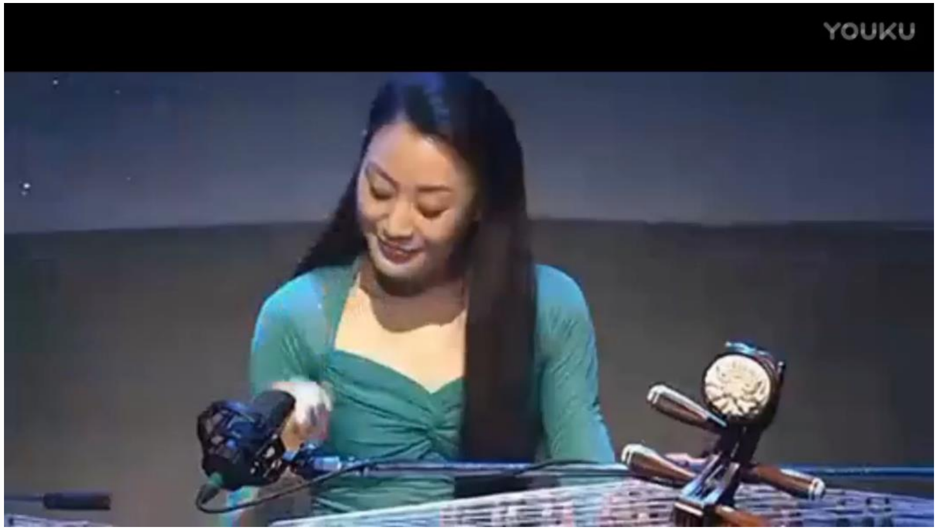
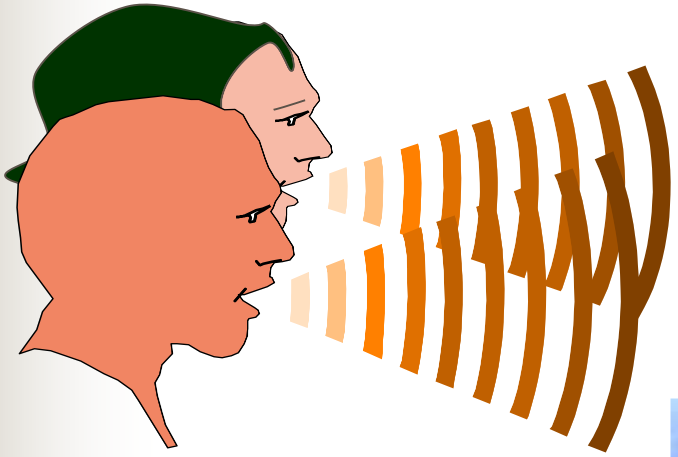
§11-7

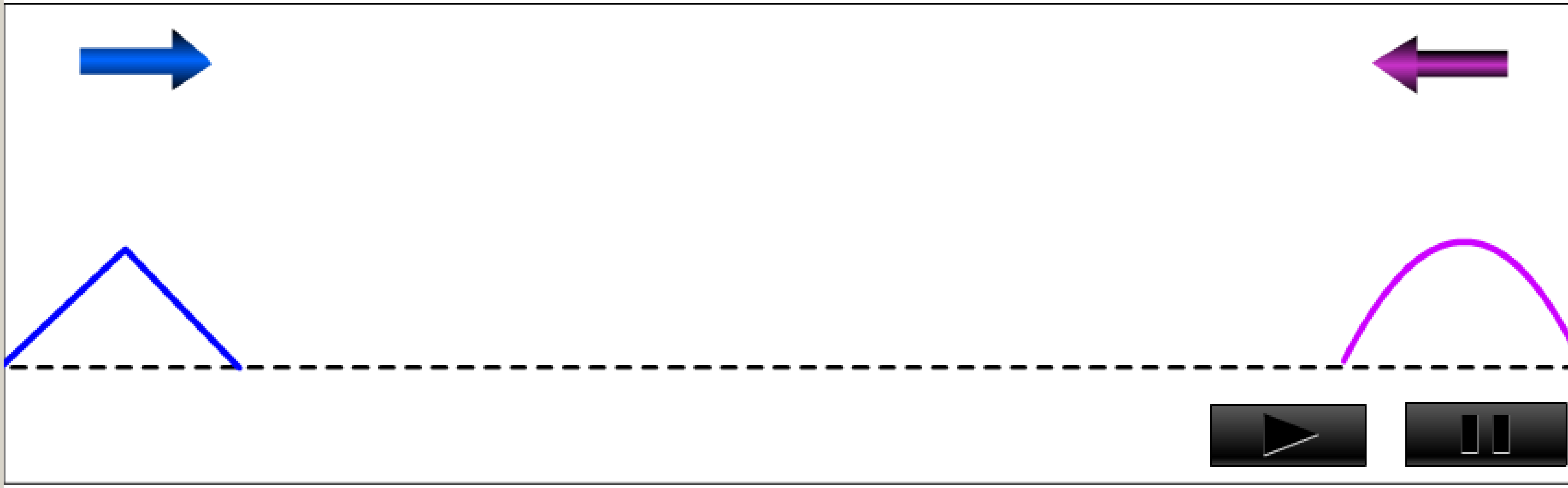
波的叠加原理　波的干涉　驻波

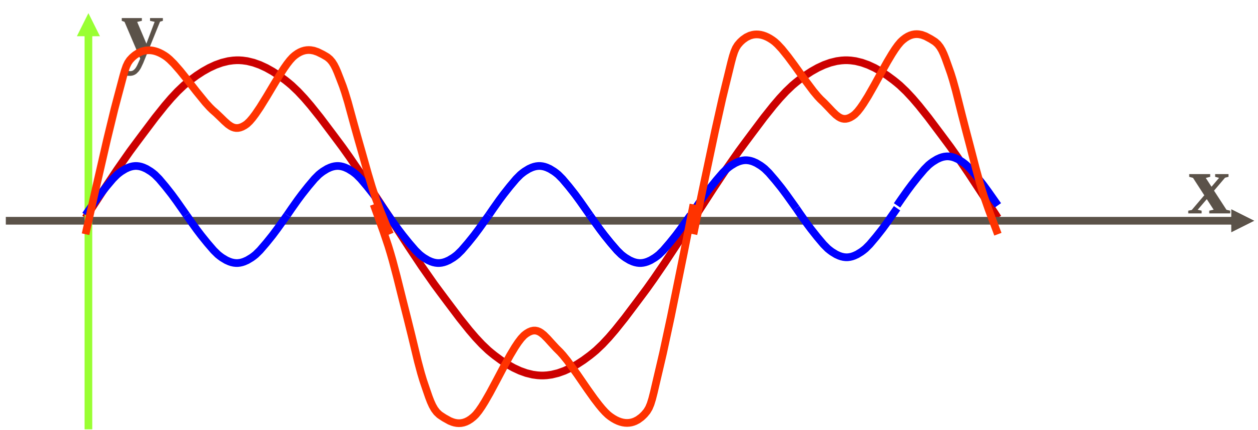
引入新课



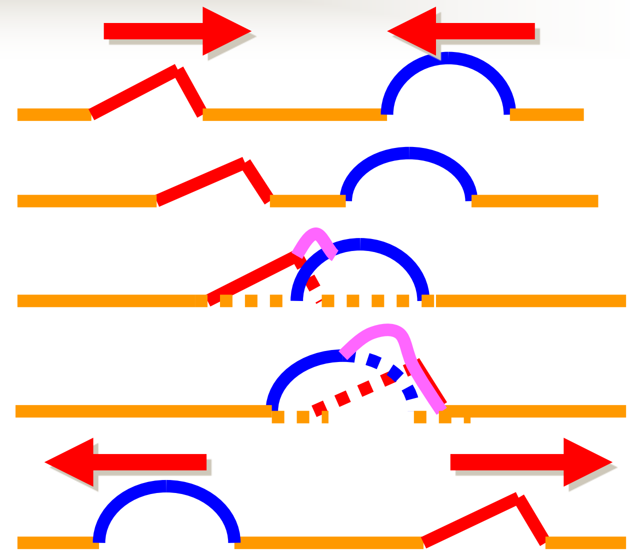
问题：为何拨动琴弦能发出优美的弦乐？






y
x

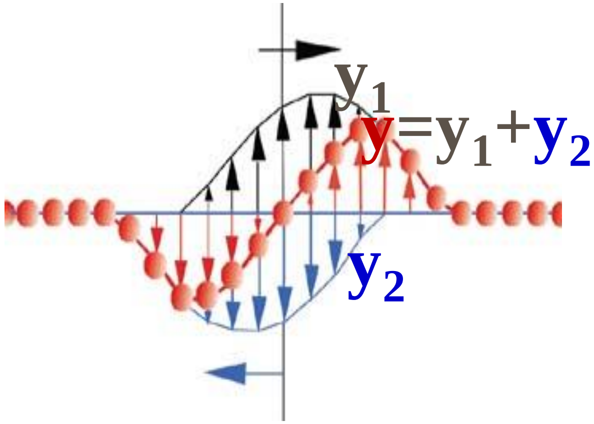
一、波的叠加原理



1、波传播的独立性原理

几列波在传播过程中相遇，各列波仍保持其原有的振动特性（频率、波长、振幅、振动方向）不受其它波的影响。

2、波的叠加原理



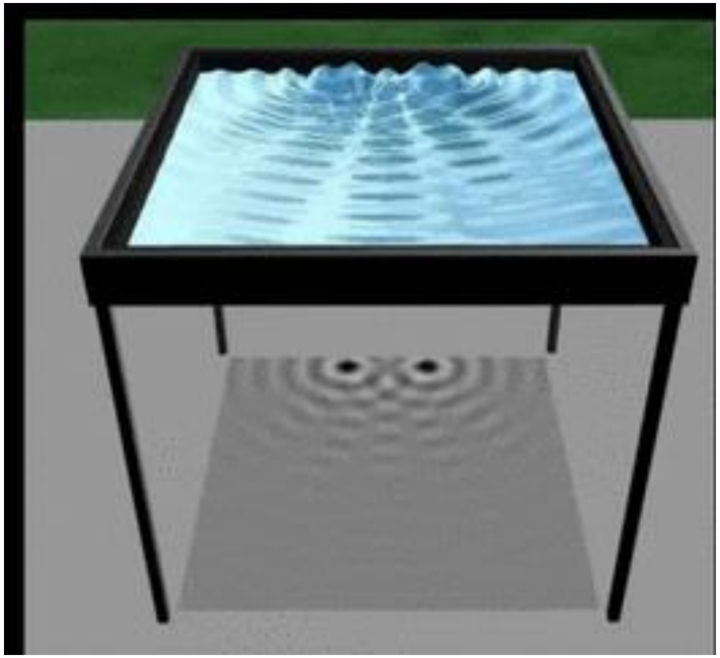
在相遇区域内，任一质点振动的位移是各列波单独存在时在该点引起的位移的矢量和。

叠加原理表明:可将任何复杂的波分解为简谐波的组合

二、波的干涉

干涉现象：

两列波在空间相遇叠加，以至在空间的某些地方振动始终加强，而在空间的另一些地方振动始终减弱或完全消失的现象。



干涉条件：

1、频率相同

2、振动方向相同

3、相位差恒定

相干波源：能产生干涉现象的波源

干涉加强与减弱的条件

设两相干波源S_1、S_2，其振动方程分别为

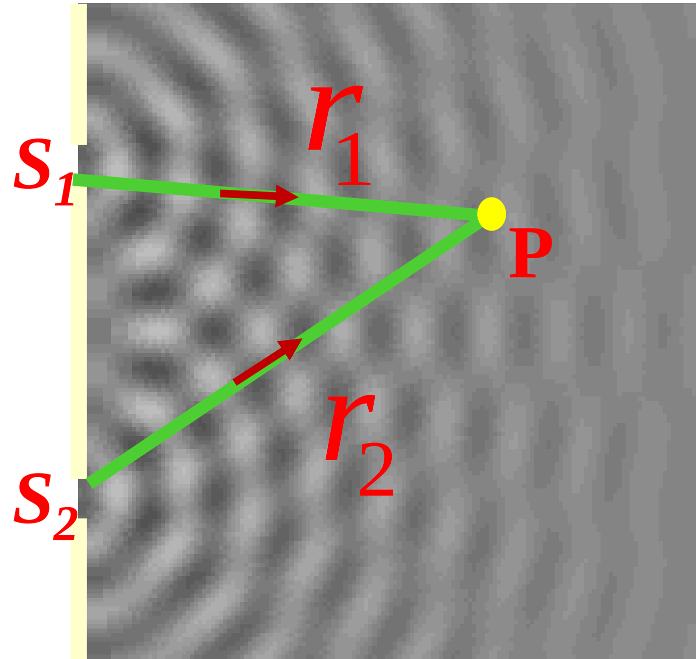
$$S_1: \quad y_{10} = A_1 \cos(\omega t + \varphi_{10})$$

$$S_2: \quad y_{20} = A_2 \cos(\omega t + \varphi_{20})$$

两波在P点处的分振动表达式为：

$$y_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_{10} - \frac{2\pi r_1}{\lambda})$$

$$y_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_{20} - \frac{2\pi r_2}{\lambda})$$



