

Automática y Maquinas Eléctricas

Control de Accionamiento de CA con Motor Sincrónico de Imanes Permanentes

Autores:
Alan Vignolo
Brandon Mamani

Índice

Resumen	3
Introducción	4
Desarrollo	5
1 Modelo base	5
1.1 Carga Mecánica	5
1.2 Tren de transmisión	5
1.3 Maquina eléctrica	6
1.3.1 Subsistema mecánico	6
1.3.2 Subsistema electromagnético	6
1.3.3 Subsistema térmico	7
1.4 Inversor trifásico de alimentación	7
1.5 Sensores de realimentación	8
2 Modelado, Análisis y Simulación dinámica del SISTEMA FÍSICO a Lazo Abierto	8
2.1 Modelo matemático equivalente del subsistema mecánico completo	8
2.2 Modelo dinámico del sistema físico completo	9
2.2.1 Modelo global no lineal (NL)	9
2.2.2 Modelo global linealizado con parámetros variables (LPV)	13
2.2.3 Linealización por Realimentación NL	15
2.2.4 Comparación modelo dinámico LTI equivalente aumentado vs modelo dinámico global LPV	19
2.2.5 Funciones de transferencia para el modelo LTI	20
2.3 Análisis de Estabilidad	21
2.4 Análisis de Observabilidad	22
2.5 Análisis de Controlabilidad	24
2.6 Simulación Dinámica	24
2.6.1 Respuesta del estado interno a pulso de consigna de tension de estador en el eje q	24
3 Diseño, análisis y simulación con controlador de movimiento en cascada con modulador de torque equivalente (Control Vectorial)	31
3.1 Modulador de torque equivalente (Controlador interno vectorial de corriente/torque)	31
3.1.1 Desacople de las realimentaciones de estado hacia la entrada	32
3.1.2 Diseño de lazos de control de corrientes	32
3.1.3 Incorporación de consigna de torque	33
3.2 Controlador externo de movimiento (posición/velocidad)	33
3.2.1 Entrada de referencia o set-point	35
3.3 Observador de Estado de orden reducido	35
3.4 Simulación en tiempo continuo con modelo completo NL	36
3.4.1 Seguimiento de consignas de movimiento	36
3.4.2 Rechazo a perturbaciones	39
3.5 Verificación de desempeño y/o mejoras	40
3.5.1 Especificaciones de operación (valores límites)	40
3.5.2 Observador	43
3.5.3 Comportamiento térmico del motor	44
3.5.4 Desempeño del sistema ante una respuesta no ideal de los sensores	45
3.5.5 Moduladore trifásico de tensión no ideal	54
3.6 Version Final	57

Conclusiones	58
Referencias	59

Resumen

aLGO DE TEXTO

Introducción

Para despues.

Desarrollo

1. Modelo base

1.1. Carga Mecánica

La carga mecánica en este caso se refiere a un eje descentralizado utilizado en la articulación "hombro" de un robot SCARA. Esta articulación se encuentra en la base inercial y tiene un grado de libertad rotacional en un eje vertical. Los parámetros equivalentes de esta carga varían dependiendo de la posición y la velocidad angular instantáneas de la articulación "codo" del robot.

En este trabajo, no se incluye la modelización de la dinámica no lineal acoplada del robot. En su lugar, se considera una aproximación de la dinámica de carga tal como se ve desde el eje de la articulación "hombro", asumiendo la variación de los parámetros equivalentes.

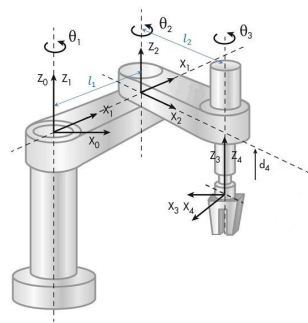


Figura 1: Modelo ilustrativo del robot SCARA

El modelo simplificado equivalente utilizado parte del eje de salida del tren de transmisión y toma en cuenta la coordenada articular del eje de la articulación "hombro" denotada como $q_1(t) = \theta_1(t)$. La ecuación que describe este modelo es:

$$J_l \cdot \dot{\omega}_l(t) = T_q(t) - b_l \cdot \omega_l(t) - T_l(t) \quad (1)$$

$$\dot{\theta}_l = \omega_l \Leftrightarrow \theta_l(t) = \int_0^t \omega_l(\xi) \cdot d\xi + \theta_l(0) \quad (2)$$

Parámetros equivalentes:

- Momento de inercia: $J_l \approx (0.2520 \pm 0.1260) \text{ kg.m}^2$
- Amortiguamiento viscoso: $b_l \approx (0 \pm 0.0030) \text{ N.m.s/rad}$

Especificaciones de operación:

- Torque de carga: $T_l(t) \approx (0 \pm 6.28) \text{ N.m}$

1.2. Tren de transmisión

En este sistema, se utiliza una caja reductora reversible con un sistema de engranajes planetarios. Se asume un acoplamiento rígido, lo que significa que no hay elasticidad torsional ni juego o holgura en el sistema. El momento de inercia equivalente y las pérdidas de energía debidas a la fricción interna se reflejan en el eje de entrada y se consideran junto con el motor.

Al considerar este acoplamiento rígido, podemos simplificar el subsistema mecánico completo, ya que no tenemos en cuenta la deformación elástica que ocurre en los engranajes durante la transmisión del par. En otras palabras, podemos tratar la carga mecánica y el motor eléctrico como una unidad, lo que resulta en un subsistema mecánico completo de un grado de libertad (1 g.d.l.).

Las relaciones del modelo equivalente (rígido) del tren de transmisión son las siguientes:

$$\omega_l(t) = \frac{1}{r} \cdot \omega_m(t) \quad (3)$$

$$T_q(t) = r \cdot T_d(t) \quad (4)$$

Parámetros equivalentes:

- Relación de reducción total: $r = 314.3008 : 1$

Especificaciones de operación:

- Velocidad nominal (salida): $n_{1nom} = 21 \text{ rpm } (\omega_{1nom} = 2.2 \text{ rad/s})$
- Torque nominal: $T_{qnom}(t) = 7.26 \text{ N.m}$
- Torque pico: $T_{qmax}(t) = 29.42 \text{ N.m}$

1.3. Maquina eléctrica

En este caso, se utiliza un motor de corriente alterna (CA) trifásico con excitación por imanes permanentes.

1.3.1. Subsistema mecánico

El subsistema mecánico del motor, que incluye el rotor y el tren de transmisión referidos al estator estacionario, se describe mediante el siguiente modelo equivalente:

$$J_m \cdot \dot{\omega}_m(t) = T_m(t) - b_m \cdot \omega_m(t) - T_d(t) \quad (5)$$

Además, se establece una relación entre la velocidad angular $\omega_m(t)$ y la derivada temporal de la coordenada angular $\theta_m(t)$ mediante la relación:

$$\dot{\theta}_m = \omega_m \Leftrightarrow \theta_m(t) = \int_0^t \omega_m(\xi) \cdot d\xi + \theta_m(0) \quad (6)$$

1.3.2. Subsistema electromagnético

En el caso de un motor eléctrico trifásico de tipo sincrónico con excitación por imanes permanentes, es posible representar un modelo idealizado equivalente utilizando coordenadas eléctricas de entrehierro $'qd0'$ fijas al rotor mediante la Transformación de Park del circuito del estator estacionario.

La Transformación de Park permite convertir el sistema de coordenadas trifásicas del estator estacionario ($f_{abcs}(t)$) en coordenadas $'qd0'$ fijas al rotor ($f_{rqd0s}(t)$). Esto se hace mediante la siguiente relación:

$$\begin{bmatrix} f_{qs}^r(t) \\ f_{ds}^r(t) \\ f_{0s}^r(t) \end{bmatrix} = \frac{2}{3} \cdot \begin{bmatrix} \cos(\theta_r(t)) & \cos(\theta_r(t) - \frac{2\pi}{3}) & \cos(\theta_r(t) + \frac{2\pi}{3}) \\ \sin(\theta_r(t)) & \sin(\theta_r(t) - \frac{2\pi}{3}) & \sin(\theta_r(t) + \frac{2\pi}{3}) \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f_{as}(t) \\ f_{bs}(t) \\ f_{cs}(t) \end{bmatrix} \quad (7)$$

La transformación inversa, que nos permite volver al sistema de coordenadas del estator, se puede expresar mediante la siguiente relación:

$$\begin{bmatrix} f_{as}(t) \\ f_{bs}(t) \\ f_{cs}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_r(t)) & \sin(\theta_r(t)) & 1 \\ \cos(\theta_r(t) - \frac{2\pi}{3}) & \sin(\theta_r(t) - \frac{2\pi}{3}) & 1 \\ \cos(\theta_r(t) + \frac{2\pi}{3}) & \sin(\theta_r(t) + \frac{2\pi}{3}) & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f_{qs}^r(t) \\ f_{ds}^r(t) \\ f_{0s}^r(t) \end{bmatrix} \quad (8)$$

Sabiendo que las coordenadas eléctrica del entrehierro $qd0$ fijas al rotor están dadas por:

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_r &= \omega_r(t) \Leftrightarrow \theta_r = \int_0^t \omega_r(\xi) \cdot d\xi + \theta_r(0) \\ \theta_r(t) &= P_p \cdot \theta_m(t) \therefore \omega_r(t) = P_p \cdot \omega_m(t) \end{aligned} \quad (9)$$

Se determina que el torque electromagnético se calcula utilizando la siguiente fórmula:

$$T_m(t) = \frac{3}{2} \cdot P_p \cdot [\lambda_m^r + i_{ds}^r(t) \cdot (L_d - L_q)] \cdot i_{qs}^r(t) \quad (10)$$

1.3.3. Subsistema térmico

se consideran únicamente las pérdidas eléctricas resistivas debido al efecto Joule en el bobinado del estator, sin tener en cuenta las pérdidas magnéticas en el núcleo. Además, se asume que la transferencia de calor se produce por conducción y convección natural, sin utilizar ventilación forzada.

La potencia de pérdidas calóricas se calcula utilizando las siguientes expresiones:

$$P_{s_{perd}}(t) = \frac{3}{2} \cdot R_s(t) \cdot [i_{qs}^r(t)^2 + i_{ds}^r(t)^2 + 2 \cdot i_{0s}(t)] \quad (11)$$

$$P_{s_{perd}}(t) = C_{ts} \cdot \dot{T}_s(t) + \frac{T_s(t) - T_{amb}(t)}{R_{ts-amb}} \quad (12)$$

Parámetros equivalentes:

- Momento de inercia (motor y caja): $J_m \approx 3.1 \times 10^{-6} \text{ kg.m}^2$
- Coeficiente de fricción viscosa (motor y caja): $b_m \approx 1.5 \times 10^{-5} \text{ N.m.rad/s}$
- Pares de polos magnéticos: $P_p = 3 \text{ pares (es decir, 6 polos)}$
- Flujo magnético equivalente de imanes concatenado por espiras del bobinado de estator: $\lambda'_{mr} \approx 0.01546 \text{ V.s/rad}$
- Inductancia de estator (eje en cuadratura): $L_q \approx 5.8 \text{ mH}$
- Inductancia de estator (eje directo): $L_d \approx 6.6 \text{ mH}$
- Inductancia de dispersión de estator: $L_{ls} \approx 0.8 \text{ mH}$
- Resistencia de estator, por fase: $R_s \approx 1.02 \Omega \text{ (@40 °C)} \rightarrow 1.32 \Omega \text{ (@115 °C)}$
- Coeficiente de aumento de R_s con $T_s^\circ(t)$: $\alpha_C = 3.9 \times 10^{-3} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$
- Capacitancia térmica de estator: $C_{ts} \approx 0.818 \text{ W}^\circ\text{C/s}$ (almacenamiento interno)
- Resistencia térmica estator-ambiente: $R_{ts-amb} \approx 146.7 \text{ }^\circ\text{C/W}$ (disipación al ambiente)
- Constante de tiempo térmica: $\tau_{ts-amb} = R_{ts-amb} \cdot C_{ts} \approx 120 \text{ s}$

Especificaciones de operación:

- Velocidad nominal rotor: $n_m \approx 6600 \text{ rpm}$ ($\omega_m \approx 691.15 \text{ rad/s}$)
- Tensión nominal de línea: $V_{sl} \approx 24 \text{ V}_{ca \text{ rms}}$ (tensión nominal de fase: $V_{sf} \approx V_{sl}\sqrt{3}$)
- Corriente nominal: $I_s \approx 0.4 \text{ A}_{ca \text{ rms}}$ (régimen continuo)
- Corriente máxima: $I_{s \text{ máx}} \approx 2.0 \text{ A}_{ca \text{ rms}}$ (corta duración, aceleración)
- Temperatura máxima de bobinado estator: $T_{s \text{ máx}} = 115 \text{ }^\circ\text{C}$
- Rango de temperatura ambiente de operación: $-15^\circ\text{C} \leq T_{amb} \leq 40^\circ\text{C}$

1.4. Inversor trifásico de alimentación

El sistema utiliza un inversor trifásico de 4 cuadrantes, compuesto por un puente trifásico con llaves electrónicas semi-conductoras, como transistores MOSFETs o IGBTs, alimentado desde una fuente ideal de corriente continua (CC). El inversor se controla mediante modulación de ancho de pulso (PWM) y proporciona tensiones de fase equilibradas y senoidales en el estator de la máquina eléctrica sincrónica.

El modelo promediado considera las tensiones de fase en el estator como senoidales de secuencia positiva (abc) equilibradas, con un módulo variable $V_{sl}(t)$ y una frecuencia $\omega_e(t)$. El ángulo de carga del rotor, $\delta(t)$, representa el desfase instantáneo entre la coordenada eléctrica fija al rotor y la coordenada eléctrica sincrónica del estator, y depende del torque erogado.

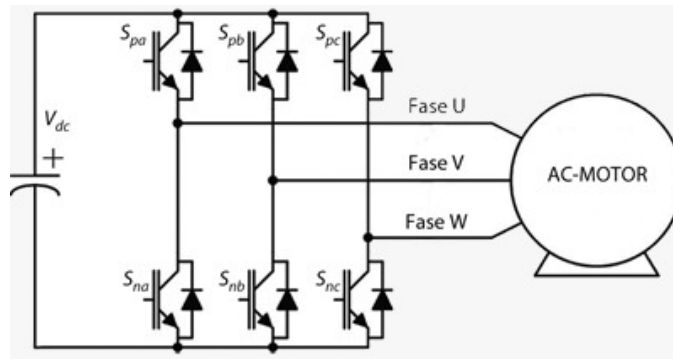


Figura 2: Circuito inversor ilustrativo

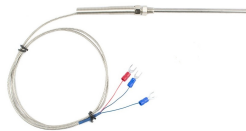
1.5. Sensores de realimentación

El sistema cuenta con varios dispositivos físicos para la medición y acondicionamiento de las variables. A continuación se describen los dispositivos y las variables medidas:

Un sensor de temperatura (por ejemplo, un sensor de resistencia térmica, RTD) ubicado en el bobinado del estator. La variable medida es $T_s(t)$, que se utiliza para monitorear el calentamiento y estimar la resistencia del estator, $R_s(t)$.

Sensor de posición angular (codificador incremental o "encoder") montado en el eje del motor. Se asume un proceso de "homing" y decodificación idealizada. La variable medida es $\theta_m(t)$, que representa la posición angular absoluta rectificada después de girar más de una revolución.

Tres sensores de corriente instantánea de fase, montados en la salida trifásica del inversor hacia los bornes del estator. Las variables medidas son $i_{as}(t)$, $i_{bs}(t)$ y $i_{cs}(t)$, que representan las corrientes instantáneas de fase.



(a) Sensor de temperatura



(b) Encoder



(c) Sensor de corriente

Figura 3: Imágenes ilustrativas

Se asume que todos los sensores tienen una respuesta ideal, es decir, un filtro "pasatodo" con ganancia unitaria y un ancho de banda infinito.

2. Modelado, Análisis y Simulación dinámica del SISTEMA FÍSICO a Lazo Abierto

2.1. Modelo matemático equivalente del subsistema mecánico completo

Para obtener el modelo matemático equivalente de un grado de libertad correspondiente al subsistema mecánico completo, primero debemos referenciar la carga al eje del rotor de la máquina eléctrica. Esto nos permitirá obtener un modelo matemático que tenga en cuenta la dinámica de la carga en relación con el rotor.

Comenzamos sustituyendo las ecuaciones de Carga mecánica (1), Tren de transmisión (3, 4), y Subsistema mecánico (5) de la máquina eléctrica.

$$(J_m + \frac{J_l}{r^2}) \cdot \dot{\omega}_m(t) = T_m(t) - (b_m + \frac{b_l}{r^2}) \cdot \omega_m(t) - \frac{T_l(t)}{r} \quad (13)$$

$$J_{eq} \cdot \dot{\omega}_m(t) = T_m(t) - b_{eq} \cdot \omega_m(t) - \frac{T_l(t)}{r} \quad (14)$$

$$\dot{\omega}_m(t) = \frac{1}{J_{eq}} \cdot [T_m(t) - b_{eq} \cdot \omega_m(t) - \frac{T_l(t)}{r}] \quad (15)$$

Se puede expresar de forma matricial como:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_m(t) \\ \dot{\omega}_m(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{b_{eq}}{J_{eq}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \theta_m(t) \\ \omega_m(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{J_{eq}} & -\frac{1}{J_{eq}r} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T_m(t) \\ T_l(t) \end{bmatrix} \\ y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \theta_m(t) \\ \omega_m(t) \end{bmatrix} \end{cases} \quad (16)$$

Con este modelo matemático equivalente referido al eje del motor tiene como ventaja que no presenta backlash, además no hay que considerar el efecto de la elasticidad torsional de la transmisión.

2.2. Modelo dinámico del sistema físico completo

2.2.1. Modelo global no lineal (NL)

En el modelo global no lineal consideramos todos los sistemas involucrados tanto el sistema mecánico, previamente desarmado, como los subsistemas de la máquina eléctrica.

En primer lugar, nos enfocaremos en el subsistema electromagnético, recordando que se utiliza un motor síncrono de corriente alterna (CA) trifásico con excitación de imanes permanentes. El estator está conectado en estrella con bornes *abc* accesible y neutro no accesible. Consideramos que la carga de cada fase será equivalente de forma que la conexión estrella este equilibrada.

Ecuaciones de tensión en coordenadas abc:

$$\begin{aligned} v_{as}(t) &= R_s(t) \cdot i_{as}(t) + \frac{d\lambda_{as}}{dt} \\ v_{bs}(t) &= R_s(t) \cdot i_{bs}(t) + \frac{d\lambda_{bs}}{dt} \\ v_{cs}(t) &= R_s(t) \cdot i_{cs}(t) + \frac{d\lambda_{cs}}{dt} \end{aligned} \quad (17)$$

Mediante la transformación de Park (7), se obtiene:

$$\begin{aligned} v_{qs}(t) &= R_s(t) \cdot i_{qs}(t) + L_q \cdot \dot{i}_{qs}^r(t) + [\lambda_m^r + L_d \cdot i_{ds}(t)] \cdot \omega_r(t) \\ v_{ds}(t) &= R_s(t) \cdot i_{ds}(t) + L_d \cdot \dot{i}_{ds}^r(t) - L_q \cdot i_{qs}(t) \cdot \omega_r(t) \\ v_{0s}(t) &= R_s(t) \cdot i_{0s}(t) + L_{ls} \cdot \dot{i}_{0s}^r(t) \end{aligned} \quad (18)$$

Reordenando nos quedan las ecuaciones que definen al sistema electromagnético:

$$\begin{cases} \dot{i}_{qs}(t) = \frac{1}{L_q} \cdot [v_{qs}^r(t) - R_s(t) \cdot i_{qs}^r(t) - P_p \cdot \omega_m(t) \cdot (L_d \cdot i_{ds}^r(t) + \lambda_m^r)] \\ \dot{i}_{ds}(t) = \frac{1}{L_d} \cdot [v_{ds}^r(t) - R_s(t) \cdot i_{ds}^r(t) + P_p \cdot \omega_m(t) \cdot L_q \cdot i_{qs}^r(t)] \\ \dot{i}_{0s}(t) = \frac{1}{L_{ls}} \cdot [v_{0s}^r(t) - R_s(t) \cdot i_{0s}^r(t)] \end{cases} \quad (19)$$

Recordando que el Torque electromagnético (10) se reordena la expresión de forma que quede despejada la variable de interés:

$$\dot{\omega}_m(t) = \frac{1}{J_{eq}} \cdot \left[\frac{3}{2} \cdot P_p \cdot [\lambda_m^r + i_{ds}^r(t) \cdot (L_d - L_q)] \cdot i_{qs}^r(t) - b_{eq} \cdot \omega_m(t) - \frac{T_l(t)}{r} \right] \quad (20)$$

El comportamiento subsistema térmico es descrito por las ecuaciones del (11, 12), igualando estas ecuaciones llegamos a la siguiente expresión:

$$\dot{T}_s(t) = \frac{1}{C_{ts}} \cdot \left[\frac{3}{2} \cdot R_s(t) \cdot [i_{qs}^r(t)^2 + i_{ds}^r(t)^2 + 2 \cdot i_{0s}(t)^2] - \frac{T_s(t) - T_{amb}(t)}{R_{ts-amb}} \right] \quad (21)$$

El modelo global no lineal queda definido por las ecuaciones (6), (19), (20) y (21).

$$\begin{cases} \dot{\theta}_m(t) = \omega_m(t) \\ \dot{\omega}_m(t) = \frac{1}{J_{eq}} \cdot [\frac{3}{2} \cdot P_p \cdot [\lambda_m^r + i_{ds}^r(t) \cdot (L_d - L_q)] \cdot i_{qs}^r(t) - b_{eq} \cdot \omega_m(t) - \frac{T_l(t)}{r}] \\ \dot{i}_{qs}(t) = \frac{1}{L_d} \cdot [v_{qs}^r(t) - R_s(t) \cdot i_{qs}^r(t) - P_p \cdot \omega_m(t) \cdot [L_d \cdot i_{ds}^r(t) + \lambda_m^r]] \\ \dot{i}_{ds}(t) = \frac{1}{L_d} \cdot [v_{ds}^r(t) - R_s(t) \cdot i_{ds}^r(t) + P_p \cdot \omega_m(t) \cdot L_q \cdot i_{qs}^r(t)] \\ \dot{i}_{0s}(t) = \frac{1}{L_{ls}} \cdot [v_{0s}^r(t) - R_s(t) \cdot i_{0s}^r(t)] \\ \dot{T}_s(t) = \frac{1}{C_{ts}} \cdot [\frac{3}{2} \cdot R_s(t) \cdot [i_{qs}^r(t)^2 + i_{ds}^r(t)^2 + 2 \cdot i_{0s}(t)^2] - \frac{T_s(t) - T_{amb}(t)}{R_{ts-amb}}] \end{cases} \quad (22)$$

De este sistema podemos definir el vector de las variables de estado, las entradas manipuladas, las entradas de perturbación y las salidas:

$$x(t) = \begin{bmatrix} \theta_m(t) \\ \omega_m(t) \\ i_{qs}^r(t) \\ i_{ds}^r(t) \\ i_{0s}(t) \\ T_s(t) \end{bmatrix}; \quad x(t_0) = \begin{bmatrix} \theta_{m0} \\ \omega_{m0} \\ i_{qs0}^r \\ i_{ds0}^r \\ i_{0s0} \\ T_{s0} \end{bmatrix}; \quad u(t) = \begin{bmatrix} v_{qs}^r(t) \\ v_{ds}^r(t) \\ v_{0s}(t) \end{bmatrix}; \quad d(t) = \begin{bmatrix} T_l(t) \\ T_{amb}(t) \end{bmatrix}; \quad y(t) = \begin{bmatrix} \theta_m(t) \\ \omega_m(t) \\ i_{qs}^r(t) \\ i_{ds}^r(t) \\ i_{0s}(t) \\ T_s(t) \end{bmatrix}$$

Utilizando las ecuaciones que modelan las distintas partes del sistema realizamos el diagrama de bloques utilizando la herramienta que nos provee Matlab, Simulink.

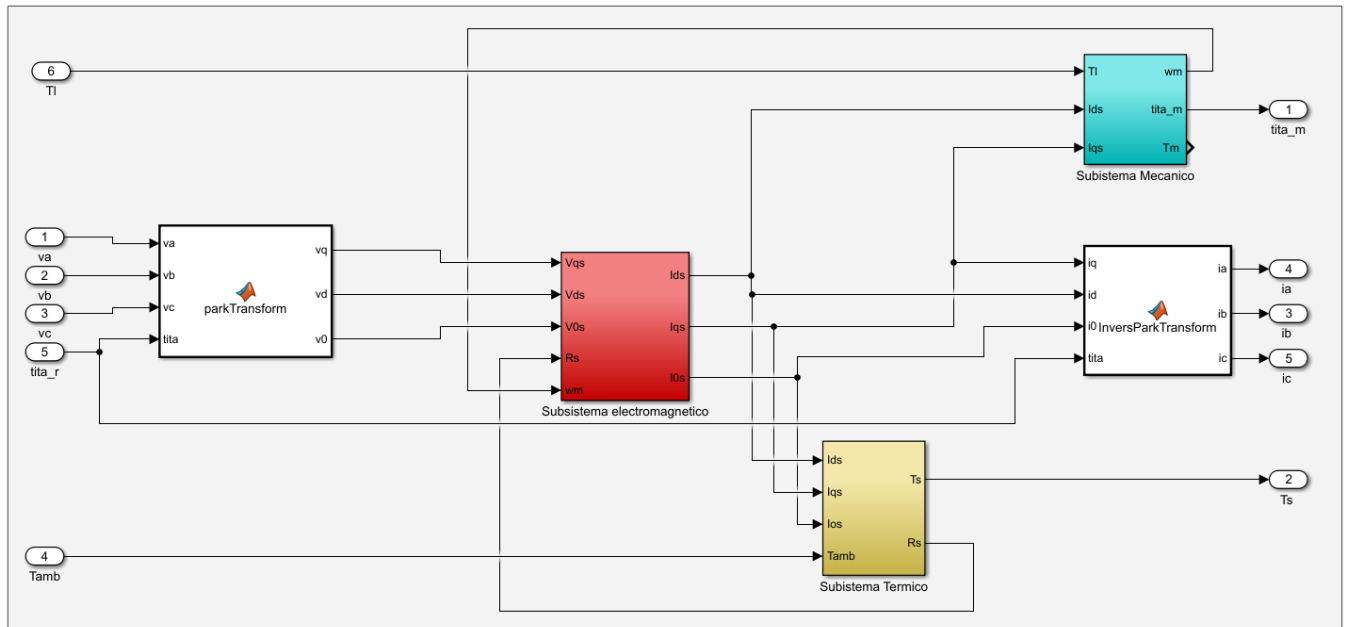


Figura 4: Modelo global no lineal

El subsistema mecánico esta compuesto por:

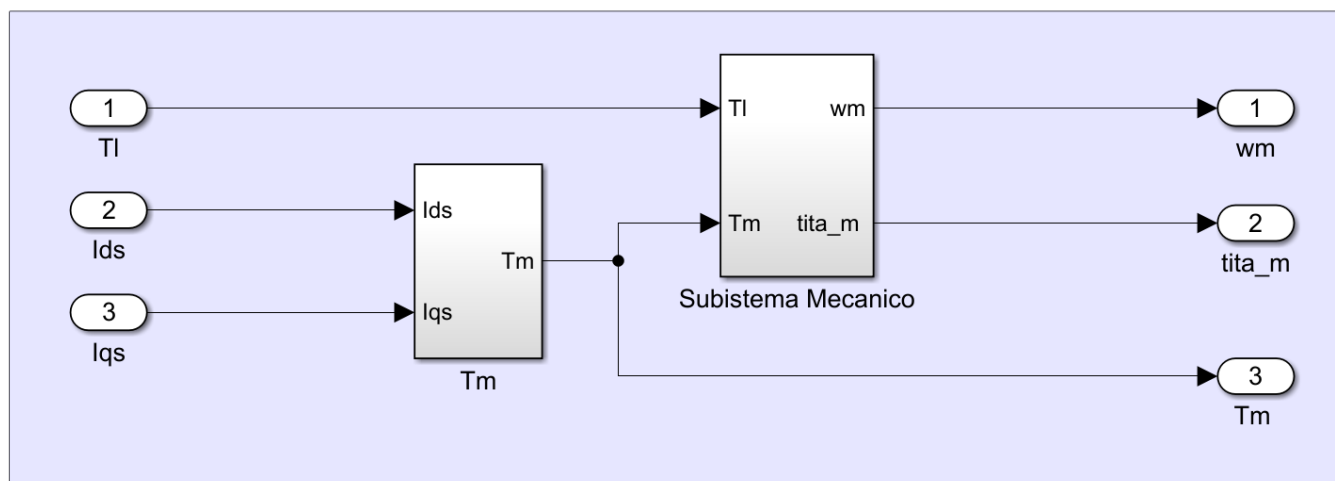


Figura 5: Diagramas de bloques subsistema mecánico

Donde los bloques interno son:

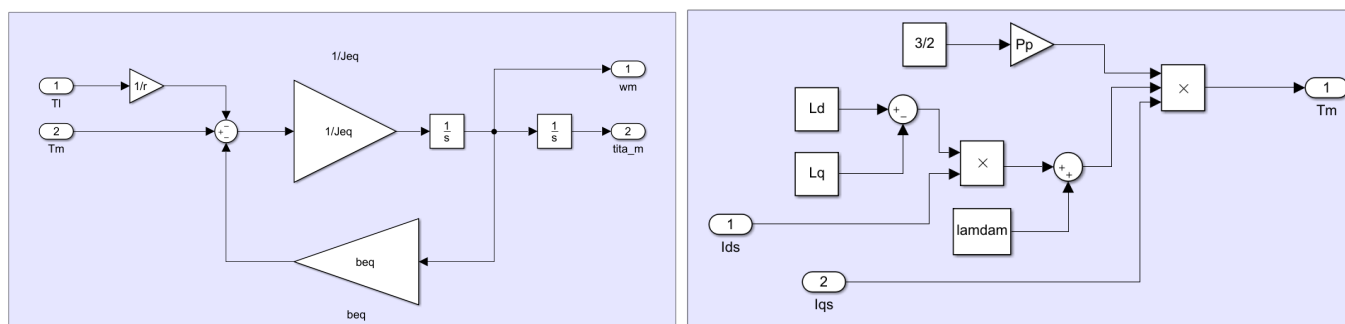


Figura 6: Bloques internos del subsistema mecánico

Mientras que el subsistema térmico esta dado por:

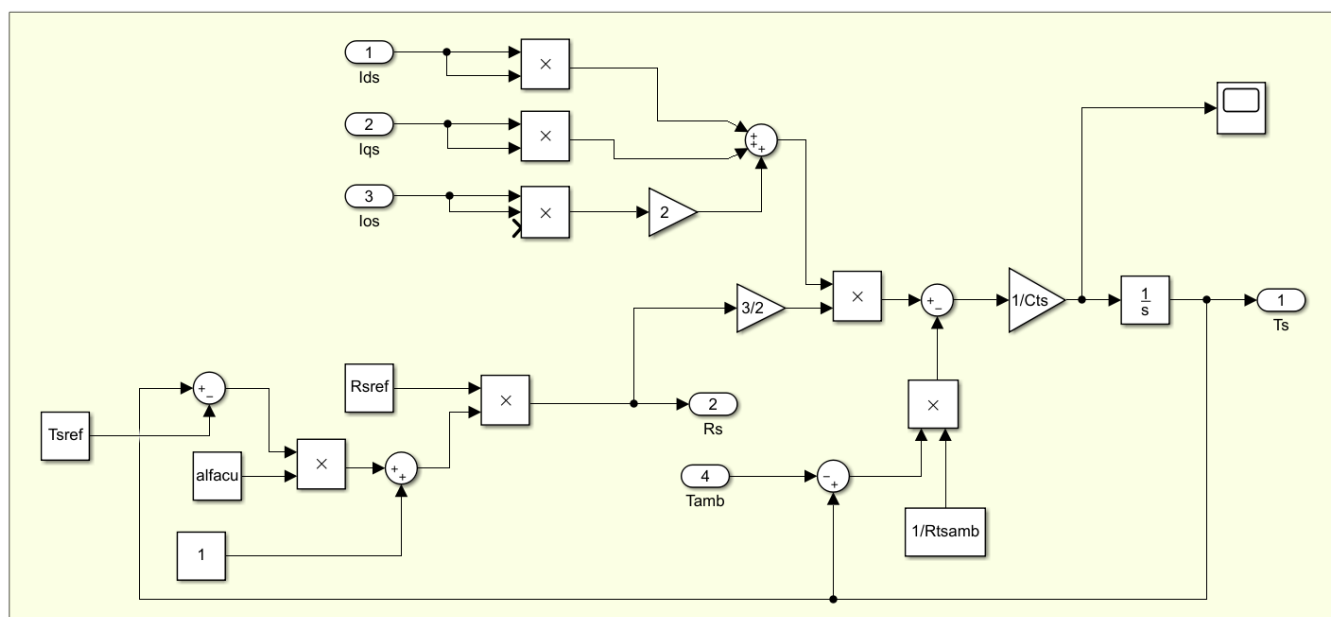
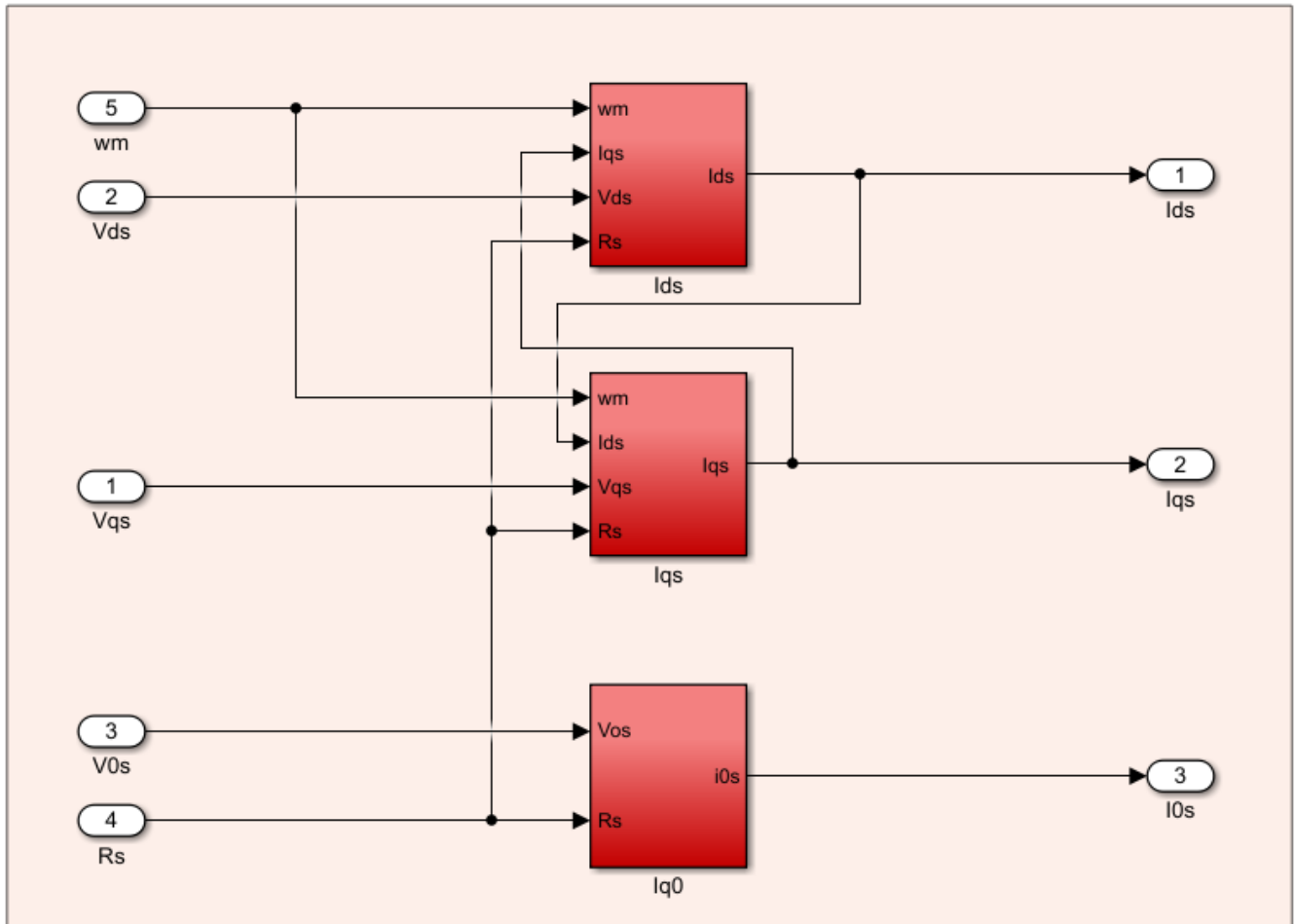


Figura 7: Diagramas de bloques subsistema térmico

Finalmente el subsistema electromagnético esta compuesto por:



Los bloques interno contienen:

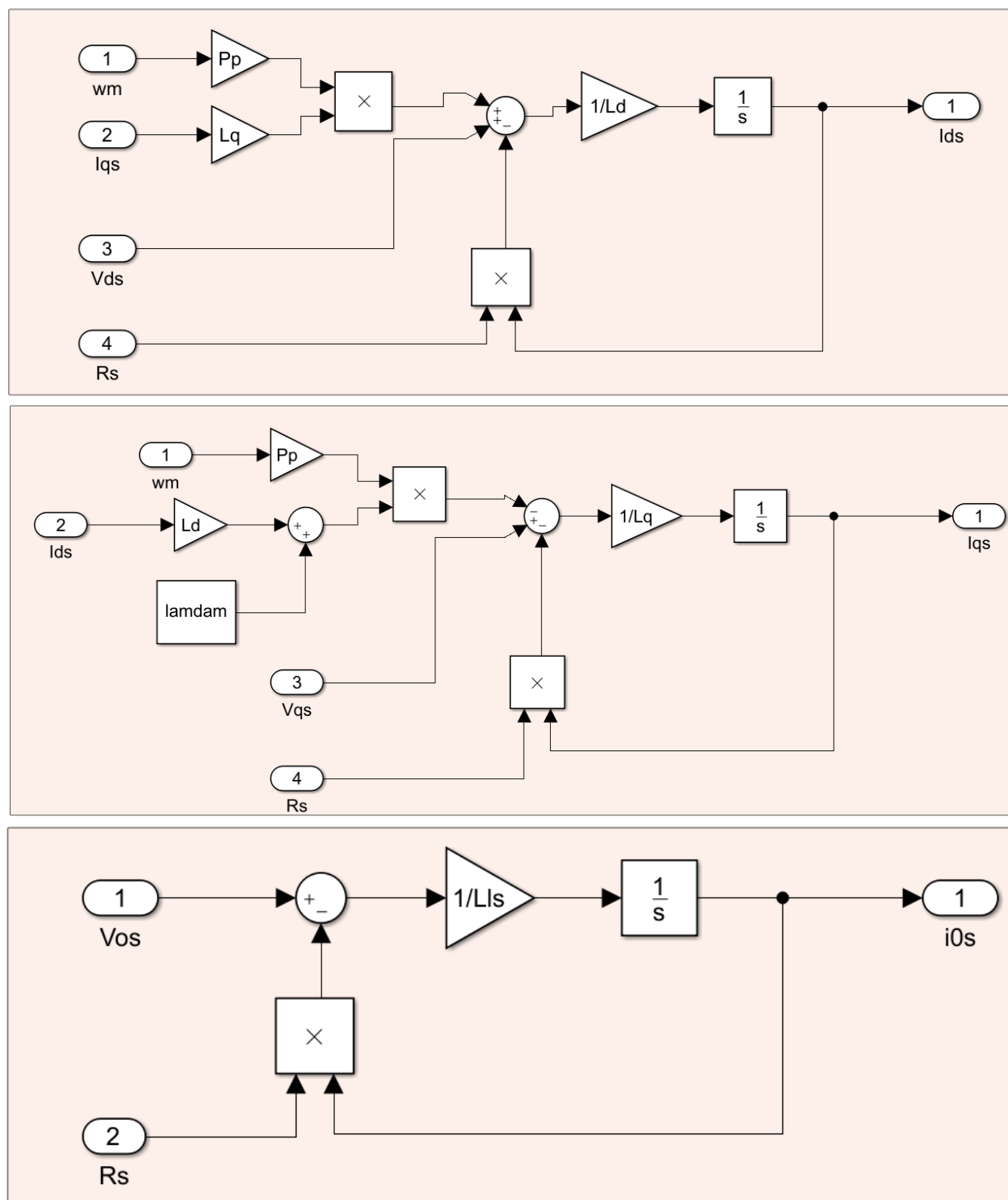


Figura 8: Bloques internos del subsistema electromagnético

2.2.2. Modelo global linealizado con parámetros variables (LPV)

Para el caso general en el que $i_{ds}(t) \neq 0$. Se puede representar al sistema no lineal de forma genérica como:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)); & x(t_0) = x_0 \\ y(t) = C.x(t) \end{cases} \quad (23)$$

Donde f es una función que representa la dinámica del sistema en términos de las variable de estado $x(t)$ y las estradas $u(t)$. Dados los punto de equilibrio dinámico donde las derivadas de las variables de estado son nulas:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) = 0 \quad (24)$$

Todos los pares de puntos $[X_0, U_0]$ que satisfacen la ecuación anterior definen el conjunto de puntos de operación. Estos puntos los consideraremos cuasi-estacionarios.

Alrededor de estos puntos consideraremos pequeñas variaciones infinitesimales:

$$\begin{cases} x(t) = X_0(t) + \Delta x(t) \\ u(t) = U_0(t) + \Delta u(t) \\ y(t) = Y_0(t) + \Delta y(t) \end{cases} \quad (25)$$

De forma que el el sistema genérico global NL queda representado por:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \dot{X}_0(t) + \Delta \dot{x}(t) = f(X_0(t) + \Delta x(t), U_0(t) + \Delta u(t)) \\ X_0(0) + \Delta x(0) = x_0 \rightarrow X_0 = x_0, \Delta x(0) = 0 \\ Y_0(t) + \Delta y(t) = C(X_0(t) + \Delta x(t)) \rightarrow Y_0(t) = CX_0(t); \Delta y(t) = C\Delta x(t) \end{cases} \quad (26)$$

Aproximación mediante la serie de Taylor truncada al primer orden y despreciando los terminos de orden superior:

$$f(X_0(t) + \Delta x(t), U_0(t) + \Delta u(t)) \approx f(X_0(t), U_0(t)) + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_0 \Delta x(t) + \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_0 \Delta u(t) \quad (27)$$

Al aplicar esto a nuestro modelo NL el sistema se divide en dos partes, una NL cuasi-estacionaria y otra lineal dinámica que representa las pequeñas variaciones alrededor de puntos de operación.

Modelo NL cuasi-estacionario:

$$\dot{X}_0(t) = f(X_0(t), U_0(t)) \approx 0 / \text{cte}; \quad X_0(0) = x_0 \quad (28)$$

Modelo lineal dinámico:

$$\Delta \dot{x}(t) = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_0 \Delta x(t) + \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_0 \Delta u(t); \quad \Delta x(0) = 0 \quad (29)$$

Al aplicar este concepto a las ecuaciones del Modelo global NL (22) obtenemos:

■ Espacio de operación global NL (cuasi - estacionario)

$$\begin{cases} \dot{\theta}_{m0} = \omega_{m0} = \text{cte} \\ \dot{\omega}_{m0} = \frac{1}{J_{eq}} \cdot [\frac{3}{2} \cdot P_p \cdot [\lambda_m^r + i_{ds0}^r \cdot (L_d - L_q)] \cdot i_{qs0}^r - b_{eq} \cdot \omega_{m0} - \frac{T_{l0}}{r}] = 0 \\ \dot{i}_{qs0} = \frac{1}{L_q} \cdot [v_{qs0}^r - R_s(t) \cdot i_{qs0}^r - P_p \cdot \omega_{m0} \cdot [L_d \cdot i_{ds0}^r + \lambda_m^r]] = 0 \\ \dot{i}_{ds0} = \frac{1}{L_d} \cdot [v_{ds0}^r - R_s(t) \cdot i_{ds0}^r + P_p \cdot \omega_{m0} \cdot L_q \cdot i_{qs0}^r] = 0 \\ \dot{i}_{0s0} = \frac{1}{L_{ls}} \cdot [v_{0s0}^r - R_s(t) \cdot i_{0s0}^r] = 0 \\ \dot{T}_{s0} = \frac{1}{C_{ts}} \cdot [\frac{3}{2} \cdot R_s(t) \cdot [i_{qs0}^r]^2 + i_{ds0}^r{}^2 + 2 \cdot i_{0s0}^r] - \frac{T_{s0} - T_{amb0}}{R_{ts-amb}}] = 0 \end{cases} \quad (30)$$

■ Modelo dinámico LPV

$$\begin{cases} \Delta \dot{\theta}_m(t) = \Delta \omega_m(t) \\ \Delta \dot{\omega}_m(t) = \frac{1}{J_{eq}} \cdot [\frac{3}{2} \cdot P_p \cdot \{[\lambda_m^r + i_{ds0}^r \cdot (L_d - L_q)] \cdot \Delta i_{qs}^r(t) + \Delta i_{ds}^r(t) \cdot (L_d - L_q)\} \cdot i_{qs0}^r - b_{eq} \cdot \Delta \omega_m(t) - \frac{\Delta T_l(t)}{r}] \\ \Delta \dot{i}_{qs}(t) = \frac{1}{L_q} \cdot [\Delta v_{qs}^r(t) - R_s(t) \cdot \Delta i_{qs}^r(t) - P_p \cdot \Delta \omega_m(t) \cdot [L_d \cdot i_{ds0}^r + \lambda_m^r] - P_p \cdot \omega_{m0} \cdot L_d \cdot \Delta i_{ds}^r(t)] \\ \Delta \dot{i}_{ds}(t) = \frac{1}{L_d} \cdot \Delta [v_{ds}^r(t) - R_s(t) \cdot \Delta i_{ds}^r(t) + P_p \cdot \Delta \omega_m(t) \cdot L_q \cdot i_{qs0}^r + P_p \cdot \omega_{m0} \cdot L_q \cdot \Delta i_{qs}^r(t)] \\ \Delta \dot{i}_{0s}(t) = \frac{1}{L_{ls}} \cdot [\Delta v_{0s}^r(t) - R_s(t) \cdot \Delta i_{0s}^r(t)] \\ \Delta \dot{T}_s(t) = \frac{1}{C_{ts}} \cdot \{ \frac{3}{2} \cdot R_s(t) \cdot [2 \cdot i_{qs}^r \cdot \Delta i_{ds}^r(t) + 2 \cdot i_{as}^r \cdot \Delta i_{as}^r(t) + 4 \cdot i_{0s} \cdot \Delta i_{0s}(t)] - \frac{\Delta T_s(t) - \Delta T_{amb}(t)}{R_{ts-amb}} \} \end{cases} \quad (31)$$

En forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \Delta \dot{\theta}_m(t) \\ \Delta \dot{\omega}_m(t) \\ \Delta \dot{i}_{qs}(t) \\ \Delta \dot{i}_{ds}(t) \\ \Delta \dot{i}_{0s}(t) \\ \Delta \dot{T}_s(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -b_{eq} & \frac{3}{2} P_p \cdot \frac{[\lambda_m^r + i_{qs}^r(t) \cdot (L_d - L_q)]}{J_{eq}} & \frac{3}{2} \cdot \frac{P_p \cdot (L_d - L_q) \cdot i_{qs}^r}{J_{eq}} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{P_p \cdot (\lambda_m^r + L_d \cdot i_{ds}^r)}{L_q} & -\frac{R_s(t)}{L_q} & -\frac{L_d \cdot P_p \cdot \omega_{m0}}{L_q} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{P_p \cdot i_{qs}^r \cdot L_q}{L_d} & \frac{L_q \cdot P_p \cdot \omega_{m0}}{L_d} & -\frac{R_s(t)}{L_d} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{R_s(t)}{L_{ls}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3 \cdot R_s(t)}{C_{ts}} \cdot i_{qs}^r & \frac{3 \cdot R_s(t)}{C_{ts}} \cdot i_{ds}^r & \frac{6 \cdot R_s(t)}{C_{ts}} \cdot i_{0s}^r & -\frac{1}{C_{ts} \cdot R_{ts-amb}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta \theta_m(t) \\ \Delta \omega_m(t) \\ \Delta i_{qs}(t) \\ \Delta i_{ds}(t) \\ \Delta i_{0s}(t) \\ \Delta T_s(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{r J_{eq}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_q} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{L_d} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{L_{ls}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{C_{ts} R_{ts-amb}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta T_l(t) \\ \Delta V_{qs}(t) \\ \Delta V_{ds}(t) \\ \Delta V_{0s}(t) \\ \Delta T_{amb}(t) \end{bmatrix}$$

2.2.3. Linealización por Realimentación NL

Podemos obtener un modelo simplificado lineal invariante en el tiempo (LTI) equivalente del sistema si aplicamos una estrategia de control vectorial con campo orientado en el controlador para imponer que la corriente en el eje d $i_{ds}(t)$ sea igual a cero. Además, podemos despreciar el acoplamiento no lineal con el subsistema térmico debido a las pequeñas variaciones de la resistencia R_s con la temperatura, lo que nos permite considerar su dinámica como lineal.

Considerando que el estator de la máquina eléctrica es de tipo estrella con neutro flotante, podemos afirmar que la suma de las corrientes de fase abc será nula. Con esto, podemos aplicar una transformación directa de Park para relacionar las corrientes en el sistema.

Para lograr la desacoplar los canales de flujo magnético y torque, aplicamos la estrategia de "Control Vectorial con campo orientado." Esto consiste en forzar una corriente nula en el eje d $i_{ds}(t) = 0$ mediante el controlador y, si es necesario, aplicar una "Restricción o Ley de Control NL" sobre la variable manipulada virtual $v_{qd0s}(t)$ o su equivalente por transformada de Park, $v_{abc}(t)$.

Para desacoplar el subsistema térmico, consideramos que las variaciones en la resistencia R_s en el rango de temperaturas de trabajo son despreciables y, por lo tanto, la temperatura no afectará significativamente el comportamiento del resto del sistema. Esto nos permite asumir una dinámica lineal para el subsistema térmico.

I. Ecuaciones vectoriales/matriciales LTI de estado y de salida.

Aplicadas las condiciones mencionadas nos queda un sistema LTI similar al de un maquina de corriente continua con escobillas. El estado inicial sera nulo.

$$\begin{cases} \dot{\theta}_m(t) = \omega_m(t) \\ \dot{\omega}_m(t) = \frac{1}{J_{eq}} \left[\frac{3}{2} P_p \lambda_m^r i_{qs}^r(t) - b_{eq} \omega_m(t) - \frac{T_l(t)}{r} \right] \\ \dot{i}_{qs}(t) = \frac{1}{L_q} [v_{qs}^r(t) - R_s i_{qs}^r(t) - P_p \omega_m(t) \lambda_m^r] \end{cases} \quad (32)$$

De forma matricial:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_m(t) \\ \dot{\omega}_m(t) \\ \dot{i}_{qs}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{b_{eq}}{J_{eq}} & \frac{3}{2} \frac{P_p \lambda_m^r}{J_{eq}} \\ 0 & -\frac{P_p \lambda_m^r}{L_q} & -\frac{R_s}{L_q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_m(t) \\ \omega_m(t) \\ i_{qs}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L_q} \end{bmatrix} v_{qs}^r(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{r J_{eq}} \end{bmatrix} T_l(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_m(t) \\ \omega_m(t) \\ i_{qs}(t) \end{bmatrix} \end{cases} \quad (33)$$

Para linealizar el subsistema térmico podemos suponer que R_s sera constante debido a su poca variación de forma que:

$$\dot{T}_s(t) = \frac{1}{C_{ts}} \left[\frac{3}{2} R_s i_{qs}^r(t)^2 - \frac{T_s(t) - T_{amb}(t)}{R_{ts-amb}} \right] \quad (34)$$

II. Diagrama de bloques de estado

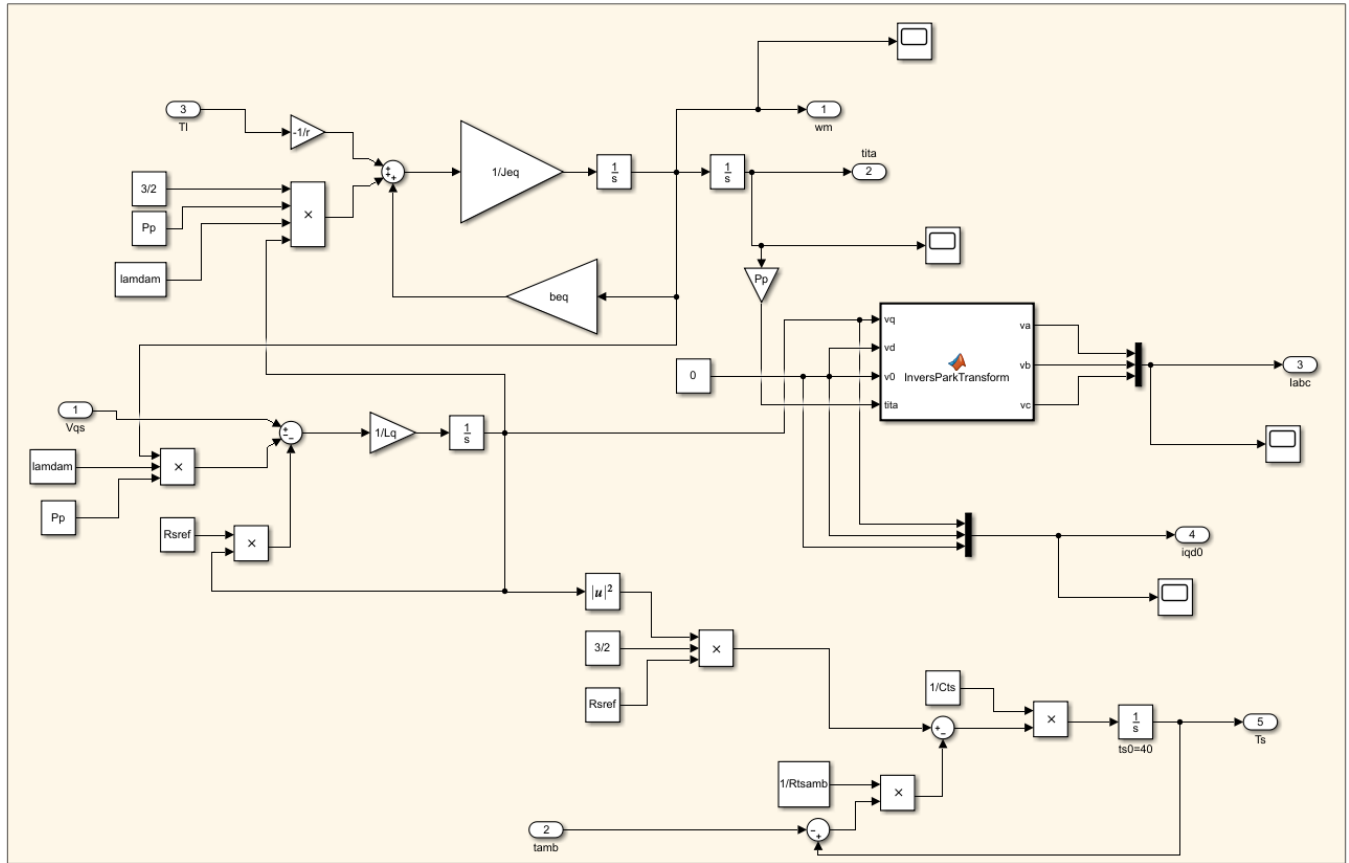


Figura 9: Diagrama de bloques de estado del sistema LTI.

III. Restricción o Ley de Control mínima

Para poder cumplir con la restricción de $i_{ds} = 0$ se tiene que cumplir la condición dada por la ecuación (18). De manera que:

$$v_{ds}^r(t) = -L_q \cdot i_{qs}^r(t) \cdot \omega_m(t) \cdot P_p \quad (35)$$

Dado que se trata de una variable virtual no podemos controlarla directamente, por lo que buscaremos expresarla en termino de las coordenadas "abc", por lo que aplicamos la transformada inversa de Park. Resolviendo llegamos a:

$$\begin{cases} v_{as}(t) = \cos(\theta_r(t)) \cdot v_{qs}^r(t) + \sin(\theta_r(t)) \cdot v_{ds}^r(t) + v_{0s}^r(t) \\ v_{bs}(t) = \cos(\theta_r(t) - \frac{2\pi}{3}) \cdot v_{qs}^r(t) + \sin(\theta_r(t) - \frac{2\pi}{3}) \cdot v_{ds}^r(t) + v_{0s}^r(t) \\ v_{cs}(t) = \cos(\theta_r(t) + \frac{2\pi}{3}) \cdot v_{qs}^r(t) + \sin(\theta_r(t) + \frac{2\pi}{3}) \cdot v_{ds}^r(t) + v_{0s}^r(t) \end{cases} \quad (36)$$

Dado que los valores de $v_{ds}(t)$ y $v_{0s}(t)$ son conocidos los sustituimos:

$$\begin{cases} v_{as}(t) = \cos(\theta_r(t)) v_{qs}^r(t) - \sin(\theta_r(t)) L_q i_{qs}^r(t) \omega_m(t) P_p \\ v_{bs}(t) = \cos(\theta_r(t) - \frac{2\pi}{3}) v_{qs}^r(t) - \sin(\theta_r(t) - \frac{2\pi}{3}) L_q i_{qs}^r(t) \omega_m(t) P_p \\ v_{cs}(t) = \cos(\theta_r(t) + \frac{2\pi}{3}) v_{qs}^r(t) - \sin(\theta_r(t) + \frac{2\pi}{3}) L_q i_{qs}^r(t) \omega_m(t) P_p \end{cases} \quad (37)$$

Esta sera la realimentación necesaria para desacoplar los canales de flujo magnético y torque.

IV. Implementación sobre el modelo global NL

Implementamos la ley de control al modelo global NL, e incorporamos el inversor trifásico (modulador de tensión) y los sensores que consideramos por el momento ideales.

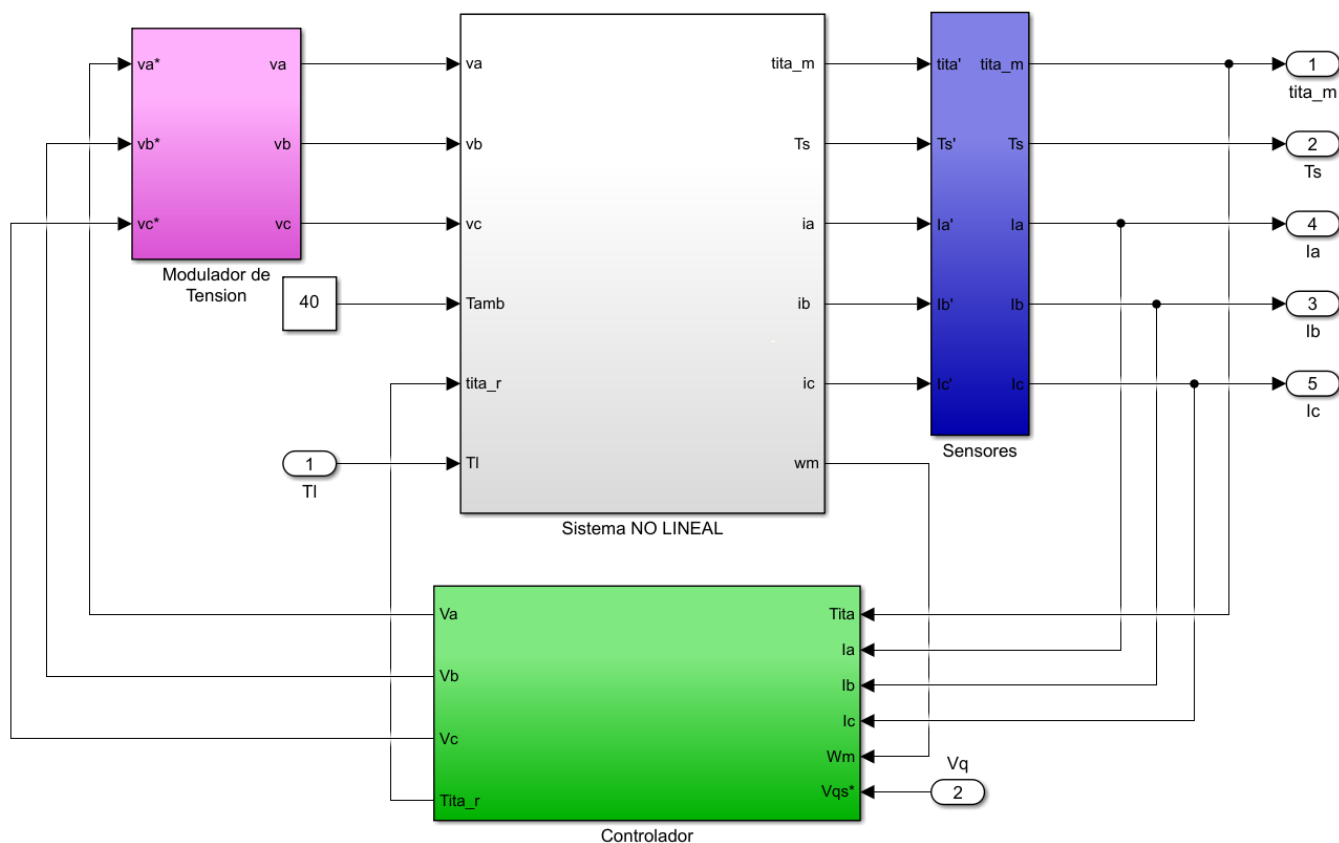


Figura 10: Diagrama de bloques del sistema NL con restricción o ley de control mínima.

