

Automática y Maquinas Eléctricas

Control de Accionamiento de CA con Motor Sincrónico de Imanes Permanentes

Autores:
Alan Vignolo
Brandon Mamani

Índice

Resumen	3
Introducción	4
Desarrollo	5
1 Modelo base	5
1.1 Carga Mecánica	5
1.2 Tren de transmisión	5
1.3 Maquina eléctrica	6
1.3.1 Subsistema mecánico	6
1.3.2 Subsistema electromagnético	6
1.3.3 Subsistema térmico	7
1.4 Inversor trifásico de alimentación	7
1.5 Sensores de realimentación	8
2 Modelado, Análisis y Simulación dinámica del SISTEMA FÍSICO a Lazo Abierto	9
2.1 Modelo matemático equivalente del subsistema mecánico completo	9
2.2 Modelo dinámico del sistema físico completo	9
2.2.1 Modelo global no lineal (NL)	9
2.2.2 Modelo global linealizado con parámetros variables (LPV)	13
2.2.3 Linealización por Realimentación NL	15
2.2.4 Comparación modelo dinámico LTI equivalente aumentado vs modelo dinámico global LPV	20
2.2.5 Funciones de transferencia para el modelo LTI	21
2.3 Análisis de Estabilidad	21
2.4 Análisis de Observabilidad	23
2.5 Análisis de Controlabilidad	24
2.6 Simulación Dinámica	25
2.6.1 Respuesta del estado interno a pulso de consigna de tensión de estador en el eje q	25
2.6.2 Velocidad y corriente final de establecimiento luego de cada transitorio	32
2.6.3 Comparación de distintas condiciones iniciales	32
2.6.4 Field forcing/weakening	34
3 Diseño, análisis y simulación con controlador de movimiento en cascada con modulador de torque equivalente (Control Vectorial)	37
3.1 Modulador de torque equivalente (Controlador interno vectorial de corriente/torque)	37
3.1.1 Desacople de las realimentaciones de estado hacia la entrada	37
3.1.2 Diseño de lazos de control de corrientes	39
3.1.3 Incorporación de consigna de torque	40
3.2 Controlador externo de movimiento (posición/velocidad)	41
3.2.1 Entrada de referencia o set-point	43
3.3 Observador de Estado de orden reducido	44
3.4 Simulación en tiempo continuo con modelo completo NL	45
3.4.1 Seguimiento de consignas de movimiento	45
3.4.2 Rechazo a perturbaciones	47
3.5 Verificación de desempeño y/o mejoras	49
3.5.1 Especificaciones de operación (valores límites)	49
3.5.2 Observador	50
3.5.3 Comportamiento térmico del motor	52
3.5.4 Desempeño del sistema ante una respuesta no ideal de los sensores	53
3.5.5 Modulador trifásico de tensión no ideal	57
3.6 Version Final	59

Conclusiones	60
Referencias	61

Resumen

aLGO DE TEXTO

Introducción

Para despues.

Desarrollo

1. Modelo base

1.1. Carga Mecánica

La carga mecánica en este caso se refiere a un eje descentralizado utilizado en la articulación "hombro" de un robot SCARA. Esta articulación se encuentra en la base inercial y tiene un grado de libertad rotacional en un eje vertical. Los parámetros equivalentes de esta carga varían dependiendo de la posición y la velocidad angular instantáneas de la articulación "codo" del robot.

En este trabajo, no se incluye la modelización de la dinámica no lineal acoplada del robot. En su lugar, se considera una aproximación de la dinámica de carga tal como se ve desde el eje de la articulación "hombro", asumiendo la variación de los parámetros equivalentes.

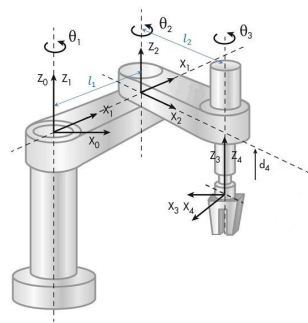


Figura 1: Modelo ilustrativo del robot SCARA

El modelo simplificado equivalente utilizado parte del eje de salida del tren de transmisión y toma en cuenta la coordenada articular del eje de la articulación "hombro" denotada como $q_1(t) = \theta_1(t)$. La ecuación que describe este modelo es:

$$J_l \cdot \dot{\omega}_l(t) = T_q(t) - b_l \cdot \omega_l(t) - T_l(t) \quad (1)$$

$$\dot{\theta}_l = \omega_l \Leftrightarrow \theta_l(t) = \int_0^t \omega_l(\xi) \cdot d\xi + \theta_l(0) \quad (2)$$

Parámetros equivalentes:

- Momento de inercia: $J_l \approx (0.2520 \pm 0.1260) \text{ kg.m}^2$
- Amortiguamiento viscoso: $b_l \approx (0 \pm 0.0030) \text{ N.m.s/rad}$

Especificaciones de operación:

- Torque de carga: $T_l(t) \approx (0 \pm 6.28) \text{ N.m}$

1.2. Tren de transmisión

En este sistema, se utiliza una caja reductora reversible con un sistema de engranajes planetarios. Se asume un acoplamiento rígido, lo que significa que no hay elasticidad torsional ni juego o holgura en el sistema. El momento de inercia equivalente y las pérdidas de energía debidas a la fricción interna se reflejan en el eje de entrada y se consideran junto con el motor.

Al considerar este acoplamiento rígido, podemos simplificar el subsistema mecánico completo, ya que no tenemos en cuenta la deformación elástica que ocurre en los engranajes durante la transmisión del par. En otras palabras, podemos tratar la carga mecánica y el motor eléctrico como una unidad, lo que resulta en un subsistema mecánico completo de un grado de libertad (1 g.d.l.).

Las relaciones del modelo equivalente (rígido) del tren de transmisión son las siguientes:

$$\omega_l(t) = \frac{1}{r} \cdot \omega_m(t) \quad (3)$$

$$T_q(t) = r \cdot T_d(t) \quad (4)$$

Parámetros equivalentes:

- Relación de reducción total: $r = 314.3008 : 1$

Especificaciones de operación:

- Velocidad nominal (salida): $n_{1nom} = 21 \text{ rpm } (\omega_{1nom} = 2.2 \text{ rad/s})$
- Torque nominal: $T_{qnom}(t) = 7.26 \text{ N.m}$
- Torque pico: $T_{qmax}(t) = 29.42 \text{ N.m}$

1.3. Maquina eléctrica

En este caso, se utiliza un motor de corriente alterna (CA) trifásico con excitación por imanes permanentes.

1.3.1. Subsistema mecánico

El subsistema mecánico del motor, que incluye el rotor y el tren de transmisión referidos al estator estacionario, se describe mediante el siguiente modelo equivalente:

$$J_m \cdot \dot{\omega}_m(t) = T_m(t) - b_m \cdot \omega_m(t) - T_d(t) \quad (5)$$

Además, se establece una relación entre la velocidad angular $\omega_m(t)$ y la derivada temporal de la coordenada angular $\theta_m(t)$ mediante la relación:

$$\dot{\theta}_m = \omega_m \Leftrightarrow \theta_m(t) = \int_0^t \omega_m(\xi) \cdot d\xi + \theta_m(0) \quad (6)$$

1.3.2. Subsistema electromagnético

En el caso de un motor eléctrico trifásico de tipo sincrónico con excitación por imanes permanentes, es posible representar un modelo idealizado equivalente utilizando coordenadas eléctricas de entrehierro $'qd0'$ fijas al rotor mediante la Transformación de Park del circuito del estator estacionario.

La Transformación de Park permite convertir el sistema de coordenadas trifásicas del estator estacionario ($f_{abcs}(t)$) en coordenadas $'qd0'$ fijas al rotor ($f_{qd0s}^r(t)$). Esto se hace mediante la siguiente relación:

$$\begin{bmatrix} f_{qs}^r(t) \\ f_{ds}^r(t) \\ f_{0s}^r(t) \end{bmatrix} = \frac{2}{3} \cdot \begin{bmatrix} \cos(\theta_r(t)) & \cos(\theta_r(t) - \frac{2\pi}{3}) & \cos(\theta_r(t) + \frac{2\pi}{3}) \\ \sin(\theta_r(t)) & \sin(\theta_r(t) - \frac{2\pi}{3}) & \sin(\theta_r(t) + \frac{2\pi}{3}) \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f_{as}(t) \\ f_{bs}(t) \\ f_{cs}(t) \end{bmatrix} \quad (7)$$

La transformación inversa, que nos permite volver al sistema de coordenadas del estator, se puede expresar mediante la siguiente relación:

$$\begin{bmatrix} f_{as}(t) \\ f_{bs}(t) \\ f_{cs}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_r(t)) & \sin(\theta_r(t)) & 1 \\ \cos(\theta_r(t) - \frac{2\pi}{3}) & \sin(\theta_r(t) - \frac{2\pi}{3}) & 1 \\ \cos(\theta_r(t) + \frac{2\pi}{3}) & \sin(\theta_r(t) + \frac{2\pi}{3}) & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f_{qs}^r(t) \\ f_{ds}^r(t) \\ f_{0s}^r(t) \end{bmatrix} \quad (8)$$

Sabiendo que las coordenadas eléctrica del entrehierro $qd0'$ fijas al rotor están dadas por:

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_r &= \omega_r(t) \Leftrightarrow \theta_r = \int_0^t \omega_r(\xi) \cdot d\xi + \theta_r(0) \\ \theta_r(t) &= P_p \cdot \theta_m(t) \therefore \omega_r(t) = P_p \cdot \omega_m(t) \end{aligned} \quad (9)$$

Se determina que el torque electromagnético se calcula utilizando la siguiente fórmula:

$$T_m(t) = \frac{3}{2} \cdot P_p \cdot [\lambda_m^r + i_{ds}^r(t) \cdot (L_d - L_q)] \cdot i_{qs}^r(t) \quad (10)$$

1.3.3. Subsistema térmico

Se consideran únicamente las pérdidas eléctricas resistivas debido al efecto Joule en el bobinado del estator, sin tener en cuenta las pérdidas magnéticas en el núcleo. Además, se asume que la transferencia de calor se produce por conducción y convección natural, sin utilizar ventilación forzada.

La potencia de pérdidas calóricas se calcula utilizando las siguientes expresiones:

$$P_{s_{perd}}(t) = \frac{3}{2} \cdot R_s(t) \cdot [i_{qs}^r(t)^2 + i_{ds}^r(t)^2 + 2 \cdot i_{0s}(t)] \quad (11)$$

$$P_{s_{perd}}(t) = C_{ts} \cdot \dot{T}_s(t) + \frac{T_s(t) - T_{amb}(t)}{R_{ts-amb}} \quad (12)$$

Parámetros equivalentes:

- Momento de inercia (motor y caja): $J_m \approx 3.1 \times 10^{-6} \text{ kg.m}^2$
- Coeficiente de fricción viscosa (motor y caja): $b_m \approx 1.5 \times 10^{-5} \text{ N.m.rad/s}$
- Pares de polos magnéticos: $P_p = 3 \text{ pares (es decir, 6 polos)}$
- Flujo magnético equivalente de imanes concatenado por espiras del bobinado de estator: $\lambda'_{mr} \approx 0.01546 \text{ V.s/rad}$
- Inductancia de estator (eje en cuadratura): $L_q \approx 5.8 \text{ mH}$
- Inductancia de estator (eje directo): $L_d \approx 6.6 \text{ mH}$
- Inductancia de dispersión de estator: $L_{ls} \approx 0.8 \text{ mH}$
- Resistencia de estator, por fase: $R_s \approx 1.02 \Omega \text{ (@40 °C)} \rightarrow 1.32 \Omega \text{ (@115 °C)}$
- Coeficiente de aumento de R_s con $T_s^\circ(t)$: $\alpha_C = 3.9 \times 10^{-3} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$
- Capacitancia térmica de estator: $C_{ts} \approx 0.818 \text{ W}^\circ\text{C/s}$ (almacenamiento interno)
- Resistencia térmica estator-ambiente: $R_{ts-amb} \approx 146.7 \text{ }^\circ\text{C/W}$ (disipación al ambiente)
- Constante de tiempo térmica: $\tau_{ts-amb} = R_{ts-amb} \cdot C_{ts} \approx 120 \text{ s}$

Especificaciones de operación:

- Velocidad nominal rotor: $n_m \approx 6600 \text{ rpm}$ ($\omega_m \approx 691.15 \text{ rad/s}$)
- Tensión nominal de línea: $V_{sl} \approx 24 \text{ V}_{ca \text{ rms}}$ (tensión nominal de fase: $V_{sf} \approx V_{sl}\sqrt{3}$)
- Corriente nominal: $I_s \approx 0.4 \text{ A}_{ca \text{ rms}}$ (régimen continuo)
- Corriente máxima: $I_{s \text{ máx}} \approx 2.0 \text{ A}_{ca \text{ rms}}$ (corta duración, aceleración)
- Temperatura máxima de bobinado estator: $T_{s \text{ máx}} = 115 \text{ }^\circ\text{C}$
- Rango de temperatura ambiente de operación: $-15^\circ\text{C} \leq T_{amb} \leq 40^\circ\text{C}$

1.4. Inversor trifásico de alimentación

El sistema utiliza un inversor trifásico de 4 cuadrantes, compuesto por un puente trifásico con llaves electrónicas semi-conductoras, como transistores MOSFETs o IGBTs, alimentado desde una fuente ideal de corriente continua (CC). El inversor se controla mediante modulación de ancho de pulso (PWM) y proporciona tensiones de fase equilibradas y senoidales en el estator de la máquina eléctrica sincrónica.

El modelo promediado considera las tensiones de fase en el estator como senoidales de secuencia positiva (abc) equilibradas, con un módulo variable $V_{sl}(t)$ y una frecuencia $\omega_e(t)$. El ángulo de carga del rotor, $\delta(t)$, representa el desfase instantáneo entre la coordenada eléctrica fija al rotor y la coordenada eléctrica sincrónica del estator, y depende del torque erogado.

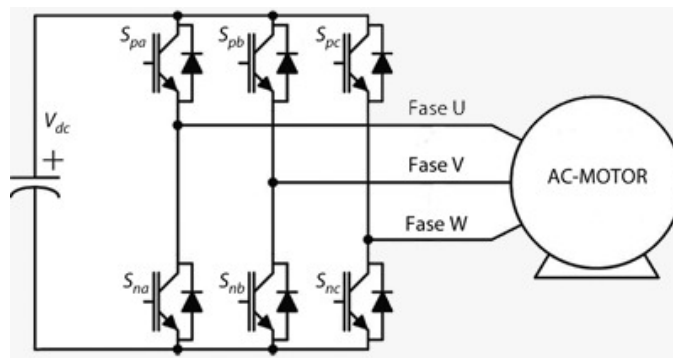


Figura 2: Circuito inversor ilustrativo

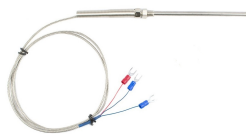
1.5. Sensores de realimentación

El sistema cuenta con varios dispositivos físicos para la medición y acondicionamiento de las variables. A continuación se describen los dispositivos y las variables medidas:

Un sensor de temperatura (por ejemplo, un sensor de resistencia térmica, RTD) ubicado en el bobinado del estator. La variable medida es $T_s(t)$, que se utiliza para monitorear el calentamiento y estimar la resistencia del estator, $R_s(t)$.

Sensor de posición angular (codificador incremental o "encoder") montado en el eje del motor. Se asume un proceso de "homing" y decodificación idealizada. La variable medida es $\theta_m(t)$, que representa la posición angular absoluta rectificada después de girar más de una revolución.

Tres sensores de corriente instantánea de fase, montados en la salida trifásica del inversor hacia los bornes del estator. Las variables medidas son $i_{as}(t)$, $i_{bs}(t)$ y $i_{cs}(t)$, que representan las corrientes instantáneas de fase.



(a) Sensor de temperatura



(b) Encoder



(c) Sensor de corriente

Figura 3: Imágenes ilustrativas

Se asume que todos los sensores tienen una respuesta ideal, es decir, un filtro "pasa-todo" con ganancia unitaria y un ancho de banda infinito.

2. Modelado, Análisis y Simulación dinámica del SISTEMA FÍSICO a Lazo Abierto

2.1. Modelo matemático equivalente del subsistema mecánico completo

Para obtener el modelo matemático equivalente de un grado de libertad correspondiente al subsistema mecánico completo, primero debemos referenciar la carga al eje del rotor de la máquina eléctrica. Esto nos permitirá obtener un modelo matemático que tenga en cuenta la dinámica de la carga en relación con el rotor.

Comenzamos sustituyendo las ecuaciones de Carga mecánica (1), Tren de transmisión (3, 4), y Subsistema mecánico (5) de la maquina eléctrica.

$$(J_m + \frac{J_l}{r^2}) \cdot \dot{\omega}_m(t) = T_m(t) - (b_m + \frac{b_l}{r^2}) \cdot \omega_m(t) - \frac{T_l(t)}{r} \quad (13)$$

$$J_{eq} \cdot \dot{\omega}_m(t) = T_m(t) - b_{eq} \cdot \omega_m(t) - \frac{T_l(t)}{r} \quad (14)$$

$$\dot{\omega}_m(t) = \frac{1}{J_{eq}} \cdot [T_m(t) - b_{eq} \cdot \omega_m(t) - \frac{T_l(t)}{r}] \quad (15)$$

Se puede expresar de forma matricial como:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_m(t) \\ \dot{\omega}_m(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{b_{eq}}{J_{eq}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \theta_m(t) \\ \omega_m(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{J_{eq}} & -\frac{1}{J_{eq}r} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T_m(t) \\ T_l(t) \end{bmatrix} \\ y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \theta_m(t) \\ \omega_m(t) \end{bmatrix} \end{cases} \quad (16)$$

Con este modelo matemático equivalente referido al eje del motor tiene como ventaja que no presenta backlash, además no hay que considerar el efecto de la elasticidad torsional de la transmisión.

2.2. Modelo dinámico del sistema físico completo

2.2.1. Modelo global no lineal (NL)

En el modelo global no lineal consideramos todos los sistemas involucrados tanto el sistema mecánico, previamente desarrollado, como los subsistemas de la maquina eléctrica.

En primer lugar, nos enfocaremos en el subsistema electromagnético, recordando que se utiliza un motor síncrono de corriente alterna (CA) trifásico con excitación de imanes permanentes. El estator está conectado en estrella con bornes *abc* accesible y neutro no accesible. Consideramos que la carga de cada fase será equivalente de forma que la conexión estrella esté equilibrada.

Ecuaciones de tensión en coordenadas abc:

$$\begin{aligned} v_{as}(t) &= R_s(t) \cdot i_{as}(t) + \frac{d\lambda_{as}}{dt} \\ v_{bs}(t) &= R_s(t) \cdot i_{bs}(t) + \frac{d\lambda_{bs}}{dt} \\ v_{cs}(t) &= R_s(t) \cdot i_{cs}(t) + \frac{d\lambda_{cs}}{dt} \end{aligned} \quad (17)$$

Mediante la transformación de Park (7), se obtiene:

$$\begin{aligned} v_{qs}(t) &= R_s(t) \cdot i_{qs}(t) + L_q \cdot \dot{i}_{qs}^r(t) + [\lambda_m^r + L_d \cdot i_{ds}(t)] \cdot \omega_r(t) \\ v_{ds}(t) &= R_s(t) \cdot i_{ds}(t) + L_d \cdot \dot{i}_{ds}^r(t) - L_q \cdot i_{qs}(t) \cdot \omega_r(t) \\ v_{0s}(t) &= R_s(t) \cdot i_{0s}(t) + L_{ls} \cdot \dot{i}_{0s}^r(t) \end{aligned} \quad (18)$$

Reordenando nos quedan las ecuaciones que definen al sistema electromagnético:

$$\begin{cases} \dot{i}_{qs}(t) = \frac{1}{L_q} \cdot [v_{qs}^r(t) - R_s(t) \cdot i_{qs}^r(t) - P_p \cdot \omega_m(t) \cdot [L_d \cdot i_{ds}^r(t) + \lambda_m^r]] \\ \dot{i}_{ds}(t) = \frac{1}{L_d} \cdot [v_{ds}^r(t) - R_s(t) \cdot i_{ds}^r(t) + P_p \cdot \omega_m(t) \cdot L_q \cdot i_{qs}^r(t)] \\ \dot{i}_{0s}(t) = \frac{1}{L_{ls}} \cdot [v_{0s}^r(t) - R_s(t) \cdot i_{0s}^r(t)] \end{cases} \quad (19)$$

Recordando que el Torque electromagnético (10) se reordena la expresión de forma que quede despejada la variable de interés:

$$\dot{\omega}_m(t) = \frac{1}{J_{eq}} \cdot \left[\frac{3}{2} \cdot P_p \cdot [\lambda_m^r + i_{ds}^r(t) \cdot (L_d - L_q)] \cdot i_{qs}^r(t) - b_{eq} \cdot \omega_m(t) - \frac{T_l(t)}{r} \right] \quad (20)$$

El comportamiento subsistema térmico es descrito por las ecuaciones del (11, 12), igualando estas ecuaciones llegamos a la siguiente expresión:

$$\dot{T}_s(t) = \frac{1}{C_{ts}} \cdot \left[\frac{3}{2} \cdot R_s(t) \cdot [i_{qs}^r(t)^2 + i_{ds}^r(t)^2 + 2 \cdot i_{0s}(t)^2] - \frac{T_s(t) - T_{amb}(t)}{R_{ts-amb}} \right] \quad (21)$$

El modelo global no lineal queda definido por las ecuaciones (6), (19), (20) y (21).

$$\begin{cases} \dot{\theta}_m(t) = \omega_m(t) \\ \dot{\omega}_m(t) = \frac{1}{J_{eq}} \cdot \left[\frac{3}{2} \cdot P_p \cdot [\lambda_m^r + i_{ds}^r(t) \cdot (L_d - L_q)] \cdot i_{qs}^r(t) - b_{eq} \cdot \omega_m(t) - \frac{T_l(t)}{r} \right] \\ \dot{i}_{qs}(t) = \frac{1}{L_q} \cdot [v_{qs}^r(t) - R_s(t) \cdot i_{qs}^r(t) - P_p \cdot \omega_m(t) \cdot [L_d \cdot i_{ds}^r(t) + \lambda_m^r]] \\ \dot{i}_{ds}(t) = \frac{1}{L_d} \cdot [v_{ds}^r(t) - R_s(t) \cdot i_{ds}^r(t) + P_p \cdot \omega_m(t) \cdot L_q \cdot i_{qs}^r(t)] \\ \dot{i}_{0s}(t) = \frac{1}{L_{ts}} \cdot [v_{0s}^r(t) - R_s(t) \cdot i_{0s}^r(t)] \\ \dot{T}_s(t) = \frac{1}{C_{ts}} \cdot \left[\frac{3}{2} \cdot R_s(t) \cdot [i_{qs}^r(t)^2 + i_{ds}^r(t)^2 + 2 \cdot i_{0s}(t)^2] - \frac{T_s(t) - T_{amb}(t)}{R_{ts-amb}} \right] \end{cases} \quad (22)$$

De este sistema podemos definir el vector de las variables de estado, las entradas manipuladas, las entradas de perturbación y las salidas:

$$x(t) = \begin{bmatrix} \theta_m(t) \\ \omega_m(t) \\ i_{qs}^r(t) \\ i_{ds}^r(t) \\ i_{0s}(t) \\ T_s(t) \end{bmatrix}; \quad x(t_0) = \begin{bmatrix} \theta_{m0} \\ \omega_{m0} \\ i_{qs0}^r \\ i_{ds0}^r \\ i_{0s0} \\ T_{s0} \end{bmatrix}; \quad u(t) = \begin{bmatrix} v_{qs}^r(t) \\ v_{ds}^r(t) \\ v_{0s}(t) \end{bmatrix}; \quad d(t) = \begin{bmatrix} T_l(t) \\ T_{amb}(t) \end{bmatrix}; \quad y(t) = \begin{bmatrix} \theta_m(t) \\ \omega_m(t) \\ i_{qs}^r(t) \\ i_{ds}^r(t) \\ i_{0s}(t) \\ T_s(t) \end{bmatrix}$$

Utilizando las ecuaciones que modelan las distintas partes del sistema realizamos el diagrama de bloques utilizando la herramienta que nos provee Matlab, Simulink.

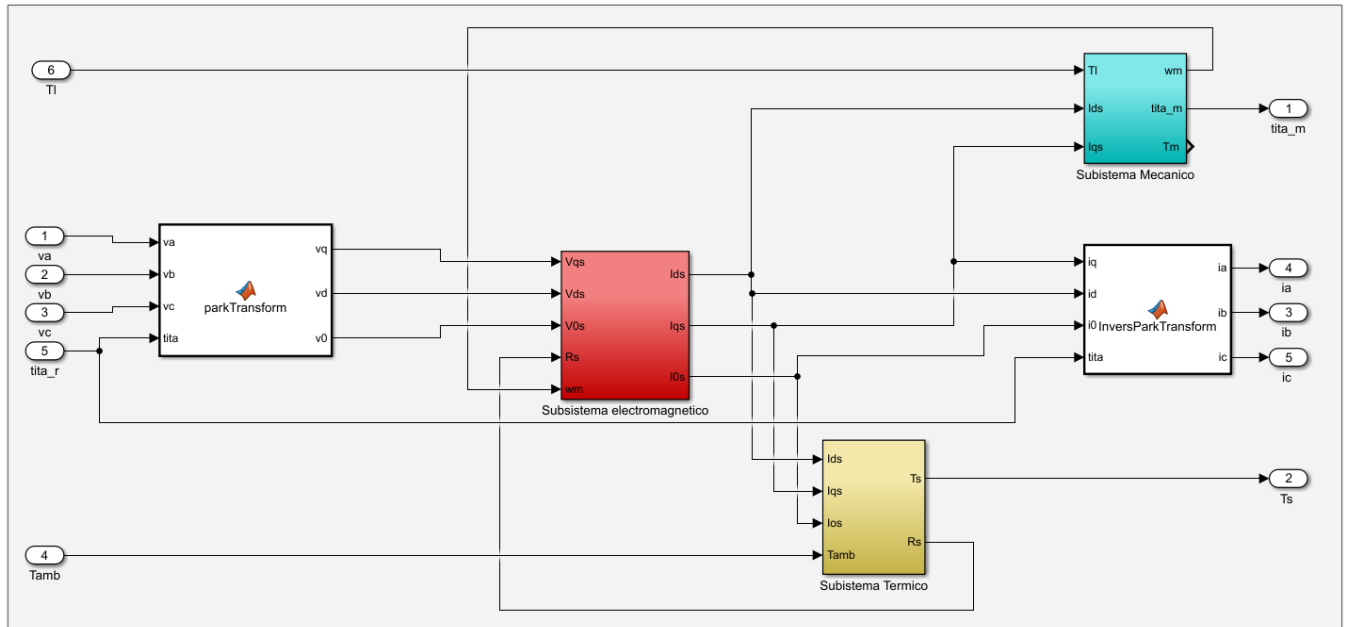


Figura 4: Modelo global no lineal

El subsistema mecánico esta compuesto por:

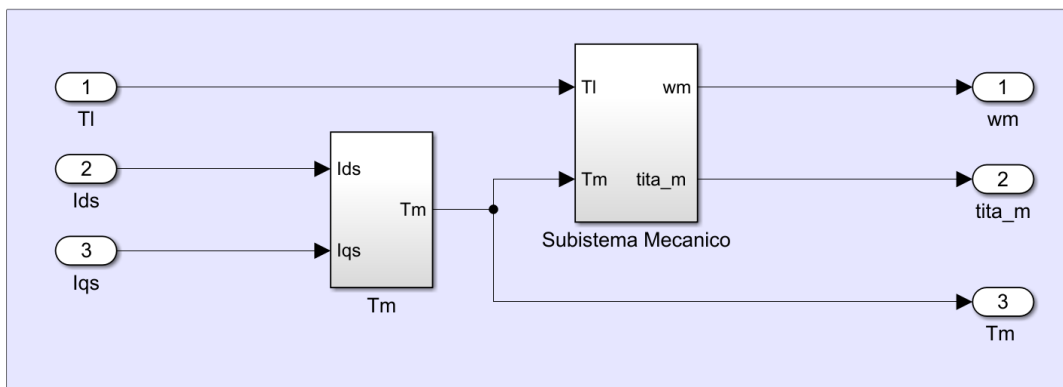


Figura 5: Diagramas de bloques subsistema mecánico

Donde los bloques interno son:

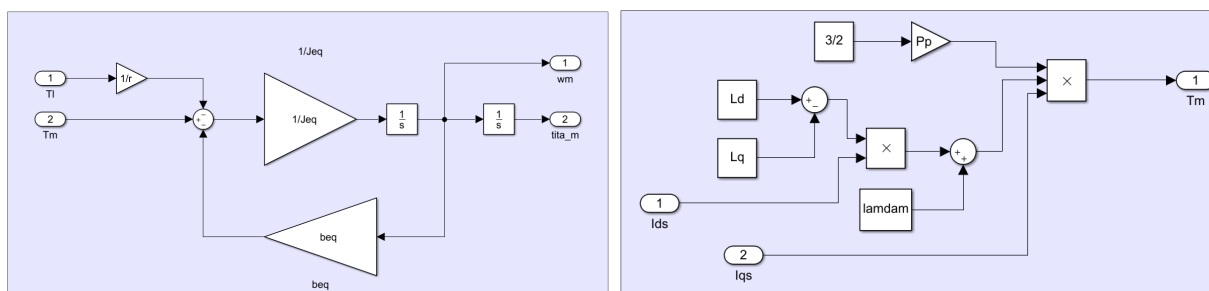


Figura 6: Bloques internos del subsistema mecánico

Mientras que el subsistema térmico esta dado por:

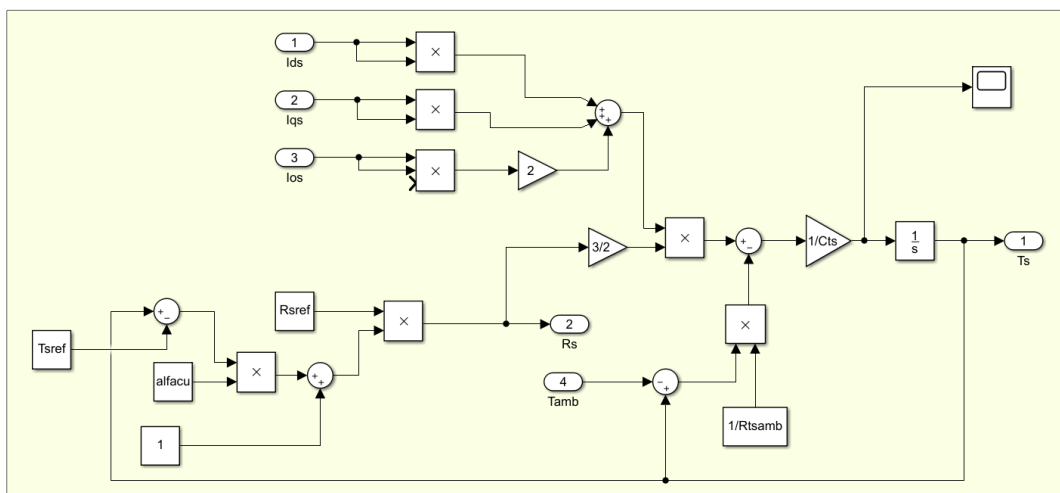
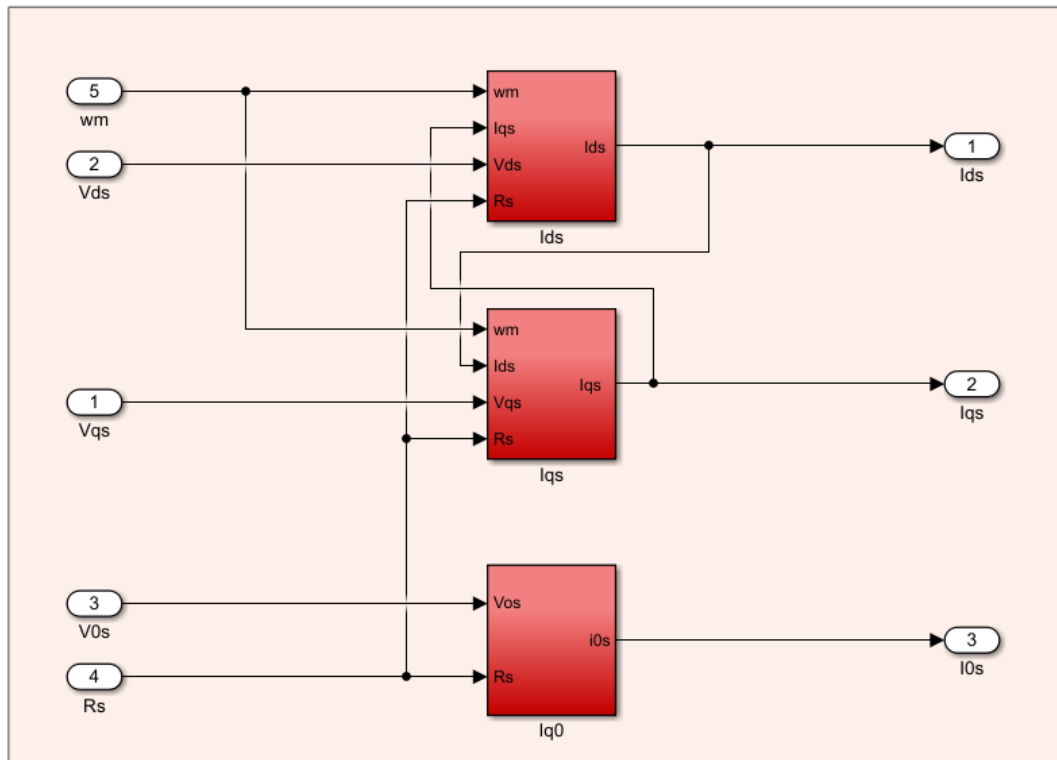