P点 同时参与两个同方向、同频率的谐振动，

合振动仍为简谐振动

$$y_P = y_1 + y_2 = A\cos(\omega t + \varphi)$$

合振动初相位

$$\varphi = arctg\frac{A_1\sin\left(\varphi_{10}-\frac{2\pi r_1}{\lambda}\right)+A_2\sin\left(\varphi_{20}-\frac{2\pi r_2}{\lambda}\right)}{A_1\cos\left(\varphi_{10}-\frac{2\pi r_1}{\lambda}\right)+A_2\cos\left(\varphi_{20}-\frac{2\pi r_2}{\lambda}\right)}$$

合振动振幅

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\Delta\varphi}$$

P点的相位差

$$\Delta\varphi = (\varphi_{20} - \varphi_{10}) - \frac{2\pi}{\lambda}(r_2 - r_1)$$

$$\Delta\varphi = (\varphi_{20} - \varphi_{10}) - \frac{2\pi}{\lambda}(r_2 - r_1)$$

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\Delta\varphi}$$

说明：

1、$(\varphi_{20} - \varphi_{10})$ —两相干波源的初相位差

$\frac{2\pi}{\lambda}(r_2 - r_1)$ —由于波程不同而产生的相位差

$\Delta\varphi$—两列波在P点产生的总相位差

2、A与$\Delta\varphi$有关

若$(\varphi_{20} - \varphi_{10})$ = 恒量，λ = 恒量，$r_2 - r_1$ = 恒量

则$\Delta\varphi$ = 恒量，A = 恒量

空间不同点$\Delta\varphi$不同、A不同

- $\Delta\varphi = 2k\pi,\quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$

则 $A = A_{max} = A_1 + A_2$ 相长干涉

- $\Delta\varphi=(2k+1)\pi,\quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots$

则 $A=A_{\min}=|A_1-A_2|$ 相消干涉

若 $A_1=A_2$，$A_{\min}=0$ 因干涉而静止的点

- $\Delta\varphi=$其他值时：$|A_1-A_2|<A<A_1+A_2$

3、若 $\varphi_{20}=\varphi_{10}$，令 $\delta=r_1-r_2$，叫波程差。则有

$$\Delta\varphi=\frac{2\pi}{\lambda}\delta$$

- 当 $\delta=r_1-r_2=k\lambda$，$k=0,\pm1,\pm2,\cdots$时，加强

- 当 $\delta=r_1-r_2=(2k+1)\frac{\lambda}{2}$，$k=0,\pm1,\pm2,\cdots$时，减弱

波的强度

因 $A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\Delta\varphi$ $I \propto A^2$

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos\Delta\varphi$$

I随 $\Delta\varphi$不 同 而 不 同 即叠加后空间各点 I 发生重新分布

有些地方加强: $I > I_1 + I_2$

有些地方减弱: $I < I_1 + I_2$

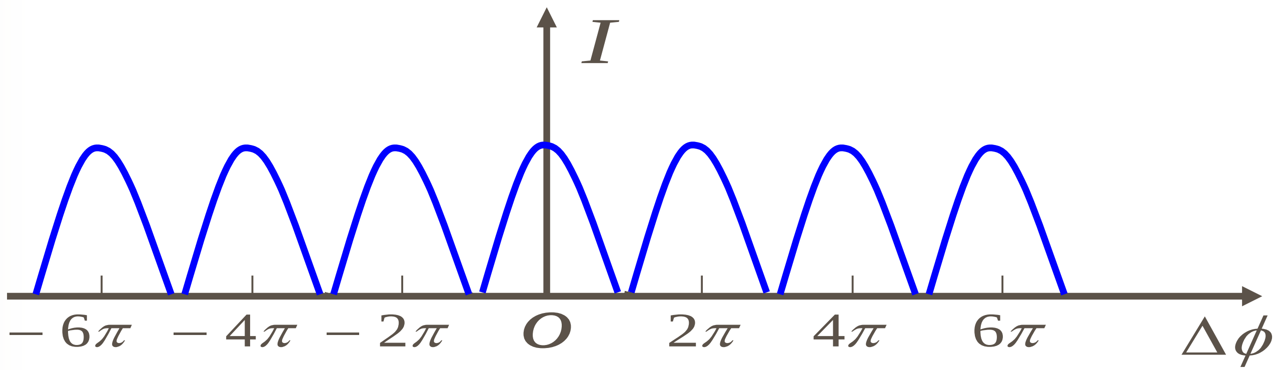
若I_1=I_2，叠加后波的强度:

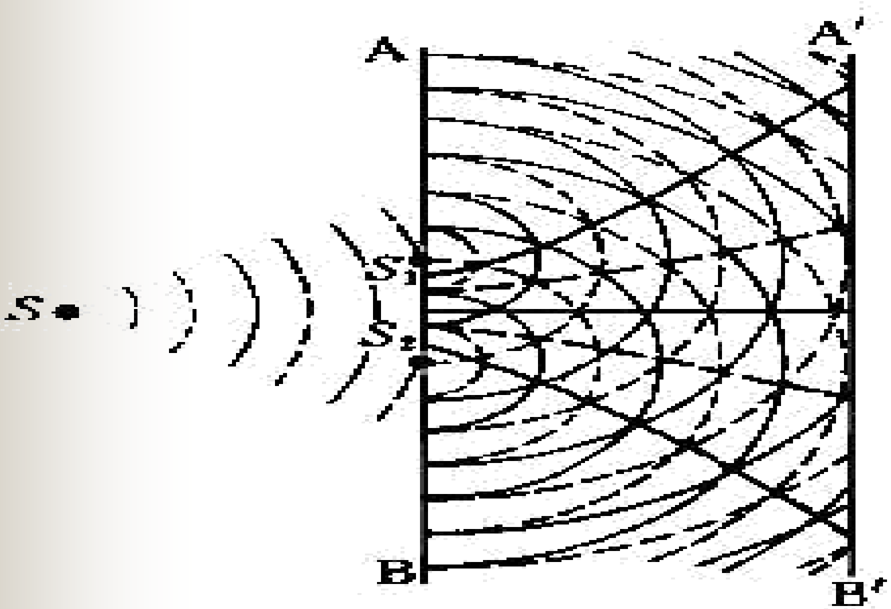
$$I = 2I_1[1+\cos(\Delta\varphi)] = 4I_1\cos^2\frac{\Delta\varphi}{2}$$

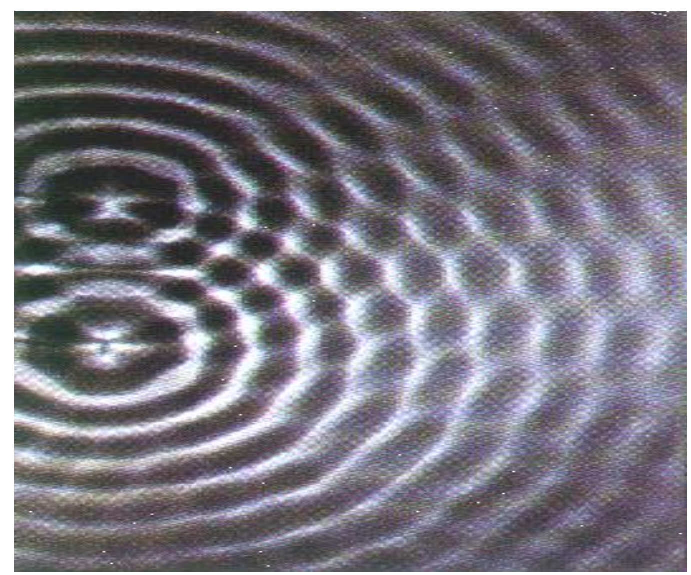
- $\Delta\varphi = 2k\pi,$ $I = 4I;$

  $\Delta\varphi = (2k+1)\pi,$ $I = 0$

$\Delta\varphi$取不同值，I不同，$I_{min} < I < I_{max}$

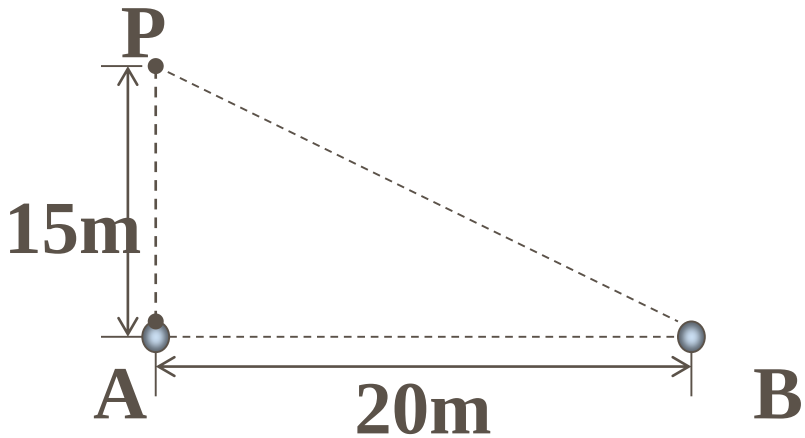






干涉现象的强度分布

例：AB为两相干波源，振幅均为5cm，频率为100Hz，波速为10m/s.A点为波峰时，B点恰为波谷。试确定两列波在P点干涉的结果。



解： $BP=\sqrt{20^2+15^2}=25m$

$$\lambda=\frac{u}{v}=0.1m$$

设A比B超前π　$\varphi_A-\varphi_B=\pi$

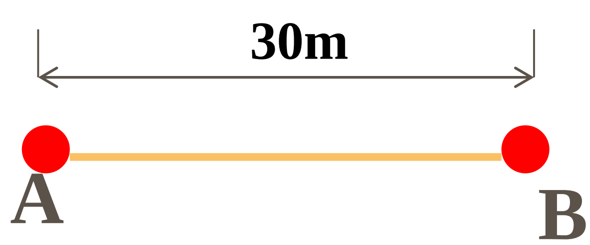
$$\Delta\varphi=\varphi_B-\varphi_A-2\pi\frac{BP-AP}{\lambda}=-\pi-2\pi\frac{25-15}{0.1}$$

$=-201\pi$　反位相　$A=0$　**P点静止**

例： 相干波源位于同一媒质中的A、B两点，振幅相等，频率皆为100Hz,B比A位相超前π。若A、B相距30m，波速为400m/s。求AB连线上因干涉而静止的各点的位置。