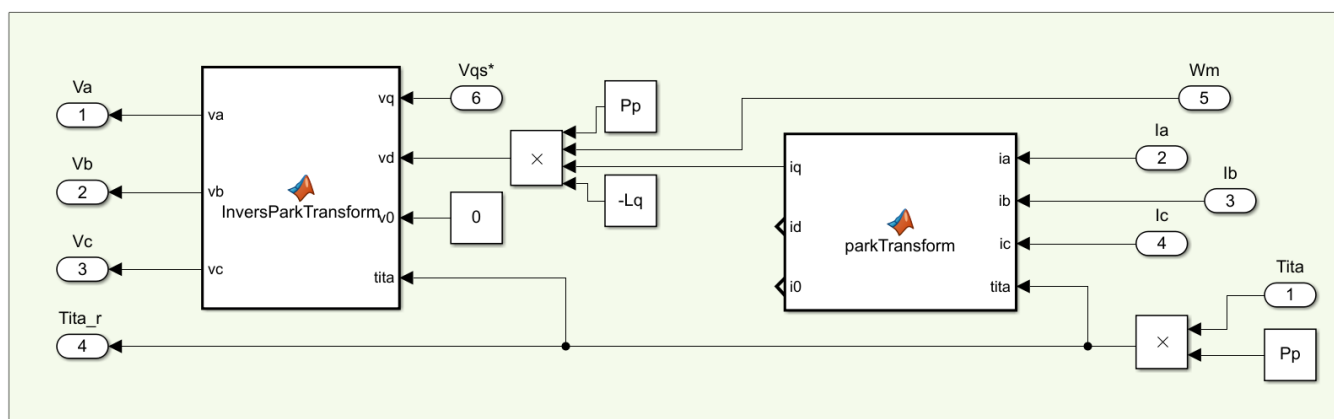


Figura 11: Diagrama del controlador.

v. Dinámica Residual

Al aplicar la ley de control mínimo supusimos que $i_{ds} = 0$, sin embargo, esto no es del todo cierto por lo que se debe tener en cuenta la dinámica residual de la corriente i_{ds} , la cual se puede modelar con la siguiente EDO:

$$\frac{di_{ds}^r(t)}{dt} = \frac{1}{L_d}[-R_s(t)i_{ds}^r(t)]$$

$$\frac{di_{ds}^r(t)}{dt} + \frac{R_s(t)}{L_d}i_{ds}^r(t) = 0$$

La cual tiene como solución:

$$i_{ds}^r(t) = i_{ds}^r(0)e^{-\frac{R_s(t)}{L_d}t} \quad (38)$$

Esta solución nos indica que el efecto de la dinámica residual es despreciable en el tiempo, ya que actúa como un sistema subamortiguado de primer orden.

En régimen natural producirá un comportamiento no lineal sobre el sistema que esta dado por:

$$v_{qs}(t) = L_q \frac{di_{qs}^r(t)}{dt} + R_s i_{qs}^r(t) + P_p \omega_m(t) \lambda_m^r + L_d i_{ds}^r(t) P_p \omega_m(t) \quad (39)$$

Incorporando la dinámica residual al modelo LTI:

$$\begin{cases} \dot{\theta}_m(t) = \omega_m(t) \\ \dot{\omega}_m(t) = -\frac{1}{J_{eq}} \left[\frac{3}{2} P_p \lambda_m^r i_{qs}^r(t) - b_{eq} \omega_m(t) - \frac{T_l(t)}{r} \right] \\ \dot{i}_{qs}^r(t) = \frac{1}{L_q} [v_{qs}^r(t) - R_s i_{qs}^r(t) - P_p \omega_m(t) \lambda_m^r] \\ \dot{i}_{ds}^r(t) = -\frac{R_s(t)}{L_d} i_{ds}^r(t) \\ \dot{T}_s(t) = \frac{1}{C_{ts}} \left\{ \frac{3}{2} R_s(t) [i_{qs}^r(t)^2 + i_{ds}^r(t)^2] - \frac{1}{R_{ts-amb}} [T_s(t) - T_{amb}(t)] \right\} \end{cases} \quad (40)$$

VI. Restricción Ley de Control complementaria mínima en el eje q

Para anular el efecto NL del acoplamiento de la dinámica residual podemos a partir de la ecuación (39) plantear la siguiente restricción sobre el eje q de forma que la no linealidad se anule:

$$v_{qs}(t) = L_q \frac{di_{qs}^r(t)}{dt} + R_s i_{qs}^r(t) + P_p \omega_m(t) \lambda_m^r + L_d i_{ds}^r(t) P_p \omega_m(t) - L_d i_{ds}^r(t) P_p \omega_m(t) \quad (41)$$

A continuación se muestran los modelos LTI equivalente aumentado y el NL desacoplado con Ley de Control NL.

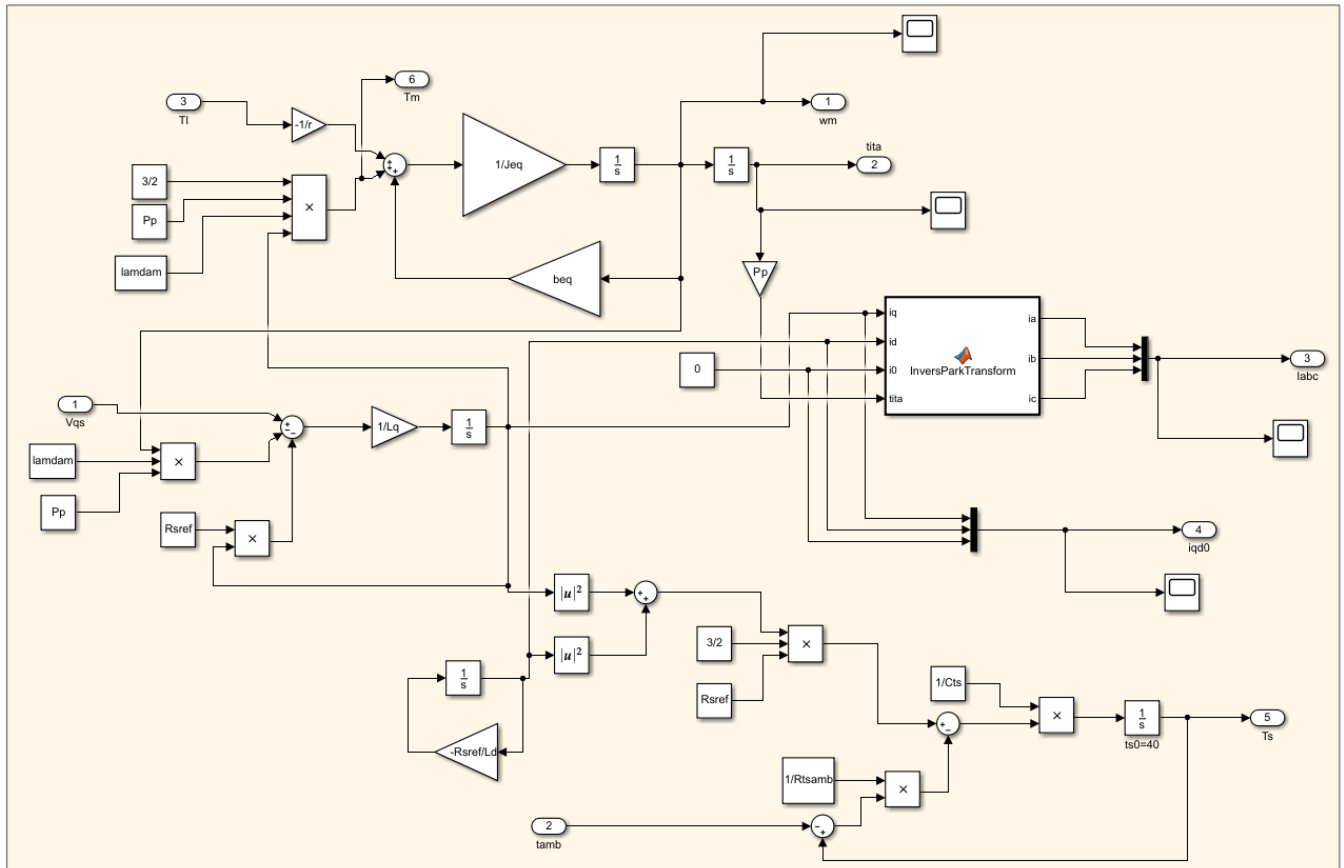


Figura 12: Diagrama de bloques del modelo LTI equivalente aumentado.

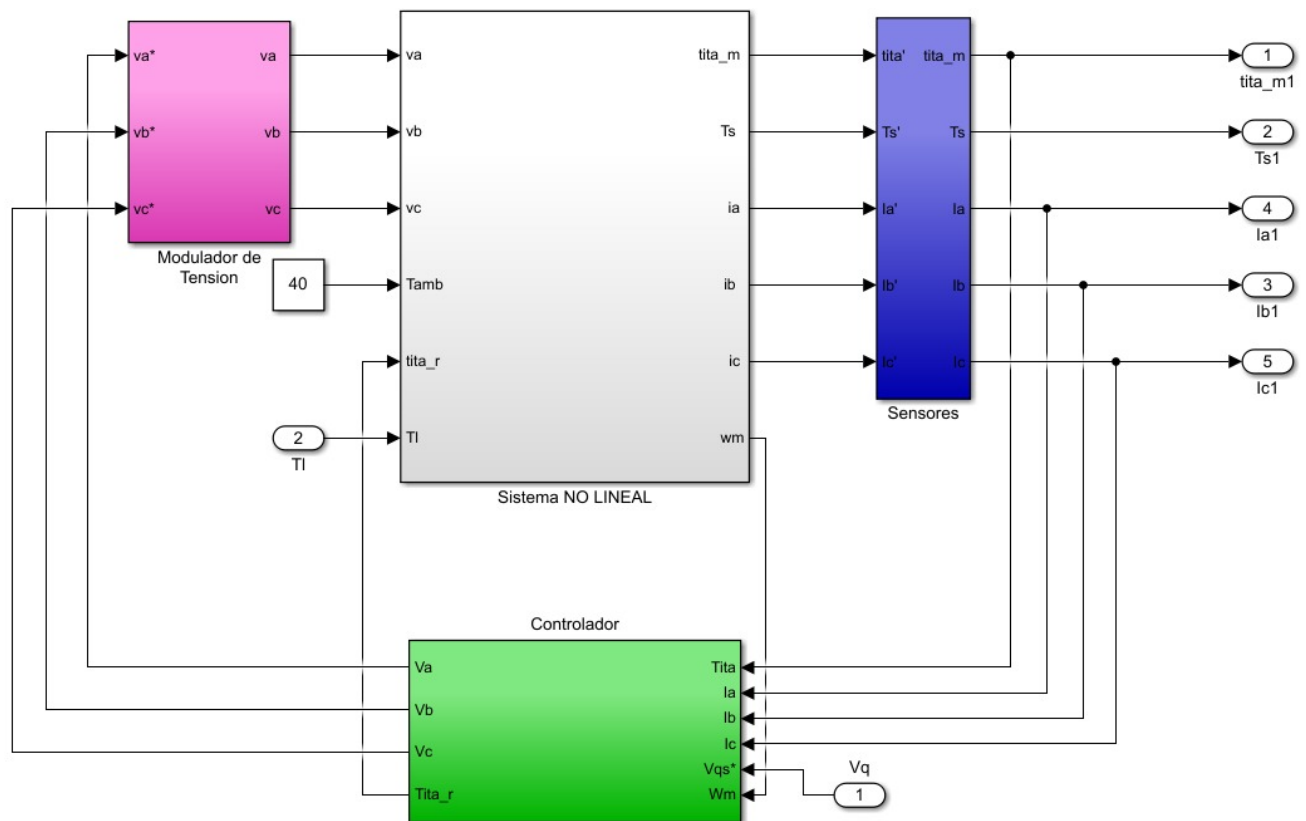


Figura 13: Diagrama de bloques del sistema NL con ley de control mínima en eje d y q.

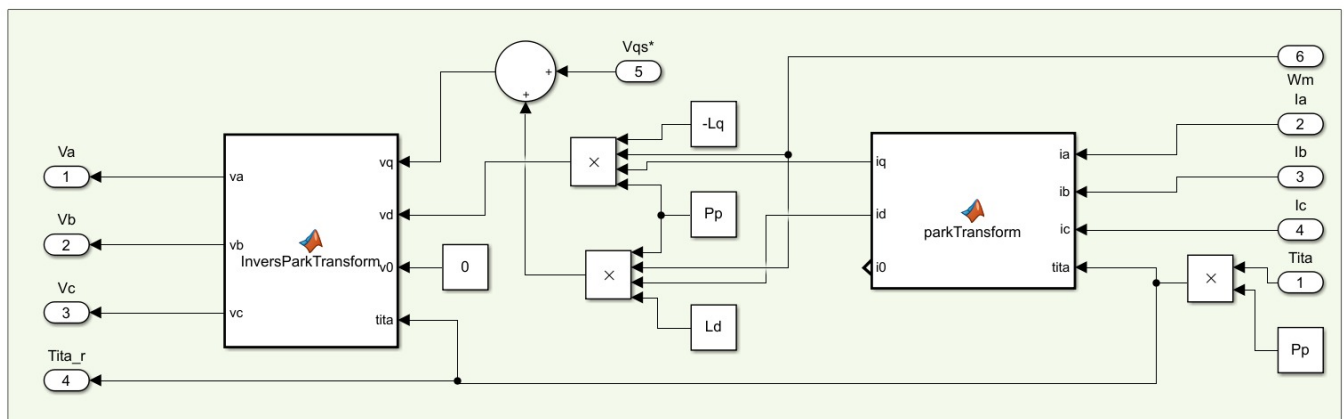


Figura 14: Diagrama del controlador.

2.2.4. Comparación modelo dinámico LTI equivalente aumentado vs modelo dinámico global LPV

El Modelo Dinámico Global LPV se basa en el concepto de Variabilidad de Parámetros Lineales (LPV), lo que significa que considera la variación de los parámetros en función de ciertas variables, como la corriente en directo $i_{ds}^r(t)$. Este enfoque tiene la ventaja de tener en cuenta la esencia no lineal del sistema, lo que permite una representación más precisa y realista del comportamiento del sistema en diferentes puntos de operación. Debido a esta consideración de parámetros variables, el modelo global LPV ofrece una mayor cantidad de puntos de trabajo en comparación con el modelo LTI equivalente.

Por otro lado, el Modelo Dinámico LTI Equivalente Aumentado es un caso particular del modelo LPV, donde se impone la restricción $i_{ds}^r(t) \equiv 0$, es decir, la corriente en directo se mantiene constante. Esta restricción conduce a un sistema lineal y más simple, lo que facilita el análisis matemático y el diseño de controladores. Sin embargo, esta simplicidad viene a expensas

de la pérdida de la esencia no lineal del sistema real, lo que puede limitar la precisión de las predicciones en ciertos escenarios.

■ Respecto al par electromagnético:

Recordando la ecuación (10) que describe el comportamiento del Torque Electromagnético. Podemos observar que para motores de polos salientes $L_d > L_q$, entonces cuando $i_{ds}^r(t)$ toma valores **positivos** el campo magnético se refuerza lo que aumenta el torque del motor. Si la corriente directa toma valores **negativos** el campo magnético se debilita y disminuye el torque del motor. En el caso que $i_{ds}^r(t) = 0$, el flujo concatenado solamente esta afectado por los imanes permanentes.

■ Respecto al subsistema eléctrico:

$$\dot{i}_{ds}^r = \frac{1}{L_d} [v_{ds}(t) - R_s(t)i_{ds}^r(t) + L_q i_{qs}^r(t) P_p \omega[m](t)] = 0 \quad (42)$$

$$\omega_m(t) = \frac{-v_{ds}(t) + R_s(t)i_{ds}^r(t)}{L_q} \quad (43)$$

En este caso, la velocidad del motor disminuye cuando la corriente i_{ds}^r aumenta. Por lo que podemos concluir que el torque reaccionara inversamente a la velocidad.

En términos de diseño y control, los modelos lineales, como el LTI equivalente aumentado, son más fáciles de manejar matemáticamente y permiten el diseño de controladores óptimos con herramientas establecidas como el control óptimo y la teoría de control de retroalimentación. Además, son más eficientes computacionalmente, lo que facilita la simulación y el análisis rápido del sistema. Sin embargo, los modelos no lineales, como el LPV, ofrecen una mayor precisión y flexibilidad en la representación de sistemas reales complejos.

2.2.5. Funciones de transferencia para el modelo LTI

Las funciones de transferencia nos permiten relacionar las salidas con las entradas del sistema. Como nuestro sistema dispone de dos entradas obtendremos dos funciones de transferencia. Aplicando la transformada de Laplace $L[f(t)] = F(s)$ a las ecuaciones del modelo LTI (32), además, recordando que la transformada de Laplace posee la siguiente propiedad

$$L[\dot{f}(t)] = s.F(s) - f(0) \quad (44)$$

Entonces al aplicar la transformada y recordando que las condiciones iniciales son nulas, el modelo queda:

$$\begin{cases} s.\Theta_m(s) = \Omega_m(s) \\ s.\Omega_m(s) = \frac{1}{J_{eq}} \cdot [\frac{3}{2} \cdot P_p \cdot \lambda_m^r \cdot I_{qs}^r(s) - b_{eq} \cdot \Omega_m(s) - \frac{T_l(s)}{r}] \\ s.I_{qs}^r(s) = \frac{1}{L_q} \cdot [v_{qs}^r(s) - R_s \cdot I_{qs}^r(s) - P_p \cdot \Omega_m(s) \cdot \lambda_m^r] \end{cases} \quad (45)$$

Para obtener las funciones de transferencia del modelo, primero despejamos $I_{qs}^r(s)$ de la tercera ecuación y la reemplazamos en la segunda. Luego despejamos $\Omega_m(s)$ para finalmente reemplazarla en la primer ecuación y obtener la expresión que representa la salida del sistema:

$$\Theta_m(s) = \frac{\frac{3}{2} \cdot P_p \cdot \lambda_m^r \cdot v_{qs}(s) - \frac{1}{r} \cdot (s \cdot L_q + R_s) \cdot T_l(s)}{s^3 \cdot J_{eq} \cdot L_q + s^2 \cdot (b_{eq} \cdot L_q + R_s \cdot J_{eq}) + s \cdot [b_{eq} \cdot R_s + \frac{3}{2} \cdot (P_p \cdot \lambda_m^r)^2]} \quad (46)$$

De esta expresión se obtienen las funciones de transferencia respecto de las entradas tensión $v_{qs}(s)$ y torque $T_l(s)$

$$G_1(s) = \frac{\Theta_m(s)}{v_{qs}(s)} = \frac{\frac{3}{2} \cdot P_p \cdot \lambda_m^r}{s^3 \cdot J_{eq} \cdot L_q + s^2 \cdot (b_{eq} \cdot L_q + R_s \cdot J_{eq}) + s \cdot [b_{eq} \cdot R_s + \frac{3}{2} \cdot (P_p \cdot \lambda_m^r)^2]} \quad (47)$$

$$G_2(s) = \frac{\Theta_m(s)}{T_l(s)} = \frac{-\frac{1}{r} \cdot (s \cdot L_q + R_s)}{s^3 \cdot J_{eq} \cdot L_q + s^2 \cdot (b_{eq} \cdot L_q + R_s \cdot J_{eq}) + s \cdot [b_{eq} \cdot R_s + \frac{3}{2} \cdot (P_p \cdot \lambda_m^r)^2]} \quad (48)$$

2.3. Análisis de Estabilidad

Para realizar un análisis de estabilidad debemos primero determinar polos (ceros del denominador) del sistema a partir de la función de transferencia obtenida anteriormente:

$$s^3 \cdot J_{eq} \cdot L_q + s^2 \cdot (b_{eq} \cdot L_q + R_s \cdot J_{eq}) + s \cdot [b_{eq} \cdot R_s + \frac{3}{2} \cdot (P_p \cdot \lambda_m^r)^2] = 0 \quad (49)$$

Utilizando Matlab para poder resolver este polinomio obtenemos que los valores que la satisfacen son:

$$\begin{aligned} s_1 &= 0 \\ s_2 &= \frac{-(L_q \cdot b_{eq} + R_s \cdot J_{eq}) + \sqrt{(L_q \cdot b_{eq} + R_s \cdot J_{eq})^2 - 4 \cdot J_{eq} \cdot L_q \cdot (R_s \cdot b_{eq} + \frac{3}{2} \cdot P_p^2 \cdot \lambda_m^r)^2}}{2 \cdot J_{eq} \cdot L_q} \\ s_3 &= \frac{-(L_q \cdot b_{eq} + R_s \cdot J_{eq}) - \sqrt{(L_q \cdot b_{eq} + R_s \cdot J_{eq})^2 - 4 \cdot J_{eq} \cdot L_q \cdot (R_s \cdot b_{eq} + \frac{3}{2} \cdot P_p^2 \cdot \lambda_m^r)^2}}{2 \cdot J_{eq} \cdot L_q} \end{aligned}$$

Reemplazando los valores de los parámetros y teniendo en cuenta que R_s puede variar con la temperatura entre $1,02 \Omega$ y $1,32 \Omega$ de manera lineal, se observa que los polos se encuentran en función de este valor dado que las demás valores son parámetros fijos del sistema.

Para determinar los ceros evaluamos el numerador de la función de transferencia (48). De aquí notamos que solo $T_l(t)$ introduce ceros al sistema, obteniendo, al igual que en el caso de los polos, funciones dependientes de R_s .

$$s \cdot L_q + R_s = 0 \quad \rightarrow \quad s = -\frac{R_s}{L_q} = -\frac{R_s}{5,9 \cdot 10^3}$$

Podemos hacer un gráfico en el plano imaginario sobre como varían estos valores según el valor de R_s . Así obtenemos la siguiente figura:

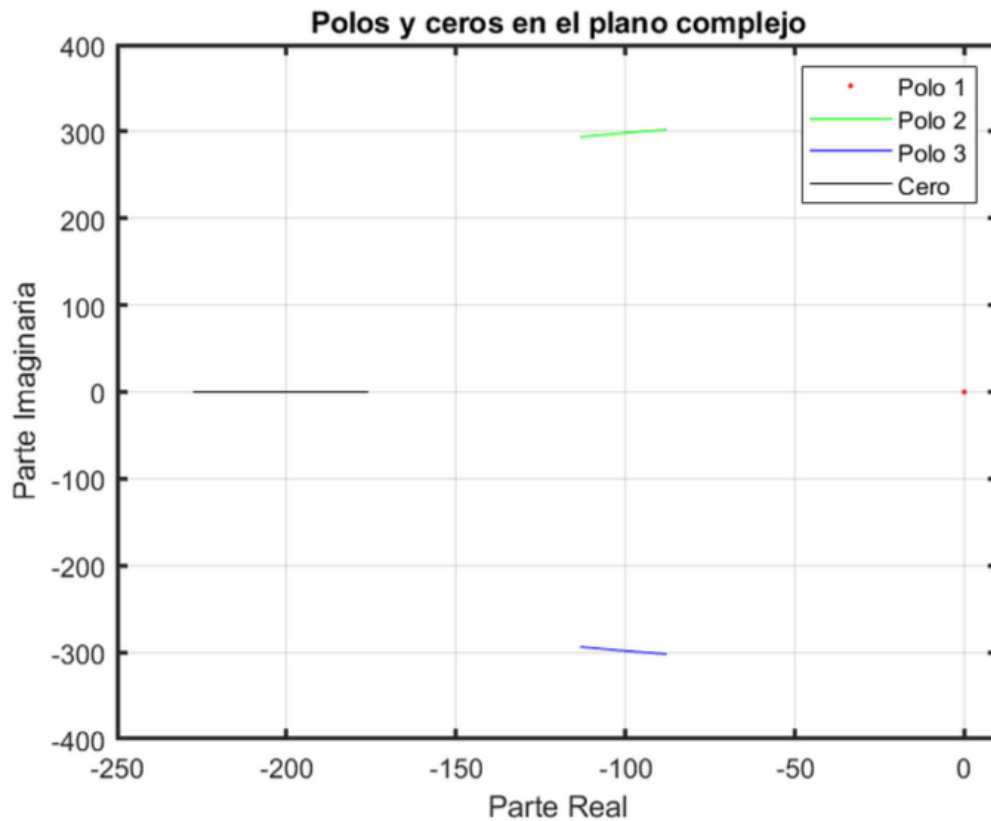


Figura 15: Polos y ceros en función de R_s

En esta figura se grafican los sucesivos valores que pueden tomar los polos y el cero si variamos el valor de R_s . Notamos una pequeña disminución de la parte imaginaria con el aumento de esta variable, aunque esto es casi despreciable. También se logra visualizar la distancia al eje imaginario que tiene cada posible valor y sobre todo el valor mas cercano a esta (representa el caso menos amortiguado).

De la misma podemos concluir que a medida que el valor de la temperatura aumenta, aumentando R_s , el sistema se vuelve mas estable. Esto se puede ver ya que al aumentar la parte real negativa, los mismos vuelven la respuesta del sistema mas amortiguado.

Para obtener el valor de la frecuencia natural del sistema y el amortiguamiento relativo, podemos comparar la ecuación característica del sistema con la forma estándar que toma un sistema de tercer orden. Pero al trabajar sobre el polinomio característico, teniendo en cuenta que un polo es 0, podemos simplificar y compararlo con uno de orden 2:

$$s^2 + 2.\xi.\omega_n.s + \omega_n^2 = 0 \quad (50)$$

Igualando ambas expresiones obtenemos los siguiente valores:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{R_s \cdot b_{eq} + \frac{3}{2} \cdot P_p^2 \cdot \lambda_{r'}^2}{J_{eq} \cdot L_q}}$$

$$\xi = \frac{L_q \cdot b_{eq} + R_s \cdot J_{eq}}{2 \cdot J_{eq} \cdot L_q \cdot \omega_n}$$

Reemplazando los valores de los parámetros obtenemos que:

$$314,50 \text{ rad/s} < \omega_n < 314,72 \text{ rad/s}$$

$$0.28 < \xi < 0.36$$

La frecuencia natural (ω_n) no varia significativamente con R_s , en cambio el valor de ξ se ve influenciado de mayor manera aunque siempre se mantiene en rangos menores a 1, lo que indica que es un sistema subamortiguado.

Podemos ver como varían estos valores en los siguientes gráficos:

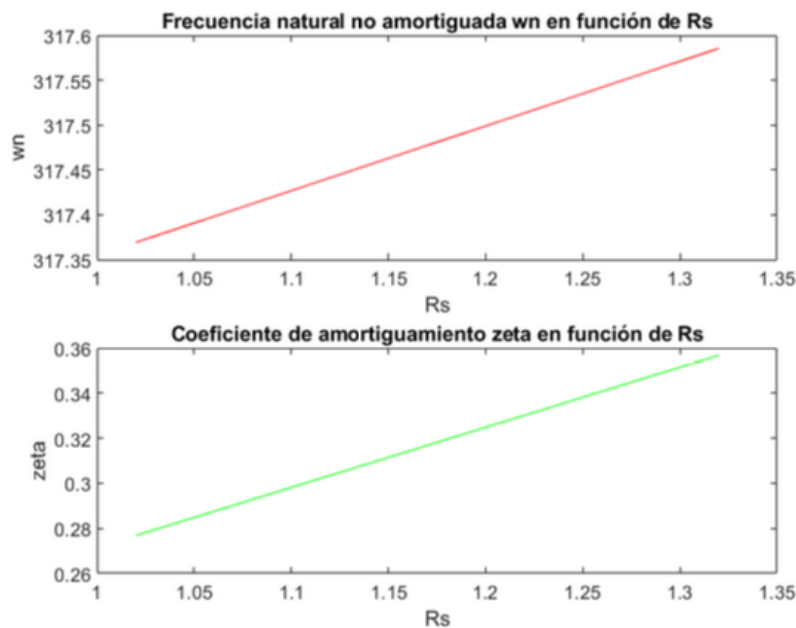


Figura 16: Frecuencia natural y amortiguamiento en función de R_s

2.4. Análisis de Observabilidad

Para realizar el análisis de observabilidad completa de estados para el modelo LTI equivalente aumentado desde la salida θ_m , evaluamos el rango de la matriz de observabilidad " O ".

En este caso la matriz de observabilidad, teniendo en cuenta que es un sistema de 3er orden, debe tener orden 3 también. Así:

$$O = \begin{bmatrix} C \\ C.A \\ C.A^2 \end{bmatrix} \quad (51)$$

Con:

$$C = [1 \quad 0 \quad 0] \quad (52)$$

$$C.A = [1 \quad 0 \quad 0] \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{b_{eq}}{J_{eq}} & \frac{3.P_p.\lambda_m^{r'}}{2.J_{eq}} \\ 0 & -\frac{P_p.\lambda_m^{r'}}{L_q} & -\frac{R_s}{L_q} \end{bmatrix} = [0 \quad 1 \quad 0] \quad (53)$$

$$C.A^2 = [1 \quad 0 \quad 0] \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{b_{eq}}{J_{eq}} & \frac{3.P_p.\lambda_m^{r'}}{2.J_{eq}} \\ 0 & -\frac{P_p.\lambda_m^{r'}}{L_q} & -\frac{R_s}{L_q} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{b_{eq}}{J_{eq}} & \frac{3.P_p.\lambda_m^{r'}}{2.J_{eq}} \\ 0 & -\frac{P_p.\lambda_m^{r'}}{L_q} & -\frac{R_s}{L_q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{b_{eq}}{J_{eq}} & \frac{3.P_p.\lambda_m^{r'}}{2.J_{eq}} \end{bmatrix} \quad (54)$$

Por lo tanto:

$$O = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{b_{eq}}{J_{eq}} & \frac{3.P_p.\lambda_m^{r'}}{2.J_{eq}} \end{bmatrix} \quad (55)$$

El rango de esta matriz es 3, por lo tanto el sistema es completamente observable a partir de la salida θ_m .

Estrictamente debemos decir que el sistema es parcialmente observable a partir de tener la posición como variable de salida ya que no se pueden obtener los estados de i_{ds}^r ni T_s^o .

Podemos realizar el mismo análisis a partir de tener como variable medida la velocidad, utilizando un taco generador. En este caso tendremos:

$$C = [0 \quad 1 \quad 0] \quad (56)$$

$$C.A = [0 \quad 1 \quad 0] \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{b_{eq}}{J_{eq}} & \frac{3.P_p.\lambda_m^{r'}}{2.J_{eq}} \\ 0 & -\frac{P_p.\lambda_m^{r'}}{L_q} & -\frac{R_s}{L_q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{b_{eq}}{J_{eq}} & \frac{3.P_p.\lambda_m^{r'}}{2.J_{eq}} \end{bmatrix}$$

$$C.A^2 = [0 \quad 1 \quad 0] \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{b_{eq}}{J_{eq}} & \frac{3.P_p.\lambda_m^{r'}}{2.J_{eq}} \\ 0 & -\frac{P_p.\lambda_m^{r'}}{L_q} & -\frac{R_s}{L_q} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{b_{eq}}{J_{eq}} & \frac{3.P_p.\lambda_m^{r'}}{2.J_{eq}} \\ 0 & -\frac{P_p.\lambda_m^{r'}}{L_q} & -\frac{R_s}{L_q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{b_{eq}}{J_{eq}} & -\frac{3.P_p^2.\lambda_m^{r'2}}{2.J_{eq}.L_q} & \frac{3.b_{eq}.P_p.\lambda_m^{r'}}{2.J_{eq}^2} \end{bmatrix}$$

Entonces:

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{b_{eq}}{J_{eq}} & \frac{3.P_p.\lambda_m^{r'}}{2.J_{eq}} \\ 0 & -\frac{b_{eq}}{J_{eq}} & -\frac{3.P_p^2.\lambda_m^{r'2}}{2.J_{eq}.L_q} & \frac{3.b_{eq}.P_p.\lambda_m^{r'}}{2.J_{eq}^2} \end{bmatrix}$$

El rango de esta matriz es 2, por lo tanto podemos afirmar que el sistema no es observable a partir de la salida ω_n . Esto se debe a que, conociendo la velocidad, no se puede estimar la posición sin conocer la condición inicial de la misma.

