Отчет по лабораторной работе №4

Методы стохастической оптимизации

Аксенова Валерия, Шустров Андрей

Описание методов:

Имитация отжига (simulated annealing) - метод реализован в классическом виде с оптимизацией досрочной остановки, если результат перестает обновляться. В качестве гиперпараметров принимаются следующие аргументы – начальная температура, температура остановки, коэффициент охлаждения и количество итераций, сделанных на каждом значении температуры.

Эволюционная стратегия с адаптацией матрицы ковариации (CMA-ES) – стандартная реализация. При инициализации алгоритма задается размер шага, размер популяции для обучения, а также ограничение на количество итераций. Ключевым преимуществом алгоритма является его способность адаптировать форму распределения поиска к ландшафту целевой функции путем обновления матрицы ковариации, что позволяет эффективно оптимизировать сложные мультимодальные функции.

Исследование:

Для исследования из предыдущих лабораторных были взяты наиболее интересные функции: Розенброка, Химмельблау, Букина и Растригина, а также датасет *California_housing* из *scikit-learn.*

Имитация отжига:

Для сравнения эффективности были выбраны одни из наиболее интересных, по предыдущим лабораторным работам, методов: BFGS, SR1 и алгоритм Нельдера-Мида. Реализации взяты из библиотеки *SciPy*. Метриками для сравнения являются: количество итераций алгоритма, количество вычислений исходной функции и ее производных и абсолютное отклонение от оптимума.

ROSENBROCK	*Итераций*	*Оценок функции*	*Ошибка*
Simulated Annealing	224 000	448 001	225.928039
BFGS	458	1 800	0.000000
SR1	269	807	0.000000
Nelder–Mead	376	699	0.000000

HIMMEBLAU	Итераций	Оценок функции	Ошибка
Simulated Annealing	213 000	426 001	0.000001
BFGS	48	162	0.000000
SR1	57	138	0.000000
Nelder–Mead	64	125	0.000000

RASTRIGIN	*Итераций*	*Оценок функции*	*Ошибка*
Simulated Annealing	213 000	426 001	0.000001
BFGS	12	51	3.800814
SR1	31	90	1.902843
Nelder–Mead	59	117	0.951422

CALIFORNIA HOUSING	*Итераций*	*Оценок функции*	*Ошибка*
Simulated Annealing	199 000	398 001	0.002516
BFGS	16	180	0.000321
SR1	21	210	0.000321
Nelder–Mead	1 000	1 435	1.065544

Во всех задачах отжиг оказался существенно медленнее и менее точным, чем градиентные и квазиньютоновские методы. Для функции Розенброка метод отжига не сошелся вовсе. В гладких непрерывных задачах с небольшим числом переменных отжиг уступает по эффективности и точности методам, использующим градиентную информацию.

Эволюционная стратегия с адаптацией матрицы ковариации: Rosenbrock

σ	Размер популяции	Ошибка	Вычислений функции	Итераций
0.1	default	0.072746	6 000	1 000
0.1	10	0.000000	6 160	616
0.1	20	0.000000	8 640	432
0.3	default	0.518334	6 000	1 000
0.3	10	0.000000	7 500	750
0.3	20	0.000000	4 720	236
0.5	default	0.000000	4 722	787
0.5	10	0.000000	6 890	689
0.5	20	0.000000	9 800	490

Himmelblau

σ	Размер популяции	Ошибка	Вычислений функции	Итераций
0.1	default	0.000000	918	153
0.1	10	0.000000	1 330	133
0.1	20	0.000000	1 980	99
0.3	default	0.000000	870	145
0.3	10	0.000000	1 190	119
0.3	20	0.000000	1 940	97
0.5	default	0.000000	930	155
0.5	10	0.000000	1 250	125
0.5	20	0.000000	1 960	98

Rastrigin

σ	Размер популяции	Ошибка	Вычислений функции	Итераций
0.1	default	0.000000	924	154
0.1	10	0.000000	1 180	118
0.1	20	0.000000	1 940	97
0.3	default	0.000000	870	145
0.3	10	0.000000	1 160	116
0.3	20	0.000000	1 920	96
0.5	default	0.000000	876	146
0.5	10	0.000000	1 230	123
0.5	20	0.000000	1 880	94

California housing

σ	Размер популяции	Ошибка	Вычислений функции	Итераций
0.1	default	0.000337	10 000	1 000
0.1	10	0.000339	10 000	1 000
0.1	20	0.000321	3 100	155
0.3	default	0.001034	8 950	895
0.3	10	0.000443	7 510	751
0.3	20	0.000321	3 080	154
0.5	default	0.000334	9 900	990
0.5	10	0.000321	2 440	244
0.5	20	0.000321	2 780	139

Для функции Розенброка оказались наиболее эффективны маленькие популяции: они обеспечивают надежный выход в оптимум быстрее, несмотря на то что на каждом шаге выполняется чуть больше проверок. Для Химмельблау и Растригина любая комбинация параметров всё же сходится к идеальному решению, и здесь главный выигрыш даёт увеличение размера популяции — оно сокращает число шагов, хотя и требует больше функций за итерацию. В задаче California housing наилучший баланс между скоростью и точностью достигается при умеренных настройках смещения и относительно небольшой популяции: это позволяет быстро приблизиться к минимуму, не тратя лишних вычислительных ресурсов.

Задача OneMax с помощью Генетического алгоритма

Постановка задачи:

Задача *OneMax* — это классическая задача в области стохастической оптимизации, которая часто используется для иллюстрации работы генетических алгоритмов (*ГА*). Суть задачи заключается *в максимизации количества единиц в бинарной строке фиксированной длины.*

Задача оптимизации:

Пусть дана бинарная строка. Наша *цель* – найти решение, которое бы давало максимальную сумму цифр этого списка:

$$fitness = \sum_{i=0}^{N-1} individ[i]$$

Здесь N – длина списка. Очевидно, лучший, наиболее приспособленный индивид, должен состоять из всех единиц.

Описание методов:

1. ***Оценка приспособленности (фитнес-функция)*** *oneMaxFitness(individual):*

Возвращает количество единиц в бинарной строке — это и есть мера "приспособленности". Чем больше единиц, тем лучше решение.

2. ***Инициализация популяции****:*

individualCreator() — создает одного индивидуума с бинарной строкой длины ONE_MAX_LENGTH.

populationCreator(n) — формирует начальную популяцию из n таких индивидуумов.

3. ***Отбор (селекция)*** *selTournament(population, p_len)*:

Применяется турнирный отбор: из трех случайно выбранных особей побеждает та, у которой максимальная приспособленность. . Это позволяет сохранить давление отбора и увеличить шансы лучших решений на размножение.

4. ***Скрещивание (кроссовер)*** *def cxOnePoint(child1, child2):*
Используется одноточечное скрещивание: случайно выбирается точка разреза, после которой потомки обмениваются хвостами хромосом..

Скрещивание выполняется с заданной вероятностью *P_CROSSOVER*.

5. ***Мутация*** *mutFlipBit(mutant, indpb=0.01):*

Мутация инвертирует каждый бит хромосомы с небольшой вероятностью (обычно обратно пропорциональной длине хромосомы).
Это обеспечивает генетическое разнообразие и позволяет алгоритму выходить из локальных минимумов.

6. ***Клонирование:***

Перед изменением отобранных особей выполняется их глубокое копирование (clone), чтобы избежать побочных эффектов при скрещивании или мутации:

7. ***Цикл эволюции:***

Главный цикл работает до тех пор, пока не найдено оптимальное решение (все единицы) или не достигнуто максимальное число поколений. На каждой итерации:

- Отбираются родители
- Проводится скрещивание и мутация
- Пересчитываются значения приспособленности
- Обновляется популяция
- Сохраняется статистика (макс. и среднее значение фитнеса в поколении)

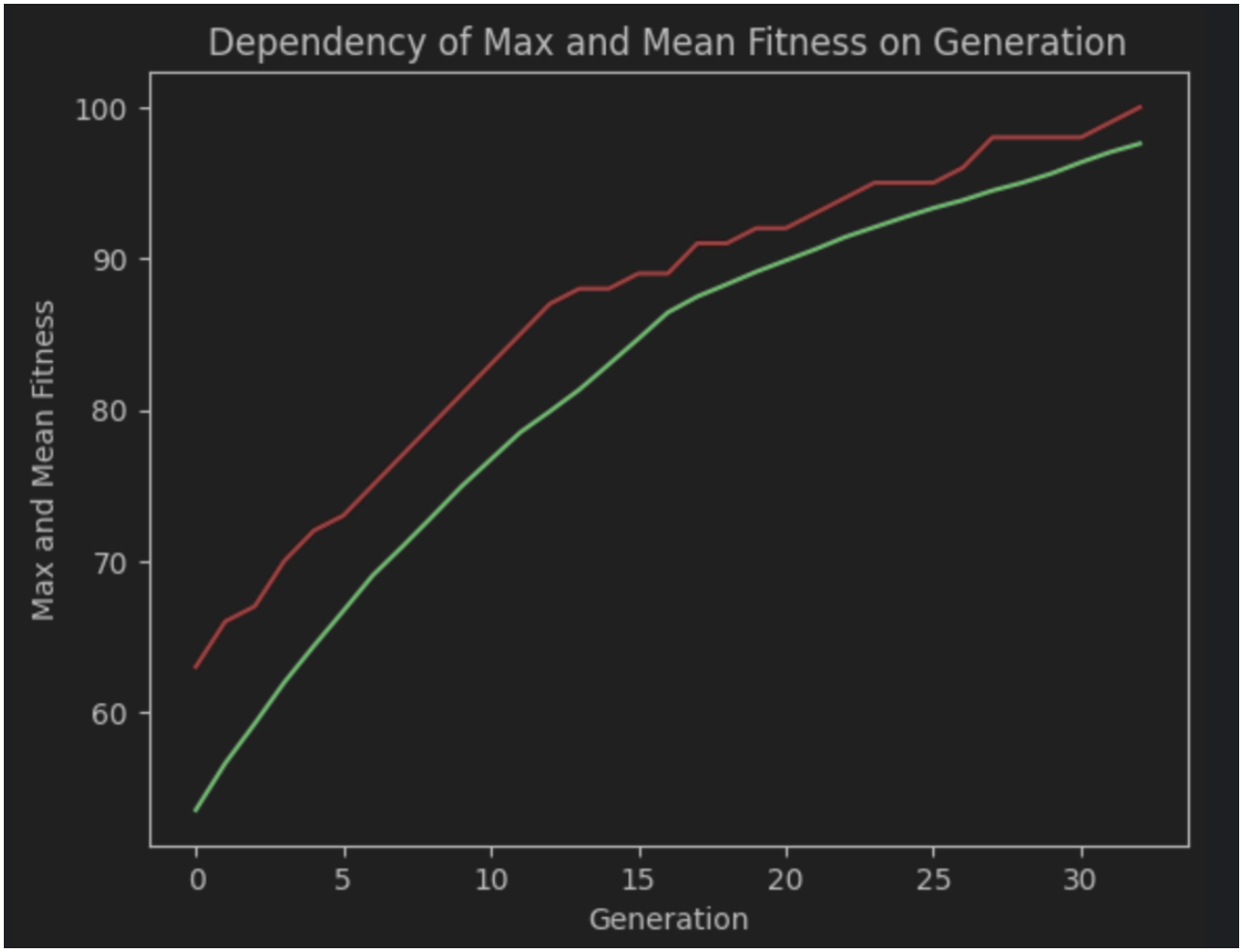
Результаты:

Поколение 50: *Макс приспособ.* = 100, *Средняя приспособ*. = 98.525
Лучший индивидуум = 1 1 1 1 1 1 1 …

Задача *OneMax* наглядно показывает, как работает генетический алгоритм. Несмотря на простую фитнес-функцию, алгоритм демонстрирует *основные принципы эволюционного подхода*:

- *отбор лучших решений*
- *сочетание хороших признаков через скрещивание*
- *внесение случайности через мутацию*

ГА нашел оптимальное решение за ограниченное число поколений, что подтверждает его эффективность даже при случайной инициализации.


Dependency of Max and Mean Fitness on Generation
Max and Mean Fitness
100
90
80
70
60
0
5
10
15
20
25
30
Generation