解：

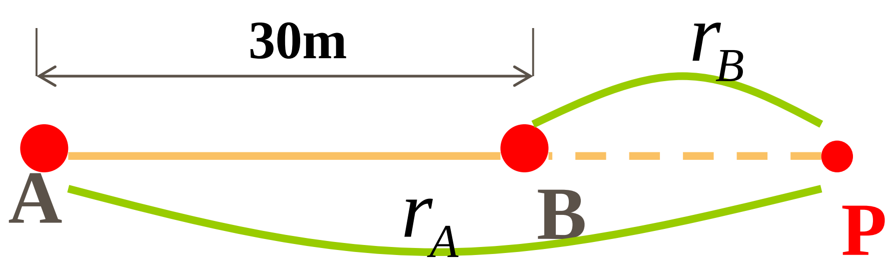
$$\Delta\varphi = (\varphi_B - \varphi_A) - \frac{2\pi}{\lambda}(r_B - r_A)$$



$$\varphi_B - \varphi_A = \pi$$

$$\lambda = \frac{u}{\nu} = 4m$$

分三种情况：



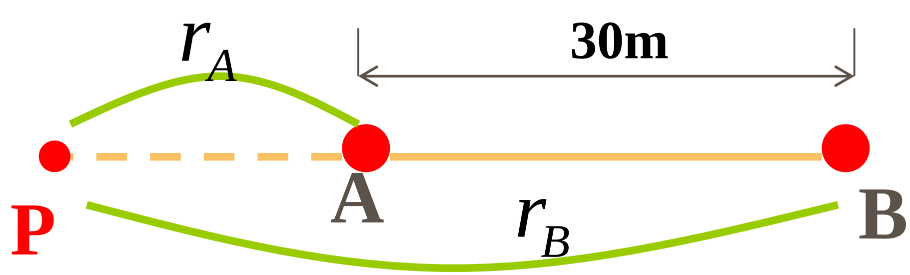
（1）P在B右侧

$$r_B - r_A = -30m$$

$$\Delta\varphi = (\varphi_B - \varphi_A) - \frac{2\pi}{\lambda}(r_B - r_A) = \pi - \frac{2\pi}{4}(-30) = 16\pi$$

结论：无论P在B右侧何位置振动始终加强

（2）P在A左侧

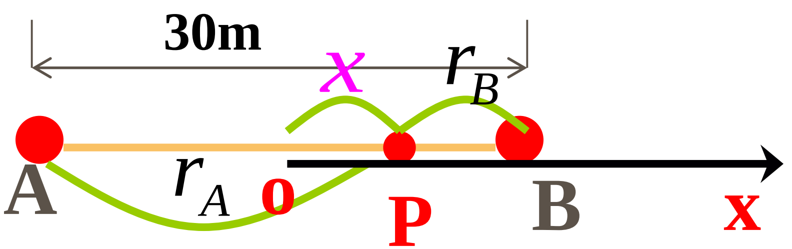


$$r_B - r_A = 30m$$

$$\Delta\varphi = (\varphi_B - \varphi_A) - \frac{2\pi}{\lambda}(r_B - r_A) = \pi - \frac{2\pi}{4}(30) = -14\pi$$

结论：无论P在A左侧任何位置振动始终加强

（3）P在AB连线上



$$r_B = 15 - x$$

$$r_A = 15 + x$$

$$\Delta\varphi=(\varphi_B-\varphi_A)-\frac{2\pi}{\lambda}(r_B-r_A)=\pi-\frac{2\pi}{4}\left((15-x)-(15+x)\right)$$

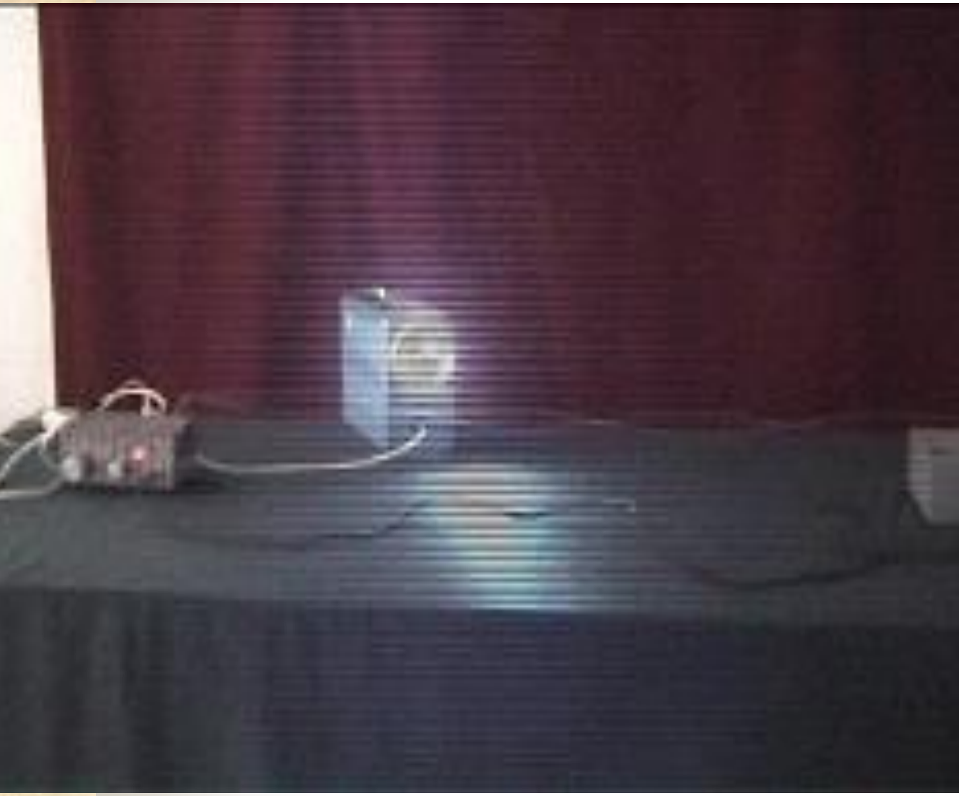
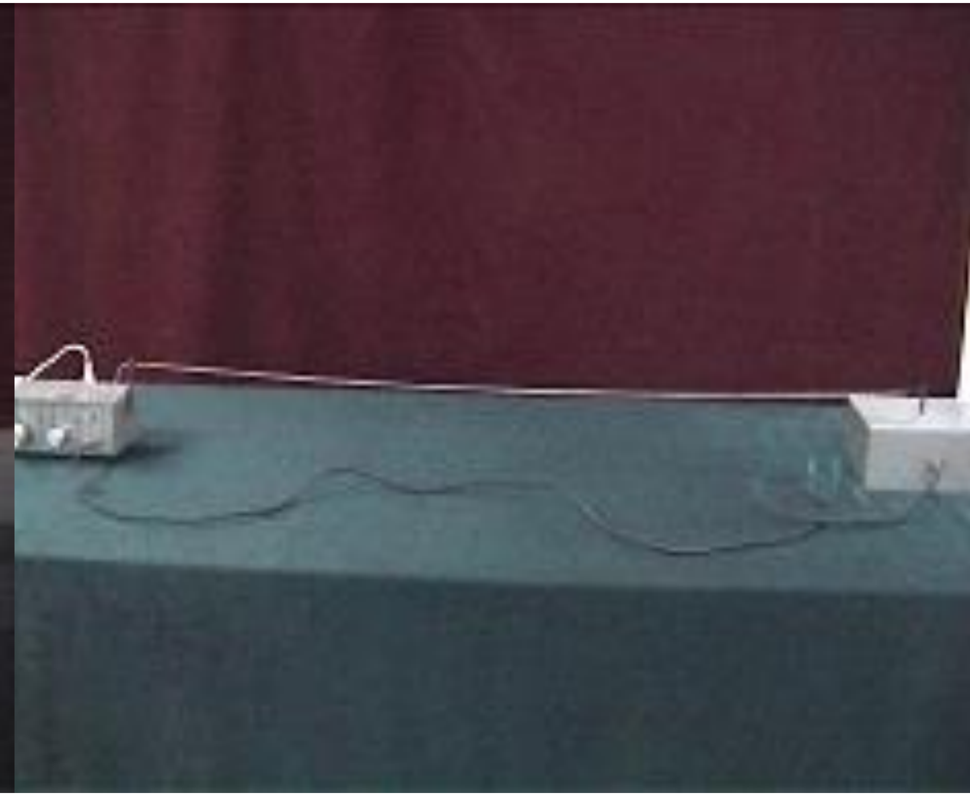
$$\Delta\varphi=\pi+x\pi=(2k+1)\pi$$ 干涉静止

$$\therefore x=2k \qquad 又\because -15\le x\le 15$$

$$\therefore k=0,\pm1,\pm2,\pm3\cdots\pm7$$

$$\therefore x=0,\pm2,\pm4,\cdots\pm14m$$

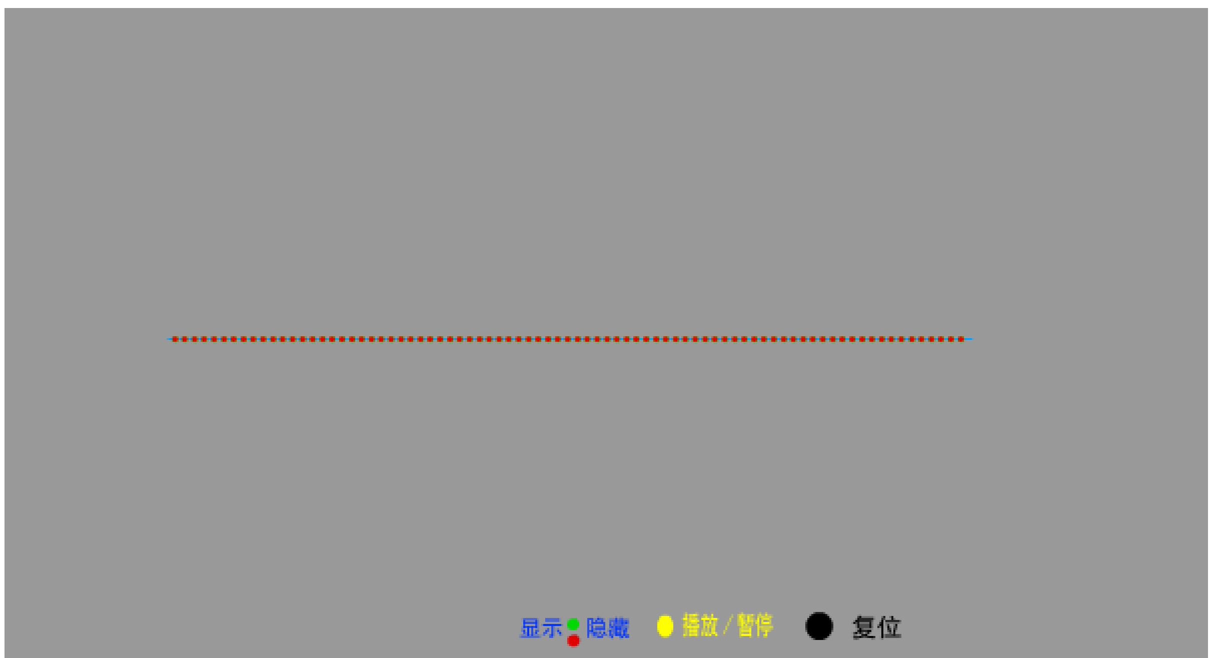
结论：X取上述值时AB连线相应各点因干涉而静止

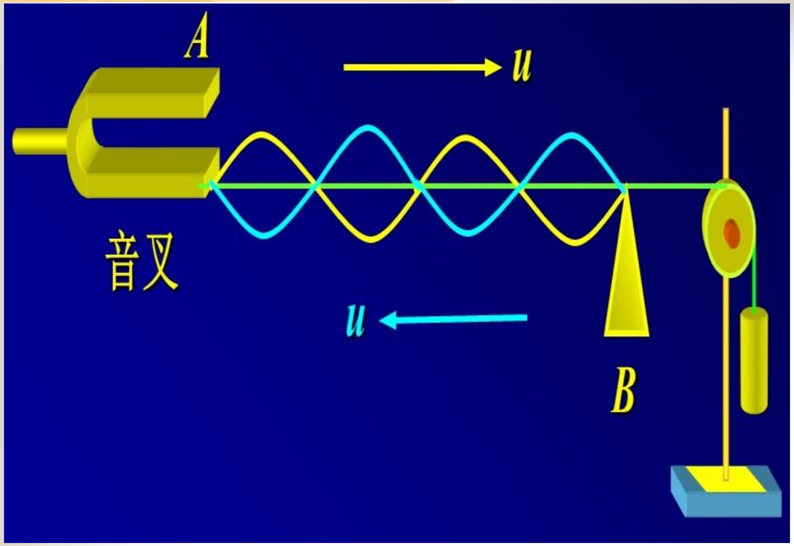



三、驻波

1. 驻波定义

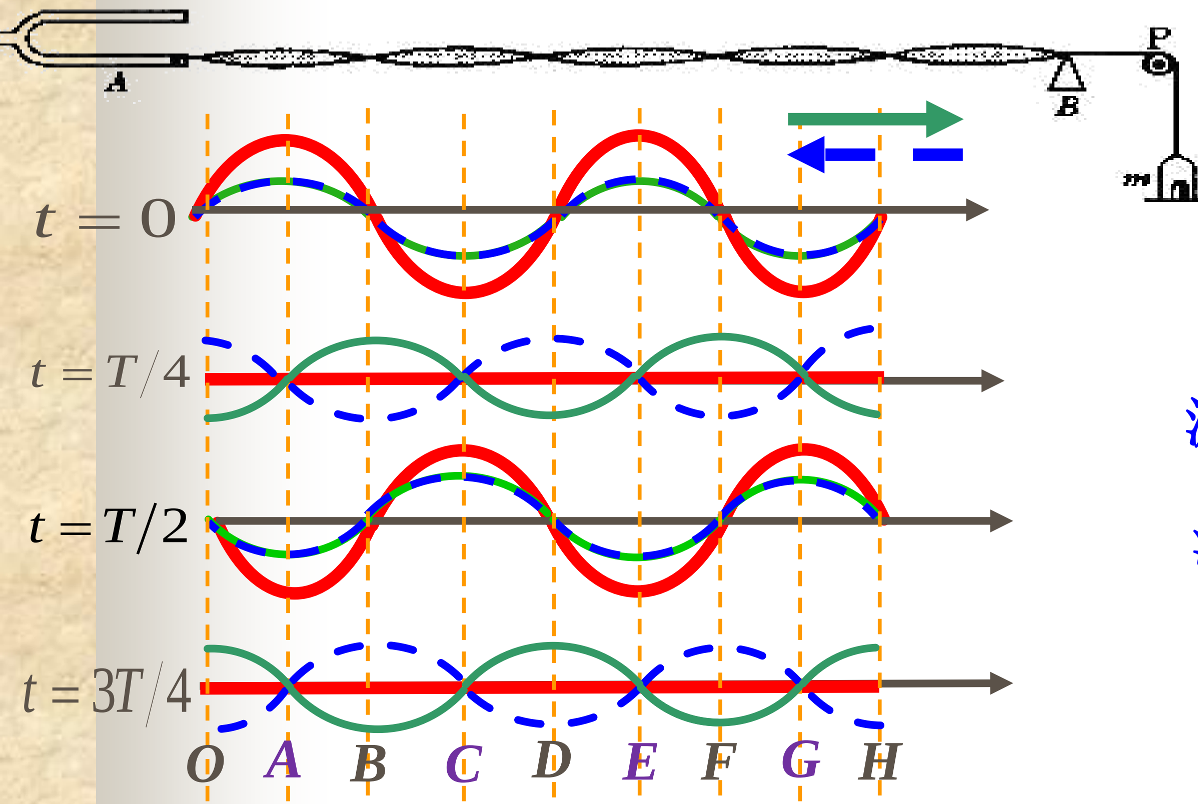
在同一媒质中两列振幅、频率、传播速度都相同的相干波，在同一直线上沿相反方向传播时叠加而形成的一种特殊的干涉现象.

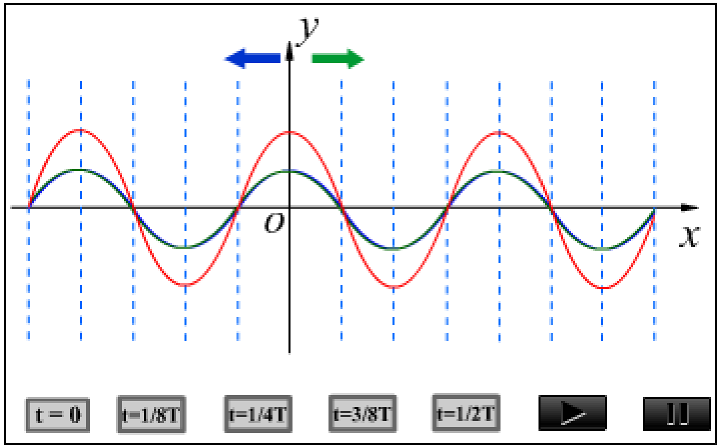




- 可看成若干分段组成,每分段中各质点都在各自位置附近作独立稳定的振动
- 各振动质点的振幅各不相同，但却保持不变，有些点振幅始终最大，有些点振幅始终为零
- 波形随时间变化，但不定向移动

2、驻波形成的定性分析





波节：*O B D F H*

波腹：*A C E G*

3、驻波的定量分析

设有两振幅相同、频率相同、初相均为零的简谐波，沿 x 轴的正负方向传播，波动方程分别为

$$y_1 = A\cos 2\pi\left(t/T - x/\lambda\right)$$

$$y_2 = A\cos 2\pi\left(t/T + x/\lambda\right)$$

$$y = y_1 + y_2 = A\cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) + A\cos 2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda}\right)$$

$$= \boxed{2A\cos\frac{2\pi}{\lambda}x}\,\underline{\cos\frac{2\pi}{\mathrm{T}}t}$$

驻波方程

驻波的振幅与位置有关

简谐振动因子

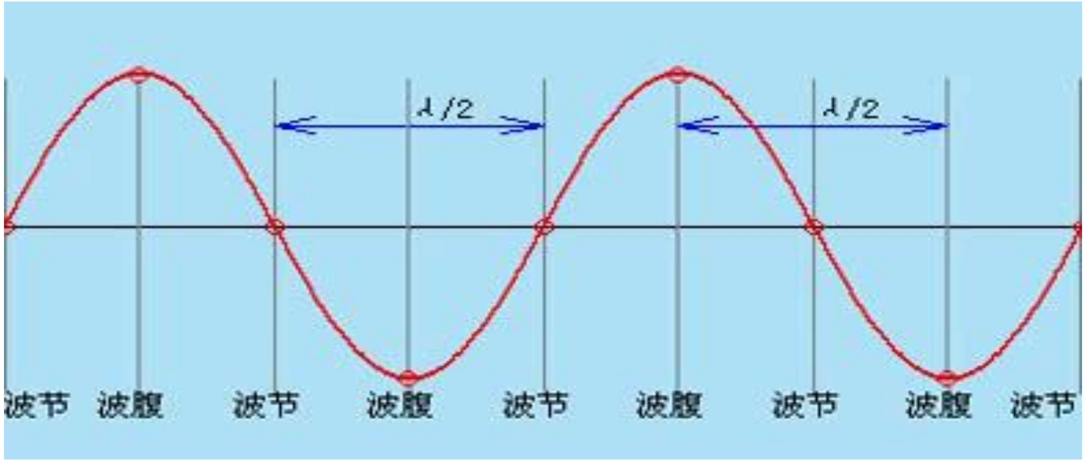
讨论：

$$y = 2A\cos\frac{2\pi}{\lambda}x\cos\frac{2\pi}{T}t$$

(1) 振幅分布

$$A' = \left|2A\cos\frac{2\pi x}{\lambda}\right|$$

波 节 位置	波 腹 位置
$\left\lvert\cos\frac{2\pi x}{\lambda}\right\rvert = 0$ $\boxed{A_{\min} = 0}$	$\left\lvert\cos\frac{2\pi x}{\lambda}\right\rvert = 1$ $\boxed{A_{\max} = 2A}$
$2\pi\frac{x}{\lambda} = (2k+1)\frac{\pi}{2}$	$2\pi\frac{x}{\lambda} = k\pi$
$x = (2k+1)\frac{\lambda}{4}\quad k = 0, \pm 1, \ldots.$	$x = k\frac{\lambda}{2}\quad k = 0, \pm 1, \ldots.$
相邻波节距离：$\Delta x = \frac{\lambda}{2}$	相邻波腹距离：$\Delta x = \frac{\lambda}{2}$



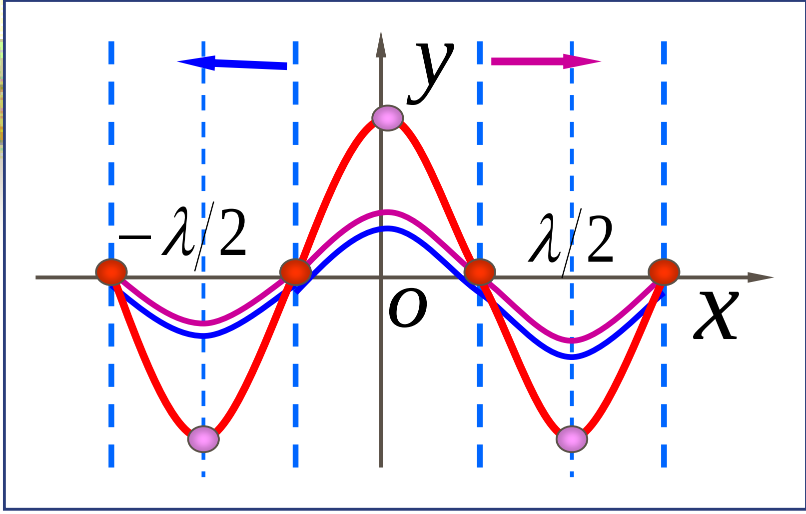
✓ **波形不传播，是媒质质元的一种集体振动形态。**

相邻波腹和波节间距 $= \dfrac{\lambda}{4}$

“驻”的第一层含义

(2) 相位分布

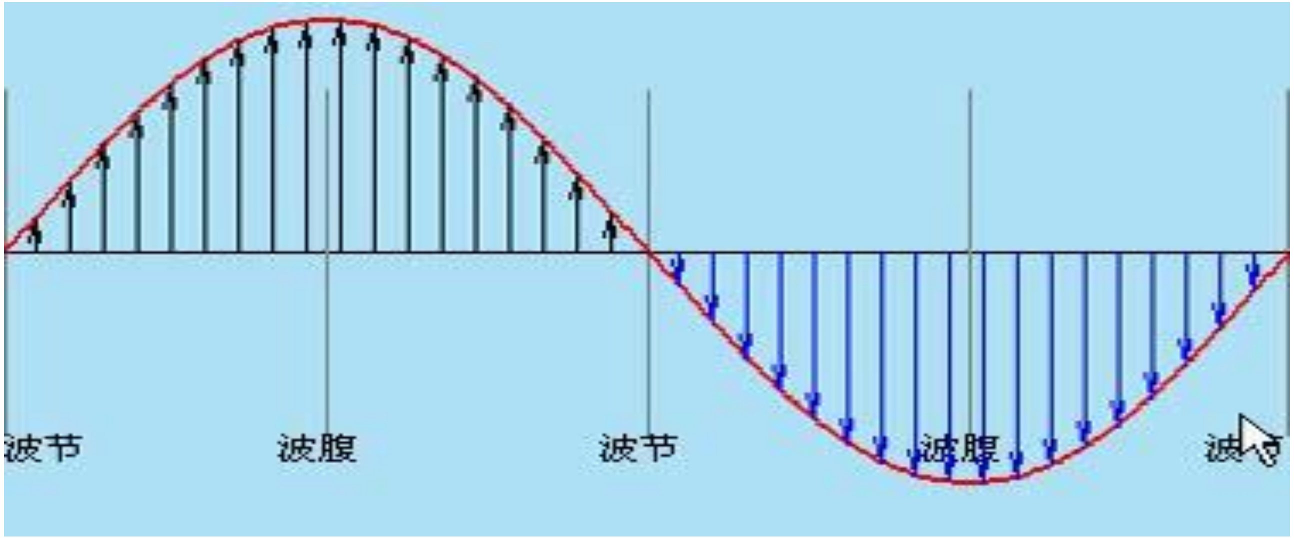
$$y = 2A\cos\frac{2\pi}{\lambda}x\,\boxed{\cos\frac{2\pi}{T}t}$$



质点相位还取决于 $\cos 2\pi\dfrac{x}{\lambda}$ 的正负

若 $\cos\dfrac{2\pi}{T}t > 0$
$$\begin{cases} 2A\cos 2\pi\dfrac{x}{\lambda} > 0 & y > 0 \\ 2A\cos 2\pi\dfrac{x}{\lambda} < 0 & y < 0 \end{cases}$$

- 两相邻波节间各点振动相位相同，同时极大同时极小.
- 波节两侧各点振动相位相反
- 在**波节**处产生 π 的**相位突变**



✓ **驻波相位（振动状态）不传播！**

“驻”的
第二层含义

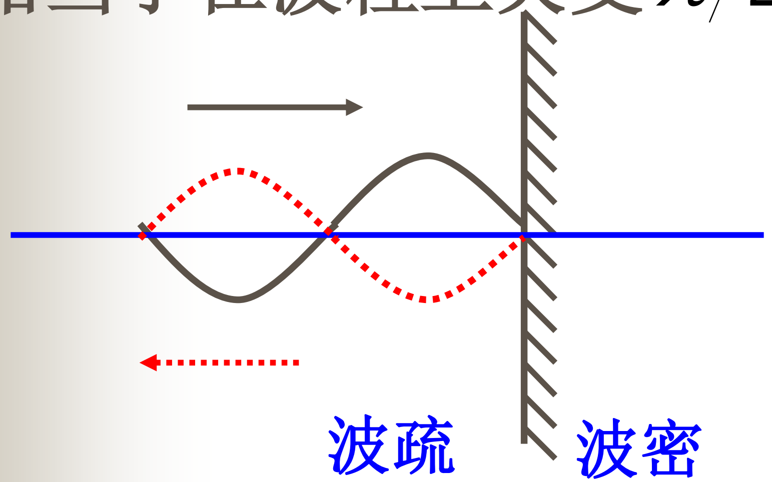
（3）相位突变 —— 半波损失

波沿分界面垂直入射时

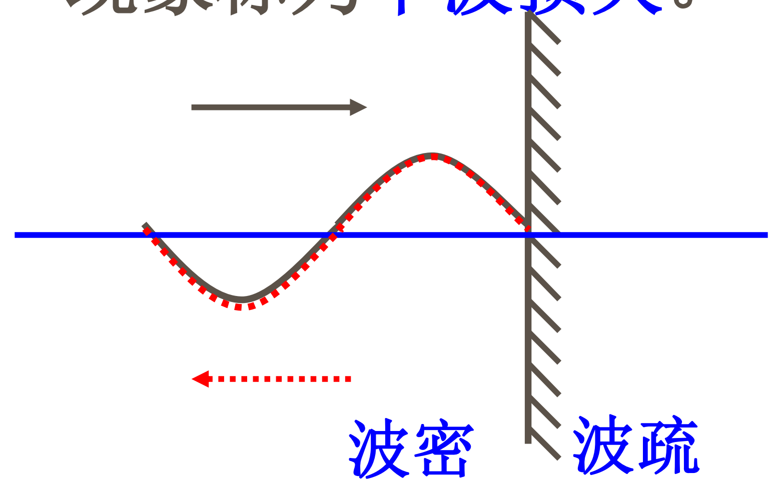
波密介质：密度ρ 与波速u的乘积较大的介质

波疏介质：密度ρ 与波速u的乘积较小的介质

当波从**波疏介质**传播到**波密介质**，分界面反射点是波节，表明入射波在反射点反射时有π的相位突变相当于在波程上突变$\lambda/2$。这一现象称为**半波损失**。

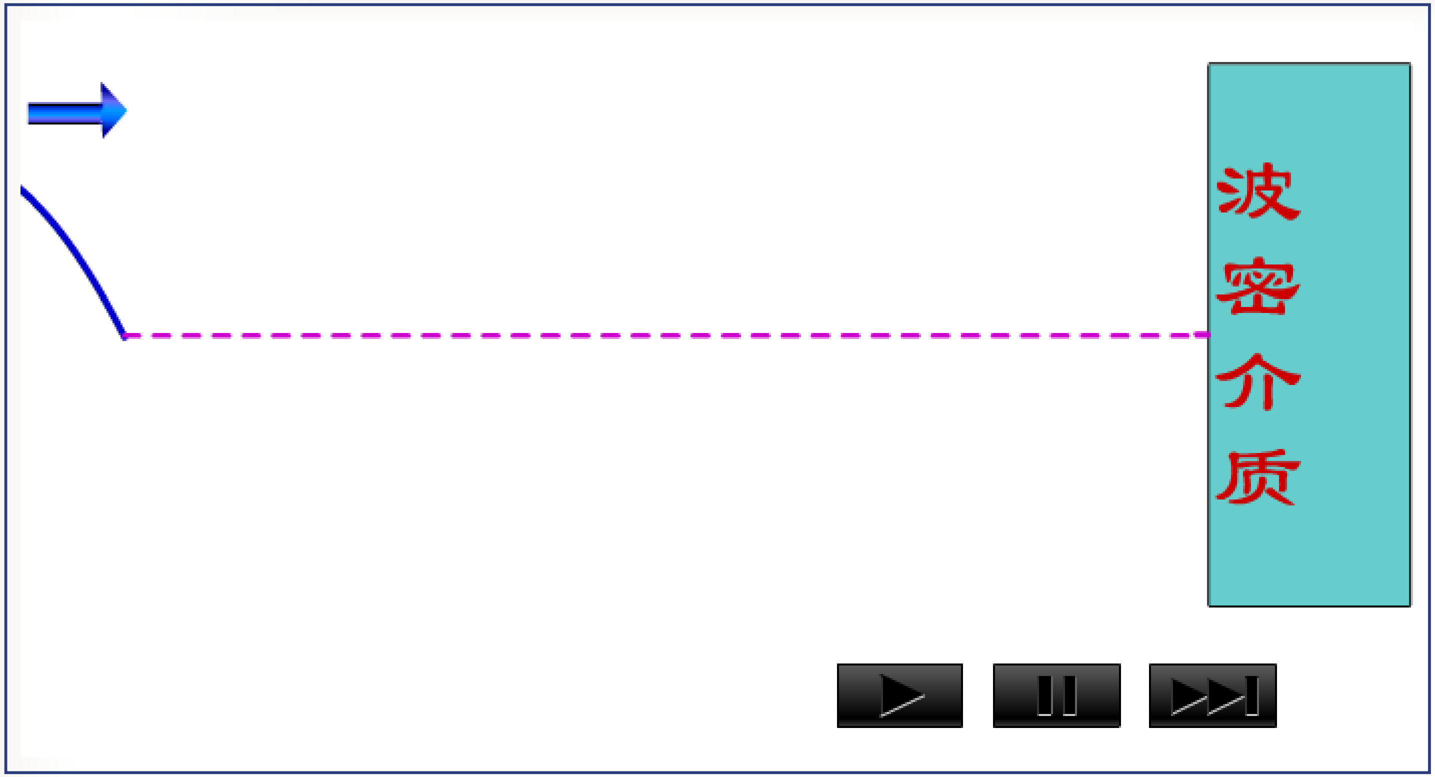


反射点为波节（有半波损失）

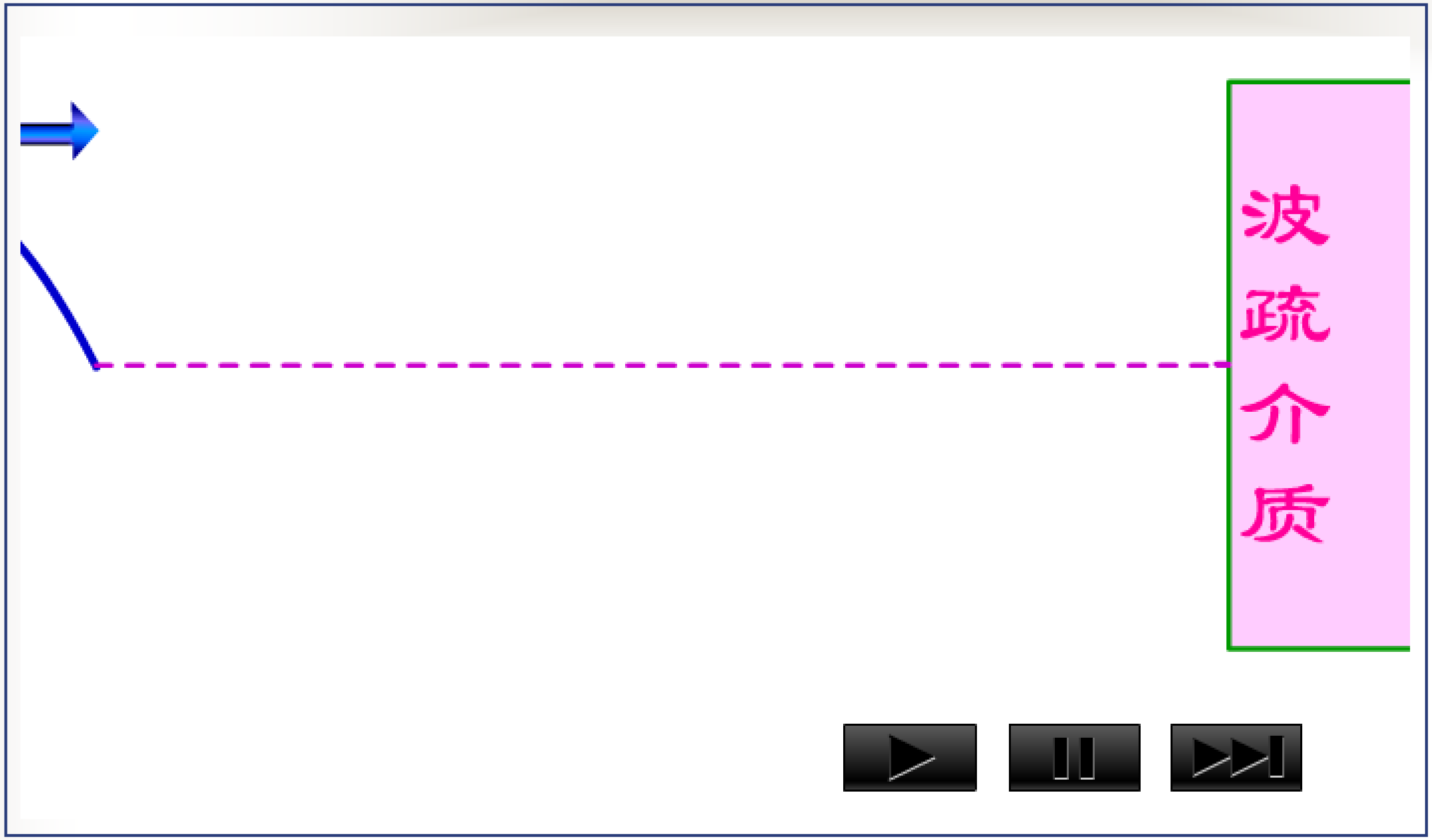


反射点为波腹（无半波损失）

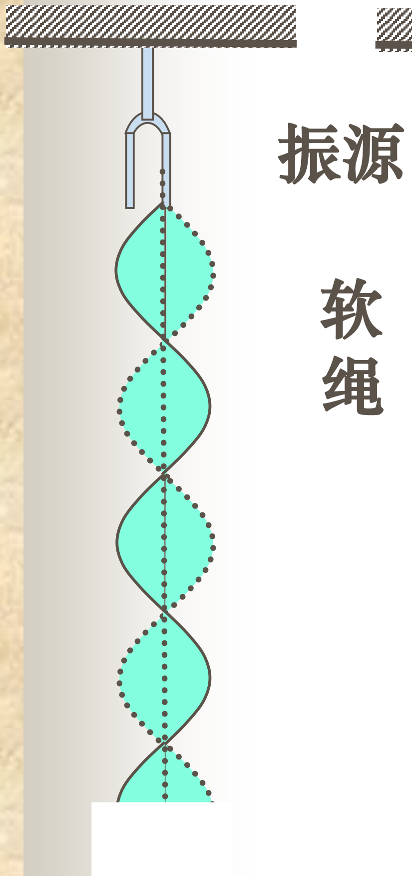
波疏介质 ρu 较小



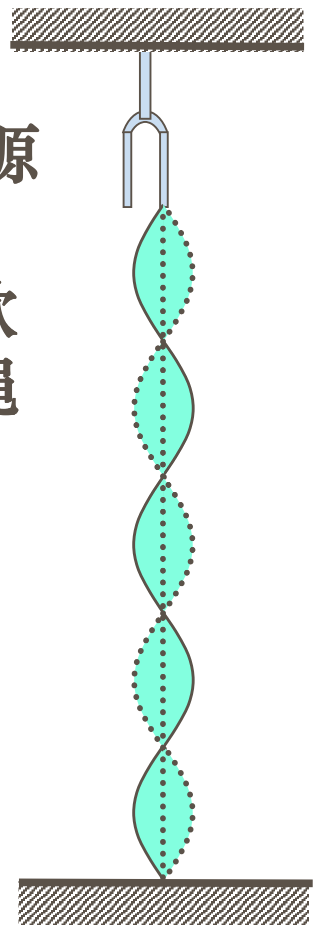
波密介质 ρu 较大



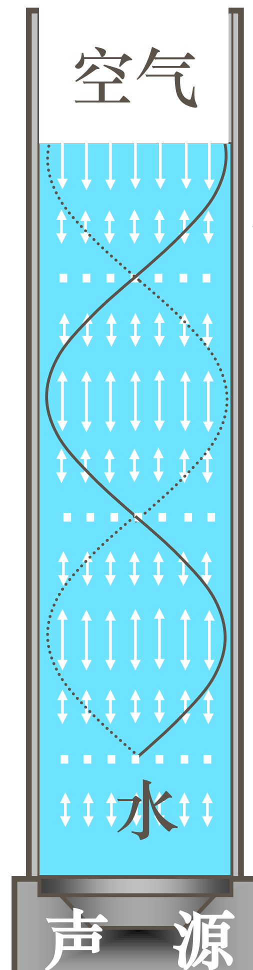
当波从波密介质垂直入射到波疏介质，被反射到波密介质时形成**波腹**. 入射波与反射波在此处的相位时时**相同**，即反射波在分界处**不**产生相位**突变**.



自由端反射
总是出现波腹

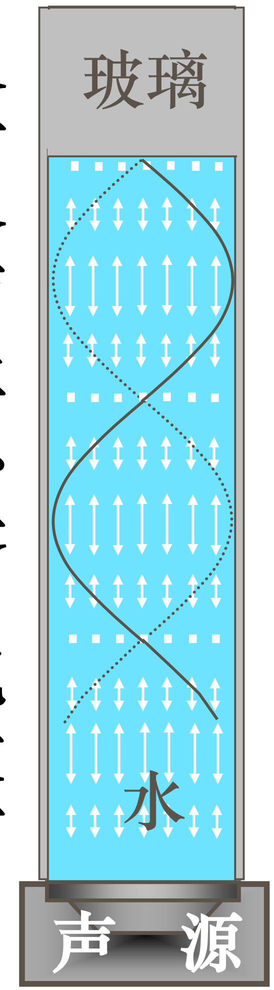


固定端反射
总是出现波节

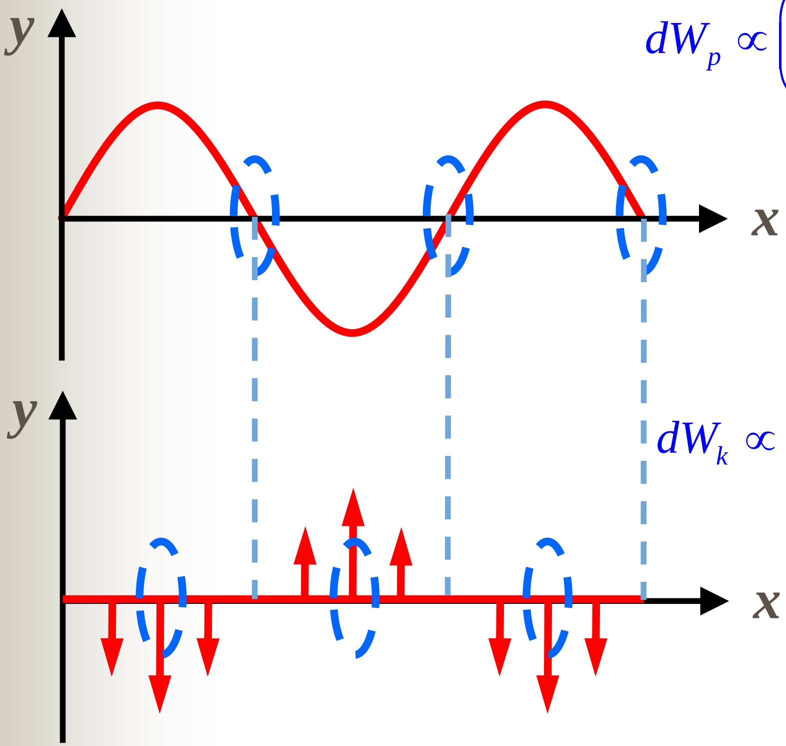


反射界面上总是出现波腹

反射界面上总是出现波节



（4）能量分布



$$dW_p \propto \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

位移最大时：

动能为零，势能最大，

能量集中在波节处（形变最大）！

$$dW_k \propto \left(\frac{dy}{dt}\right)^2$$

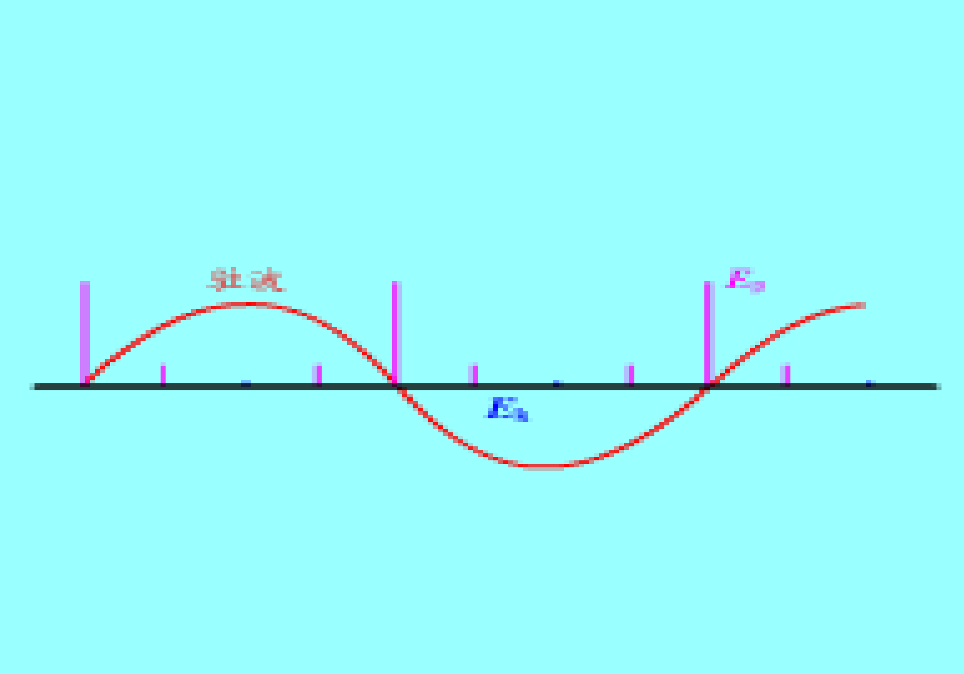
平衡位置时：

势能为零，动能最大，

能量集中在波腹处（速率最大）！

质元间能量如何交换？

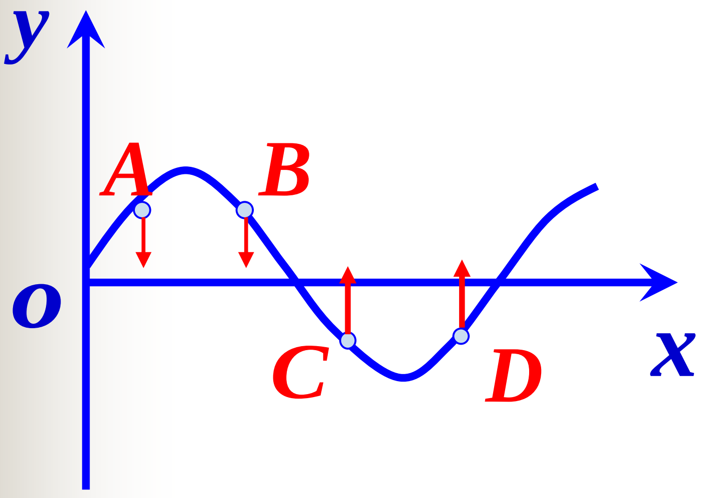
能量在两波节之间波段进行动能、势能的转化，在波节与波腹之间转移，一个波长范围内无能量流出或流入。



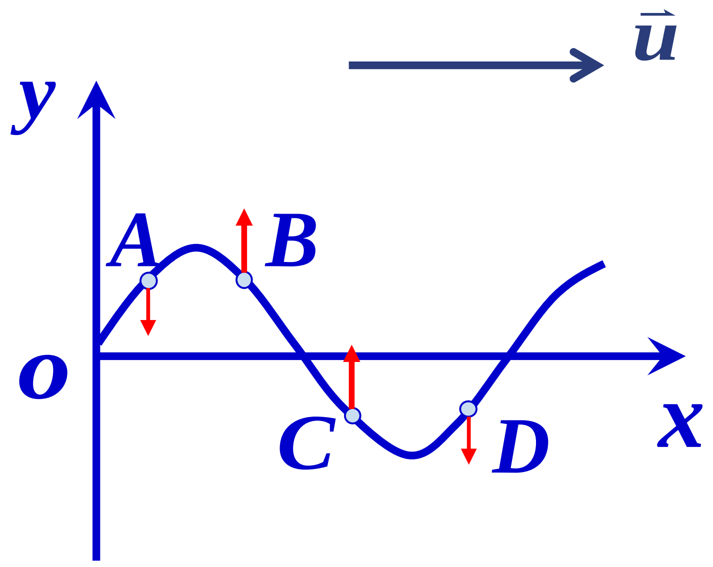
✓ 驻波没有能量的定向传播！

“驻”的
第三层含义

例、图(a)是驻波图形，图（b）是行波图形，在图上标出A、B、C、D振动方向。



（a）



（b）

例、一简谐波：$y_1 = 2.0\times10^{-2}\cos[2\pi(\frac{t}{0.02}-\frac{x}{20})+\frac{\pi}{3}] \quad m$

为了形成驻波，还应有一简谐波， 并且在x= 0处是波节，求其表达式。

解：设反向波 $y_2 = 2.0\times10^{-2}\cos[2\pi(\frac{t}{0.02}+\frac{x}{20})+\varphi]$

$$y = y_1 + y_2$$

$$= 4.0\times10^{-2}\cos[\frac{1}{2}(\frac{4x}{20}+\varphi-\frac{\pi}{3})]\cos[\frac{1}{2}(\frac{4\pi t}{0.02}+\varphi+\frac{\pi}{3})]$$

因为x = 0处为波节，$\frac{1}{2}(\varphi-\frac{\pi}{3}) = k\pi+\frac{\pi}{2} \qquad \varphi = 2k\pi+\frac{4\pi}{3}$

$$y_2 = 2.0\times10^{-2}\cos[2\pi(\frac{t}{0.02}+\frac{x}{20})+\frac{4\pi}{3}] \quad m$$

例、设入射波的波动方程为 $y_1 = A\cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$

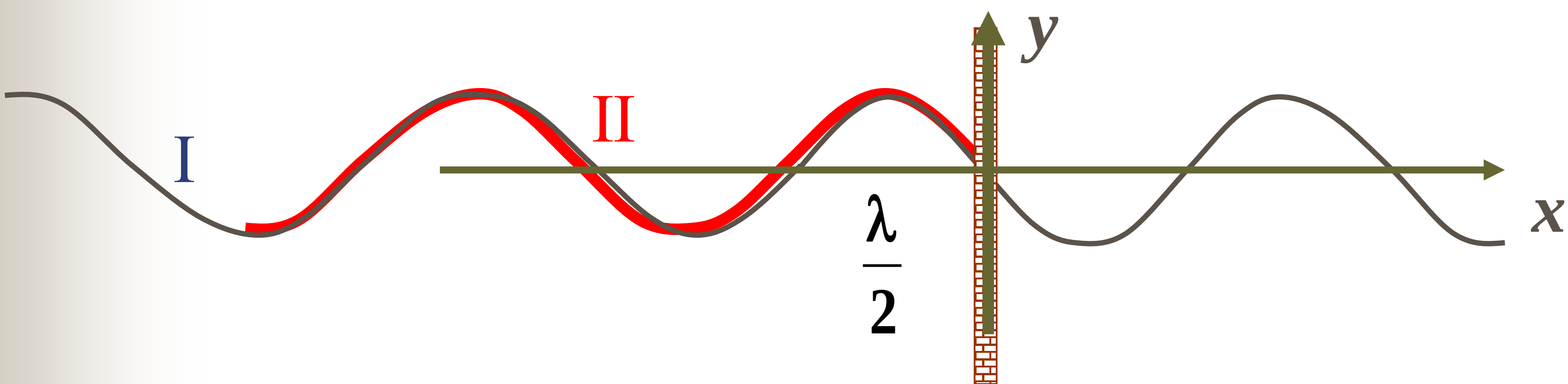
在 $x = 0$ 处发生反射，反射点为一节点，求：

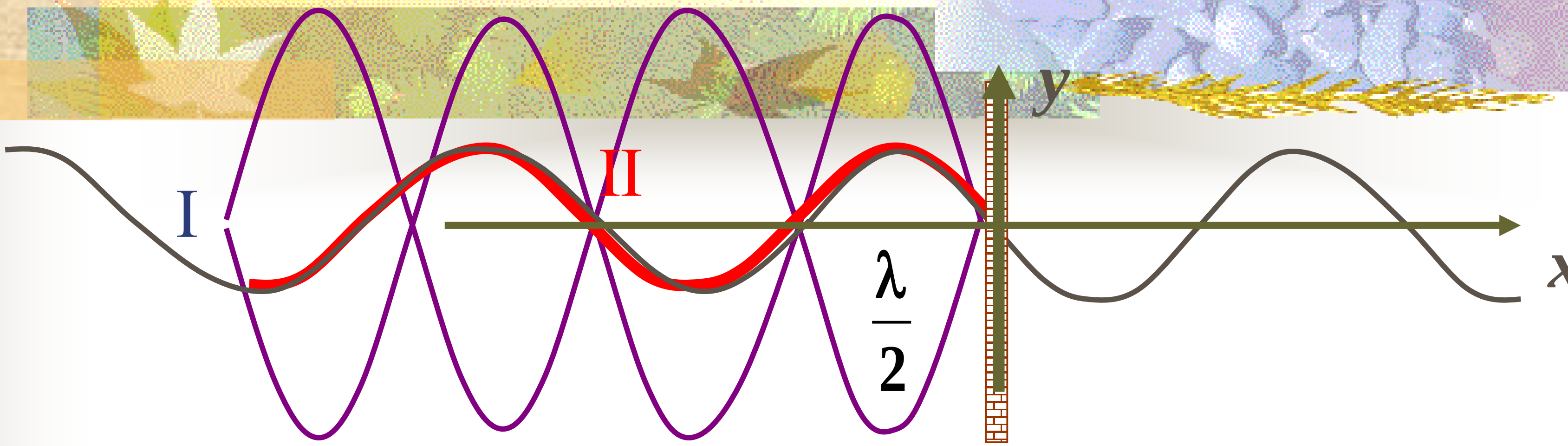
（1）反射波的波动方程；

（2）合成波（驻波）的波动方程；

（3）指出各波腹和波节的位置坐标。

解：（1）反射波方程为 $y_{反} = A\cos\left[2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda}\right) - \pi\right]$





（2）驻波方程为

$$y_{驻} = y_{入} + y_{反}$$

$$= A\cos\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)\right] + A\cos\left[2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda}\right) - \pi\right]$$

$$= 2A\cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda} - \frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{2\pi t}{T} - \frac{\pi}{2}\right) = 2A\sin\frac{2\pi x}{\lambda}\sin\frac{2\pi t}{T}$$

（3）波节位置： $\left|2A\sin\frac{2\pi x}{\lambda}\right| = 0,\ A_{驻} = 0$

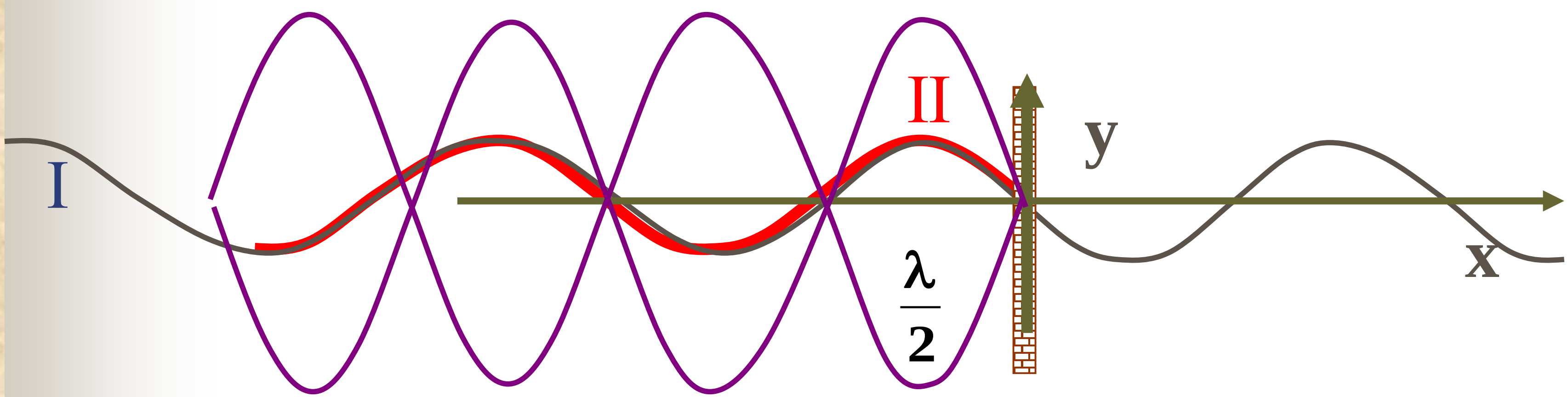
所以 $\frac{2\pi x}{\lambda} = k\pi, \quad k = 0, -1, -2, \cdots$

$$x = k\frac{\lambda}{2}, \quad k = 0, -1, -2, \cdots$$

波腹位置： $\left|2A\sin\frac{2\pi x}{\lambda}\right| = 2A, \quad A_{驻} = 2A$

所以 $\frac{2\pi x}{\lambda} = (2k+1)\frac{\pi}{2}, \quad k = 0, -1, -2, \cdots$

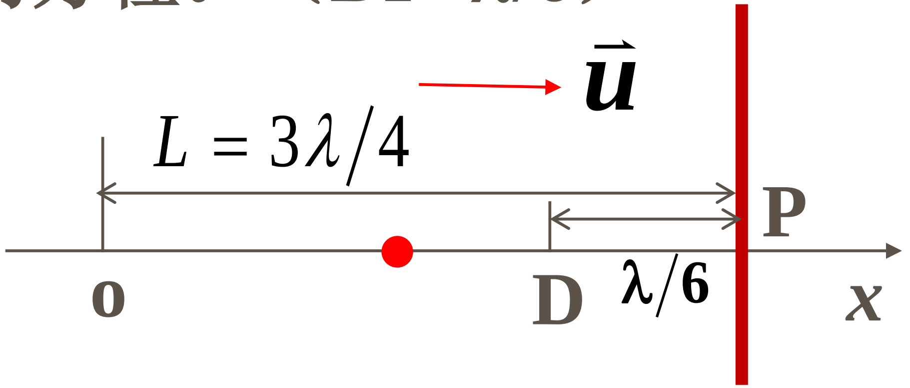
$$x = (2k+1)\frac{\lambda}{4}, \quad k = 0, -1, -2, \cdots$$



例、平面简谐波入射到P点反射，以后形成驻波。设反射点存在半波损失，在o点t=0时，y=0，且向下运动。求驻波方程以及D点的振动方程。（DP=λ/6）

解：入射波方程：

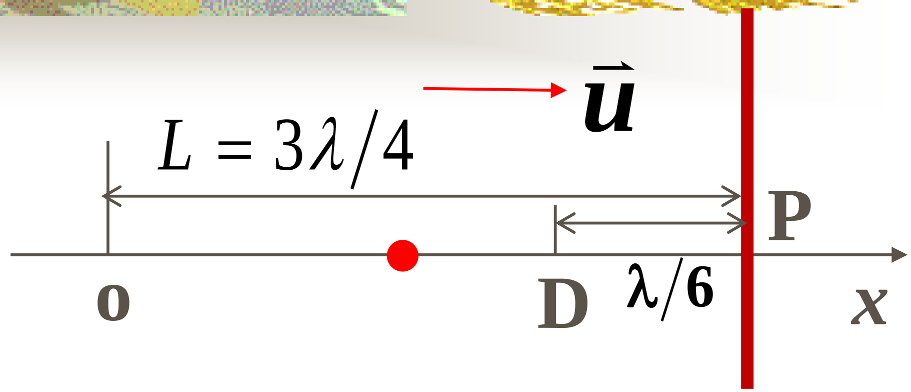
$$y_{入} = A\cos(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}x + \varphi)$$



反射波方程：

$$y_{反} = A\cos[\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}(2L - x) + \pi + \varphi)$$

$$L = \frac{3}{4}\lambda \qquad y_{反} = A\cos(\omega t + \frac{2\pi}{\lambda}x + \varphi)$$



反射波方程:

$$y_{反}=A\cos(\omega t+\frac{2\pi}{\lambda}x+\varphi)$$

入射波方程:

$$y_{入}=A\cos(\omega t-\frac{2\pi}{\lambda}x+\varphi)$$

$$y=y_{反}+y_{入}=A\cos(\omega t+\frac{2\pi}{\lambda}x+\varphi)+\cos(\omega t-\frac{2\pi}{\lambda}x+\varphi)$$

$$=2A\cos\frac{2\pi}{\lambda}x\cos(\omega t+\varphi)$$

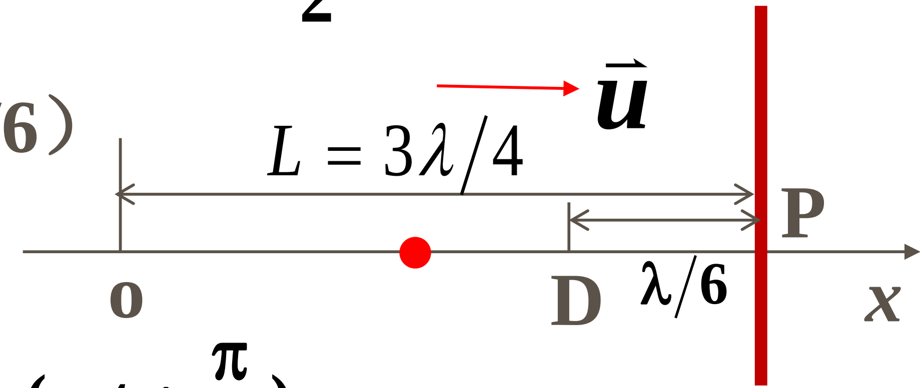
$\because\ t_o=0\quad x=0,\ y=0\qquad\therefore\cos\varphi=0\qquad\varphi=\pm\frac{\pi}{2}$

又 $\because\ v=-\omega A\sin\varphi<0\qquad\therefore\varphi=\frac{\pi}{2}$

驻波方程: $y=2A\cos\frac{2\pi}{\lambda}x\cos(\omega t+\frac{\pi}{2})\quad m$

驻波方程： $y = 2A\cos\frac{2\pi}{\lambda}x\cos(\omega t + \frac{\pi}{2})$

D点的振动方程： （DP=λ/6）



$$y_D = 2A\cos\frac{2\pi}{\lambda}(\frac{3\lambda}{4} - \frac{\lambda}{6})\cdot\cos(\omega t + \frac{\pi}{2})$$

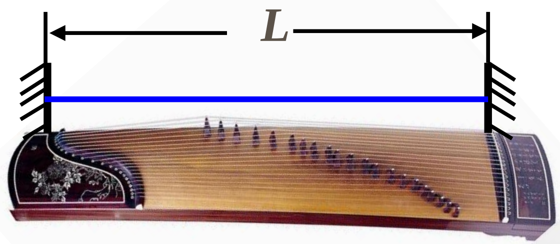
$$= 2A\cos\frac{7\pi}{6}\cdot\cos(\omega t + \frac{\pi}{2})$$

$$= -\sqrt{3}A\cos(2\pi\nu t + \frac{\pi}{2})$$

$$y_D = \sqrt{3}A\cos(2\pi\nu t - \frac{\pi}{2}) \quad m$$

4、驻波的应用

① 弦线上的驻波

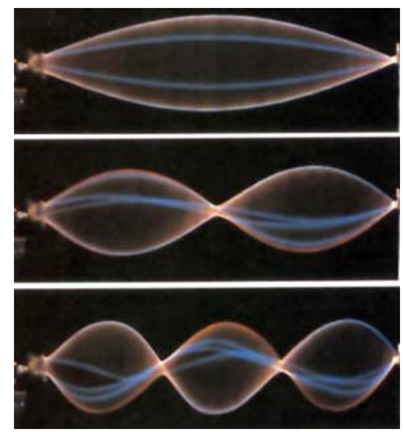


驻波条件：$L = n\dfrac{\lambda_n}{2}$

本征频率：$\nu_n = \dfrac{u}{\lambda_n} = n\dfrac{u}{2L}$

$n=1$ → 基频 → 音调

$n=2,3\ldots$ → 谐频 → 音色



$L = \dfrac{\lambda_1}{2}$

$L = \dfrac{2\lambda_2}{2}$

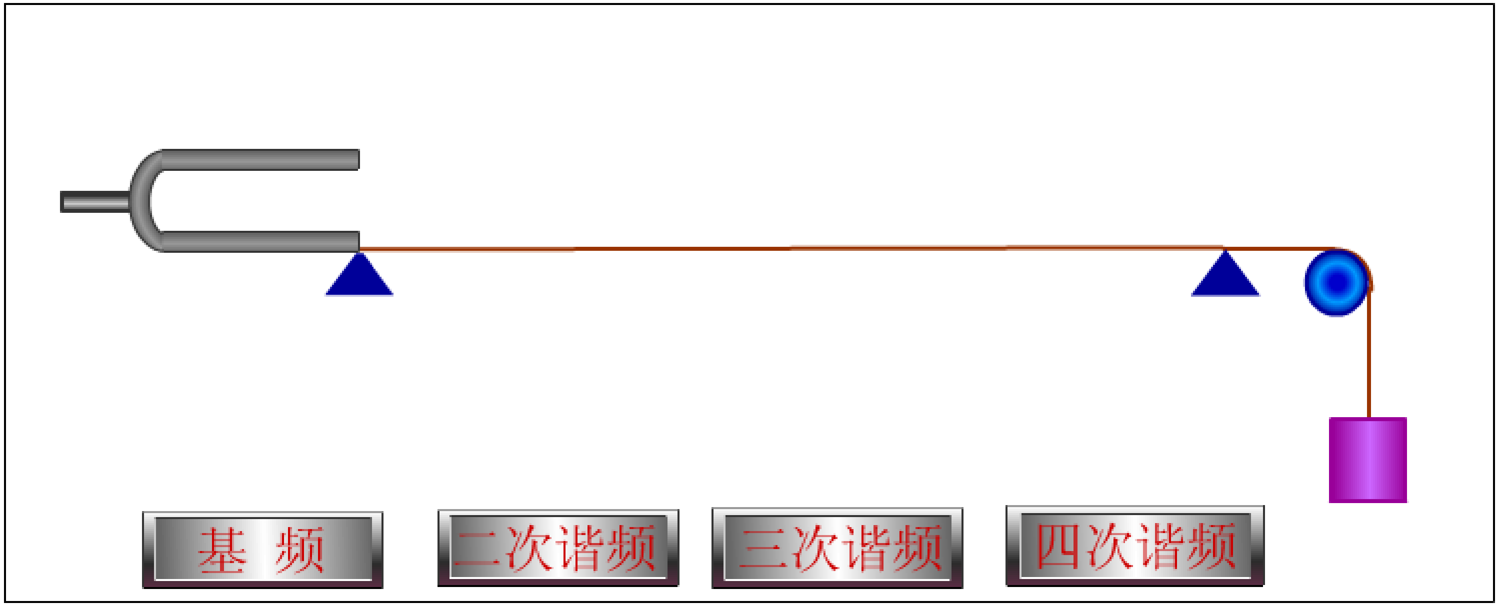
$L = \dfrac{3\lambda_3}{2}$

简正模式

解释问题：弦乐之谜

《音乐物理学导论》唐林编，中国科技大学出版社(1991)

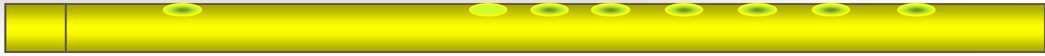
振动的简正模式



用电动音叉在绳上产生驻波

改变拉紧绳子的张力，就能改变波在绳上的传播速度。

笛中的驻波

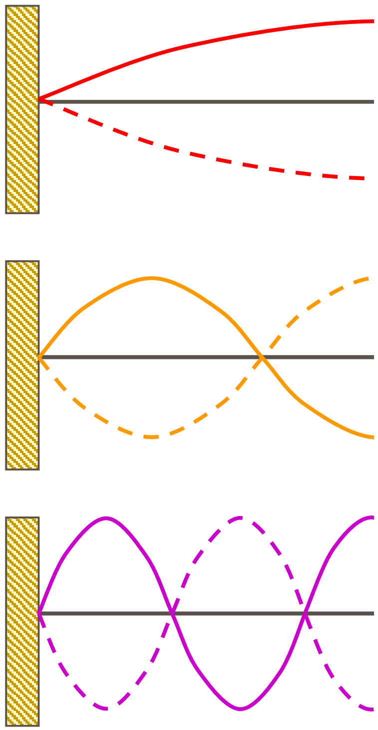


一端为固定端，一端为自由端

$$L = n\frac{\lambda_n}{2} + \frac{\lambda_n}{4}$$

$$n = 1,2,3\cdots$$

一端**固定**一端**自由**的弦振动的简正模式

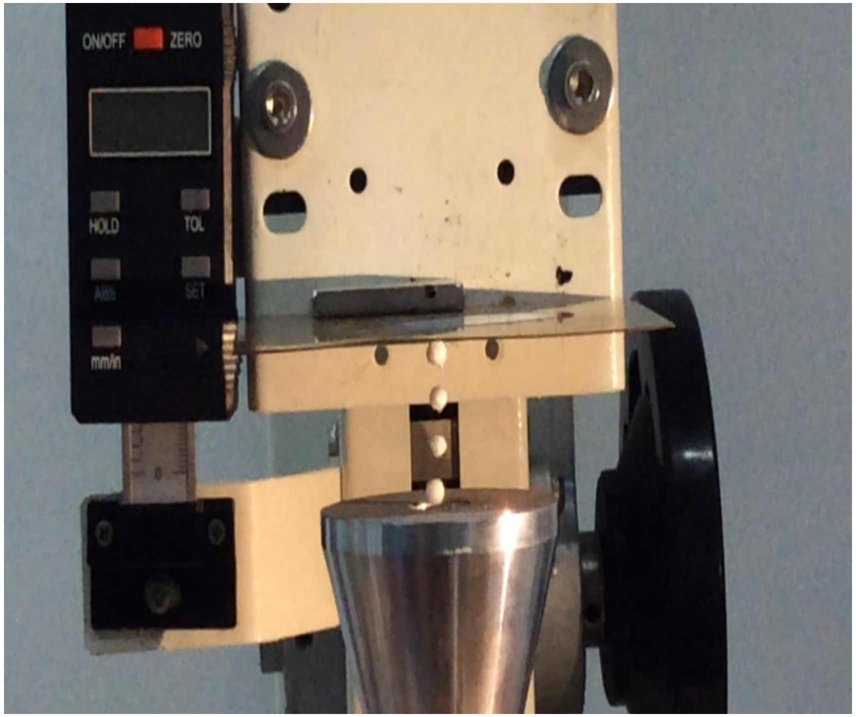


$$l = \frac{\lambda_1}{4}$$

$$l = \frac{3\lambda_2}{4}$$

$$l = \frac{5\lambda_3}{4}$$

② 声悬浮

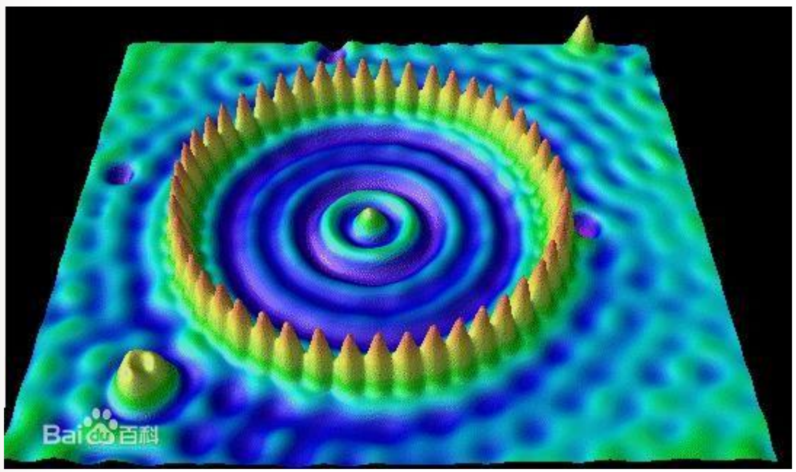


③“鱼洗”之谜

双手摩擦铜耳，形成铜盆的自激振荡，振动在水面上传播，并与反射波叠加形成二维驻波。摩擦得法，可喷出水柱！

课后拓展：

- 试了解微观世界的驻波现象“量子围栏”



M. F. Crommie

- 生活中还有哪些现象与驻波有关？