2.5. Análisis de Controlabilidad

Para afirmar si el sistema es controlable a partir de la entrada manipulada estipulada $v_{qs}^r(t)$ debemos estudiar el rango de la matriz de controlabilidad C . Esta nos proporcionará la certeza de si el sistema LTI se puede transferir desde cualquier estado inicial a cualquier otro estado, mediante un vector de control no restringido en un intervalo de tiempo finito.

Para este caso la matriz de Controlabilidad es:

$$C = [B \quad A.B \quad A^2.B] \quad (57)$$

Con:

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L_q} \end{bmatrix}$$

$$A.B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{b_{eq}}{J_{eq}} & \frac{3.P_p.\lambda_m'^r}{2.J_{eq}} \\ 0 & -\frac{P_p.\lambda_m'^r}{L_q} & -\frac{R_s}{L_q} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L_q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{3.P_p.\lambda_m'^r}{2.J_{eq}} \\ -\frac{R_s}{L_q} \end{bmatrix}$$

$$A^2.B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{b_{eq}}{J_{eq}} & \frac{3.P_p.\lambda_m'^r}{2.J_{eq}} \\ 0 & -\frac{P_p.\lambda_m'^r}{L_q} & -\frac{R_s}{L_q} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{b_{eq}}{J_{eq}} & \frac{3.P_p.\lambda_m'^r}{2.J_{eq}} \\ 0 & -\frac{P_p.\lambda_m'^r}{L_q} & -\frac{R_s}{L_q} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L_q} \end{bmatrix} = -\frac{3.P_p.b_{eq}.\lambda_m'^r}{2.J_{eq}^2.L_q} - \frac{3.P_p.\lambda_m'^r.R_s}{2.J_{eq}.L_q^2}$$

Entonces:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{3.P_p.\lambda_m'^r}{2.J_{eq}.L_q} \\ 0 & \frac{3.P_p.\lambda_m'^r}{2.J_{eq}} & -\frac{3.P_p.b_{eq}.\lambda_m'^r}{2.J_{eq}^2.L_q} - \frac{3.P_p.\lambda_m'^r.R_s}{2.J_{eq}.L_q^2} \\ \frac{1}{L_q} & -\frac{3.P_p.b_{eq}.\lambda_m'^r}{2.J_{eq}^2.L_q} - \frac{3.P_p.\lambda_m'^r.R_s}{2.J_{eq}.L_q^2} & \frac{3.P_p.\lambda_m'^r}{2.J_{eq}^2} \end{bmatrix}$$

En este caso el rango de la matriz de controlabilidad es 3, por lo tanto podemos afirmar que el sistema LTI equivalente simplificado es controlable desde la entrada indicada. Cabe aclarar que a partir de $v_{qs}^r(t)$ no es posible controlar la salida de los estados i_{ds}^r ni T_s° del sistema LTI equivalente aumentado. Estas podrían controlarse si se agrega entradas de control destinadas específicamente para esto.

2.6. Simulación Dinámica

Realizamos una simulación dinámica en el dominio del tiempo, comparando el modelo NL completo desacoplado con Ley de control NL con el modelo LTI equivalente aumentado.

2.6.1. Respuesta del estado interno a pulso de consigna de tensión de estador en el eje q

La consigna es la que se muestra en la siguiente figura:

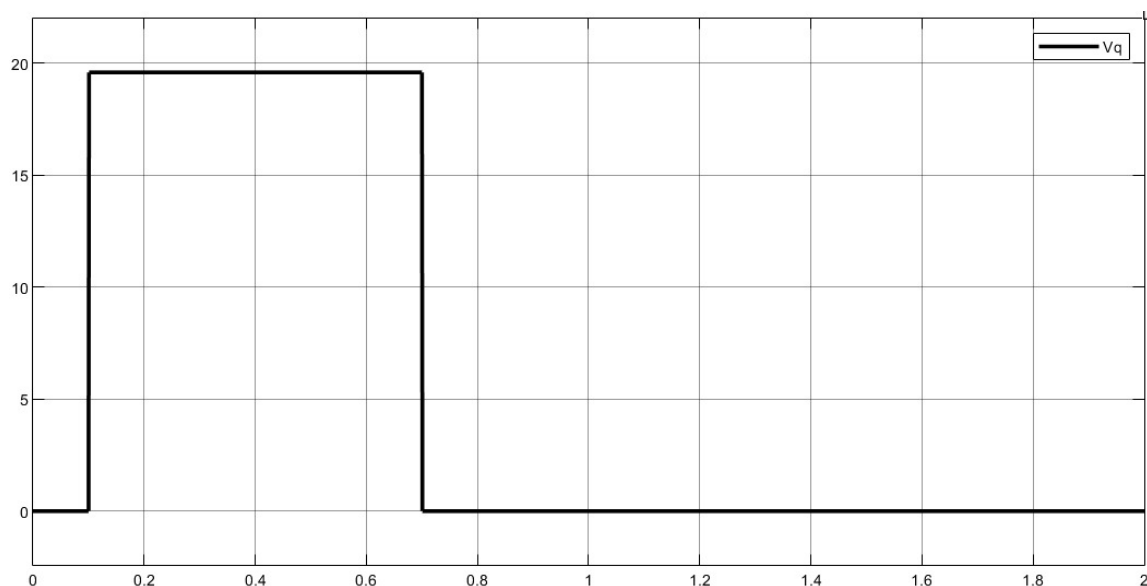


Figura 17: Consigna $v_q(t)$.

Como se puede observar toma el valor de $+19.596\text{ V}$ en el intervalo de tiempo de 0.1 s a 0.7 s . Esta consigna se superpone con un doble pulso de torque de carga como el que se muestra en la figura (18). $T_l(t)$ toma su valor máximo ($+6.28\text{ N.m}$) de 0.3 s a 0.5 s y su mínimo (-6.28 N.m) de 0.5 s a 0.9 s .

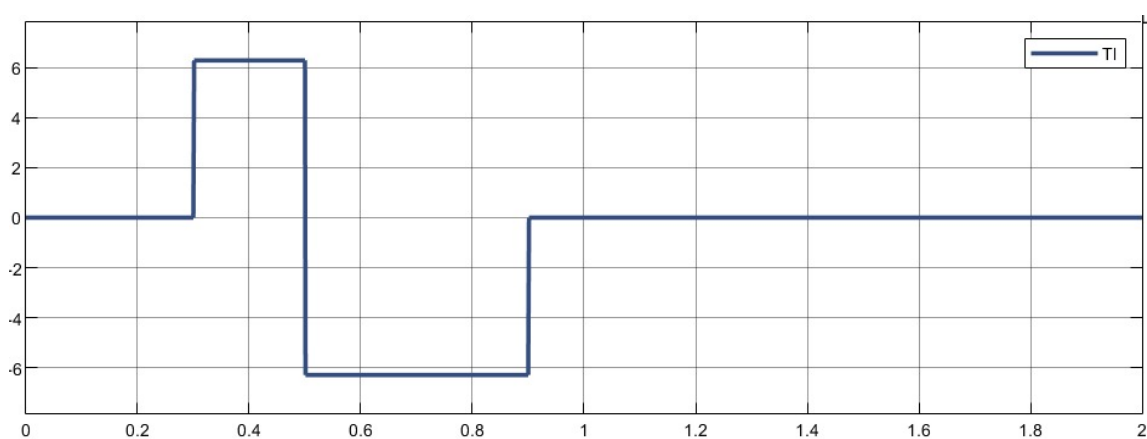


Figura 18: Carga $T_l(t)$

A continuación se mostraran las respuestas del sistema a la consigna de tensión de estator en el eje q . Se ira comparando cada variable una a una entre el LTI equivalente aumentado y el modelo NL con Ley de control NL, en ese mismo orden.

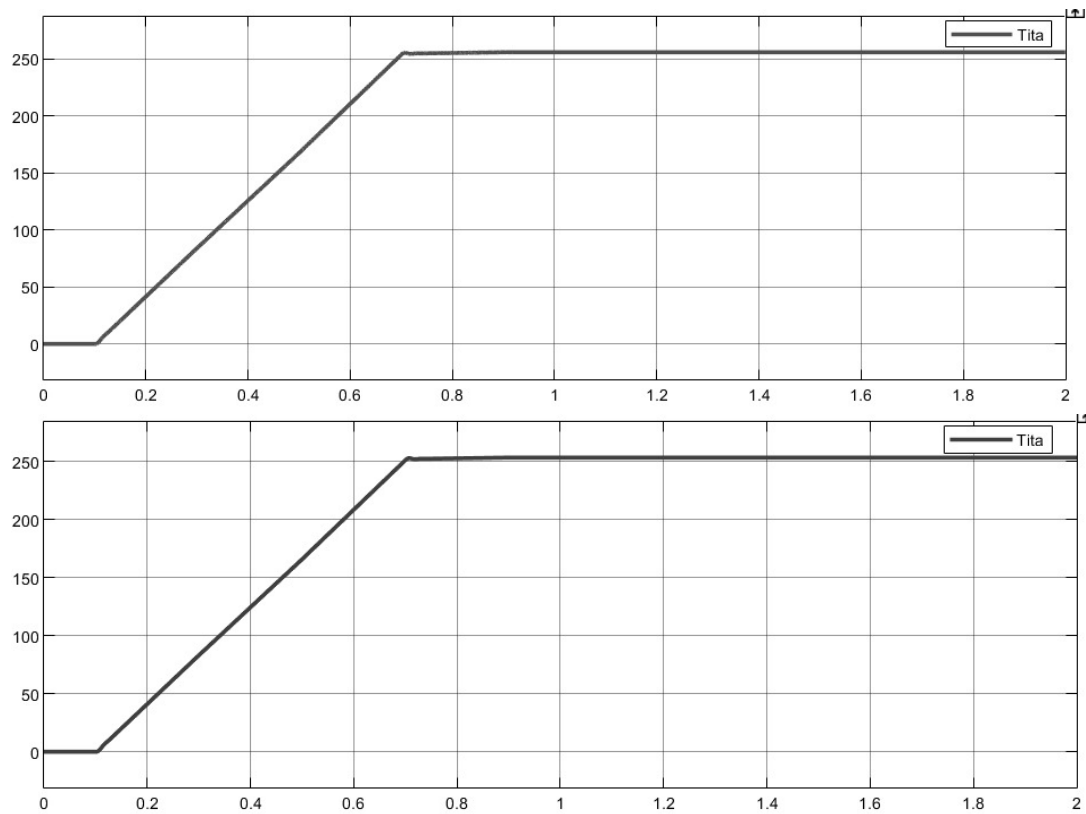


Figura 19: Respuesta de la posición ($\theta_m(t)$) en función del tiempo.

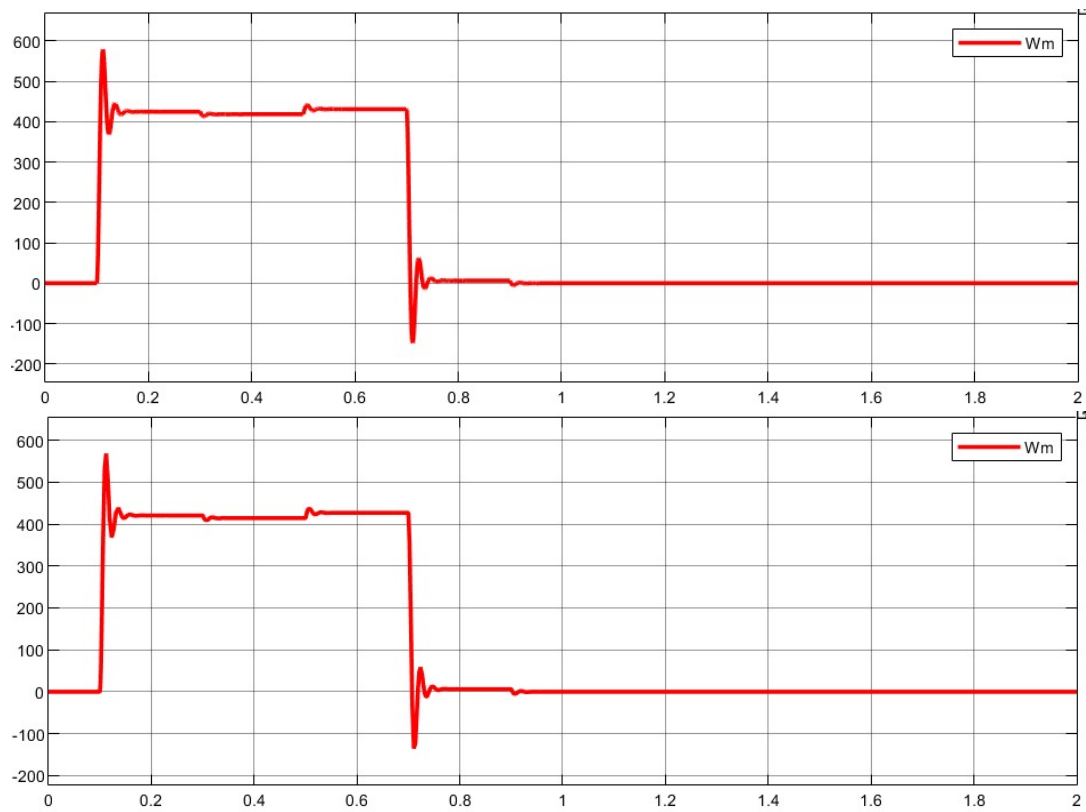


Figura 20: Respuesta de la velocidad ($\omega_m(t)$) en función del tiempo.

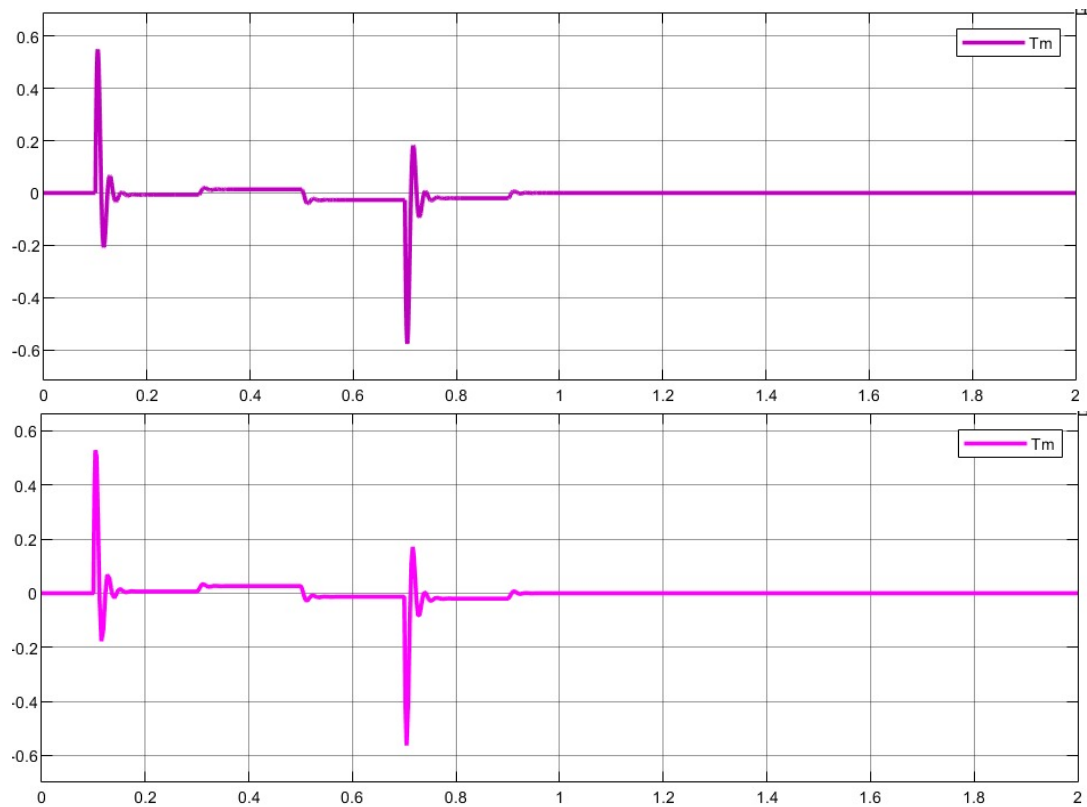


Figura 21: Respuesta del torque ($T_m(t)$) en función del tiempo.

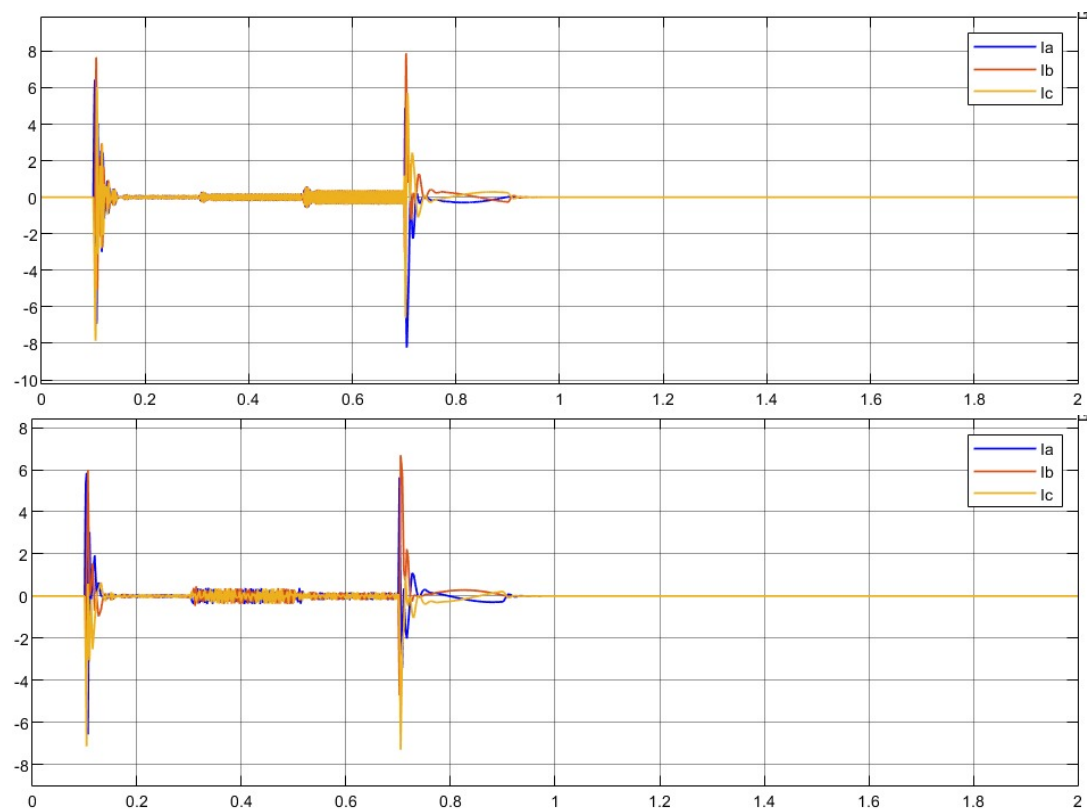


Figura 22: Respuesta de las corrientes ($i_{abc}(t)$) en función del tiempo.

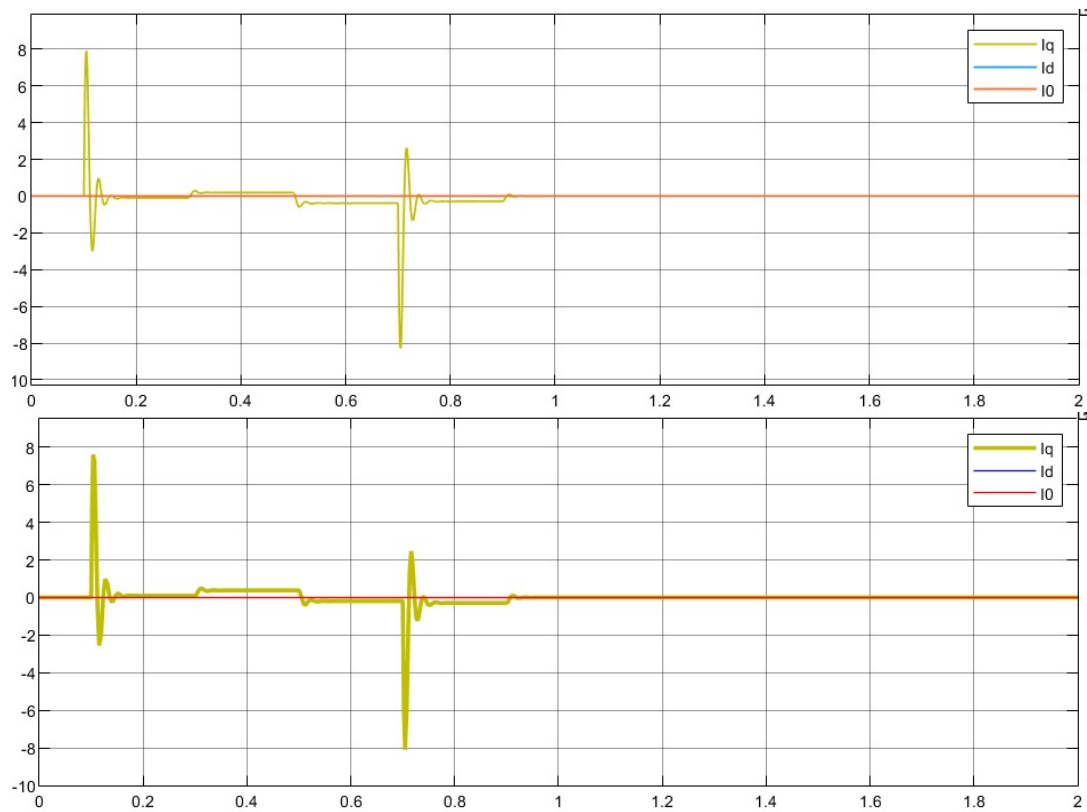


Figura 23: Respuesta de las corrientes ($i_{qd0}(t)$) en función del tiempo.

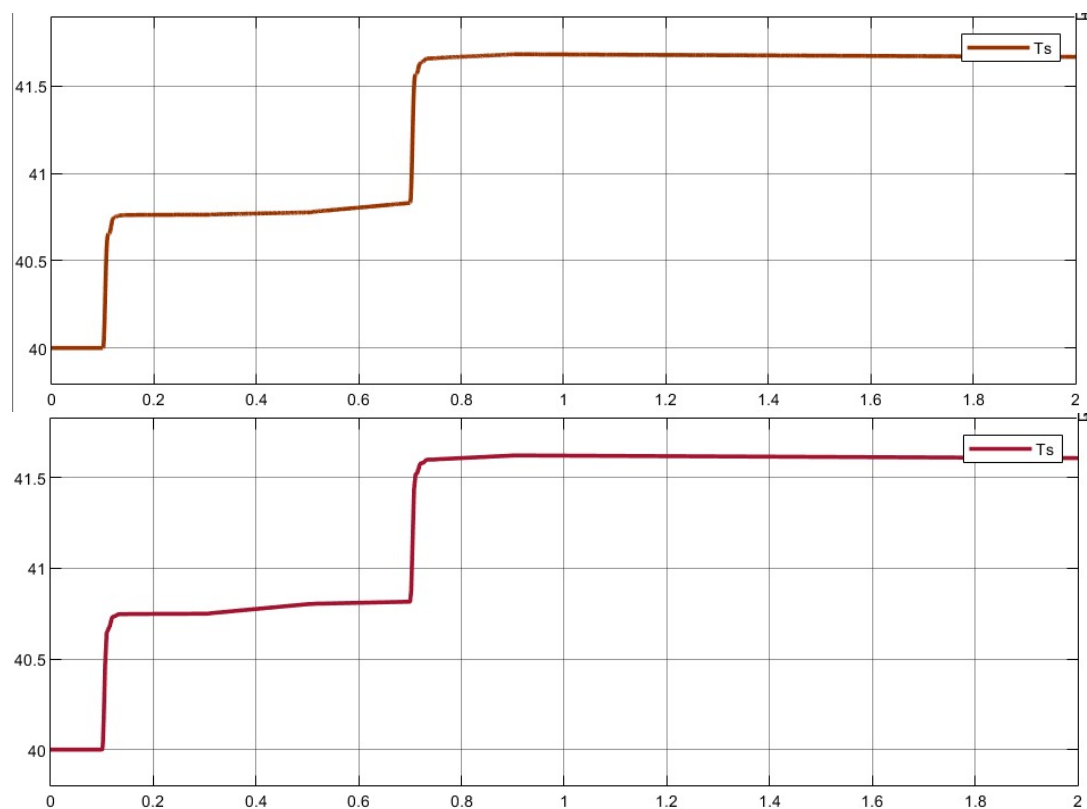


Figura 24: Respuesta de la temperatura ($T_s(t)$) en función del tiempo.

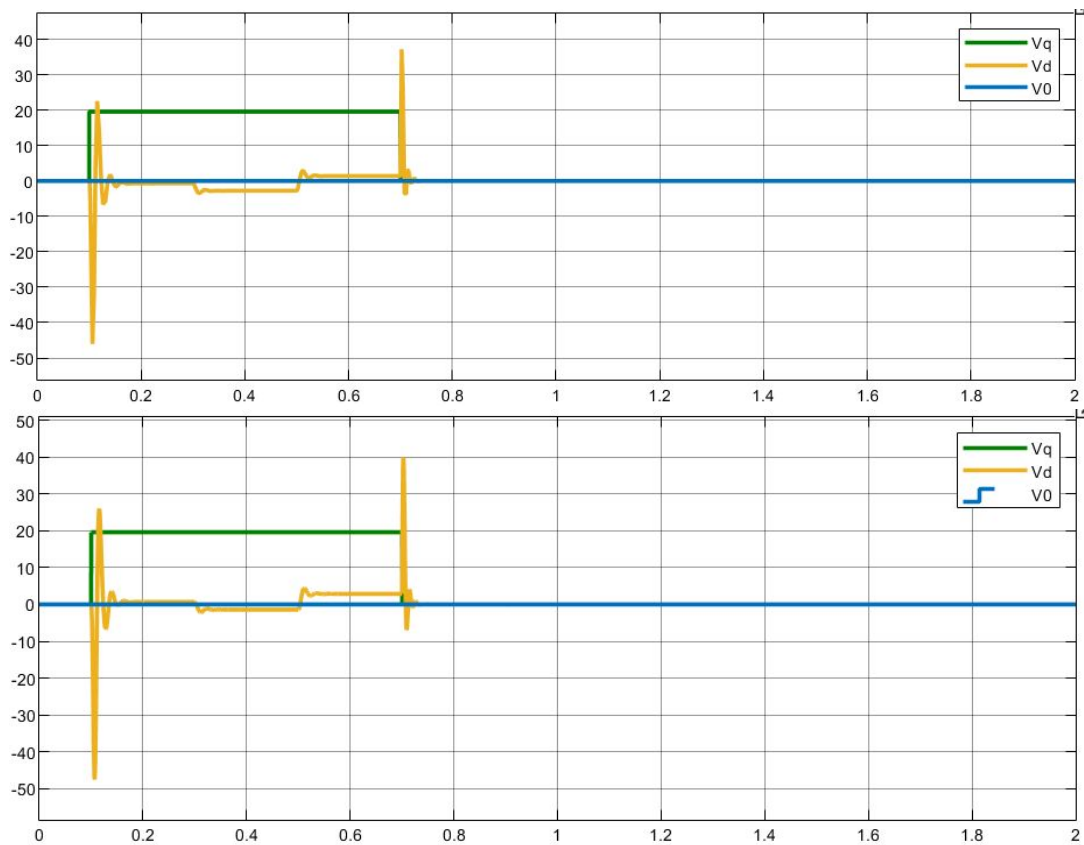


Figura 25: Respuesta de la tensión ($v_{qd0}(t)$) en función del tiempo.

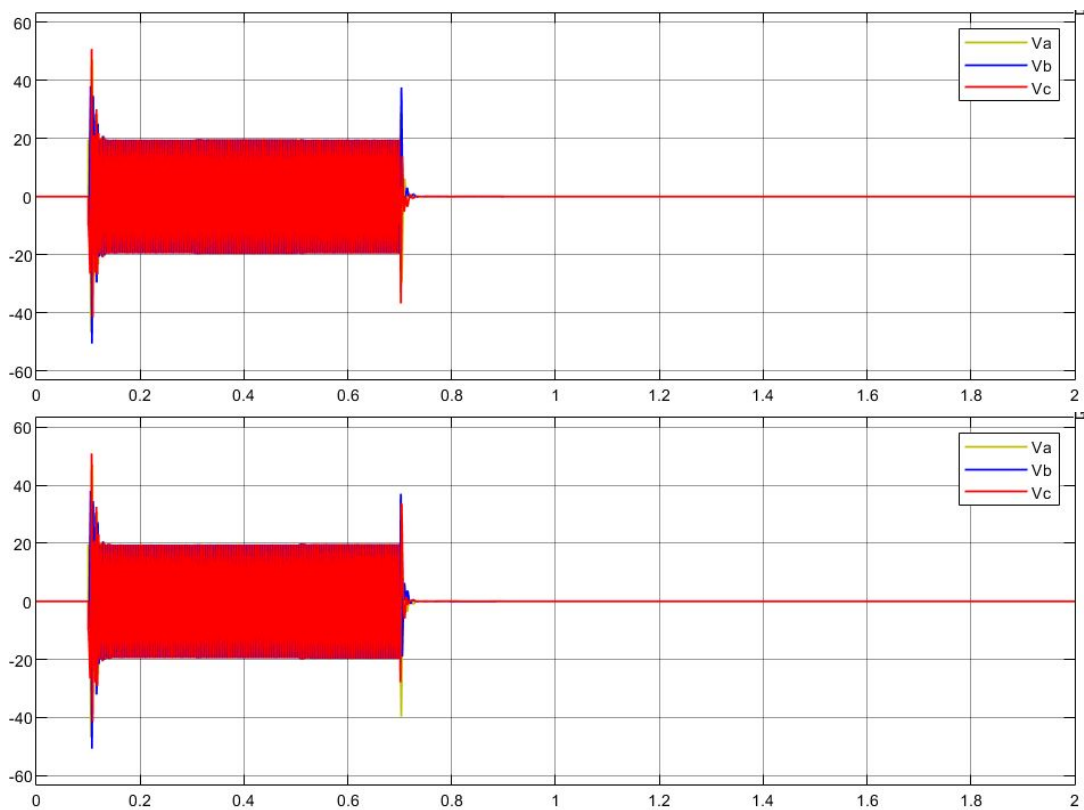


Figura 26: Respuesta de la tensión ($v_{abc}(t)$) en función del tiempo.

De la Figura (19) se puede observar que la posición del rotor ($\theta_m(t)$) varia casi linealmente en el periodo en el que la consiga de tensión en el eje q es positiva.

La velocidad ($\omega_m(t)$) en la Figura (20) pasa por un transitorio luego se estabiliza a un valor constante. En 0.3 s , que es cuando comienza el doble pulso del torque de carga, se observa una leve decaimiento de la velocidad a la vez que el torque electromagnético de la Figura (21) aumenta para compensar el torque de carga. De forma opuesta, cuando tenemos un torque de carga negativo ($t = 0.5\text{ s}$), el torque electromagnético disminuye y la velocidad angular aumenta.

Las figura de las corrientes (22) y (23) muestra que en los transitorios del torque electromagnético se producen picos de corriente. Esto se debe a que el torque electromagnético es proporcional a la corriente. Estos picos produce que en la Figura de la temperatura (26) se produzcan aumentos de esta. La temperatura tiene un comportamiento escalonado debido a los dos transitorios que se producen. Es posible observar también que al momento de activarse el torque de carga, la temperatura tiene una pendiente mayor, esto se debe a que el torque electromagnético aumento para compensar el de carga.

Para ambos modelos encontramos un comportamiento bastante similar, lo cual nos indica que el modelo LTI es una buena aproximación del modelo NL. Esto se debe a que como ya se ha mencionado anteriormente, la variación de la temperatura es muy pequeña, por lo que no influye significativamente en los valores de R_s .

Podemos observar en la siguiente figura que la Ley de control aplicada es efectiva, ya que la corriente en ele eje d toma un rango de valores muy pequeños.

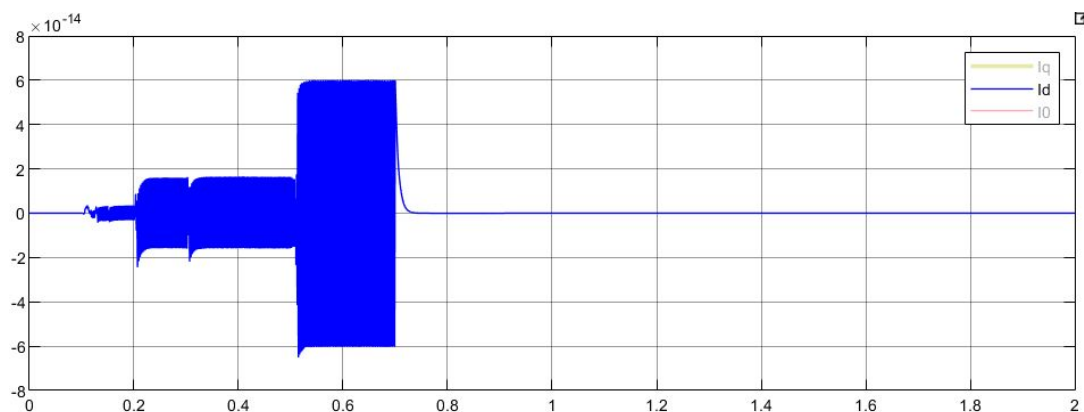


Figura 27: Respuesta de la corriente en el eje d ($i_d(t)$) en función del tiempo.

Estas perturbaciones se deben a los transitorios ya mencionados del torque, aunque también se observa el decaimiento que esta tiene que cumple con el comportamiento predicho en la dinámica residual.

Finalmente mostramos los cuadrantes de operación de la maquina eléctrica.

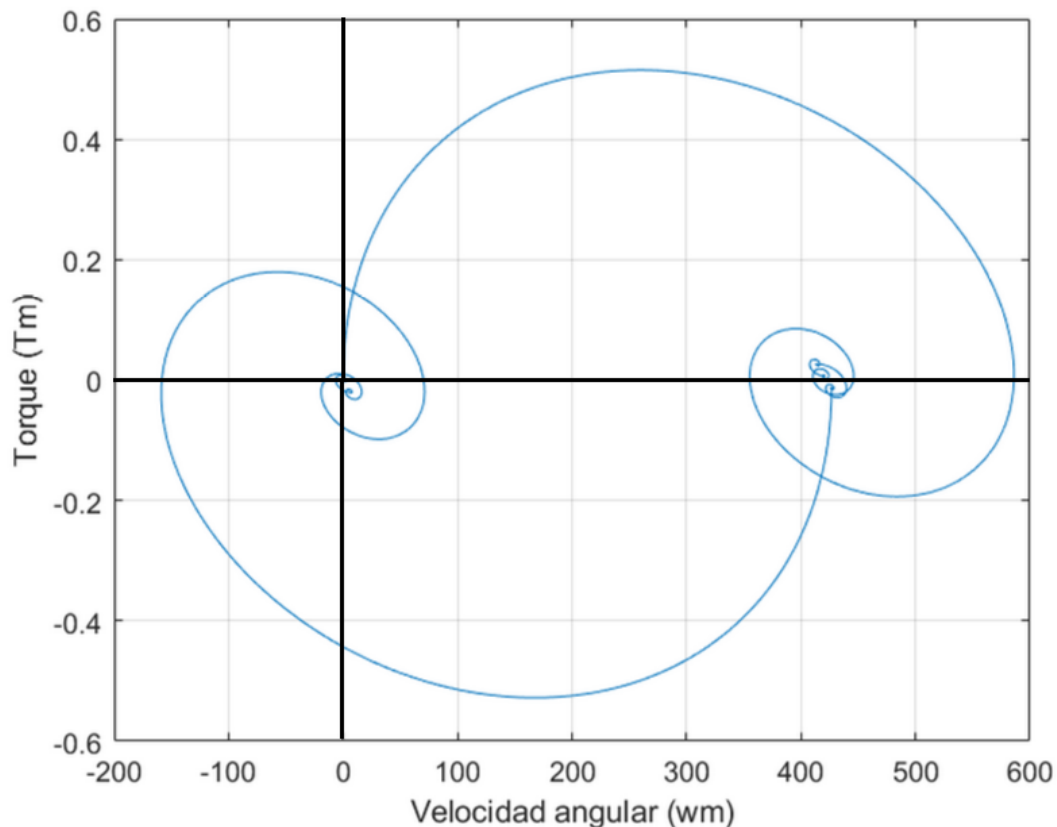


Figura 28: Cuadrantes de operación de la maquina eléctrica.

De esta figura podemos determinar dos puntos de equilibrio, uno correspondiente al punto de trabajo de la maquina, cuando esta en motorización. El otro corresponde a la posición de la....

3. Diseño, análisis y simulación con controlador de movimiento en cascada con modulador de torque equivalente (Control Vectorial)

El control vectorial es una técnica avanzada utilizada para controlar motores de corriente alterna y máquinas síncronas. Permite controlar de manera independiente la magnitud y la fase de la corriente de alimentación de la máquina para lograr un control preciso del torque y la velocidad. Una implementación común del control vectorial es el controlador de movimiento en cascada con modulador de torque equivalente, utilizado en aplicaciones de alto rendimiento como sistemas de tracción eléctrica y accionamiento de maquinaria industrial.

En el controlador de movimiento en cascada con modulador de torque equivalente, se utiliza un controlador de velocidad externo para generar una señal de referencia de velocidad que se compara con la velocidad real de la máquina. La diferencia entre estas señales se utiliza para generar una señal de referencia de torque, que controla la corriente de alimentación. El modulador de torque equivalente convierte la señal de referencia de torque en una señal de corriente de alimentación mediante la técnica de modulación de ancho de pulso (PWM), controlando así la magnitud y la fase de la corriente de alimentación.

3.1. Modulador de torque equivalente (Controlador interno vectorial de corriente/torque)

En el próximo paso de nuestro sistema, se llevará a cabo la implementación de un modulador de torque equivalente, conocido también como controlador interno vectorial de corriente/torque. Este controlador nos permitirá, de manera similar a una máquina de corriente continua, controlar el sistema utilizando consignas de torque como entradas, las cuales serán posteriormente transformadas en consignas de tensión. Para lograrlo, procederemos a implementar el controlador completo con su correspondiente diagrama de bloques, utilizando el modelo NL completo y los valores de parámetros adecuados, siguiendo los lineamientos que se detallarán a continuación.

3.1.1. Desacople de las realimentaciones de estado hacia la entrada

Considerando que el modulador de tensión es lo suficientemente rápido y preciso, podemos asumir que su ganancia es unitaria. Por lo tanto, podemos considerar que en la entrada del modulador de tensión se tiene una consigna de tensión a seguir, y esta misma tensión se aplicará a la salida del modulador. En otras palabras, en la salida del modulador se obtiene la tensión como variable física. Con base en lo mencionado, podemos establecer que:

$$v_{abc}(t) \approx v_{abc}^*(t) \quad (58)$$

Utilizando la transformada de Park, podemos definir una consigna de tensión en coordenadas virtuales $v_{qd0s}^{r*}(t)$ que nos permita obtener una tensión $v_{qd0s}^r(t)$ que compense los efectos de retroalimentación y permita el desacople de las variables de estado.

Recordando las Ecuaciones 19, se observa que los términos del lado derecho de la igualdad, a excepción de las tensiones de fase virtuales, representan las realimentaciones físicas del sistema. Por lo tanto, podemos definir las compensaciones que deben realizarse en el controlador para cancelar los efectos de la retroalimentación, las cuales son:

$$\begin{cases} v_{qs}^r(t) = v_{qs}^{r*}(t) + R_s \cdot i_{qs}^r(t) + \omega_m(t) \cdot P_p \cdot [\lambda_m^r + L_d \cdot i_{qs}^r(t)] \\ v_{ds}^r(t) = v_{ds}^{r*}(t) + R_s \cdot i_{ds}^r(t) - \omega_m(t) \cdot P_p \cdot L_q \cdot i_{qs}^r(t) \\ v_{0s}^r(t) = v_{0s}^{r*}(t) + R_s \cdot i_{0s}^r(t) \end{cases} \quad (59)$$

Realizando estas compensaciones, tenemos acceso directo a manipular el torque electromagnético, sin los efectos de las realimentaciones físicas, ni las caídas de tensión en los bobinados.

Reemplazando las Ecuaciones 59 en las Ecuaciones 19, se obtienen las siguientes expresiones:

$$\begin{cases} v_{qs}^{r*}(t) = L_q \cdot \dot{i}_{qs}^r(t) \\ v_{ds}^{r*}(t) = L_d \cdot \dot{i}_{ds}^r(t) \\ v_{0s}^{r*}(t) = L_{ls} \cdot \dot{i}_{0s}^r(t) \end{cases} \quad (60)$$

3.1.2. Diseño de lazos de control de corrientes

La consigna de tensión es función de la corriente del sistema, por lo que se puede controlar usando una consigna de corriente proporcional. Con el error de corriente entre la corriente de consigna $i_{qd0s}^{r*}(t)$ y la corriente real del sistema se modela $v_{qd0s}^{r*}(t)$ con una ley de control proporcional.. El modelo resultante es el siguiente:

$$\begin{cases} L_q \cdot \dot{i}_{qs}^r(t) = v_{qs}^{r*}(t) = [i_{qs}^{r*}(t) - i_{qs}^r(t)] \cdot R'_q \\ L_d \cdot \dot{i}_{ds}^r(t) = v_{ds}^{r*}(t) = [i_{ds}^{r*}(t) - i_{ds}^r(t)] \cdot R'_d \\ L_{ls} \cdot \dot{i}_{0s}^r(t) = v_{0s}^{r*}(t) = [i_{0s}^{r*}(t) - i_{0s}^r(t)] \cdot R'_0 \end{cases} \quad (61)$$

Las variables R' representan las ganancias del control proporcional. Se necesita obtener el valor de óptimo de esta ganancia, por lo cual se analiza la función de transferencia del modulador.

Al aplicar la transformada de Laplace obtenemos:

$$\begin{cases} L_q \cdot s \cdot I_{qs}^r(s) = [I_{qs}^{r*}(s) - I_{qs}^r(s)] \cdot R'_q \\ L_d \cdot s \cdot I_{ds}^r(s) = [I_{ds}^{r*}(s) - I_{ds}^r(s)] \cdot R'_d \\ L_{ls} \cdot s \cdot I_{0s}^r(s) = [I_{0s}^{r*}(s) - I_{0s}^r(s)] \cdot R'_0 \end{cases} \quad (62)$$

Las funciones de transferencia son:

$$\begin{aligned} G_{qs}(s) &= \frac{I_{qs}^r(s)}{I_{qs}^{r*}(s)} = \frac{1}{\frac{L_q}{R'_q} \cdot s + 1} \\ G_{ds}(s) &= \frac{I_{ds}^r(s)}{I_{ds}^{r*}(s)} = \frac{1}{\frac{L_d}{R'_d} \cdot s + 1} \\ G_{0s}(s) &= \frac{I_{0s}^r(s)}{I_{0s}^{r*}(s)} = \frac{1}{\frac{L_{ls}}{R'_0} \cdot s + 1} \end{aligned}$$

Se puede observar que las funciones de transferencia son de primer orden y no poseen ceros. Dado que los parámetros son positivos también podemos afirmar que las funciones de transferencia son estables.

Estas funciones de transferencia tienen la forma típica de un filtro pasa bajos, donde el valor que multiplica a la variable s es la constante del tiempo del sistema τ que a la vez es el inverso la frecuencia de corte del filtro. Si τ toma un valor muy pequeño, dispondremos de un ancho de banda muy grande, lo cual proporciona una respuesta rápida.

El polo del filtro pasa bajos es $p = -\frac{1}{\tau}$ y dado que para todos los lazos $p = -5000 \text{ rad/s}$ podemos calcular los valores de las ganancias:

$$\frac{L}{R'} = -\frac{1}{p} \rightarrow R' = -L \cdot p \quad (63)$$

Resolviendo para cada rama:

$$R'_q = -L_q \cdot p = 29 \Omega$$

$$R'_d = -L_d \cdot p = 33 \Omega$$

$$R'_0 = -L_{ls} \cdot p = 4 \Omega$$

Con este lazo de corriente logramos que el error entre la consigna de corriente y la corriente real converja mas rápidamente a cero, de forma que responda de mejor manera a las perturbaciones.

3.1.3. Incorporación de consigna de torque

Volvemos a usar nuevamente el método de la sección anterior en el que realizamos una realimentación para controlar el sistema mediante consignas de torque $T_m^*(t)$. La consigna sigue el siguiente modelo:

$$T_m^*(t) = T_m^{r'}(t) + b_{eq} \cdot \omega_m(t) \quad (64)$$

Este modelo contempla la realimentación física debida a la fricción, que genera perdidas en el torque.

Sabiendo que el torque y la corriente están relacionados por la ecuación del Torque electromagnético (10) expresamos las consignas de troque $T_m^{r'}$ en función de las consignas de corriente i_{qs}^{r*} :

$$T_m^*(t) = \frac{3}{2} \cdot P_p \cdot [\lambda_m^r + (L_d - L_q) i_{ds}^r(t)] \cdot i_{qs}^{r*}(t) \quad (65)$$

Despejando de estas ultimas dos ecuaciones, obtenemos:

$$i_{qs}^{r*}(t) = \frac{T_m^{r'}(t) + b_{eq} \cdot \omega_m(t)}{\frac{2}{3} \cdot P_p \cdot [\lambda_m^r + (L_d - L_q) i_{ds}^r(t)]} \quad (66)$$

De esta ecuación podemos determinar el efecto que tendrá la corriente i_{ds}^{r*} sobre el flujo magnético:

- Si $i_{ds}^{r*} > 0A$ entonces se produce un reforzamiento de campo.
- Si $i_{ds}^{r*} = 0A$ entonces se produce un desacople entre la rama correspondiente a la cuadratura que anula los efectos de reforzamiento y debilitamiento.
- Si $i_{ds}^{r*} < 0A$ entonces se produce un debilitamiento de campo.

3.2. Controlador externo de movimiento (posición/velocidad)

El controlador externo de movimiento se agrega con el fin de mejorar la dinámica del sistema y corregir los errores de estado estacionario producidos por cargas perturbadoras. En la rama derivativa tomaremos el error entre la consigna de velocidad y la velocidad real. El error de posición se obtiene integrando el error de velocidad lo que indica que no son variables independientes, este va en la rama proporcional. En la rama integral se tendrá la integral del erro de posición.

Con esta configuración del controlador PID solo tendremos como entrada el error de velocidades, no tendremos que introducir acciones derivativas lo que nos permitirá evitar la amplificación del ruido y obtener un controlador mas estable. Los bloques integrales actúan como filtros pasa bajos lo que nos ayuda a eliminar el ruido de los errores de posición y velocidad dada su naturaleza de alta frecuencia.

Se diseña el controlador utilizando el método de sintonía serie con $n = 2, 5$, $\omega_{pos} = 800 \text{ rad/s}$, y considerando los valores nominales de j_L , b_L .

El controlador de movimiento se muestra en la siguiente figura:

La salida del controlador sera el torque consigna que ingresara al modulador de torque. Modelando en el dominio de Laplace se tiene:

$$T_m^{*'}(s) = e_\omega(s) \cdot b_a + e_\theta(s) \cdot K_{sa} + e_\theta(s) \cdot K_{sai} \cdot \frac{1}{s} \quad (67)$$

Donde:

$$e_\theta(s) = \Theta_m^*(s) - \Theta_m(s)$$

$$e_\omega(s) = e_\theta(s) \cdot s$$

La relación entre el torque y la variación de velocidad del motor en el modelo del subsistema mecánico, teniendo en cuenta el desacople de fricción realizado anteriormente, es:

$$J_{eq} \cdot \dot{\omega}(t) = T_m^*(t) - \frac{T_l(t)}{r} \quad (68)$$

Aplicando la transformada de Laplace:

$$J_{eq} \cdot s^2 \cdot \Theta_m(s) = T_m^*(s) - \frac{T_l(s)}{r} \quad (69)$$

Reemplazando esta ecuación en la ecuación del controlador (67):

$$J_{eq} \cdot s^3 \cdot \Theta_m(s) = [s^2 \cdot b_a + s \cdot K_{sa} + K_{sai}] \cdot [\Theta_m^*(s) - \Theta_m(s)] - s \cdot \frac{T_l(s)}{r} \quad (70)$$

Despejando, la posición del retor queda expresada como:

$$\Theta_m(s) = \frac{s^2 \cdot b_a + s \cdot K_{sa} + K_{sai}}{s^3 \cdot J_{eq} + s^2 \cdot b_a + s \cdot K_{sa} + K_{sai}} \cdot \Theta_m^*(s) - \frac{s}{s^3 \cdot J_{eq} + s^2 \cdot b_a + s \cdot K_{sa} + K_{sai}} \cdot \frac{T_l(s)}{r} \quad (71)$$

A partir de esta ecuación podemos obtener las funciones de transferencia del controlador:

$$G_1(s) = \frac{\Theta_m(s)}{\Theta_m^*(s)} = \frac{s^2 \cdot b_a + s \cdot K_{sa} + K_{sai}}{s^3 \cdot J_{eq} + s^2 \cdot b_a + s \cdot K_{sa} + K_{sai}} \quad (72)$$

$$G_2(s) = \frac{\frac{T_l(s)}{r}}{\Theta_m^*(s)} = -\frac{s}{s^3 \cdot J_{eq} + s^2 \cdot b_a + s \cdot K_{sa} + K_{sai}} \quad (73)$$

En régimen estacionario para una entrada escalón unitario podemos observar:

- $K_{sai} \neq 0 \rightarrow G_1(s) = 1$ y $G_2(s) = 0$
- $K_{sai} = 0 \rightarrow G_2(s) = 1$ y $G_1(s) = \frac{1}{K_{sa}}$

Estos resultados muestran que que la función de transferencia correspondiente a la entrada de perturbación tejen un cero en el origen por lo que el error de estado estacionario es nulo. En caso de que la acción integral sea nula si tendrá un error dado por $1/K_{sa}$. En cuanto a la función de transferencia correspondiente a la entrada de referencia tiene ganancia unitaria a baja frecuencia por lo que el error de estado estacionario, según el teorema del valor final, es nulo. Podemos concluir que este controlador no tiene error de régimen permanente ante entradas del tipo escalón.

Aplicamos el método de sintonía en serie, con $n = 2, 5$ y $\omega_{pos} = 800 \text{ rad/s}$ para la determinar las ganancias del controlador. Dado que el polinomio característico de forma normalizada del sistema es:

$$P(s) = s^3 + \frac{b_a}{J_{eq}} \cdot s^2 + \frac{K_{sa}}{J_{eq}} \cdot s + \frac{K_{sai}}{J_{eq}} \quad (74)$$

Podemos llegar a las siguientes expresiones:

$$n \cdot \omega_{pos} = \frac{b_a}{J_{eq}};$$

$$n \cdot \omega_{pos}^2 = \frac{K_{sa}}{J_{eq}};$$

$$n \cdot \omega_{pos}^3 = \frac{K_{sai}}{J_{eq}}$$

Dados los valores nominales de J_{eq} y b_l , se obtiene $J_{eq} = 5,6510 \cdot 10^6$, entonces:

$$b_a = J_{eq} \cdot n \cdot \omega_{pos} = 0,0113 \frac{N.m}{rad/s}$$

$$K_{sa} = J_{eq} \cdot n \cdot \omega_{pos}^2 = 9,0416 \frac{N.m}{rad}$$

$$K_{sai} = J_{eq} \cdot n \cdot \omega_{pos}^3 = 2893 \frac{N.m}{rad.s}$$

Con estos valores podemos determinar los polos del sistema a lazo cerrado. Sabiendo que la distancia de los polos al origen es la misma para los 3 polos. Con $\xi = 0,75$

- Para valores nominales de J_l y b_l :

$$s_1 = -800 \frac{rad}{s} \quad s_{2,3} = -600 \pm 529,15 j \frac{rad}{s}$$

- Para valores máximos de J_l y b_l :

$$s_1 = -613,75 \frac{rad}{s} \quad s_{2,3} = -508,98 \pm 649,26 j \frac{rad}{s}$$

- Para valores mínimos de J_l y b_l :

$$s_1 = -1498,5 \frac{rad}{s} \quad s_{2,3} = -542,3 \pm 383,7 j \frac{rad}{s}$$

3.2.1. Entrada de referencia o set-point

Por último, se incluye la opción de ingresar el control de posición mediante una referencia o punto de ajuste de posición de las coordenadas articulares del brazo del robot SCARA. Esto resulta conveniente, ya que en muchas ocasiones es más sencillo utilizar los algoritmos de Cinemática del robot para controlar el brazo, utilizando sus coordenadas articulares. De forma que:

$$q_1^* = \frac{\theta_m^*(t)}{r} \quad (75)$$

3.3. Observador de Estado de orden reducido

Un observador de estado es un componente utilizado en sistemas de control para estimar el estado interno de un sistema dinámico a partir de las mediciones de entradas y salidas del sistema. En este caso, se utiliza un observador de estado de orden reducido para poder realimentar la velocidad angular del motor ya que este no cuenta con un sensor para medirla directamente.

El sistema no es observable desde la velocidad $\omega_m(t)$ como lo indica el criterio de observabilidad de Kalman, pero si desde la posición $\theta_m(t)$. Por lo tanto estimaremos la velocidad a partir de la posición.

Al incorporar el observador al subsistema mecánico podemos omitir $-b_{eq} \cdot \omega_m(t)$ ya que al contar con sensores de corriente con realimentación física este efecto ya está desacoplado.

El modelo del subsistema mecánico se puede expresar como:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A \cdot x(t) + B_c \cdot u(t) + B_d \cdot d(t); & x(t_0) = x_0 \\ y(t) = C \cdot x(t) \end{cases} \quad (76)$$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J_{eq}} \end{bmatrix} \cdot T_m(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{J_{eq} \cdot r} \end{bmatrix} \cdot T_l(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot x(t) \end{cases} \quad (77)$$

El observador de estado de Luenberger crea un modelo estimado del sistema original que reproduce su comportamiento a partir de las variables de entrada y salida medibles. Luego, utiliza este modelo estimado junto con una corrección proporcional al error de salida para estimar el estado interno del sistema en tiempo real. Aplicándolo al sistema anterior, se obtiene:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \hat{A}.\hat{x}(t) + \hat{B}.u(t) + K_e.(y(t) - \hat{y}(t)); \hat{x}(t_0) = 0 \\ \hat{y}(t) = \hat{C}.\hat{x}(t) \end{cases} \quad (78)$$

Donde la matriz K_e contiene los parámetros de ajuste del observador

$$K_e = [k_{e\theta} \quad k_{e\omega}] \quad (79)$$

Con el error de estimación definido como:

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t) \quad (80)$$

Asumiendo un funcionamiento ideal, las matrices de ambos sistemas real coinciden con las matrices del modelo del observador. Trabajando el sistema y reemplazando en la ecuación (80) se obtiene la dinámica del error:

$$\dot{e}(t) = [A - K_e.C].e(t) + B.d(t) \quad (81)$$

Considerando que no hay perturbaciones $d(t) = 0$, se pueden obtener los parámetros de ajuste del observador mediante el polinomio característico del sistema dado por los autovalores de la matriz $A' = [A - K_e.C]$:

$$|s.I - A'| = \begin{vmatrix} s + k_{e\theta} & -1 \\ k_{e\omega} & s \end{vmatrix} = s^2 + k_{e\theta}.s + k_{e\omega} \quad (82)$$

Resolviendo el polinomio y sabiendo que los polos son $p_{1,2} = -3200 \text{ rad/s}$, obtengo:

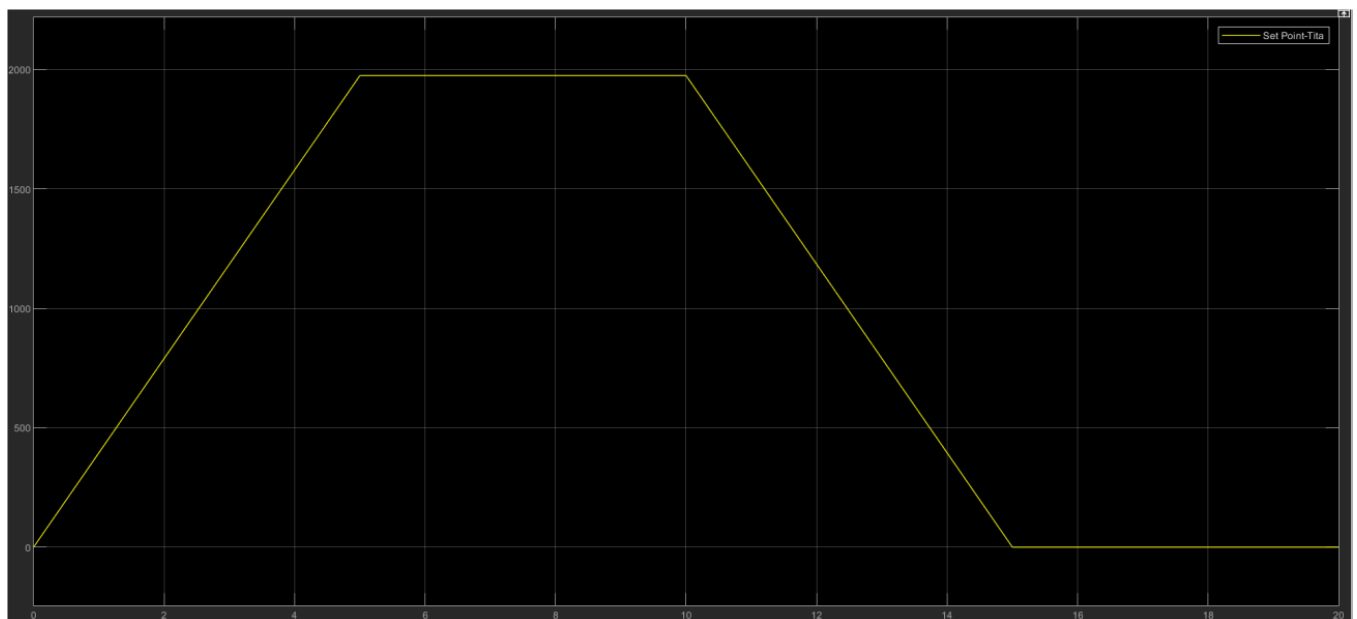
$$\begin{aligned} K_{e\theta} &= 6400 \text{ rad/s} \\ K_{e\omega} &= 10,24.10^6 \text{ rad/s} \end{aligned}$$

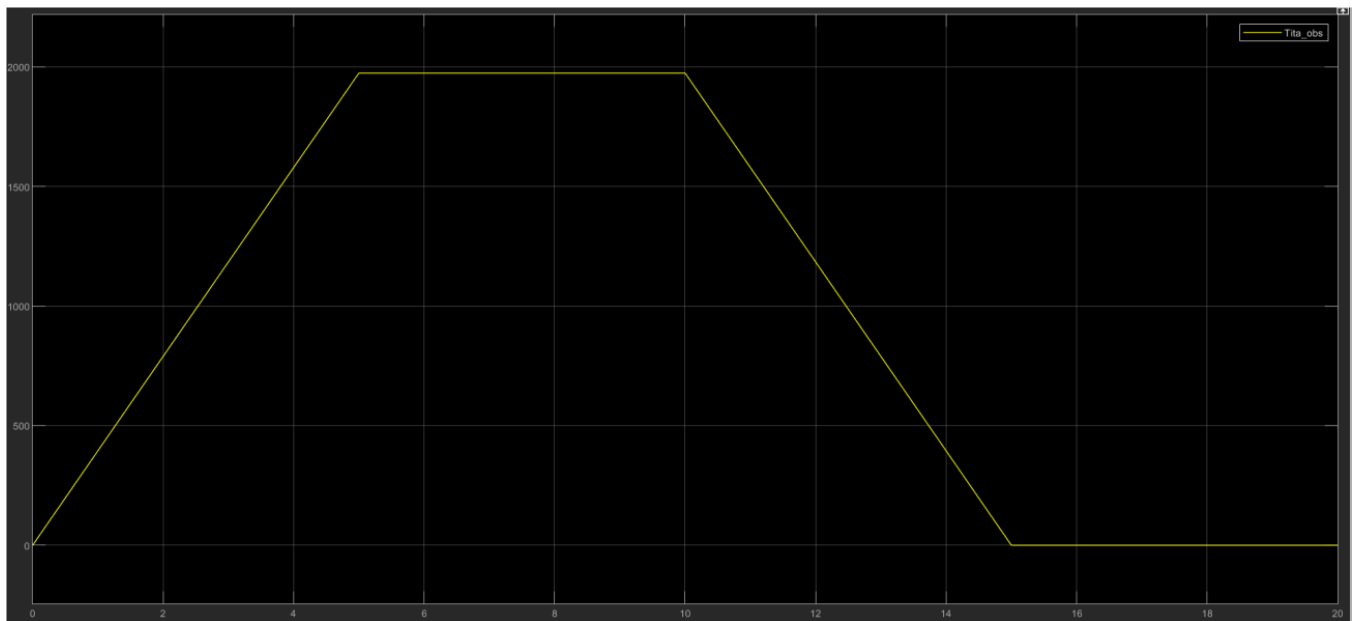
3.4. Simulación en tiempo continuo con modelo completo NL

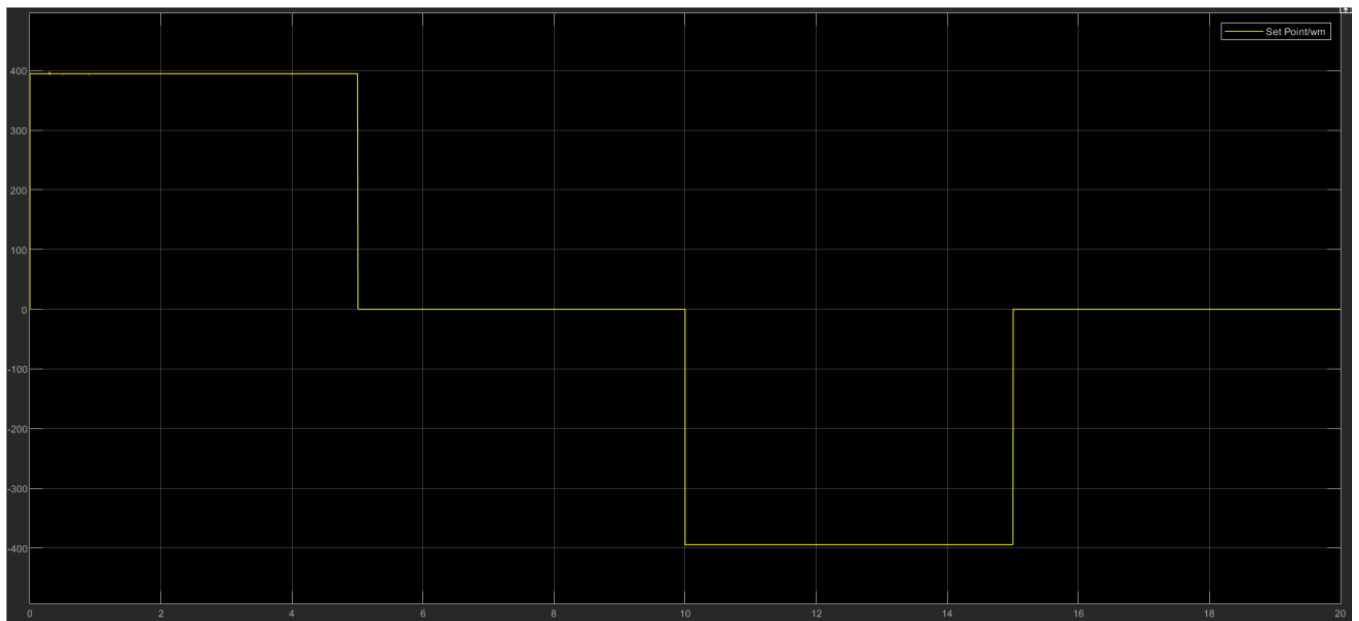
3.4.1. Seguimiento de consignas de movimiento

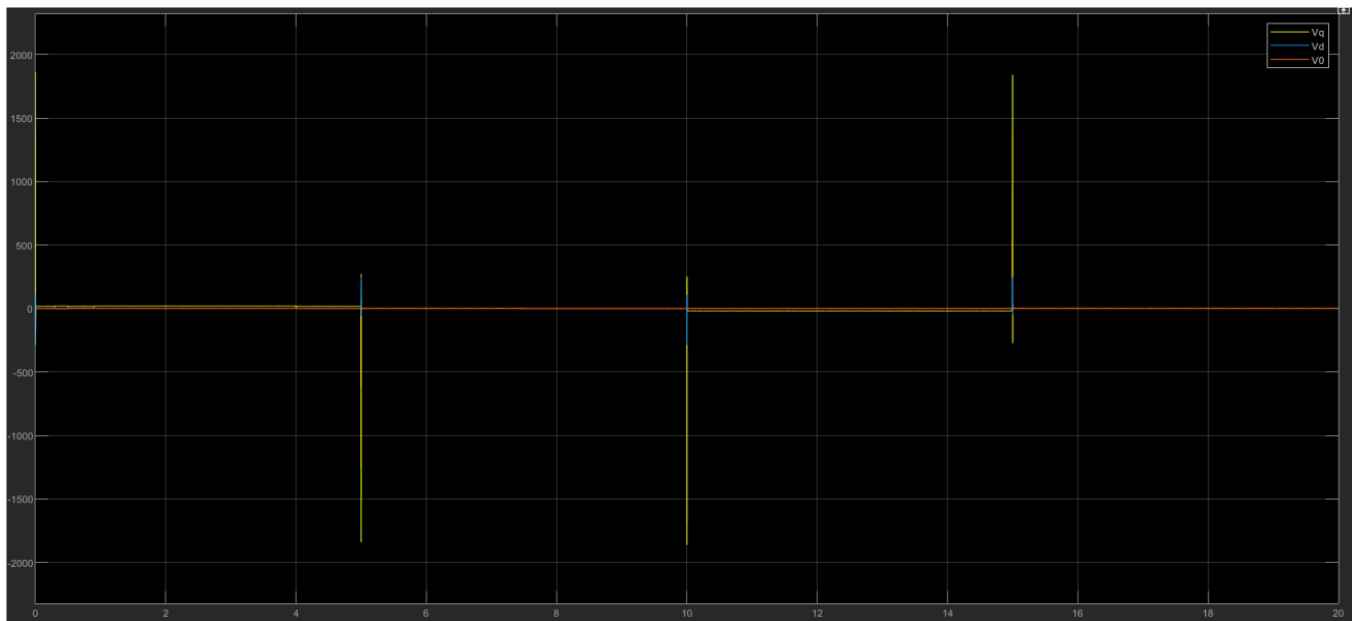
La posición deseada de la articulación, $q_1^*(t)$, se define como una función de tiempo que depende de la variable $m(t)$, donde r es una constante.

Para generar el perfil de movimiento, utilizamos un perfil trapezoidal en el que tanto la rampa de ascenso como la de descenso se producen en un intervalo de tiempo de 5 segundos. Durante este tiempo, la posición deseada de $q_1(t)$ alcanza un valor de 2π radianes entre las dos rampas.



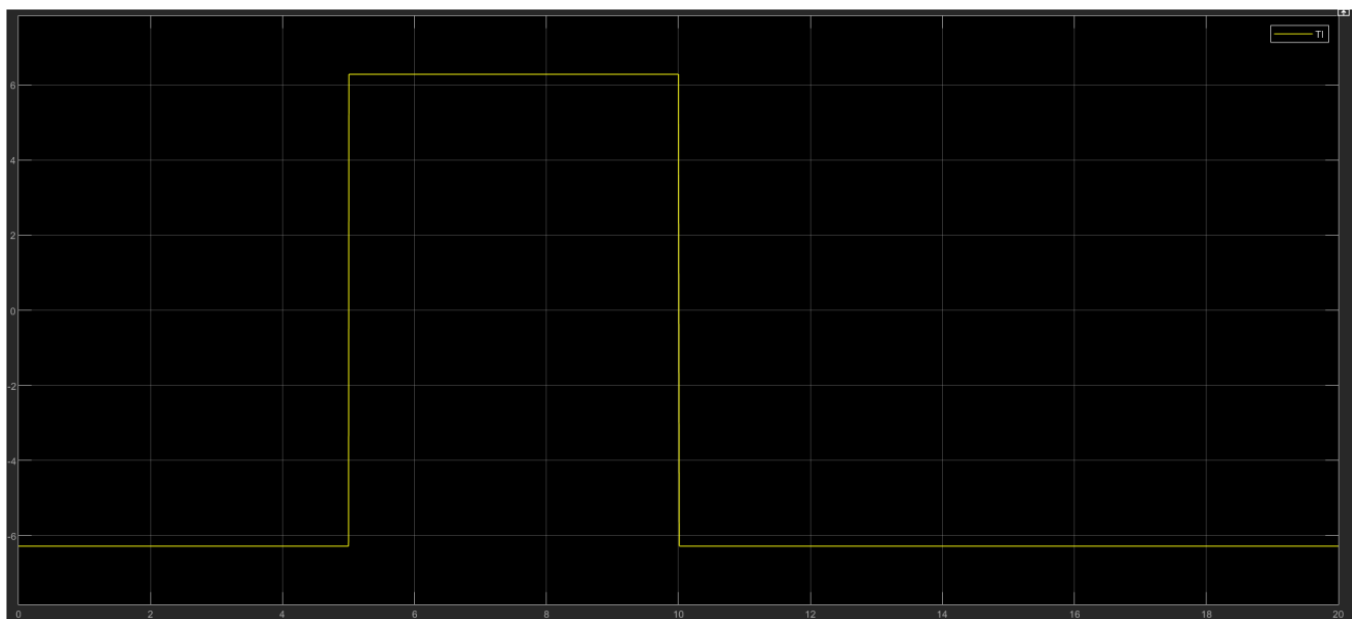






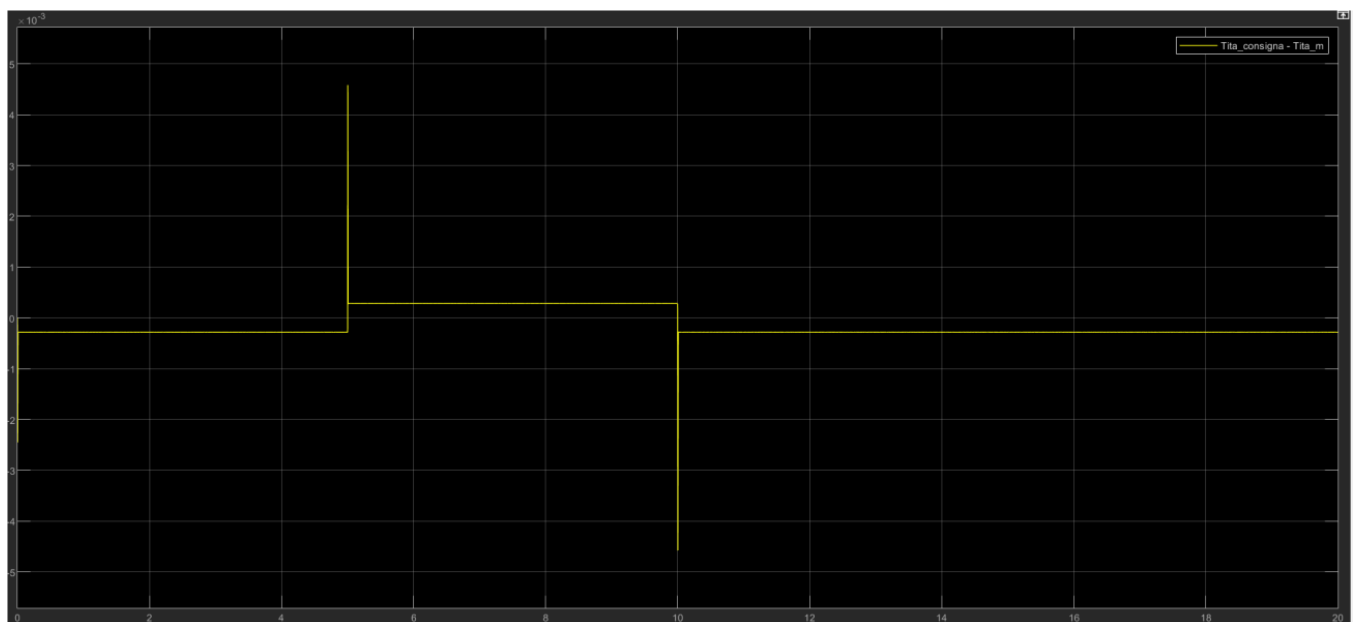
3.4.2. Rechazo a perturbaciones

para evaluar la respuesta del sistema ante perturbaciones, proporcionamos una consigna constante igual a 0 con un escalón como perturbación.





Notamos un error de estado estacionario en este caso.



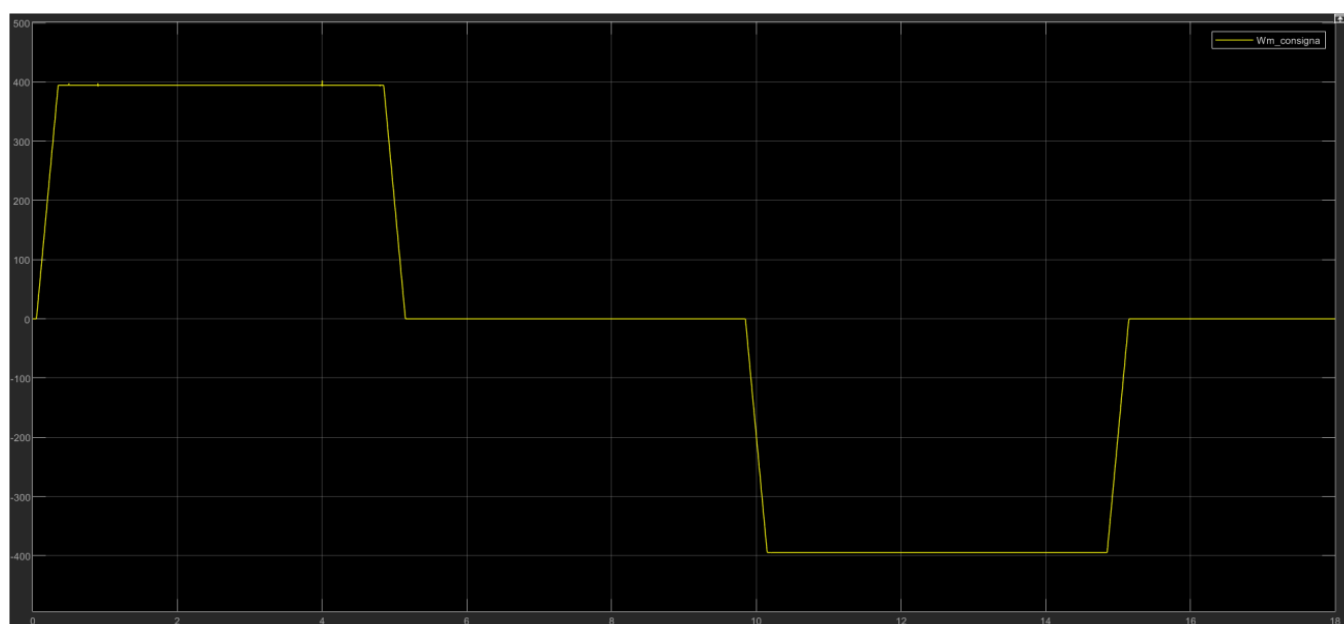
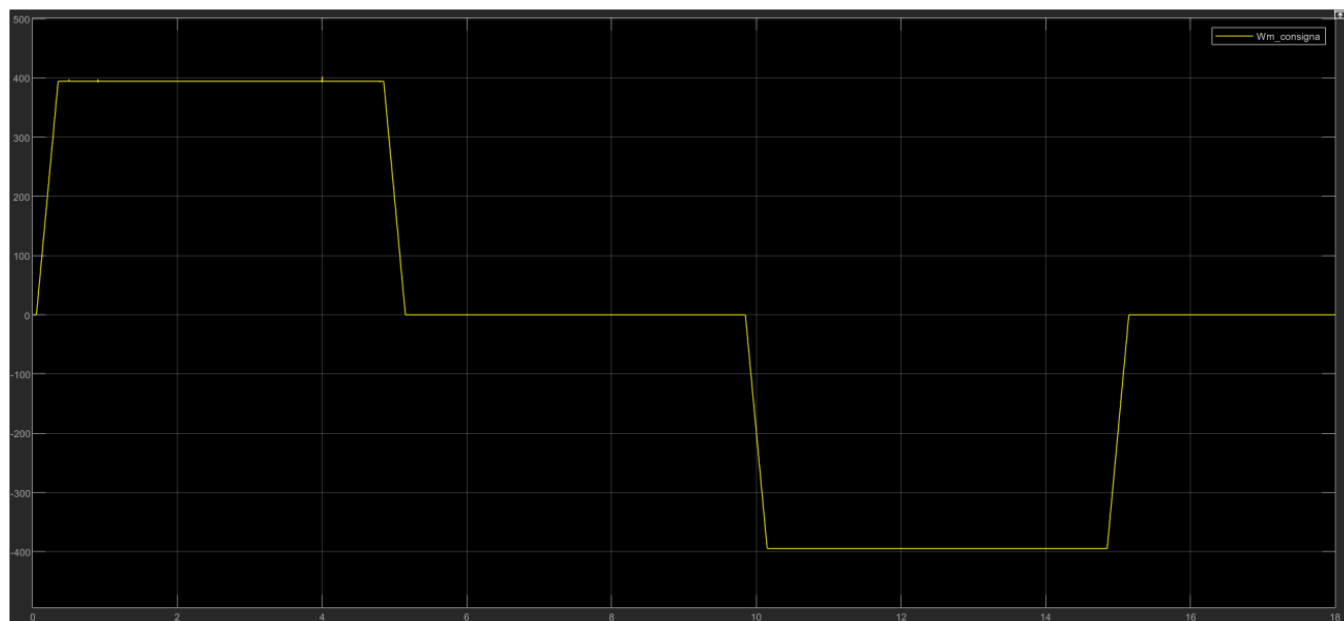
3.5. Verificación de desempeño y/o mejoras

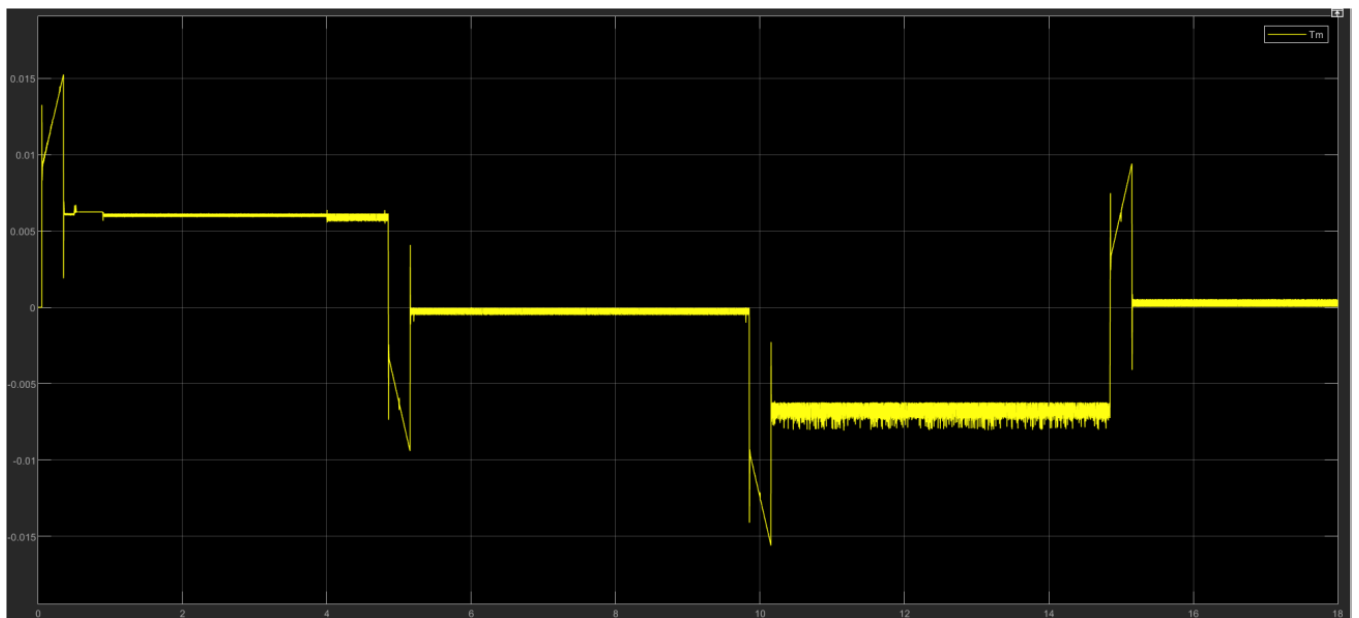
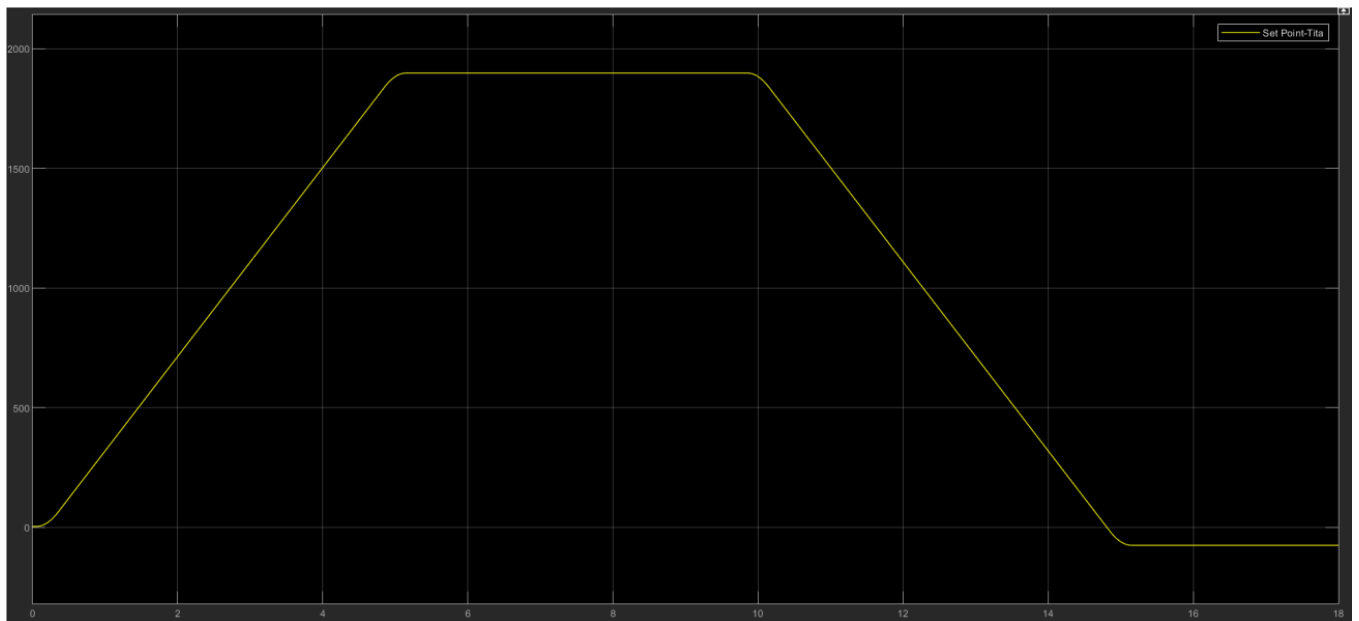
3.5.1. Especificaciones de operación (valores límites)

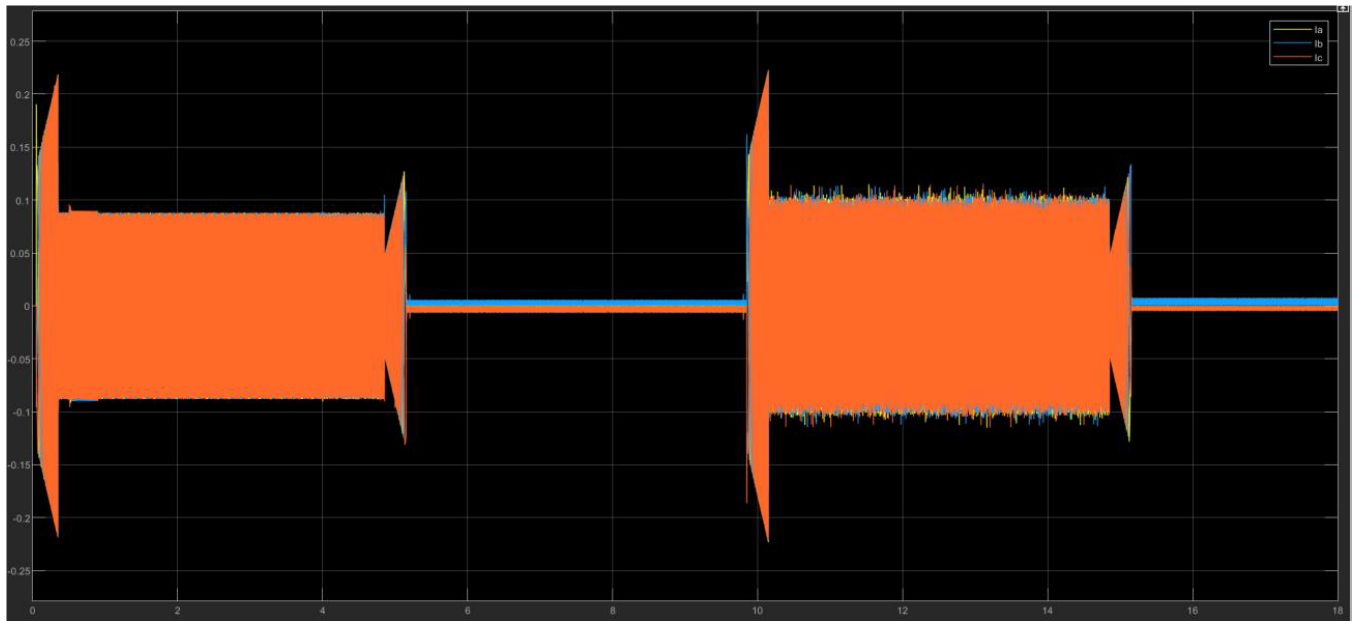
	Especificación de Operación		Valores obtenidos en simulación	
	Régimen continuo	Valor máximo	Régimen continuo	Valor máximo
Torque motor	0.023	0.093	0.009	3.7
Velocidad angular	691.15		394.9	
Corriente en el estator	0.4	2	0.030	54
Tensión en el estator	24		19.01	

Causa primera: puntos de inflexión en la consigna genera picos muy altos.

Una forma de mejorar esto es suavizar la consigna. Podemos aplicar un filtro a la entrada de esta o como en nuestro caso, trabajar sobre el perfil de velocidad angular. Al eliminar los cambios abruptos o líneas verticales, logramos eliminar los picos que se generan en los puntos de inflexión del perfil de posición.







Al aplicar este cambio hacemos que el sistema no sobrepase los valores pico de las especificaciones que eran los que no respondían de forma satisfactoria.

3.5.2. Observador

En las simulaciones que hemos realizado, se puede observar un error de estado estacionario no nulo ante perturbaciones de carga. Este error surge debido a que el observador de estado no está realimentando la entrada de perturbación. Aunque podría ser tentador tratar de corregir esto mediante la realimentación del par de carga, esto podría implicar la adición de sensores costosos y potencialmente imprecisos, lo que mantendría el error.

En lugar de esto, proponemos una solución a través de la adición de una acción integral al observador de estado, un enfoque que aborda el problema a través de software sin requerir hardware adicional. Esto implica la introducción de un nuevo estado en nuestro observador que tiene en cuenta el tiempo que permanece la estimación del estado en un valor erróneo. Este nuevo estado es una integración del error entre la variable medida y su estimación, y se define como:

$$z(t) = \int (\theta(t) - \hat{\theta}(t)) dt \quad (83)$$

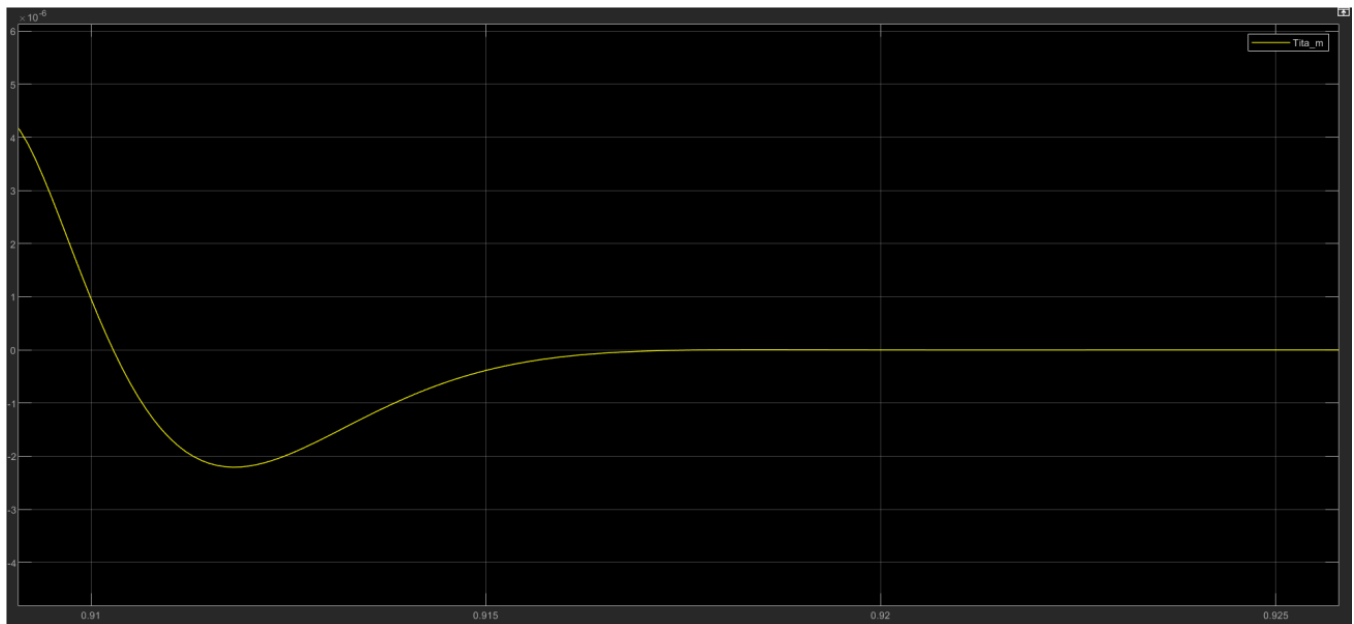
Ahora, el modelo del observador se redefine para incluir este estado integral y la entrada del observador también se ajusta para incluir este nuevo estado:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\theta}}(t) &= K_e \theta \left(\theta(t) - \hat{\theta}(t) \right) + \tilde{\omega}(t) \\ \dot{\tilde{\omega}}(t) &= K_e \omega \left(\theta(t) - \hat{\theta}(t) \right) + T_m \dot{i}(t) J_e q + z(t) \\ \dot{\hat{z}}(t) &= K_e i \left(\theta(t) - \hat{\theta}(t) \right) \end{aligned}$$

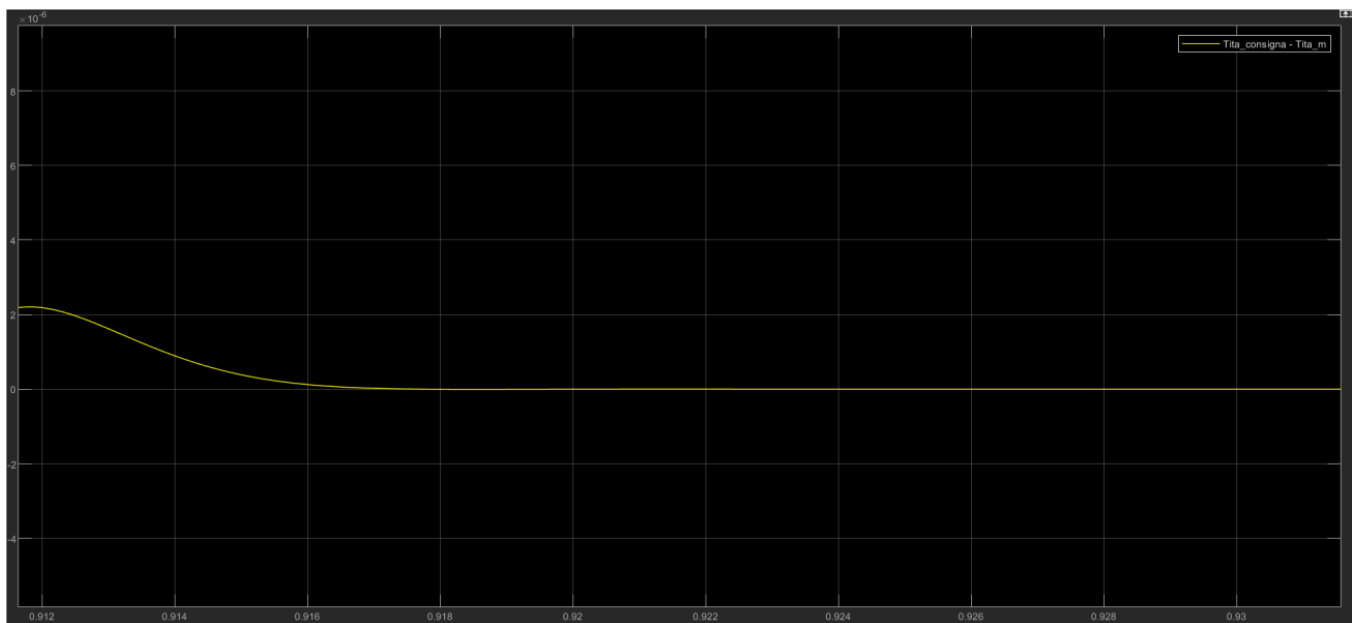
Para sintonizar las ganancias del observador, determinamos la ecuación característica del observador y la comparamos con la de un sistema con características deseadas. Para este propósito, asumimos que queremos que todos los polos del observador estén ubicados en -3200 rad/s. Esto nos da los valores de las ganancias del observador:

$$K_e \theta = 9.6 \times 10^3 \text{ rad/s} \quad K_e \omega = 3.072 \times 10^7 \text{ rad/s}^2 \quad K_e i = 3.2768 \times 10^{10} \text{ rad/s}^3$$

Estas ganancias aseguran que el error de estado estacionario converja asintóticamente a cero, incluso ante perturbaciones de carga. Así, la adición de la acción integral en el observador ha resuelto el problema sin la necesidad de hardware adicional.



Vemos como el valor de tita real es igual a 0 luego de un transitorio debido a la perturbación. Esto además se puede corroborar en la siguiente imagen que representa el error entre la consigna y el valor real de la posición angular:



3.5.3. Comportamiento térmico del motor

Procedemos a verificar la temperatura del bobinado cuando la consigna involucra una operación continua repetitiva sumado una perturbación continua. Estas dos se crearon a partir de la consigna inicial repetida dentro de un lapso de 300 segundos.

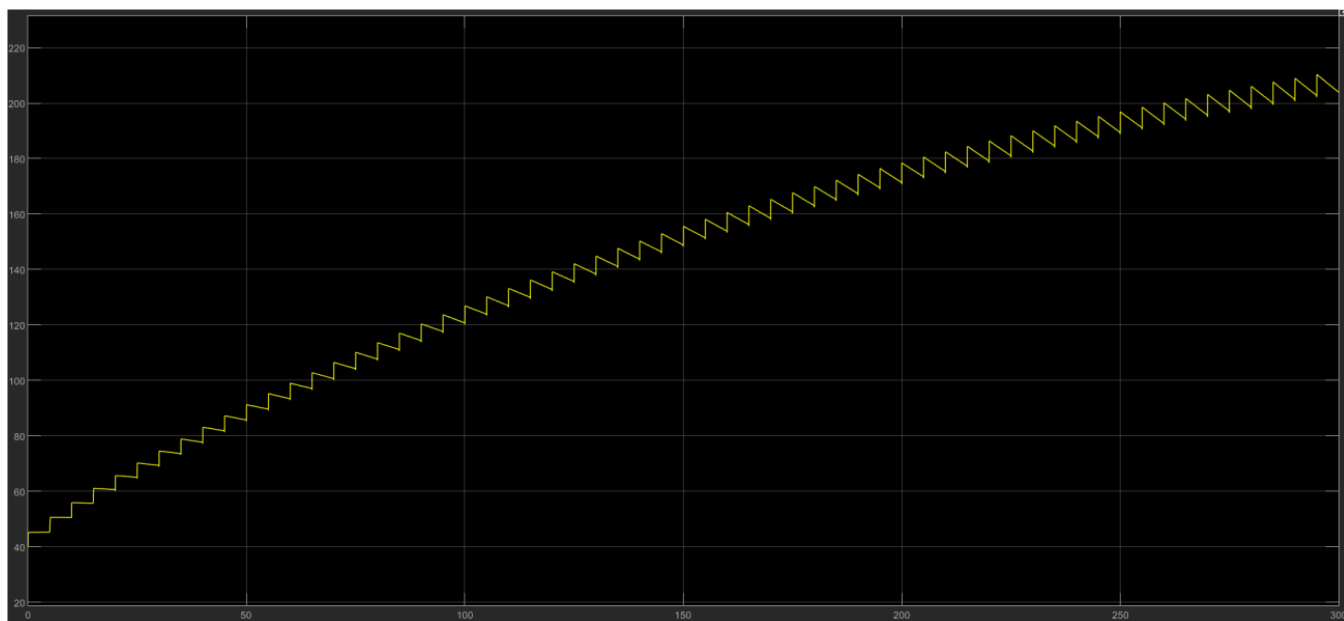


Figura 29: Temperatura sin suavizado

Vemos que cuando la consigna es la original, el sistema sobrepasa los límites de temperatura, lo que podría producir una degradación de los componentes. Además notamos que esta se vuelve asintótica.

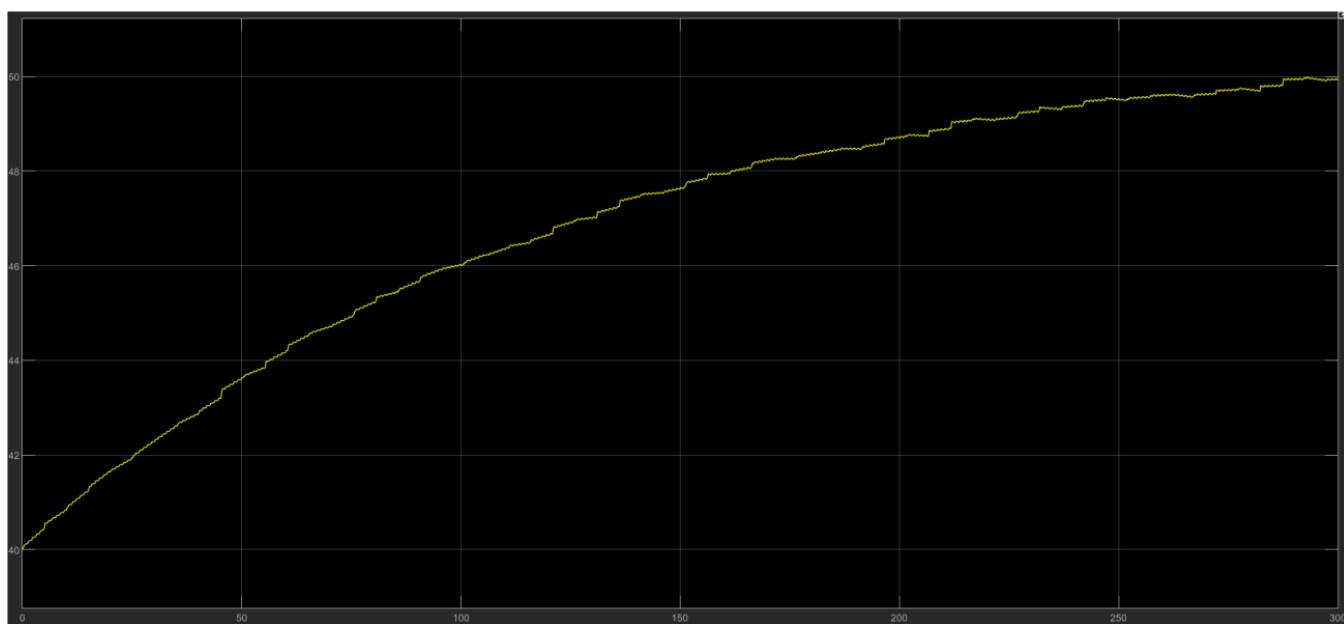


Figura 30: Temperatura con suavizado

En este caso, al igual que en el anterior, la respuesta en temperatura se vuelve asintótica pero a valores dentro de los límites permitidos.

3.5.4. Desempeño del sistema ante una respuesta no ideal de los sensores

En este segmento, se estudian los efectos de las respuestas no ideales (banda limitada) de los sensores que miden las corrientes, la posición angular del motor, y la temperatura. Se siguen las siguientes especificaciones:

- Sensor de corriente: modelo pasa bajo (LP) en el espacio de estados (SS) de 2° orden, con una frecuencia natural de 6000 rad/s y un factor de amortiguamiento (ξ) de 1.

- Sensor de posición angular: modelo LP en SS de 2° orden, con una frecuencia natural de 2000 rad/s y un factor de amortiguamiento de 1.
- Sensor de temperatura: modelo LP en SS de 1° orden, con una constante de tiempo (τ) de 20 s.

Para los filtros de segundo orden, se usa la función de transferencia:

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\omega_n\zeta s + \omega_n^2}$$

Donde se puede demostrar que la función de transferencia de un modelo en el espacio de estados se calcula con la ecuación:

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

Si se toma como matriz de estados A :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ \omega_n^2 & -2\omega_n\zeta \end{bmatrix}$$

Entonces, igualando las ecuaciones, las matrices del modelo en el espacio de estados deben ser:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ \omega_n^2 & -2\omega_n\zeta \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = [0 \quad 1], \quad D = [0]$$

Por lo tanto, los sensores de corriente y posición angular quedan definidos por:

Para el sensor de corriente:

$$A_{iac} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 36 \times 10^6 & -12000 \end{bmatrix}, \quad B_{iac} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C_{iac} = [0 \quad 1], \quad D_{iac} = [0]$$

Para el sensor de posición:

$$A_{pos} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 4 \times 10^6 & -4000 \end{bmatrix}, \quad B_{pos} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C_{pos} = [0 \quad 1], \quad D_{pos} = [0]$$

Para el filtro de primer orden, la función de transferencia es:

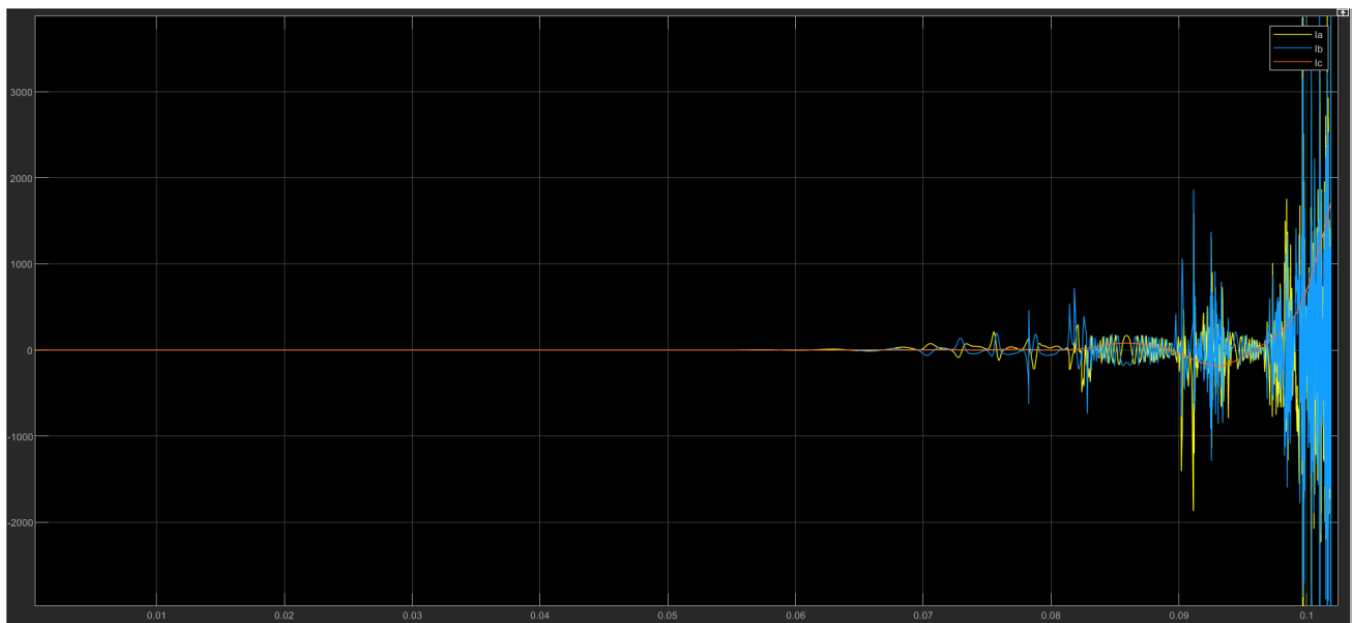
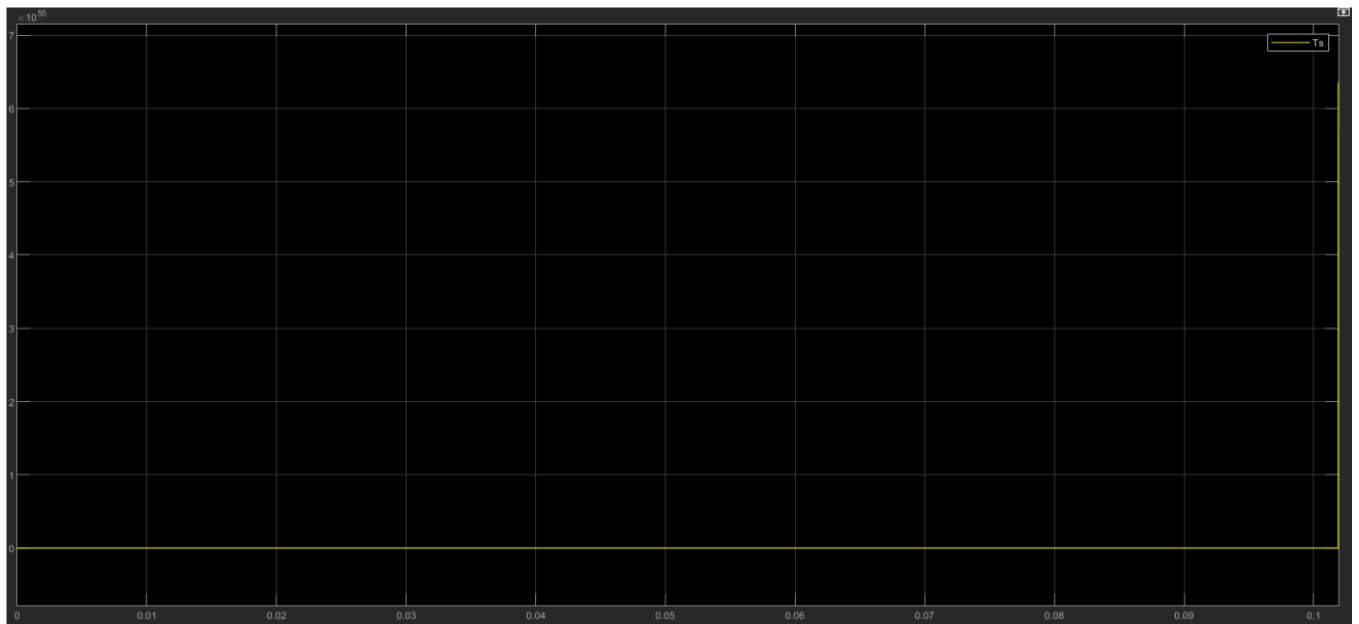
$$G(s) = \frac{1}{1 + \tau s}$$

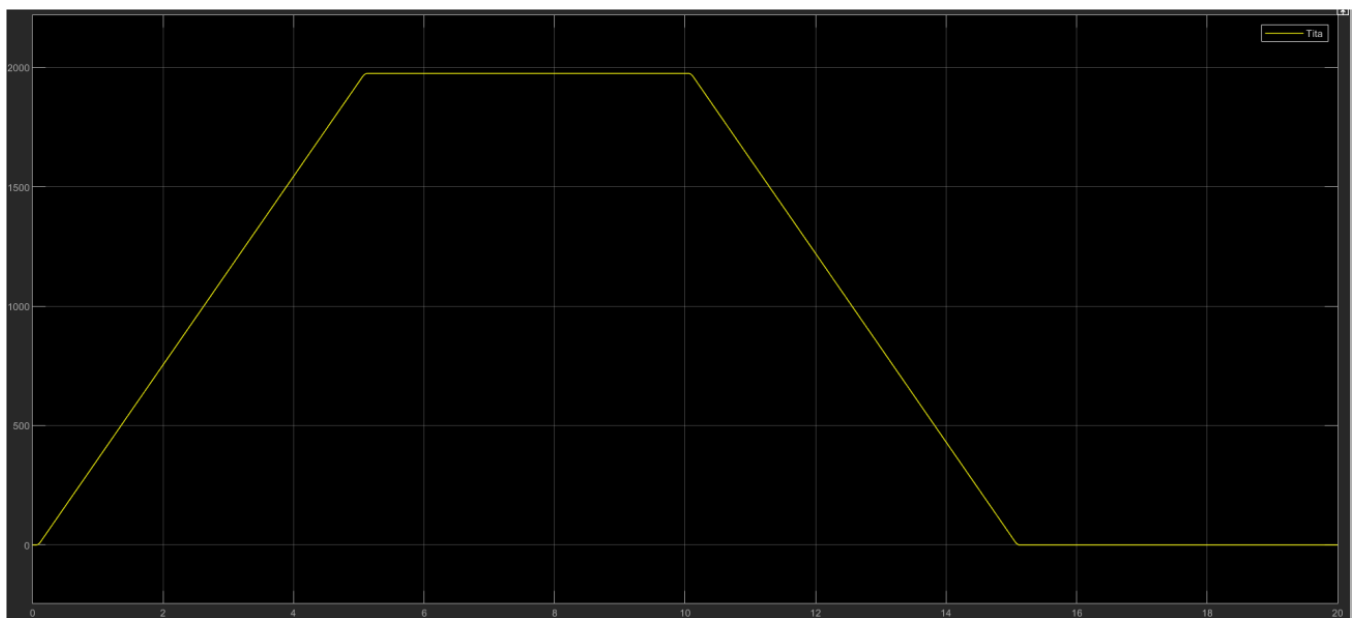
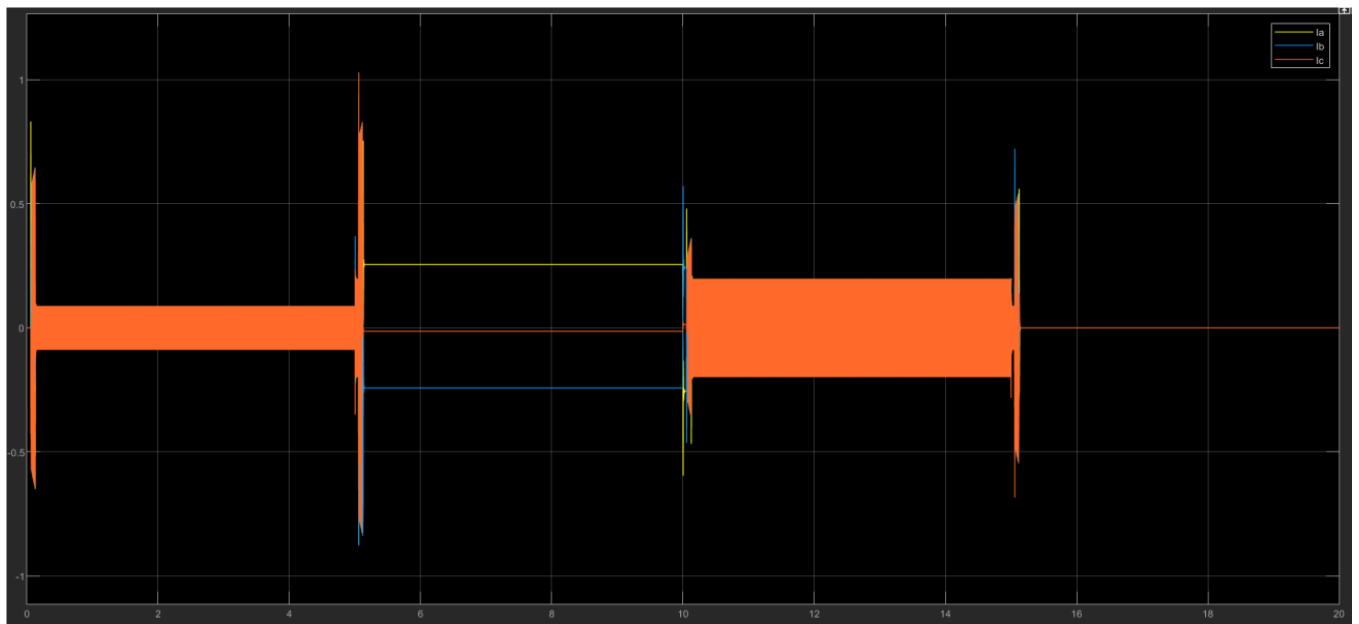
De donde se puede deducir que:

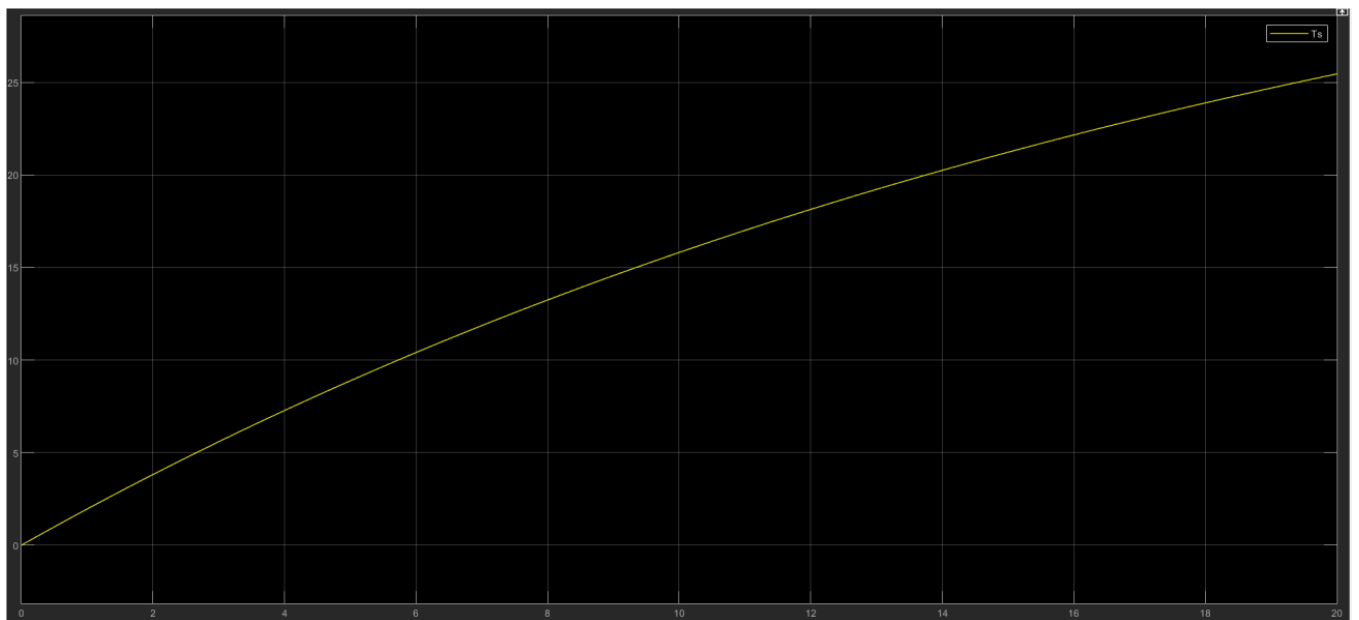
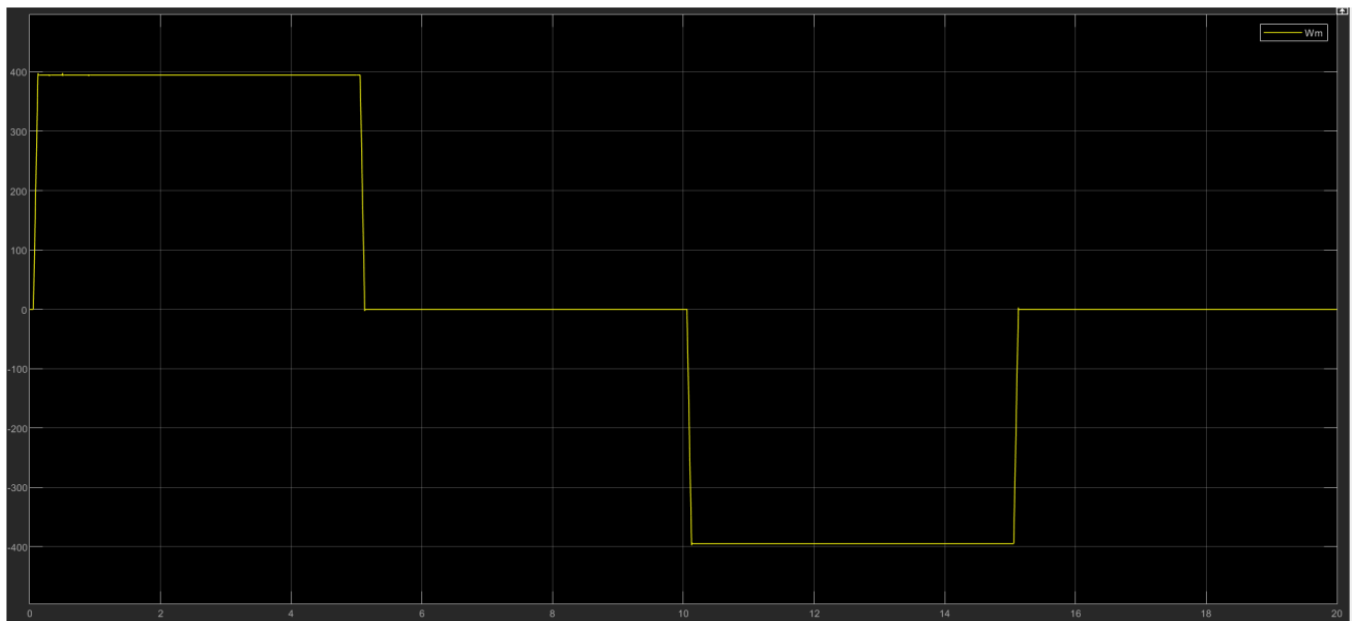
Para el sensor de temperatura:

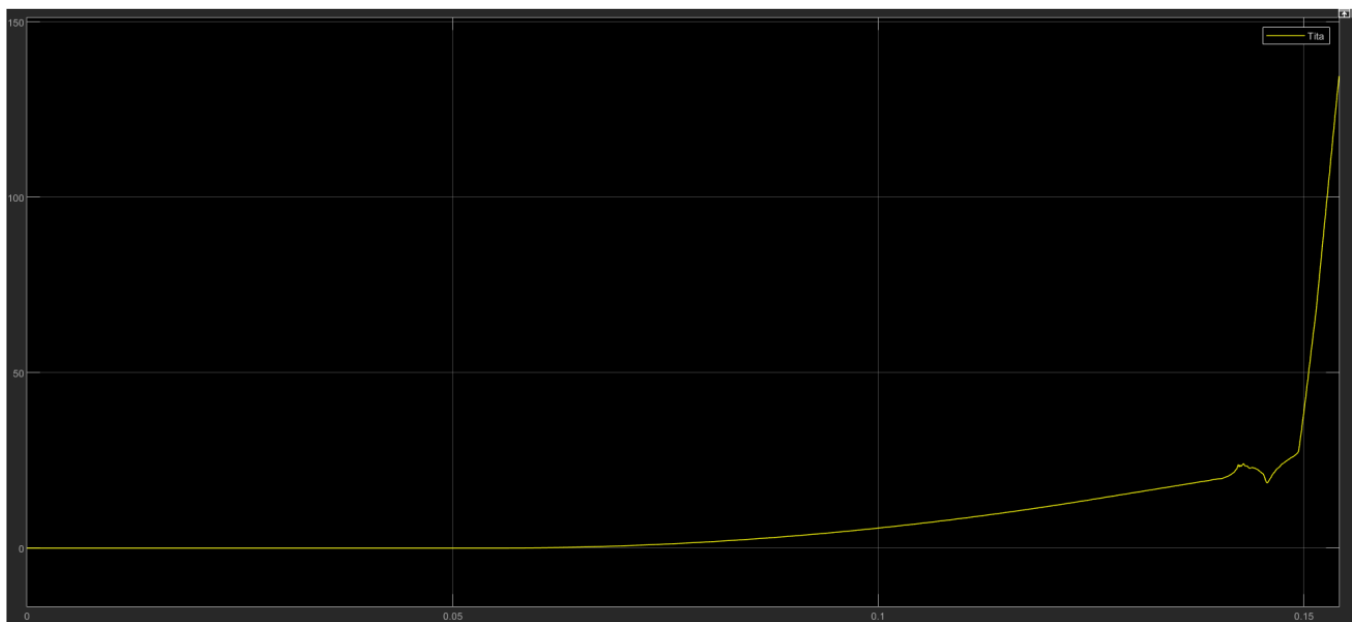
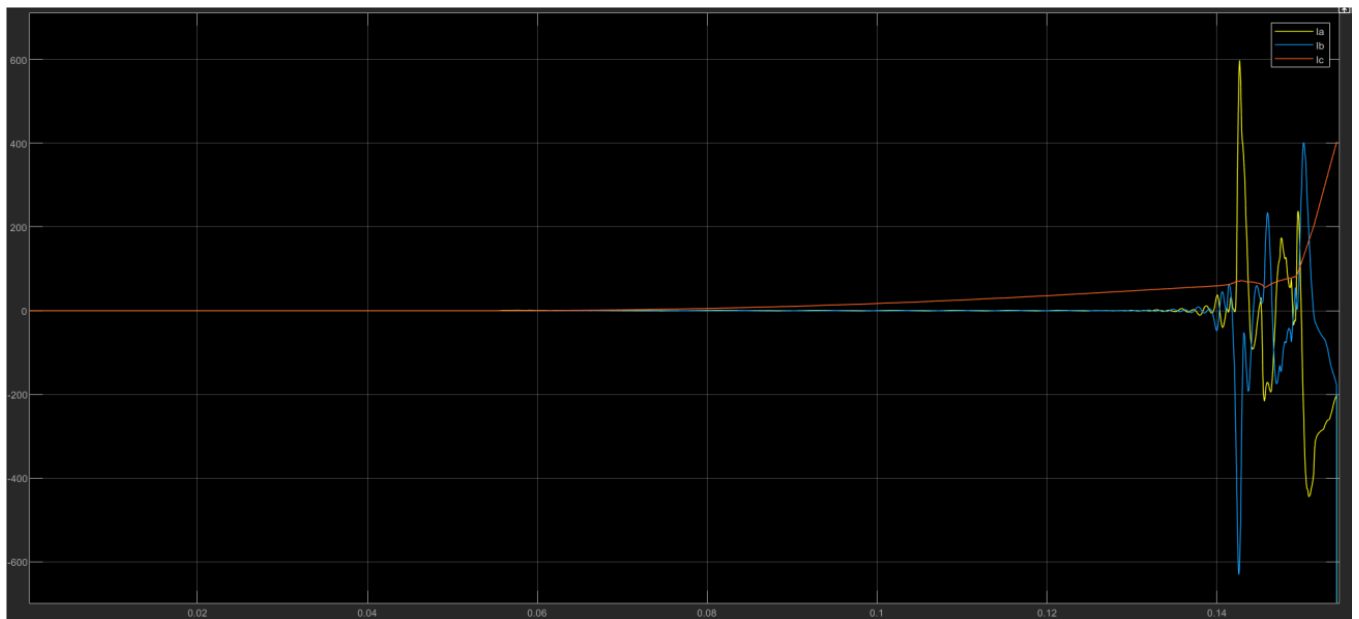
$$A_T = [-0.05], \quad B_T = [1], \quad C_T = [0.05], \quad D_T = [0]$$

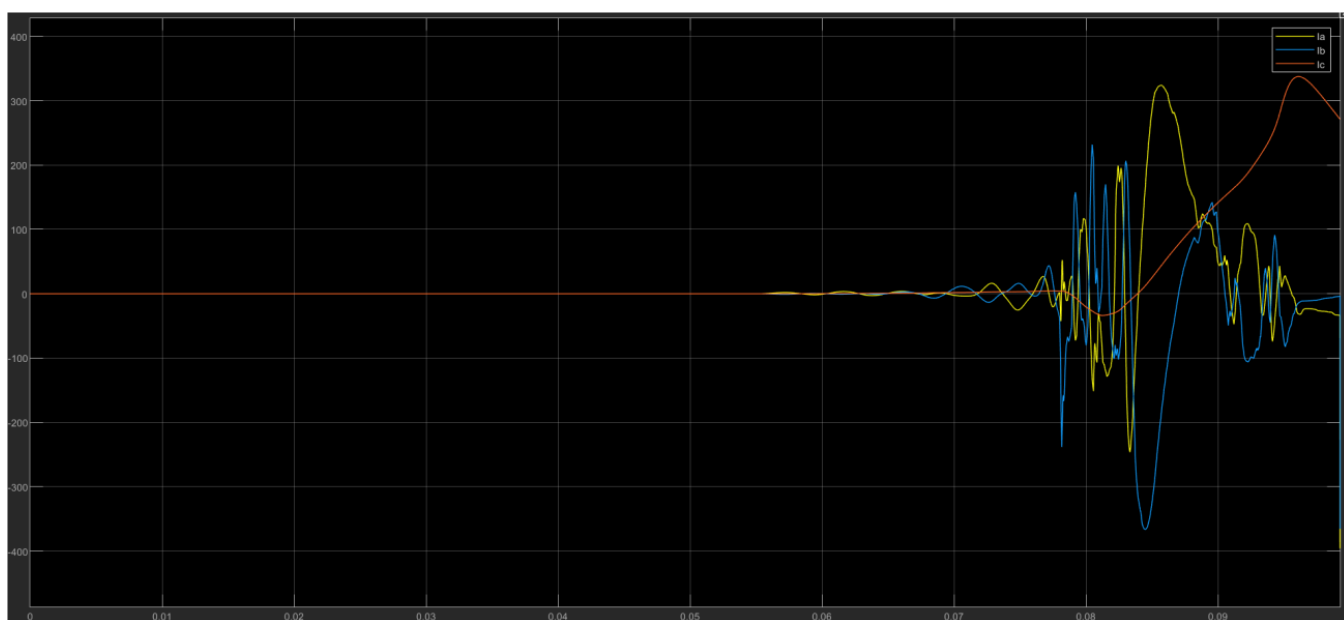
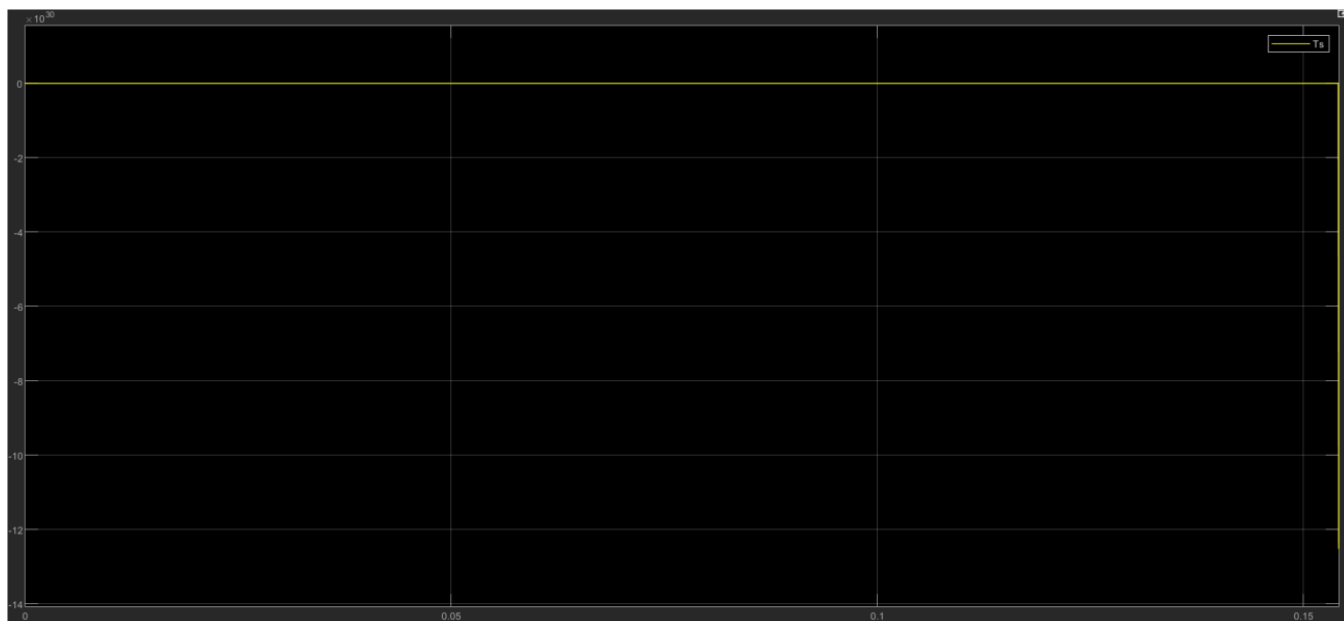


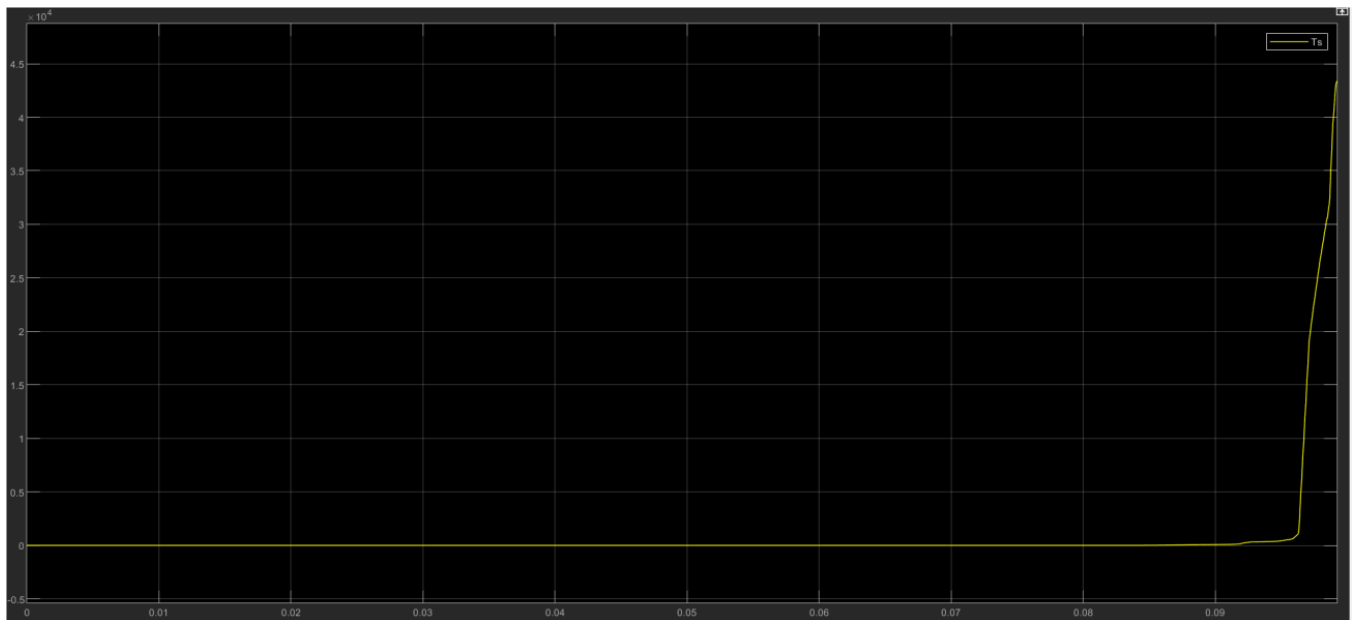
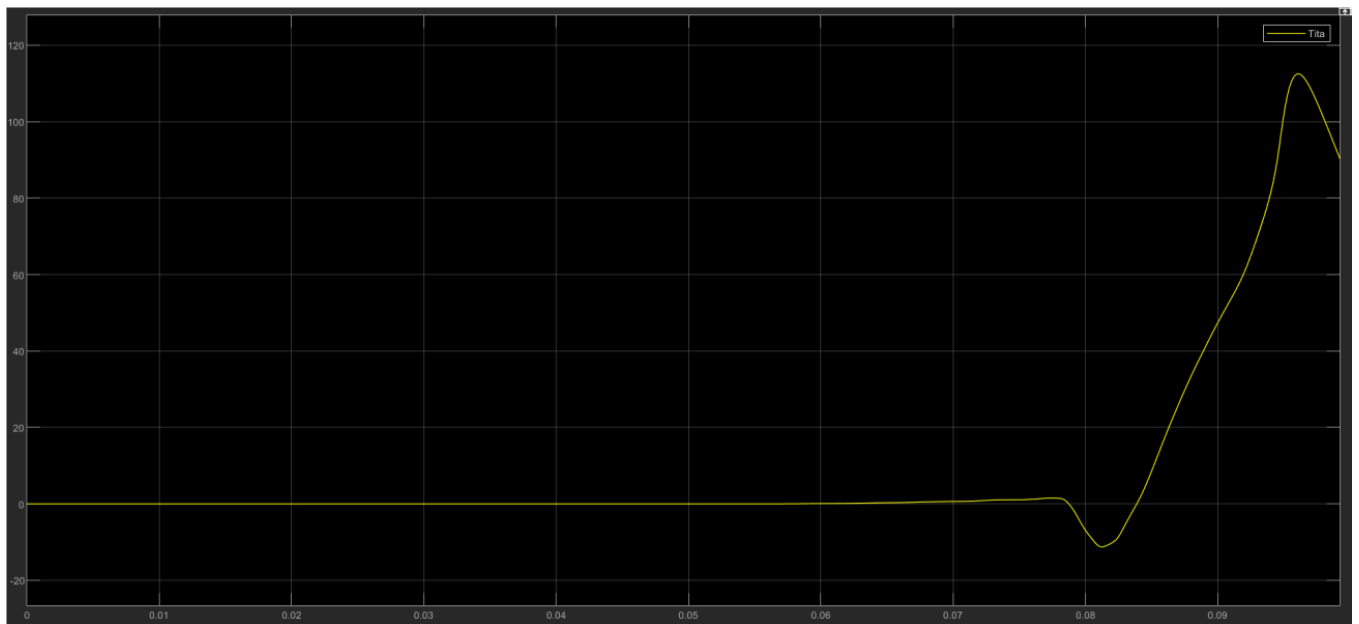


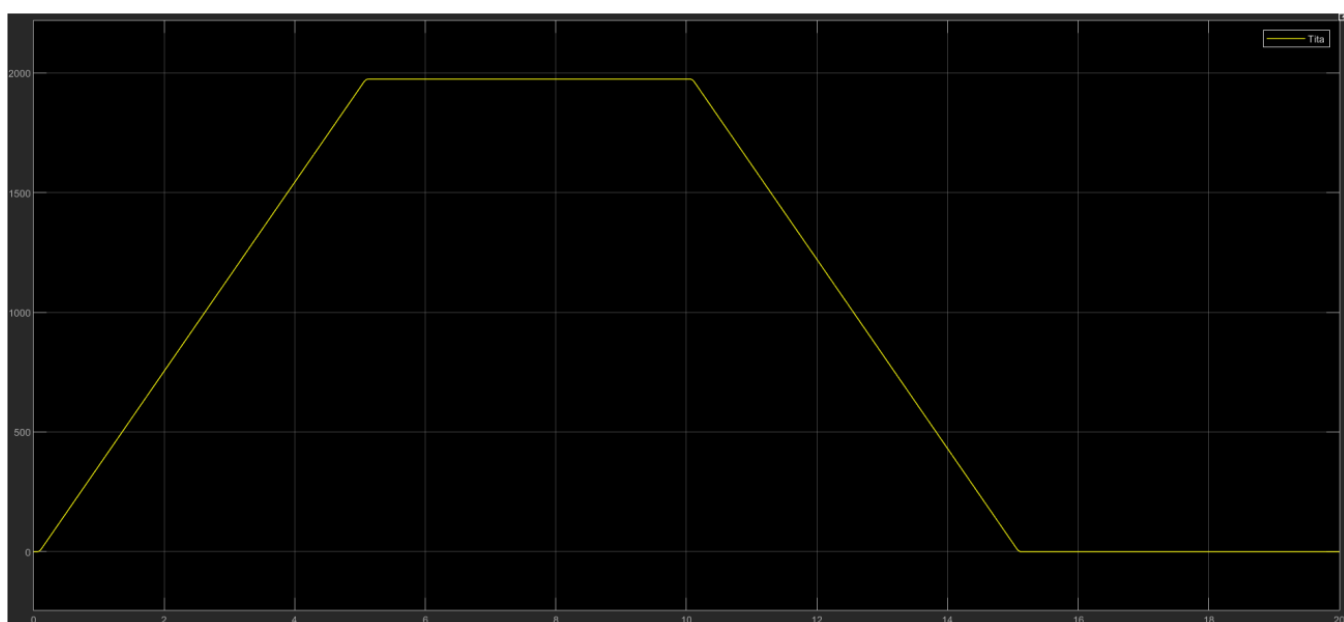
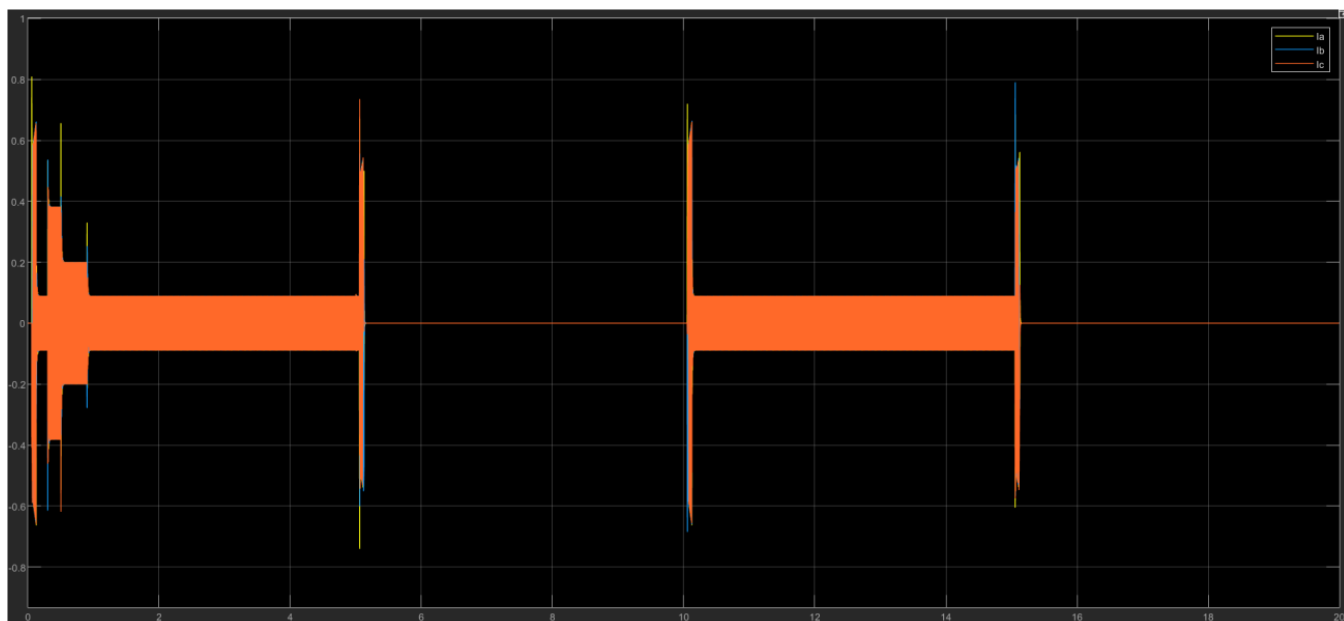


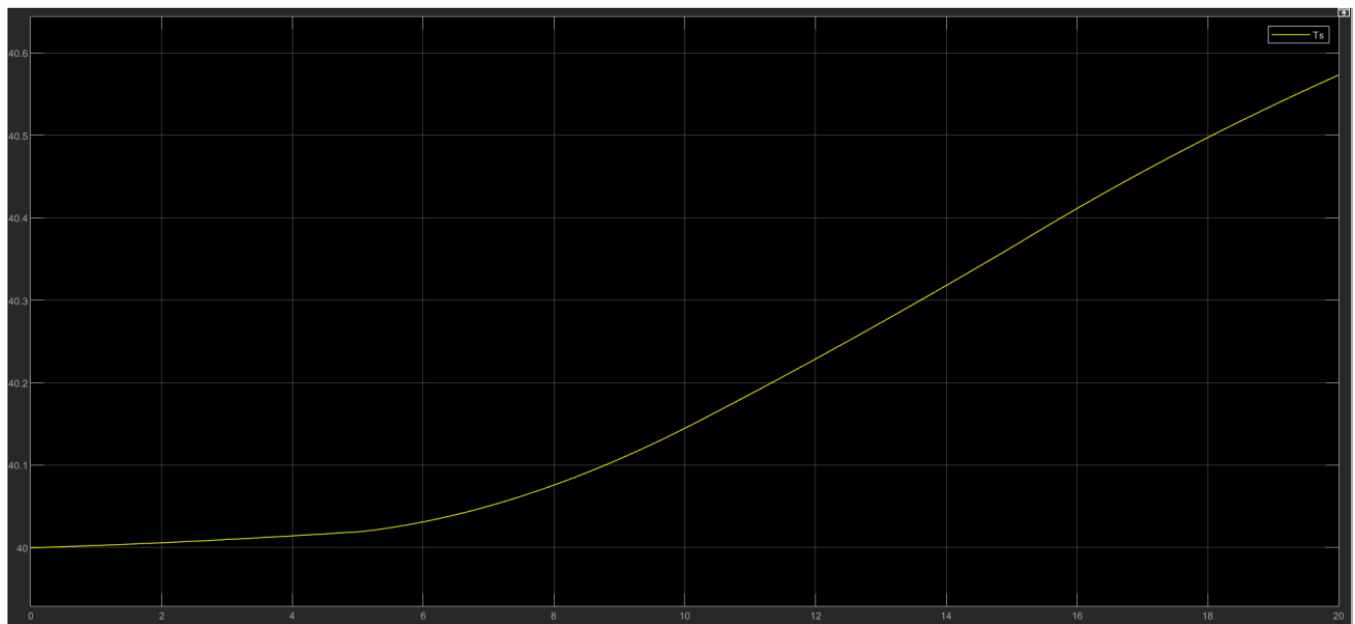












3.5.5. Moduladore trifásico de tensión no ideal

El desempeño de un sistema eléctrico se analiza incorporando características no ideales en el modulador de tensión trifásico, centrando la atención en la saturación y limitación del ancho de banda. Se modela el modulador como un filtro pasa bajos con una saturación de tensión definida por $\sqrt{2} \cdot V_s \cdot \sqrt{3}$, donde $V_{smax} = 24 \text{ Vca rms}$. El filtro pasa bajo se define con una frecuencia natural $\omega = 6000 \text{ rad/s}$ y un factor de amortiguamiento $\xi = 1$, representándose en el espacio de estados con las siguientes matrices:

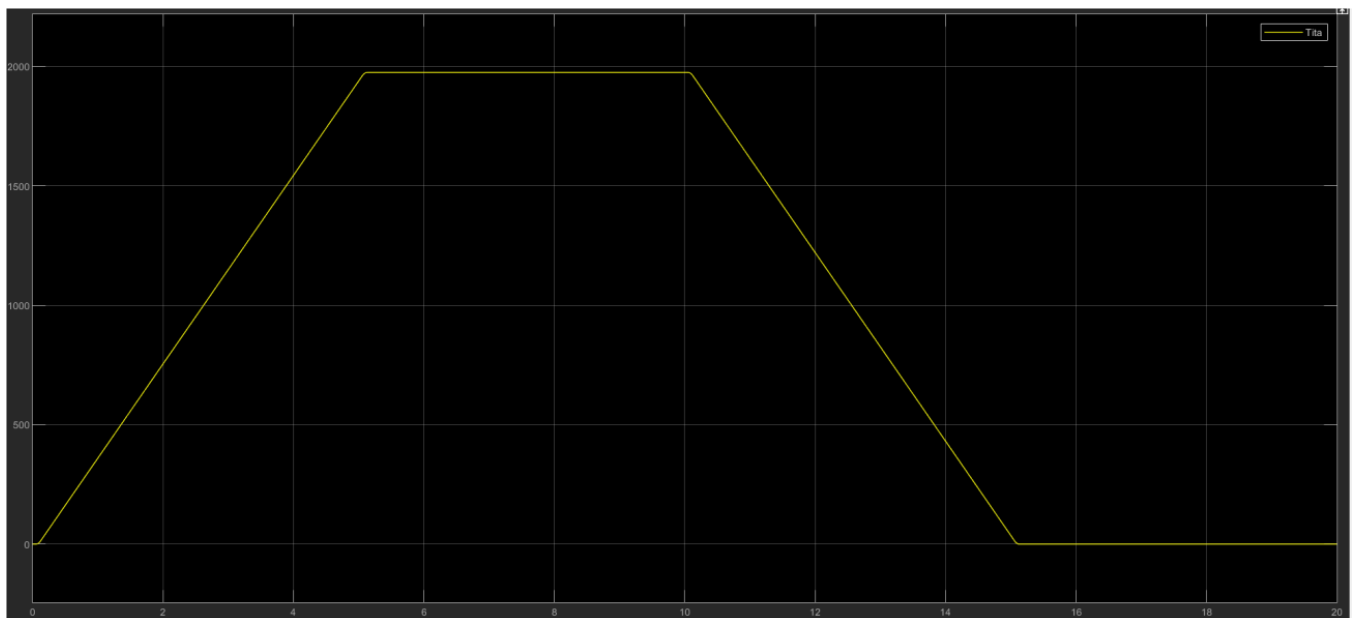
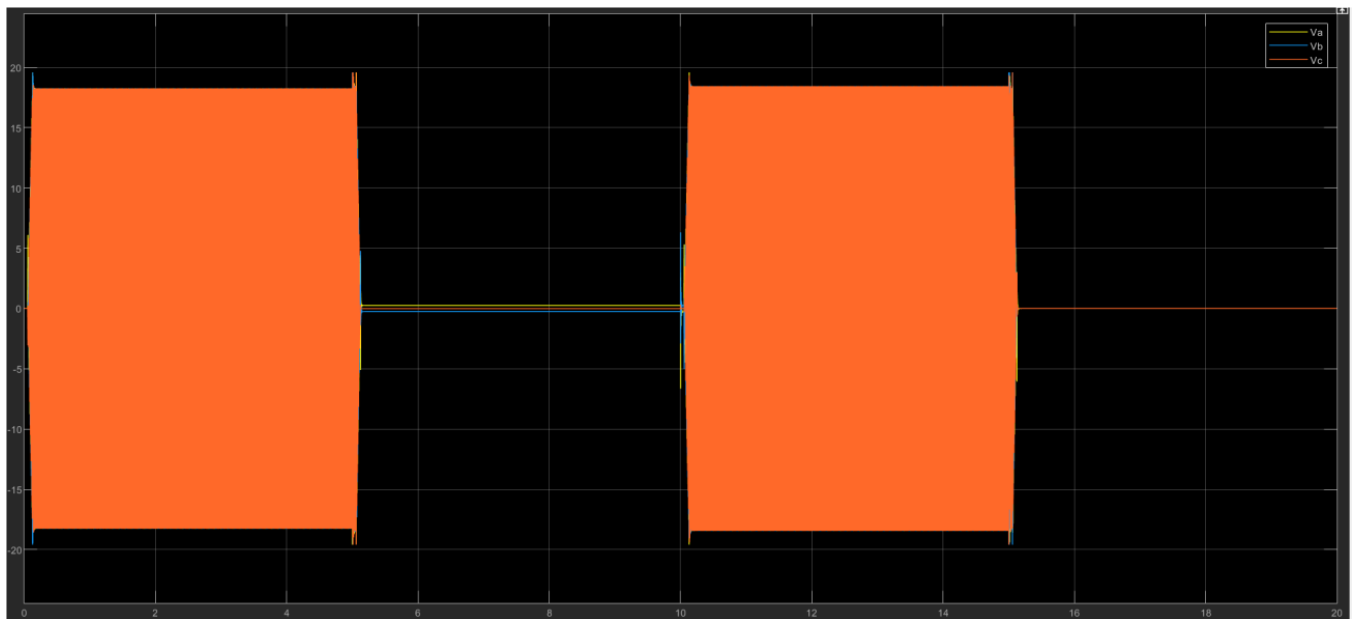
$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 36 \times 10^6 & -12000 \end{bmatrix}, \quad B = [10], \quad C = [0 \quad 1], \quad D = [0]$$

Estas matrices provienen de las obtenidas en el punto anterior.

Al implementar estas características no ideales, se observa una degradación en el desempeño del sistema. La saturación del modulador provoca un creciente error entre la consigna y la posición actual. Este error se debe a que la máquina no recibe la tensión necesaria para generar el torque correcto y corregir su posición. En consecuencia, las tensiones reales se estancan en sus valores límites de saturación, mientras que las consignas de tensión siguen aumentando de forma exponencial.

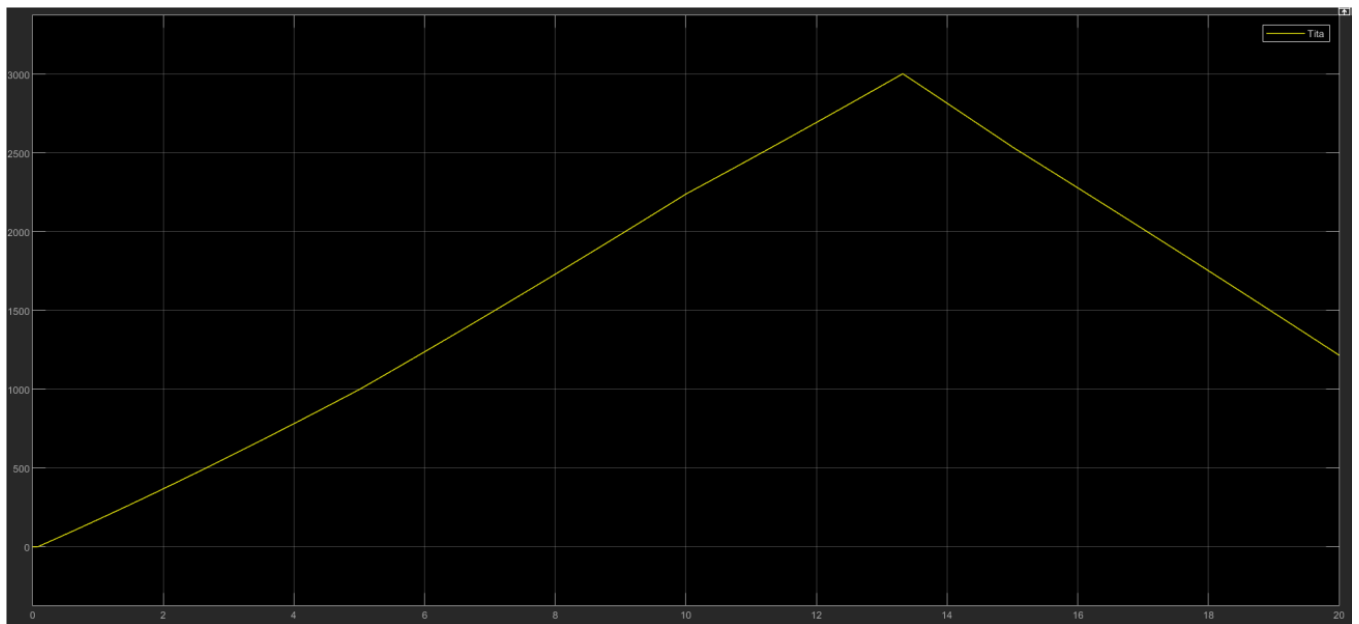
Por otro lado, la introducción del modelo de filtro pasa-bajo provoca efectos similares a la degradación de los sensores. La solución sugerida para estas inestabilidades es la incorporación de la dinámica de los sensores y el modulador de torque en el modelo del sistema, lo que permitiría un ajuste más preciso

Aplicando inicialmente solo la saturación:



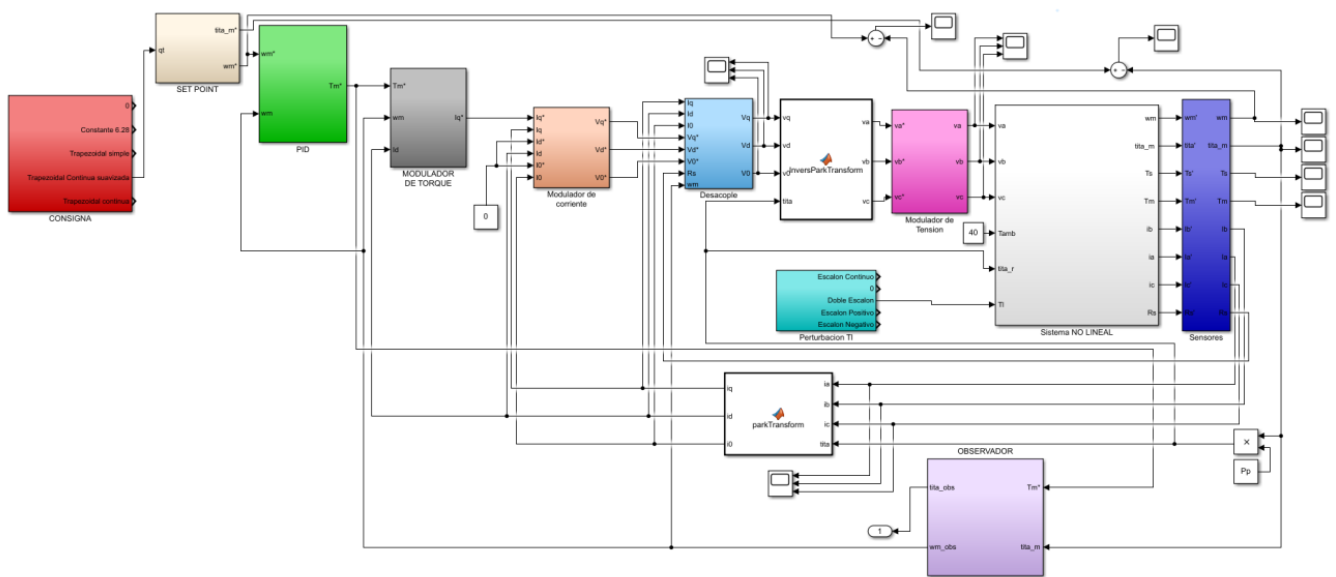
Notamos que no afecta significativamente ya que para alcanzar la consigna suavizada, las tensiones nunca superan la de saturación.

Continuamos la simulación aplicando los bloques necesarios para implementar una respuesta no ideal del modulador, ante la consigna con la que venimos trabajando. Se obtuvieron los siguientes resultados:



Vemos que ahora el sistema es incapaz de cumplir con la consigna.

3.6. Version Final



Conclusiones

Al final podemos llegar a concluir...

Referencias

A continuación se listan las referencias utilizadas para la realización de este trabajo: