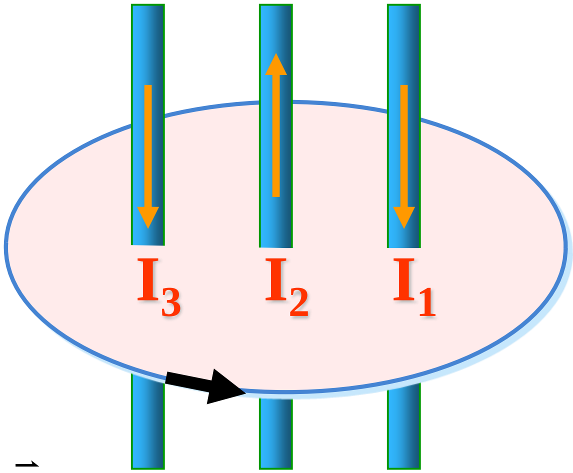
$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi}\left[\varphi + (-\varphi)\right] = 0$$



结果为零！

表明：闭合曲线不包围电流时，磁感应强度矢量的环流为零。

（5）多根载流导线穿过环路



$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \cdots + \vec{B}_n$$

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_L \left(\vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \cdots + \vec{B}_n \right) \cdot d\vec{l}$$

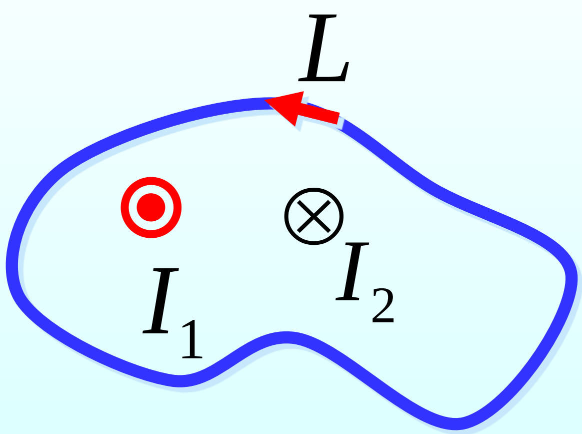
$$= \oint_L \vec{B}_1 \cdot d\vec{l} + \oint_L \vec{B}_2 \cdot d\vec{l} + \cdots + \oint_L \vec{B}_n \cdot d\vec{l}$$

$$= \mu_0 I_1 + \mu_0 I_2 + \cdots + \mu_0 I_n$$

$$= \mu_0 \sum I_i$$

若L 包围 $+I$，$-I$，则

$$\boxed{\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \left(I_1 - I_2 \right)}$$



$$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum I_{(内)}$$

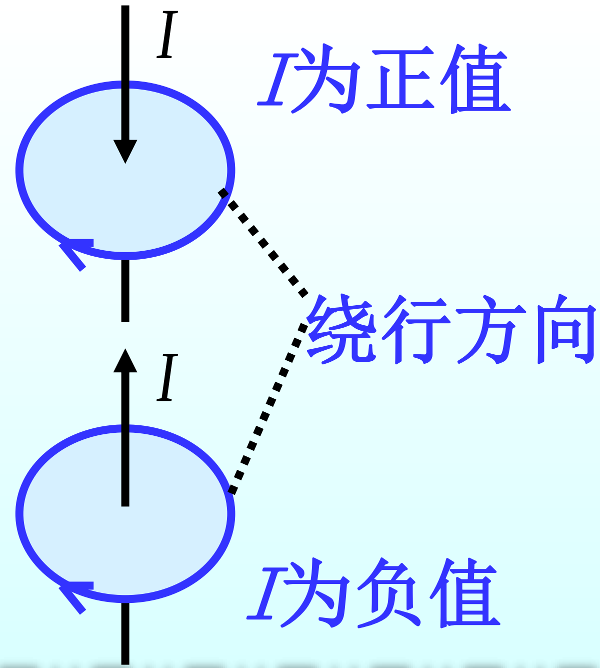
安培环路定理

在真空中，磁感应强度 B矢量沿任何闭合曲线L一周的线积分，等于闭合曲线所包围的电流的代数和的μ_o倍，而与曲线的形状大小无关。

注意：此公式中的磁场是整个闭合回路电流激发的，不适用于一段回路

电流I正负的规定：

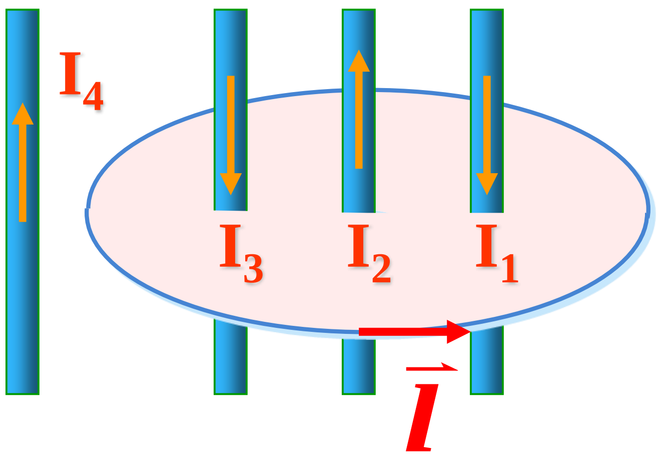
积分路径的绕行方向与电流成右手螺旋关系时，电流I为正值；反之I为负值。

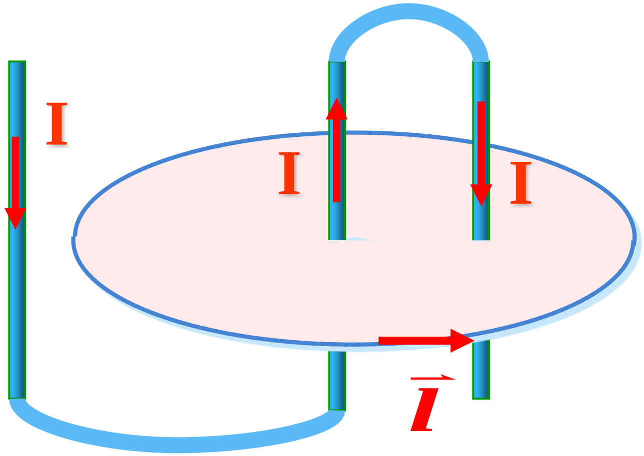


几点注意：

- 任意形状稳恒电流，安培环路定理都成立。
- 环流虽仅与所围电流有关，但磁场却是所有电流在空间产生磁场的叠加。
- 安培环路定理仅仅适用于恒定电流产生的恒定磁场，恒定电流本身总是闭合的，因此安培环路定理仅仅适用于闭合的载流导线。
- 静电场的高斯定理说明静电场为有源场，
  环路定理又说明静电场无旋；
  稳恒磁场的环路定理反映稳恒磁场有旋，
  高斯定理又反映稳恒磁场无源。

思考： 如图，求$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l}=?$

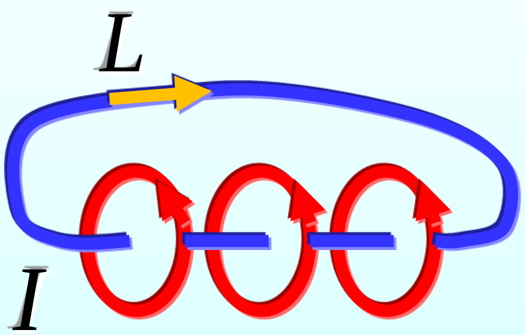




$$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l}=\mu_o\sum I$$
$$=\mu_0\left(I_2-I_1-I_3\right)$$

$$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l}=\mu_o\sum I$$
$$=\mu_0\left(I-I\right)=0$$

▲



$$\boxed{\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l}=3\mu_0 I} \Rightarrow \boxed{\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l}=\mu_0 NI}$$

✓ 安培环路定理的应用

当电流分布具有对称性时（无限长、无限大、柱对称等）可用安培环路定理求磁场分布

解题步骤：

(1) 分析磁场的对称性；

(2) 过场点选择适当的路径，使得 $\vec{B}$沿此环路的积分易于计算：$\vec{B}$的量值恒定，$\vec{B}$与 $\mathrm{d}\vec{l}$ 的夹角处处相等；

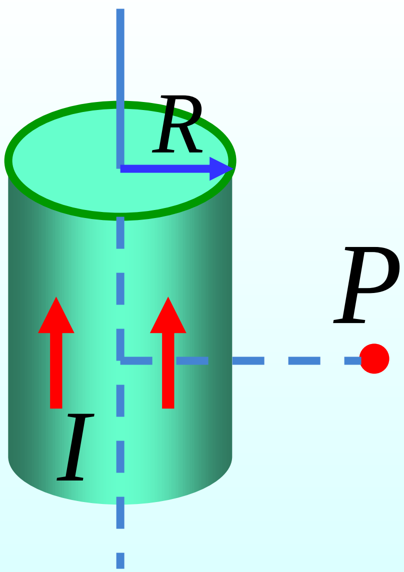
(3) 求出环路积分；

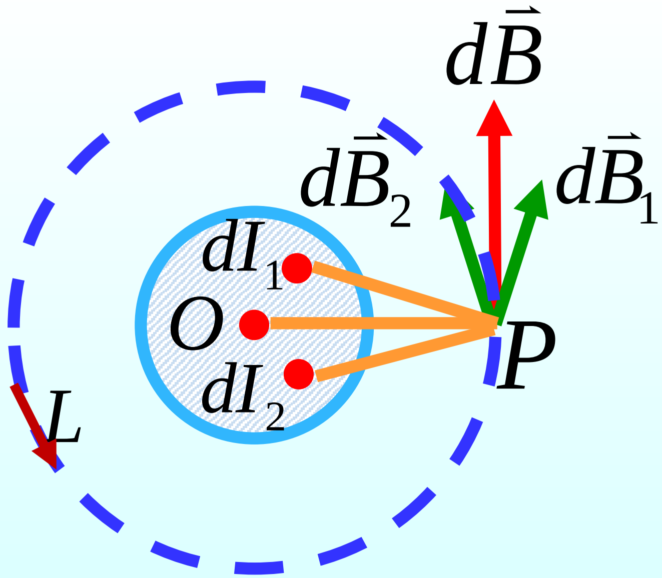
(4) 用右手螺旋定则确定所选回路包围电流的正负，
再由磁场的安培环路定理求出磁感应强度 $\vec{B}$的大小。

一、长直圆柱形载流导线内外的磁场

设真空中有一无限长载流圆柱体，圆柱半径为 R，圆柱横截面上均匀地通有电流 I，沿轴线流动。求磁场分布。

解： 圆柱电流呈轴对称. 由对称性分析, 圆柱体内外空间的磁力线是一系列同轴分布的圆周线.





应用安培环路定理

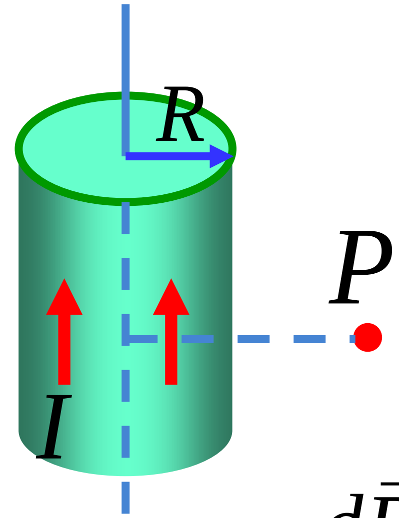
$$\oint \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = B 2\pi r$$

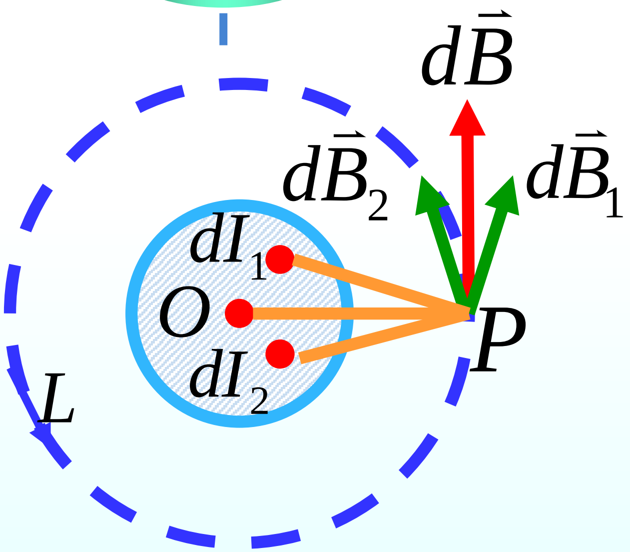
（1）$r > R$

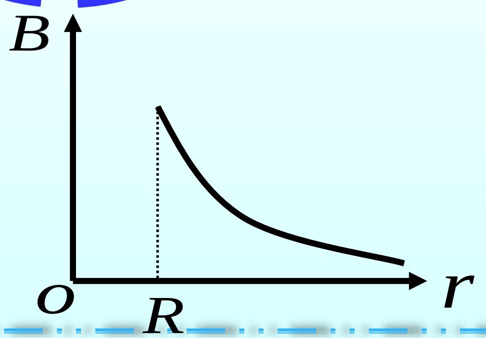
$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = 2\pi r \cdot B = \mu_0 I$$

即 $$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

与长直载流导线激发的磁场相同！







（2）$r < R$

电流均匀分布在圆柱形导线表面层时

$$B 2\pi r = 0$$

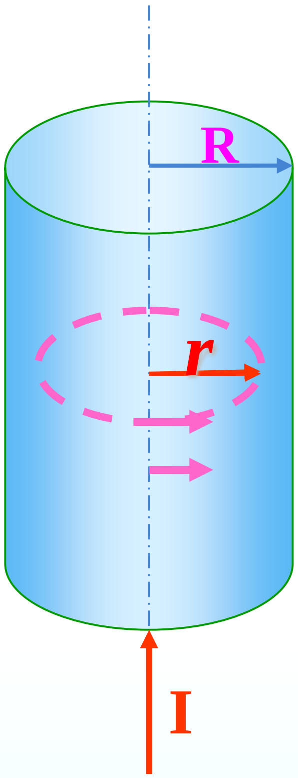
$$\boxed{B = 0}$$

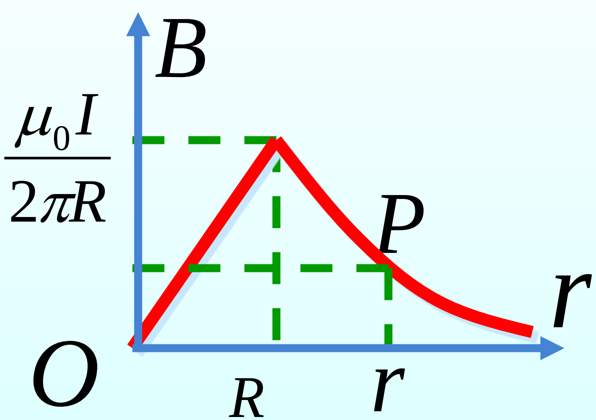
电流均匀分布在圆柱形导线截面上时

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = 2\pi r \cdot B = \mu_0 \frac{I}{\pi R^2} \pi r^2$$

$$\boxed{B = \frac{\mu_0 r I}{2\pi R^2}}$$

在圆柱形载流导线内部，磁感应强度和离开轴线的距离r成正比！

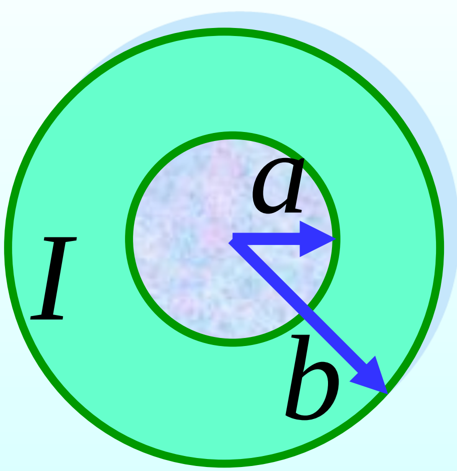




- 若为面分布，即电流 I 均匀分布在圆柱面上，则由安培环路定理得空间的磁场分布为

$$B=\begin{cases}0 & r<R\\[2ex] \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r} & r>R\end{cases}$$

- 若电流 I 均匀分布在如图所示的横截面上，则空间磁场分布为：

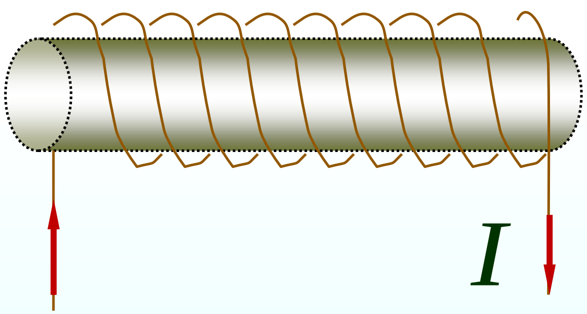


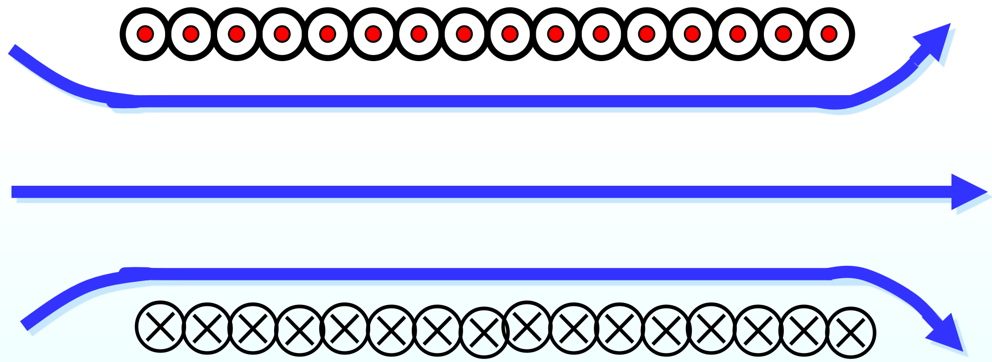
$$B=\begin{cases}0 & r<a\\[2ex] \dfrac{\mu_0 I}{2\pi\left(b^2-a^2\right)}\dfrac{r^2-a^2}{r} & a<r<b\\[2ex] \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r} & r>b\end{cases}$$

二、载流长直螺线管内的磁场

设此长直螺线管可视为无限长密绕螺线管，线圈中通电流 I，单位长密绕 n 匝线圈，求管内磁场分布。

解： 由对称性分析，磁场分布如图：

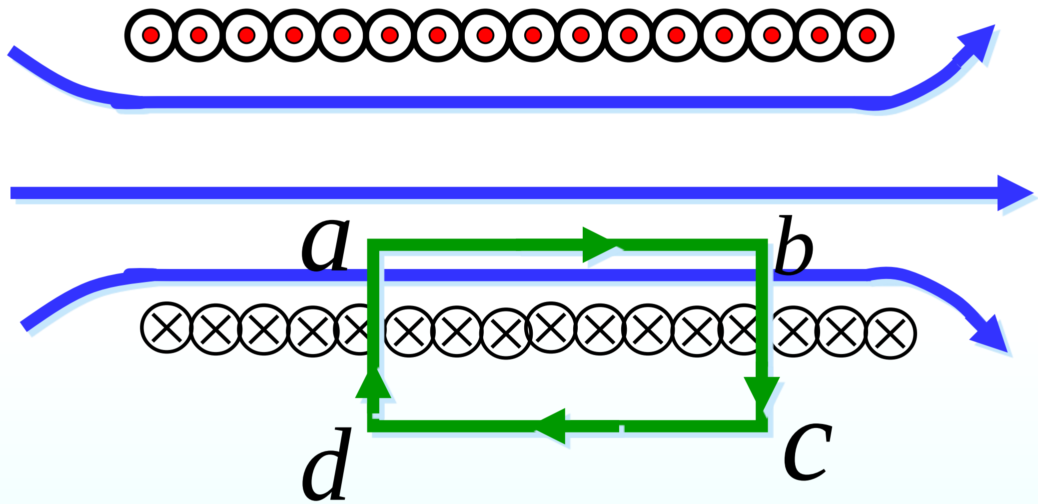




管内部 $\vec{B}$ 线平行于轴线，离轴等距离处 $\vec{B}$ 大小相等。

管外部 贴近管壁处 $\vec{B}$ 趋近于零。

取过管内任一点 ***P*** 的矩形回路 ***abcda*** 为积分回路 L ，绕行方向为 $a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow d \rightarrow a$ ，则 $\vec{B}$ 环流为



$$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = \int_{ab} \vec{B}\cdot d\vec{l} + \int_{bc} \vec{B}\cdot d\vec{l} + \int_{cd} \vec{B}\cdot d\vec{l} + \int_{da} \vec{B}\cdot d\vec{l}$$

$$\int_{bc} \vec{B}\cdot d\vec{l} = 0 \qquad \int_{cd} \vec{B}\cdot d\vec{l} = 0 \qquad \int_{da} \vec{B}\cdot d\vec{l} = 0$$

$$\int_{ab} \vec{B} \cdot d\vec{l} = B\overline{ab}$$

故由安培环路定理得

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = B\overline{ab} = \mu_0 I\left(n\overline{ab}\right)$$

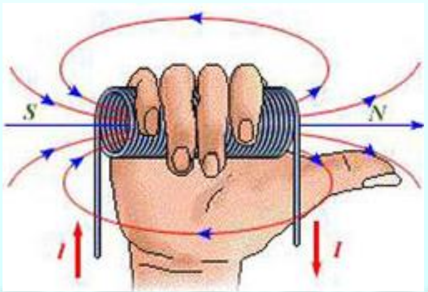
n为单位长度匝数

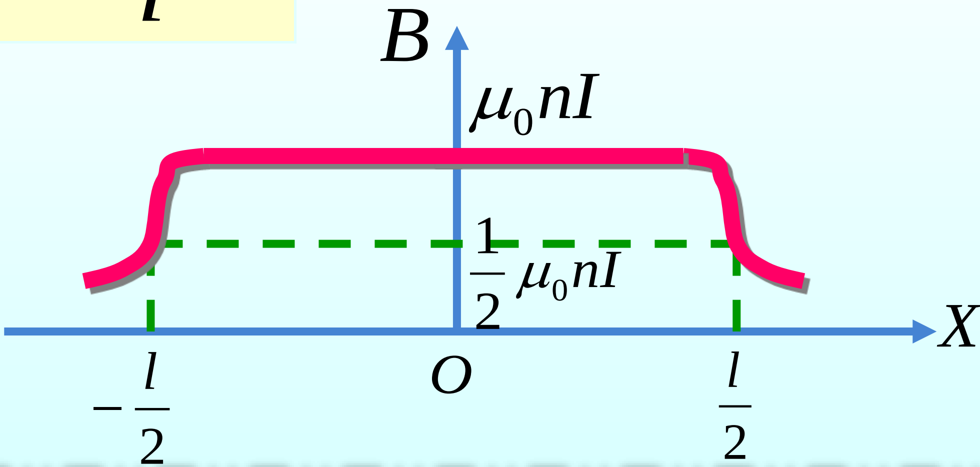
即得

$$B = \mu_0 nI = \mu_0 \frac{N}{l} I$$

（均匀磁场）

方向：右手螺旋定则



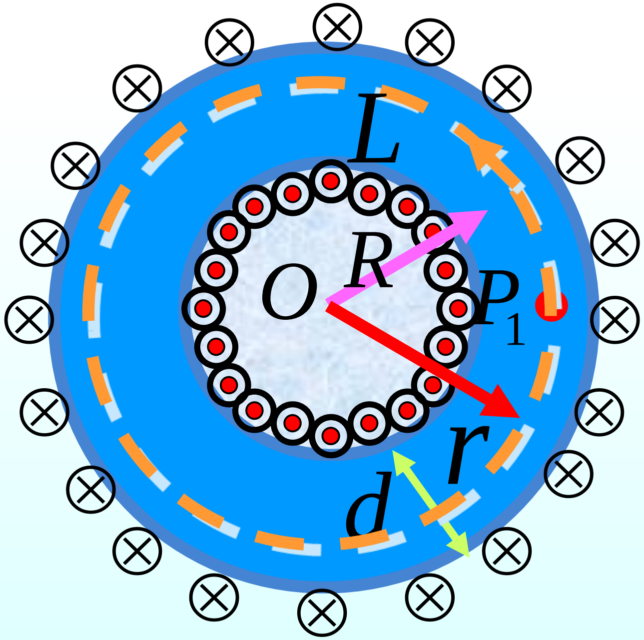


三、载流螺绕环内的磁场

环形螺线管称为螺绕环

设螺绕环轴线半径为R，环上均匀密绕N匝线圈，通有电流I。求环内磁场分布。

解：由对称性分析

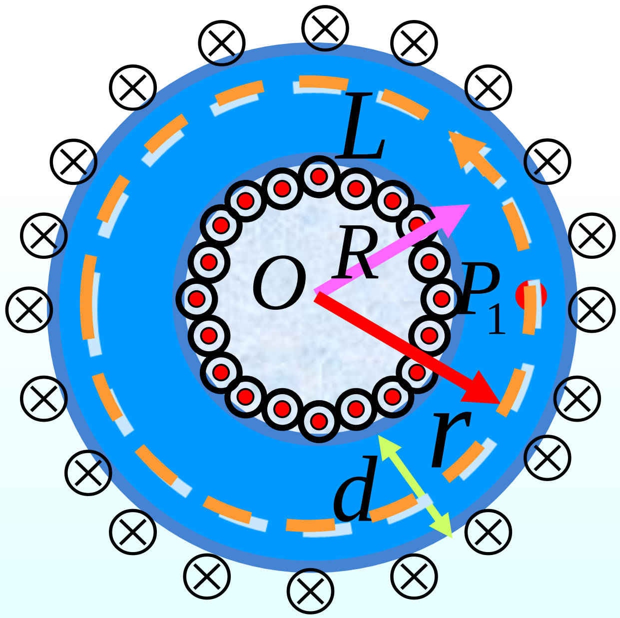


（1）环内的$\vec{B}$线为一系列与环同心的圆周线，在环内任取一点P_1作积分回路L，方向与电流I成右手螺旋，由安培环路定理得$\vec{B}$环流为

$$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = B\cdot 2\pi r = \mu_0 NI$$

则得 $$B=\frac{\mu_0 NI}{2\pi r}$$

当环很细，R 很大时，即$R>>d$ 时，可认为 $r\approx R$，令



$$n=\frac{N}{2\pi R}$$

$$B=\frac{\mu_0 NI}{2\pi R}=\mu_0 nI$$

（磁场集中在环内，且均匀分布）

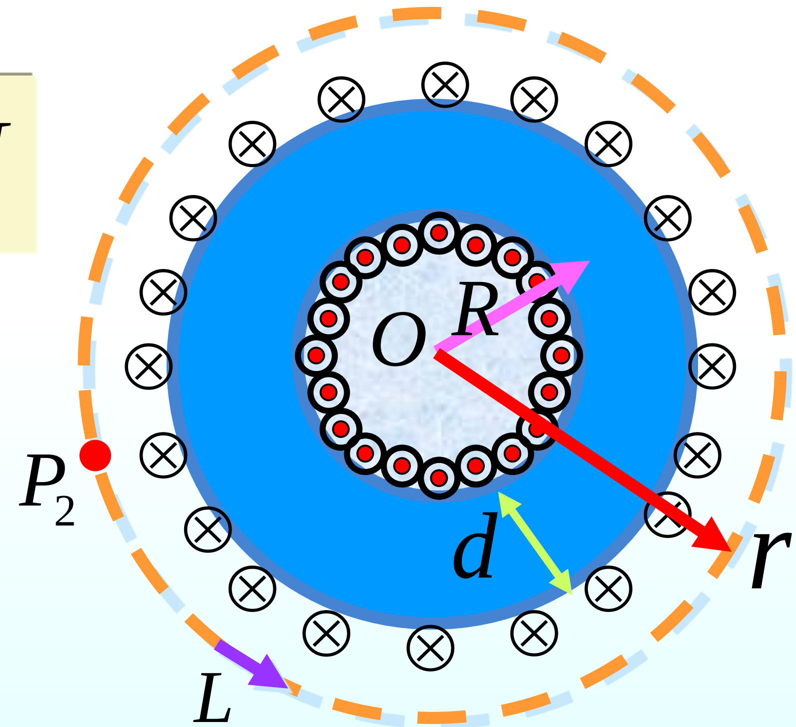
（2）环外：

任取一点 P_2，过 P_2 作积分回路如图，由安培环路定理得，$\vec{B}$ 的环流为

$$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = B\cdot 2\pi r = \mu_0 \sum I$$

$$\because \sum I = 0$$

$$\therefore \vec{B} = 0$$

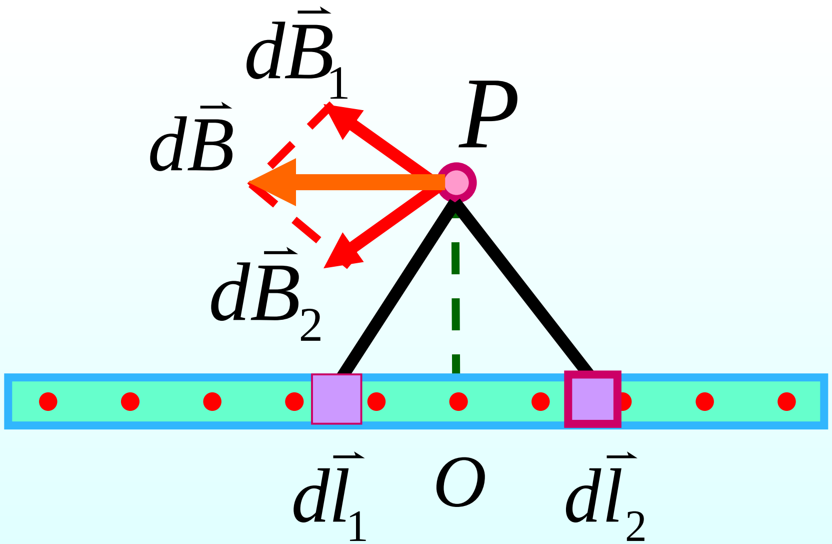


环管外无磁场

四、无限大薄导体板的磁场

一无限大薄导体平板均匀地通有电流，若导体平板垂直屏幕，电流方向如图，设电流沿平板横截面方向单位宽度的电流为 δ，试计算空间磁场分布。

解： 由对称性分析：**P** 处合磁场方向平行平板指向左方



其下半部分空间磁场方向？

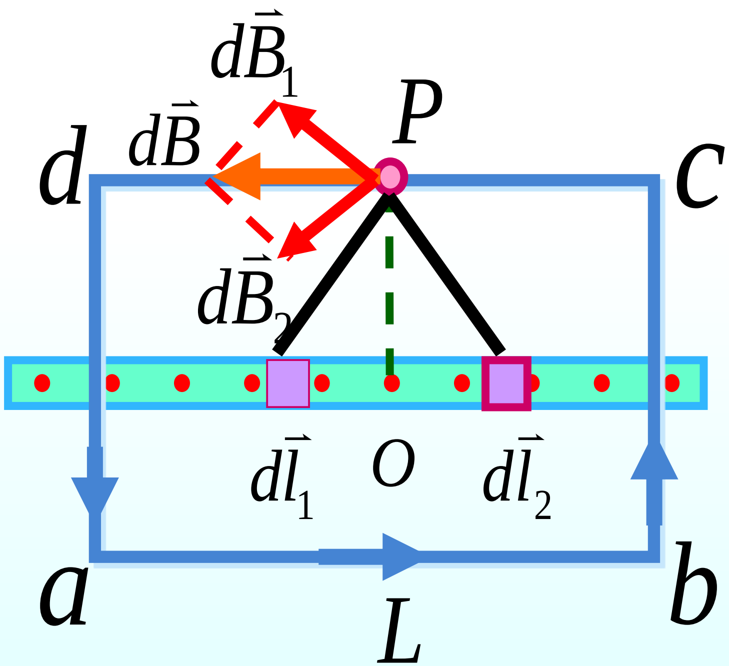
取矩形回路 abcd 作积分回路 L，由安培环路定理得

$$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = \int_{ab}\vec{B}\cdot d\vec{l} + \int_{bc}\vec{B}\cdot d\vec{l} + \int_{cd}\vec{B}\cdot d\vec{l} + \int_{da}\vec{B}\cdot d\vec{l} = 2Bl$$

即

$$2Bl = \mu_0 l \delta$$

$$B = \frac{\mu_0}{2}\delta$$



无限大平面电流两侧为匀强磁场，大小相等，方向相反。与离板的距离无关

在真空中一无限长载流直导线，
试求：通过其右侧矩形线框的磁通量。

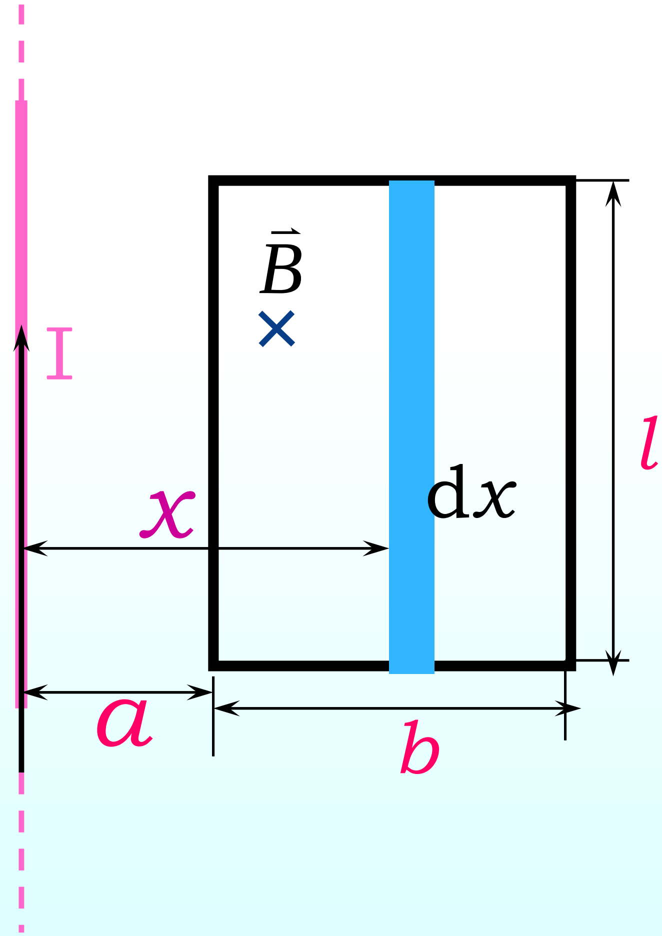
解：

$$\mathrm{d}\Phi = \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S} \qquad B = \frac{\mu_0 I}{2\pi x}$$

$$\mathrm{d}S = l\mathrm{d}x$$

$$\Phi = \int \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_a^{a+b} \frac{\mu_0 I}{2\pi x} l\mathrm{d}x$$

$$= \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \ln \frac{a+b}{a}$$



演示实验

阴极射线在磁场中偏转实验

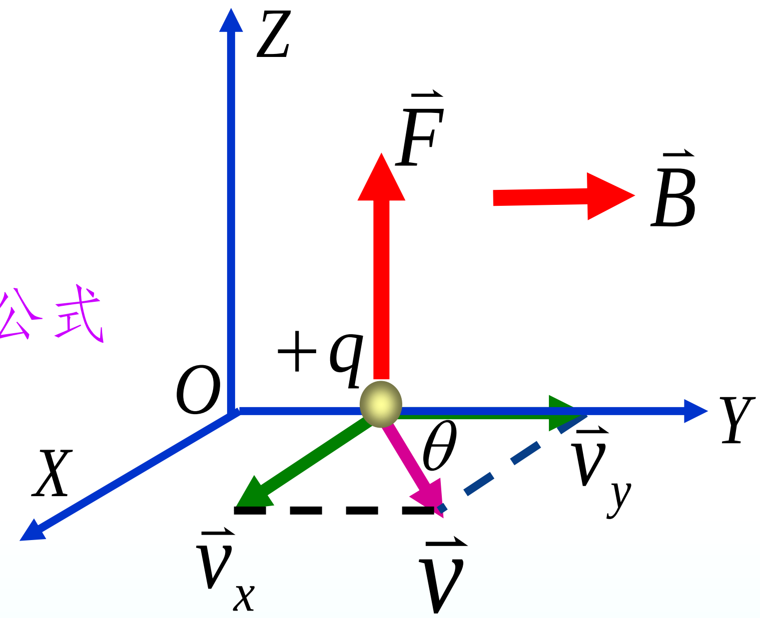
结论：阴极射线在磁场中发生偏转，受到力的作用！

§8-5 带电粒子在磁场中所受作用及运动

一、洛伦兹力

运动电荷在磁场中所受的力:

$$\boxed{\vec{F} = q\vec{v}\times\vec{B}}$$ ——洛伦兹力公式



大小: $\boxed{F = qBv\sin\theta}$

方向: 由"$\vec{v}\times\vec{B}$"确定，满足右手螺旋定则。

当$q>0, \vec{F}$与$\vec{v}\times\vec{B}$同向;

当$q<0, \vec{F}$与$\vec{v}\times\vec{B}$反向。

✓ 特点: 洛仑兹力和速度方向垂直，不做功!