4、简谐振动的振幅、频率、相位求解

a) 由系统动力学方程 $\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x=0$ 求解圆频率ω

b)由初始条件求解振幅和初位相

设 $t=0$时，振动位移：$x=x_0$ 振动速度：$v=v_0$

$$\begin{cases} x=A\cos(\omega t+\varphi_0) \\ v=-\omega A\sin(\omega t+\varphi_0) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_0=A\cos\varphi_0 \\ v_0=-\omega A\sin\varphi_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_0=A\cos\varphi_0 \\ -\frac{v_0}{\omega}=A\sin\varphi_0 \end{cases}$$

$$x_0^2+\frac{v_0^2}{\omega^2}=A^2(\sin\varphi_0+\cos\varphi_0)=A^2$$

$$A=\sqrt{x_0^{\ 2}+\left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2} \qquad \mathrm{tg}\phi_0=-\frac{v_0}{\omega x_0}$$

例题、 一质点沿x轴作简谐振动，振幅为0.12m，周期为2s. 当t=0时，位移为0.06m，且向x轴正方向运动. 求(1)振动方程；(2) t=0.5s时，质点的位置、速度和加速度；（3）若在某时刻质点位于x=-0.06m，且向x轴负方向运动，求从该位置回到平衡位置所需最短时间

解： 设简谐振动表达式为 $X = A\cos(\omega t+\varphi_0)$

已知： A=0.12m， T=2s， $\omega=\frac{2\pi}{T}=\pi\ s^{-1}$

$X=0.12\cos(\pi t+\varphi_0)$

初始条件： $t=0$ 时， $X_0=0.06\text{m}$， $v_0>0$

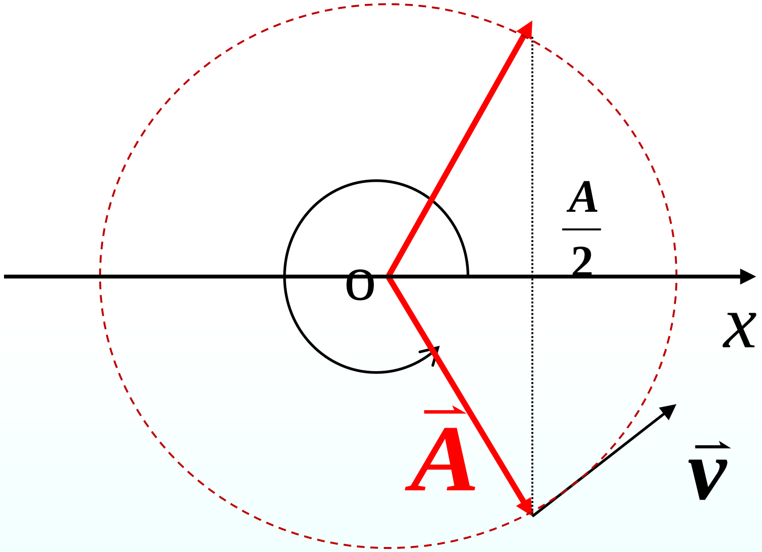
故 $0.06=0.12\cos\varphi_0$ $\quad \frac{1}{2}=\cos\varphi_0 \rightarrow \varphi_0=\pm\frac{\pi}{3}$

又 $v_0 = -\omega A \sin\varphi_0 > 0$ $\sin\varphi_0 < 0$ $\therefore \varphi_0 = -\dfrac{\pi}{3}$

振动方程：$x = 0.12\cos(\pi t - \dfrac{\pi}{3})$

旋转矢量法

$$\therefore \varphi_0 = -\frac{\pi}{3}$$



（2）

$$v\big|_{t=0.5} = \left.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0.5} = -0.12\pi\sin(\pi t - \frac{\pi}{3})\Big|_{t=0.5} = -0.189\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

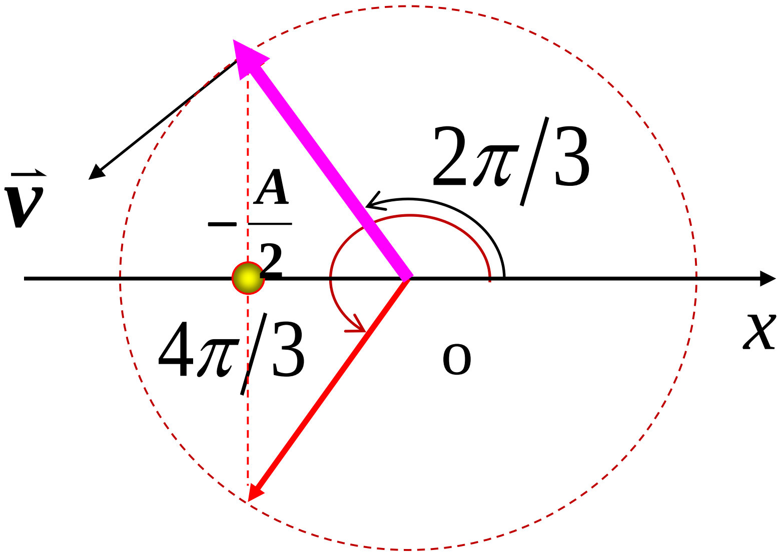
$$a\big|_{t=0.5} = \left.\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0.5} = -0.12\pi^2\cos(\pi t - \frac{\pi}{3})\Big|_{t=0.5} = -0.103\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$$

(3) 旋转矢量法

在某一时刻 t_1， $x = -0.06$

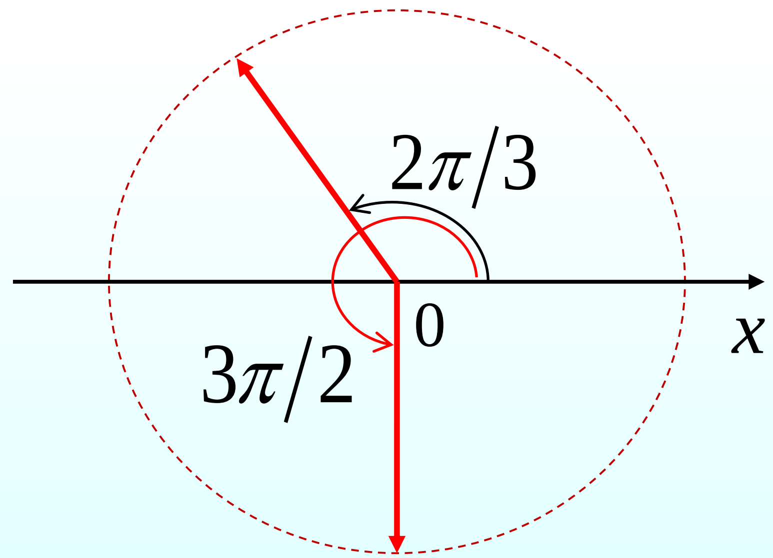
$$\varphi = \frac{2\pi}{3}$$

$$\pi t_1 - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} \qquad t_1 = 1\mathrm{s}$$



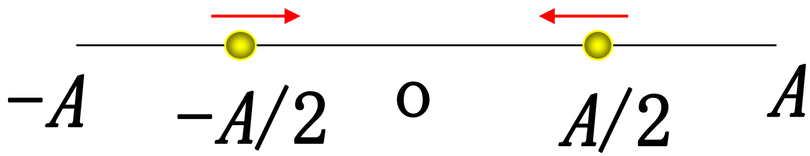
设平衡位置时刻 t_2

$$\pi t_2 - \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi}{2} \qquad t_2 = \frac{11}{6}\mathrm{s}$$

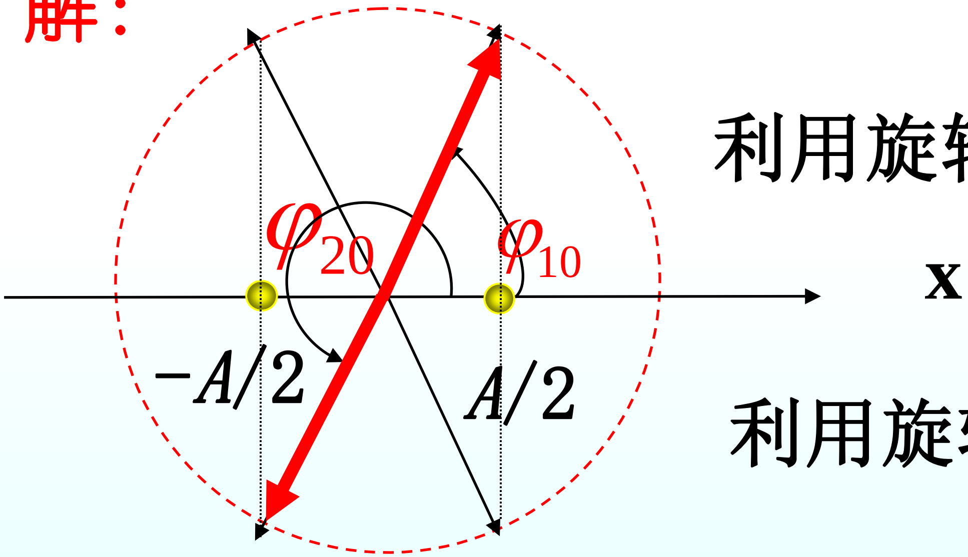


$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{11}{6} - 1 = \frac{5}{6}(\mathrm{s})$$

例题、 两质点作同方向、同频率的简谐振动，振幅相等. 当质点1在 $X_1=A/2$ 处，且向左运动时，另一个质点2在 $X_2= -A/2$ 处，且向右运动. 求这两个质点的相位差.



解:

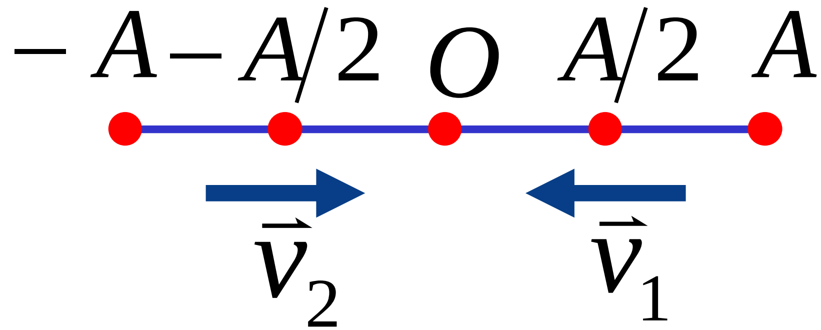


利用旋转矢量法得 $\varphi_{10}=\dfrac{\pi}{3}$

利用旋转矢量法得 $\varphi_{20}=\dfrac{4\pi}{3}$

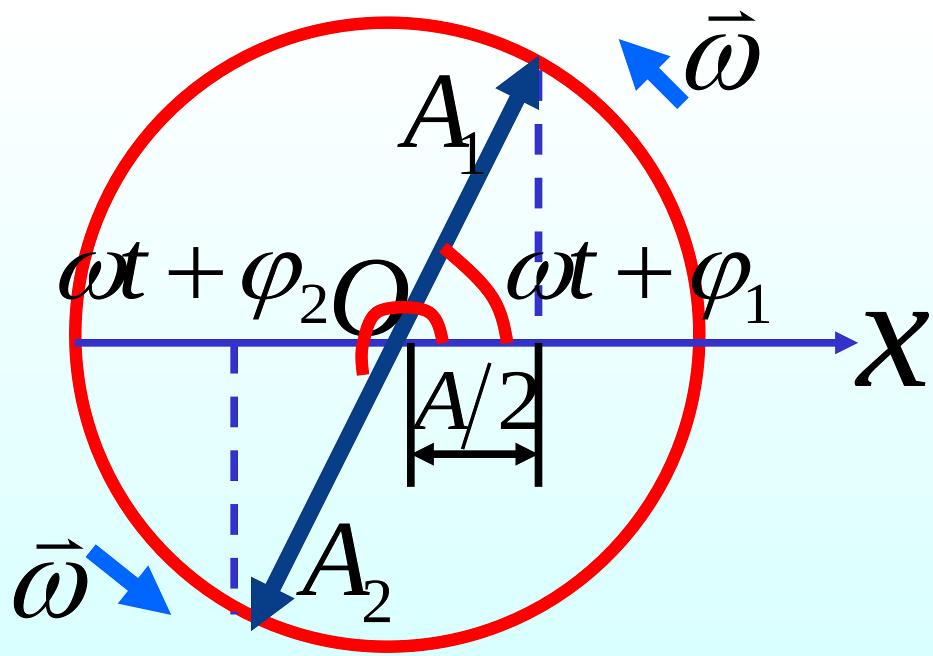
$$\therefore \Delta\varphi_0=\varphi_{20}-\varphi_{10}=\frac{4\pi}{3}-\frac{\pi}{3}=\pi$$

解：设



$$x_1 = A\cos(\omega t + \varphi_1)$$

$$x_2 = A\cos(\omega t + \varphi_2)$$

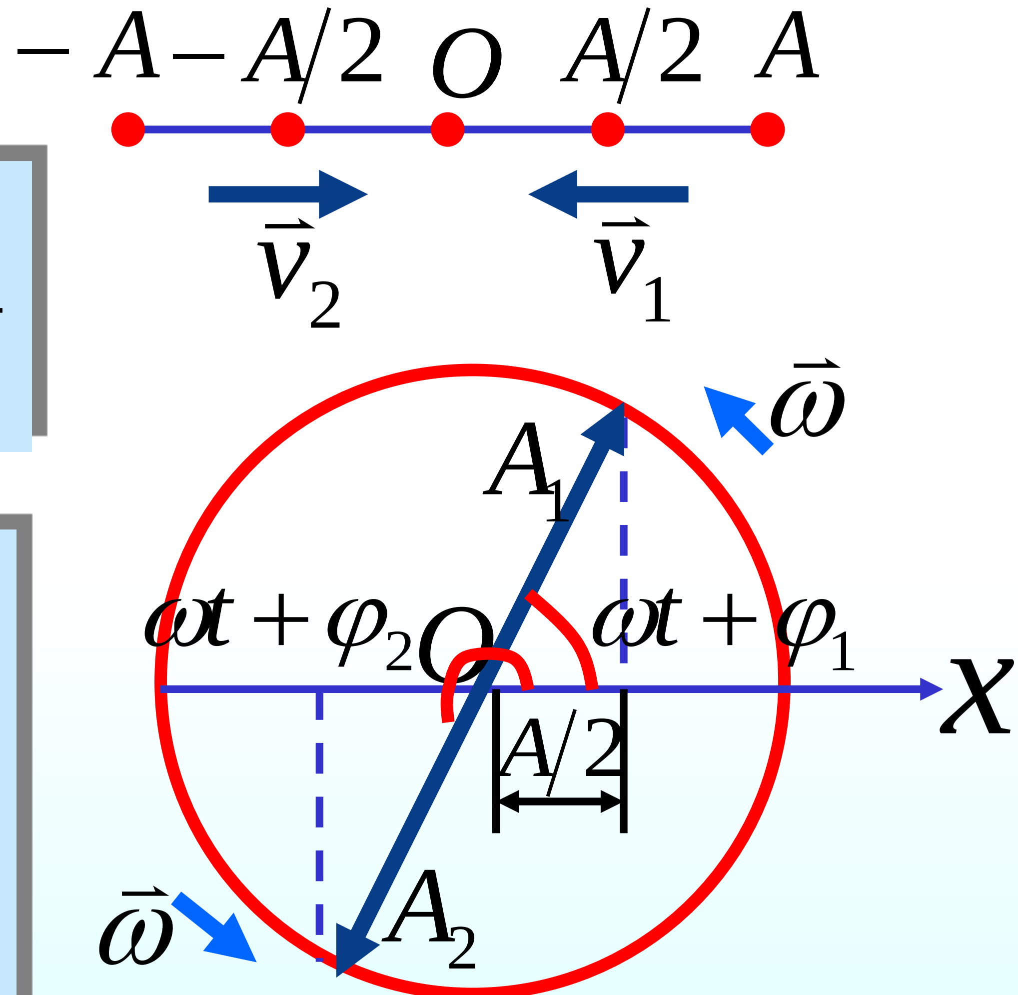


对质点1：

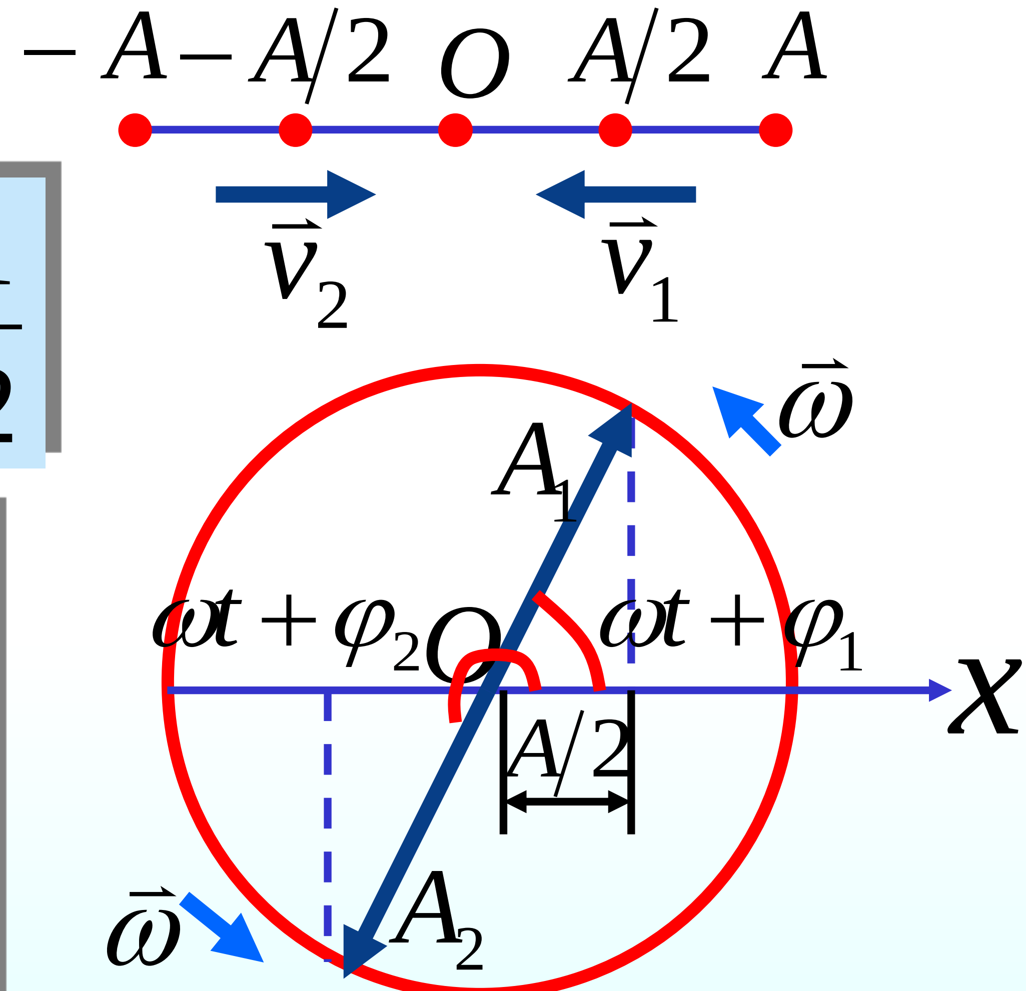
$$\cos(\omega t+\varphi_1)=\frac{1}{2}$$

由图取$\omega t+\varphi_1=\dfrac{\pi}{3}$

$\left(舍去\dfrac{5\pi}{3}\right)$



对质点2：



$$\cos(\omega t+\varphi_2)=-\frac{1}{2}$$

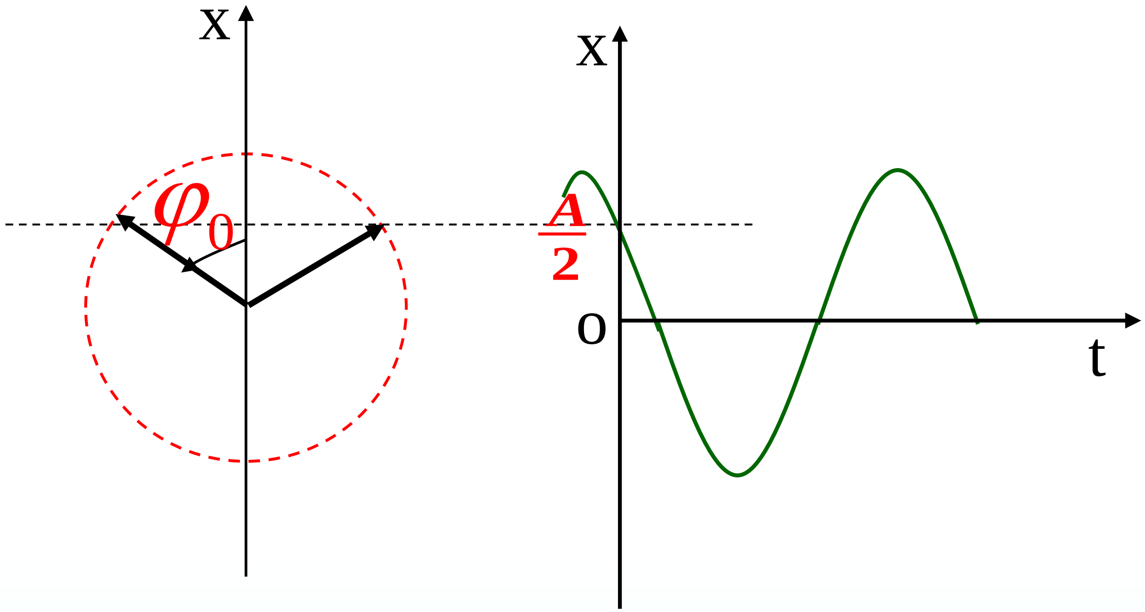
由图取 $\omega t+\varphi_1=\dfrac{4\pi}{3}$

$\left(舍去\dfrac{2\pi}{3}\right)$

所以 $\Delta\varphi=(\omega t+\varphi_2)-(\omega t+\varphi_1)=\dfrac{4\pi}{3}-\dfrac{\pi}{3}=\pi$

已知如图振动曲线 求：初相位

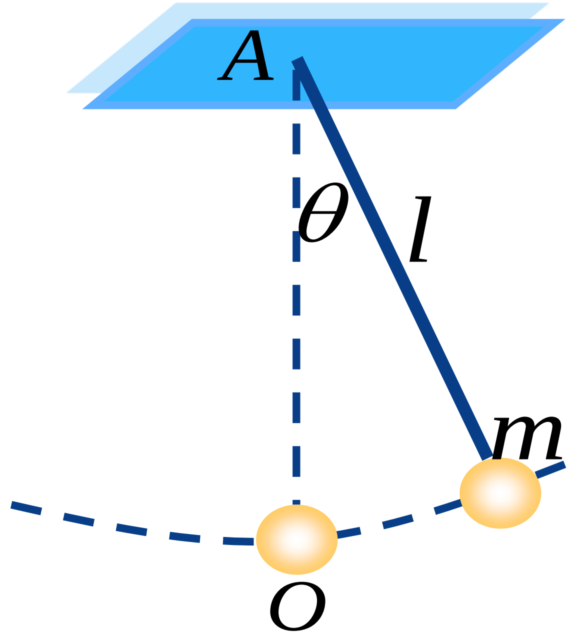
解：

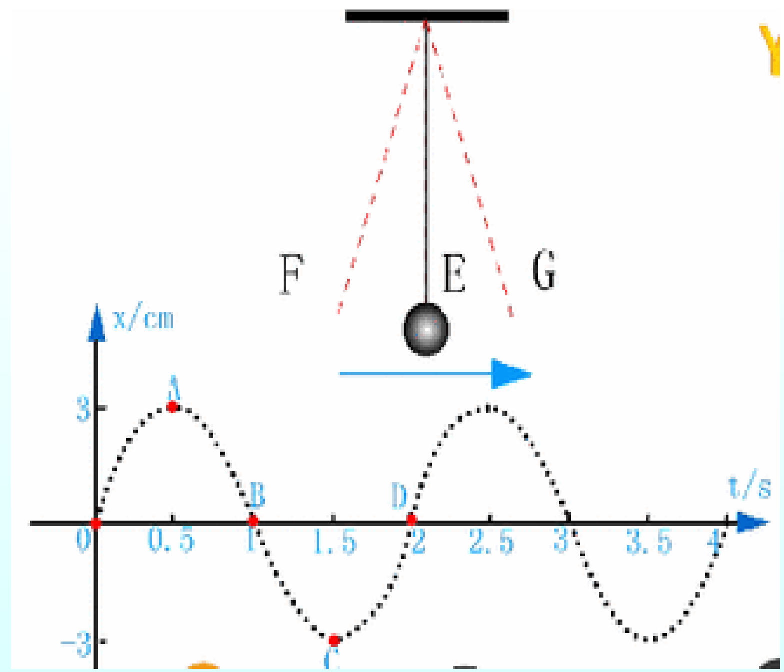


利用旋转矢量法得 $\varphi_0 = \frac{\pi}{3}$

单摆

如图，细线一端固定在点 *A*，另一端悬挂一体积很小，质量为 *m* 的重物，细线的质量和伸长可忽略不计。位置 *O* 为平衡位置，若把重物从平衡位置略为移开后放手，重物就在平衡位置附近往复运动。这一振动系统叫做**单摆**。通常把重物叫做**摆锤**，细线叫做**摆线**。





解：

设t：θ，规定$\theta\rangle 0$，右方；

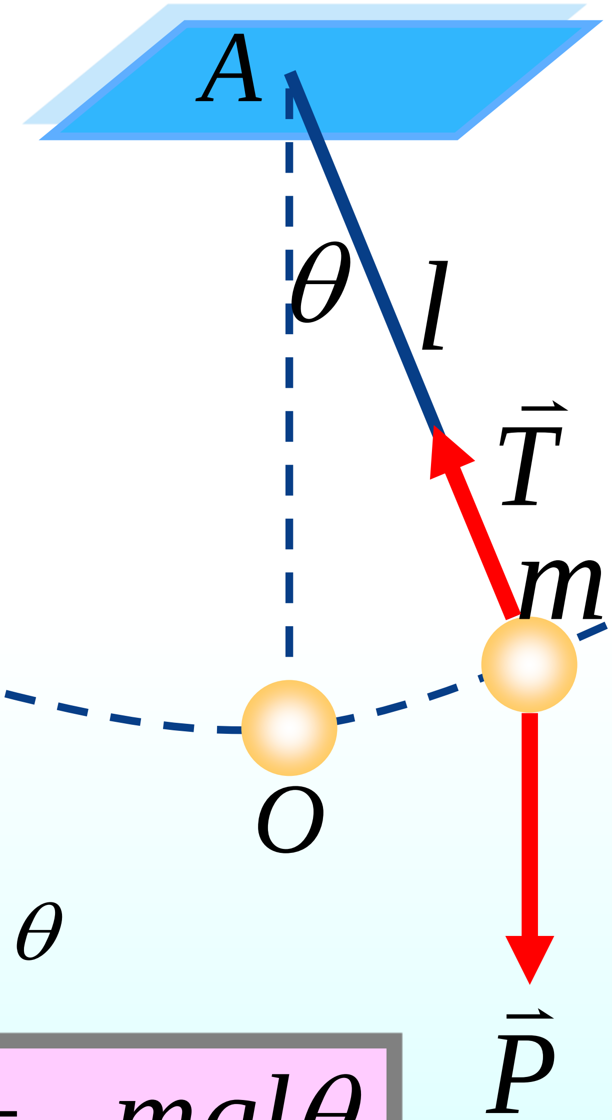
$\theta\langle 0$，左方

重力对 **A** 点的力矩为

$$\boxed{M=-mgl\sin\theta}$$

当θ很小时$\left(\langle 5^{0}\right)$，　$\sin\theta\approx\theta$

则摆锤受到的力矩为 $\boxed{M=-mgl\theta}$



由转动定律 $$M=J\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

得 $$\frac{d^2\theta}{dt^2}=-\frac{mgl}{J}\theta$$

考虑到 $$J=ml^2$$

故有 $$\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{g}{l}\theta=0$$

令 $$\omega^2=\frac{g}{l}$$

即 $$\frac{d^2\theta}{dt^2}+\omega^2\theta=0$$

得单摆的角频率和周期分别为

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

振动方程的解为

$$\theta = \theta_{\max}\cos\left(\omega t + \varphi\right)$$

角速度为

$$\Omega = \frac{d\theta}{dt} = -A\omega\sin\left(\omega t + \varphi\right)$$

由初始条件

$$\theta\Big|_{t=0} = \theta_0, \Omega = \frac{d\theta}{dt}\Big|_{t=0} = \Omega_0$$

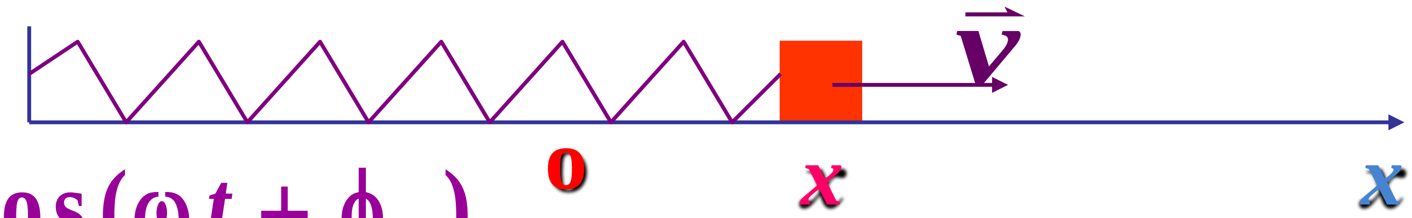
得振幅和初位相分别为

$$\theta_{\max} = \sqrt{\theta_0^2 + \frac{\Omega_0^2}{\omega^2}} \qquad \varphi = arctg\left(-\frac{\Omega_0}{\theta_0 \omega}\right)$$

应用：已知 l，ω，测 g 。

六. 简谐振动的能量

1、振动系统的能量



$$x = A\cos(\omega t + \phi_0)$$

$$v = -\omega A\sin(\omega t + \phi_0)$$

振子动能：$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \varphi_0)$

振子势能：$E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t + \varphi_0)$

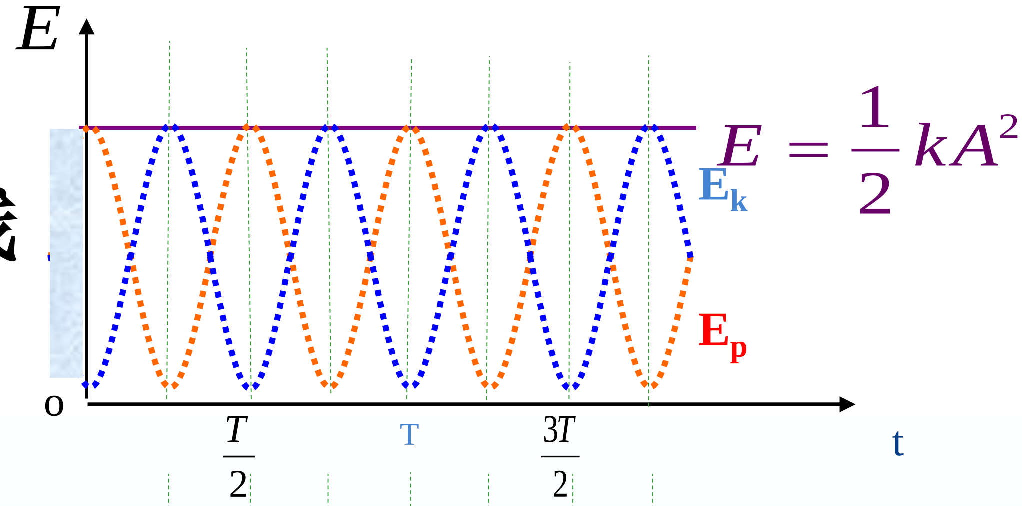
$$m\omega^2 = k$$

则总能量 $E = E_k + E_p = \frac{1}{2}kA^2$

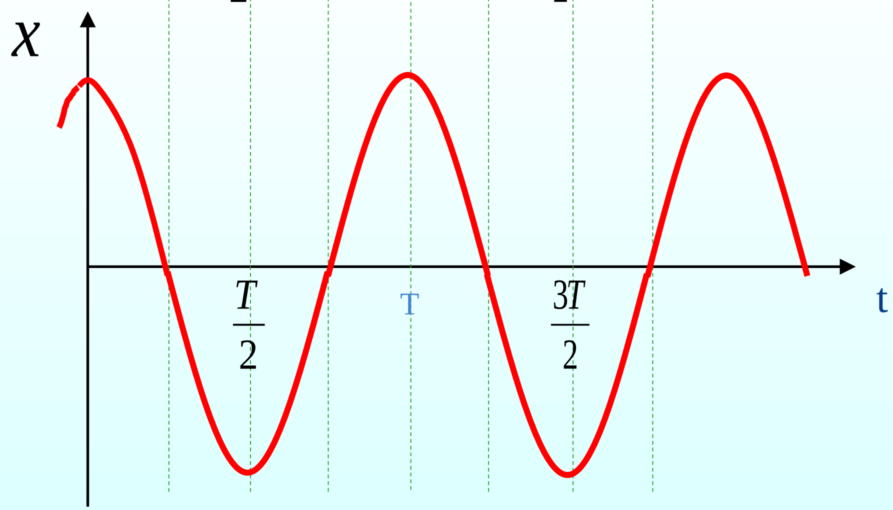
系统的总能量 $E \propto A^2$

（这一结论对于任何简谐系统都成立）

$E_k \sim t, E_p \sim t$ 曲线



振动曲线 $x \sim t$



结论：

（1） 振子在振动过程中，动能和势能分别随时间变化，但任一时刻总机械能保持不变。

（2） 动能和势能的变化频率是弹簧振子振动频率的两倍。

（3）频率一定时，谐振动的总能量与振幅的平方成正比。（适合于任何谐振系统）

2、平均值

(1) 振动位移的平均值：

$$x = A\cos\omega t$$

$$\bar{x} = \frac{1}{T}\int_0^T A\cos\omega t\,\mathrm{d}t = \frac{A}{T}\frac{1}{\omega}\sin\omega t\Big|_0^T = 0$$

(2) 谐振动势能的平均值：

$$\overline{E}_p = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{2}kA^2\cos^2\omega t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}kA^2 = \frac{1}{2}E$$

(3) 谐振动动能的平均值：

$$\overline{E}_k = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t)\mathrm{d}t = \frac{1}{4}kA^2 = \frac{1}{2}E$$

结论：平均意义上说，简谐振动系统的能量中一半是动能，另一半是势能。

例、当简谐振动的位移为振幅的一半时，其动能和势能各占总能量的多少？物体在什么位置时其动能和势能各占总能量的一半？

解： $E = E_p + E_k = \frac{1}{2}kA^2$

当$x = A/2$时： $E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}k\left(\frac{A}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}E$

$$E_k = E - E_p = \frac{3}{4}E$$

$$\frac{1}{2}kx_0^{\ 2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}kA^2$$

$$x_0 = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}A = \pm 0.707A$$

例题　一劲度系数为 k 的轻弹簧，在水平面作振幅为 A 的谐振动时，有一粘土（质量为 m，从高度 h 自由下落），正好落在弹簧所系的质量为 M 的物体上，求

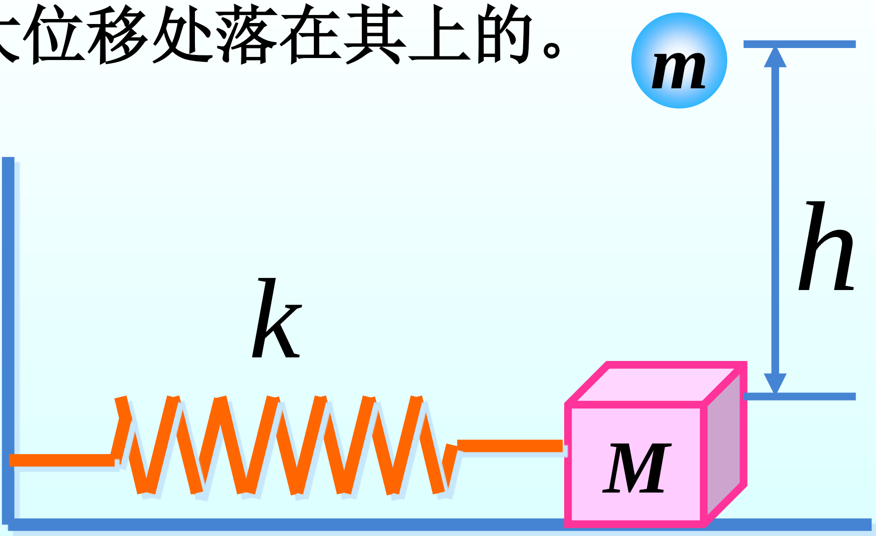
（1）振动周期有何变化？

（2）振幅有何变化？

设:

（a）粘土是在物体通过平衡位置时落在其上的；

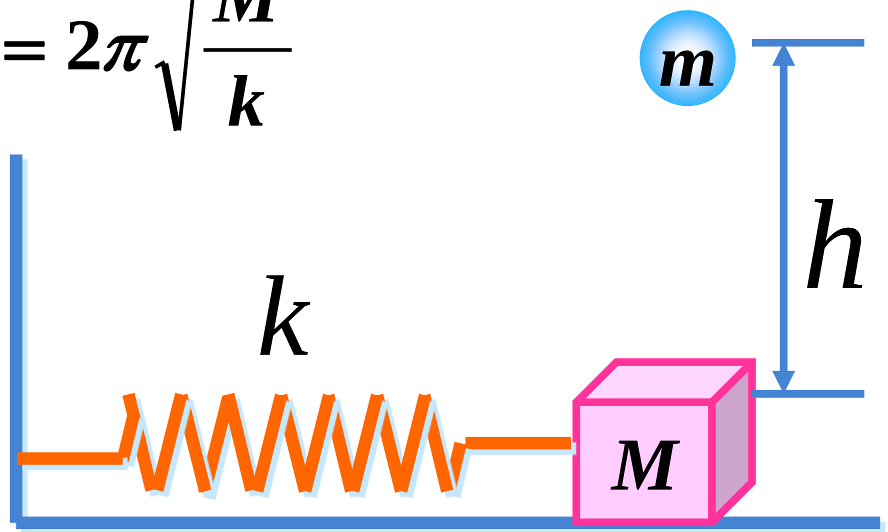
（b）粘土是当物体在最大位移处落在其上的。



解：（1）下落前 $T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{M}{k}}$

下落后

$$T'=\frac{2\pi}{\omega'}=2\pi\sqrt{\frac{M+m}{k}}\rangle T$$



（2）（a）在平衡位置落下

下落前：A，v $\qquad \frac{1}{2}kA^2=\frac{1}{2}Mv^2$

下落后：A'，v'

水平方向动量守恒： $Mv=(M+m)v'$

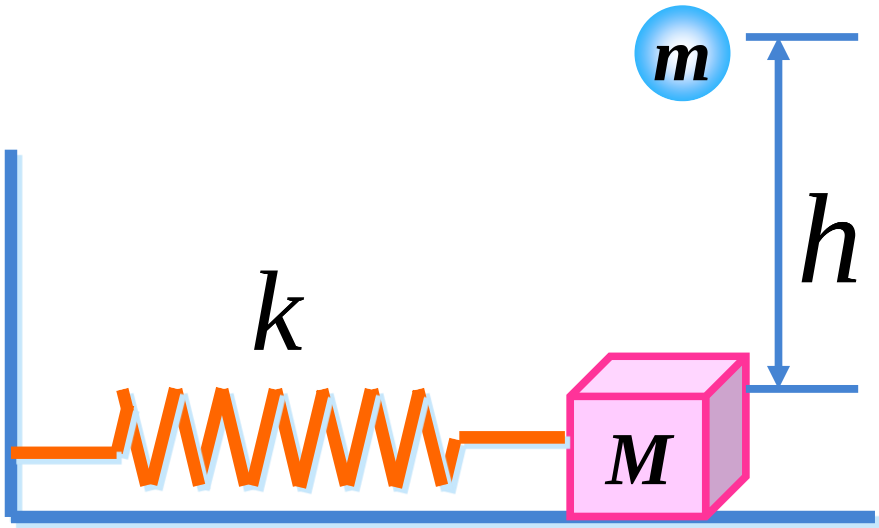
由机械能守恒： $\frac{1}{2}kA'^2=\frac{1}{2}(M+m)v'^2$

得 $A'=\sqrt{\frac{M}{M+m}}A\langle A$

（b）在最大位移处落下

下落前：A，$v=0$

下落后：A'，$v'=0$



所以振幅不变：

$$A = A'$$

§ 10-4 电磁振荡

- 电磁振荡（LC回路）与弹簧振子的对比图

力
$$\begin{cases}\text{电势差 } U\text{——弹性力 } f \\ \text{自感作用——惯性作用}\end{cases}$$

能量
$$\begin{cases}\text{电能}W_e \text{ — 弹性势能}E_P \\ \text{磁能}W_m \text{ — 振子动能}E_k\end{cases}$$

对应关系：

L — m

C — $1/k$

q — x

I — v

$\varepsilon(u)$ — F

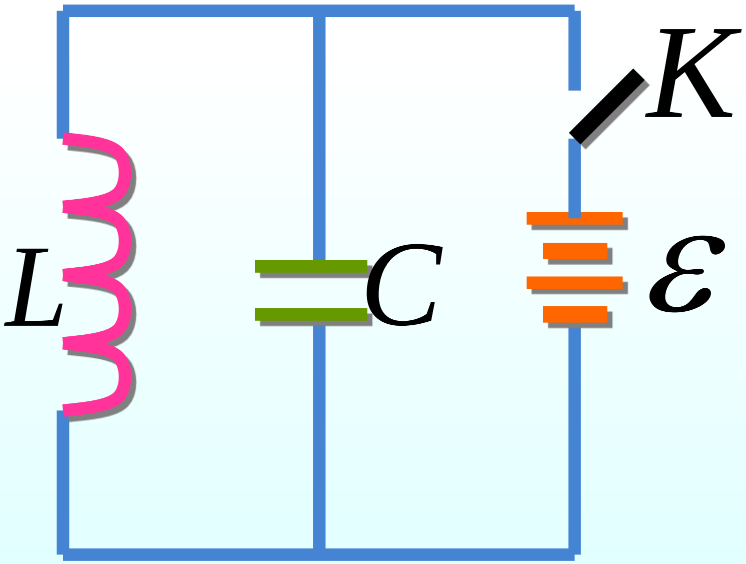
W_e — E_P

W_m — E_k

•无阻尼自由振荡

电阻、辐射均可忽略（总能量、Q_0、I_0不变）

设C、ε、q、U_A-U_B、L、I



$$q=C\left(U_A-U_B\right)$$

当电路中的电流为I时，自感电动势为

$$\varepsilon_L=-L\frac{dI}{dt}=-L\frac{d^2q}{dt^2}$$

任意时刻有 $$U_A - U_B = \varepsilon_L = -L\frac{dL}{dt}$$

即 $$-L\frac{d^2q}{dt^2} = \frac{q}{C}$$

令 $$\omega^2 = \frac{1}{LC}$$

则得 $$\frac{d^2q}{dt^2} = -\omega^2 q$$

解为 $$q = q_0\cos(\omega t + \varphi)$$

q_0 —电量振幅

$$I=\frac{dq}{dt}=-\omega q_0\sin\left(\omega t+\varphi\right)$$

ωq_0 —电流振幅

固有周期和固有频率为

$$T=2\pi\sqrt{LC}\qquad \nu=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{LC}}$$

电场能量和磁场分别为

$$W_e = \frac{q^2}{2C} = \frac{q_0^2}{2C}\cos^2(\omega t+\varphi)$$

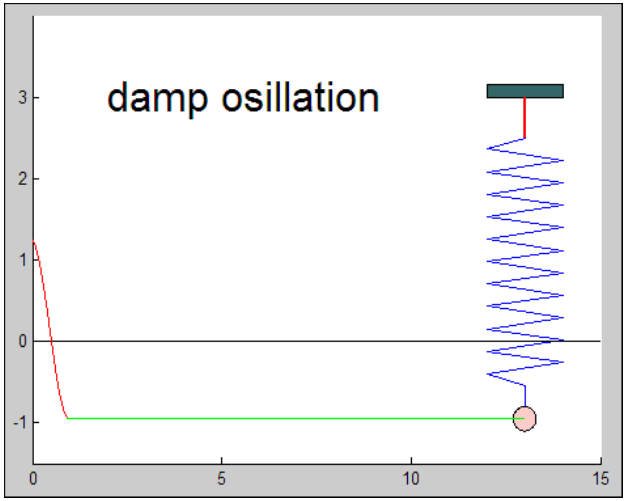
$$W_m = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{L\omega^2 q_0^2}{2}\sin^2(\omega t+\varphi) = \frac{q_0^2}{2C}\sin^2(\omega t+\varphi)$$

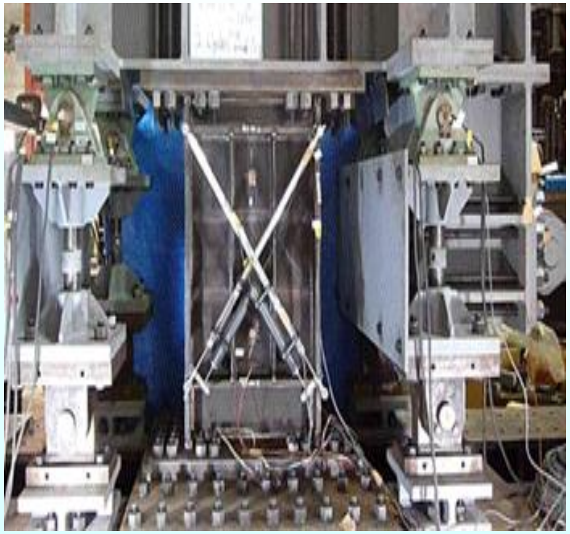
总能量为

$$W = W_e + W_m$$

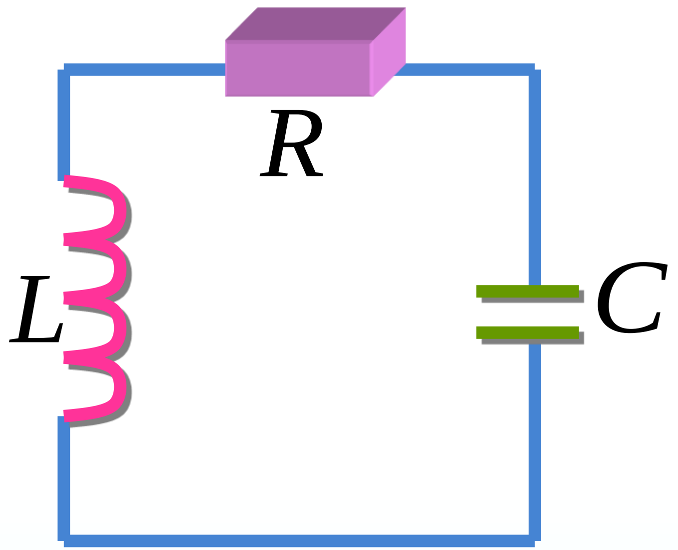
$$= \frac{q_0^2}{2C}\left[\cos^2(\omega t+\varphi)+\sin^2(\omega t+\varphi)\right] = \frac{q_0^2}{2C}$$

• 阻尼振动





• 阻尼振荡（减幅振荡）



（1）因为电阻存在，一部分能量转变为热能。

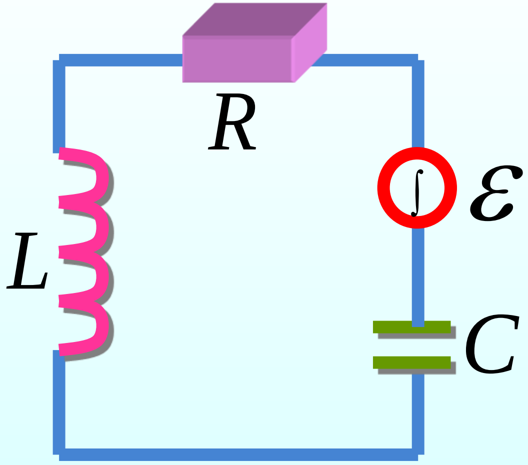
（2）电磁能将以电磁波的形式向周围空间发射。

• 受迫振荡（外加周期性的电动势）

特征：

（1）电磁共振——电流共振

（2）当外加策动性电动势频率等于该电路自由振荡的固有频率时，共振的最大值和阻尼有关。



§10-5 一维简谐振动的合成

振动叠加原理

实际物体往往同时参与几个振动（合振动）其位移等于各分振动位移的矢量和

一. 同频率同方向简谐振动的合成

代数方法：设两个振动具有相同频率，同一直线上运动，有不同的振幅和初相位

$$\left.\begin{aligned} x_1(t) &= A_1\cos(\omega t+\varphi_{10}) \\ x_2(t) &= A_2\cos(\omega t+\varphi_{20}) \end{aligned}\right\} x(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

$$= (A_1\cos\varphi_{10} + A_2\cos\varphi_{20})\cos\omega t - (A_1\sin\varphi_{10} + A_2\sin\varphi_{20})\sin\omega t$$

$$=(A_1\cos\varphi_{10}+A_2\cos\varphi_{20})\cos\omega t-(A_1\sin\varphi_{10}+A_2\sin\varphi_{20})\sin\omega t$$

令： $$A_1\cos\varphi_{10}+A_2\cos\varphi_{20}=A\cos\varphi$$

$$A_1\sin\varphi_{10}+A_2\sin\varphi_{20}=A\sin\varphi$$

原式 $=A\cos\varphi\cdot\cos\omega t-A\sin\varphi\cdot\sin\omega t$

$$=A\cos(\omega t+\varphi)$$

结论：

同频率同方向简谐振动的合成仍为简谐振动

$$\boxed{A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(\varphi_{20}-\varphi_{10})}}$$

$$\varphi=\operatorname{arctg}\frac{A_1\sin\varphi_{10}+A_2\sin\varphi_{20}}{A_1\cos\varphi_{10}+A_2\cos\varphi_{20}}$$

几何方法（矢量图）

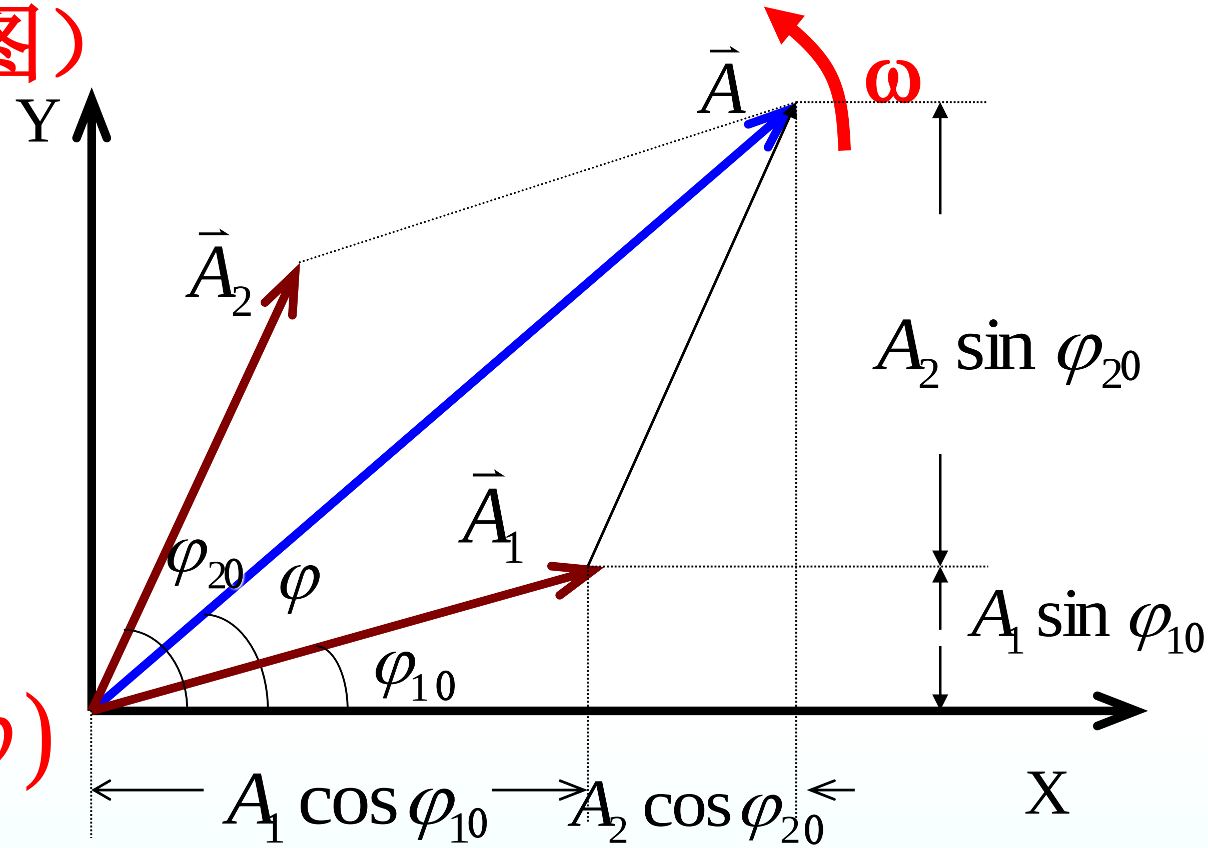
$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_{10})$$

$$x_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_{20})$$

$$x = x_1 + x_2$$

$$\vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2$$

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$



$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_{20} - \varphi_{10})}$$

$$\varphi = \mathrm{arctg}\frac{A_1\sin\varphi_{10} + A_2\sin\varphi_{20}}{A_1\cos\varphi_{10} + A_2\cos\varphi_{20}}$$

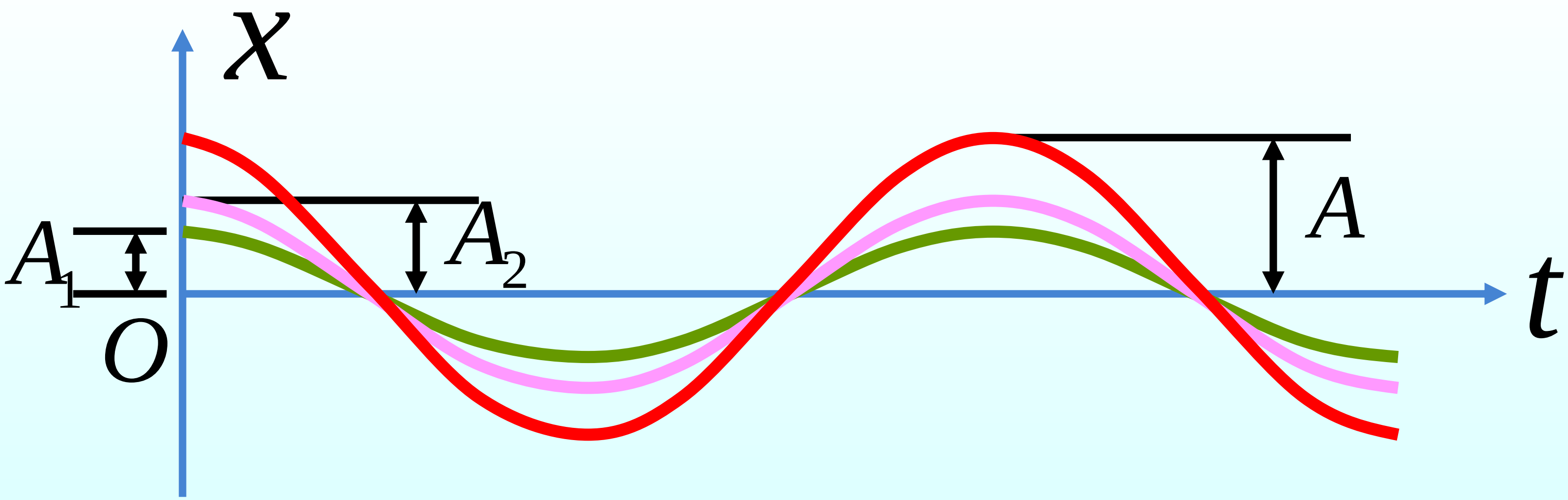
讨论：

$$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)}$$

(1)若 $\varphi_2-\varphi_1=2k\pi,\ \ k=0,\pm1,\pm2,\cdots,$

则 $\cos(\varphi_2-\varphi_1)=1$

即 $A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2}=A_1+A_2$ 相互加强



$$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)}$$

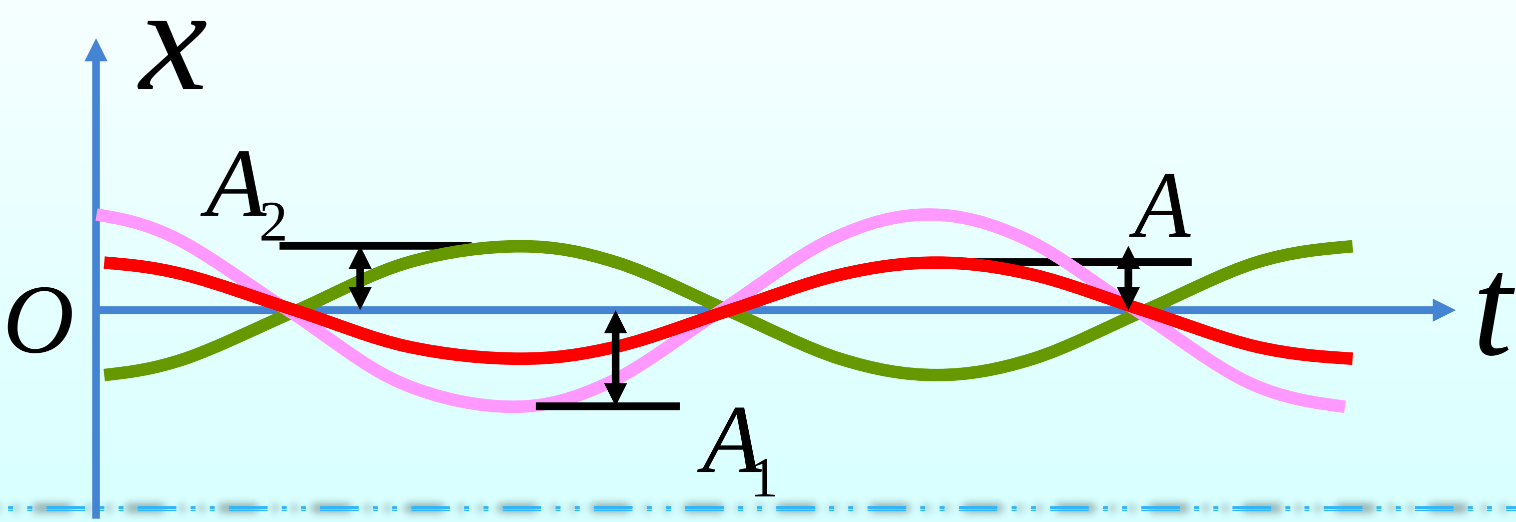
(2)若 $\varphi_2-\varphi_1=(2k+1)\pi$，$k=0,\pm1,\pm2,\cdots,$

则 $\cos(\varphi_2-\varphi_1)=-1$

即 $A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2}=|A_1-A_2|$ 相互减弱

(3)一般情况 $(\varphi_2-\varphi_1)$ 可取任意值

则 $A_1+A_2\le A\le|A_1-A_2|$

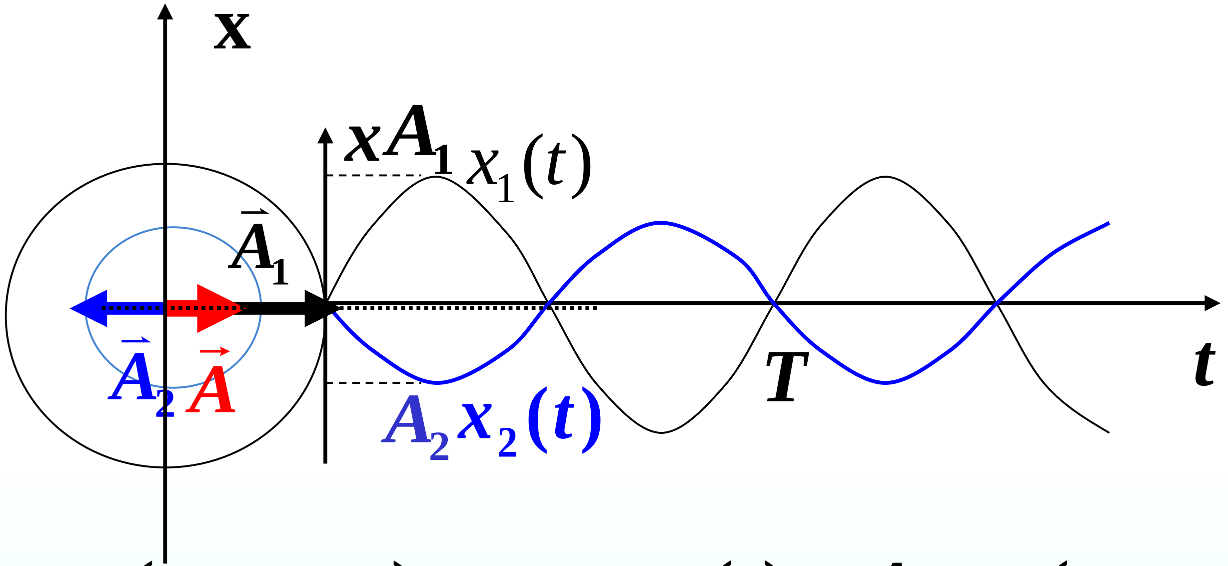


例题：两个同方向的简谐振动曲线(如图所示)，求

1 合振动的振幅；

2 合振动的振动方程

解：



$$x_1(t) = A_1 \cos(\omega t + \varphi_{10}) \qquad x_2(t) = A_2 \cos(\omega t + \varphi_{20})$$

合振动：$x = A\cos(\omega t + \varphi)$ $\quad \omega = 2\pi/T$

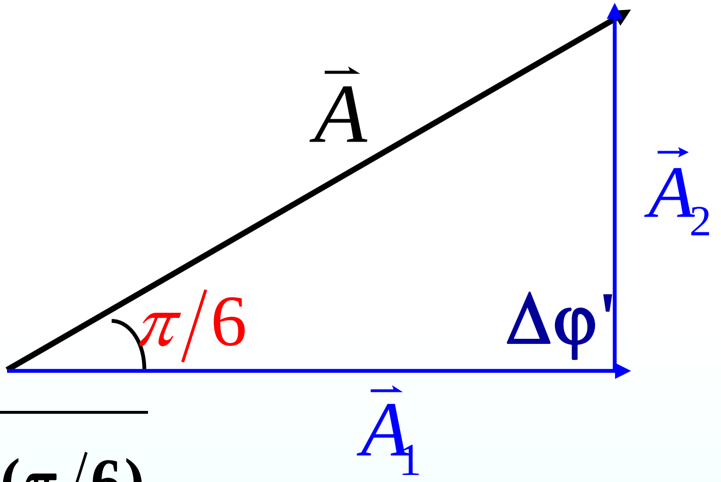
利用旋转矢量法得：$\varphi_{10} = -\dfrac{\pi}{2} \quad \varphi_{20} = \dfrac{\pi}{2} \quad \therefore A = A_1 - A_2$

由矢量图：$\varphi = -\dfrac{\pi}{2} \quad x = (A_1 - A_2)\cos(\dfrac{2\pi}{T}t - \dfrac{\pi}{2})$

例、 两个同方向，同频率的简谐振动，其合振动的振幅为20cm，与第一个振动的位相差为$\varphi - \varphi_1 = \pi/6$。若第一个振动的振幅为$10\sqrt{3}$ cm 。则（1）第二个振动的振幅为多少？（2）两简谐振动的位相差为多少？

解：

$$\Delta\varphi = \varphi - \varphi_1 = \pi/6$$



$$A_2 = \sqrt{A^2 + A_1^2 - 2AA_1\cos\Delta\varphi}$$

$$= \sqrt{20^2 + \left(10\sqrt{3}\right)^2 - 2\cdot 20\cdot 10\sqrt{3}\cos(\pi/6)}$$

$$= 10 \text{ cm}$$

$$\frac{A}{\sin\Delta\varphi'} = \frac{A_2}{\sin\pi/6}$$

$$\sin\Delta\varphi' = \frac{A}{A_2}\sin\frac{\pi}{6} = \frac{20}{10}\sin\frac{\pi}{6} = 1$$

$$\Delta\varphi' = \varphi_2 - \varphi_1 = \frac{\pi}{2}$$

$$\Delta\varphi'' = \pi/2$$

§10-6 二维简谐振动的合成

一. 同频率垂直简谐振动的合成

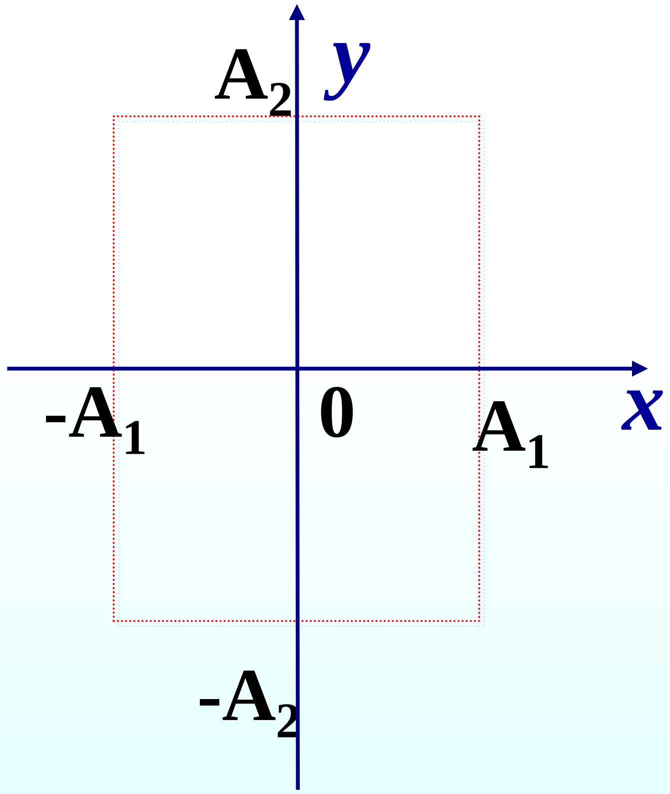
设一个质点同时参与了两个振动方向相互垂直的同频率简谐振动，即

$$x = A_1 \cos(\omega t + \varphi_{10})$$

$$y = A_2 \cos(\omega t + \varphi_{20})$$

$$\frac{x}{A_1} = \cos\omega t \cdot \cos\varphi_{10} - \sin\omega t \cdot \sin\varphi_{10}$$

$$\frac{y}{A_2} = \cos\omega t \cdot \cos\varphi_{20} - \sin\omega t \cdot \sin\varphi_{20}$$



消去 t 便得到轨迹方程

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - 2\frac{x}{A_1}\frac{y}{A_2}\cos(\varphi_{20} - \varphi_{10}) = \sin^2(\varphi_{20} - \varphi_{10})$$ —轨迹方程（椭圆方程）

结论： 两相互垂直同频率简谐振动的合成为一“椭圆振动”轨迹，其形状取决于振幅和相位差。

质点运动方向与$\Delta\varphi$有关

当 $0<\Delta\varphi<\pi$ 时，沿**顺时针**方向运动

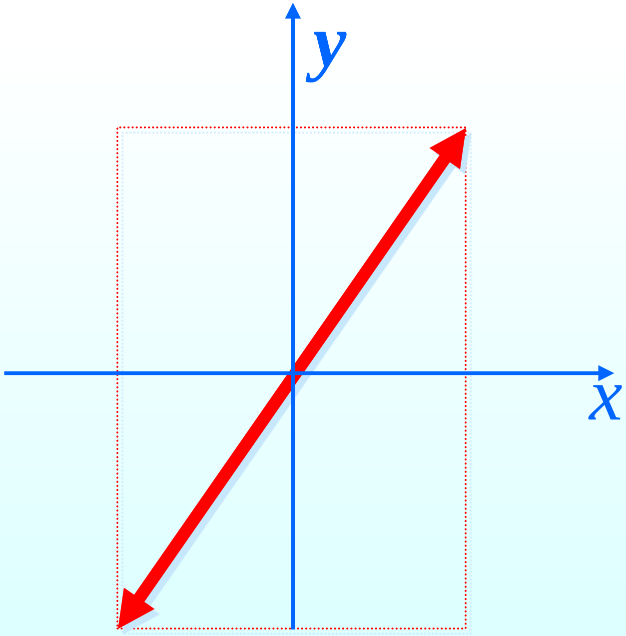
当 $\pi<\Delta\varphi<2\pi$ 时，沿**逆时针**方向运动

$$\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_2^2}-2\frac{x}{A_1}\frac{y}{A_2}\cos(\varphi_{20}-\varphi_{10})=\sin^2(\varphi_{20}-\varphi_{10})$$

讨论： (1) $\varphi_{20}-\varphi_{10}=2k\pi$ 时

$$\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_2^2}-\frac{2xy}{A_1A_2}=0 \qquad \left(\frac{x}{A_1}-\frac{y}{A_2}\right)^2=0$$

$$y=\frac{A_2}{A_1}x \quad 斜率\frac{A_2}{A_1}>0$$



结论： 质点作**线振动**

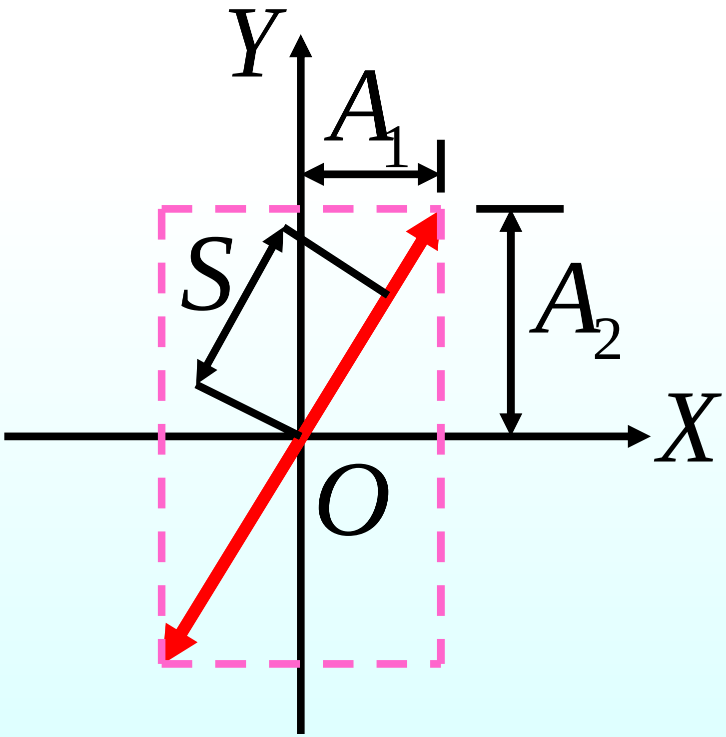
t 时刻离开平衡位置的距离为

$$S=\sqrt{x^2+y^2}$$

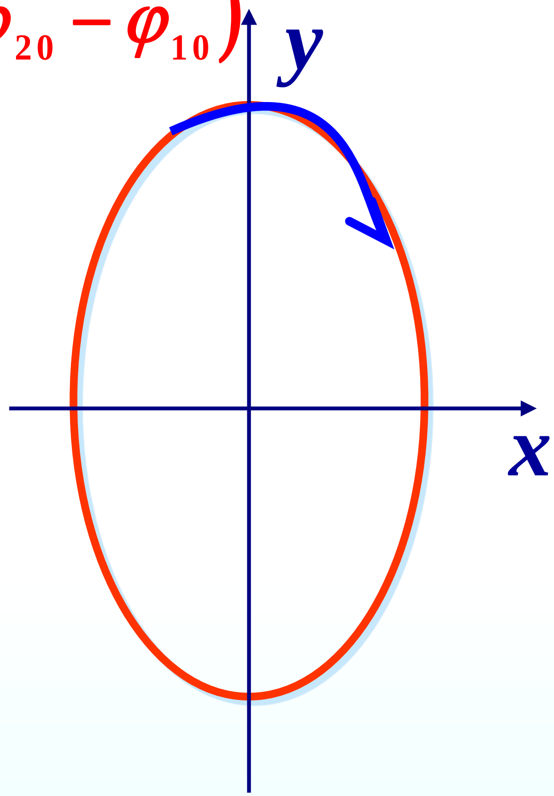
$$=\sqrt{A_1^2+A_2^2}\cos(\omega t+\varphi)$$

$$=A\cos(\omega t+\varphi)$$

仍为谐振动



$$\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_2^2}-2\frac{x}{A_1}\frac{y}{A_2}\cos(\varphi_{20}-\varphi_{10})=\sin^2(\varphi_{20}-\varphi_{10})$$



(2) $\varphi_{20}-\varphi_{10}=2k\pi+\frac{\pi}{2}$ $\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_2^2}=1$

结论： 质点振动轨迹为正椭圆

且顺时针旋转（右旋）

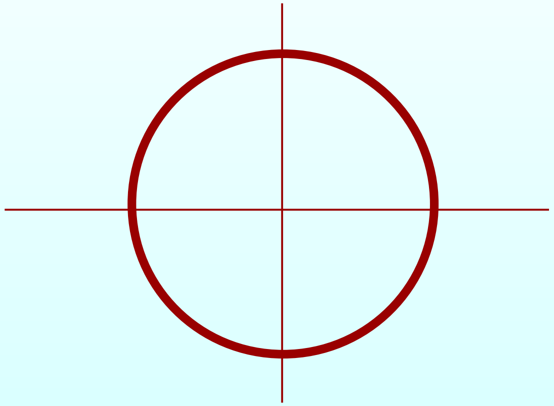
(3) $\varphi_{20}-\varphi_{10}=2k\pi+\frac{3\pi}{2}$

同理： 质点振动轨迹为正椭圆

则逆时针旋转

当：$A_1=A_2=A$

$x^2+y^2=A^2$ 轨迹为圆



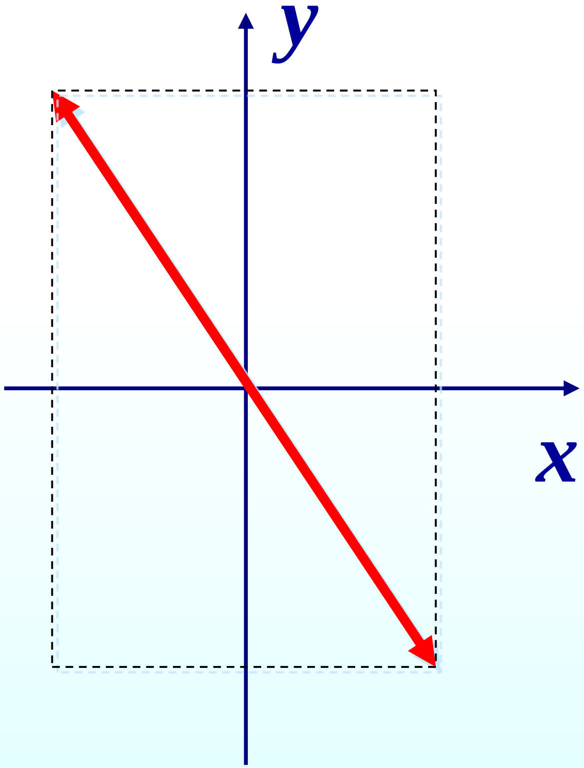
$$\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_2^2}-2\frac{x}{A_1}\frac{y}{A_2}\cos(\varphi_{20}-\varphi_{10})=\sin^2(\varphi_{20}-\varphi_{10})$$

(4) $\varphi_{20}-\varphi_{10}=(2k+1)\pi$

$$\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_2^2}+\frac{2xy}{A_1A_2}=0$$

$$\left(\frac{x}{A_1}+\frac{y}{A_2}\right)^2=0$$

$y=-\frac{A_2}{A_1}x$ ，斜率：$-\frac{A_2}{A_1}>0$

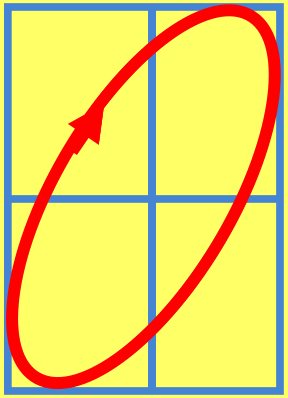


结论：质点作**线振动**

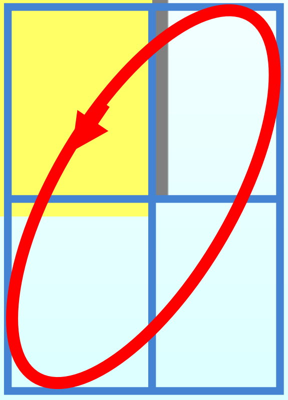
(5) $\varphi_2-\varphi_1=\pm\dfrac{\pi}{4}$

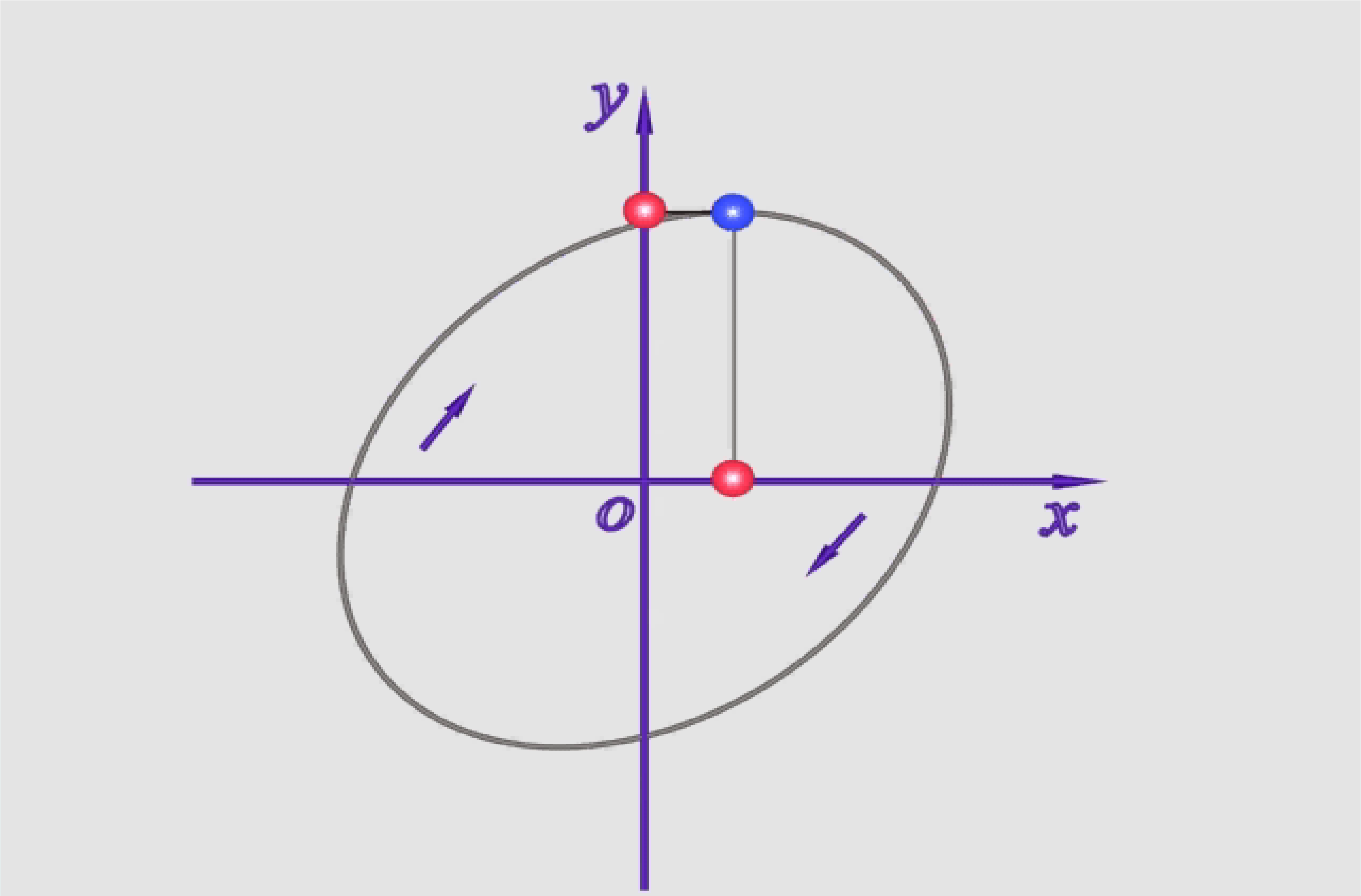
$\dfrac{x^2}{A_1^2}+\dfrac{y^2}{A_2^2}\mp\sqrt{2}\,\dfrac{xy}{A_1A_2}=\dfrac{1}{2}$ —— 斜椭圆方程

$\varphi_2-\varphi_1=+\dfrac{\pi}{4}$ 顺时针

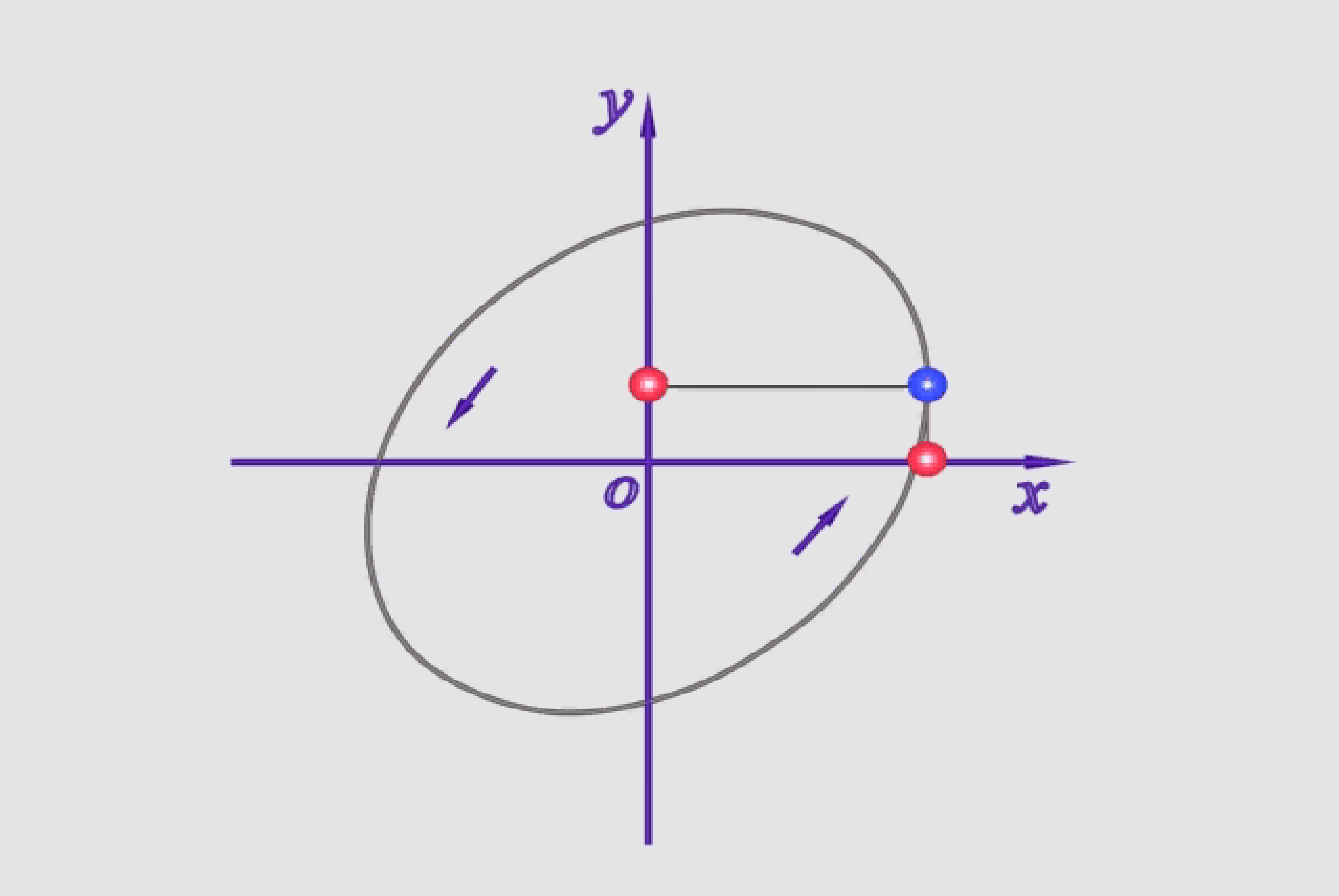


$\varphi_2-\varphi_1=\dfrac{7\pi}{4}\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$ 逆时针





$$\Delta\phi = \pi/4$$

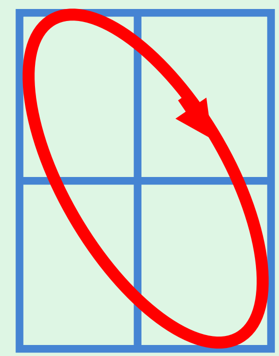


$$\Delta\phi = 7\pi/4$$

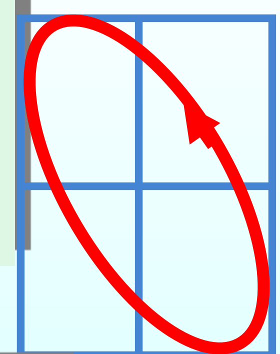
$$(6)\varphi_2-\varphi_1=\pm\frac{3\pi}{4}$$

$$\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_2^2}\pm\sqrt{2}\,\frac{xy}{A_1A_2}=\frac{1}{2}$$ ——斜椭圆方程

$$\varphi_2-\varphi_1=+\frac{3\pi}{4}$$ 顺时针

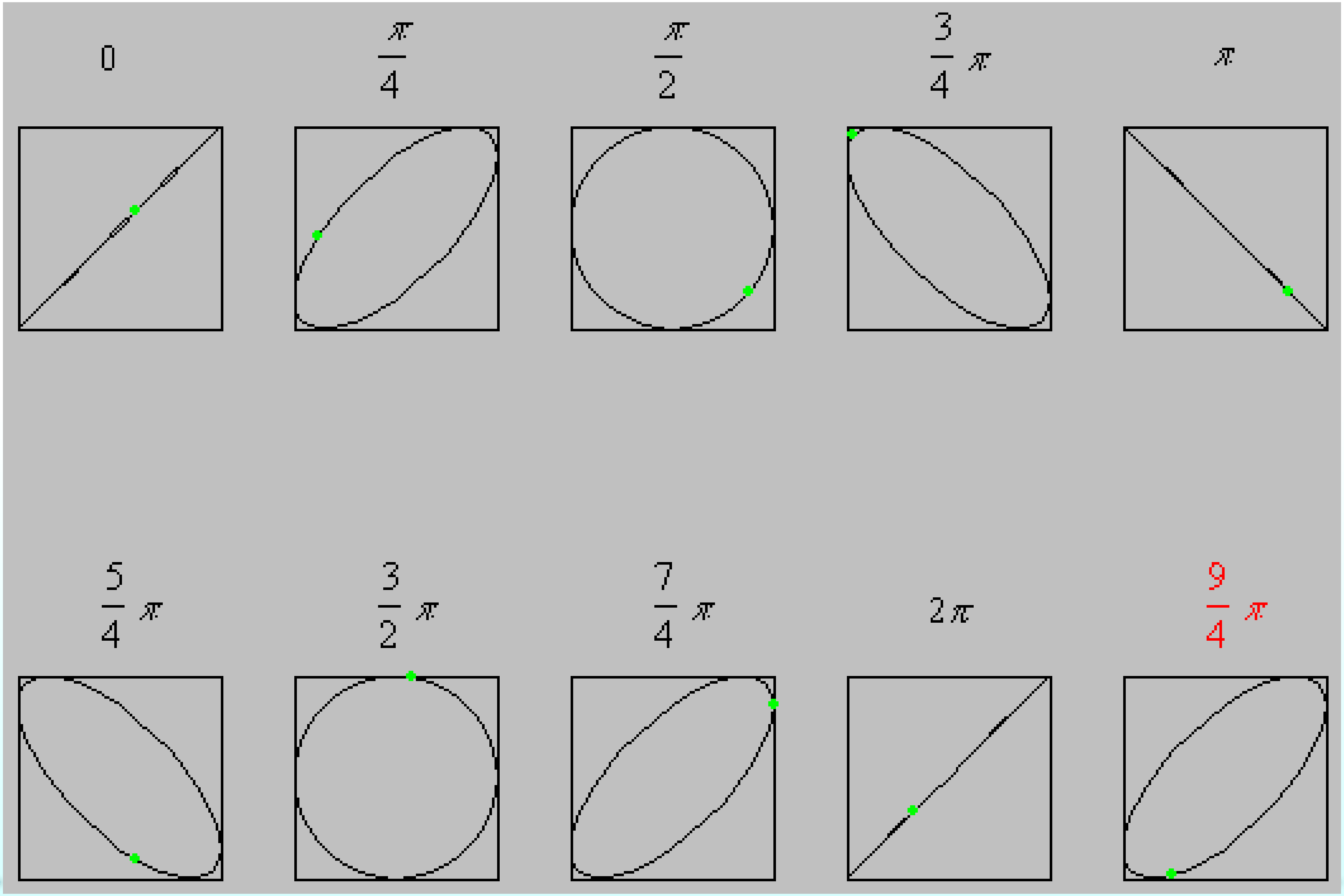


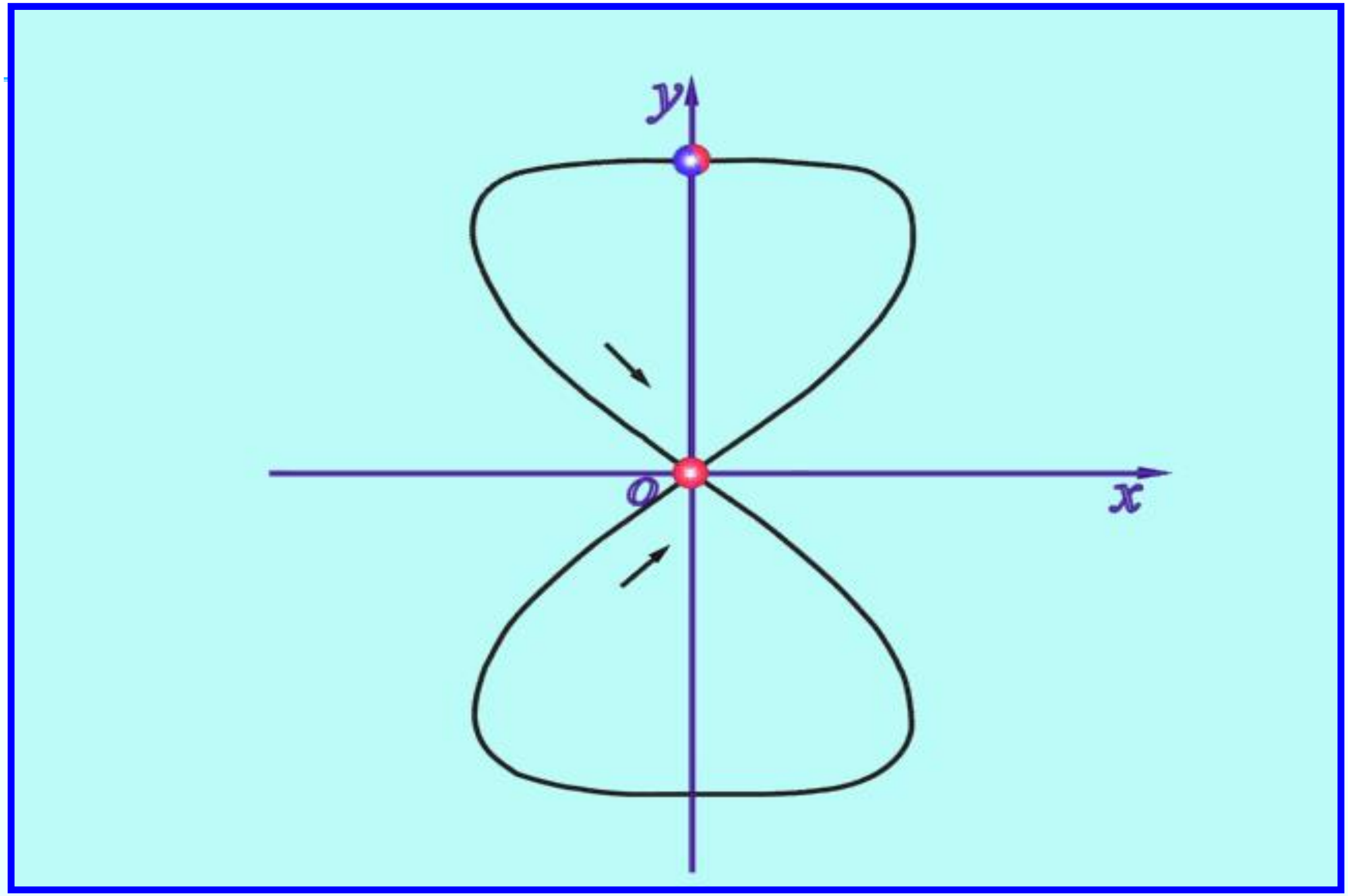
$$\varphi_2-\varphi_1=\frac{5\pi}{4}\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$$ 逆时针



(7)一般情况$\varphi_2-\varphi_1=$任意值，都为椭圆方程

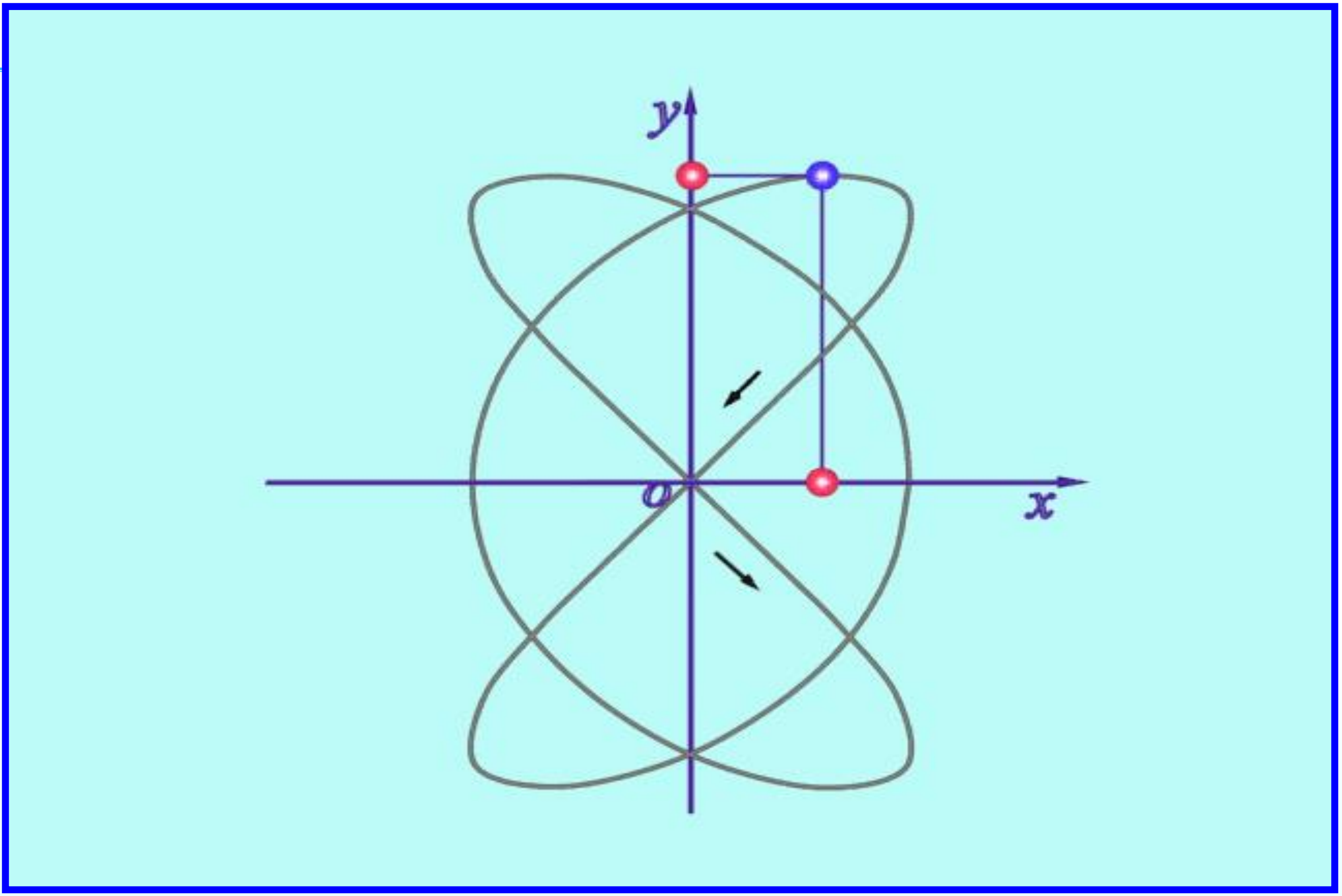
同频率垂直简谐振动的合成





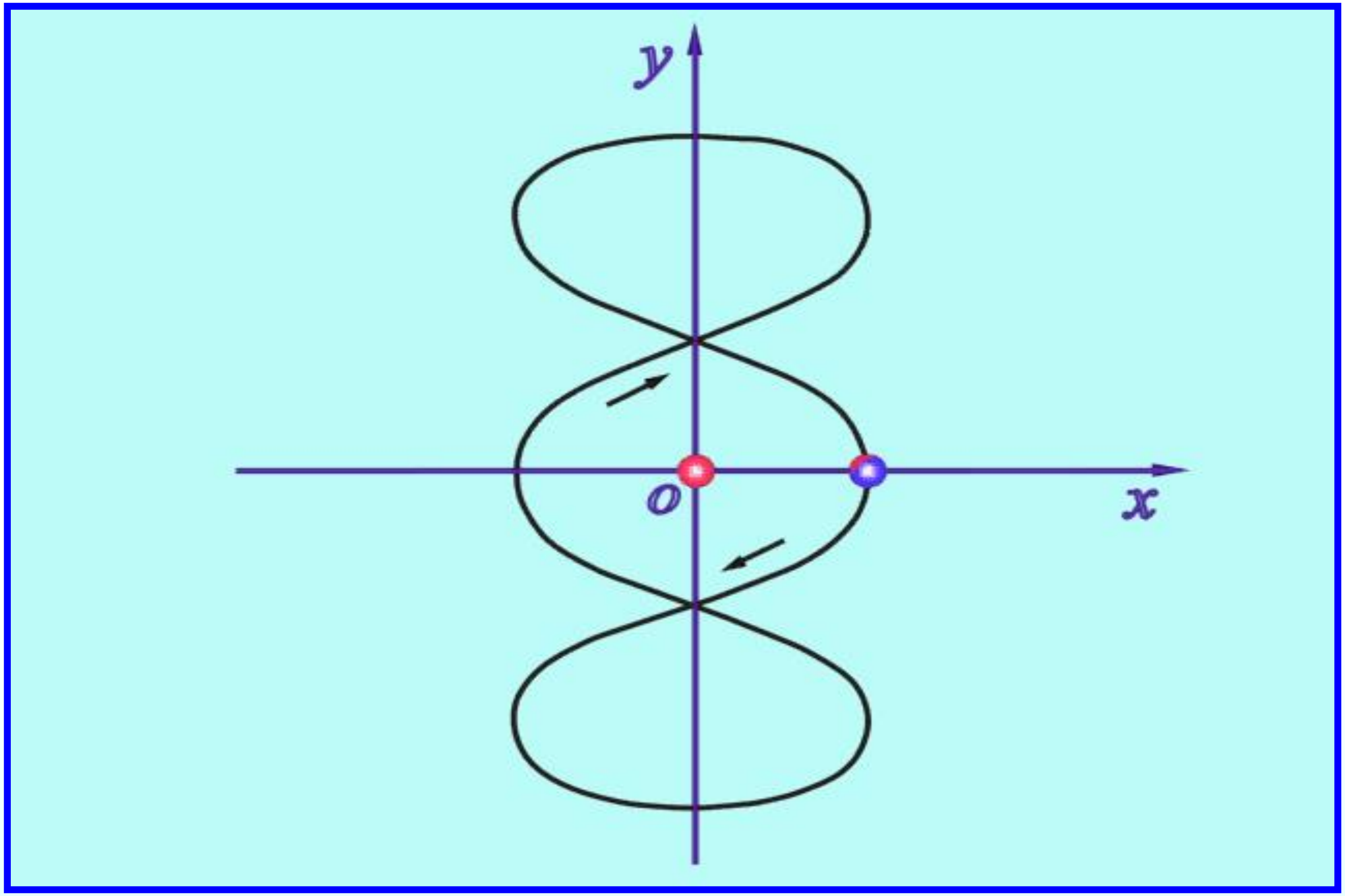
$$\omega_x : \omega_y = 2:1$$

$$\Delta\phi = \pi/2$$



$$\omega_x : \omega_y = 3:2$$

$$\Delta\phi = \pi/4$$



$$\omega_x : \omega_y = 3:1$$

$$\Delta\phi = \pi/2$$

相互垂直的简谐振动的合成