Figura 7: Diagramas de bloques subsistema térmico

Finalmente el subsistema electromagnético esta compuesto por:



Los bloques interno contienen:

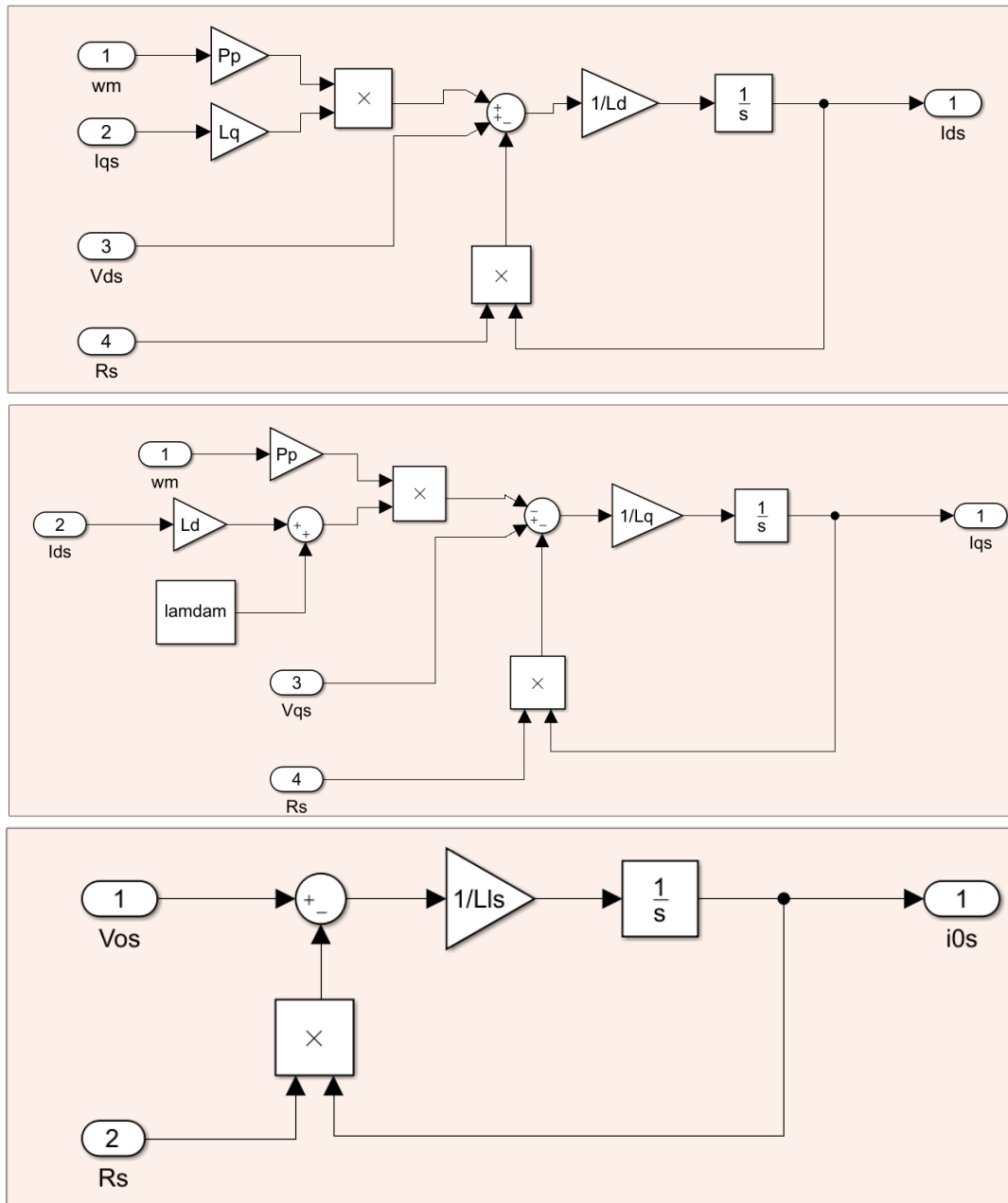


Figura 8: Bloques internos del subsistema electromagnético

2.2.2. Modelo global linealizado con parámetros variables (LPV)

Para el caso general en el que $i_{ds}(t) \neq 0$. Se puede representar al sistema no lineal de forma genérica como:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)); & x(t_0) = x_0 \\ y(t) = C \cdot x(t) \end{cases} \quad (23)$$

Donde f es una función que representa la dinámica del sistema en términos de las variable de estado $x(t)$ y las estradas $u(t)$. Dados los punto de equilibrio dinámico donde las derivadas de las variables de estado son nulas:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) = 0 \quad (24)$$

Todos los pares de puntos $[X_0, U_0]$ que satisfacen la ecuación anterior definen el conjunto de puntos de operación. Estos puntos los consideraremos cuasi-estacionarios.

Alrededor de estos puntos consideraremos pequeñas variaciones infinitesimales:

$$\begin{cases} x(t) = X_0(t) + \Delta x(t) \\ u(t) = U_0(t) + \Delta u(t) \\ y(t) = Y_0(t) + \Delta y(t) \end{cases} \quad (25)$$

De forma que el el sistema genérico global NL queda representado por:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \dot{X}_0(t) + \Delta \dot{x}(t) = f(X_0(t) + \Delta x(t), U_0(t) + \Delta u(t)) \\ X_0(0) + \Delta x(0) = x_0 \rightarrow X_0 = x_0, \Delta x(0) = 0 \\ Y_0(t) + \Delta y(t) = C(X_0(t) + \Delta x(t)) \rightarrow Y_0(t) = C X_0(t); \Delta y(t) = C \Delta x(t) \end{cases} \quad (26)$$

Aproximación mediante la serie de Taylor truncada al primer orden y despreciando los terminos de orden superior:

$$f(X_0(t) + \Delta x(t), U_0(t) + \Delta u(t)) \approx f(X_0(t), U_0(t)) + \frac{\partial f}{\partial x} \bigg|_0 \Delta x(t) + \frac{\partial f}{\partial u} \bigg|_0 \Delta u(t) \quad (27)$$

Al aplicar esto a nuestro modelo NL el sistema se divide en dos partes, una NL cuasi-estacionaria y otra lineal dinámica que representa las pequeñas variaciones alrededor de puntos de operación.

Modelo NL cuasi-estacionario:

$$\dot{X}_0(t) = f(X_0(t), U_0(t)) \approx 0 / \text{cte}; \quad X_0(0) = x_0 \quad (28)$$

Modelo lineal dinámico:

$$\Delta \dot{x}(t) = \frac{\partial f}{\partial x} \bigg|_0 \Delta x(t) + \frac{\partial f}{\partial u} \bigg|_0 \Delta u(t); \quad \Delta x(0) = 0 \quad (29)$$

Al aplicar este concepto a las ecuaciones del Modelo global NL (22) obtenemos:

■ Espacio de operación global NL (cuasi - estacionario)

$$\begin{cases} \dot{\theta}_{m0} = \omega_{m0} = \text{cte} \\ \dot{\omega}_{m0} = \frac{1}{J_{eq}} \cdot [\frac{3}{2} \cdot P_p \cdot [\lambda_m^r + i_{ds0}^r \cdot (L_d - L_q)] \cdot i_{qs0}^r - b_{eq} \cdot \omega_{m0} - \frac{T_{l0}}{r}] = 0 \\ \dot{i}_{qs0} = \frac{1}{L_q} \cdot [v_{qs0}^r - R_s(t) \cdot i_{qs0}^r - P_p \cdot \omega_{m0} \cdot [L_d \cdot i_{ds0}^r + \lambda_m^r]] = 0 \\ \dot{i}_{ds0} = \frac{1}{L_d} \cdot [v_{ds0}^r - R_s(t) \cdot i_{ds0}^r + P_p \cdot \omega_{m0} \cdot L_q \cdot i_{qs0}^r] = 0 \\ \dot{i}_{0s0} = \frac{1}{L_{ls}} \cdot [v_{0s0}^r - R_s(t) \cdot i_{0s0}^r] = 0 \\ \dot{T}_{s0} = \frac{1}{C_{ts}} \cdot [\frac{3}{2} \cdot R_s(t) \cdot [i_{qs0}^r]^2 + i_{ds0}^r{}^2 + 2 \cdot i_{0s0}^r{}^2] - \frac{T_{s0} - T_{amb0}}{R_{ts-amb}}] = 0 \end{cases} \quad (30)$$

■ Modelo dinámico LPV

$$\begin{cases} \Delta \dot{\theta}_m(t) = \Delta \omega_m(t) \\ \Delta \dot{\omega}_m(t) = \frac{1}{J_{eq}} \cdot [\frac{3}{2} \cdot P_p \cdot \{[\lambda_m^r + i_{ds0}^r \cdot (L_d - L_q)] \cdot \Delta i_{qs}^r(t) + \Delta i_{ds}^r(t) \cdot (L_d - L_q)\} \cdot i_{qs0}^r] - b_{eq} \cdot \Delta \omega_m(t) - \frac{\Delta T_l(t)}{r} \\ \Delta \dot{i}_{qs}(t) = \frac{1}{L_q} \cdot [\Delta v_{qs}^r(t) - R_s(t) \cdot \Delta i_{qs}^r(t) - P_p \cdot \Delta \omega_m(t) \cdot [L_d \cdot i_{ds0}^r + \lambda_m^r] - P_p \cdot \omega_{m0} \cdot L_d \cdot \Delta i_{ds}^r(t)] \\ \Delta \dot{i}_{ds}(t) = \frac{1}{L_d} \cdot [\Delta v_{ds}^r(t) - R_s(t) \cdot \Delta i_{ds}^r(t) + P_p \cdot \Delta \omega_m(t) \cdot L_q \cdot i_{qs0}^r + P_p \cdot \omega_{m0} \cdot L_q \cdot \Delta i_{qs}^r(t)] \\ \Delta \dot{i}_{0s}(t) = \frac{1}{L_{ls}} \cdot [\Delta v_{0s}^r(t) - R_s(t) \cdot \Delta i_{0s}^r(t)] \\ \Delta \dot{T}_s(t) = \frac{1}{C_{ts}} \cdot \{ \frac{3}{2} \cdot R_s(t) \cdot [2 \cdot i_{qs}^r \cdot \Delta i_{ds}^r(t) + 2 \cdot i_{as}^r \cdot \Delta i_{as}^r(t) + 4 \cdot i_{0s}^r \cdot \Delta i_{0s}^r(t)] - \frac{\Delta T_s(t) - \Delta T_{amb}(t)}{R_{ts-amb}} \} \end{cases} \quad (31)$$

En forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \Delta \dot{\theta}_m(t) \\ \Delta \dot{\omega}_m(t) \\ \Delta \dot{i}_{qs}(t) \\ \Delta \dot{i}_{ds}(t) \\ \Delta \dot{i}_{0s}(t) \\ \Delta \dot{T}_s(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -b_{eq} & \frac{3}{2} \cdot P_p \cdot \frac{[\lambda_m'^r + i_{qs0}^r(t) \cdot (L_d - L_q)]}{J_{eq}} & \frac{3}{2} \cdot \frac{P_p \cdot (L_d - L_q) \cdot i_{qs}^r}{J_{eq}} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{P_p \cdot (\lambda_m'^r + L_d \cdot i_{ds0}^r)}{L_q} & -\frac{R_s(t)}{L_q} & -\frac{L_d \cdot P_p \cdot \omega_{m0}}{L_q} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{P_p \cdot i_{qs0}^r \cdot L_q}{L_d} & \frac{L_q \cdot P_p \cdot \omega_{m0}}{L_d} & -\frac{R_s(t)}{L_d} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{R_s(t)}{L_{ls}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3 \cdot R_s(t)}{C_{ts}} \cdot i_{qs0}^r & \frac{3 \cdot R_s(t)}{C_{ts}} \cdot i_{ds0}^r & \frac{6 \cdot R_s(t)}{C_{ts}} \cdot i_{0s0}^r & -\frac{1}{C_{ts} \cdot R_{ts-amb}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta \theta_m(t) \\ \Delta \omega_m(t) \\ \Delta i_{qs}(t) \\ \Delta i_{ds}(t) \\ \Delta i_{0s}(t) \\ \Delta T_s(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{r \cdot J_{eq}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_q} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{L_d} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{L_{ls}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{C_{ts} \cdot R_{ts-amb}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta T_l(t) \\ \Delta v_{qs}(t) \\ \Delta v_{ds}(t) \\ \Delta v_{0s}(t) \\ \Delta T_{amb}(t) \end{bmatrix}$$

2.2.3. Linealización por Realimentación NL

Podemos obtener un modelo simplificado lineal invariante en el tiempo (LTI) equivalente del sistema si aplicamos una estrategia de control vectorial con campo orientado en el controlador para imponer que la corriente en el eje d ($i_{ds}(t)$) sea igual a cero. Además, podemos despreciar el acoplamiento no lineal con el subsistema térmico debido a las pequeñas variaciones de la resistencia R_s con la temperatura, lo que nos permite considerar su dinámica como lineal.

Considerando que el estator de la máquina eléctrica es de tipo estrella con neutro flotante, podemos afirmar que la suma de las corrientes de fase abc será nula. Con esto, podemos aplicar una transformación directa de Park para relacionar las corrientes en el sistema.

Para lograr la desacoplar los canales de flujo magnético y torque, aplicamos la estrategia de "Control Vectorial con campo orientado." Esto consiste en forzar una corriente nula en el eje d ($i_{ds}(t) = 0$) mediante el controlador y, si es necesario, aplicar una "Restricción o Ley de Control NL" sobre la variable manipulada virtual $v_{qd0s}(t)$ o su equivalente por transformada de Park, $v_{abc}(t)$.

Para desacoplar el subsistema térmico, consideramos que las variaciones en la resistencia R_s en el rango de temperaturas de trabajo son despreciables y, por lo tanto, la temperatura no afectará significativamente el comportamiento del resto del sistema. Esto nos permite asumir una dinámica lineal para el subsistema térmico.

I. Ecuaciones vectoriales/matriciales LTI de estado y de salida.

Aplicadas las condiciones mencionadas nos queda un sistema LTI similar al de un maquina de corriente continua con escobillas. El estado inicial sera nulo.

$$\begin{cases} \dot{\theta}_m(t) = \omega_m(t) \\ \dot{\omega}_m(t) = \frac{1}{J_{eq}} \left[\frac{3}{2} \cdot P_p \cdot \lambda_m'^r \cdot i_{qs}^r(t) - b_{eq} \cdot \omega_m(t) - \frac{T_l(t)}{r} \right] \\ \dot{i}_{qs}(t) = \frac{1}{L_q} [v_{qs}^r(t) - R_s \cdot i_{qs}^r(t) - P_p \cdot \omega_m(t) \cdot \lambda_m'^r] \end{cases} \quad (32)$$

De forma matricial:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_m(t) \\ \dot{\omega}_m(t) \\ \dot{i}_{qs}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{b_{eq}}{J_{eq}} & \frac{3}{2} \cdot \frac{P_p \cdot \lambda_m'^r}{J_{eq}} \\ 0 & -\frac{P_p \cdot \lambda_m'^r}{L_q} & -\frac{R_s}{L_q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_m(t) \\ \omega_m(t) \\ i_{qs}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L_{eq}} \end{bmatrix} \cdot v_{qs}^r(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{r \cdot J_{eq}} \end{bmatrix} \cdot T_l(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_m(t) \\ \omega_m(t) \\ i_{qs}(t) \end{bmatrix} \end{cases} \quad (33)$$

Para linealizar el subsistema térmico podemos suponer que R_s sera constante debido a su poca variación de forma que:

$$\dot{T}_s(t) = \frac{1}{C_{ts}} \left[\frac{3}{2} \cdot R_s \cdot i_{qs}^r(t)^2 - \frac{T_s(t) - T_{amb}(t)}{R_{ts-amb}} \right] \quad (34)$$

II. Diagrama de bloques de estado

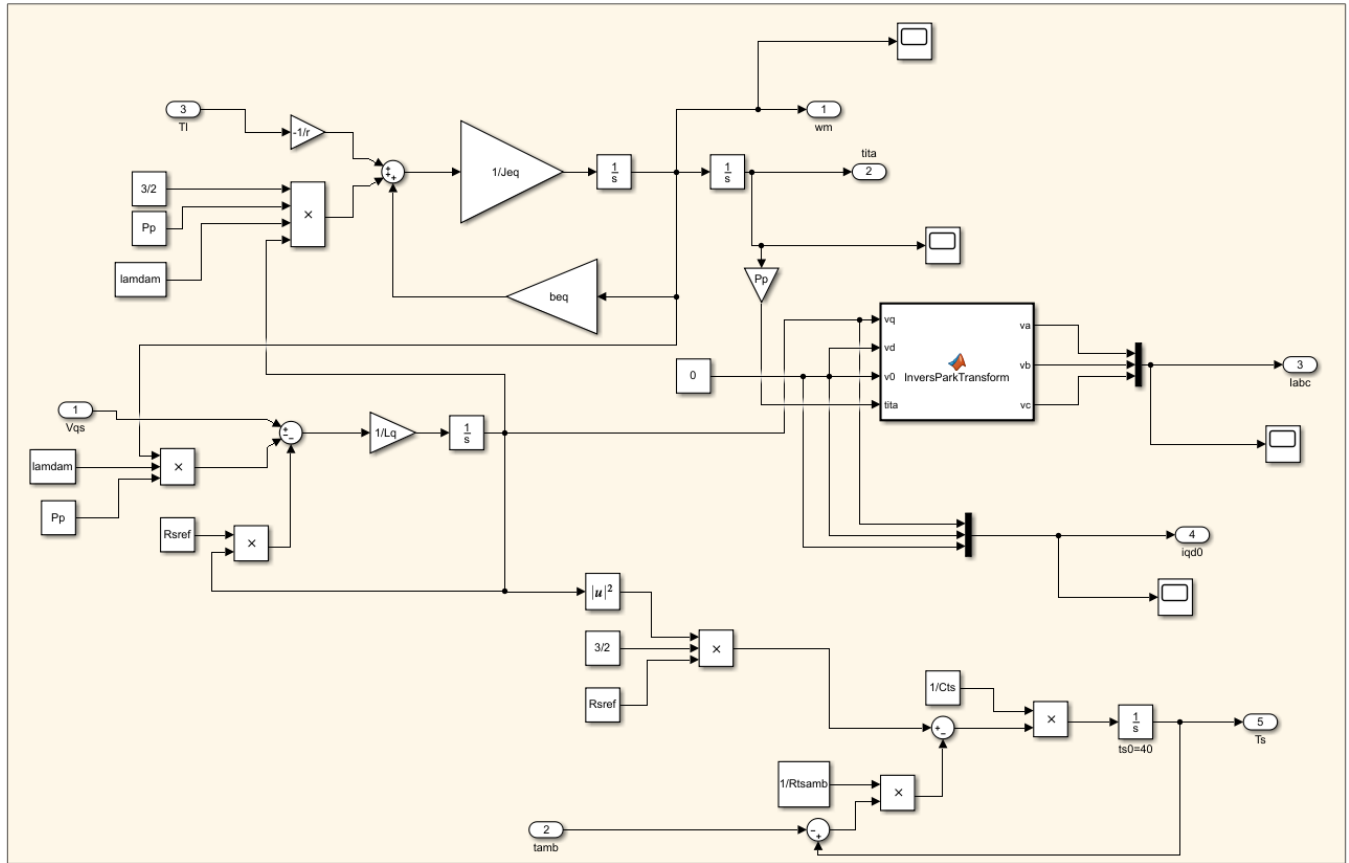


Figura 9: Diagrama de bloques de estado del sistema LTI.

III. Restricción o Ley de Control mínima

Para poder cumplir con la restricción de $i_{ds} = 0$ se tiene que cumplir la condición dada por la ecuación (18). De manera que:

$$v_{ds}^r(t) = -L_q \cdot i_{qs}^r(t) \cdot \omega_m(t) \cdot P_p \quad (35)$$

Dado que se trata de una variable virtual no podemos controlarla directamente, por lo que buscaremos expresarla en termino de las coordenadas "abc", por lo que aplicamos la transformada inversa de Park. Resolviendo llegamos a:

$$\begin{cases} v_{as}(t) = \cos(\theta_r(t)) \cdot v_{qs}^r(t) + \sin(\theta_r(t)) \cdot v_{ds}^r(t) + v_{0s}^r(t) \\ v_{bs}(t) = \cos(\theta_r(t) - \frac{2\pi}{3}) \cdot v_{qs}^r(t) + \sin(\theta_r(t) - \frac{2\pi}{3}) \cdot v_{ds}^r(t) + v_{0s}^r(t) \\ v_{cs}(t) = \cos(\theta_r(t) + \frac{2\pi}{3}) \cdot v_{qs}^r(t) + \sin(\theta_r(t) + \frac{2\pi}{3}) \cdot v_{ds}^r(t) + v_{0s}^r(t) \end{cases} \quad (36)$$

Dado que los valores de $v_{ds}(t)$ y $v_{0s}(t)$ son conocidos los sustituimos:

$$\begin{cases} v_{as}(t) = \cos(\theta_r(t)) \cdot v_{qs}^r(t) - \sin(\theta_r(t)) \cdot L_q \cdot i_{qs}^r(t) \cdot \omega_m(t) \cdot P_p \\ v_{bs}(t) = \cos(\theta_r(t) - \frac{2\pi}{3}) \cdot v_{qs}^r(t) - \sin(\theta_r(t) - \frac{2\pi}{3}) \cdot L_q \cdot i_{qs}^r(t) \cdot \omega_m(t) \cdot P_p \\ v_{cs}(t) = \cos(\theta_r(t) + \frac{2\pi}{3}) \cdot v_{qs}^r(t) - \sin(\theta_r(t) + \frac{2\pi}{3}) \cdot L_q \cdot i_{qs}^r(t) \cdot \omega_m(t) \cdot P_p \end{cases} \quad (37)$$

Esta sera la realimentación necesaria para desacoplar los canales de flujo magnético y torque.

IV. Implementación sobre el modelo global NL

Implementamos la ley de control al modelo global NL, e incorporamos el inversor trifásico (modulador de tensión) y los sensores que consideramos por el momento ideales.

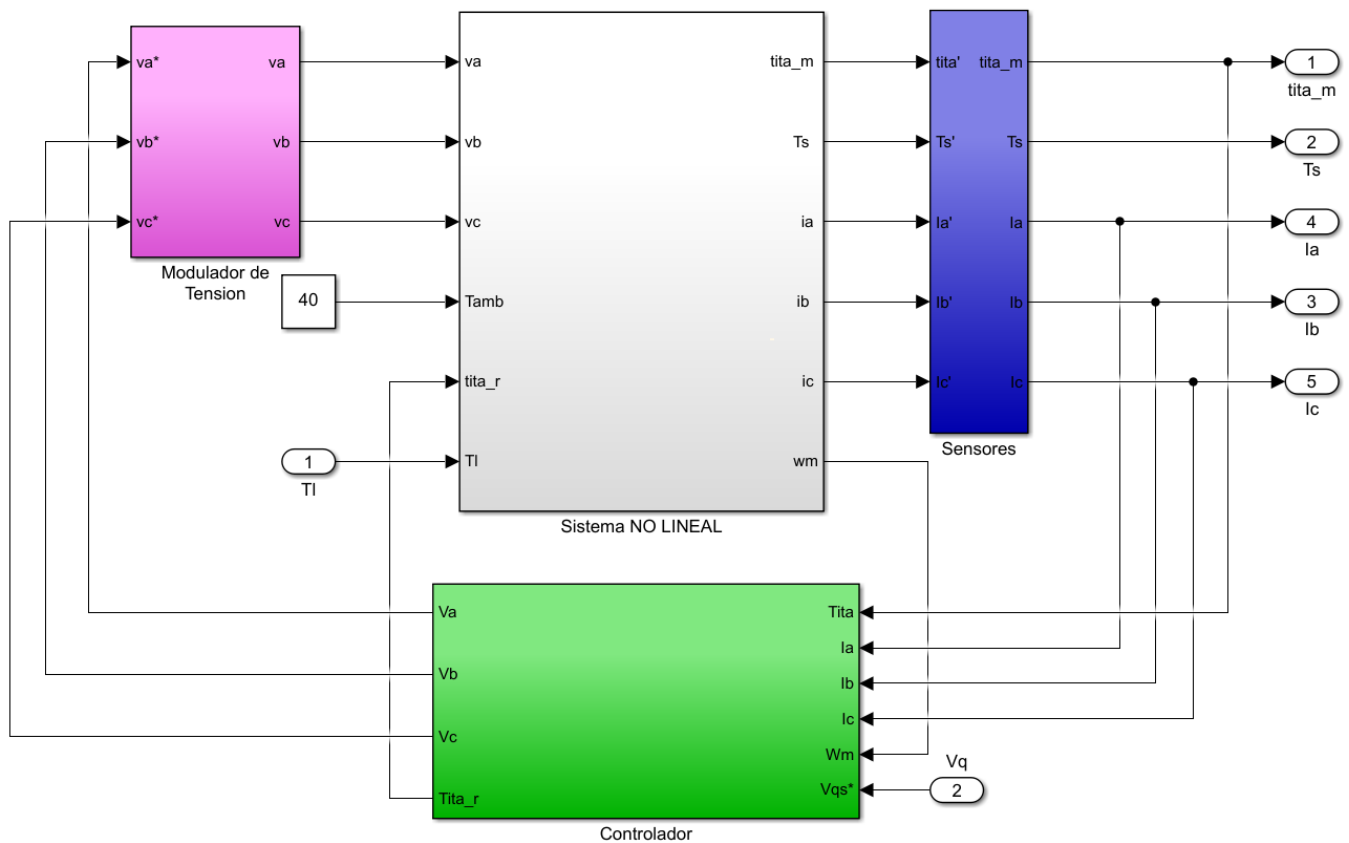


Figura 10: Diagrama de bloques del sistema NL con restricción o ley de control mínima.

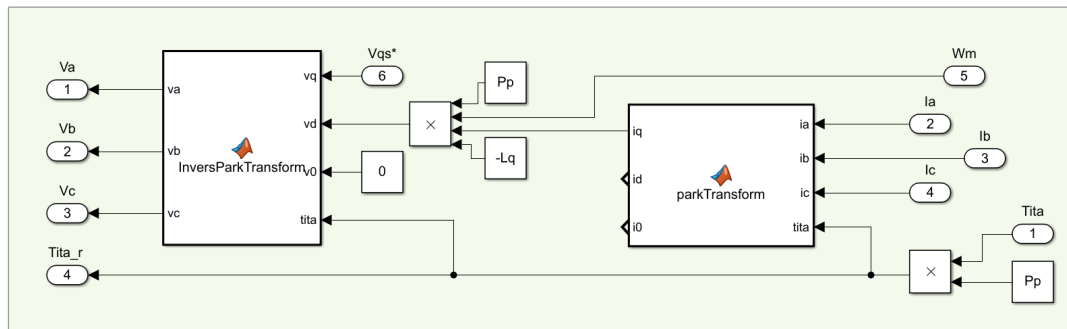
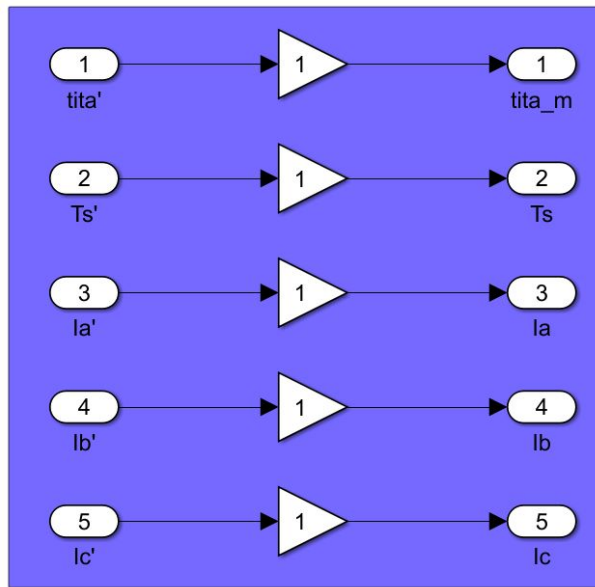
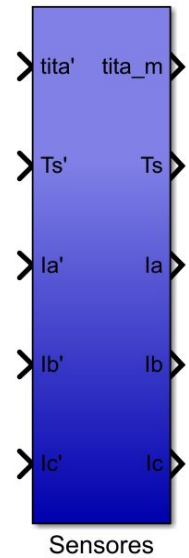


Figura 11: Diagrama del controlador.

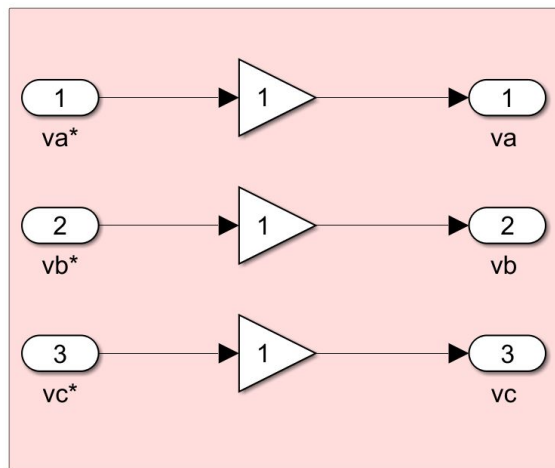


(a) Expandido.

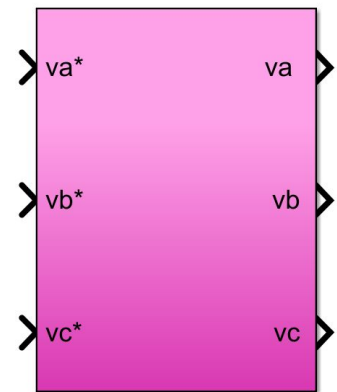


(b) Compacto.

Figura 12: Diagrama de bloques de los sensores ideales.



(a) Expandido.



Modulador de Tensión

(b) Compacto.

Figura 13: Diagrama de bloques del modulador de tensión ideal.

v. Dinámica Residual

Al aplicar la ley de control mínimo supusimos que $i_{ds} = 0$, sin embargo, esto no es del todo cierto por lo que se debe tener en cuenta la dinámica residual de la corriente i_{ds} , la cual se puede modelar con la siguiente EDO:

$$\frac{di_{ds}^r(t)}{dt} + \frac{R_s(t)}{L_d} \cdot i_{ds}^r(t) = 0 \quad (38)$$

La cual tiene como solución:

$$i_{ds}^r(t) = i_{ds}^r(0) \cdot e^{-\frac{R_s(t)}{L_d} \cdot t} \quad (39)$$

Esta solución nos indica que el efecto de la dinámica residual es despreciable en el tiempo, ya que actúa como un sistema subamortiguado de primer orden.

En régimen natural producirá un comportamiento no lineal sobre el sistema que esta dado por:

$$v_{qs}(t) = L_q \cdot \frac{di_{qs}^r(t)}{dt} + R_s \cdot i_{qs}^r(t) + P_p \cdot \omega_m(t) \cdot \lambda_m^r + L_d \cdot i_{ds}^r(t) \cdot P_p \cdot \omega_m(t) \quad (40)$$

Incorporando la dinámica residual al modelo LTI:

$$\begin{cases} \dot{\theta}_m(t) = \omega_m(t) \\ \dot{\omega}_m(t) = -\frac{1}{J_{eq}} \left[\frac{3}{2} P_p \lambda_m^r i_{qs}^r(t) - b_{eq} \omega_m(t) - \frac{T_l(t)}{r} \right] \\ \dot{i}_{qs}^r(t) = \frac{1}{L_q} [v_{qs}^r(t) - R_s i_{qs}^r(t) - P_p \omega_m(t) \lambda_m^r] \\ \dot{i}_{ds}^r(t) = -\frac{R_s(t)}{L_d} i_{ds}^r(t) \\ \dot{T}_s(t) = \frac{1}{C_{[ts]}} \left\{ \frac{3}{2} R_s(t) [i_{qs}^r{}^2(t) + i_{ds}^r{}^2(t)] - \frac{1}{R_{ts-amb}} [T_s(t) - T_{amb}(t)] \right\} \end{cases} \quad (41)$$

VI. Restricción Ley de Control complementaria mínima en el eje q

Para anular el efecto NL del acoplamiento de la dinámica residual podemos a partir de la ecuación (40) plantear la siguiente restricción sobre el eje q de forma que la no linealidad se anule:

$$v_{qs}(t) = L_q \frac{di_{qs}^r(t)}{dt} + R_s i_{qs}^r(t) + P_p \omega_m(t) \lambda_m^r + L_d i_{ds}^r(t) \cdot P_p \omega_m(t) - L_d i_{ds}^r(t) \cdot P_p \omega_m(t) \quad (42)$$

A continuación se muestran los modelos LTI equivalente aumentado y el NL desacoplado con Ley de Control NL.

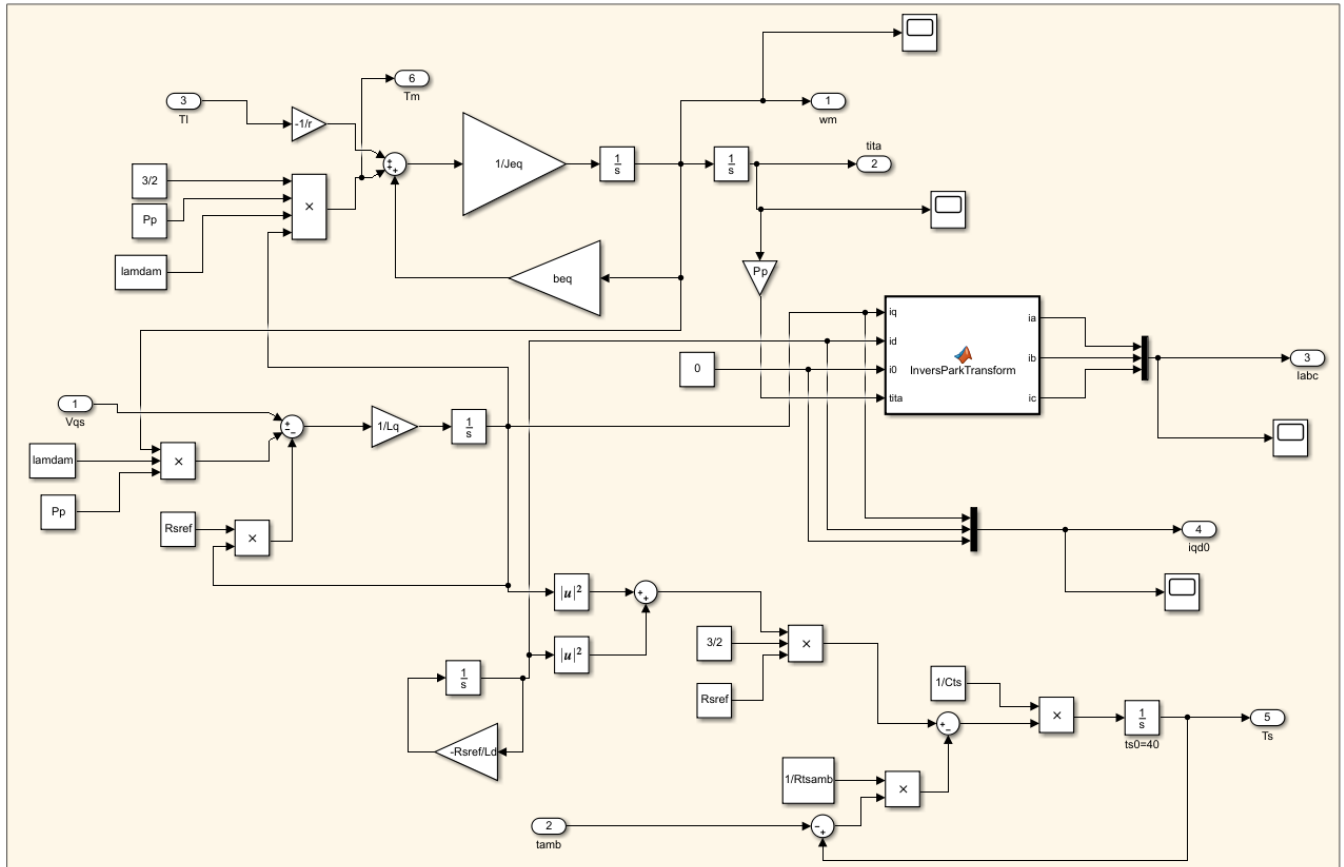


Figura 14: Diagrama de bloques del modelo LTI equivalente aumentado.

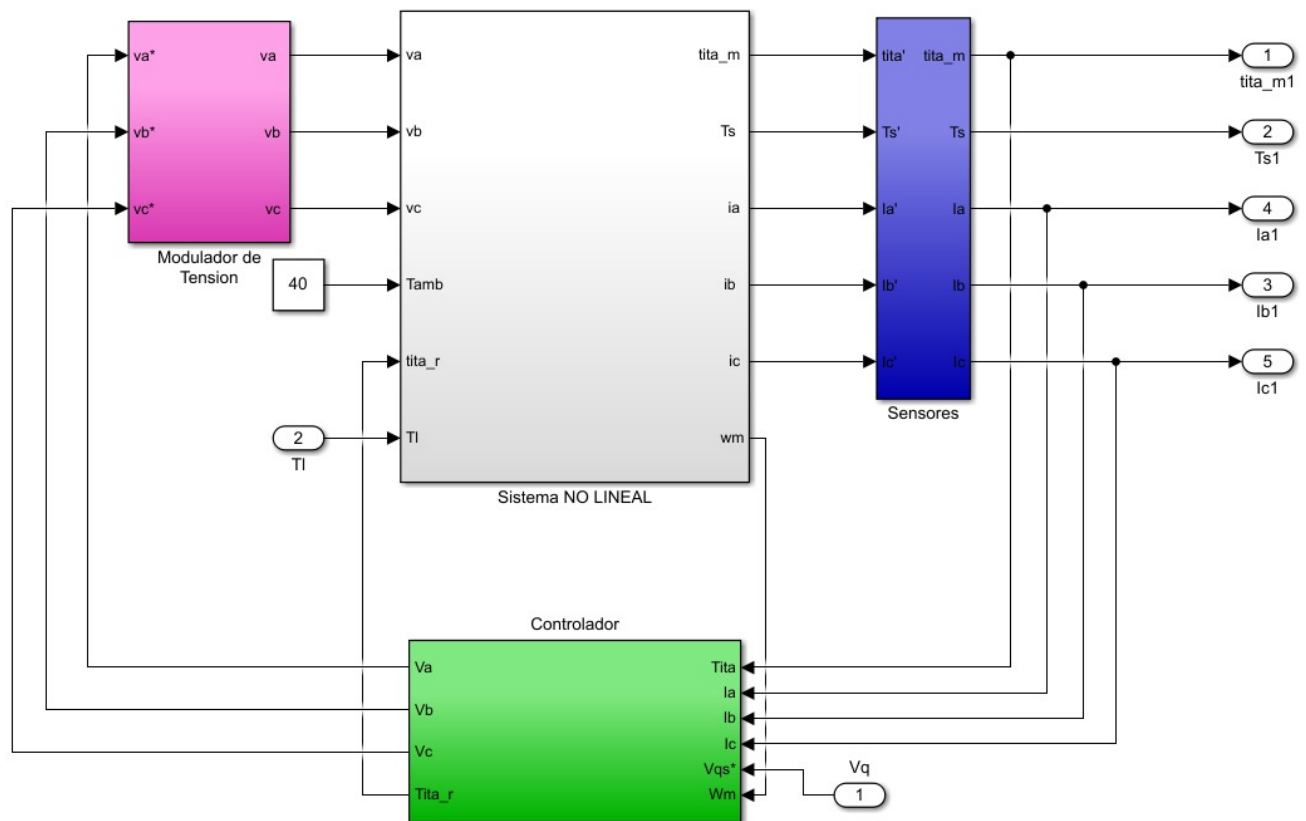


Figura 15: Diagrama de bloques del sistema NL con ley de control mínima en eje d y q.

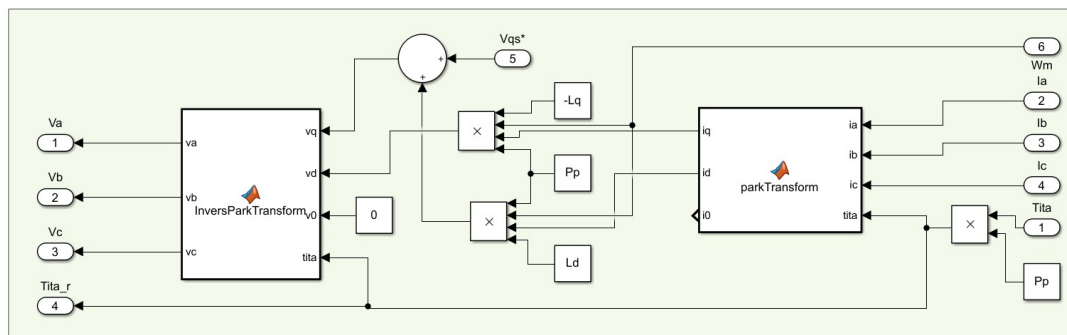


Figura 16: Diagrama del controlador.

2.2.4. Comparación modelo dinámico LTI equivalente aumentado vs modelo dinámico global LPV

El Modelo Dinámico Global LPV se basa en el concepto de Variabilidad de Parámetros Lineales (LPV), lo que significa que considera la variación de los parámetros en función de ciertas variables, como la corriente en directo $i_{ds}^r(t)$. Este enfoque tiene la ventaja de tener en cuenta la esencia no lineal del sistema, lo que permite una representación más precisa y realista del comportamiento del sistema en diferentes puntos de operación. Debido a esta consideración de parámetros variables, el modelo global LPV ofrece una mayor cantidad de puntos de trabajo en comparación con el modelo LTI equivalente.

Por otro lado, el Modelo Dinámico LTI Equivalente Aumentado es un caso particular del modelo LPV, donde se impone la restricción $i_{ds}^r(t) \equiv 0$, es decir, la corriente en directo se mantiene constante. Esta restricción conduce a un sistema lineal y más simple, lo que facilita el análisis matemático y el diseño de controladores. Sin embargo, esta simplicidad viene a expensas de la pérdida de la esencia no lineal del sistema real, lo que puede limitar la precisión de las predicciones en ciertos escenarios.

- Respecto al par electromagnético:

Recordando la ecuación (10) que describe el comportamiento del Torque Electromagnético. Podemos observar que para motores de polos salientes $L_d > L_q$, entonces cuando $i_{ds}^r(t)$ toma valores **positivos** el campo magnético se refuerza lo que aumenta el torque del motor. Si la corriente directa toma valores **negativos** el campo magnético se debilita y disminuye el torque del motor. En el caso que $i_{ds}^r(t) = 0$, el flujo concatenado solamente esta afectado por los imanes permanentes.

- Respecto al subsistema eléctrico:

$$i_{ds}^r = \frac{1}{L_d} [v_{ds}(t) - R_s(t) \cdot i_{ds}^r(t) + L_q \cdot i_{qs}^r(t) \cdot P_p \cdot \omega[m](t)] = 0 \quad (43)$$

$$\omega_m(t) = \frac{-v_{ds}(t) + R_s(t) \cdot i_{ds}^r(t)}{L_q} \quad (44)$$

En este caso, la velocidad del motor disminuye cuando la corriente i_{ds}^r aumenta. Por lo que podemos concluir que el torque reaccionara inversamente a la velocidad.

En términos de diseño y control, los modelos lineales, como el LTI equivalente aumentado, son más fáciles de manejar matemáticamente y permiten el diseño de controladores óptimos con herramientas establecidas como el control óptimo y la teoría de control de retroalimentación. Además, son más eficientes computacionalmente, lo que facilita la simulación y el análisis rápido del sistema. Sin embargo, los modelos no lineales, como el LPV, ofrecen una mayor precisión y flexibilidad en la representación de sistemas reales complejos.

2.2.5. Funciones de transferencia para el modelo LTI

Las funciones de transferencia nos permiten relacionar las salidas con las entradas del sistema. Como nuestro sistema dispone de dos entradas obtendremos dos funciones de transferencia. Aplicando la transformada de Laplace $L[f(t)] = F(s)$ a las ecuaciones del modelo LTI (32), además, recordando que la transformada de Laplace posee la siguiente propiedad

$$L[\dot{f}(t)] = s \cdot F(s) - f(0) \quad (45)$$

Entonces al aplicar la transformada y recordando que las condiciones iniciales son nulas, el modelo queda:

$$\begin{cases} s \cdot \Theta_m(s) = \Omega_m(s) \\ s \cdot \Omega_m(s) = \frac{1}{J_{eq}} \cdot [\frac{3}{2} \cdot P_p \cdot \lambda_m^r \cdot I_{qs}^r(s) - b_{eq} \cdot \Omega_m(s) - \frac{T_l(s)}{r}] \\ s \cdot I_{qs}^r(s) = \frac{1}{L_q} \cdot [v_{qs}(s) - R_s \cdot I_{qs}^r(s) - P_p \cdot \Omega_m(s) \cdot \lambda_m^r] \end{cases} \quad (46)$$

Para obtener las funciones de transferencia del modelo, primero despejamos $I_{qs}^r(s)$ de la tercera ecuación y la reemplazamos en la segunda. Luego despejamos $\Omega_m(s)$ para finalmente reemplazarla en la primer ecuación y obtener la expresión que representa la salida del sistema:

$$\Theta_m(s) = \frac{\frac{3}{2} \cdot P_p \cdot \lambda_m^r \cdot v_{qs}(s) - \frac{1}{r} \cdot (s \cdot L_q + R_s) \cdot T_l(s)}{s^3 \cdot J_{eq} \cdot L_q + s^2 \cdot (b_{eq} \cdot L_q + R_s \cdot J_{eq}) + s \cdot [b_{eq} \cdot R_s + \frac{3}{2} \cdot (P_p \cdot \lambda_m^r)^2]} \quad (47)$$

De esta expresión se obtienen las funciones de transferencia respecto de las entradas tensión $v_{qs}(s)$ y torque $T_l(s)$

$$G_1(s) = \frac{\Theta_m(s)}{v_{qs}(s)} = \frac{\frac{3}{2} \cdot P_p \cdot \lambda_m^r}{s^3 \cdot J_{eq} \cdot L_q + s^2 \cdot (b_{eq} \cdot L_q + R_s \cdot J_{eq}) + s \cdot [b_{eq} \cdot R_s + \frac{3}{2} \cdot (P_p \cdot \lambda_m^r)^2]} \quad (48)$$

$$G_2(s) = \frac{\Theta_m(s)}{T_l(s)} = \frac{-\frac{1}{r} \cdot (s \cdot L_q + R_s)}{s^3 \cdot J_{eq} \cdot L_q + s^2 \cdot (b_{eq} \cdot L_q + R_s \cdot J_{eq}) + s \cdot [b_{eq} \cdot R_s + \frac{3}{2} \cdot (P_p \cdot \lambda_m^r)^2]} \quad (49)$$

2.3. Análisis de Estabilidad

Para realizar un análisis de estabilidad debemos primero determinar polos (ceros del denominador) del sistema a partir de la función de transferencia obtenida anteriormente:

$$s^3 \cdot J_{eq} \cdot L_q + s^2 \cdot (b_{eq} \cdot L_q + R_s \cdot J_{eq}) + s \cdot [b_{eq} \cdot R_s + \frac{3}{2} \cdot (P_p \cdot \lambda_m^r)^2] = 0 \quad (50)$$

Utilizando Matlab para poder resolver este polinomio obtenemos que los valores que la satisfacen son:

$$s_1 = 0$$

$$s_2 = \frac{-(L_q \cdot b_{eq} + R_s \cdot J_{eq}) + \sqrt{(L_q \cdot b_{eq} + R_s \cdot J_{eq})^2 - 4 \cdot J_{eq} \cdot L_q \cdot (R_s \cdot b_{eq} + \frac{3}{2} \cdot P_p^2 \cdot \lambda_m'^r)^2}}{2 \cdot J_{eq} \cdot L_q}$$

$$s_3 = \frac{-(L_q \cdot b_{eq} + R_s \cdot J_{eq}) - \sqrt{(L_q \cdot b_{eq} + R_s \cdot J_{eq})^2 - 4 \cdot J_{eq} \cdot L_q \cdot (R_s \cdot b_{eq} + \frac{3}{2} \cdot P_p^2 \cdot \lambda_m'^r)^2}}{2 \cdot J_{eq} \cdot L_q}$$

Reemplazando los valores de los parámetros y teniendo en cuenta que R_s puede variar con la temperatura entre $1,02 \Omega$ y $1,32 \Omega$ de manera lineal, se observa que los polos se encuentran en función de este valor dado que las demás valores son parámetros fijos del sistema.

Para determinar los ceros evaluamos el numerador de la función de transferencia (49). De aquí notamos que solo $T_l(t)$ introduce ceros al sistema, obteniendo, al igual que en el caso de los polos, funciones dependientes de R_s .

$$s \cdot L_q + R_s = 0 \quad \rightarrow \quad s = -\frac{R_s}{L_q} = -\frac{R_s}{5,9 \cdot 10^3}$$

Podemos hacer un gráfico en el plano imaginario sobre como varían estos valores según el valor de R_s . Así obtenemos la siguiente figura:

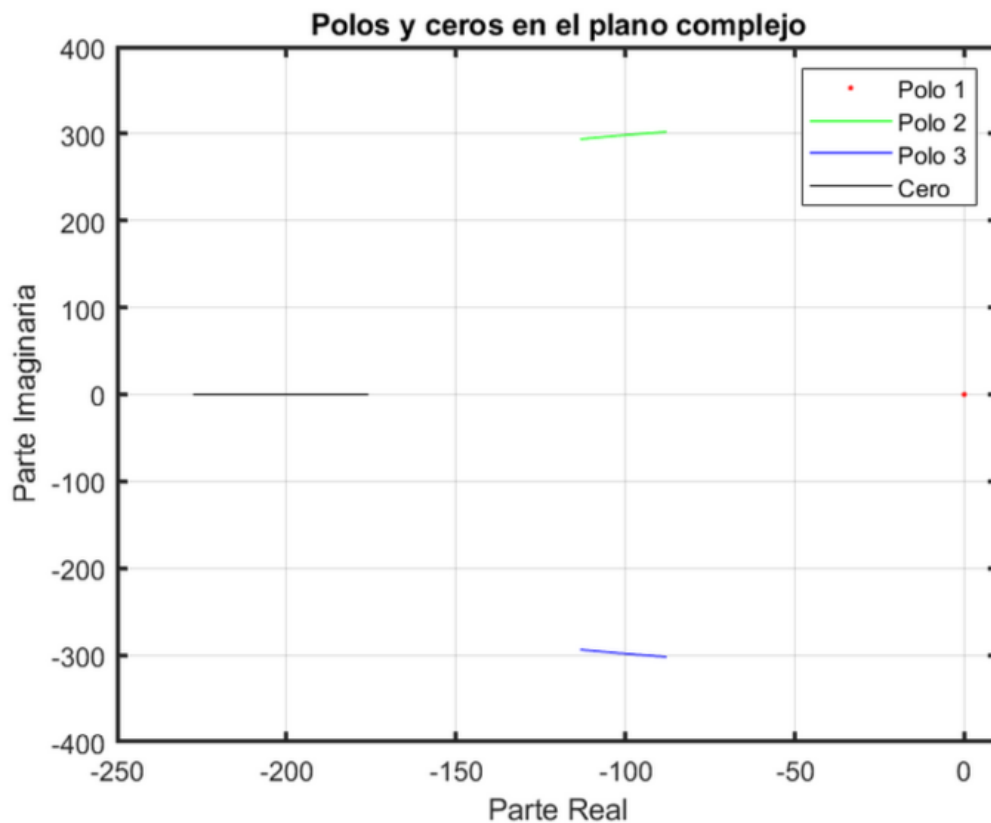


Figura 17: Polos y ceros en función de R_s

En esta figura se grafican los sucesivos valores que pueden tomar los polos y el cero si variamos el valor de R_s . Notamos una pequeña disminución de la parte imaginaria con el aumento de esta variable, aunque esto es casi despreciable. También se logra visualizar la distancia al eje imaginario que tiene cada posible valor y sobre todo el valor mas cercano a esta (representa el caso menos amortiguado).

De la misma podemos concluir que a medida que el valor de la temperatura aumenta, aumentando R_s , el sistema se vuelve mas estable. Esto se puede ver ya que al aumentar la parte real negativa, los mismos vuelven la respuesta del sistema mas amortiguado.

Para obtener el valor de la frecuencia natural del sistema y el amortiguamiento relativo, podemos comparar la ecuación característica del sistema con la forma estándar que toma un sistema de tercer orden. Pero al trabajar sobre el polinomio característico, teniendo en cuenta que un polo es 0, podemos simplificar y compararlo con uno de orden 2:

$$s^2 + 2.\xi.\omega_n.s + \omega_n^2 = 0 \quad (51)$$

Igualando ambas expresiones obtenemos los siguiente valores:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{R_s.b_{eq} + \frac{3}{2}.P_p^2.\lambda_{r_m}^2}{J_{eq}.L_q}} \quad (52)$$

$$\xi = \frac{L_q.b_{eq} + R_s.J_{eq}}{2.J_{eq}.L_q.\omega_n} \quad (53)$$

Reemplazando los valores de los parámetros obtenemos que:

$$314,50 \text{ rad/s} < \omega_n < 314,72 \text{ rad/s}$$

$$0.28 < \xi < 0.36$$

La frecuencia natural (ω_n) no varía significativamente con R_s , en cambio el valor de ξ se ve influenciado de mayor manera aunque siempre se mantiene en rangos menores a 1, lo que indica que es un sistema subamortiguado.

Podemos ver como varían estos valores en los siguientes gráficos:

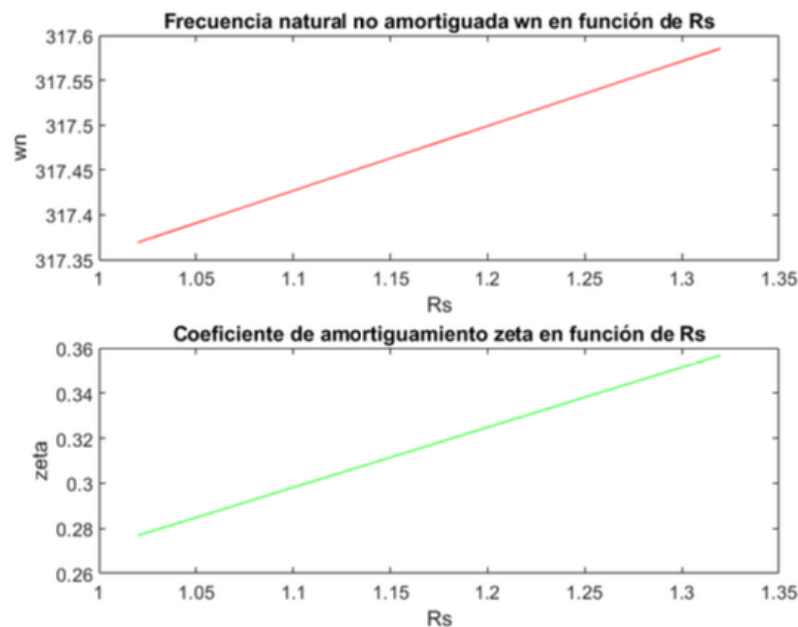


Figura 18: Frecuencia natural y amortiguamiento en función de R_s

2.4. Análisis de Observabilidad

Para realizar el análisis de observabilidad completa de estados para el modelo LTI equivalente aumentado desde la salida θ_m , evaluamos el rango de la matriz de observabilidad "O".

En este caso la matriz de observabilidad, teniendo en cuenta que es un sistema de 3er orden, debe tener orden 3 también. Así:

$$O = \begin{bmatrix} C \\ C.A \\ C.A^2 \end{bmatrix} \quad (54)$$

Con:

$$C = [1 \quad 0 \quad 0] \quad (55)$$

$$C.A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{b_{eq}}{J_{eq}} & \frac{3.P_p.\lambda_m'^r}{2.J_{eq}} \\ 0 & -\frac{P_p.\lambda_m'^r}{L_q} & -\frac{R_s}{L_q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (56)$$

$$C.A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{b_{eq}}{J_{eq}} & \frac{3.P_p.\lambda_m'^r}{2.J_{eq}} \\ 0 & -\frac{P_p.\lambda_m'^r}{L_q} & -\frac{R_s}{L_q} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{b_{eq}}{J_{eq}} & \frac{3.P_p.\lambda_m'^r}{2.J_{eq}} \\ 0 & -\frac{P_p.\lambda_m'^r}{L_q} & -\frac{R_s}{L_q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{b_{eq}}{J_{eq}} & \frac{3.P_p.\lambda_m'^r}{2.J_{eq}} \end{bmatrix} \quad (57)$$

Por lo tanto:

$$O = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{b_{eq}}{J_{eq}} & \frac{3.P_p.\lambda_m'^r}{2.J_{eq}} \end{bmatrix} \quad (58)$$

El rango de esta matriz es 3, por lo tanto el sistema es completamente observable a partir de la salida θ_m .

Estrictamente debemos decir que el sistema es parcialmente observable a partir de tener la posición como variable de salida ya que no se pueden obtener los estados de $i_d s^r$ ni T_s° .

Podemos realizar el mismo análisis a partir de tener como variable medida la velocidad, utilizando un taco generador. En este caso tendremos:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (59)$$

$$C.A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{b_{eq}}{J_{eq}} & \frac{3.P_p.\lambda_m'^r}{2.J_{eq}} \\ 0 & -\frac{P_p.\lambda_m'^r}{L_q} & -\frac{R_s}{L_q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{b_{eq}}{J_{eq}} & \frac{3.P_p.\lambda_m'^r}{2.J_{eq}} \end{bmatrix}$$

$$C.A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{b_{eq}}{J_{eq}} & \frac{3.P_p.\lambda_m'^r}{2.J_{eq}} \\ 0 & -\frac{P_p.\lambda_m'^r}{L_q} & -\frac{R_s}{L_q} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{b_{eq}}{J_{eq}} & \frac{3.P_p.\lambda_m'^r}{2.J_{eq}} \\ 0 & -\frac{P_p.\lambda_m'^r}{L_q} & -\frac{R_s}{L_q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{b_{eq}}{J_{eq}} - \frac{3.P_p^2.\lambda_m'^{r2}}{2.J_{eq}.L_q} & \frac{3.b_{eq}.P_p.\lambda_m'^r}{2.J_{eq}^2} \end{bmatrix}$$

Entonces:

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{b_{eq}}{J_{eq}} & \frac{3.P_p.\lambda_m'^r}{2.J_{eq}} \\ 0 & -\frac{b_{eq}}{J_{eq}} - \frac{3.P_p^2.\lambda_m'^{r2}}{2.J_{eq}.L_q} & \frac{3.b_{eq}.P_p.\lambda_m'^r}{2.J_{eq}^2} \end{bmatrix}$$

El rango de esta matriz es 2, por lo tanto podemos afirmar que el sistema no es observable a partir de la salida ω_n . Esto se debe a que, conociendo la velocidad, no se puede estimar la posición sin conocer la condición inicial de la misma.

2.5. Análisis de Controlabilidad

Para afirmar si el sistema es controlable a partir de la entrada manipulada estipulada $v_{qs}^r(t)$ debemos estudiar el rango de la matriz de controlabilidad C . Esta nos proporcionará la certeza de si el sistema LTI se puede transferir desde cualquier estado inicial a cualquier otro estado, mediante un vector de control no restringido en un intervalo de tiempo finito.

Para este caso la matriz de Controlabilidad es:

$$C = \begin{bmatrix} B & A.B & A^2.B \end{bmatrix} \quad (60)$$

Con:

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L_q} \end{bmatrix}$$

$$A.B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{b_{eq}}{J_{eq}} & \frac{3.P_p.\lambda_m'}{2.J_{eq}} \\ 0 & -\frac{P_p.\lambda_m'}{L_q} & -\frac{R_s}{L_q} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L_q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{3.P_p.\lambda_m'}{2.J_{eq}} \\ -\frac{R_s}{L_q} \end{bmatrix}$$

$$A^2.B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{b_{eq}}{J_{eq}} & \frac{3.P_p.\lambda_m'}{2.J_{eq}} \\ 0 & -\frac{P_p.\lambda_m'}{L_q} & -\frac{R_s}{L_q} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{b_{eq}}{J_{eq}} & \frac{3.P_p.\lambda_m'}{2.J_{eq}} \\ 0 & -\frac{P_p.\lambda_m'}{L_q} & -\frac{R_s}{L_q} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L_q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3.P_p.\lambda_m'}{2.J_{eq}.L_q} \\ -\frac{3.P_p.b_{eq}.\lambda_m'}{2.J_{eq}^2.L_q} - \frac{3.P_p.\lambda_m'.R_s}{2.J_{eq}.L_q^2} \\ \frac{3.P_p.\lambda_m'}{2.J_{eq}^2} \end{bmatrix}$$

Entonces:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{3.P_p.\lambda_m'}{2.J_{eq}.L_q} \\ 0 & \frac{3.P_p.\lambda_m'}{2.J_{eq}} & -\frac{3.P_p.b_{eq}.\lambda_m'}{2.J_{eq}^2.L_q} - \frac{3.P_p.\lambda_m'.R_s}{2.J_{eq}.L_q^2} \\ \frac{1}{L_q} & -\frac{3.P_p.b_{eq}.\lambda_m'}{2.J_{eq}^2.L_q} - \frac{3.P_p.\lambda_m'.R_s}{2.J_{eq}.L_q^2} & \frac{3.P_p.\lambda_m'}{2.J_{eq}^2} \end{bmatrix}$$

En este caso el rango de la matriz de controlabilidad es 3, por lo tanto podemos afirmar que el sistema LTI equivalente simplificado es controlable desde la entrada indicada. Cabe aclarar que a partir de $v_{qs}^r(t)$ no es posible controlar la salida de los estados i_{ds}^r ni T_s° del sistema LTI equivalente aumentado. Estas podrían controlarse si se agrega entradas de control destinadas específicamente para esto.

2.6. Simulación Dinámica

Realizamos una simulación dinámica en el dominio del tiempo, comparando el modelo NL completo desacoplado con Ley de control NL con el modelo LTI equivalente aumentado.

2.6.1. Respuesta del estado interno a pulso de consigna de tensión de estador en el eje q

La consigna es la que se muestra en la siguiente figura:

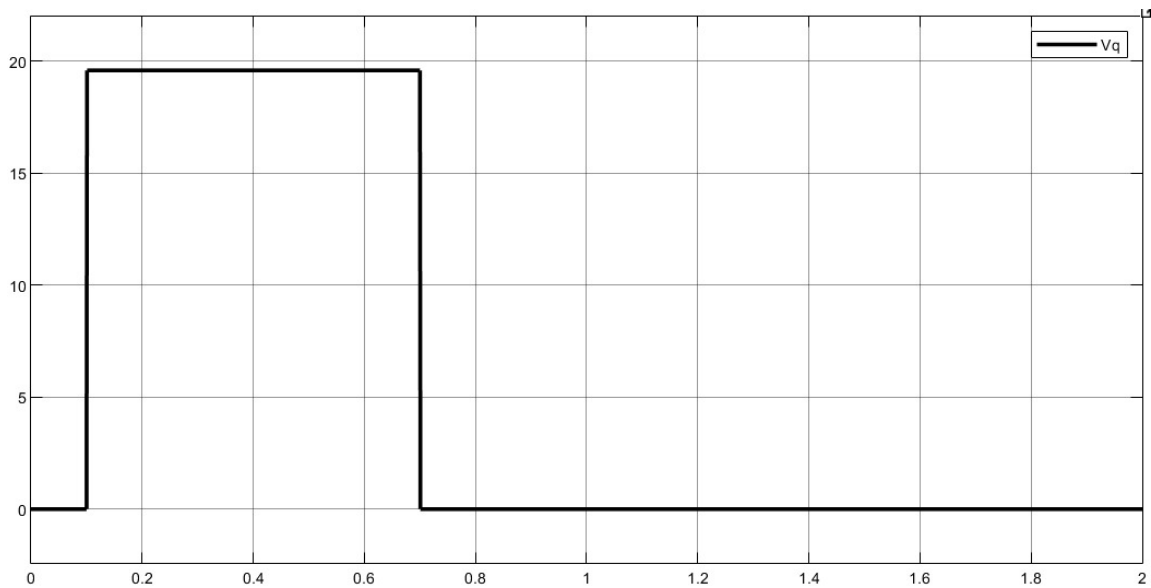


Figura 19: Consigna de tensión $v_q(t)$.

Como se puede observar toma el valor de $+19.596 \text{ V}$ en el intervalo de tiempo de 0.1 s a 0.7 s . Esta consigna se superpone con un doble pulso de torque de carga como el que se muestra en la figura (20). $T_l(t)$ toma su valor máximo ($+6.28 \text{ N.m}$) de 0.3 s a 0.5 s y su mínimo (-6.28 N.m) de 0.5 s a 0.9 s .

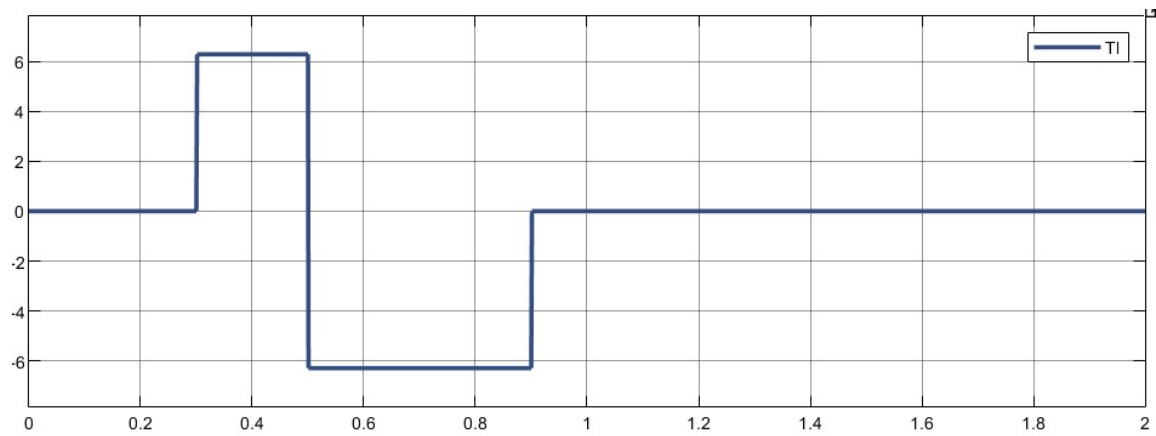


Figura 20: Carga $T_l(t)$

A continuación se mostrarán las respuestas del sistema a la consigna de tensión de estator en el eje q . Se irá comparando cada variable una a una entre el LTI equivalente aumentado y el modelo NL con Ley de control NL, en ese mismo orden.

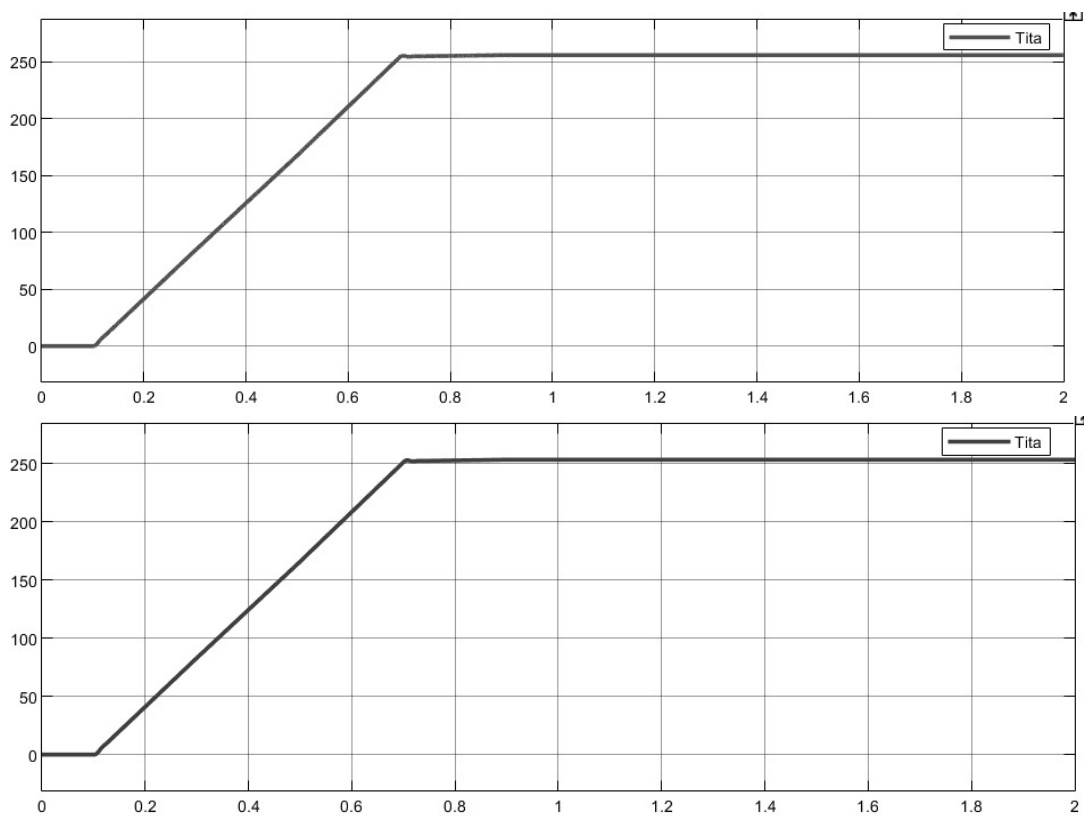


Figura 21: Respuesta de la posición ($\theta_m(t)$) en función del tiempo.

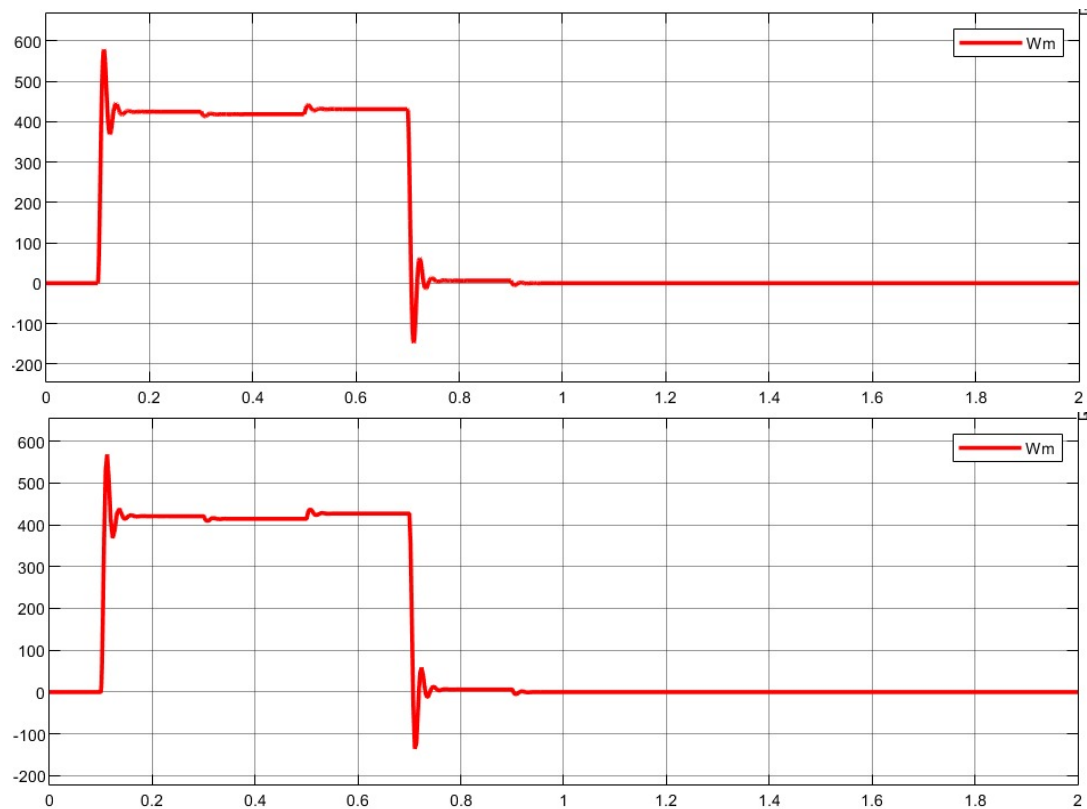


Figura 22: Respuesta de la velocidad ($\omega_m(t)$) en función del tiempo.

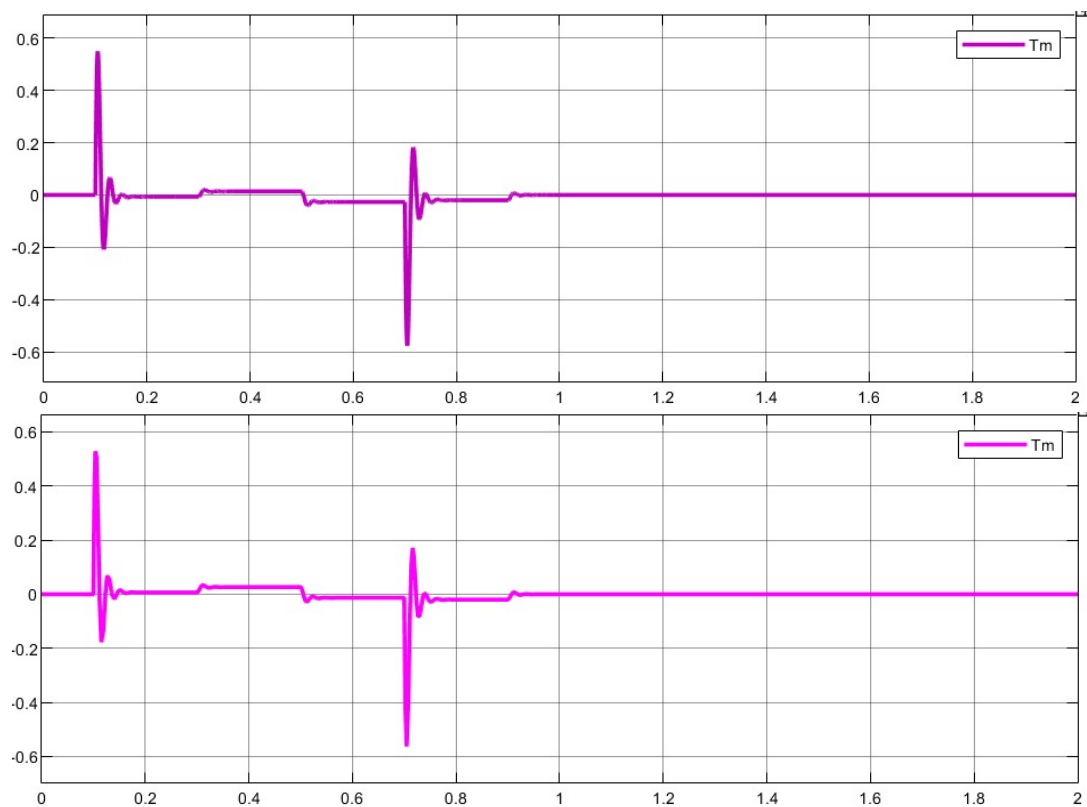


Figura 23: Respuesta del torque ($T_m(t)$) en función del tiempo.

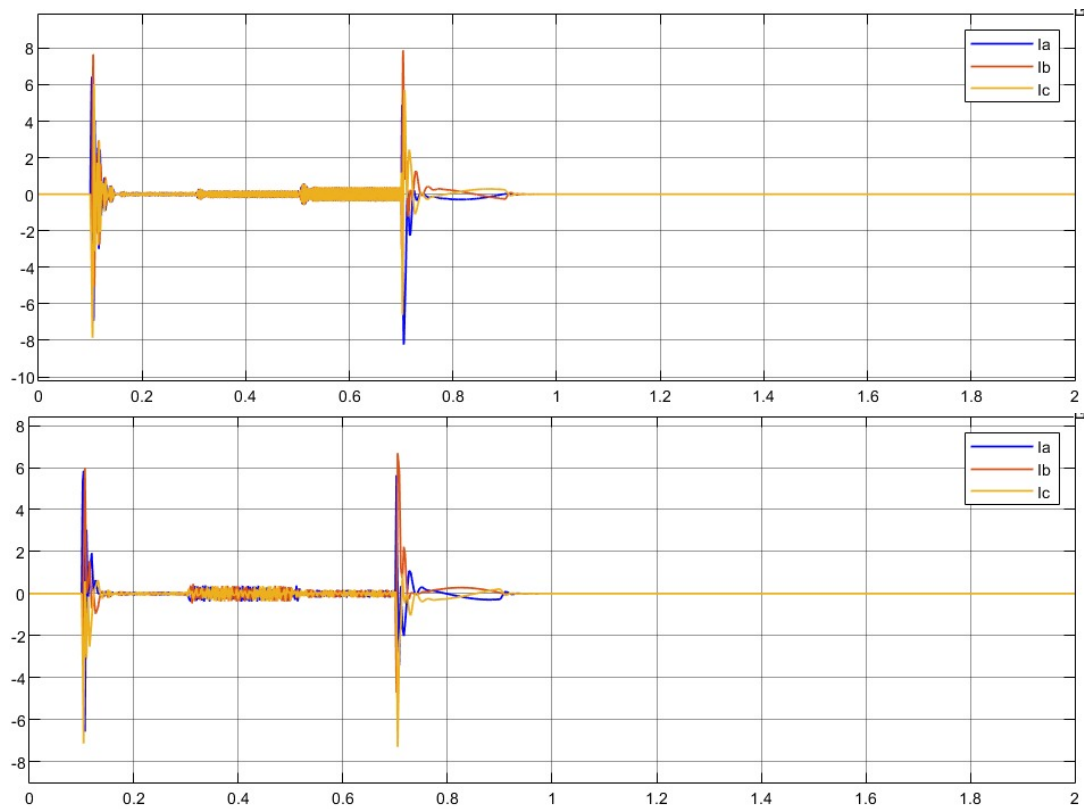


Figura 24: Respuesta de las corrientes ($i_{abc}(t)$) en función del tiempo.

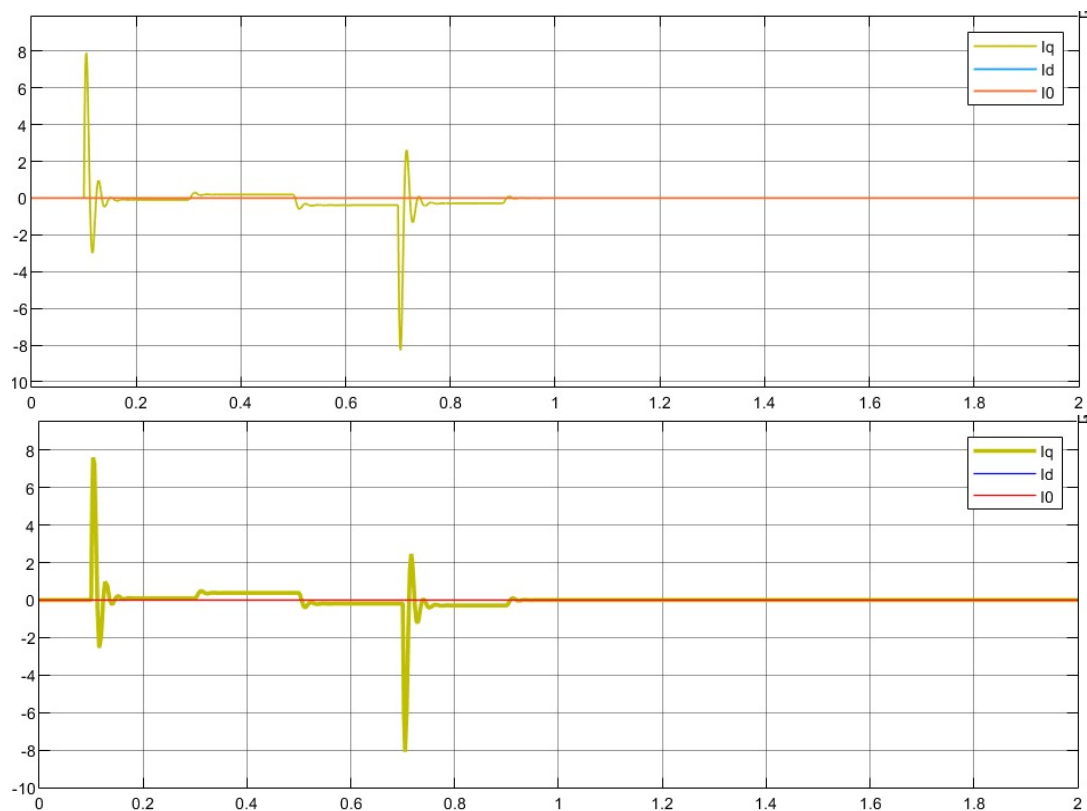


Figura 25: Respuesta de las corrientes ($i_{qd0}(t)$) en función del tiempo.

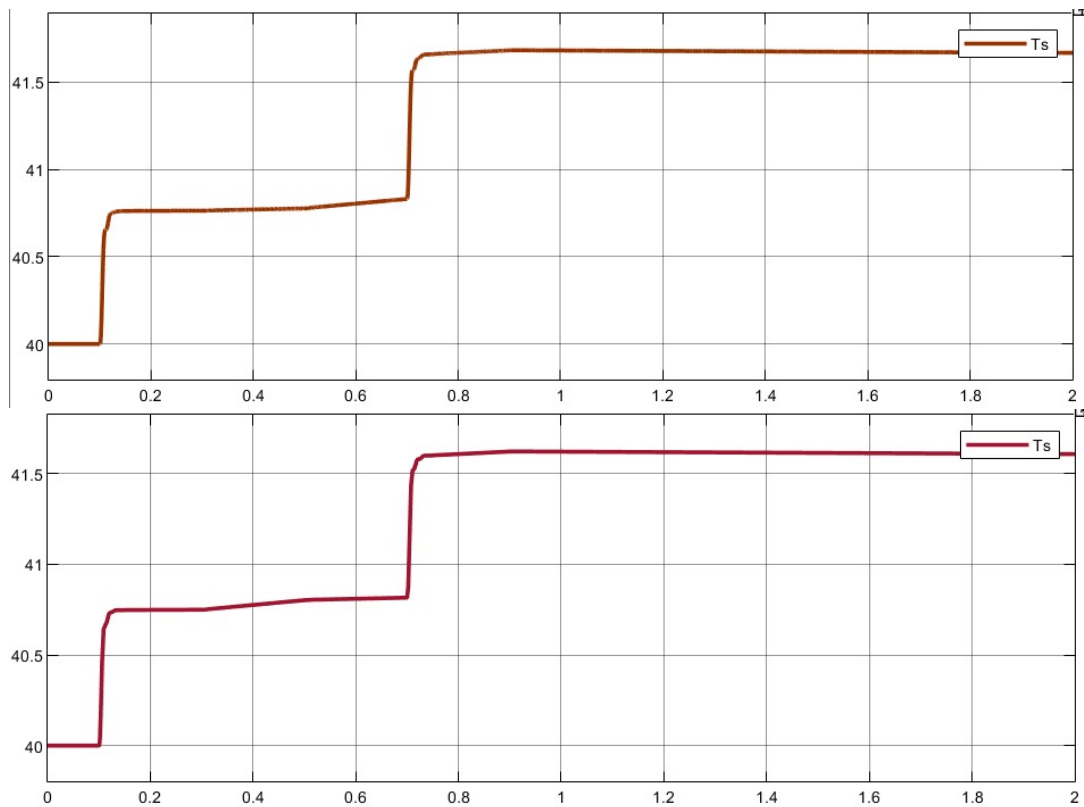


Figura 26: Respuesta de la temperatura ($T_s(t)$) en función del tiempo.

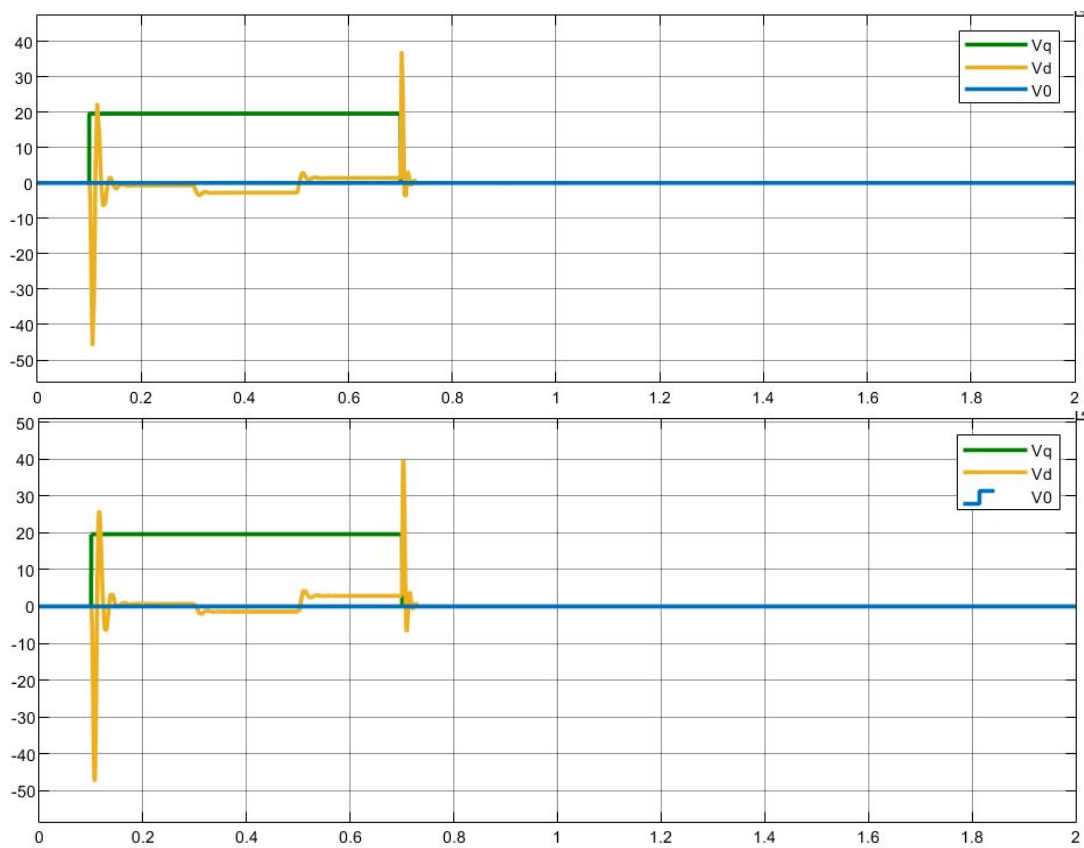


Figura 27: Respuesta de la tensión ($v_{qdo}(t)$) en función del tiempo.

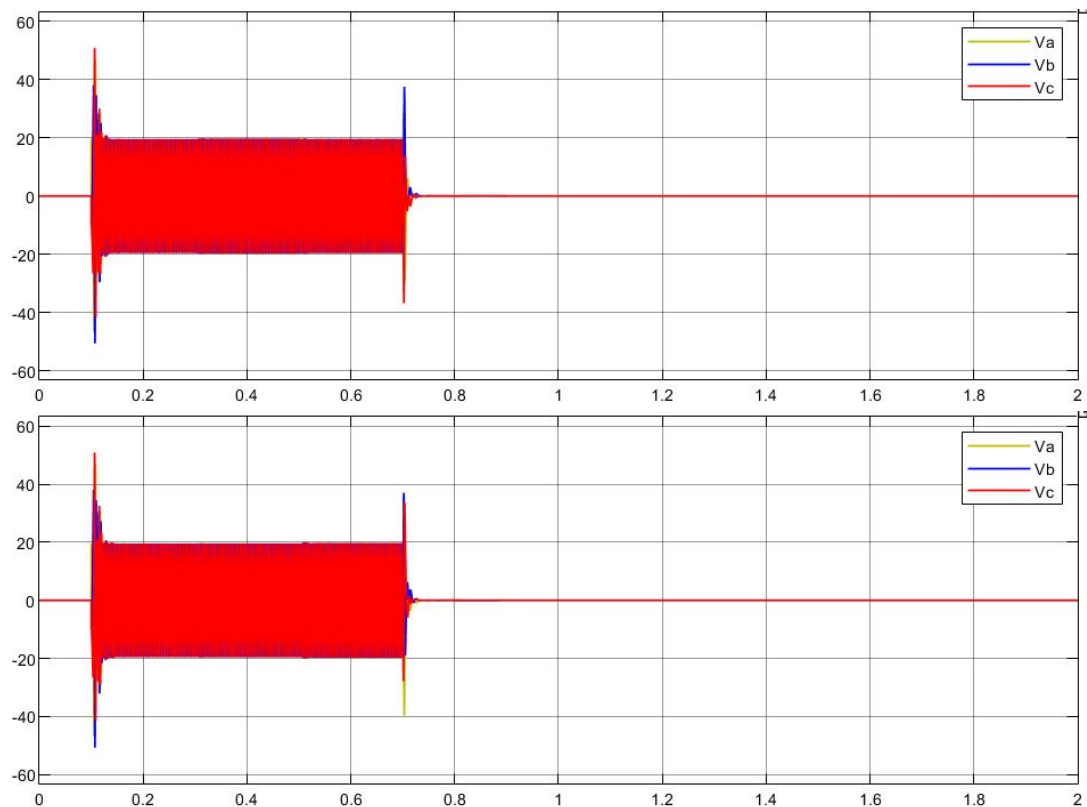


Figura 28: Respuesta de la tensión ($v_{abc}(t)$) en función del tiempo.

De la Figura (21) se puede observar que la posición del rotor ($\theta_m(t)$) varía casi linealmente en el periodo en el que la consiga de tensión en el eje q es positiva.

La velocidad ($\omega_m(t)$) en la Figura (22) pasa por un transitorio luego se estabiliza a un valor constante. En 0.3 s , que es cuando comienza el doble pulso del torque de carga, se observa una leve decaimiento de la velocidad a la vez que el torque electromagnético de la Figura (23) aumenta para compensar el torque de carga. De forma opuesta, cuando tenemos un torque de carga negativo ($t = 0.5\text{ s}$), el torque electromagnético disminuye y la velocidad angular aumenta.

Las figura de las corrientes (24) y (25) muestra que en los transitorios del torque electromagnético se producen picos de corriente. Esto se debe a que el torque electromagnético es proporcional a la corriente. Estos picos produce que en la Figura de la temperatura (28) se produzcan aumentos de esta. La temperatura tiene un comportamiento escalonado debido a los dos transitorios que se producen. Es posible observar también que al momento de activarse el torque de carga, la temperatura tiene una pendiente mayor, esto se debe a que el torque electromagnético aumento para compensar el de carga.

Para ambos modelos encontramos un comportamiento bastante similar, lo cual nos indica que el modelo LTI es una buena aproximación del modelo NL. Esto se debe a que como ya se ha mencionado anteriormente, la variación de la temperatura es muy pequeña, por lo que no influye significativamente en los valores de R_s .

Podemos observar en la siguiente figura que la Ley de control aplicada es efectiva, ya que la corriente en ele eje d toma un rango de valores muy pequeños.

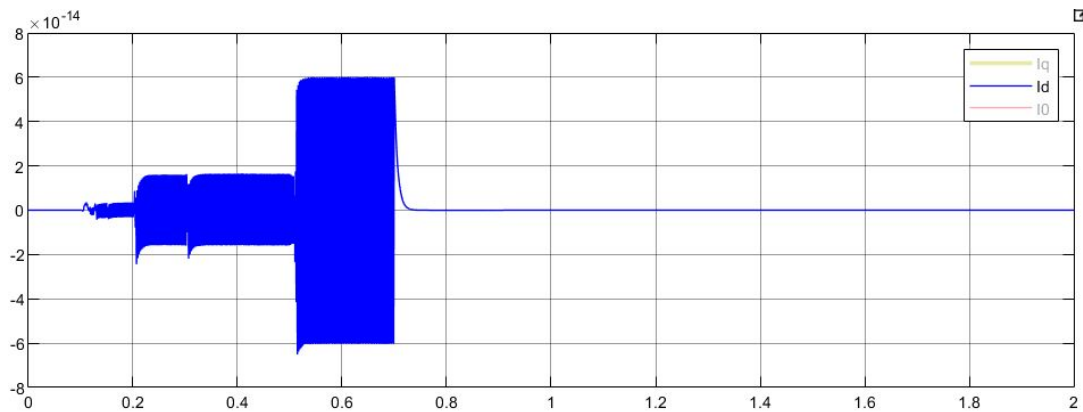


Figura 29: Respuesta de la corriente en el eje d ($i_d(t)$) en función del tiempo.

Estas perturbaciones se deben a los transitorios ya mencionados del torque, aunque también se observa el decaimiento que esta tiene que cumple con el comportamiento predicho en la dinámica residual.

Finalmente mostramos los cuadrantes de operación de la maquina eléctrica.

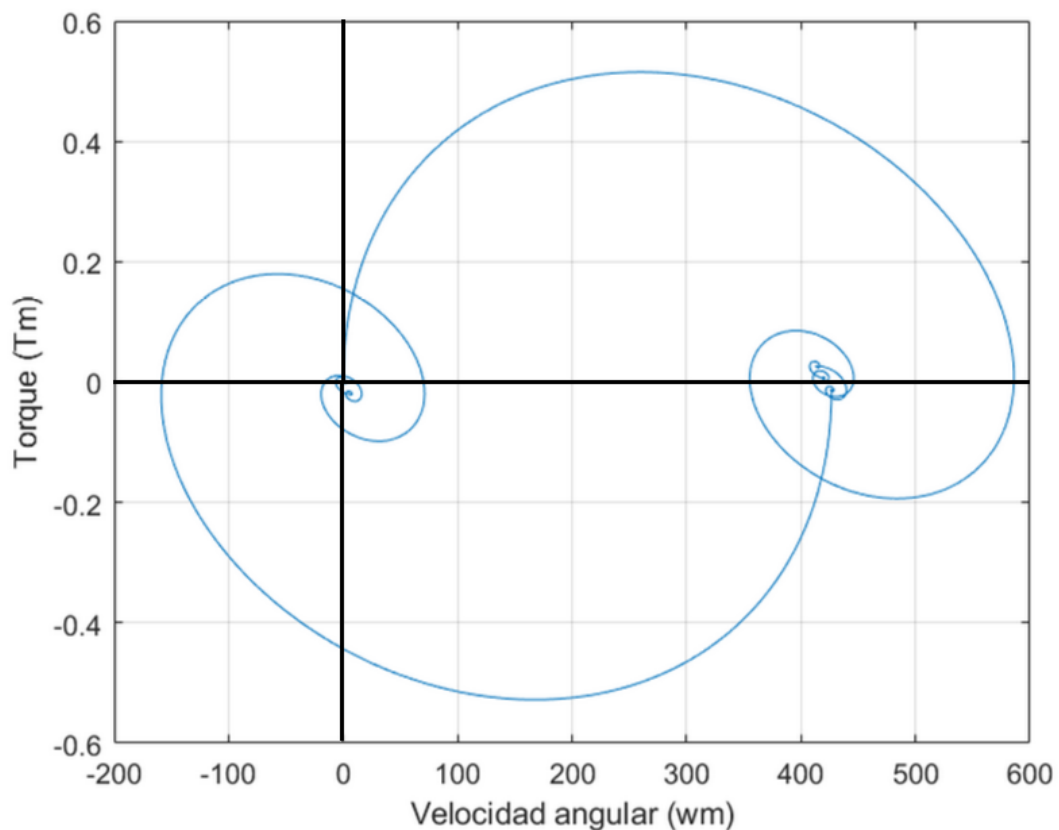


Figura 30: Cuadrantes de operación de la maquina eléctrica.

De esta figura podemos observar que la maquina trabaja en los 4 cuadrantes, esto quiere decir que trabaja como motor y como generador. Ademas se puede determinar dos puntos de equilibrio, uno correspondiente al punto de trabajo de la maquina, cuando esta en motorización. El otro corresponde a la posición de la de apagado. Las oscilaciones que se presentan al rededor de estos puntos son debido a los cambios del torque de carga.

2.6.2. Velocidad y corriente final de establecimiento luego de cada transitorio

Determinaremos de forma gráfica, utilizando el modelo NL completo desacoplado con ley de control NL, distintas características que son de vital importancia para analizar el comportamiento de la velocidad y corriente.

Los distintos valores de tiempo utilizados son: $T_1 = 0.1$ s, $T_2 = 0.3$ s, $T_3 = 0.5$ s, $T_4 = 0.7$ s y $T_5 = 0.9$ s. Estos equivalen a los tiempos en el que la consigna o el torque de carga cambian de valor.

Tiempo	Velocidad Angular				
	T1	T2	T3	T4	T5
Valor Final [rad/s]	420	414	427	6.33	0
Tiempo de Crecimiento [ms]	4.50	2.18	2.35	4.68	2.56
Tiempo de Establecimiento [ms]	126	356	555	749	972
Sobre pico [rad/s]	144	5.23	10.71	146	5.31

Cuadro 1: Características de la velocidad angular.

Tiempo	Corriente				
	T1	T2	T3	T4	T5
Valor Final [A]	0.09	0.38	-0.19	-0.28	0
Tiempo de Crecimiento [ms]	0.02	3.40	3.41	0.01	3.23
Tiempo de Establecimiento [ms]	161	345	568	763	972
Sobre pico [A]	7.82	0.09	0.18	7.77	0.09

Cuadro 2: Características de la corriente.

Los resultados obtenidos en el sistema LTI son muy parecidos y se determino no introducirlos. ya que el método gráfico es muy sensible y se pueden ver variaciones entre los dos modelos que no son concisos. Por otro lado es importante remarcar que dichas características son muy parecidos si comparamos valor por valor. Esto es debido a la poca variación que se tiene al trabajar de una forma u la otra.

En el estudio de las acciones externas sobre el sistema, se nota que tanto la velocidad angular como el torque electromagnético responden de manera diferente a ciertos cambios. La velocidad angular muestra una mayor sensibilidad ante variaciones de tensión, mientras que el torque electromagnético se ve más influenciado por cambios en el torque de perturbación.

A pesar de las diferencias en sus respuestas transitorias, al analizar las funciones que relacionan estas magnitudes con sus respectivas entradas, se observa que comparten similitudes. Estas similitudes se explican por las ganancias que afectan a las entradas correspondientes en cada expresión. Específicamente, la corriente/torque motor presenta una mayor ganancia respecto a la entrada perturbada en comparación con la velocidad angular. Por otro lado, la corriente/torque motor muestra una menor ganancia con respecto a la tensión en comparación con la velocidad angular.

2.6.3. Comparación de distintas condiciones iniciales

Las siguientes imágenes muestran el comportamiento de la corriente en tiempo real al seleccionar dos estados iniciales diferentes, $i_{ds}^r(0) = 0.5$ A e $i_{ds}^r(0) = -0.5$ A, en dos modelos.

Primero mostramos los resultados obtenidos en el modelo "Global NL con ley de control NL".

- $i_{ds}^r(0) = 0.5$ A

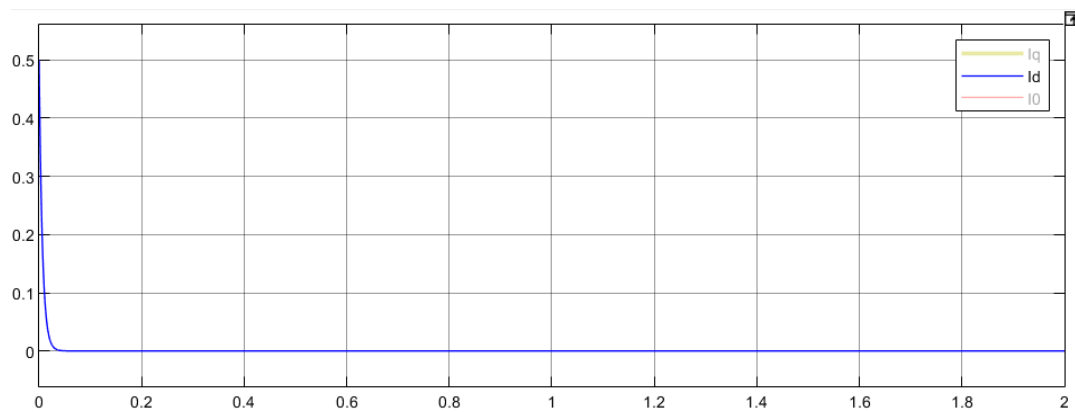


Figura 31: Respuesta de la corriente en el eje d ($i_d(t)$) en función del tiempo para la condición inicial $i_{ds}^r(0) = 0.5A$.

- $i_{ds}^r(0) = -0.5A$

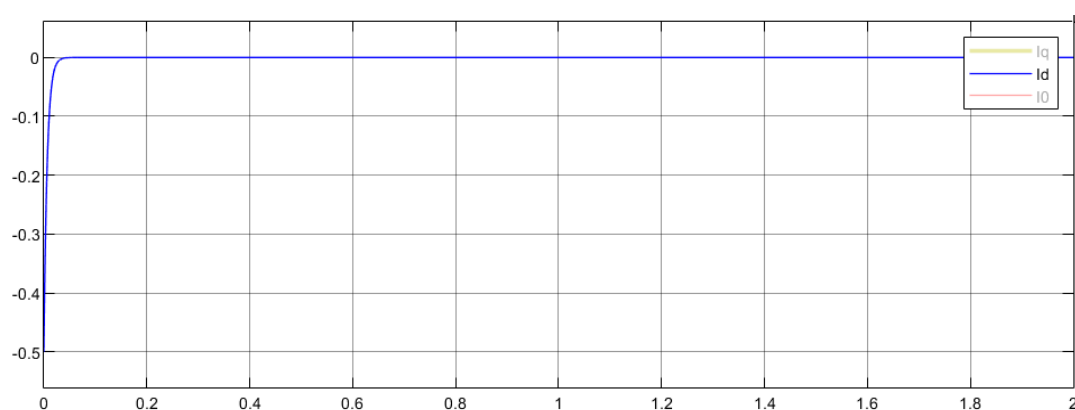


Figura 32: Respuesta de la corriente en el eje d ($i_d(t)$) en función del tiempo para la condición inicial $i_{ds}^r(0) = -0.5A$.

A continuación mostramos los resultados obtenidos en el modelo "LTI equivalente aumentado".

- $i_{ds}^r(0) = 0.5A$

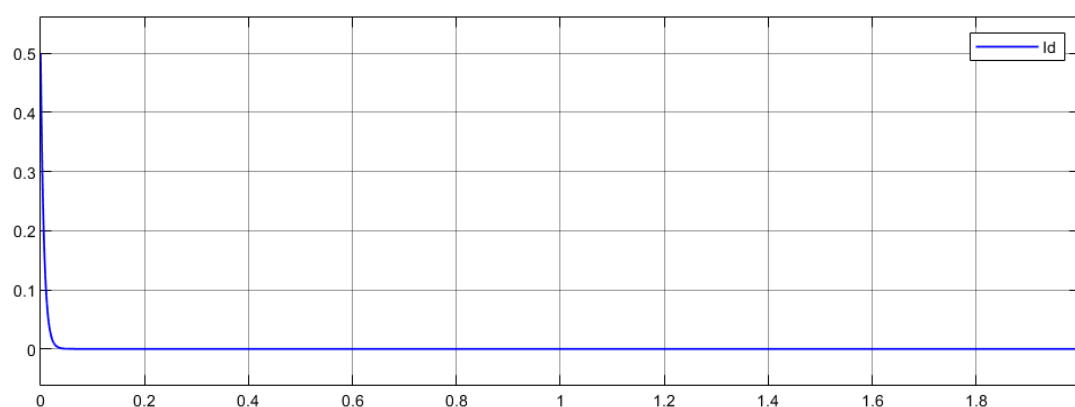


Figura 33: Respuesta de la corriente en el eje d ($i_d(t)$) en función del tiempo para la condición inicial $i_{ds}^r(0) = 0.5A$.

- $i_{ds}^r(0) = -0.5A$

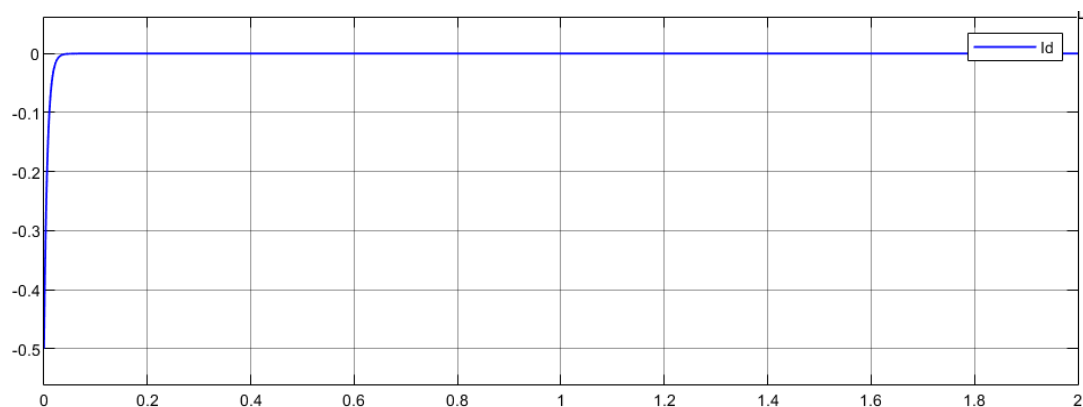


Figura 34: Respuesta de la corriente en el eje d ($i_d(t)$) en función del tiempo para la condición inicial $i_{ds}^r(0) = -0.5A$.

No se aprecian diferencias significativas en la evolución de la corriente en tiempo real entre ambos modelos en ninguno de los casos.

Se nota que no existen efectos notables en la evolución de las demás variables del sistema cuando se impone $i_{ds}^r(0) = \pm 0.5 A$. Esto se debe a que, mediante la Ley de Control complementaria mínima en el eje q , se elimina por completo el acoplamiento residual NL, incluso en régimen natural, logrando un modelo equivalente completamente lineal e independiente del estado inicial de $i_{ds}^r(t)$.

2.6.4. Field forcing/weakening

Añadimos una nueva consigna de tensión en el eje ' d ' a las especificaciones ya mencionadas, con el valor $V_{ds}^r(t) = 0 V \rightarrow V_{qs_{nom}}^r/10 = \pm 1,9596 V_{cc}$ en $t_{step1} = 0,5 s$ (field forcing/weakening a lazo abierto), sumada a la restricción o ley de control NL.

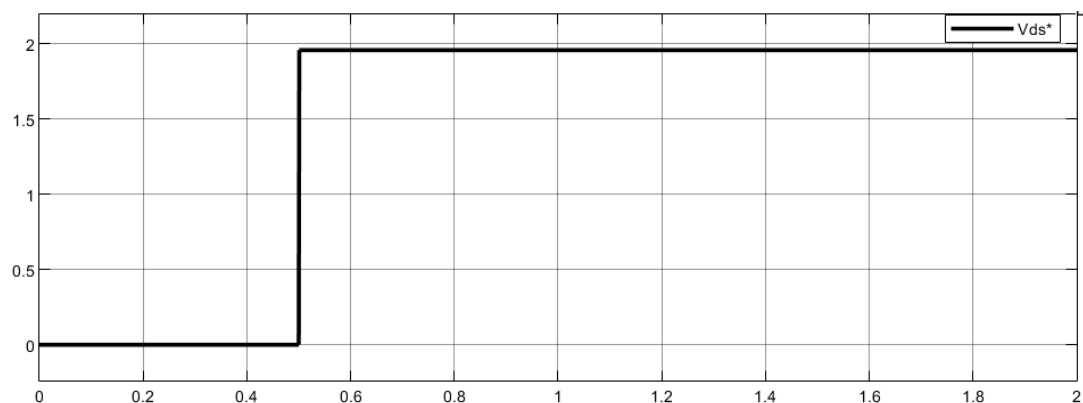


Figura 35: Consigna de tensión v_{ds}^* para field forcing.

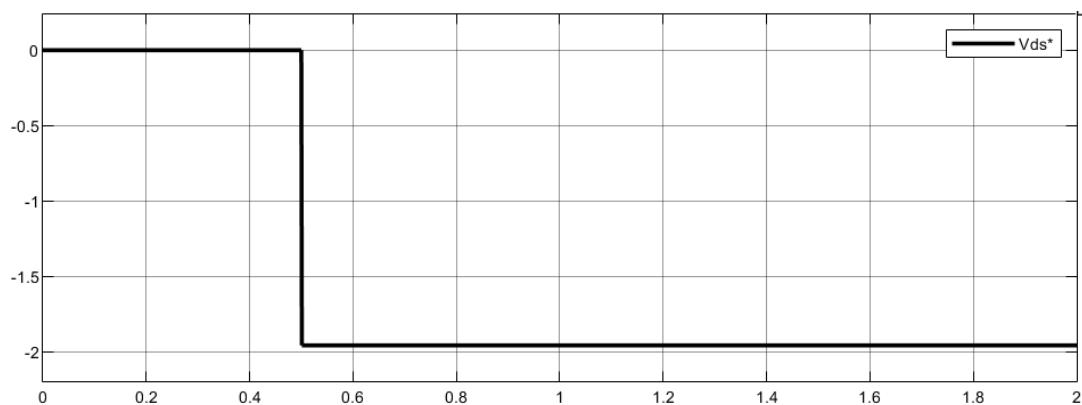


Figura 36: Consigna de tensión v_{ds}^* para field weakening.

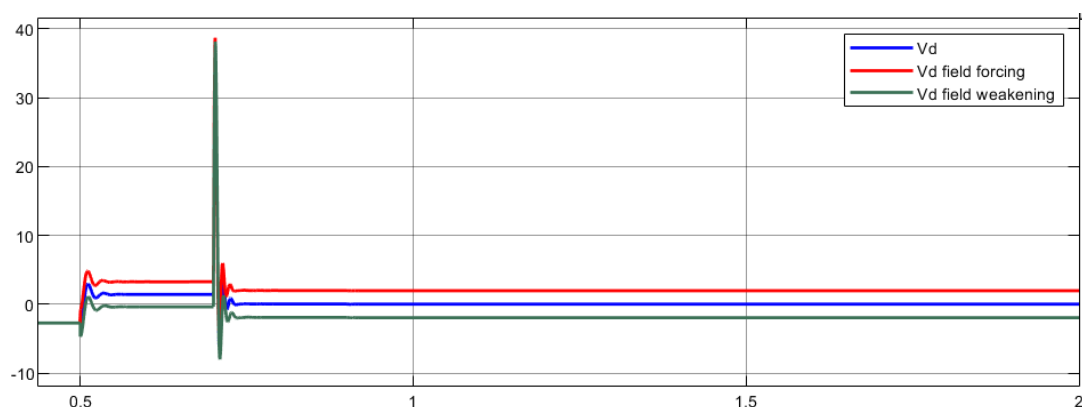


Figura 37: Valores finales de $v_{ds}(t)$ con consigna.

La comprobación de los efectos previamente mencionados muestra que un debilitamiento del campo magnético del estator (field weakening) produce un aumento en la velocidad angular en estado estacionario, mientras que disminuye el torque motor. Por otro lado, el reforzamiento del campo magnético del estator (field forcing) produce una disminución de la velocidad angular en estado estacionario, pero a su vez aumenta el torque motor.

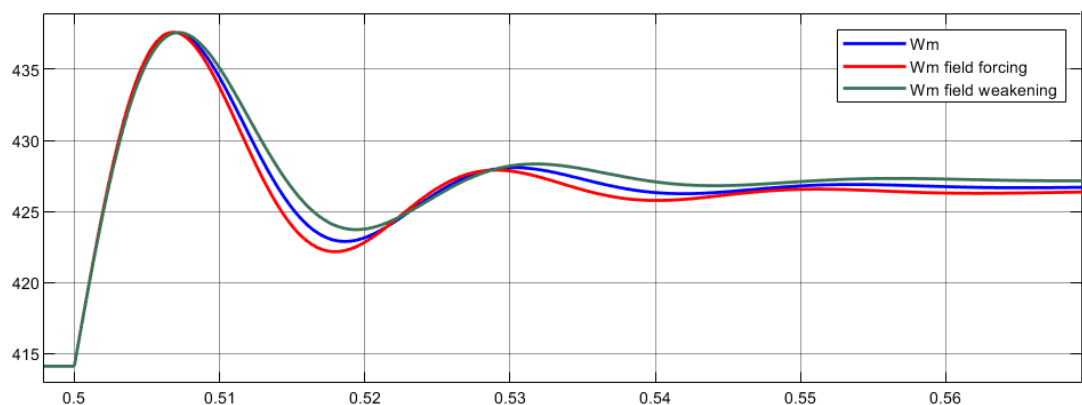


Figura 38: Comparación de velocidad angular para field forcing/weakening y sin ningún efecto.

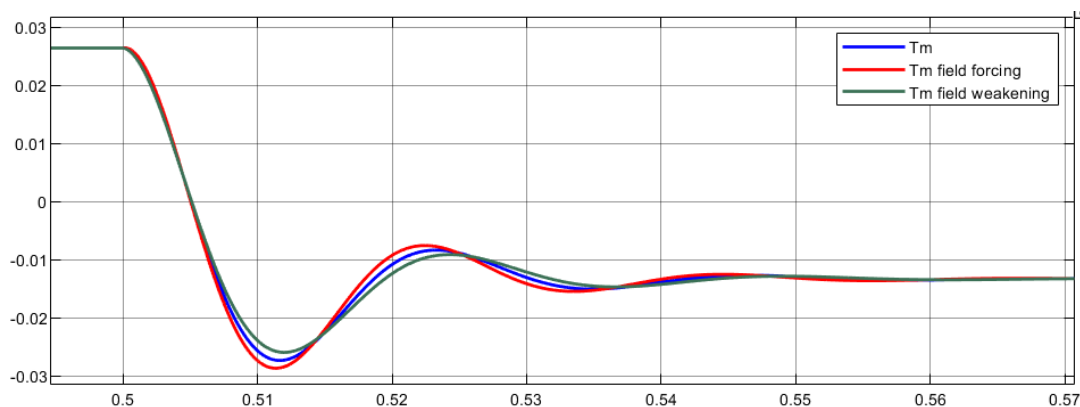


Figura 39: Comparación de torque electromagnético para field forcing/weakening y sin ningún efecto.

Por otro lado podemos observar los efectos de mantener esta consigna de V_d en las gráficas de θ y T_s . En la primera se provoca un desfase en los valores finales mientras que la temperatura crece de manera lineal hasta que la misma cese la tensión.

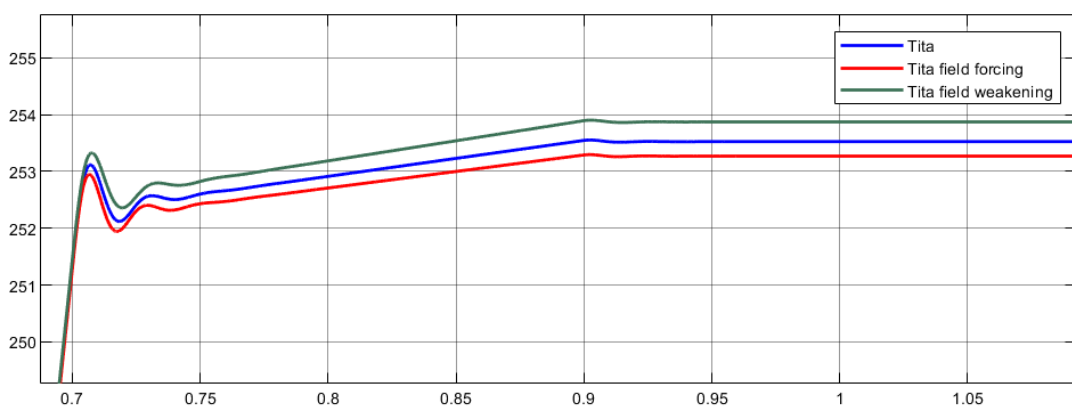


Figura 40: Comparación de posición angular para field forcing/weakening y sin ningún efecto.

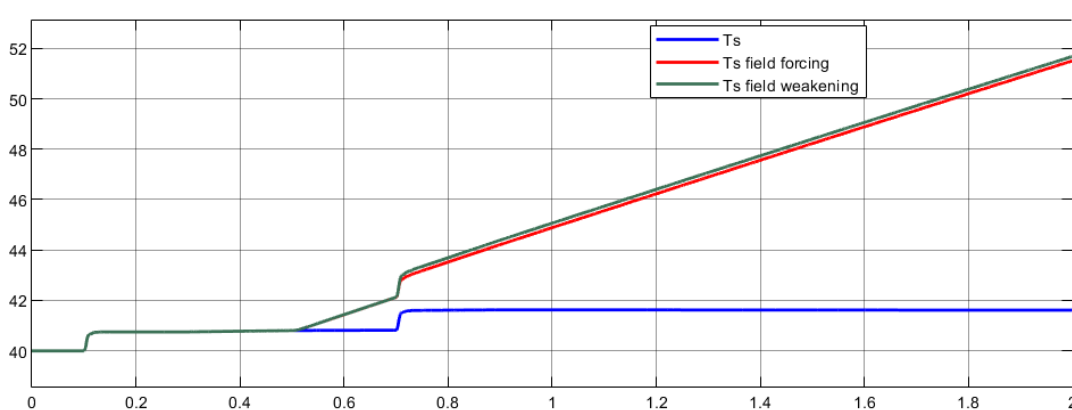


Figura 41: Comparación de temperatura del estator para field forcing/weakening y sin ningún efecto.

Es crucial señalar que esta nueva consigna no afecta en absoluto al sistema LTI equivalente aumentado. La razón radica en el hecho de haber desacoplado la corriente en directo de la corriente en cuadratura, lo que implica la pérdida de la posibilidad de realizar este tipo de acciones

3. Diseño, análisis y simulación con controlador de movimiento en cascada con modulador de torque equivalente (Control Vectorial)

El control vectorial es una técnica avanzada que se emplea en la gestión de máquinas eléctricas, como los motores de corriente alterna y las máquinas síncronas. Esta metodología posibilita el control independiente de la magnitud y la fase de la corriente de alimentación de la máquina, permitiendo así un control preciso del torque y la velocidad. Una implementación frecuente de este tipo de control es el controlador de movimiento en cascada con modulador de torque equivalente, especialmente en aplicaciones de alto rendimiento como los sistemas de tracción eléctrica y los sistemas de accionamiento de maquinaria industrial.

En el esquema del controlador de movimiento en cascada con modulador de torque equivalente, se utiliza un controlador de velocidad externo para generar una señal de referencia de velocidad. Esta señal se compara con la velocidad real de la máquina eléctrica, y la diferencia entre ambas señales se utiliza para generar una señal de referencia de torque. Este sistema es fundamental para controlar la corriente de alimentación de la máquina. Posteriormente, el modulador de torque equivalente se emplea para transformar la señal de referencia de torque en una señal de corriente de alimentación que se aplica a la máquina.

3.1. Modulador de torque equivalente (Controlador interno vectorial de corriente/torque)

En su funcionamiento, el Modulador de Torque Equivalente recibe consignas de torque como entradas, que representan la cantidad de par motor deseado. Estas consignas de torque se convierten posteriormente en consignas de tensión, lo que permite controlar la magnitud y la fase de la corriente de alimentación de la máquina eléctrica de forma independiente.

3.1.1. Desacople de las realimentaciones de estado hacia la entrada

Es posible lograr el desacoplamiento de todas las realimentaciones físicas naturales de estado hacia la entrada en una máquina eléctrica mediante la implementación de una estrategia de control adecuada que utilice un modulador de tensión con ganancia unitaria. Para esto debemos suponer que el modulador de tensión es lo suficientemente rápido y preciso, de forma que no introduzca una amplificación o atenuación adicional de la señal.

Con esta hipótesis podemos considerar que la consigna de tensión a seguir en entrada del modulador de tensión será la misma que se aplicara en la salida. Esto se puede expresar como:

$$v_{abc}(t) \approx v_{abc}^*(t) \quad (61)$$

Como ya vimos anteriormente, podemos pasar de coordenadas abc a coordenadas $dq0$ mediante la transformada de Park. Por lo tanto, podemos expresar la consigna de tensión en coordenadas $dq0$ de forma que obtengamos valores que compensen las realimentaciones para lograr el desacoplamiento.

A partir de las ecuaciones 19 que describen el comportamiento del modelo electromagnético, se determina la representación de las realimentaciones físicas del sistema. Por lo tanto, podemos definir las realimentaciones que deben realizarse como:

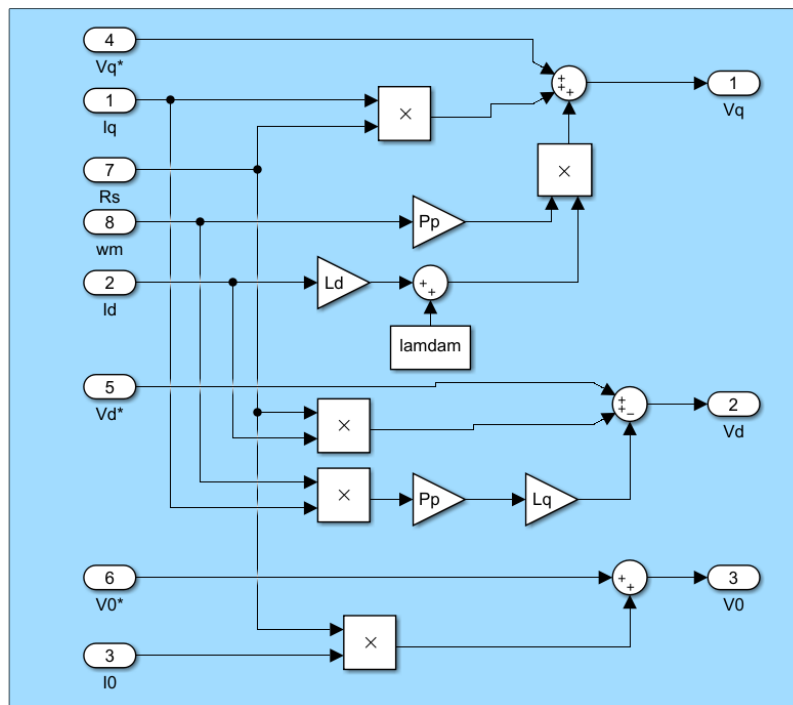
$$\begin{cases} v_{qs}^r(t) = v_{qs}^{r*}(t) + R_s \cdot i_{qs}^r(t) + \omega_m(t) \cdot P_p \cdot [\lambda_m^r + L_d \cdot i_{qs}^r(t)] \\ v_{ds}^r(t) = v_{ds}^{r*}(t) + R_s \cdot i_{ds}^r(t) - \omega_m(t) \cdot P_p \cdot L_q \cdot i_{qs}^r(t) \\ v_{0s}^r(t) = v_{0s}^{r*}(t) + R_s \cdot i_{0s}^r(t) \end{cases} \quad (62)$$

Realizando estas compensaciones, tenemos acceso directo a manipular el torque electromagnético, sin los efectos de las realimentaciones físicas, ni las caídas de tensión en los bobinados.

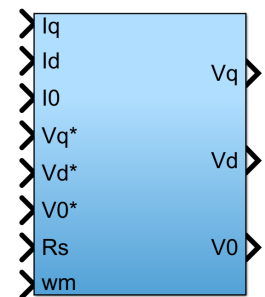
Reemplazando las Ecuaciones 62 en las Ecuaciones 19, se obtienen las siguientes expresiones:

$$\begin{cases} v_{qs}^{r*}(t) = L_q \cdot \dot{i}_{qs}^r(t) \\ v_{ds}^{r*}(t) = L_d \cdot \dot{i}_{ds}^r(t) \\ v_{0s}^{r*}(t) = L_{ls} \cdot \dot{i}_{0s}^r(t) \end{cases} \quad (63)$$

A continuación mostramos los diagramas de bloques:



(a) Expandido.

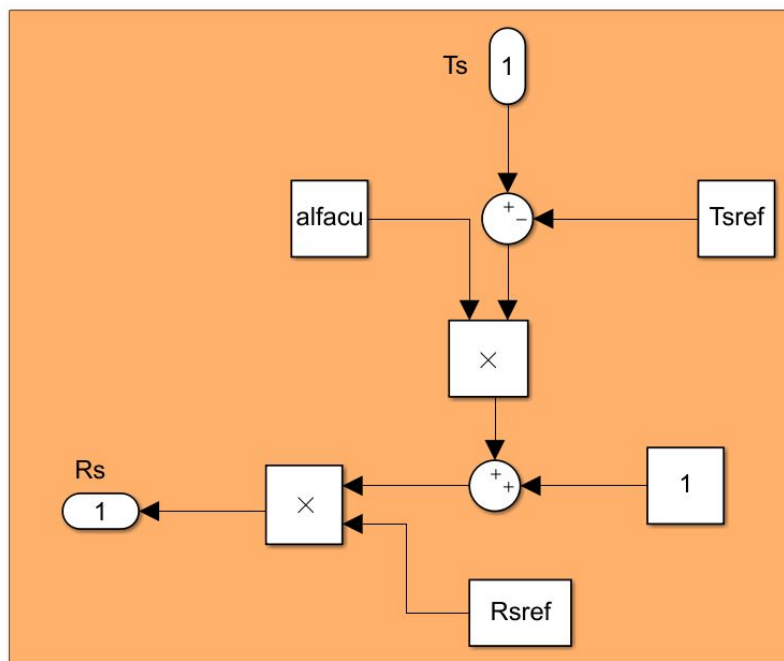


Desacople

(b) Compacto.

Figura 42: Diagramas de bloques de realimentación y desacople de variables.

Para llevar a cabo el desacople de la realimentación de la temperatura también hacemos uso del siguiente controlador, que representa la influencia de $T_s(t)$ sobre R_s .



(a) Expandido.



(b) Compacto.

Figura 43: Diagramas de bloques de realimentación de la temperatura .

3.1.2. Diseño de lazos de control de corrientes

De la ecuación (63) podemos observar la consigna de tensión es función de la corriente del sistema, por lo que se puede controlar usando una consigna de corriente proporcional. Con el error de corriente entre la corriente de consigna $i_{qd0s}^{r*}(t)$ y la corriente real $i_{qd0s}^r(t)$ del sistema se modela $v_{qd0s}^{r*}(t)$ con una ley de control proporcional. El modelo resultante es el siguiente:

$$\begin{cases} L_q \cdot \dot{i}_{qs}^r(t) = v_{qs}^{r*}(t) = [i_{qs}^{r*}(t) - i_{qs}^r(t)] \cdot R'_q \\ L_d \cdot \dot{i}_{ds}^r(t) = v_{ds}^{r*}(t) = [i_{ds}^{r*}(t) - i_{ds}^r(t)] \cdot R'_d \\ L_{ls} \cdot \dot{i}_{0s}^r(t) = v_{0s}^{r*}(t) = [i_{0s}^{r*}(t) - i_{0s}^r(t)] \cdot R'_0 \end{cases} \quad (64)$$

Las variables R' representan las ganancias del control proporcional. Se necesita obtener el valor de óptimo de esta ganancia, por lo cual se analiza la función de transferencia del modulador. Para poder determinar estas ganancias aplicamos la transformada de Laplace y obtenemos:

$$\begin{cases} L_q \cdot s \cdot I_{qs}^r(s) = [I_{qs}^{r*}(s) - I_{qs}^r(s)] \cdot R'_q \\ L_d \cdot s \cdot I_{ds}^r(s) = [I_{ds}^{r*}(s) - I_{ds}^r(s)] \cdot R'_d \\ L_{ls} \cdot s \cdot I_{0s}^r(s) = [I_{0s}^{r*}(s) - I_{0s}^r(s)] \cdot R'_0 \end{cases} \quad (65)$$

A partir de estas ecuaciones determinamos las funciones de transferencia:

$$\begin{aligned} G_{qs}(s) &= \frac{I_{qs}^r(s)}{I_{qs}^{r*}(s)} = \frac{1}{\frac{L_q}{R'_q} \cdot s + 1} \\ G_{ds}(s) &= \frac{I_{ds}^r(s)}{I_{ds}^{r*}(s)} = \frac{1}{\frac{L_d}{R'_d} \cdot s + 1} \\ G_{0s}(s) &= \frac{I_{0s}^r(s)}{I_{0s}^{r*}(s)} = \frac{1}{\frac{L_{ls}}{R'_0} \cdot s + 1} \end{aligned}$$

Estas funciones de transferencia son de primer orden y no poseen ceros. Dado que los parámetros de cada una son positivos también podemos afirmar que las funciones de transferencia son estables.

Estas funciones de transferencia tienen la forma típica de un filtro pasa bajos, donde el valor que multiplica a la variable s es la constante del tiempo del sistema τ que a la vez es el inverso la frecuencia de corte del filtro. Si τ toma un valor muy pequeño, dispondremos de un ancho de banda muy grande, lo cual proporciona una respuesta rápida.

El polo del filtro pasa bajos es $p = -\frac{1}{\tau}$ y dado que para todos los lazos $p = -5000 \text{ rad/s}$ podemos calcular los valores de las ganancias con la siguiente expresión:

$$\frac{L}{R'} = -\frac{1}{p} \rightarrow R' = -L \cdot p \quad (66)$$

Resolviendo para cada rama:

$$\begin{aligned} R'_q &= -L_q \cdot p = 29 \Omega \\ R'_d &= -L_d \cdot p = 33 \Omega \\ R'_0 &= -L_{ls} \cdot p = 4 \Omega \end{aligned}$$

Con este lazo de corriente logramos que el error entre la consigna de corriente y la corriente real converja mas rápidamente a cero, de forma que responda de mejor manera a las perturbaciones.

El diagrama de bloques correspondiente a este lazo de control es el siguiente:

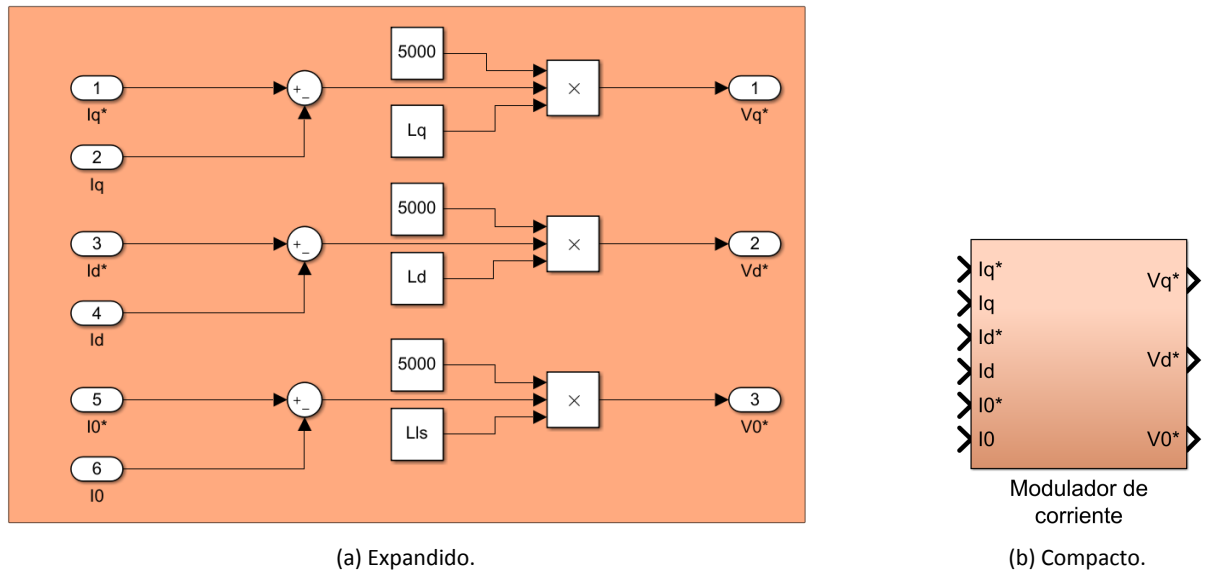


Figura 44: Diagrama de bloques de modulador de corriente.

3.1.3. Incorporación de consigna de torque

Volvemos a usar nuevamente el método de la sección anterior en el que realizamos una realimentación para controlar el sistema mediante consignas de torque $T_m^*(t)$. La consigna sigue el siguiente modelo:

$$T_m^*(t) = T_m^{r'}(t) + b_{eq} \cdot \omega_m(t) \quad (67)$$

Este modelo contempla la realimentación física debida a la fricción, que genera perdidas en el torque.

Sabiendo que el torque y la corriente están relacionados por la ecuación del Torque electromagnético (10) expresamos las consignas de torque $T_m^{*r'}$ en función de las consignas de corriente i_{qs}^{r*} :

$$T_m^*(t) = \frac{3}{2} \cdot P_p \cdot [\lambda_m^r + (L_d - L_q) i_{ds}^r(t)] \cdot i_{qs}^{r*}(t) \quad (68)$$

Despejando de estas ultimas dos ecuaciones (67) y (68), obtenemos:

$$i_{qs}^{r*}(t) = \frac{T_m^{*r'}(t) + b_{eq} \cdot \omega_m(t)}{\frac{3}{2} \cdot P_p \cdot [\lambda_m^r + (L_d - L_q) i_{ds}^r(t)]} \quad (69)$$

El diagrama de bloques correspondiente a este lazo de control es el siguiente:

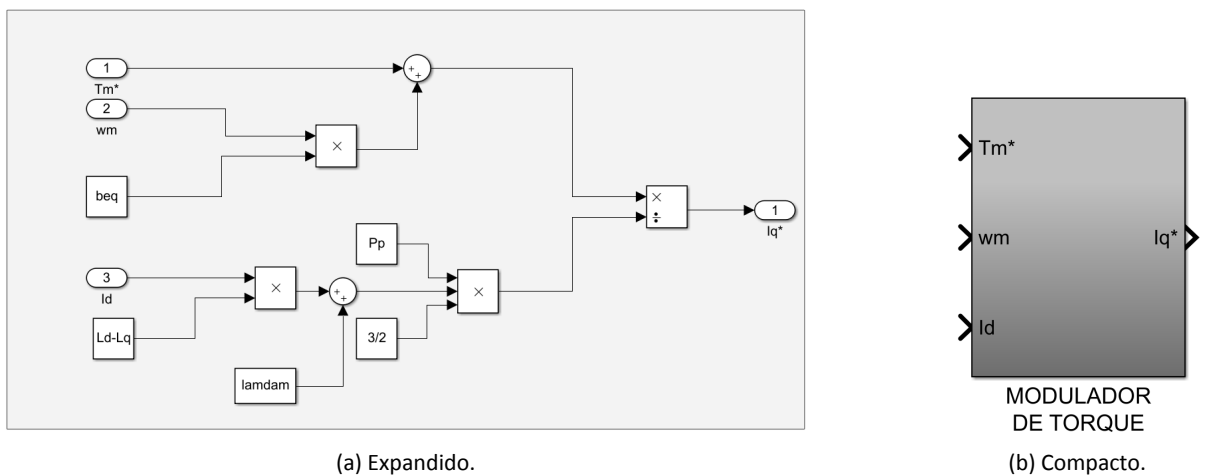


Figura 45: Diagrama de bloques de modulador de torque.

En este lazo de control, podemos observar nuevamente el impacto que tiene la corriente $i_{ds}(t)$ sobre el campo magnético. Si i_{ds}^{r*} es mayor a 0 A, se produce un reforzamiento de campo. Si i_{ds}^{r*} es igual a 0 A, ocurre un desacople en la rama correspondiente a la cuadratura, lo cual anula los efectos de reforzamiento y debilitamiento. En cambio, si i_{ds}^{r*} es menor a 0 A, se produce un debilitamiento de campo.

3.2. Controlador externo de movimiento (posición/velocidad)

Para mejorar la dinámica del sistema y corregir los errores de estado estacionario por cargas perturbadoras, se implementa un avanzado controlador PID con acción integral. Este controlador puede recibir consignas de velocidad y posición, utilizando esta información para determinar el torque requerido y lograr un control preciso de las acciones del sistema.

El diseño del controlador se realiza mediante el método de sintonía serie, utilizando una acción integral para el PID con parámetros $n = 2, 5$ y $\omega = 800$ rad/s, y considerando los valores nominales de inercia (J_l) y amortiguamiento (b_l) a temperatura ambiente.

Una decisión clave en la configuración del controlador es la elección de las variables de entrada. En este caso, se opta por utilizar solo la velocidad angular del motor como entrada, evitando acciones derivativas para evitar errores numéricos y lograr un control más estable. La integración de la consigna de velocidad en lugar de derivar la consigna de posición evita inestabilidades y asegura que los errores de posición y velocidad sean consistentes al estar relacionados.

El controlador PID con acción integral utiliza tres ramas principales: proporcional, derivativa e integral. En la rama proporcional, se toma como error la diferencia entre la consigna de posición y la posición actual. En la rama derivativa, el error es la diferencia entre la consigna de velocidad y la velocidad actual. La rama integral calcula la integral del error de posición, lo que garantiza la consistencia entre los errores de ambas magnitudes y evita generar trayectorias independientes, mejorando la estabilidad del sistema.

El controlador de movimiento se muestra en la siguiente figura:

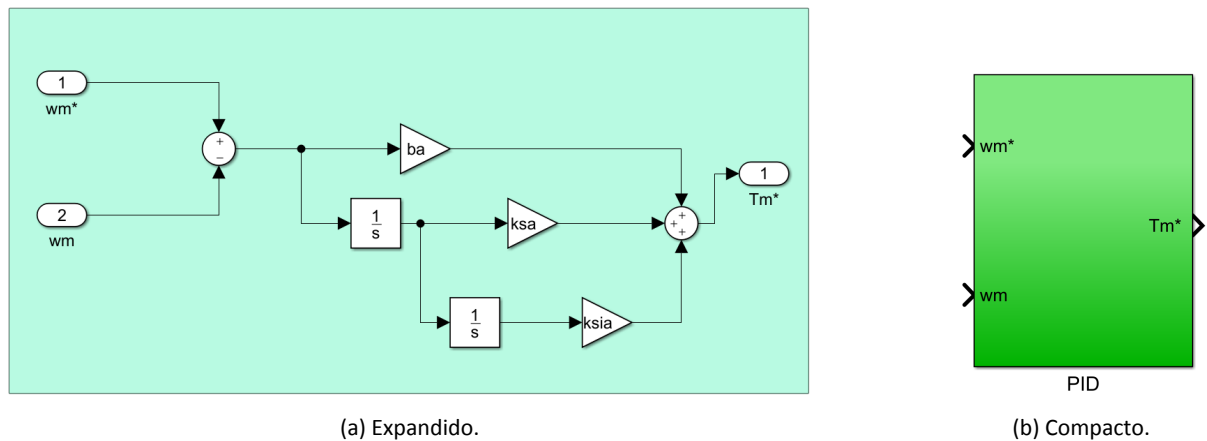


Figura 46: Diagrama de bloques del PID.

La salida del controlador será el torque consigna que ingresará al modulador de torque. Modelando en el dominio de Laplace se tiene:

$$T_m^{*'}(s) = e_\omega(s) \cdot b_a + e_\theta(s) \cdot K_{sa} + e_\theta(s) \cdot K_{sai} \cdot \frac{1}{s} \quad (70)$$

Donde:

$$e_\theta(s) = \Theta_m^*(s) - \Theta_m(s) \quad (71)$$

$$e_\omega(s) = e_\theta(s) \cdot s \quad (72)$$

La relación entre el torque y la variación de velocidad del motor en el modelo del subsistema mecánico, teniendo en cuenta el desacople de fricción realizado anteriormente, es:

$$J_{eq} \cdot \dot{\omega}(t) = T_m^*(t) - \frac{T_l(t)}{r} \quad (73)$$

Aplicando la transformada de Laplace:

$$J_{eq} \cdot s^2 \cdot \Theta_m(s) = T_m^*(s) - \frac{T_l(s)}{r} \quad (74)$$

Reemplazando esta ecuación en la ecuación del controlador (70):

$$J_{eq} \cdot s^3 \cdot \Theta_m(s) = [s^2 \cdot b_a + s \cdot K_{sa} + K_{sai}] \cdot [\Theta_m^*(s) - \Theta_m(s)] - s \cdot \frac{T_l(s)}{r} \quad (75)$$

Despejando, la posición del retor queda expresada como:

$$\Theta_m(s) = \frac{s^2 \cdot b_a + s \cdot K_{sa} + K_{sai}}{s^3 \cdot J_{eq} + s^2 \cdot b_a + s \cdot K_{sa} + K_{sai}} \cdot \Theta_m^*(s) - \frac{s}{s^3 \cdot J_{eq} + s^2 \cdot b_a + s \cdot K_{sa} + K_{sai}} \cdot \frac{T_l(s)}{r} \quad (76)$$

A partir de esta ecuación podemos obtener las funciones de transferencia del controlador:

$$G_1(s) = \frac{\Theta_m(s)}{\Theta_m^*(s)} = \frac{s^2 \cdot b_a + s \cdot K_{sa} + K_{sai}}{s^3 \cdot J_{eq} + s^2 \cdot b_a + s \cdot K_{sa} + K_{sai}} \quad (77)$$

$$G_2(s) = \frac{\Theta_m(s)}{\frac{T_l(s)}{r}} = -\frac{s}{s^3 \cdot J_{eq} + s^2 \cdot b_a + s \cdot K_{sa} + K_{sai}} \quad (78)$$

En régimen estacionario para una entrada escalón unitario observamos:

- $K_{sai} \neq 0 \rightarrow G_1(s) = 1$ y $G_2(s) = 0$
- $K_{sai} = 0 \rightarrow G_2(s) = 1$ y $G_1(s) = \frac{1}{K_{sa}}$

Los resultados muestran que la función de transferencia correspondiente a la entrada de perturbación tiene un cero en el origen, lo que implica que el error de estado estacionario es nulo. Sin embargo, si la acción integral es nula, se producirá un error dado por $1/K_{sa}$.

Por otro lado, la función de transferencia correspondiente a la entrada de referencia presenta ganancia unitaria a baja frecuencia, lo que garantiza que el error de estado estacionario, según el teorema del valor final, sea nulo. En consecuencia, podemos concluir que este controlador no tiene error de régimen permanente ante entradas del tipo escalón.

Para determinar las ganancias del controlador, aplicamos el método de sintonía en serie con $n = 2, 5$ y $\omega_{pos} = 800$ rad/s. Dado que el polinomio característico del sistema se encuentra en forma normalizada:

$$P(s) = s^3 + \frac{b_a}{J_{eq}} \cdot s^2 + \frac{K_{sa}}{J_{eq}} \cdot s + \frac{K_{sai}}{J_{eq}} \quad (79)$$

Podemos llegar a las siguientes expresiones:

$$n \cdot \omega_{pos} = \frac{b_a}{J_{eq}}; \quad n \cdot \omega_{pos}^2 = \frac{K_{sa}}{J_{eq}}; \quad n \cdot \omega_{pos}^3 = \frac{K_{sai}}{J_{eq}}$$

Dados los valores nominales de J_{eq} y b_l , se obtiene $J_{eq} = 5,6510 \cdot 10^6$, entonces:

$$\begin{aligned} b_a &= J_{eq} \cdot n \cdot \omega_{pos} = 0,0113 \frac{N \cdot m}{rad/s} \\ K_{sa} &= J_{eq} \cdot n \cdot \omega_{pos}^2 = 9,0416 \frac{N \cdot m}{rad} \\ K_{sai} &= J_{eq} \cdot n \cdot \omega_{pos}^3 = 2893 \frac{N \cdot m}{rad \cdot s} \end{aligned}$$

Con estos valores podemos determinar los polos del sistema a lazo cerrado. Sabiendo que la distancia de los polos al origen es la misma para los 3 polos.

- Para valores nominales de J_l y b_l :

$$s_1 = -800 \frac{rad}{s} \quad s_{2,3} = -600 \pm 529,15 j \frac{rad}{s}$$

- Para valores máximos de J_l y b_l :

$$s_1 = -613,75 \frac{\text{rad}}{s}$$

$$s_{2,3} = -508,98 \pm 649,26j \frac{\text{rad}}{s}$$

- Para valores mínimos de J_l y b_l :

$$s_1 = -1498,5 \frac{\text{rad}}{s}$$

$$s_{2,3} = -542,3 \pm 383,7j \frac{\text{rad}}{s}$$

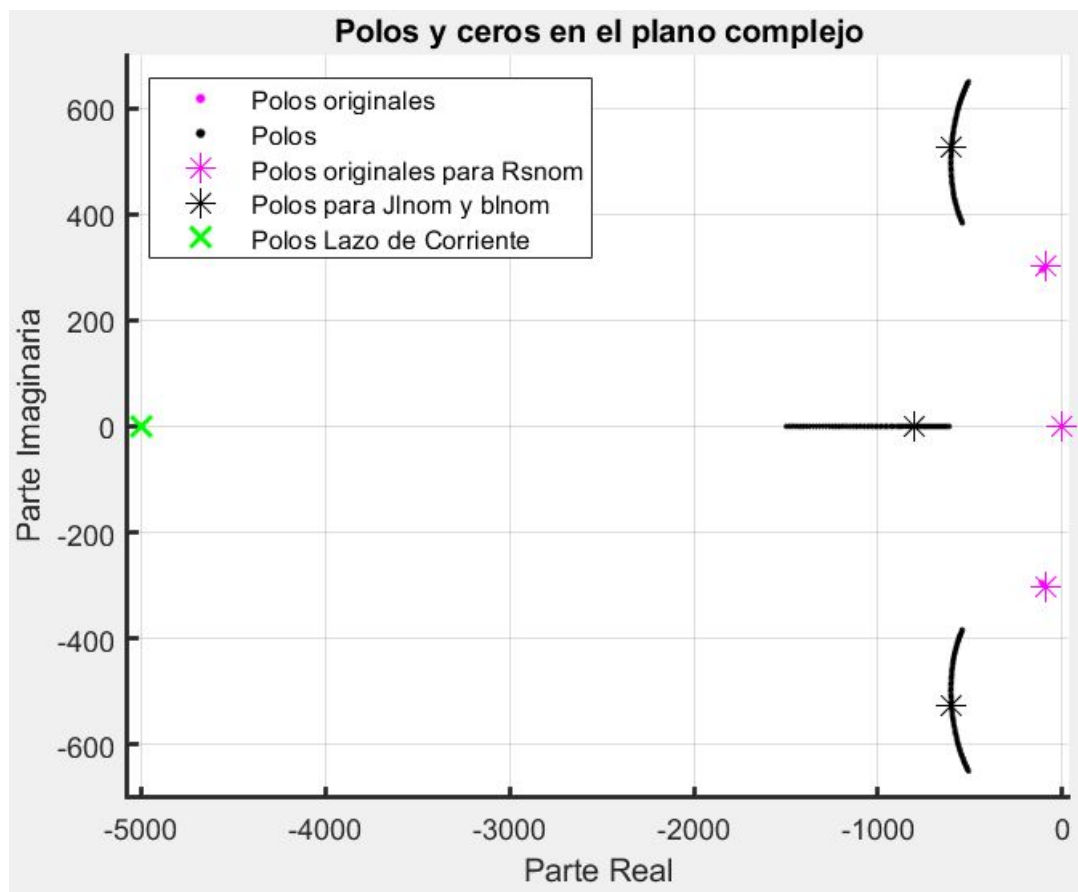
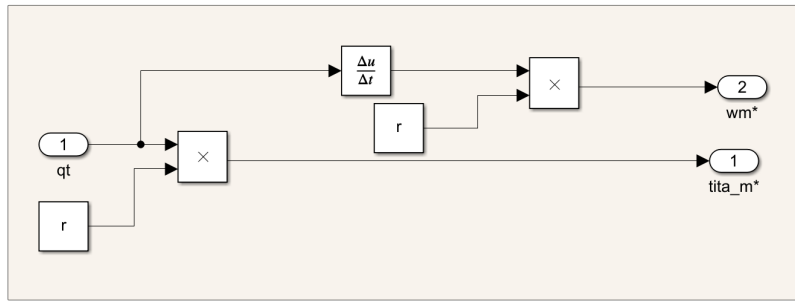


Figura 47: Diagrama de polos del sistema.

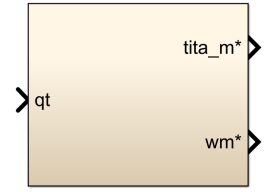
3.2.1. Entrada de referencia o set-point

Por último, se incluye la opción de ingresar el control de posición mediante una referencia o punto de ajuste de posición de las coordenadas articulares del brazo del robot SCARA. Esto resulta conveniente, ya que en muchas ocasiones es más sencillo utilizar los algoritmos de Cinemática del robot para controlar el brazo, utilizando sus coordenadas articulares. De forma que:

$$q_1^* = \frac{\theta_m^*(t)}{r} \quad (80)$$



(a) Expandido.



SET POINT

(b) Compacto.

Figura 48: Diagrama de bloques del Set-Point.

3.3. Observador de Estado de orden reducido

El observador de estado es un sistema esencial en la automatización y el control que tiene la capacidad de estimar el estado interno de un sistema dinámico a partir de las mediciones de las entradas y las salidas. Este observador se vuelve especialmente relevante en casos en los que ciertos estados del sistema no pueden ser medidos directamente, como en nuestro caso, la velocidad angular del motor $\omega_m(t)$.

Para la configuración de nuestro sistema, hemos implementado un observador de estado reducido. Esta decisión surge de las limitaciones de los sensores disponibles. En particular, no contamos con un sensor de velocidad para medir directamente la velocidad angular del motor, sino que solo disponemos de un encoder que mide la posición del eje.

De acuerdo con el criterio de observabilidad de Kalman, nuestro sistema LTI resultó ser completamente observable desde la posición $\theta_m(t)$, pero no desde la velocidad $\omega_m(t)$. Sin embargo, con el encoder disponible, podemos estimar la velocidad a partir de la medición de la posición del eje. Esta estimación se realiza en tiempo real y nos permite aplicar una acción de control adecuada para realimentar el sistema.

Además, es importante tener en cuenta que en nuestro observador solo se incorpora el subsistema mecánico, puesto que contamos con sensores de corriente con su realimentación física de efectos viscosos desacoplada. Esto se debe a que nos interesa específicamente la velocidad angular del motor $\omega_m(t)$. La entrada del observador es la consigna de torque τ , obtenida a la salida del controlador de movimiento PID. Suponemos que el modulador de torque tiene un ancho de banda grande y una ganancia unitaria.

El modelo del subsistema mecánico se puede expresar como:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A \cdot x(t) + B_c \cdot u(t) + B_d \cdot d(t); & x(t_0) = x_0 \\ y(t) = C \cdot x(t) \end{cases} \quad (81)$$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J_{eq}} \end{bmatrix} \cdot T_m(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{J_{eq} \cdot r} \end{bmatrix} \cdot T_l(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot x(t) \end{cases} \quad (82)$$

El observador de estado de Luenberger crea un modelo estimado del sistema original que reproduce su comportamiento a partir de las variables de entrada y salida medibles. Luego, utiliza este modelo estimado junto con una corrección proporcional al error de salida para estimar el estado interno del sistema en tiempo real. Aplicándolo al sistema anterior, se obtiene:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \hat{A} \cdot \hat{x}(t) + \hat{B} \cdot u(t) + K_e \cdot (y(t) - \hat{y}(t)); & \hat{x}(t_0) = 0 \\ \hat{y}(t) = \hat{C} \cdot \hat{x}(t) \end{cases} \quad (83)$$

Donde la matriz K_e contiene los parámetros de ajuste del observador

$$K_e = [k_{e\theta} \quad k_{e\omega}] \quad (84)$$

Con el error de estimación definido como:

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t) \quad (85)$$

Asumiendo un funcionamiento ideal, las matrices de ambos sistemas real coinciden con las matrices del modelo del observador. Trabajando el sistema y reemplazando en la ecuación (85) se obtiene la dinámica del error:

$$\dot{e}(t) = [A - K_e.C].e(t) + B.d(t) \quad (86)$$

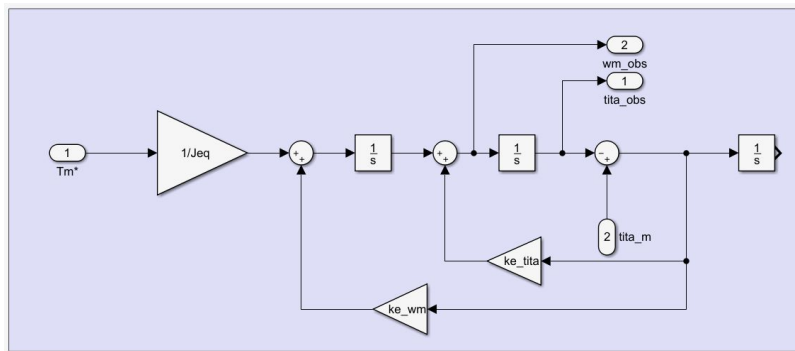
Considerando que no hay perturbaciones $d(t) = 0$, se pueden obtener los parámetros de ajuste del observador mediante el polinomio característico del sistema dado por los autovalores de la matriz $A' = [A - K_e.C]$:

$$|s.I - A'| = \begin{bmatrix} s + k_{e\theta} & -1 \\ k_{e\omega} & s \end{bmatrix} = s^2 + k_{e\theta}.s + k_{e\omega} \quad (87)$$

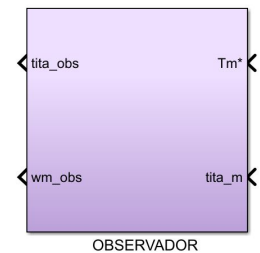
Resolviendo el polinomio y sabiendo que los polos son $p_{1,2} = -3200 \text{ rad/s}$, obtengo:

$$K_{e\theta} = 6400 \text{ rad/s}$$

$$K_{e\omega} = 10,24.10^6 \text{ rad/s}$$



(a) Expandido.



(b) Compacto.

Figura 49: Diagrama de bloques del observador de estado reducido.

3.4. Simulación en tiempo continuo con modelo completo NL

3.4.1. Seguimiento de consignas de movimiento

La posición deseada de la articulación, $q_1^*(t)$, se define como una función de tiempo que depende de la variable $m(t)/r$, donde r es una constante. Para generar el perfil de movimiento, utilizamos un perfil trapezoidal en el que tanto la rampa de ascenso como la de descenso se producen en un intervalo de tiempo de 5 segundos. Durante este tiempo, la posición deseada de $q_1(t)$ alcanza un valor de 2π radianes entre las dos rampas.

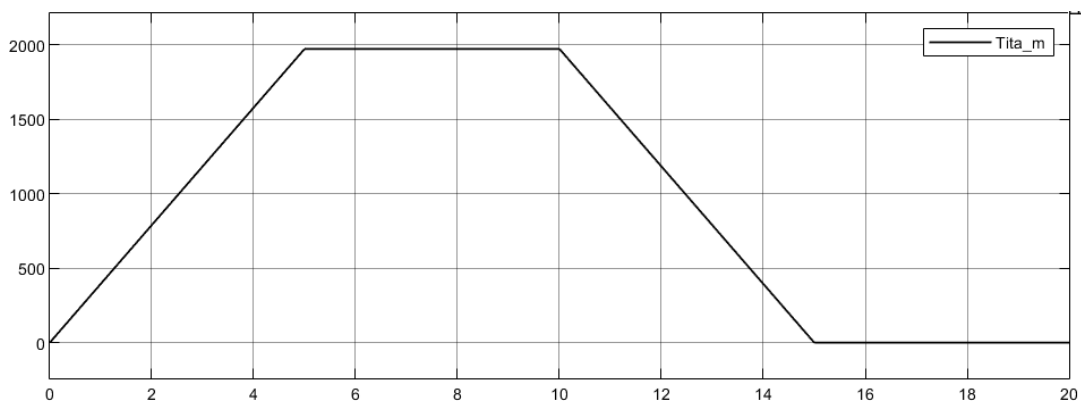


Figura 50: Consigna de posición.

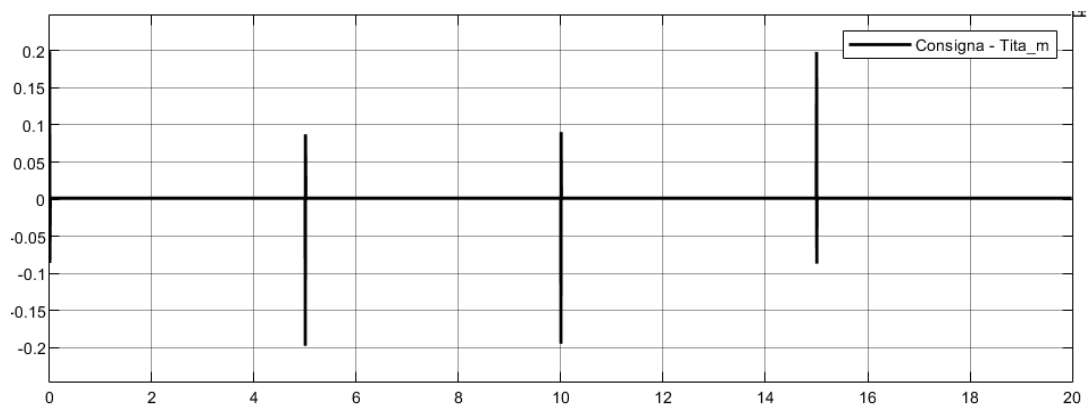


Figura 51: Error entre la consigna y el valor real.

Este modelo de perfil trapezoidal para la posición articular conduce a consignas de velocidad que se manifiestan como escalones, los cuales no son factibles de seguir fielmente en la realidad debido a la necesidad de aceleraciones infinitas.

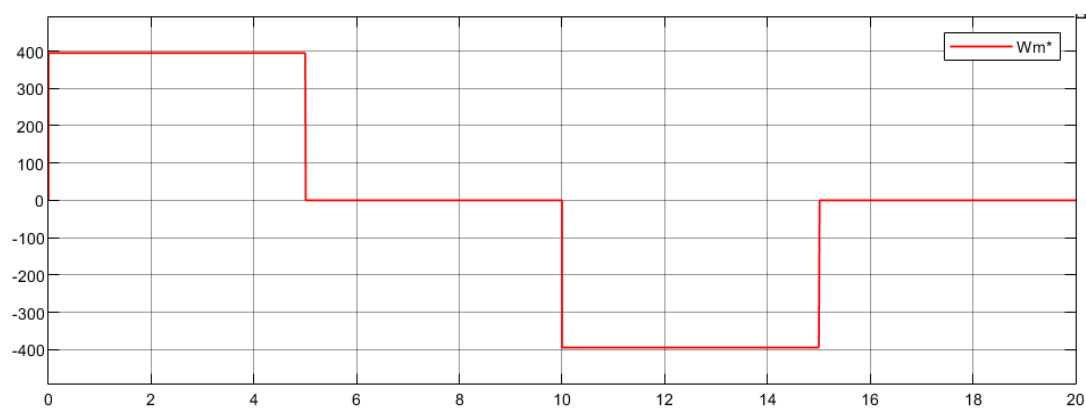


Figura 52: Consigna de la velocidad angular.

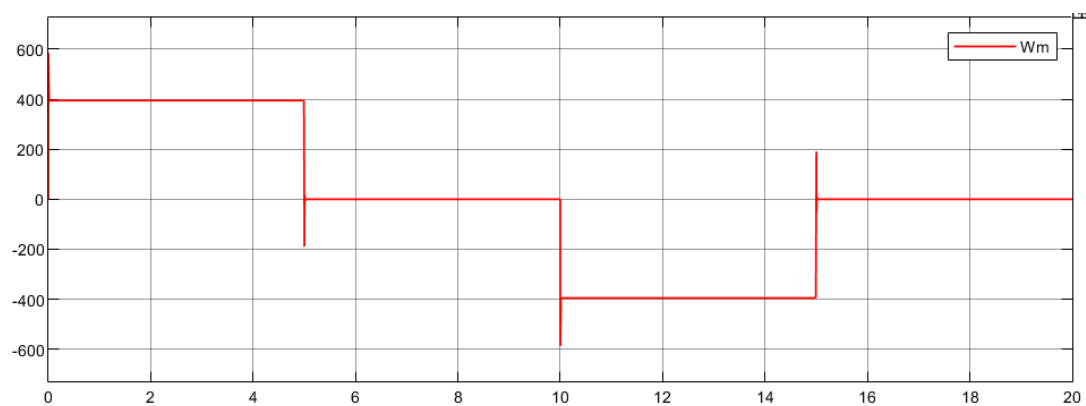


Figura 53: Evolución de la velocidad angular en el tiempo.

A continuación se muestran las corrientes en coordenada "abc".

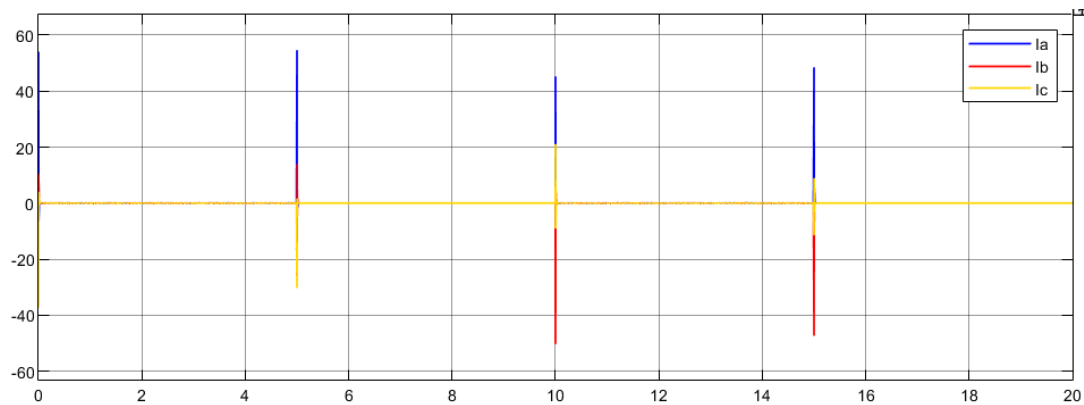


Figura 54: Corrientes en coordenadas abc .

Se detectan anomalías transitorias al inicio de cada cambio de velocidad, generando grandes aceleraciones en el sistema que, según la segunda ley de Newton, producen elevadas demandas de par motor durante estos periodos transitorios. Tales demandas de par motor, a su vez, generan picos de corriente y tensión, lo que implica la necesidad de garantizar que no se sobrepasen los límites permitidos. A pesar de estas limitaciones físicas, el seguimiento de la consigna se logra de manera óptima en los estados estables.

Por otro lado, el input del sistema es un perfil de posición $q^*(t)$ de la articulación del hombro del robot, que se convierte en una referencia de posición para el eje del motor $\theta^*(t)$ mediante la relación de reducción r . Se establece una revolución completa para la articulación, es decir, que va y regresa, con rampas de 5 segundos. Sin embargo, este perfil se establece para un modulador de tensión ideal y sin límites, resultando en valores de tensión y corriente que exceden los máximos nominales. Esto plantea la necesidad de realizar modificaciones para evitar la exigencia de perfiles cuadrados de velocidad y grandes impulsos de aceleración que sólo pueden alcanzarse mediante la aplicación de altas tensiones, par motor y corriente.

3.4.2. Rechazo a perturbaciones

Perturbación (cambio en escalón): considerando valores nominales (0 N.m) y variación máximos de los parámetros de carga mecánica física ($\pm 6, 28 \text{ N.m}$). Para ver como afecta esta perturbación al sistema, aplicamos como consigna de posición un valor constante igual a 0.

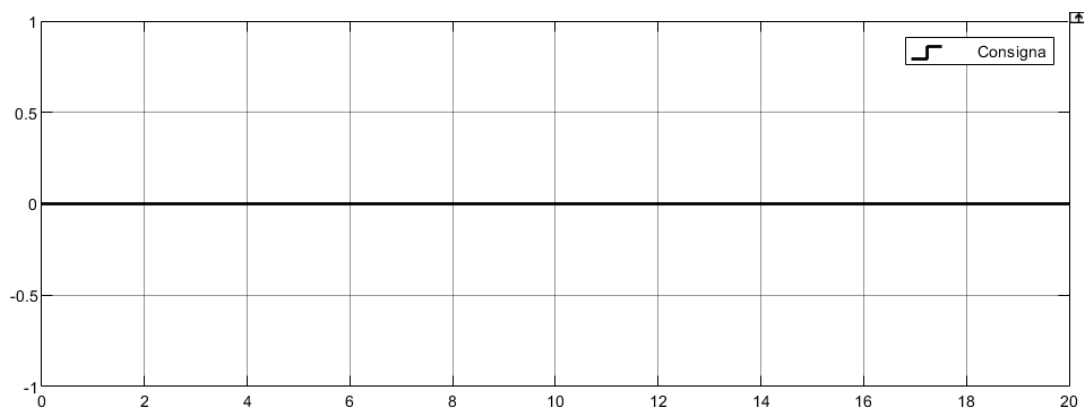


Figura 55: Consigna de posición.

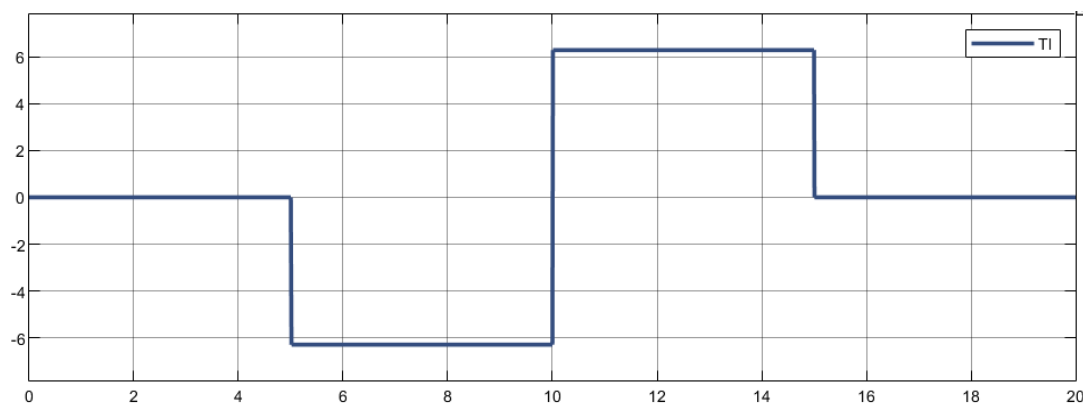


Figura 56: Perturbación de la carga.

Cuando se consideran cargas de trabajo nominales, el seguimiento de la referencia de posición parece ser idéntico al análisis previo; no se distinguen variaciones significativas a primera vista. Sin embargo, al examinar más de cerca el desfase entre la posición real y la estimada, se identifica un error de estado estacionario. Este error oscila entre valores positivos y negativos en respuesta al cambio de signo en la perturbación. Este error es atribuible al hecho de que el observador de estado propuesto opera solo en un modo PD (Proporcional-Derivativo), y no puede corregir este error de baja frecuencia, sugiriendo la necesidad de mejoras en el observador.

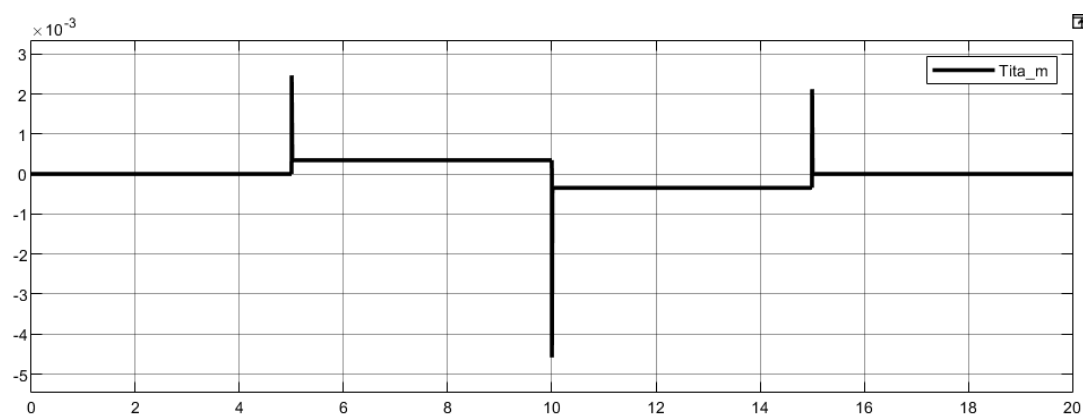


Figura 57: Valores reales de la posición.

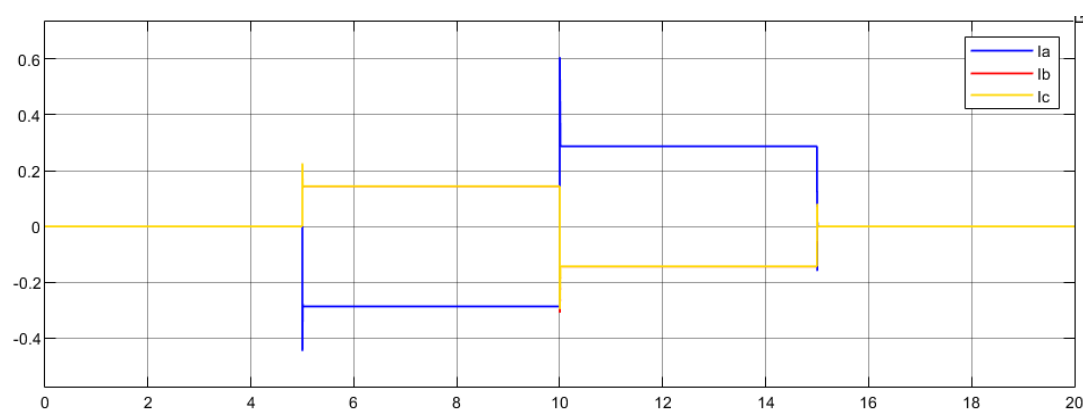


Figura 58: Evolución de las corrientes en coordenadas abc .

3.5. Verificación de desempeño y/o mejoras

3.5.1. Especificaciones de operación (valores límites)

	Especificación de Operación		Valores obtenidos en simulación	
	Régimen continuo	Valor máximo	Régimen continuo	Valor máximo
Torque motor [N.m]	0.023	0.090	0.009	3.7
Velocidad angular [rad/s]	691.15		394.9	
Corriente en el estator [A]	0.4	2	0.080	50
Tensión en el estator [V]	24		18.3	

Cuadro 3: Especificaciones de operación y valores obtenidos en simulación.

Como se puede observar en la tabla anterior, tanto el torque como la corriente del estator superan los valores admisibles. La causa principal de que estos valores excedan los valores nominales es que los puntos de inflexión en la consigna generan picos extremadamente altos.

Una estrategia eficaz para mitigar este problema consiste en suavizar la consigna. Esto se puede lograr aplicando un filtro en su entrada. Sin embargo, en nuestro caso específico, decidimos focalizar nuestros esfuerzos en la manipulación del perfil de la velocidad angular. Al suprimir los cambios bruscos o líneas verticales, conseguimos erradicar los picos que se producen en los puntos de inflexión del perfil de posición. Este enfoque nos permite gestionar y controlar mejor las variaciones abruptas, resultando en un rendimiento general más estable y predecible.

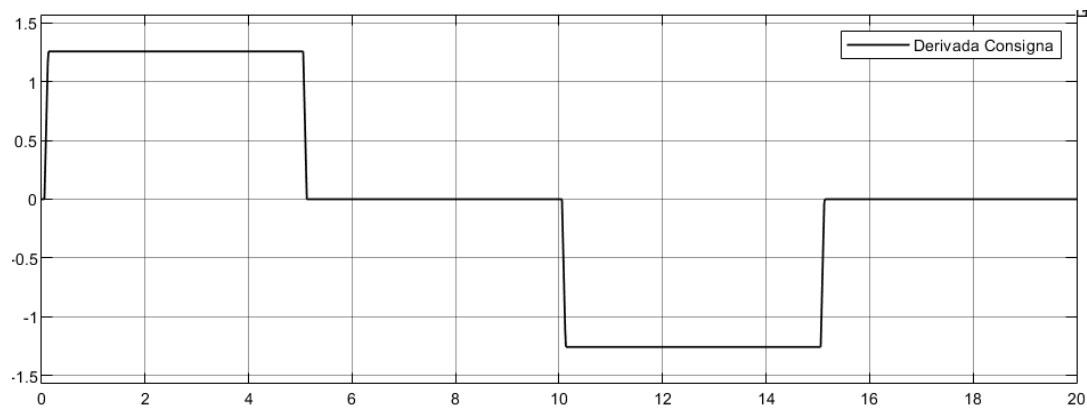


Figura 59: Derivada de la consigna suavizada.

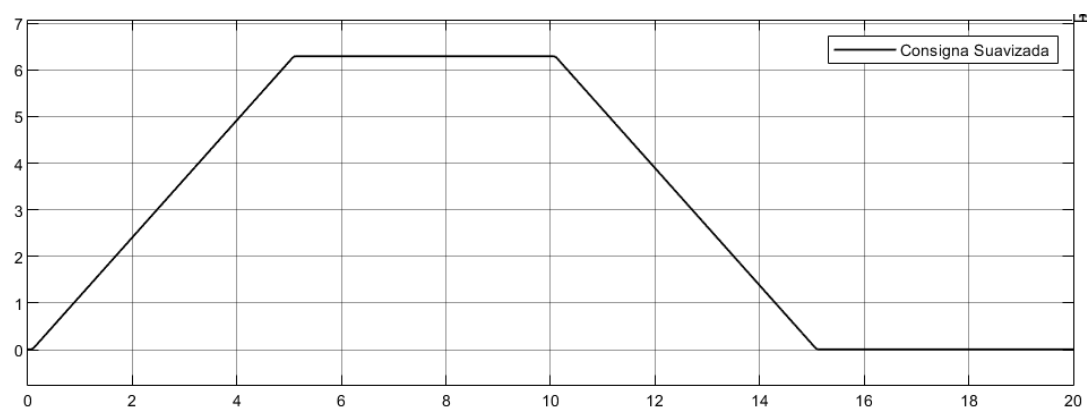


Figura 60: Consigna suavizada.

Al aplicar este cambio hacemos que el sistema no sobrepase los valores pico de las especificaciones que eran los que no respondían de forma satisfactoria. Esto se puede ver en las siguientes imágenes:

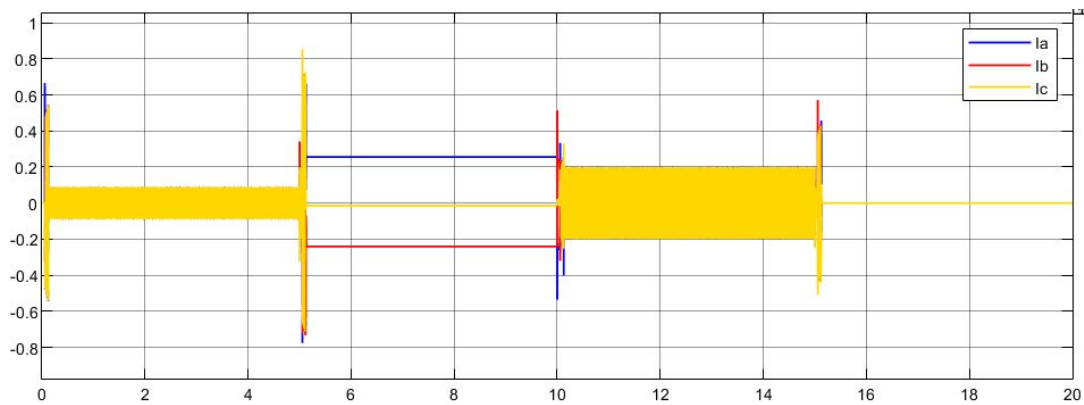


Figura 61: Corriente en coordenadas *abc* suavizada.

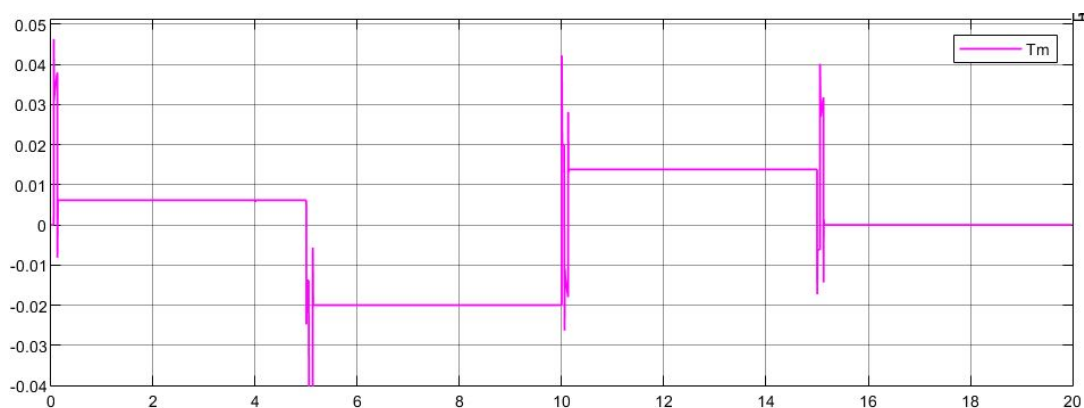


Figura 62: Torque electromagnético suavizada.

Donde los valores de operación corregidos son:

	Valores corregidos	
	Régimen continuo	Valor máximo
Torque motor [N.m]	-0.02	-0.06
Velocidad angular [rad/s]	394	
Corriente en el estator [A]	0.2	0.85
Tensión en el estator [V]	18.4	

Cuadro 4: Valores corregidos obtenidos en simulación.

3.5.2. Observador

En las simulaciones que hemos realizado, se puede observar un error de estado estacionario no nulo ante perturbaciones de carga. Este error surge debido a que el observador de estado no está realimentando la entrada de perturbación. Aunque podría ser tentador tratar de corregir esto mediante la realimentación del par de carga, esto podría implicar la adición de sensores costosos y potencialmente imprecisos, lo que mantendría el error.

En lugar de esto, proponemos una solución a través de la adición de una acción integral al observador de estado, un enfoque que aborda el problema a través de software sin requerir hardware adicional. Esto implica la introducción de un nuevo estado en nuestro observador que tiene en cuenta el tiempo que permanece la estimación del estado en un valor erróneo. Este nuevo estado es una integración del error entre la variable medida y su estimación, y se define como:

$$z(t) = \int (\theta(t) - \hat{\theta}(t)) dt \quad (88)$$

Ahora, el modelo del observador se redefine para incluir este estado integral y la entrada del observador también se ajusta para incluir este nuevo estado:

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{\theta}}(t) &= K_e \theta \left(\theta(t) - \tilde{\theta}(t) \right) + \tilde{\omega}(t) \\ \dot{\tilde{\omega}}(t) &= K_{e\omega} \left(\theta(t) - \tilde{\theta}(t) \right) + T_m \dot{i}(t) J_{eq} + z(t) \\ \dot{\tilde{z}}(t) &= K_{ei} \left(\theta(t) - \tilde{\theta}(t) \right)\end{aligned}$$

Para sintonizar las ganancias del observador, determinamos la ecuación característica del observador y la comparamos con la de un sistema con características deseadas. Para este propósito, asumimos que queremos que todos los polos del observador estén ubicados en -3200 rad/s. Esto nos da los valores de las ganancias del observador:

$$\begin{aligned}K_{e\theta} &= 9.6 \times 10^3 \text{ rad/s} \\ K_{e\omega} &= 3.072 \times 10^7 \text{ rad/s}^2 \\ K_{ei} &= 3.2768 \times 10^{10} \text{ rad/s}^3\end{aligned}$$

El nuevo observador de estado se representa en el siguiente diagrama de bloques:

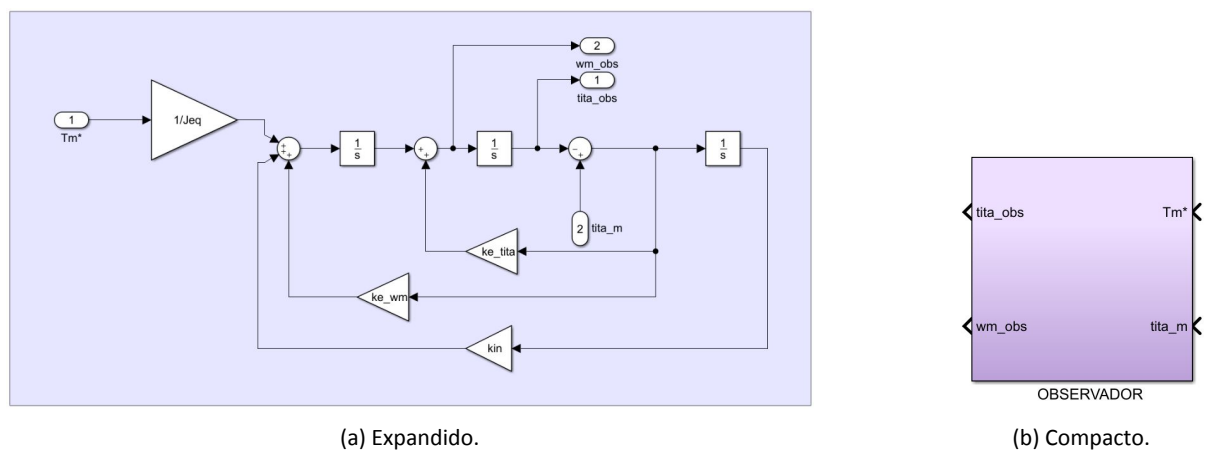


Figura 63: Diagrama de bloques del observador de estado mejorado.

Estas ganancias aseguran que el error de estado estacionario converja asintóticamente a cero, incluso ante perturbaciones de carga. Así, la adición de la acción integral en el observador ha resuelto el problema sin la necesidad de hardware adicional.

Para determinar esto ponemos a prueba el sistema con una perturbación de carga de la sección 3.4.2. Los resultados son los siguientes:

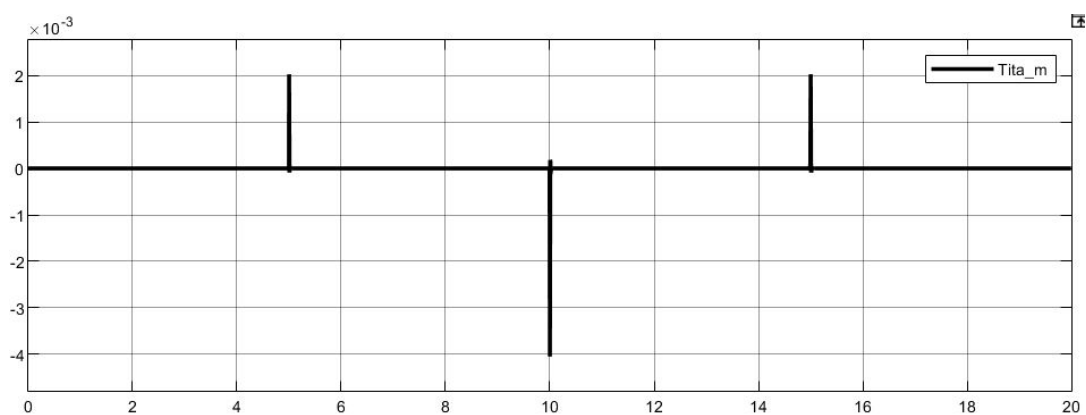


Figura 64: Valor real de la posición angular.

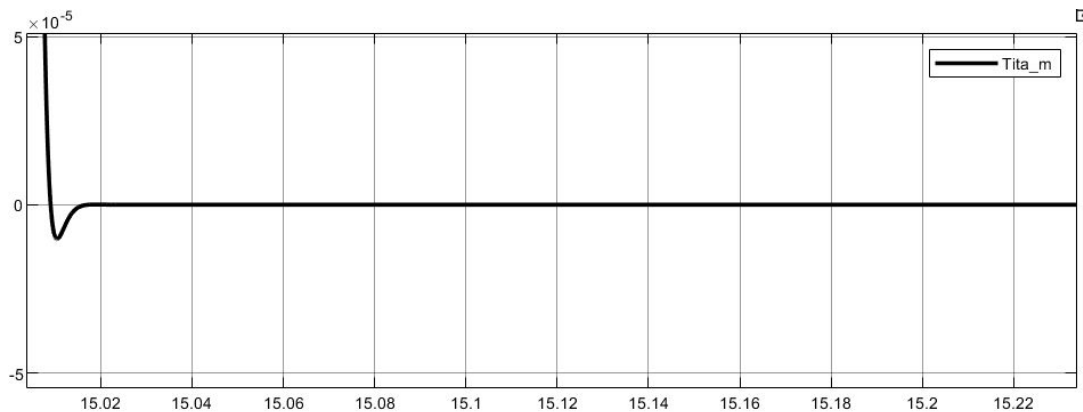


Figura 65: Acercamiento del valor real de la posición angular.

Vemos como el valor de tita real es igual a 0 luego de un transitorio debido a la perturbación. Esto además se puede corroborar en la siguiente imagen que representa el error entre la consigna y el valor real de la posición angular:

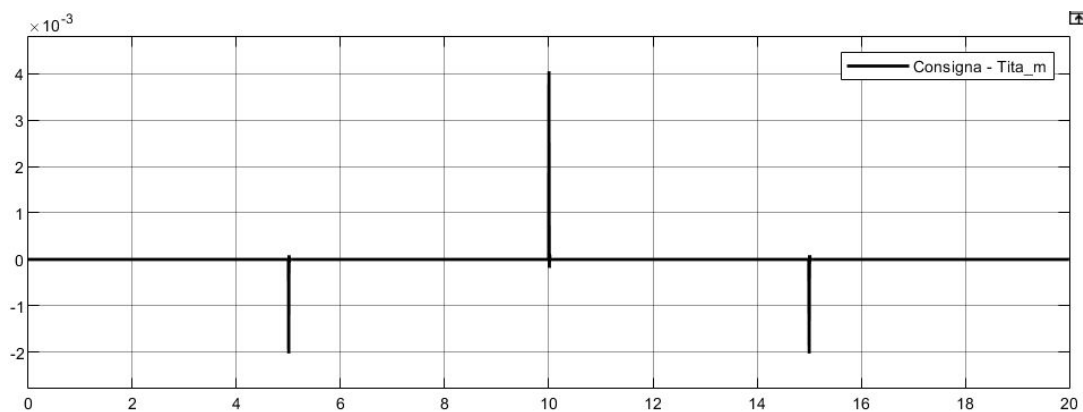


Figura 66: Error entre el valor real y la consigna.

3.5.3. Comportamiento térmico del motor

Procedemos a verificar la temperatura del bobinado cuando la consigna involucra una operación continua repetitiva. A partir de la consigna trapezoidal inicial repetida dentro de un lapso de 300 segundos obtenemos la siguiente figura:

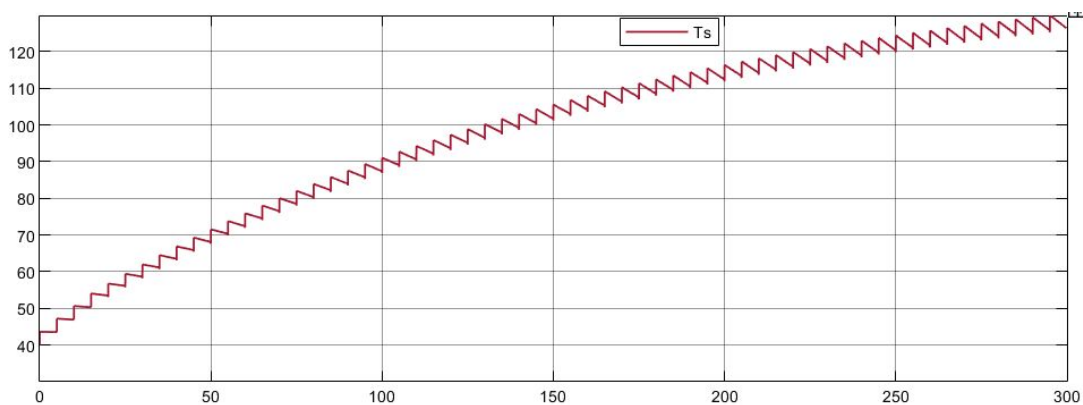


Figura 67: Temperatura sin suavizado

Vemos que cuando la consigna es la original, el sistema sobrepasa los límites de temperatura, lo que podría producir una degradación de los componentes. Además notamos que esta se vuelve asintótica.

Pasamos a probar con la consigna suavizada repetida continuamente durante el mismo periodo de tiempo.

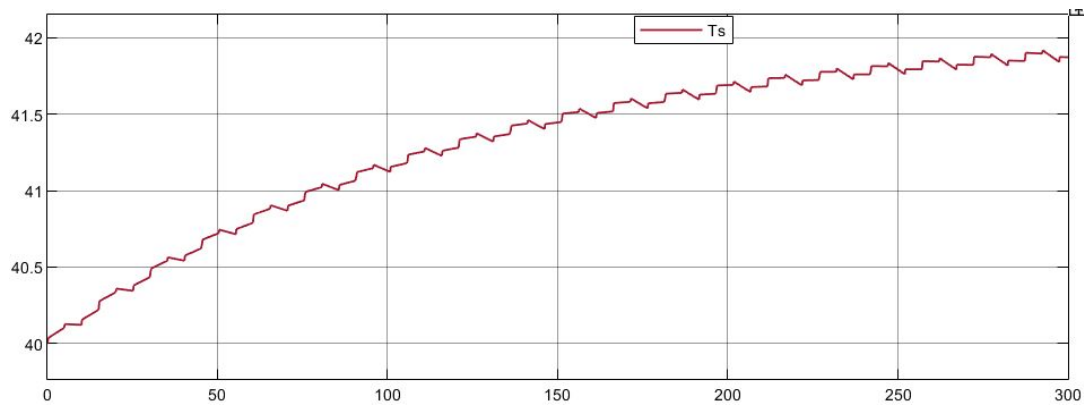


Figura 68: Temperatura con suavizado

Finalmente, probamos la consigna suavizada junto con una perturbación de carga:

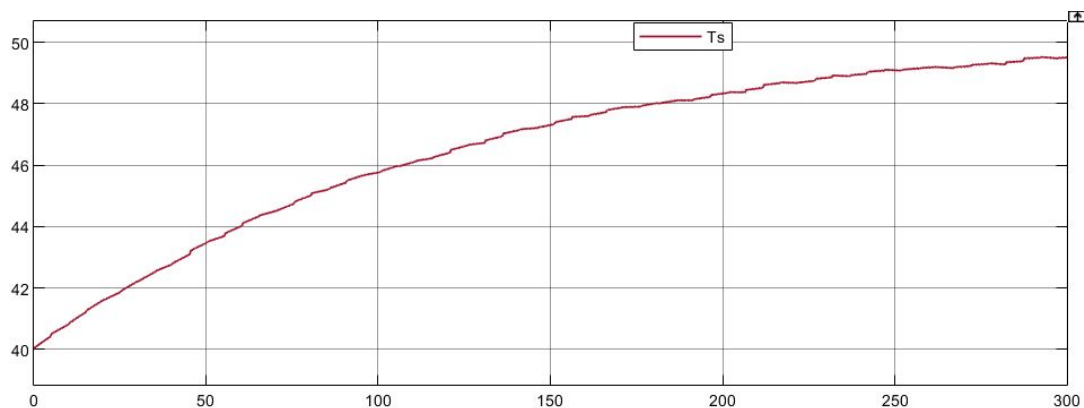


Figura 69: Temperatura con suavizado y perturbación

En este caso, al igual que en el anterior, la respuesta en temperatura se vuelve asintótica pero a valores dentro de los límites permitidos.

3.5.4. Desempeño del sistema ante una respuesta no ideal de los sensores

En este segmento, se estudian los efectos de las respuestas no ideales (banda limitada) de los sensores que miden las corrientes, la posición angular del motor, y la temperatura. Se siguen las siguientes especificaciones:

- Sensor de corriente: modelo pasa bajo (LP) en el espacio de estados (SS) de 2° orden, con una frecuencia natural de 6000 rad/s y un factor de amortiguamiento (ξ) de 1.
- Sensor de posición angular: modelo LP en SS de 2° orden, con una frecuencia natural de 2000 rad/s y un factor de amortiguamiento de 1.
- Sensor de temperatura: modelo LP en SS de 1° orden, con una constante de tiempo (τ) de 20 s .

Para los filtros de segundo orden, se usa la función de transferencia:

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\omega_n\zeta s + \omega_n^2} \quad (89)$$

Donde se puede demostrar que la función de transferencia de un modelo en el espacio de estados se calcula con la ecuación:

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D \quad (90)$$

Si se toma como matriz de estados A :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ \omega_n^2 & -2\omega_n\zeta \end{bmatrix}$$

Entonces, igualando las ecuaciones, las matrices del modelo en el espacio de estados deben ser:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ \omega_n^2 & -2\omega_n\zeta \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, los sensores de corriente y posición angular quedan definidos por:

Para el sensor de corriente:

$$A_{iac} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 36 \times 10^6 & -12000 \end{bmatrix}, \quad B_{iac} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C_{iac} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D_{iac} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

Para el sensor de posición:

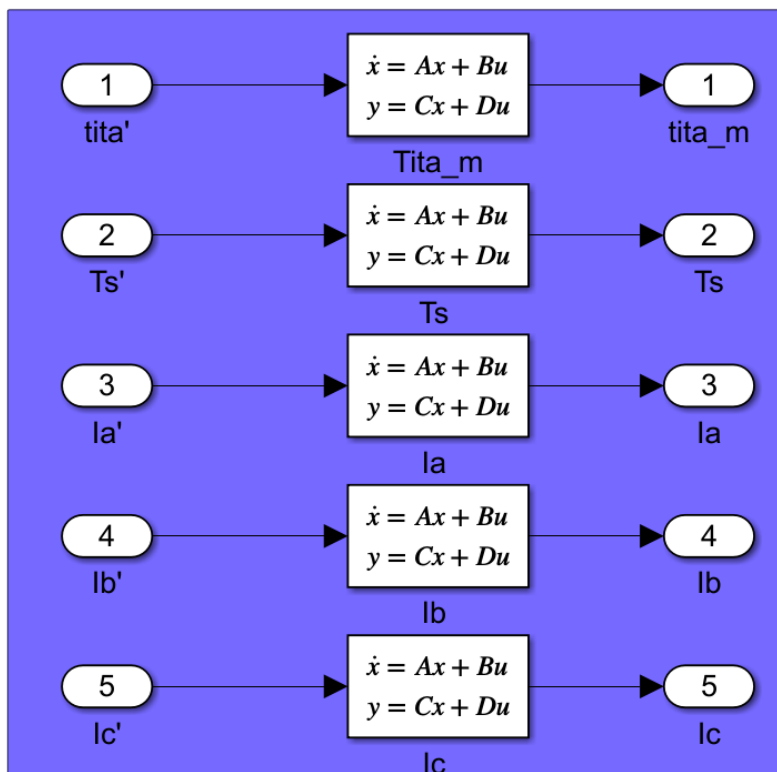
$$A_{pos} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 4 \times 10^6 & -4000 \end{bmatrix}, \quad B_{pos} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C_{pos} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D_{pos} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

Para el filtro de primer orden, la función de transferencia es:

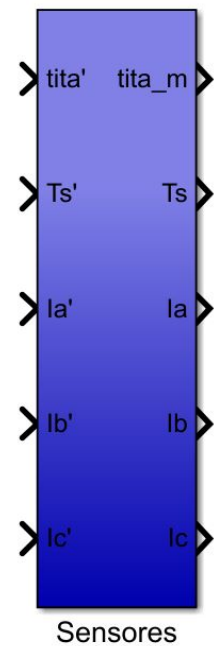
$$G(s) = \frac{1}{1 + \tau s} \quad (91)$$

De donde se puede deducir que para el sensor de temperatura:

$$A_T = \begin{bmatrix} -0.05 \end{bmatrix}, \quad B_T = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}, \quad C_T = \begin{bmatrix} 0.05 \end{bmatrix}, \quad D_T = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$



(a) Expandido.



Sensores

(b) Compacto.

Figura 70: Diagrama de bloque de sensores no ideales.

Procedemos a hacer estudios para los distintos tipos de sensores no ideales con la consigna trapezoidal simple y con la perturbación de carga ya estudiada anteriormente.

●Caso 1

Comenzamos colocando el sensor no ideal solo para la posición angular.

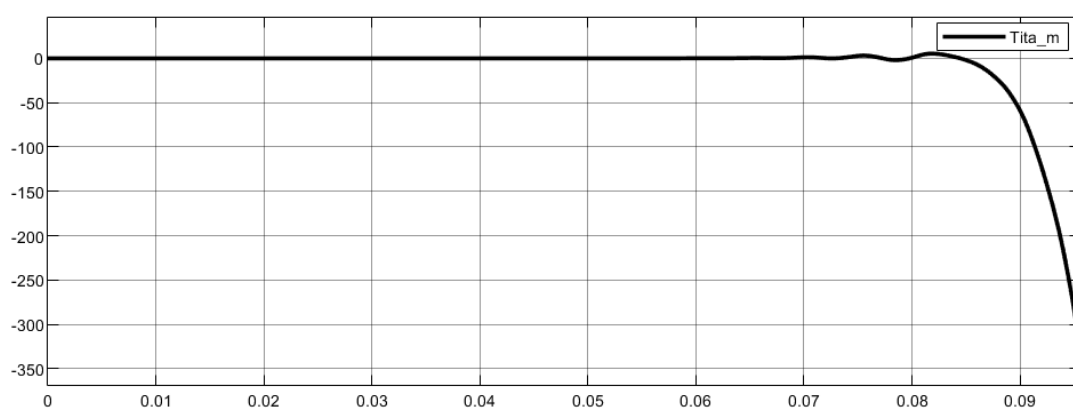


Figura 71: Respuesta de posición angular con sensor posición no ideal.

La respuesta del sistema presenta degradación de desempeño con respecto a la consigna. Esto provoca que el controlador tenga que implementar ajustes considerables, que se aprecian en las corrientes generadas para enmendar el error presente. Posteriormente, el sistema comienza a oscilar y finalmente se vuelve inestable y diverge por completo, volviendo imposible la simulación.

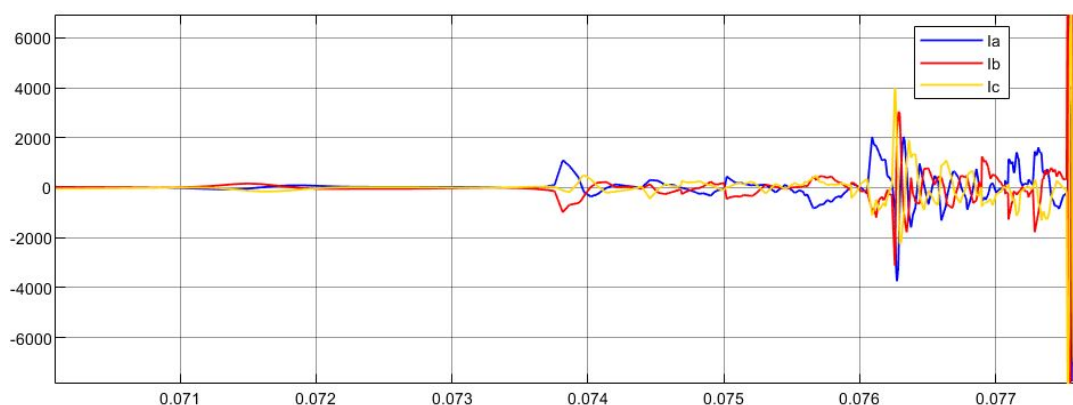


Figura 72: Respuesta de la corriente en coordenadas abc con sensor no ideal.

●Caso 2

Para la siguiente prueba solo probamos con el sensor de temperatura no ideal.

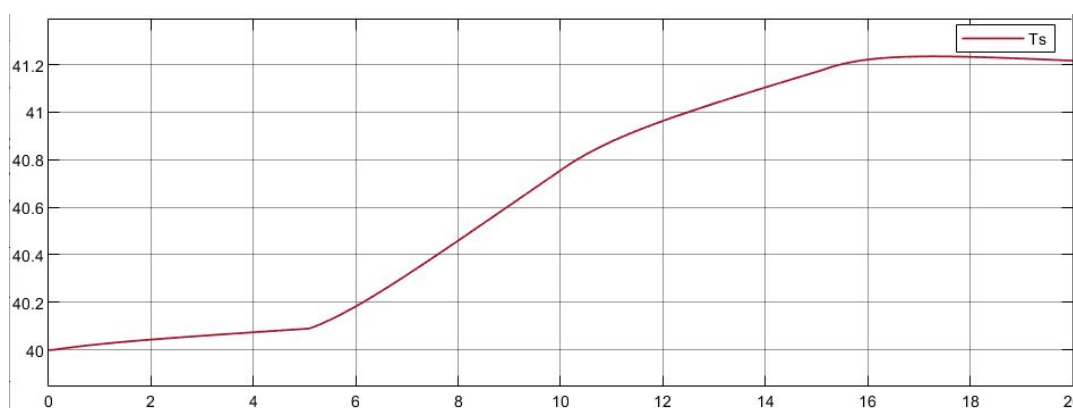


Figura 73: Respuesta de la temperatura con sensor de temperatura no ideal.

Aquí no percibimos ninguna degradación del sistema debido a que la realimentación de la temperatura influye muy poco en el sistema, como ya se mencionó antes en este informe. Lo que sí notamos es que la actuación de los sensores como filtros pasa bajos en los cambios repentinos de la temperatura, notándose estos menos pronunciados. (Ver figura (7) del Anexo 1)

●Caso 3

En este caso probamos el sensor de corriente no ideal.

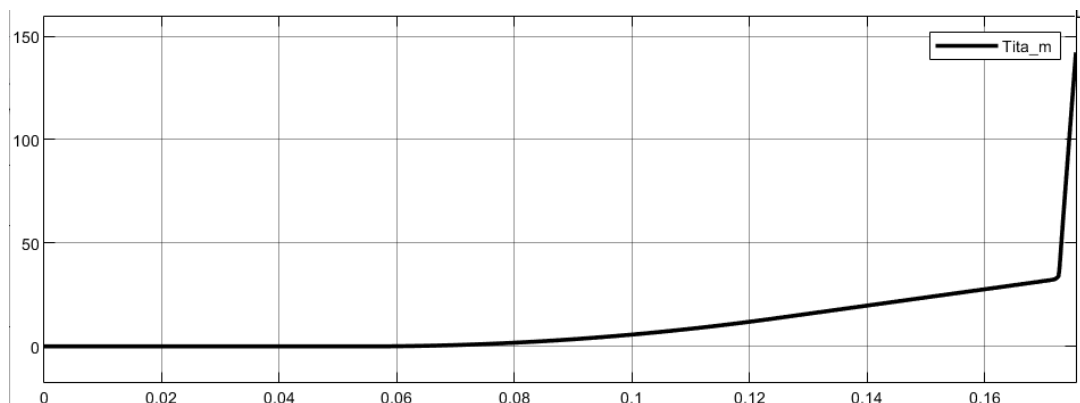


Figura 74: Respuesta de la posición angular con sensores de corriente no ideales.

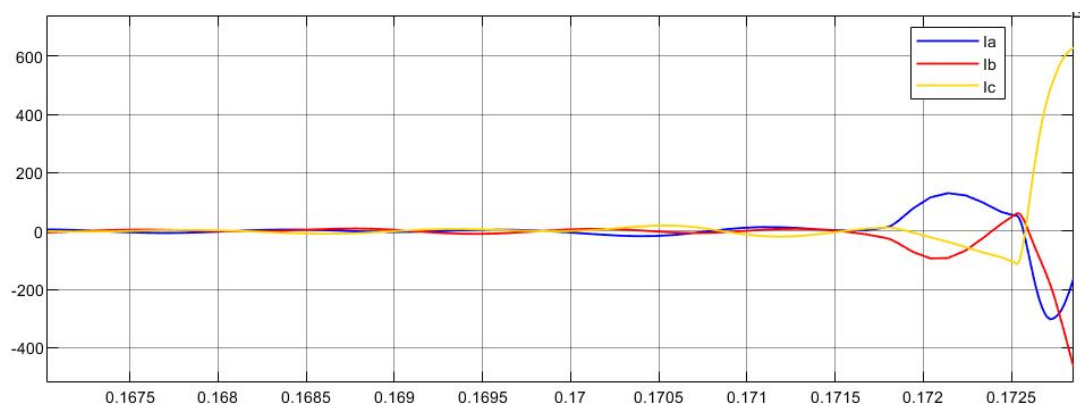


Figura 75: Respuesta de la corriente en coordenadas abc con sensores de corriente no ideales.

La respuesta del sistema presenta una degradación de desempeño, igual que con el sensor de posición no ideal. La causa de este comportamiento es la misma que en el caso del sensor de posición no ideal.

●Caso 4

Finalmente al probar con todos los sensores no ideales juntos obtenemos un sistema que es inestable y es imposible de simular.

●Caso 5

Para arreglar el problema de la inestabilidad del sistema, como primer instancia duplicamos los valores de ω_n tanto para los sensores de corriente como para el de posición angular. Observamos que el sistema sigue siendo inestable y diverge.

●Caso 6

En el último caso triplicamos los valores de ω_n tanto para los sensores del caso anterior.

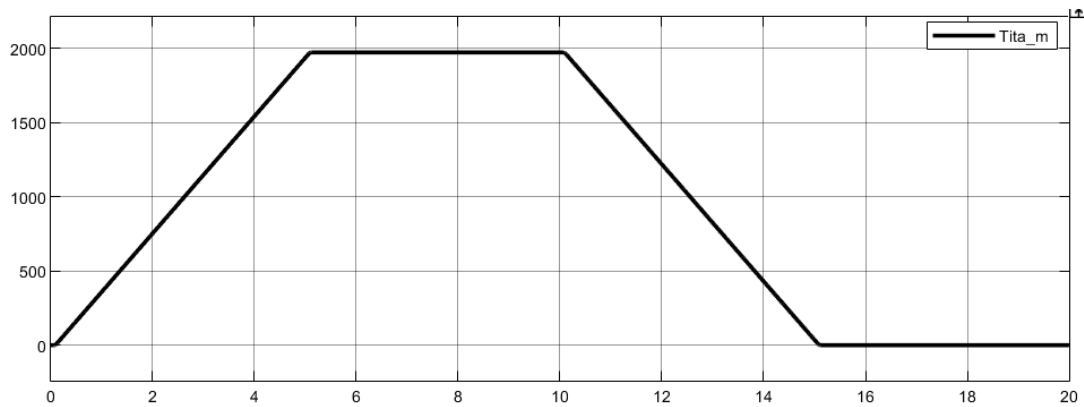


Figura 76: Respuesta de la posición angular con sensores no ideales y ω_n triplicado.

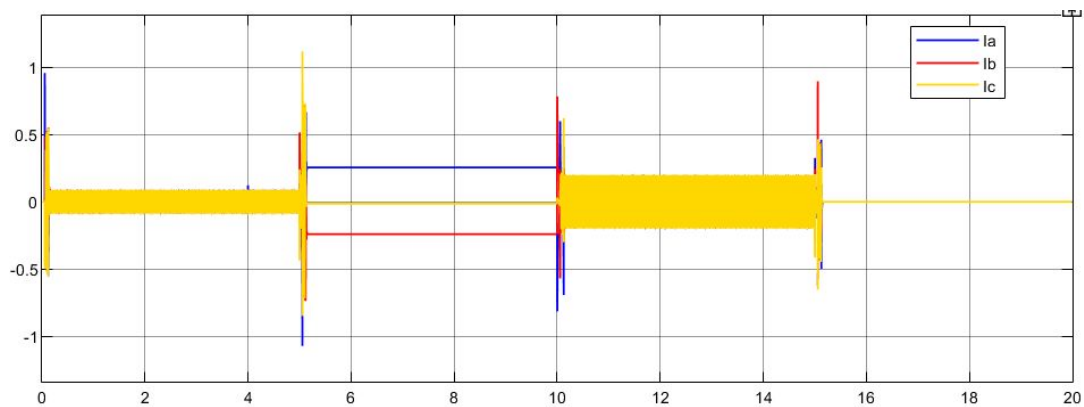


Figura 77: Respuesta de las corrientes en coordenadas abc con sensores no ideales y ω_n triplicado.

En este caso el sistema es lo suficientemente flexible para seguir la consigna y no se notan degradaciones.

3.5.5. Modulador trifásico de tensión no ideal

El desempeño de un sistema eléctrico se analiza incorporando características no ideales en el modulador de tensión trifásico, centrandó la atención en la saturación y limitación del ancho de banda. Se modela el modulador como un filtro pasa bajos con una saturación de tensión definida por $\frac{\sqrt{2} \cdot V_s}{\sqrt{3}}$, donde $V_{smx} = 24 \text{ Vca rms}$. El filtro pasa bajo se define con una frecuencia natural $\omega = 6000 \text{ rad/s}$ y un factor de amortiguamiento $\xi = 1$. Siguiendo un procedimiento similar al del punto anterior se representa el filtro en el espacio de estados con las siguientes matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 36 \times 10^6 & -12000 \end{bmatrix}, \quad B = [10], \quad C = [0 \quad 1], \quad D = [0]$$

El diagrama de bloques correspondiente es:

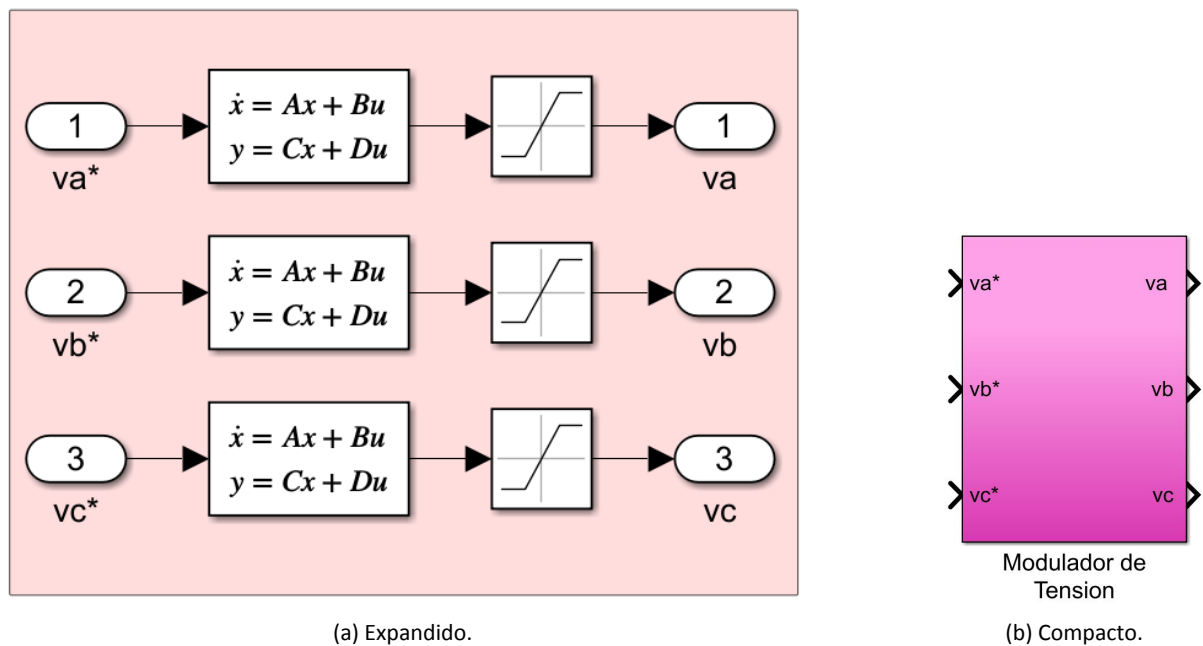


Figura 78: Diagrama de bloques del modulador de tensión no ideal.

Con un proceso similar al del ítem anterior probaremos varios casos para poner a prueba al sistema. La consigna que utilizaremos, y la perturbación es la misma que en el ítem anterior.

•Caso 1

Aplicando inicialmente solo la saturación, el sistema no presenta inestabilidades por lo que logra seguir la consigna. Como la tensión de trabajo para cumplir la consigna es menor que la de saturación esta no afecta al desempeño del sistema.

En caso de que las tensiones necesarias para cumplir la consigna sean mayores que la tensión de saturación el sistema no podría seguirla. La saturación del modulador provoca un creciente error entre la consigna y la posición actual. Este error se debe a que la máquina no recibe la tensión necesaria para generar el torque correcto y corregir su posición. En consecuencia, las tensiones reales se estancan en sus valores límites de saturación, mientras que las consignas de tensión siguen aumentando de forma exponencial.

•Caso 2

En este caso, se aplica una limitación del ancho de banda del modulador. El sistema resultante no es capaz de seguir la consigna debido una divergencia en los valores que adopta el sistema.

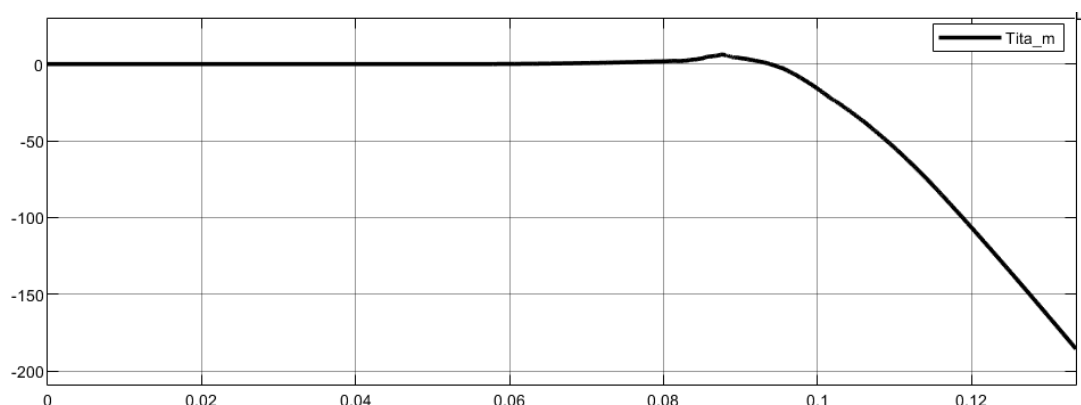


Figura 79: Respuesta de la posición angular con modulador de tensión con ancho de banda limitado.

•Caso 3

Finalmente se prueban los dos casos simultáneamente y como resultado el sistema no es capaz de seguir la consigna.

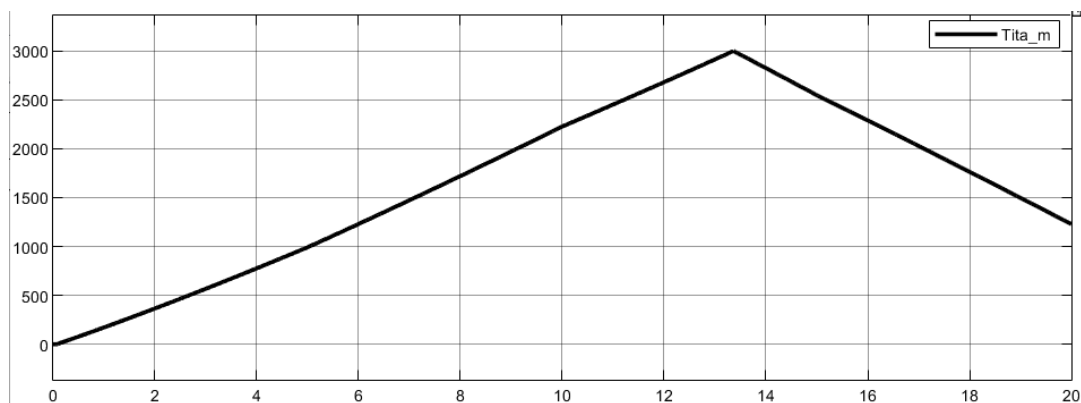


Figura 80: Respuesta de la posición angular con modulador de tensión con ancho de banda limitado y saturación.

A diferencia del caso anterior donde los valores divergían, los bloques de saturación limitan este inconveniente. Sin embargo, el sistema no es capaz de seguir la consigna debido a que la limitación del ancho de banda provoca que las magnitudes de tensión deban ser muy superiores a las permitidas haciendo que la respuesta del sistema no sea la esperada.

3.6. Version Final

Finalmente mostramos todos los pasos aplicados anteriormente sobre el modelo. Estos son el modulador de tensión, el observador de estado mejorado y los sensores no ideales.

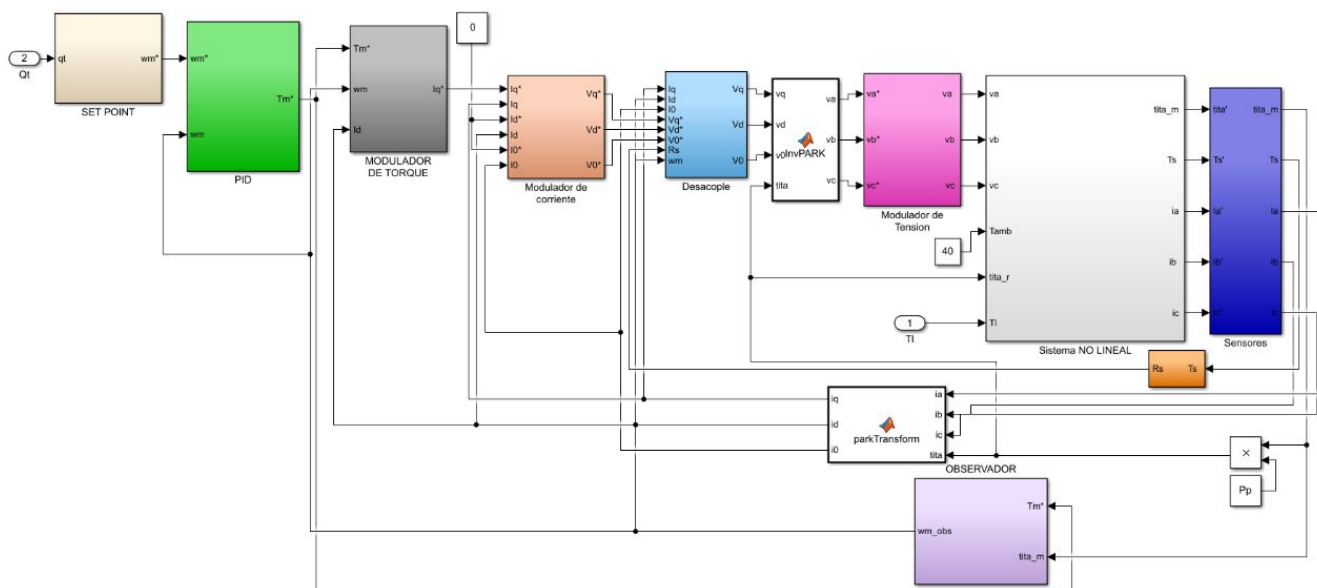


Figura 81: Diagrama de bloques del sistema NL final con controlador completo.

Conclusiones

Este informe ha culminado en el diseño, evaluación y simulación eficiente del sistema de control de la articulación hombro de un robot SCARA, haciendo uso de un motor eléctrico trifásico de corriente alterna con imanes permanentes. Este proceso ha subrayado la importancia de aplicar de forma práctica los conocimientos adquiridos en el ámbito académico, reforzando su relevancia en futuros escenarios profesionales.

En el desarrollo del proyecto, se plantearon diversas hipótesis que se contrastaron mediante simulaciones. En una fase inicial, se adoptó una visión idealizada de los componentes del controlador y del motor. Sin embargo, conforme avanzaba el estudio, se adoptó una perspectiva más realista, enfatizando la necesidad de una modelación precisa en la creación de sistemas de control.

Se identificó la importancia crucial de la implementación de sensores precisos y un modulador de tensión apropiado en la seguridad y eficacia del sistema de control. Estos componentes desempeñan un papel fundamental en la optimización del rendimiento del controlador, y su influencia es determinante para el éxito de todo el sistema.

Las simulaciones han sido un recurso esencial en este proyecto, proporcionando un entorno seguro para el estudio y la comprensión del comportamiento del sistema. A través de la implementación de consignas de perfil suave, se consiguió cumplir con las especificaciones de operación, evitando al mismo tiempo picos de corriente y tensión.

Desde una visión más amplia, este estudio enfatiza la necesidad de una gestión eficiente de los recursos, tanto hardware como software. Este aspecto, es crucial para la eficiencia y éxito del proyecto.

Asimismo, se ha puesto de manifiesto la importancia de prestar atención a las variables que, aunque no estén directamente relacionadas con el rendimiento, forman parte esencial del sistema. Finalmente, este estudio destaca la necesidad de tener en cuenta tanto los aspectos técnicos como los ambientales para el éxito de futuros proyectos en este campo.

Referencias

A continuación se listan las referencias utilizadas para la realización de este trabajo: