Exponential Family(지수분포족)?

오태환

Summer, 2022

차례

Definition

- 다음과 같은 형태를 가지는 분포를 Exponential Family(지수분포족) 이라고 합니다.
  $p(y|\phi) = h(y)c(\phi)e^{\phi t(y)}$
- 이 때 ϕ는 미지수 이고, $t(y)$는 충분 통계량(sufficient statistic)입니다.
- 또한 h(y)는 데이터에 대한 함수, c(ϕ)는 미지수 ϕ에 대한 함수입니다.
- 수통 2를 들으시면 더 자세히 배울 수 있습니다!
- 아마 수통 2에서 배운 Exponential Family는 아래와 같은 형식이었을것입니다 :)
  $f(x;\theta) = exp\{p(\theta)K(x) + s(x) + q(\theta)\}$

Conjugacy with Exponential Families

- Likelihood :
  $f(y_1, y_2, ..., y_n|\phi) = \prod_{i=1}^{n} h(y_i)c(\phi)e^{\phi t(y_i)}$
  $\propto c(\phi)^n e^{\phi \Sigma t(y_i)}$
- Prior :
  $p(\phi) = k(n_0, t_0)c(\phi)^{n_0} e^{n_0 t_0 \phi}$
  $\propto c(\phi)^{n_0} e^{n_0 t_0 \phi}$
- Posterior :
  $p(\phi|y) \propto p(\phi)f(y|\phi)$
  $\propto c(\phi)^{n_0} e^{n_0 t_0 \phi} \times c(\phi)^n e^{\phi \Sigma t(y_i)}$
  $= c(\phi)^{n_0+n} exp\left[n_0 t_0 \phi + \phi \sum_{i=1}^{n} t(y_i)\right]$
  $= c(\phi)^{n_0+n} exp\left[\phi(n_0 t_0 + n\frac{\sum_{i=1}^{n} t(y_i)}{n})\right]$, let $\sum_{i=1}^{n} t(y_i) = t(\bar{y})$

Conjugacy with Exponential Families

- 이 때, Posterior는 Prior와 같은 Class에 속하며, Conjugacy 관계가 된다.
- n_0 : prior sample size
- t_0 : prior guess of t(y), $E(t(Y)) = t_0$

Binomial Likelihood

- Transform Binomial Likelihood to Exponential Family:
$p(y|\theta) = \theta^y(1-\theta)^{1-y}$
$= \left(\frac{\theta}{1-\theta}\right)^y (1-\theta)$
$= e^{\phi y}(1+e^{\phi})^{-1}$, where $\phi = log\left[\frac{\theta}{1-\theta}\right]$
- So, $c(\phi) = (1+e^{\phi})^{-1}, t(y) = y, h(y) = 1$ in $h(y_i)c(\phi)e^{\phi t(y)}$

Conjugate Prior

- Conjugate Prior
  $p(\phi|n_0, t_0) \propto c(\phi)^{n_0} e^{n_0 t_0 \phi} = (1 + e^{\phi})^{-n_0} e^{n_0 t_0 \phi}$
- 이걸 θ에 대한 식으로 다시 바꾸면?
- Remind $p_\phi(\phi) = p_\theta(h(\phi)) \times |\frac{dh}{d\phi}|$, where $\theta = h(\phi)$
- $p(\theta|n_0, t_0) \propto \theta^{n_0 t_0 - 1}(1 - \theta)^{n_0(1-t_0)-1}$ (DIY !)

Posterior Distribution

- $p(\theta|y) \propto p(\theta)p(y|\theta)$
  Let $n_0 = 1$, then
  $= \theta^{t_0-1}(1-\theta)^{(1-t_0)-1} \times \theta^{\Sigma y_i}(1-\theta)^{\Sigma(1-y_i)}$
  $= \theta^{(t_0+\Sigma y_i-1}(1-\theta)^{(1-t_0)+\Sigma(1-y_i)-1}$
  $\sim beta(t_0 + \Sigma y_i, (1-t_0) + \Sigma(1-y_i))$

Thank you