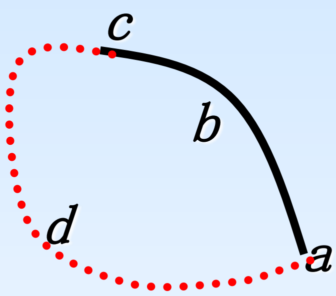
- **感生电动势的计算方法：**

（1）导体为**闭合回路** $\varepsilon_{\mathrm{i}} = -\dfrac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$ （通用法则）

（2）导体为**非闭合回路**



方法一：构建闭合回路；

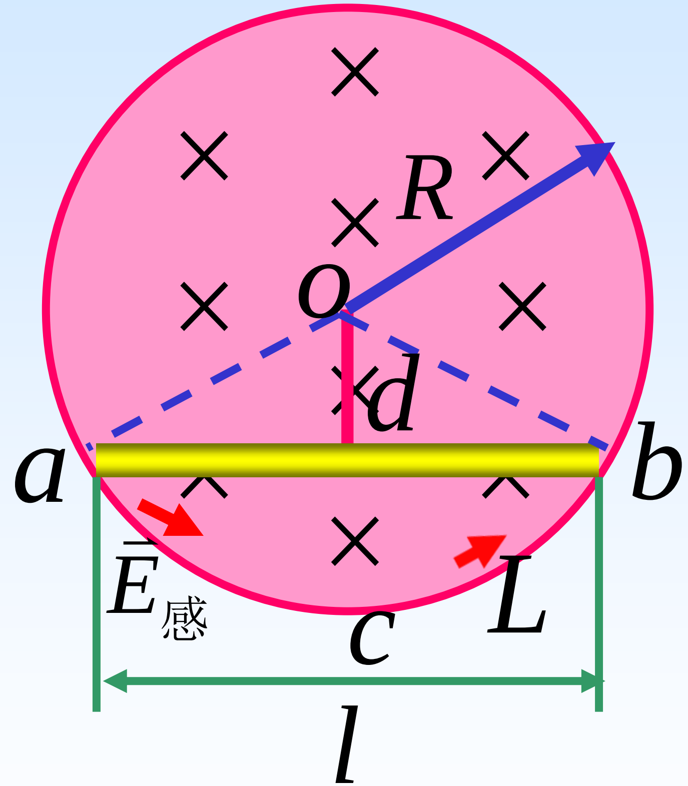
$$\varepsilon_{\mathrm{i}} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = \varepsilon_{abc} + \varepsilon_{cda} \Longrightarrow \varepsilon_{abc} = \varepsilon_{i} - \varepsilon_{cda}$$

条件：添加径路上的电动势已知或为零

方法二：已知感生电场，直接积分。

$$\varepsilon_{\mathrm{i}} = \int_{a}^{c} \vec{E}_k \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

例、在半径为 R 的圆柱形体内存在均匀磁场，且 $\frac{dB}{dt}\rangle 0$ ，有一长为 l 的金属棒放在磁场中，位置如图。求棒两端的感生电动势。



解一：取回路 $abca$ 为逆时针方向，$\vec{E}_{感}$ 线为逆时针方向。则

$$\oint_{acba}\vec{E}_{感}\cdot d\vec{l}$$

$$=\int_{\overline{ba}}\vec{E}_{感}\cdot d\vec{l}+\int_{acb}\vec{E}_{感}\cdot d\vec{l}$$

$$\varepsilon_{ba}=\int_{\overline{ba}}\vec{E}_{感}\cdot d\vec{l}=\oint_{acba}\vec{E}_{感}\cdot d\vec{l}-\int_{acb}\vec{E}_{感}\cdot d\vec{l}$$

其中

$$\oint_{acba} \vec{E}_{感} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\iint_S \frac{d\vec{B}}{dt} \cdot d\vec{S} = S_{acba} \frac{dB}{dt}$$

$$= \left(\frac{1}{2} R^2 \theta - \frac{l}{2} \sqrt{R^2 - \left(\frac{l}{2} \right)^2} \right) \frac{dB}{dt}$$

$$\int_{acb} \vec{E}_{感} \cdot d\vec{l} = \int_{acb} \frac{R}{2} \frac{d\vec{B}}{dt} \cdot d\vec{l} = \frac{R}{2} \frac{dB}{dt} R\theta = \frac{1}{2} R^2 \theta \frac{dB}{dt}$$

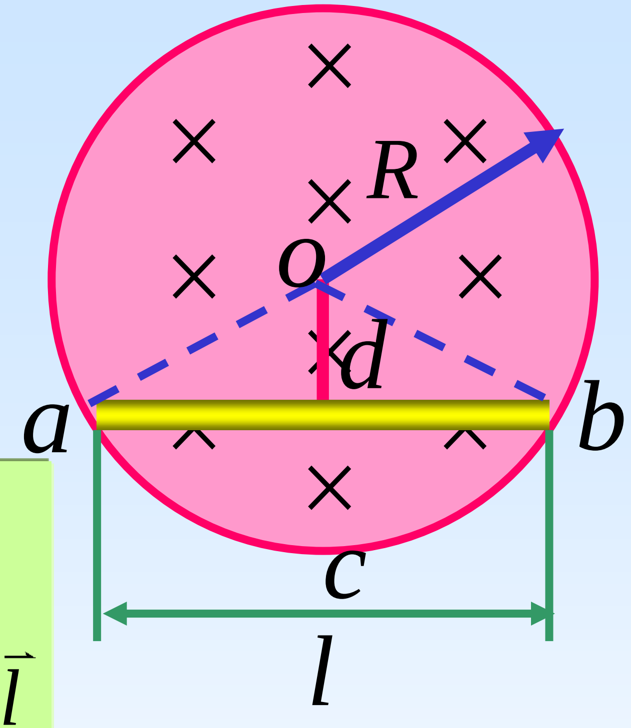
$$\varepsilon_{ba} = \oint_{acba} \vec{E}_{感} \cdot d\vec{l} - \int_{acb} \vec{E}_{感} \cdot d\vec{l} = -\frac{l}{2} \sqrt{R^2 - \left(\frac{l}{2} \right)^2} \frac{dB}{dt}$$

所以

$$\varepsilon_{ab} = -\varepsilon_{ba} = \frac{l}{2} \sqrt{R^2 - \left(\frac{l}{2} \right)^2} \frac{dB}{dt}$$

解二： 取回路 $aboa$ 为逆时针方向，则

$\vec{E}_{感}$与$\overline{oa}$、$\overline{bo}$处处垂直



$$\varepsilon_{ab}=\int_{\overline{ab}}\vec{E}_{感}\cdot d\vec{l}$$

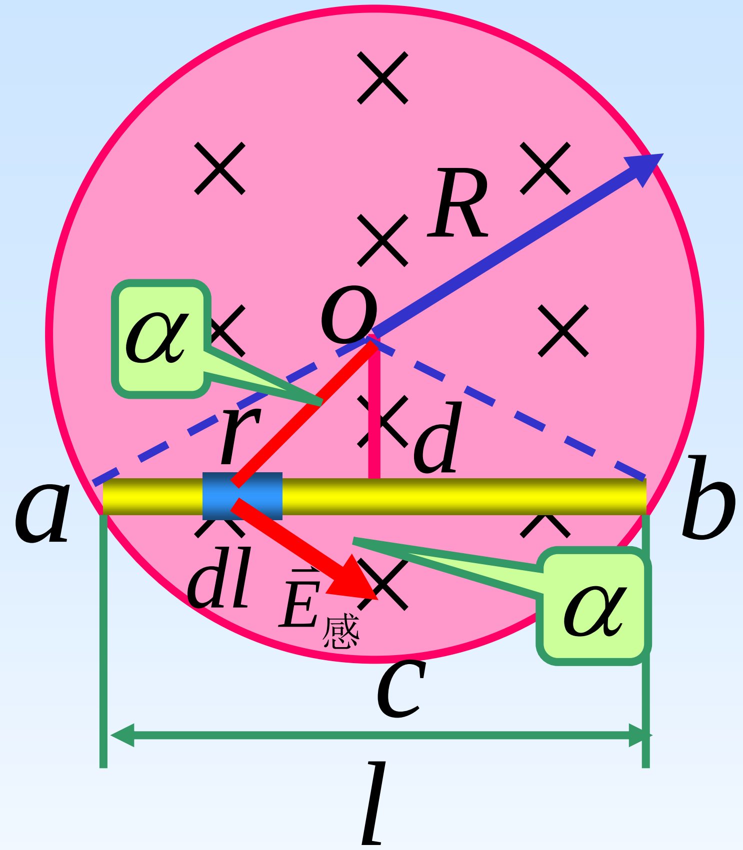
$$=\oint_{aboa}\vec{E}_{感}\cdot d\vec{l}-\int_{\overline{bo}}\vec{E}_{感}\cdot d\vec{l}-\int_{\overline{oa}}\vec{E}_{感}\cdot d\vec{l}$$

$$=-\iint_{S_{aboa}}\frac{d\vec{B}}{dt}\cdot d\vec{S}-0-0$$

$$=-\left(-S_{aboa}\cdot\frac{dB}{dt}\right)=\frac{l}{2}\sqrt{R^2-\left(\frac{l}{2}\right)^2}\frac{dB}{dt}$$

解三： 积分法：在棒上任取 $d\vec{l}$ ，由于

$$E_{感} = \frac{r}{2}\frac{dB}{dt}$$



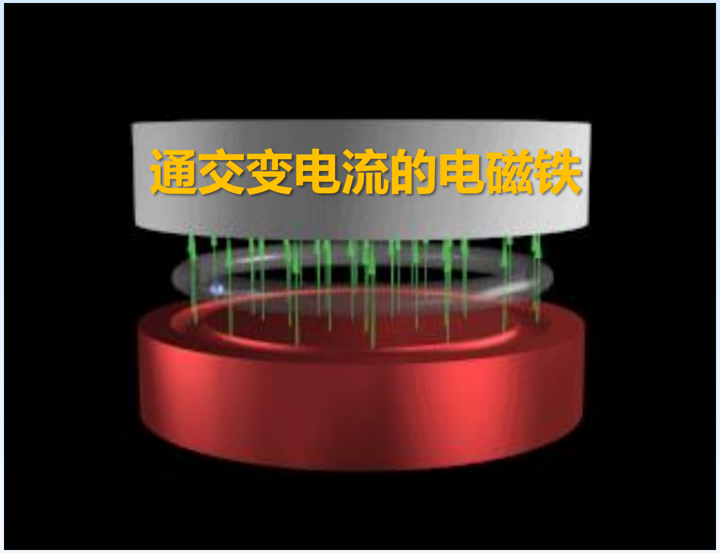
所以

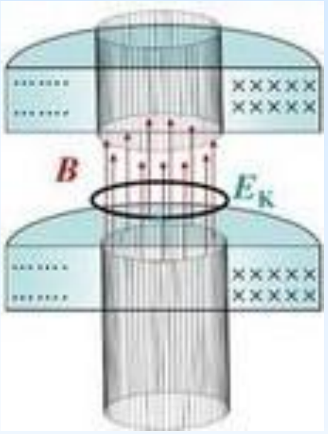
$$\varepsilon_{ab} = \int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_a^b \frac{r}{2}\frac{dB}{dt}\cos\alpha dl = \int_a^b \frac{r}{2}\frac{dB}{dt}\frac{d}{r}dl$$

$$= \frac{d}{2}\frac{dB}{dt}\int_a^b dl = \frac{d}{2}\frac{dB}{dt}l = \frac{l}{2}\sqrt{R^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2}\frac{dB}{dt}$$

三、感生电场的应用

1、电子感应加速器



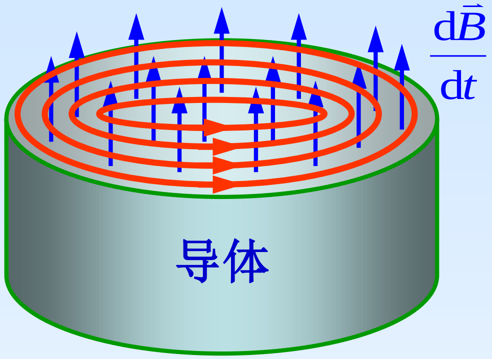


- 利用涡旋电场加速电子获得高能粒子的一种装置
- 洛仑兹力使电子沿圆周运动

徐建铭编著：《加速器原理》，科学出版社，北京，1981

2、涡电流

大块金属导体在变化磁场中，因电磁感应在内部产生感应电流，且电流自成闭合回路，故称涡电流.

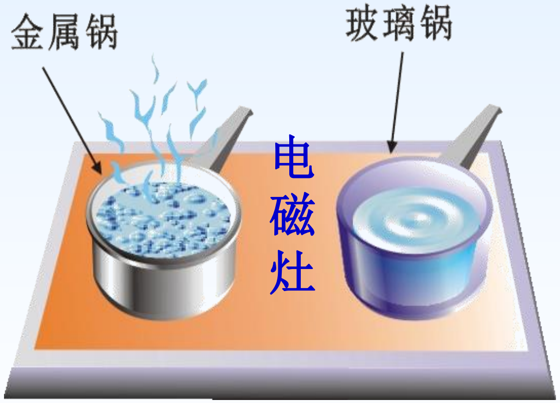


① 呈闭合涡旋状

② 金属电阻小电流大，能释放大量焦耳热.

✓ 涡电流的热效应

解释问题1:



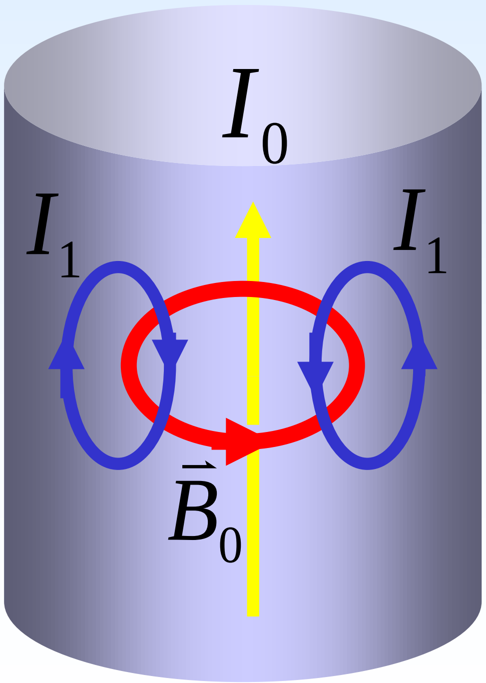
采用磁场感应涡流加热原理

- 交变电流通过线圈产生磁场，
- 磁场内的磁力线穿过锅底产生涡流，
- 令锅体自行发热，再加热锅内食品。

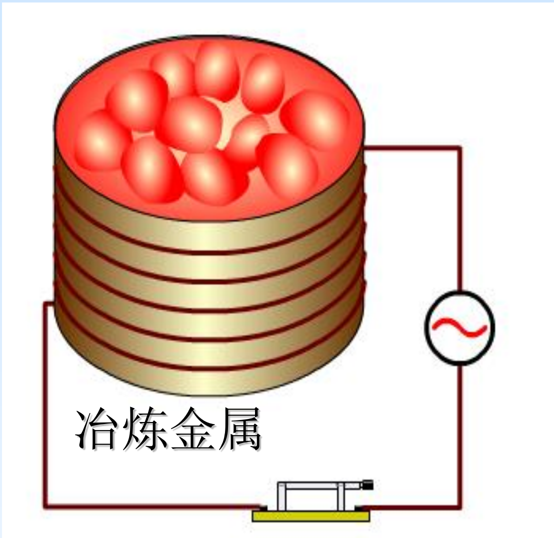
升温快、热效率高、无明火、无烟尘

趋肤效应

在交流电路中，随着频率的增大，由于涡电流的出现，会使电流趋向导线表面，这一现象称为趋肤效应。



- # 高频感应炉

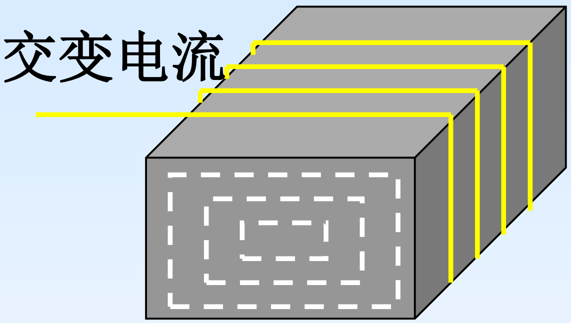


利用金属块中产生的涡流发出的热量冶炼金属

优点：加热速度快、温度均匀、易控制、材料不受污染等

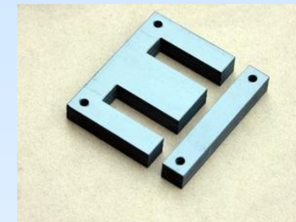
✓ 涡电流的危害：

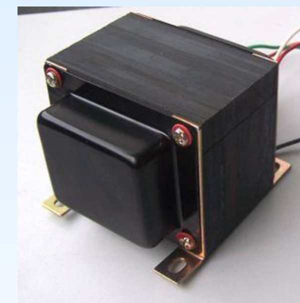
设备发热，消耗能量。



整块铁心

变压器铁芯





彼此绝缘的薄片

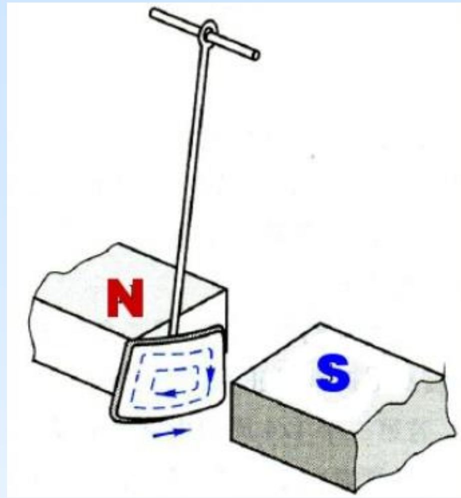
减小电流截面，减少涡流损耗！

趋利避害！

✓ 涡电流的机械效应

- 电磁阻尼

  (阻尼摆)



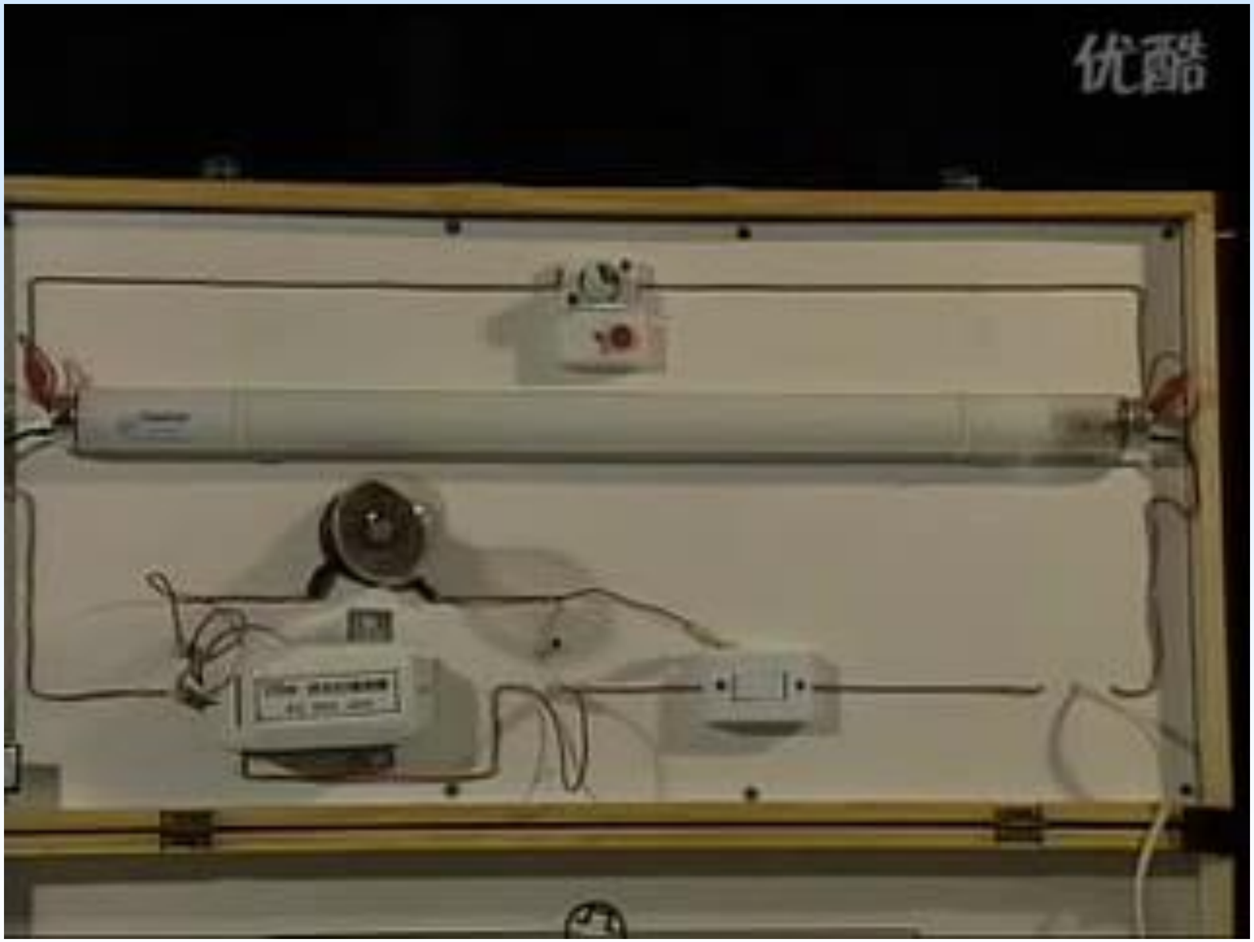
解释问题2:

✓ 仪表中的阻尼电键

✓ 电气火车的电磁制动器

✓ 磁浮列车制动(涡流制动)

引入新课



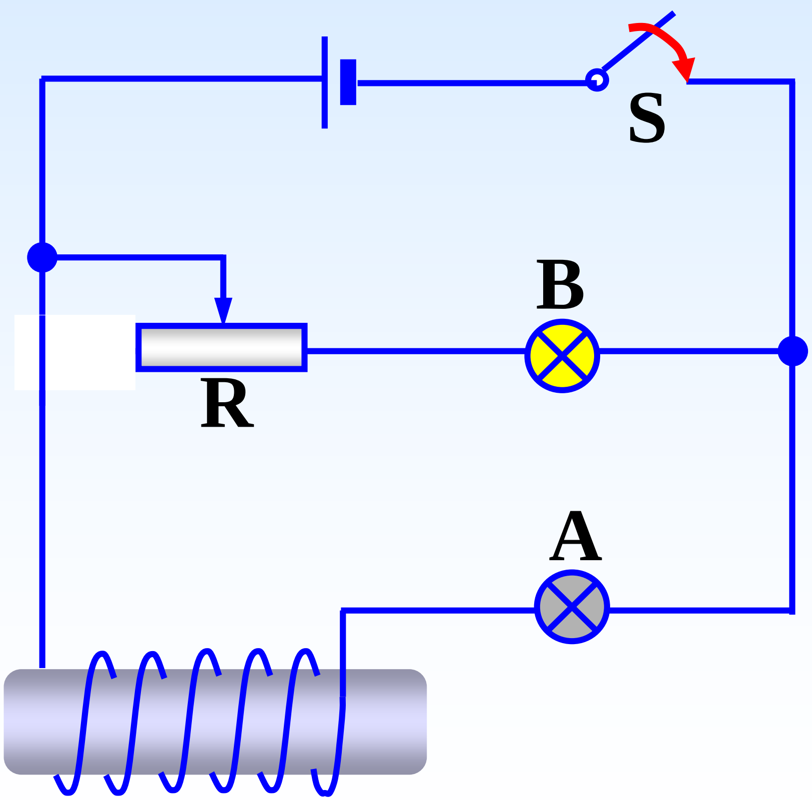
问题：为什么日光灯先闪一下后再点亮？

§9-4 自感应和互感应

一、自感应

1、自感现象

$$\mathcal{E}_i \longleftarrow \frac{dB}{dt} \longleftarrow \frac{dI}{dt}$$



●由于线圈**本身**的电流发生**变**化而产生的电磁**感**应现象。

●自感现象中产生的感应电动势，称为**自感电动势**。

2、自感电动势

空间无铁磁质： 回路形状、大小、位置和周围磁介质不变

（1）由毕奥——萨伐尔定律：

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Id\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$

I(t)➔ B(t) ➔ ψ(t)

$$\Psi_m \propto B \propto I$$

通过回路的全磁通与电流的关系：

$$\boxed{\Psi = LI}$$

***L*——自感系数（自感）：** 取决于线圈形状、大小、位置、匝数和周围磁介质极其分布,与电流无关。

***L*——是回路电磁惯性的量度**

反映线圈反抗电流变化的能力

（2）由法拉第电磁感应定律：

$$\varepsilon_L = -\frac{d\Psi}{dt} = -\frac{d(LI)}{dt} = -\left(L\frac{dI}{dt} + I\frac{dL}{dt}\right)$$

电流变化

回路变化

若L = 常数，即 $\frac{dL}{dt} = 0$

则有

$$\boxed{\varepsilon_L = -L\frac{dI}{dt}}$$

（3）“—”号的意义：

当$\dfrac{dI}{dt} > 0$时，$\varepsilon_L < 0$，即ε_L与I的方向相反；

当$\dfrac{dI}{dt} < 0$时，$\varepsilon_L > 0$，即ε_L与I的方向相同。

ε_L 总是阻碍回路本身电流变化，

且 L 越大，电流越不易改变。

（4）在无铁磁质情况下，当回路形状、大小、位置和周围磁介质种类极其分布都不变时，两式等价：

$$\Psi = LI \quad \longleftrightarrow \quad \varepsilon_L = -L\frac{dI}{dt}$$

$$\downarrow$$

L与$\dfrac{dI}{dt}, I$ 均无关。

（5）单位（SI）：

$$\text{亨利}(H):1H=1\frac{Wb}{A}=1\frac{V}{A/s}$$

$$1H=10^3 mH(\text{毫亨})=10^6\mu H(\text{微亨})$$

（6）自感的计算（步骤）

设线圈电流 *I* → 确定线圈内的磁场分布 → 求线圈的全磁通 → $L=\frac{\Psi}{I}$ → 计算 *L* 的方法之一

例、 计算长直螺线管的自感系数。设螺线管长为 l，截面积为 S，单位 长度上的匝数为 n。管内充满磁导率为μ的均匀介质。

解： 设长直螺线管内通有电流 I，管内磁场为

$$\boxed{B = \mu n I}$$

通过螺线管的全磁通为

$$\boxed{\Psi = NBS = nl \cdot \mu n I \cdot S = \mu n^2 V I}$$

则长直螺线管的自感系数为 $\boxed{L = \dfrac{\Psi}{I} = \mu n^2 V}$

提高 L 的有效途径: $\boxed{L \uparrow, n \uparrow, \mu \uparrow}$

例、 一截面积为长方形的环式螺线管。其尺寸如图所示，共有 N 匝，求此螺线管的自感系数。

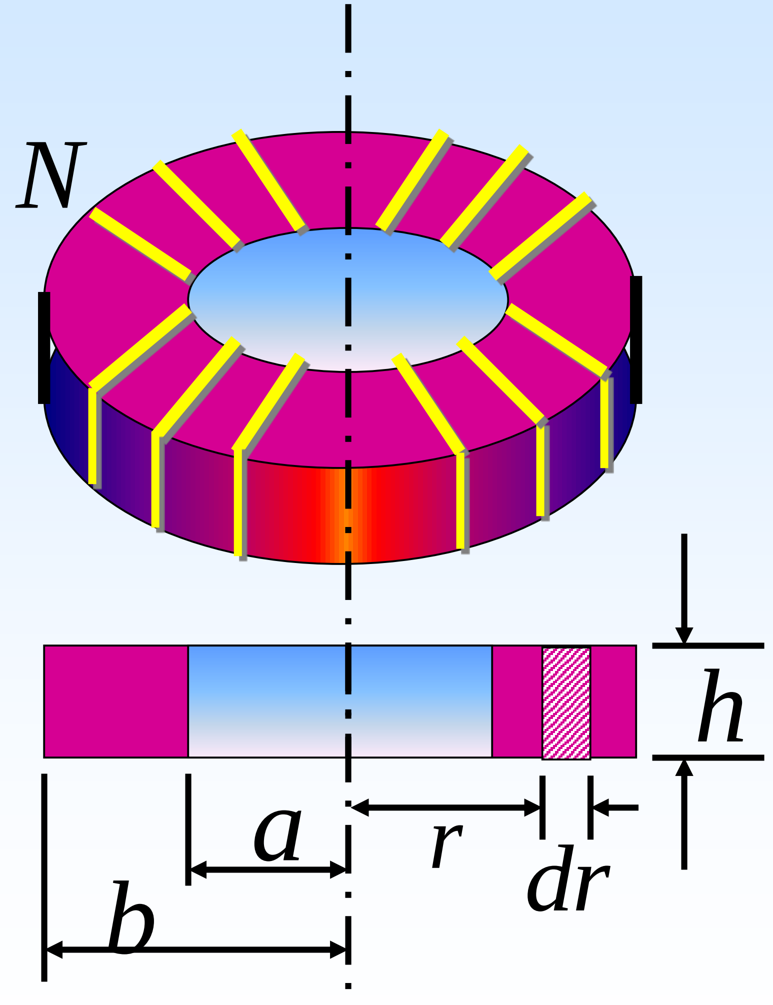
解： 由安培环路定律得

$$\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l} = \sum I$$

$$H\cdot 2\pi r = NI$$

$$H = \frac{NI}{2\pi r}$$

$$B = \mu_0 H = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r}$$

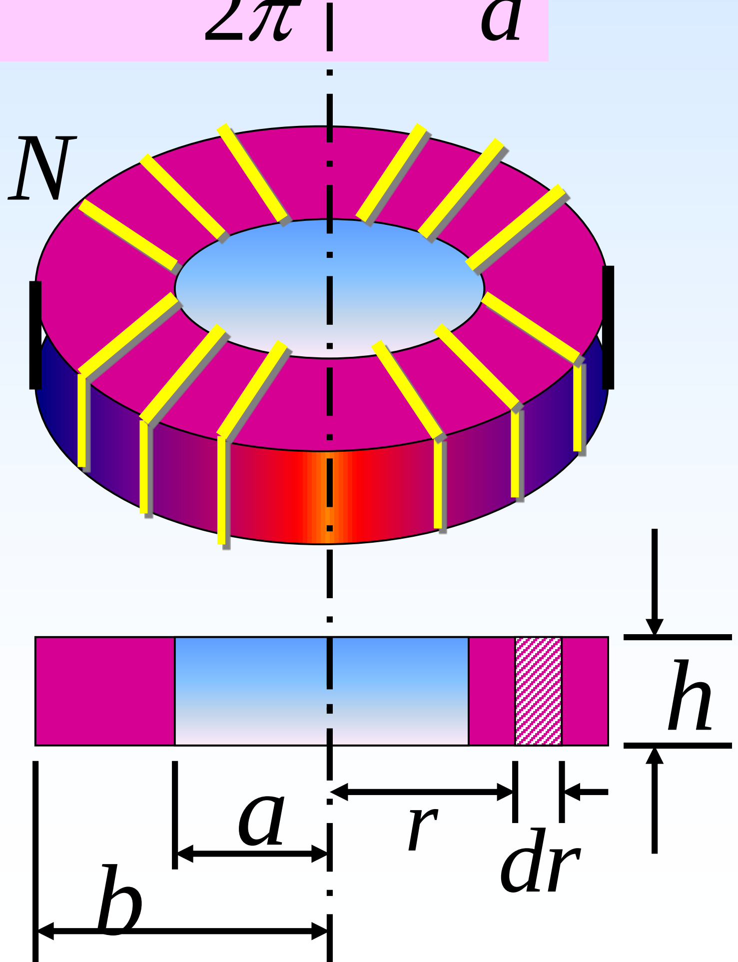


穿过螺线管截面的磁通量为

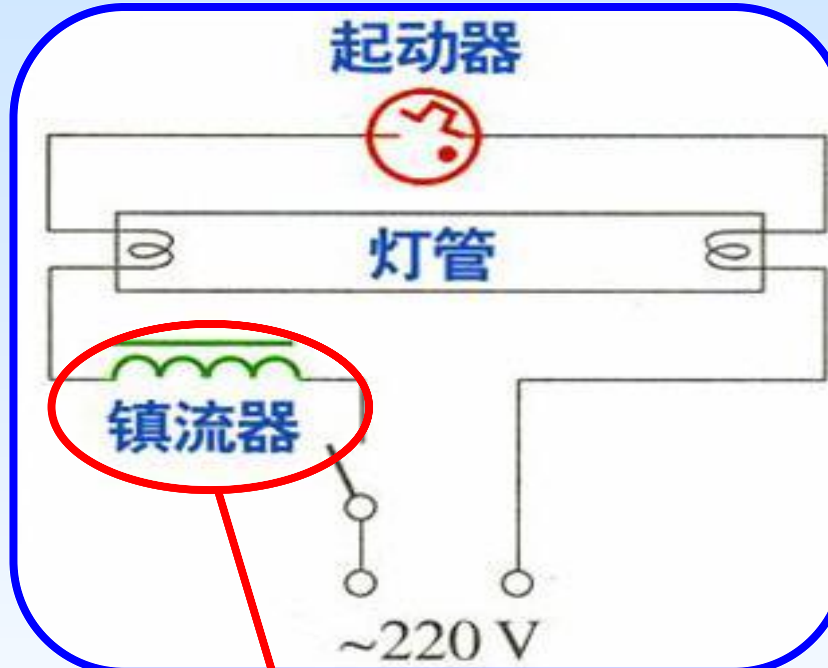
$$\Phi = \int_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = \int_a^b \frac{\mu_0 NI}{2\pi r}\cdot h dr = \frac{\mu_0 NIh}{2\pi}\ln\frac{b}{a}$$

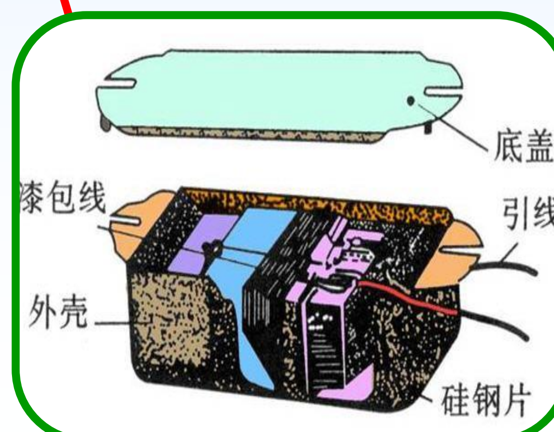
所以有

$$L = \frac{N\Phi}{I} = \frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi}\ln\frac{b}{a}$$



3、自感现象的应用

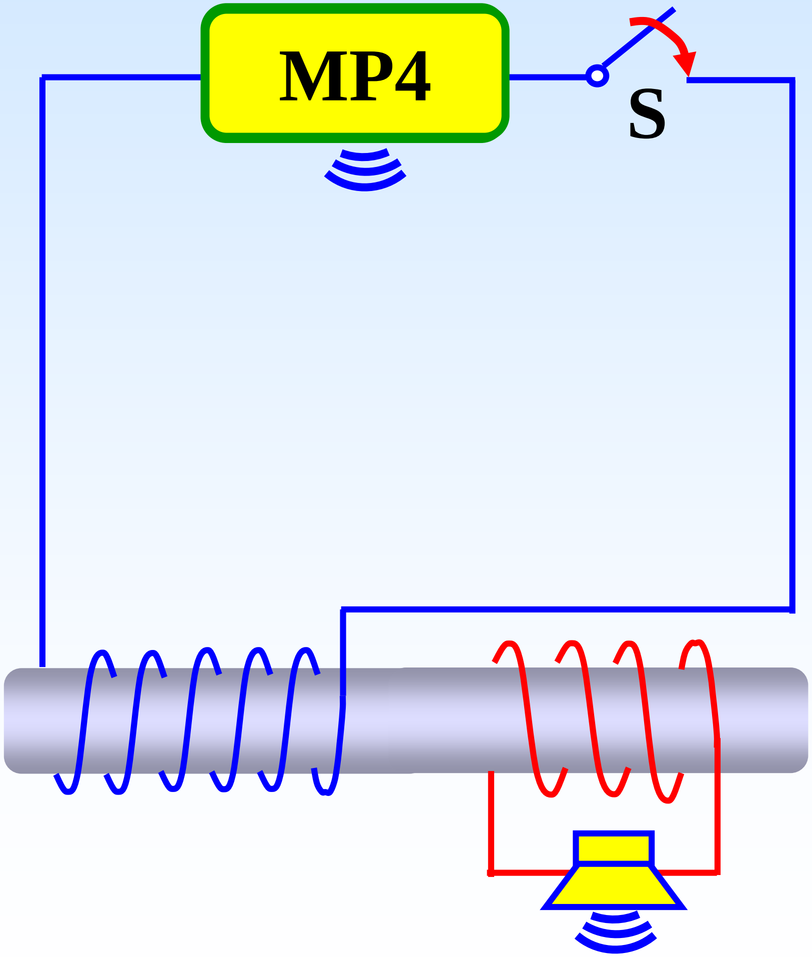




镇流器在启动时产生瞬时高压，
在正常工作时起降压限流的作用。

二、互感应

1、互感现象



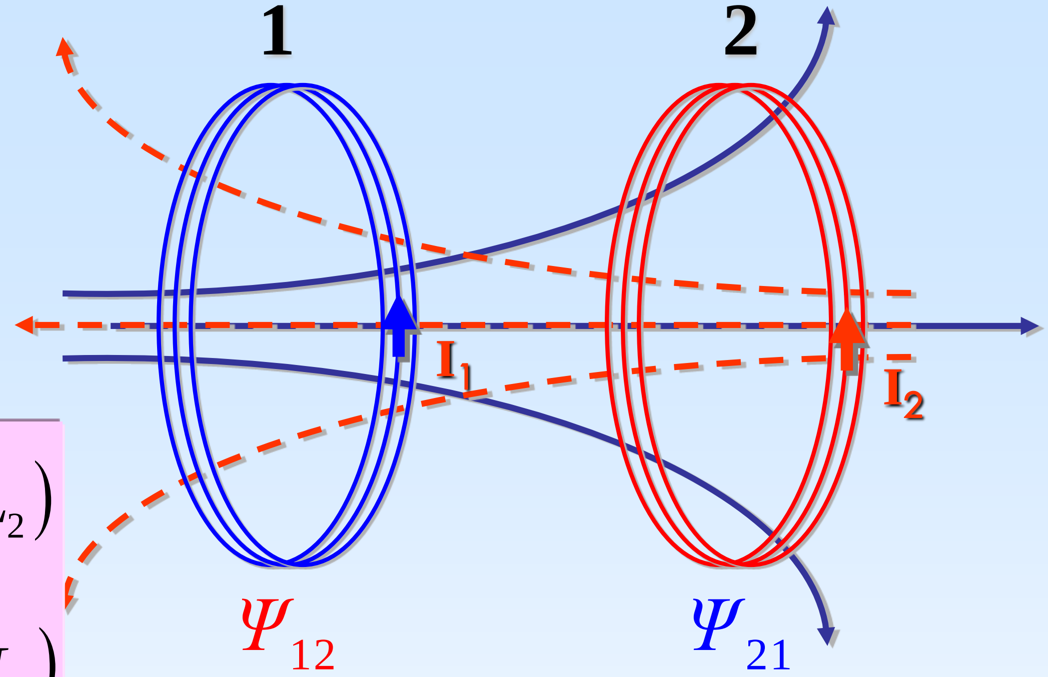
● 当一个线圈中电流**变化**时，在另一个邻近线圈中产生**感应电动势**的现象。

● 互感现象中产生的感应电动势，称为**互感电动势**。

2. 互感电动势

$$I_1(t) \rightarrow \vec{B}_1(t) \rightarrow \Psi_{21}(t)$$

$$I_2(t) \rightarrow \vec{B}_2(t) \rightarrow \Psi_{12}(t)$$



$$\frac{dI_1}{dt}\left(\text{回路}L_1\right) \rightarrow \frac{d\Psi_{21}}{dt} \rightarrow \varepsilon_{21}\left(\text{回路}L_2\right)$$

$$\frac{dI_2}{dt}\left(\text{回路}L_2\right) \rightarrow \frac{d\Psi_{12}}{dt} \rightarrow \varepsilon_{12}\left(\text{回路}L_1\right)$$

（1）回路的几何形状、相对位置及周围介质的磁导率分布不变时,由毕奥——萨伐尔定律:

$$\Psi_{21} = N_2\Phi_{21} = M_{21}I_1$$

$$\Psi_{12} = N_1\Phi_{12} = M_{12}I_2$$

$$M_{12} = M_{21} = M$$

M 称为互感（系数）

M与两个耦合回路的形状、大小、匝数、相对位置及周围磁介质的磁导率有关。

（2）由法拉第电磁感应定律：

$$\varepsilon_{21} = -\frac{d\Psi_{21}}{dt} = -\frac{d\left(MI_1\right)}{dt} = -\left(M\frac{dI_1}{dt} + I_1\frac{dM}{dt}\right)$$

$$\varepsilon_{12} = -\frac{d\Psi_{12}}{dt} = -\frac{d\left(MI_2\right)}{dt} = -\left(M\frac{dI_2}{dt} + I_2\frac{dM}{dt}\right)$$

若M = 常数时，即$\frac{dM}{dt} = 0$,则有

$$\varepsilon_{21} = -M\frac{dI_1}{dt}, \varepsilon_{12} = -M\frac{dI_2}{dt}$$

（3）当 $\frac{dI_1}{dt}\left(\frac{dI_2}{dt}\right)=$ 常数时，$M\uparrow$，则 $\varepsilon_{21}(\varepsilon_{12})\uparrow$。

M是表明两耦合回路互感强度的物理量

（4）当 M = 常数，及无铁磁质时，两式等价

$$\Psi_{21}=N_2\Phi_{21}=M_{21}I_1$$
$$\Psi_{12}=N_1\Phi_{12}=M_{12}I_2$$

$$\varepsilon_{21}=-M\frac{dI_1}{dt}$$
$$\varepsilon_{12}=-M\frac{dI_2}{dt}$$

M与 $\frac{dI}{dt}$，I均内无关。

（5）单位（SI）：

亨利(H)：$1H=1\frac{Wb}{A}=1\frac{V}{A/s}$

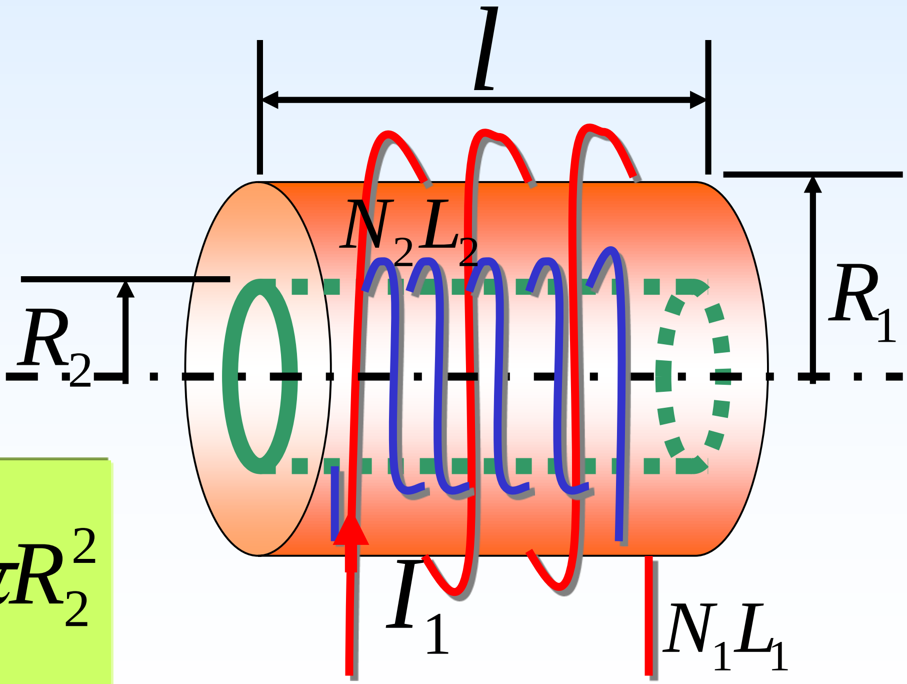
例、 两个长度均为 l 的共轴空心长直螺线管，外管半径 R_1，匝数 N_1，自感系数 L_1；内管半径 R_2，匝数 N_2，自感系数 L_2。求它们的互感系数 M 及与 L_1，L_2 的关系。

解： 设外管通以电流 I_1，则管内磁感应强度为

$$\boxed{B_1 = \mu_0 n_1 I_1 = \mu_0 \frac{N_1 I_1}{l}}$$

穿过内管的全磁通为

$$\boxed{\Psi_{21} = N_2 B_1 S_2 = \frac{\mu_0 N_1 N_2 I_1}{l} \pi R_2^2}$$



所以

$$M=\frac{\Psi_{21}}{I_1}=\frac{\mu_0 N_1 N_2}{l}\pi R_2^2$$

由于

$$L_1=\mu_0 n_1^{\,2} V_1=\mu_0\frac{N_1^2}{l}\pi R_1^2$$

$$L_2=\mu_0 n_2^{\,2} V_2=\mu_0\frac{N_2^2}{l}\pi R_2^2$$

所以

$$M=\frac{R_2}{R_1}\sqrt{L_1 L_2}$$

一般情况：
$$\boxed{M = K\sqrt{L_1 L_2}}$$

K——耦合系数

（1）当$R_1 = R_2$，且无磁漏时，$K = 1$，$M = \sqrt{L_1 L_2}$；

（2）当$R_1 = R_2$，且有磁漏时，$K < 1$，$M < \sqrt{L_1 L_2}$

例、 如图，自感分别为 L_1 和 L_2 ，互感为 M 的两个线圈 1 和 2 串联。如果两线圈的磁通互相加强，称为顺接；如果两线圈的磁通互相削弱，称为反接。计算在这两种接法下两线圈的等效总自感 L。

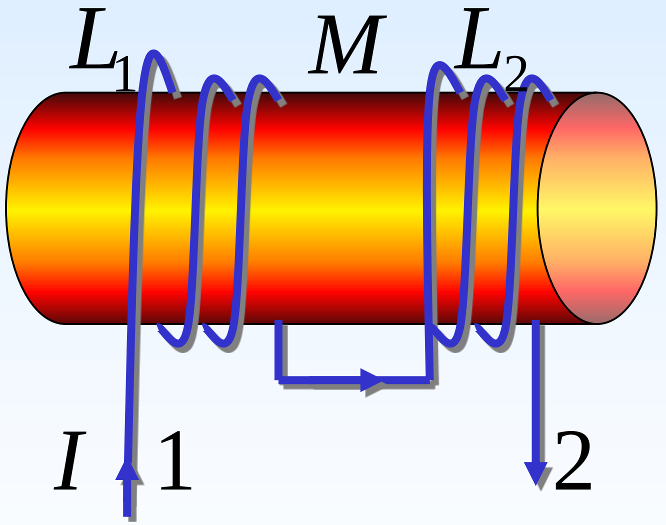
解：（一）顺接：

线圈1和线圈2中的互感电动势方向相同：

$$\varepsilon_1 = -L_1 \frac{dI}{dt} - M \frac{dI}{dt}$$

$$\varepsilon_2 = -L_2 \frac{dI}{dt} - M \frac{dI}{dt}$$

顺接



顺接串联时：

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = -\left(L_1 + L_2 + 2M\right)\frac{dI}{dt}$$

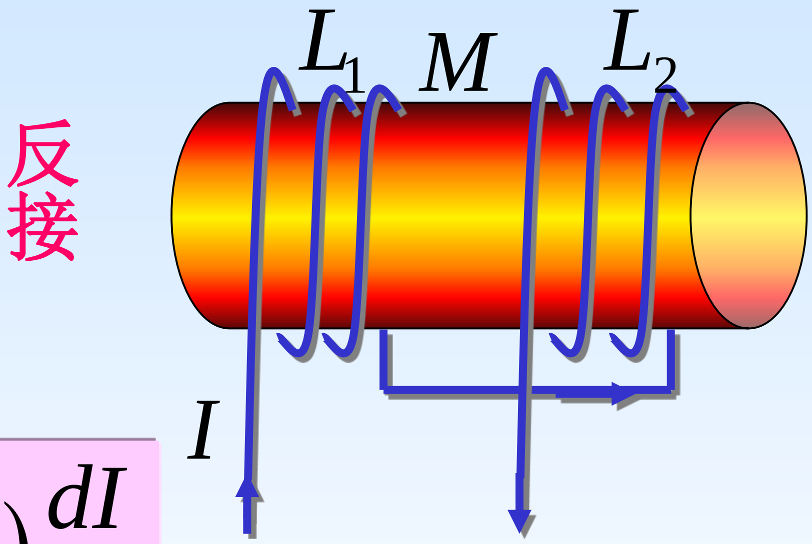
所以有

$$L = -\frac{\varepsilon}{dI/dt} = L_1 + L_2 + 2M$$

（二）反接：自感电动势与互感电动势方向相反：

$$\varepsilon_1 = -L_1 \frac{dI}{dt} + M \frac{dI}{dt}$$

$$\varepsilon_2 = -L_2 \frac{dI}{dt} + M \frac{dI}{dt}$$



$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = -\left(L_1 + L_2 - 2M\right)\frac{dI}{dt}$$

所以有 $$L = -\frac{\varepsilon}{dI/dt} = L_1 + L_2 - 2M$$

当两线圈无漏磁耦合时，且 $L_1 = L_2 = L_0$ ，则

$$M = \sqrt{L_1 L_2} = L_0$$

顺接：

$$L = 4L_0$$

反接：

$$L = 0$$

或解：顺接：

$$\Psi_1 = L_1 I, \Psi_{12} = MI$$

$$\Psi_2 = L_2 I, \Psi_{21} = MI$$

总磁通链为

$$\Psi = \Psi_1 + \Psi_2 + \Psi_{12} + \Psi_{21} = \left(L_1 + L_2 + 2M\right) I$$

所以有

$$L = \frac{\Psi}{I} = L_1 + L_2 + 2M$$

同理：反接：

$$L = L_1 + L_2 - 2M$$