

시계열자료분석팀

5팀

장다연

심현구

윤세인

이동기

천예원

INDEX

1. 1주차 복습
2. 모형 식별
3. 선형 과정
4. AR 모형
5. MA 모형
6. AR과 MA의 쌍대성
7. ARMA 모형
8. 모형 적합

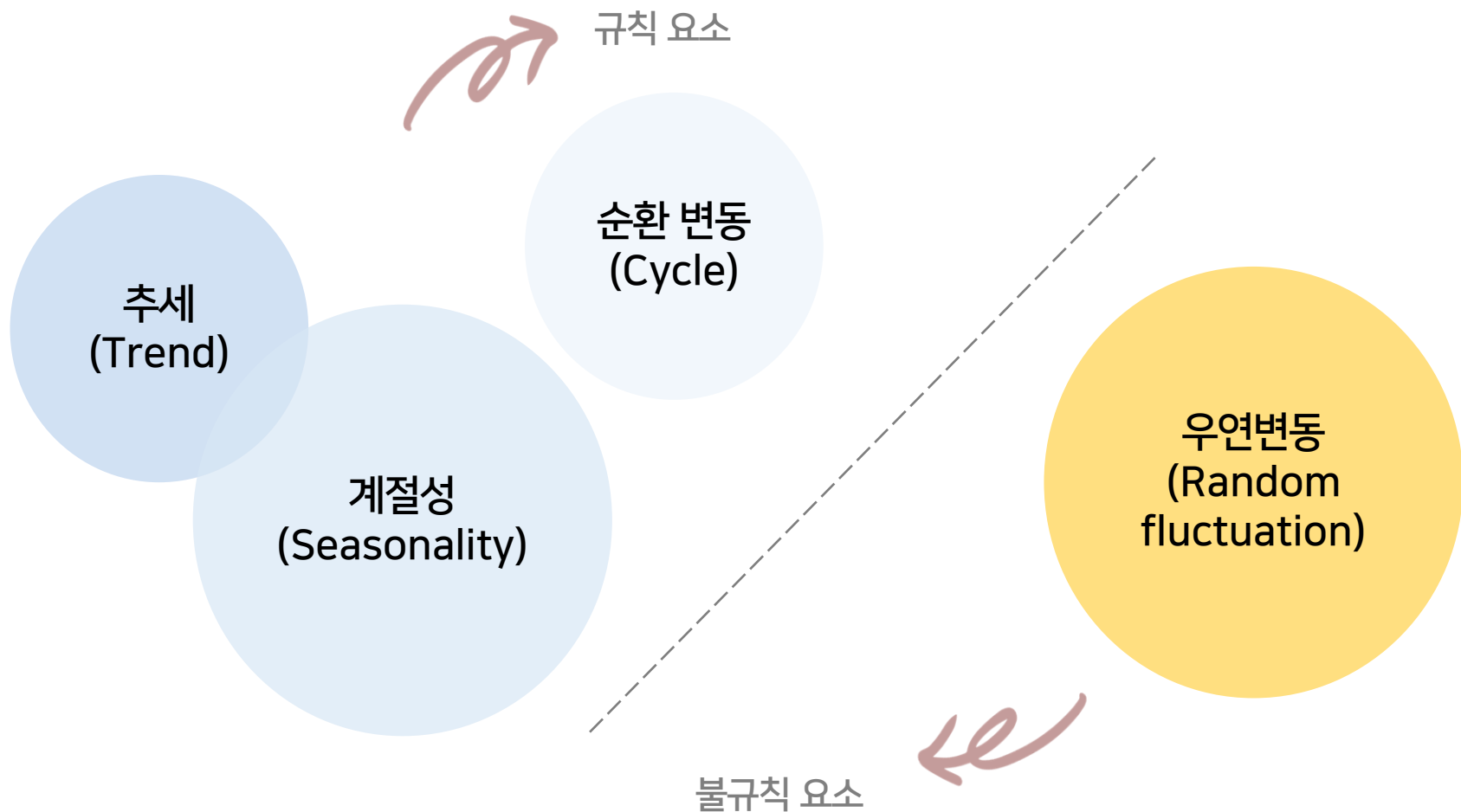
1

1주차 복습

1

1주차 복습

1주차 복습 | 시계열 자료의 구성 요소



1주차 복습 | 약정상성

강정상성 가정은 실제로 적용하기 힘든 엄격한 가정이기에,
현실에서는 주로 약정상성을 이용함.

약정상성의 조건

$E[X_t]^2 < \infty, \forall t \in \mathbb{Z}$	2차 적률이 존재하고 시점 t 에 관계없이 일정함
$E[X_t] = m, \forall t \in \mathbb{Z}$	평균이 상수로 시점 t 에 관계없이 일정함
$\gamma_X(r, s) = \gamma_X(r + h, s + h)$ $, \forall r, s, h \in \mathbb{Z}$	공분산은 시차 h 에 의존하며 시점 t 와 무관함

1주차 복습 | 정상화

정상화

정상성을 만족하지 않는 비정상 시계열을 정상 시계열로 변환하는 것

분산이 일정하지 않은 경우

로그 변환 (Log Transformation)

루트 변환 (Square Root Transformation)

Box-Cox 변환

평균이 일정하지 않은 경우

회귀 (Regression)

평활 (Smoothing)

차분 (Differencing)

1

1주차 복습

1주차 복습 | 정상화

정상화

정상성을 만족하지 않는 비정상 시계열을 정상 시계열로 변환하는 것

분산이 일정하지 않은 경우

로그 변환 (Log Transformation)

루트 변환 (Square Root Transformation)

Box-Cox



평균이 일정하지 않은 경우

회귀 (Regression)

평활 (Smoothing)

차분 (Differencing)



이거아님 ...

1주차 복습 | 정상성 검정

자기공분산함수(ACVF)

$$\gamma_X(h) = \text{Cov}(X_t, X_{t+h}) = E[(X_t - \mu)(X_{t+h} - \mu)]$$

자기상관함수(ACF)

$$\rho_X(h) = \frac{\gamma_X(h)}{\gamma_X(0)} = \text{Corr}(X_t, X_{t+h}) = \frac{\text{Cov}(X_t, X_{t+h})}{\sqrt{\text{var}(X_t)}\sqrt{\text{var}(X_{t+h})}}$$

을 이용하여 정상성 만족 여부를 확인

1주차 복습 | 백색잡음

정상 시계열의
대표적인 예!

백색잡음의 조건

평균이 0, 분산이 $\sigma^2 < \infty$ 인 시계열

자기상관이 존재하지 않는 시계열

자기상관 검정

ACF Plot

정규성 검정

QQ Plot

KS Test

Jarque-Bera Test

정상성 검정

KPSS Test

ADF Test

PP Test

2

모형 식별

시계열 모형의 필요성

오차항 Y_t 에 대한 분산-공분산 행렬

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \text{Cov}(Y_1, Y_1) & \text{Cov}(Y_1, Y_2) & \dots & \text{Cov}(Y_1, Y_n) \\ \text{Cov}(Y_2, Y_1) & \text{Cov}(Y_2, Y_2) & \dots & \text{Cov}(Y_2, Y_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{Cov}(Y_n, Y_1) & \text{Cov}(Y_n, Y_2) & \dots & \text{Cov}(Y_n, Y_n) \end{pmatrix}$$



----- 정상성 조건 ③ 자기공분산은 시차에만 의존
클린업 1주차 참고!

$$= \begin{pmatrix} \gamma(0) & \gamma(1) & \dots & \gamma(n-1) \\ \gamma(1) & \gamma(0) & \dots & \gamma(n-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma(n-1) & \gamma(n-2) & \dots & \gamma(0) \end{pmatrix}$$

최종적으로 추정해야하는 분산-공분산 행렬

시계열 모형의 필요성

오차항 Y_t 에 대한 분산-공분산 행렬

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \text{Cov}(Y_1, Y_1) & \text{Cov}(Y_1, Y_2) & \dots & \text{Cov}(Y_1, Y_n) \\ \text{Cov}(Y_2, Y_1) & \text{Cov}(Y_2, Y_2) & \dots & \text{Cov}(Y_2, Y_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{Cov}(Y_n, Y_1) & \text{Cov}(Y_n, Y_2) & \dots & \text{Cov}(Y_n, Y_n) \end{pmatrix}$$



정상성 조건 ③ 자기공분산은 시차에만 의존

클린업 1주차 참고!

$$= \begin{pmatrix} \gamma(0) & \gamma(1) & \dots & \gamma(n-1) \\ \gamma(1) & \gamma(0) & \dots & \gamma(n-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma(n-1) & \gamma(n-2) & \dots & \gamma(0) \end{pmatrix}$$

최종적으로 추정해야하는 분산-공분산 행렬

모형 식별의 필요성

① Y_t 가 백색잡음인 경우

$$\begin{pmatrix} \gamma(0) & \gamma(1) & \dots & \gamma(n-1) \\ \gamma(1) & \gamma(0) & \dots & \gamma(n-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma(n-1) & \gamma(n-2) & \dots & \gamma(0) \end{pmatrix}$$



하삼각요소와 상삼각요소가 모두 Zero

분산만 추정하면
공분산 행렬을 구할 수 있음

모형 식별의 필요성

② Y_t 가 백색잡음이 아닌 경우

$$\begin{pmatrix} \gamma(0) & \gamma(1) & \dots & \gamma(n-1) \\ \gamma(1) & \gamma(0) & \dots & \gamma(n-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma(n-1) & \gamma(n-2) & \dots & \gamma(0) \end{pmatrix}$$



확률변수 사이에 상관관계 존재

→ 하삼각요소와 분산 모두 추정 필요

하삼각요소는 SACVF를 통해 추정

$$\hat{\gamma}_x(h) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-h} (X_j - \bar{X})(X_{j+h} - \bar{X})$$

공분산 행렬을 구할 수 있음

2 모형의 식별

모형 식별의 필요성

② Y_t 가 백색잡음이 아닌 경우



SACVF를 통해 추정할 경우
시차 h 에 따라 정확도가 달라질 수 있다는 한계

시계열 모형 사용 !

SACVF를 통해 추정

$$\hat{\gamma}_x(h) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-h} (X_j - \bar{X})(X_{j+h} - \bar{X})$$

삼각요소도 추정 필요

공분산 행렬을 구할 수 있음

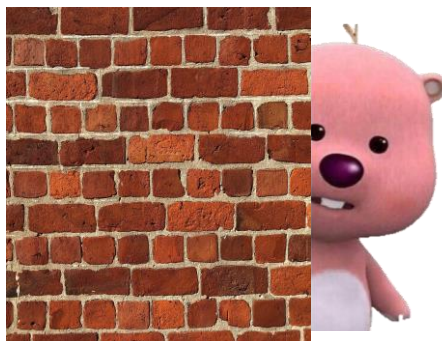
모형 식별의 필요성

시계열 모형이 필요한 이유 요약

정상화를 통해 비정상 시계열을 정상시계열로 변환했으나,

남아 있는 오차가 WN 또는 IID가 아닌 경우

$\gamma(h)$ ($h \neq 0$) 를 추정하기 위해 시계열 모형이 필요



쓰라면 써.

ACF, PACF를 이용하여 어떤 시계열 모형을 사용할 것인지를 판단 가능!

자기상관함수

자기상관함수 (ACF, Auto-Correlation Function)

$$\rho_X(h) = \frac{\gamma_X(h)}{\gamma_X(0)} = \text{Corr}(X_t, X_{t+h}) = \frac{\text{Cov}(X_t, X_{t+h})}{\sqrt{\text{var}(X_t)}\sqrt{\text{var}(X_{t+h})}}$$



1주차에 했던 거니까
기억 나지?

$\rho_X(h)$: 시차가 h인 확률변수 간의 상관관계

⋮

자기상관함수 (ACF)는 시차가 h인 시계열 간의 상관관계를 의미.

시계열이 정상성을 만족하는 경우 ACF는 시차에만 의존함.

자기상관함수

자기상관함수 (ACF, Auto-Correlation Function)

$$\rho_X(h) = \frac{\gamma_X(h)}{\gamma_X(0)} = \text{Corr}(X_t, X_{t+h}) = \frac{\text{Cov}(X_t, X_{t+h})}{\sqrt{\text{var}(X_t)}\sqrt{\text{var}(X_{t+h})}}$$

 $\rho_X(h)$: 시차가 h인 확률변수 간의 상관관계

- $\rho(0) = 1$ ----- 자기 자신과의 자기상관함수는 1
- $\rho(-h) = \rho(h)$ ----- 우함수
- $|\gamma(h)| \leq \gamma(0)$ for all $h \in \mathbb{Z} \rightarrow |\rho(h)| \leq 1$ ----- 절댓값 ≤ 1

부분자기상관함수

부분자기상관함수 (PACF, **Partial** Auto-Correlation Function)

X_1 과 X_{k+1} 사이에 X_2, \dots, X_k 의 영향을 제거했을 때의
조건부 상관관계 (conditional correlation)

부..부분..
뭐라고요? ㅠㅠ



부분자기상관함수

부분자기상관함수 (PACF, **Partial** Auto-Correlation Function)

X_1 과 X_{k+1} 사이에 X_2, \dots, X_k 의 영향을 제거했을 때의
조건부 상관관계 (conditional correlation)

부분자기상관함수의 쉬운 이해를 위해
부분상관계수를 먼저 알아보도록 하자!



부분자기상관함수

부분상관계수 (Partial Correlation Coefficient)

X : 아이스크림 판매량 Y : 범죄 발생 건수 Z : 인구수

"X가 Y에 미치는 영향을 알고 싶음"

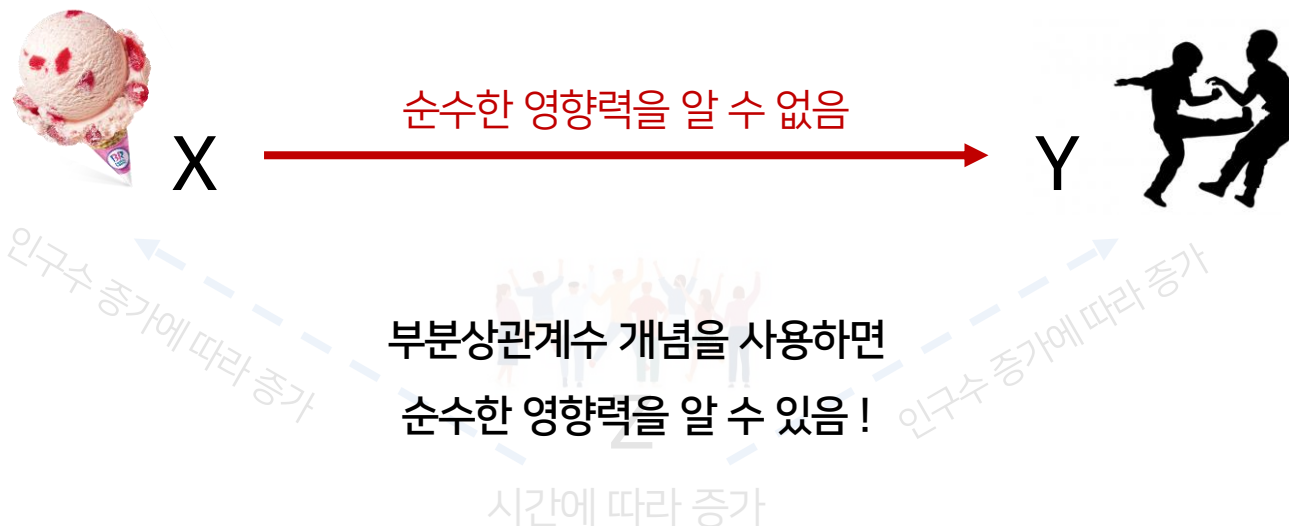


부분자기상관함수

부분상관계수 (Partial Correlation Coefficient)

X : 아이스크림 판매량 Y : 범죄 발생 건수 Z : 인구수

“X가 Y에 미치는 영향을 알고 싶음”



부분자기상관함수

부분상관계수 (Partial Correlation Coefficient)

$$\rho_{XY,Z} = \frac{E[\{X - E(X|Z)\} \cdot \{Y - E(Y|Z)\}]}{\sqrt{E[X - E(X|Z)]^2} \sqrt{E[Y - E(Y|Z)]^2}} = \rho_{X^*,Y^*}$$

조건부 기대값 $E(X|Z)$: X 가 Z 에 의해 설명되는 부분

조건부 기대값 $E(Y|Z)$: Y 가 Z 에 의해 설명되는 부분

$X^* = X - E(X|Z)$: X 에서 Z 의 영향력을 제거하고 남은 부분

$Y^* = Y - E(Y|Z)$: Y 에서 Z 의 영향력을 제거하고 남은 부분

$\rho_{XY,Z} = \rho_{X^*,Y^*}$: X 와 Y 의 부분상관계수

부분자기상관함수

부분상관계수 (Partial Correlation Coefficient)

$$\rho_{XY,Z} = \frac{E[\{X - E(X|Z)\} \cdot \{Y - E(Y|Z)\}]}{\sqrt{E[X - E(X|Z)]^2} \sqrt{E[Y - E(Y|Z)]^2}} = \rho_{X^*,Y^*}$$

조건부 기대값 $E(X|Z)$: X 가 Z 에 의해 설명되는 부분

부분자기상관함수는 위 부분상관계수에
조건부 기대값 $E(Y|Z)$: Y 가 Z 에 의해 설명되는 부분

“Auto”가 추가된 개념

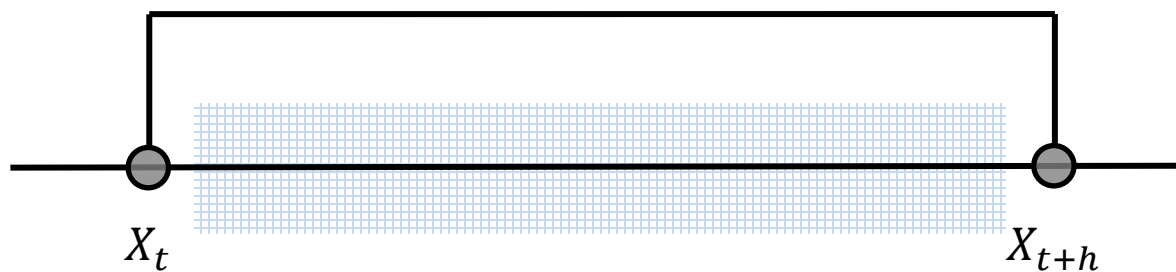
$X^* = X - E(X|Z)$: X 에서 Z 의 영향력을 제거하고 남은 부분

$Y^* = Y - E(Y|Z)$: Y 에서 Z 의 영향력을 제거하고 남은 부분

즉, 부분자기상관함수는 자기 자신과의 부분상관계수와 같음.

$\rho_{XY,Z} = \rho_{X^*,Y^*}$: X 와 Y 의 부분상관계수

부분자기상관함수



$\text{Corr}(X_t, X_{t+h})$ 에 **중간 시점**의 영향 존재

X_t 와 X_{t+h} 사이의 순수한 상관관계를 구하기 위해서는
t시점과 t+h시점 사이의 영향을 제거해 주어야 함

⋮

이 역할을 하는 것이 바로 부분자기상관함수!



부분자기상관함수

부분자기상관함수(PACF)는 보통 $a(k)$ 로 표현하며, 다음과 같이 정의됨

- ▶ $\alpha(0) = \text{Corr}(X_1, X_1) = 1$
- ▶ $\alpha(1) = \text{Corr}(X_2, X_1) = \rho(1)$
- ▶ $\alpha(k) = \text{Corr}(X_{k+1} - P_k^* X_{k+1}, X_1 - P_k^* X_1), \quad k \geq 2$

$P_k^* X_{k+1}$ = Best Linear Predictor on $\{1, X_2, \dots, X_k\}$

중간 시점인 $\{1, X_2, \dots, X_k\}$ 만으로 X_{k+1} 을 설명

$P_k^* X_1$ = Best Linear Predictor on $\{1, X_2, \dots, X_k\}$

중간 시점인 $\{1, X_2, \dots, X_k\}$ 만으로 X_1 을 설명
BLP(Best Linear Predictor)은 뒤에서 더 자세히 다루겠지만,

지금 단계에서는 $\{1, X_2, \dots, X_k\}$ 가 X_{k+1} 과 X_1 에 미치는 영향 정도로 생각해주시면 됩니다!

부분자기상관함수

부분자기상관함수(PACF)는 보통 $a(k)$ 로 표현하며, 다음과 같이 정의됨

- ▶ $\alpha(0) = \text{Corr}(X_1, X_1) = 1$
- ▶ $\alpha(1) = \text{Corr}(X_2, X_1) = \rho(1)$
- ▶ $\alpha(k) = \text{Corr}(X_{k+1} - P_k^* X_{k+1}, X_1 - P_k^* X_1), \quad k \geq 2$

$P_k^* X_{k+1}$ = Best Linear Predictor on $\{1, X_2, \dots, X_k\}$

중간 시점인 $\{1, X_2, \dots, X_k\}$ 만으로 X_{k+1} 을 설명

$P_k^* X_1$ = Best Linear Predictor on $\{1, X_2, \dots, X_k\}$

중간 시점인 $\{1, X_2, \dots, X_k\}$ 만으로 X_1 을 설명

부분자기상관함수

Main Idea

“중간값들의 영향력을 선형회귀로 추정하여 제거하자”



추정량의 BLP(Best Linear Predictor) 구하는 과정

$$X_{k+1} = \phi_{11}X_k + \epsilon_{k+1}$$

$$X_{k+1} = \phi_{21}X_k + \phi_{22}X_{k-1} + \epsilon_{k+1}$$

$$\vdots$$

$$X_{k+1} = \phi_{k1}X_k + \phi_{k2}X_{k-1} + \cdots + \phi_{kk}X_1 + \epsilon_{k+1}$$

$$\therefore \hat{X}_{k+1} = \operatorname{argmin}_{\phi} E(X_{k+1} - \phi_{k1}X_k - \phi_{k2}X_{k-1} - \cdots - \phi_{kk}X_1)^2$$



부분자기상관함수

Main Idea

“중간값들의 영향력을 선형회귀로 추정하여 제거하자”

추정량의 BLP(Best Linear Predictor) 구하는 과정

$$X_{k+1} = \phi_{11}X_k + \epsilon_{k+1}$$

$$X_{k+1} = \phi_{21}X_k + \phi_{22}X_{k-1} + \epsilon_{k+1}$$

ϕ_{kk} 는 $\{X_2, \dots, X_k\}$ 가 고정되어 있을 때, X_{k+1} 와 X_1 간의 선형 상관관계를 의미

$$X_{k+1} = \phi_{k1}X_k + \phi_{k2}X_{k-1} + \dots + \phi_{kk}X_1 + \epsilon_{k+1}$$

$$\therefore \hat{X}_{k+1} = \operatorname{argmin}_{\phi} E(X_{k+1} - \phi_{k1}X_k - \phi_{k2}X_{k-1} - \dots - \phi_{kk}X_1)^2$$



부분자기상관함수

Main Idea

“중간값들의 영향력을 선형회귀로 추정하여 제거하자”



부분자기상관함수(PACF)

$$\alpha(k) = \phi_{kk}, \quad k \geq 1$$



3

선형 과정

선형 과정

선형 과정 (Linear Process)

$\{Z_t\} \sim \text{WN}(0, \sigma^2)$ 들의 선형결합으로 표현된 X_t 를 선형과정이라고 함.

$$X_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j Z_{t-j}$$



선형결합의 계수는 $\sum_j |\psi_j| < \infty$ (absolutely summable) 조건을 만족해야 함.

선형 과정

선형 과정 (Linear Process)

$\{Z_t\} \sim WN(0, \sigma^2)$ 들의 선형결합으로 표현된 X_t 를 선형과정이라고 함.

후향 연산자를 이용한 표현

$$X_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j Z_{t-j} = \psi(B)Z_t \text{ where } \psi(B) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j B^j$$

$$\therefore \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j Z_{t-j} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j B^j Z_t = \left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j B^j \right) Z_t$$

선형결합의 계수는 $\sum_{j=-\infty}^{\infty} |\psi_j| < \infty$ (absolutely summable) 조건을 만족해야 함.

선형 과정

시계열을 선형과정으로 표현하는 이유

1) 공분산 계산이 간단하다

$$\text{Cov}(a_1Z_1 + a_2Z_2 + a_3Z_3, b_2Z_2 + b_3Z_3) = a_2b_2 + a_3b_3$$

$$\text{Cov}(a_1Z_1, b_2Z_2 + b_3Z_3) = 0$$

2) 해석 용이, 추정 방법이 잘 발달되어 있음. (regression/linear algebra)

3) 정상 확률 과정의 선형 결합은 다시 정상 확률 과정 조건을 만족함.

4) 모든 약한 의미의 정상 확률 과정은 선형 과정의 합과 결정적 과정으로 표현될 수 있음.

(Wold decomposition)

시계열 분석에 사용되는 선형 과정 모형

AR
모형

MA
모형

ARMA 모형



에 대해 한번 알아보시다!

4

AR 모형

AR 모형 | ① 정의

AR(Auto Regressive Model) : 자기회귀 모형

현 시점의 관측값을 과거 시점의 관측값과
현 시점의 오차의 선형결합 형태로 표현하는 모형

$Z_t \sim WN(0, \sigma^2)$ 일 때,

AR(1) 모형

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + Z_t$$

AR(p) 모형

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + Z_t$$



p : 몇 시점 전까지의 관측값을 사용했는지를 나타내는 모수

AR 모형 | ① 정의

AR(Auto Regressive Model) : 자기회귀 모형

현 시점의 관측값을 과거 시점의 관측값과
현 시점의 오차의 선형결합 형태로 표현하는 모형

$Z_t \sim WN(0, \sigma^2)$ 일 때,

AR 모형은 흔히 알고 있는 회귀식과 유사함.

AR(1) 모형

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + Z_t$$

AR(p) 모형

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \dots + \phi_p X_{t-p} + Z_t$$

'자기회귀 모형'이라고 부름.

p: 몇 시점 전까지의 관측값을 사용했는지를 나타내는 모수

AR 모형 | ② 특성방정식

정의 이용 표현식

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + Z_t$$

후향연산자 이용 표현식

$$X_t = \phi_1 B X_t + \phi_2 B^2 X_t + \cdots + \phi_p B^p X_t + Z_t$$



AR 모형 | ② 특성방정식

정의 이용 표현식

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + z_t$$



후향연산자를 이용해 변환

후향연산자 이용 표현식

$$X_t = \phi_1 B X_t + \phi_2 B^2 X_t + \cdots + \phi_p B^p X_t + z_t$$



AR 모형 | ② 특성방정식

후향 연산자 식에서 특성 방정식을 유도

$$X_t = \phi_1 B X_t + \phi_2 B^2 X_t + \cdots + \phi_p B^p X_t + Z_t$$

⋮

후향 연산자 식을 X_t 에 대하여 간단히 정리

$$Z_t = (1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \cdots - \phi_p B^p) X_t$$



이 부분이 바로 AR(p)의 특성방정식!

$$Z_t = \phi(B) X_t$$

AR(p)의 특성방정식은 $\phi(B)$ 로 표현한다.

AR 모형 | ③ AR 모형의 조건

정상성(Stationarity)

시계열의 확률적 특성이 시점에
의존하지 않는 특성

$$\psi_j = 0, \forall j < 0 \leftrightarrow X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j Z_{t-j}$$



인과성(Causality)

t 시점의 관측값이 과거시점의
오차항으로 설명되는 특성

선형과정 $\{X_t\}$ 가 위 조건을 만족할 때,
 $\{X_t\}$ 는 **인과성**을 가짐

AR 모형 | ③ AR 모형의 조건

정상성(Stationarity)

시계열의 확률적 특성이 시점에
의존하지 않는 특성

인과성(Causality)

t 시점의 관측값이 과거시점의
오차항으로 설명되는 특성


$$\psi_j = 0, \forall j < 0 \leftrightarrow X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j Z_{t-j}$$



선형과정 $\{X_t\}$ 가 위 조건을 만족할 때,
 $\{X_t\}$ 는 **인과성**을 가짐

AR 모형 | ③ AR 모형의 조건

AR 모형이 앞서 소개한 특성들을 어떻게 만족하는지 AR(1) 모형을 활용하여 알아보자.

$$\begin{aligned}
 X_t &= \phi_1 X_{t-1} + Z_t \\
 &= \phi_1 (\phi_1 X_{t-2} + Z_{t-1}) + Z_t = \phi_1^2 X_{t-2} + \phi_1 Z_{t-1} + Z_t \\
 &= \phi_1^2 (\phi_1 X_{t-3} + Z_{t-2}) + \phi_1 Z_{t-1} + Z_t = \phi_1^3 X_{t-3} + \phi_1^2 Z_{t-2} + \phi_1 Z_{t-1} + Z_t \\
 &\quad \vdots \\
 &= \phi_1^{M+1} X_{t-M-1} + \sum_{j=0}^M \phi_1^j Z_{t-j}
 \end{aligned}$$


AR(1) 식은 위와 같이 과거 시점의 관측값과 오차들의 선형결합으로 정리할 수 있음.

AR 모형 | ③ AR 모형의 조건

AR 모형이 앞서 소개한 특성들을 어떻게 만족하는지 AR(1) 모형을 활용하여 알아보자.

$$\phi_1^{M+1}X_{t-M-1} + \sum_{j=0}^M \phi_1^j Z_{t-j}$$

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + Z_t$$

인과성을 만족하기 위해서는 오차항만으로 관측값을 설명해야함.

$$= \phi_1^2(\phi_1 X_{t-2} + Z_{t-1}) + Z_t = \phi_1^3 X_{t-3} + \phi_1^2 Z_{t-2} + \phi_1 Z_{t-1} + Z_t$$

해당 조건의 만족 여부는 ϕ_1 범위에 따라 달라짐.

세 경우로 나누어 식을 통해 확인해보자!

$$= \phi_1^{M+1}X_{t-M-1} + \sum_{j=0}^M \phi_1^j Z_{t-j}$$

AR(1) 식은 위와 같이 과거 시점의 관측값과 오차들의 선형결합으로 정리할 수 있음.

AR 모형 | ③ AR 모형의 조건

Case 1) $|\phi_1| < 1$

$$X_t = \phi_1^{M+1} X_{t-M-1} + \sum_{j=0}^M \phi_1^j Z_{t-j} \text{ 에서 } M \rightarrow \infty \text{ 이면}$$

$\phi_1^{M+1} X_{t-M-1} \rightarrow 0$ 으로 수렴, 나머지 부분은 $\sum_{j=0}^{\infty} \phi_1^j Z_{t-j}$ 이 됨.

⋮

위 결과와 같이 $|\phi_1| < 1$ 일 때는 오차항의 선형결합(Z_t)만 남아 인과성을 만족함.

또한 정상 시계열의 선형결합은 여전히 정상 시계열임을 확인하였기 때문에

정상성 역시 만족함

AR 모형 | ③ AR 모형의 조건

Case 2) $|\phi_1| = 1$

$$X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t \text{ or } X_t = -X_{t-1} + \varepsilon_t$$

⋮

대표적인 비정상 확률 과정 중 하나인 확률보행과정(random walk process)임
따라서 AR모형 조건을 만족하지 못함.

AR 모형 | ③ AR 모형의 조건

Case 3) $|\phi_1| > 1$

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + Z_t = \phi_1^{M+1} X_{t-M-1} + \sum_{j=0}^M \phi_1^j Z_{t-j}$$

위 식을 통해 알 수 있는 것처럼, $|\phi_1| > 1$ 일 경우
 $\phi_1^{M+1} X_{t-M-1}$ 부분을 제거하지 못해 인과성을 만족하지 못함



따라서 AR 모형 조건을 만족하지 못함.

AR 모형 | ③ AR 모형의 조건

Case 2 $|\phi_1| > 1$ 

정리하면, AR모형은 정상성과 인과성이 모두 만족되는

$|\phi_1| < 1$ 가 성립할 때만 사용할 수 있음.

이는 ' $\phi(B) = 0$ 의 근의 절대값이 1보다 커야한다' 와 동치

$\phi_1^{M+1} X_{t-M-1}$ 부분을 제거하지 못해 인과성을 만족하지 못함



따라서 AR 모형 조건을 만족하지 못함.



AR 모형

흥미롭죠? 흥미롭죠?

$|\phi_1| > 1$ 일 경우 흥미로운 사실!

$$X_{t+1} = \phi_1 X_t + Z_{t+1}$$

$$\phi_1 X_t = X_{t+1} - Z_{t+1}$$

$$X_t = \frac{1}{\phi_1} X_{t+1} - \frac{1}{\phi_1} Z_{t+1} = \frac{1}{\phi_1} \left(\frac{1}{\phi_1} X_{t+2} - \frac{1}{\phi_1} Z_{t+2} \right) - \frac{1}{\phi_1} Z_{t+1}$$

정확하면, AR모형은 정상성과 인과성이 모두 만족되는

$|\phi_1| < 1$ 가 성립할 때만 사용할 수 있음.

$$= \frac{1}{\phi_1^2} X_{t+2} - \frac{1}{\phi_1^2} Z_{t+2} - \frac{1}{\phi_1} Z_{t+1}$$

이는 ' $\phi(B) = 0$ 의 근의 절댓값이 1보다 커야한다' 와 동치

$\phi_1^{M+1} X_{t-M-1}$ 부분을 제거하지 못해 인과성을 만족하지 못함

$$= \left(\frac{1}{\phi_1} \right)^k X_{t+j} - \sum_{j=1}^k \left(\frac{1}{\phi_1} \right)^j Z_{t+j}$$

따라서 AR 모형 조건을 만족하지 못함

위 식과 같이 과거의 값이 아닌 **미래 오차항**들의 선형결합으로 표현할 수 있음

하지만 AR 모형으로는 사용할 수 없음

AR 모형 | ④ AR 모형의 ACF

AR(1) 모형을 이용하여 ACF를 계산해보자.

계산의 편의를 위해 $E(X_t) = 0$ 을 가정한다.

⋮

STEP 1) ACF식을 유도하기 위해 AR(1) 식 양변에 X_{t-h} 를 곱해줌

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + Z_t$$

$$X_t X_{t-h} = \phi_1 X_{t-1} X_{t-h} + Z_t X_{t-h}$$

AR 모형 | ④ AR 모형의 ACF

AR(1) 모형을 이용하여 ACF를 계산해보자.

STEP 2) STEP 1)의 식에 기댓값을 취해 ACF 식을 구함

$$\begin{aligned}\gamma(h) &= \phi_1 \gamma(h-1) + \text{Cov}(Z_t, X_{t-h}) = \phi_1 \gamma(h-1) \\ (\because \text{Cov}(Z_t, X_{t-h}) &= \text{Cov}\left(Z_t, \phi_1^{M+1} X_{t-h-M-1} + \sum_{j=0}^M \phi_1^j Z_{t-h-j}\right) = 0) \\ \gamma(h) &= \phi_1 (\phi_1 \gamma(h-2)) = \dots = \phi_1^h \gamma(0) \\ \frac{\gamma(h)}{\gamma(0)} &= \phi_1^h = \rho(h)\end{aligned}$$

정상성을 만족하기 위해서 $|\phi_1| < 1$ 가 되어야 함을 확인했기 때문에,

h 가 커짐에 따라 **AR모형의 ACF는 지수적으로 감소함**을 알 수 있음.

AR 모형 | ⑤ AR 모형의 PACF

AR(1) 모형을 이용하여 PACF를 계산해보자.

STEP 1) AR(p), 식으로 표현

$$\hat{X}_{k+1} = \phi_1 X_k + \phi_2 X_{k-1} + \cdots + \phi_p X_{k+1-p}$$



X_{k+1} 을 p 시점 이전 값들로만 표현



AR 모형 | ⑤ AR 모형의 PACF

AR(1) 모형을 이용하여 PACF를 계산해보자.

STEP 2) PACF를 유도하기 위해 식 풀어서 쓰기

$$\hat{X}_{k+1} = \phi_1 X_k + \phi_2 X_{k-1} + \cdots + \phi_p X_{k+1-p} + 0X_{k-p} + \cdots + 0X_1$$

⋮

위 식과 PACF의 성질을 이용, AR 모형의 PACF를 정리하면 ...

⋮

$$\alpha(0) := 1, \quad \alpha(p) = \phi_p \quad \& \quad \alpha(k) = 0 \quad \text{if } k > p$$

AR 모형 | ⑤ AR 모형의 PACF



AR(1) 모형을 이용 PACF를 계산해보자.

STEP 2) PACF를 유도하기 위해 식 풀어서 쓰기

즉, AR 모형의 PACF는 p 시차 전까지만 존재하며,

$$\hat{X}_{k+1} = \phi_1 X_k + \phi_2 X_{k-1} + \dots + \phi_p X_{k-p+1} + 0X_{k-p} + \dots + 0X_1$$

p 이후로는 모두 0이 됨.

이를 “AR(p) 모형의 PACF는 시차 p 이후에 절단된다”라고 표현

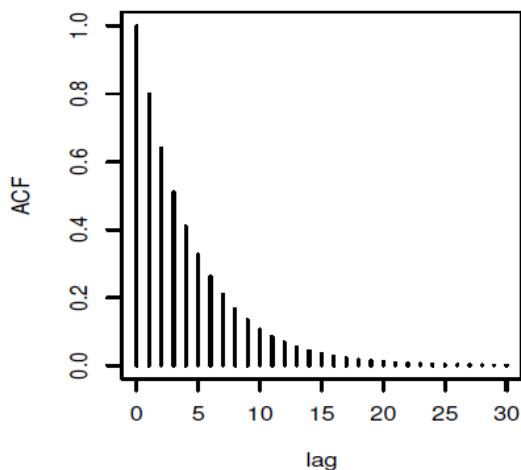
위 식과 PACF의 성질을 이용, AR 모형의 PACF를 정리하면 ...

⋮

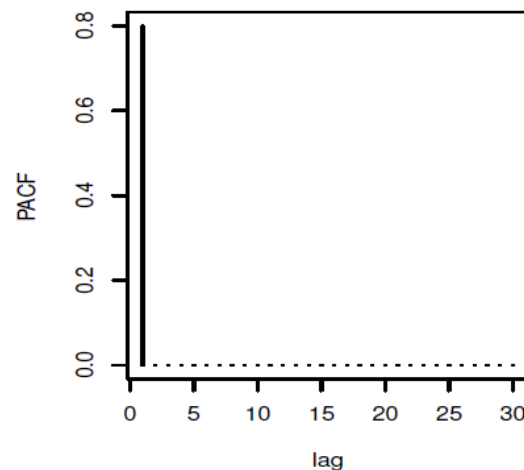
$$\alpha(0) := 1, \quad \alpha(p) = \phi_p \quad \& \quad \alpha(k) = 0 \quad \text{if } k > p$$

AR 모형 | AR 모형의 ACF & PACF

AR(1) : ACF



AR(1) : PACF



그림을 통해 AR 모형의 ACF와 PACF를 살펴보면,
앞에서 확인한 바와 같이 **ACF는 지수적으로 감소**,
PACF는 p 이후(위 그림에서 $p=1$)에 절단된 양상을 보이고 있음.

5

MA 모형

MA 모형 | ① 정의

MA 모형

과거 시점의 오차항을 이용해 관측값을 설명하는 모형

MA(1)모형

$$X_t = Z_t + \theta_1 Z_{t-1}$$

MA(q)모형

$$X_t = Z_t + \theta_1 Z_{t-1} + \theta_2 Z_{t-2} + \cdots + \theta_q Z_{t-q}$$

MA 모형 | ② 특성방정식

후향연산자 이용 표현식

$$\begin{aligned}X_t &= Z_t + \theta_1 Z_{t-1} + \theta_2 Z_{t-2} + \cdots + \theta_q Z_{t-q} \\&= Z_t + \theta_1 B Z_t + \theta_2 B^2 Z_t + \cdots + \theta_q B^q Z_t \\&= (1 + \theta_1 B + \theta_2 B^2 + \cdots + \theta_q B^q) Z_t\end{aligned}$$

이 부분이 바로 MA(q)의 특성방정식!

$$X_t = \theta(B) Z_t$$

MA(q)의 특성방정식은 $\theta(B)$ 로 표현



MA 모형 | ② 특성방정식

MA(q)의 표현법 정리

후향연산자 이용 표현식

1) 정의를 이용 $X_t = Z_t + \theta_1 Z_{t-1} + \theta_2 Z_{t-2} + \dots + \theta_q Z_{t-q}$

$$\begin{aligned} X_t &= Z_t + \theta_1 Z_{t-1} + \theta_2 Z_{t-2} + \dots + \theta_q Z_{t-q} \\ &= (1 + \theta_1 B + \theta_2 B^2 + \dots + \theta_q B^q) Z_t \end{aligned}$$

2) 후향연산자를 이용

$$X_t = Z_t + \theta_1 B Z_t + \theta_2 B^2 Z_t + \dots + \theta_q B^q Z_t$$

이 부분이 바로 MA(q)의 특성방정식

3) 특성방정식을 이용

$$X_t = \theta(B) Z_t$$

$$X_t = \theta(B) Z_t$$

MA(q)의 특성방정식은 $\theta(B)$ 로 표현한다.

MA 모형 | ③ MA 모형의 조건

정상성

시계열의 확률적 특성이 시점에 의존하지 않음

인과성

 t 시점의 관측값이 과거시점의 오차항으로 설명

가역성

 t 시점의 오차항이 과거 시점의 관측값으로 설명

AR 모형에는 없는 조건!

MA 모형 | ③ MA 모형의 조건



정상성과 인과성

정상성

시계열의 확률적 특성이 시점에 의존하지 않음

MA모형은 백색잡음을 만족하는

오차들의 선형결합

인과성

 t 시점의 관측값이 과거시점의 오차항으로 설명

가역성

정상성과 인과성 만족

 t 시점의 오차항이 과거 시점의 관측값으로 설명

AR 모형에는 없는 조건!

가역성 조건 만족 여부만 확인하면 됨!

MA 모형 | ③ MA 모형의 조건 - 가역성

가역성

t 시점의 오차항이 과거 시점의 관측값으로 설명되는 특성

$\sum_{j=0}^{\infty} |\pi_j| < \infty$ 인 $\{\pi_j\}$ 가 존재하며, 아래 식을 만족할 때 가역성을 가짐

$$Z_t = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j X_{t-j} \quad \text{for all } t$$

즉, Z_t 에 대한 식을 X_t 에 대한 식으로 표현할 수 있는지 여부를 따지는 조건

MA 모형 | ③ MA 모형의 조건 - 가역성

MA(1)을 통해 가역성 만족 여부를 확인해보자.

$$X_t = Z_t + \theta Z_{t-1} = (1 + \theta B)Z_t$$

$$(1 + \theta B)^{-1}X_t = Z_t$$

$$(1 + \theta B)^{-1} = \frac{1}{1 - (-\theta B)} = 1 - \theta B + (\theta B)^2 - (\theta B)^3 + \dots$$

MA(1) 식을 X_t 에 대해 정리한 후 식을 풀어보면 무한 등비급수의 합 형태



가역성 조건은 $|\theta| < 1$ 일 때만 성립하며,
이는 특성방정식 $\theta(B) = 0$ 의 근의 절댓값이 1보다 커야 한다는 조건과 동치

MA 모형 | ④ MA 모형의 ACF

MA(1) 모형을 이용하여 ACF를 계산해보자.

STEP 1) MA(1), 식으로 표현

양 변에 X_{t-h} 를 곱하고, 기댓값을 취하여 ACF를 구하도록 한다.

$$X_{t-h}X_t = X_{t-h}(Z_t + \theta_1 Z_{t-1}) = X_{t-h}Z_t + \theta_1 X_{t-h}Z_{t-1}$$
$$\gamma(h) = \text{Cov}(X_{t-h}, Z_t + \theta_1 Z_{t-1}) = \text{Cov}(Z_{t-h} + \theta_1 Z_{t-h-1}, Z_t + \theta_1 Z_{t-1})$$

MA 모형 | ④ MA 모형의 ACF

MA(1) 모형을 이용하여 ACF를 계산해보자.

STEP 2) h 의 범위에 따른 $\gamma(h)$ 확인

$h=0$	$\gamma(0)$	$\text{Cov}(Z_t + \theta_1 Z_{t-1}, Z_t + \theta_1 Z_{t-1}) = \sigma^2 + \theta_1^2 \sigma^2 = (1 + \theta_1^2) \sigma^2$
$h=1$	$\gamma(1)$	$\text{Cov}(Z_{t-1} + \theta_1 Z_{t-2}, Z_t + \theta_1 Z_{t-1}) = \theta_1 \sigma^2$
$h \geq 2$	$\gamma(h)$	$\text{Cov}(Z_{t-h} - \theta_1 Z_{t-h-1}, Z_t - \theta_1 Z_{t-1}) = 0$

MA 모형 | ④ MA 모형의 ACF

MA(1) 모형을 이용하여 ACF를 계산해보자.

유도된 식을 간단히 정리하면 ...

h=0	$\rho(k) = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} = \begin{cases} \frac{\theta}{(1 + \theta^2)}, & k = 1 \\ 0, & k \geq 2 \end{cases}$	$= (1 + \theta_1^2)\sigma^2$
h=1		$\theta_1\sigma^2$
h≥2		$\gamma(h) = \text{COV}(Z_{t-h} - \theta_1 Z_{t-h-1}, Z_t - \theta_1 Z_{t-1}) = 0$



즉, ACF는 시차 q 이후에 **단절**

MA 모형 | ⑤ MA 모형의 PACF

MA모형의 PACF는 Crammer 공식을 통해 구할 수 있음.

MA(1) 모형의 PACF

$$\alpha(k) = \phi_{kk} = \frac{-(-\theta)^k}{(1 + \theta^2 + \dots + \theta^{2k})}, k \geq 1$$

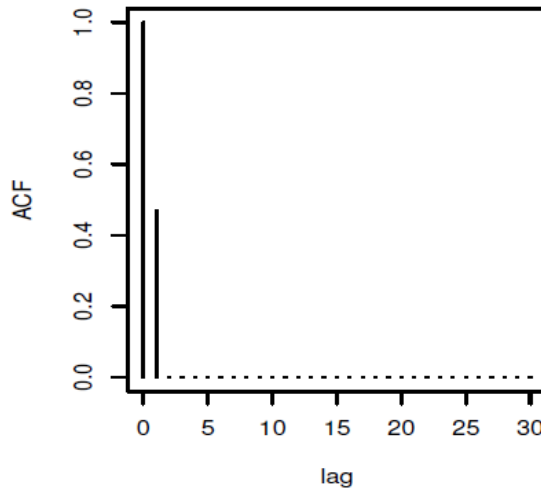
⋮

MA모형은 $|\theta| < 1$ 일 때 성립함을 배웠으므로,

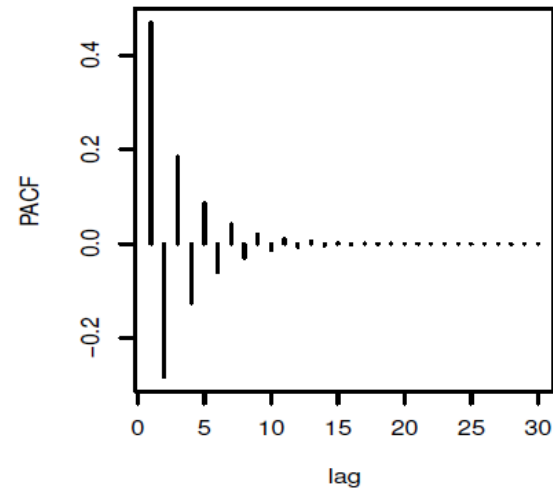
위 식은 **시차 k가 커질수록 0에 수렴**

MA 모형 | MA 모형의 ACF & PACF

MA(1) : ACF



MA(1) : PACF



그림을 통해 MA 모형의 ACF와 PACF를 살펴보면,
앞에서 확인한 바와 같이 **ACF는 시차 1에서 절단,**
PACF는 점점 0으로 수렴된 양상을 보이고 있음.

6

AR과 MA의 쌍대성

AR 모형과 MA 모형의 쌍대성

AR 모형과 MA 모형의 쌍대성

유한차수 AR 모형은 무한차수 MA로,
유한차수 MA 모형은 무한차수 AR로 표현될 수 있는 특성



AR(1) \rightarrow MA(∞)

$$\begin{aligned}
 X_t &= \phi_1 X_{t-1} + Z_t \\
 &= \phi_1 (\phi_1 X_{t-2} + Z_{t-1}) + Z_t \\
 &= \phi_1^2 X_{t-2} + \phi_1 Z_{t-1} + Z_t \\
 &= \phi_1^2 (\phi_1 X_{t-3} + Z_{t-2}) + \phi_1 Z_{t-1} + Z_t = \phi_1^3 X_{t-3} + \phi_1^2 Z_{t-2} + \phi_1 Z_{t-1} + Z_t \\
 &= \dots = \phi_1^{M+1} X_{t-M-1} + \sum_{j=0}^M \phi_1^j Z_{t-j}
 \end{aligned}$$

AR 모형과 MA 모형의 쌍대성

AR 모형과 MA 모형의 쌍대성

유한차수 AR 모형은 무한차수 MA로,
유한차수 MA 모형은 무한차수 AR로 표현될 수 있는 특성

AR(1) \rightarrow MA(∞)

AR 모형의 성질 및 조건을 활용하면

$$\begin{aligned}
 X_t &= \sum_{j=0}^{\infty} \phi_1^j Z_{t-j} \text{로 MA 모형이 됨} \\
 &= \phi_1(\phi_1 X_{t-1} + Z_{t-1}) + Z_t \\
 &= \phi_1^2 X_{t-2} + \phi_1 Z_{t-1} + Z_t \\
 &= \phi_1^2(\phi_1 X_{t-3} + Z_{t-3}) + \phi_1 Z_{t-2} + Z_t = \phi_1^3 X_{t-3} + \phi_1^2 Z_{t-2} + \phi_1 Z_{t-1} + Z_t \\
 &= \dots = \phi_1^{M+1} X_{t-M-1} + \sum_{j=0}^M \phi_1^j Z_{t-j}
 \end{aligned}$$

AR 모형과 MA 모형의 쌍대성

MA(1) \rightarrow AR(∞)

$$X_t = \theta_1 B Z_t + Z_t$$

$$X_t = (1 + \theta_1 B) Z_t \rightarrow Z_t = \frac{1}{1 - (-\theta_1 B)} X_t$$

$$(1 - \theta_1 B + \theta_1^2 B^2 - \dots) X_t = Z_t$$

$$X_t - \theta_1 B X_t + \theta_1^2 B^2 X_t - \dots = Z_t$$

$$X_t = \theta_1 B X_t - \theta_1^2 B^2 X_t + \dots + Z_t$$



관측값이 과거 관측값과 현 시점 오차항으로 표현되어

AR 모형으로 표현

7

ARMA

AR모형과 MA모형의 한계

AR 모형이나 MA 모형만 사용할 경우 모수 p 나 q 가 너무 커져
효율성이 떨어지고 해석이 어려워짐



모수의 절약을 위해 AR 모형과 MA 모형을 반영한 ARMA 모형 사용

ARMA

ARMA 모형 수식

$$X_t - \phi_1 X_{t-1} - \phi_2 X_{t-2} - \cdots - \phi_p X_{t-p} = Z_t + \theta_1 Z_{t-1} + \theta_2 Z_{t-2} + \cdots + \theta_q Z_{t-q}$$

ARMA 특성방정식

$$\begin{aligned} X_t - \phi_1 X_{t-1} - \phi_2 X_{t-2} - \cdots - \phi_p X_{t-p} \\ = Z_t + \theta_1 Z_{t-1} + \theta_2 Z_{t-2} + \cdots + \theta_q Z_{t-q} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_t - \phi_1 B X_t - \phi_2 B^2 X_t - \cdots - \phi_p B^p X_t \\ = Z_t + \theta_1 B Z_t + \theta_2 B^2 Z_{t-2} + \cdots + \theta_q B^q Z_t \end{aligned}$$

$$(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \cdots - \phi_p B^p) X_t = (1 + \theta_1 B + \theta_2 B^2 + \cdots + \theta_q B^q) Z_t$$

$$\phi(B) X_t = \theta(B) Z_t$$

ARMA

ARMA 모형 수식

$$X_t - \phi_1 X_{t-1} - \phi_2 X_{t-2} - \cdots - \phi_p X_{t-p} = Z_t + \theta_1 Z_{t-1} + \theta_2 Z_{t-2} + \cdots + \theta_q Z_{t-q}$$

ARMA 특성방정식

$$\begin{aligned} & \text{AR 모형의 특성방정식} \quad X_t - \phi_1 X_{t-1} - \phi_2 X_{t-2} - \cdots - \phi_p X_{t-p} \\ & \text{MA 모형의 특성방정식} \quad = Z_t + \theta_1 Z_{t-1} + \theta_2 Z_{t-2} + \cdots + \theta_q Z_{t-q} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & X_t - \phi_1 B X_t - \phi_2 B^2 X_t - \cdots - \phi_p B^p X_t \\ & = Z_t + \theta_1 B Z_t + \theta_2 B^2 Z_t + \cdots + \theta_q B^q Z_t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \cdots - \phi_p B^p) X_t = (1 + \theta_1 B + \theta_2 B^2 + \cdots + \theta_q B^q) Z_t \\ & \phi(B) X_t = \theta(B) Z_t \end{aligned}$$

ARMA | 모형의 조건

정상성

시계열의 확률적 특성이 시점에 의존하지 않음

인과성

 t 시점의 관측값이 과거시점의 오차항으로 설명

가역성

 t 시점의 오차항이 과거 시점의 관측값으로 설명

식별성

주어진 파라미터 조합에 대해 단 하나의 모형이 대응되는 특성

새로 추가된 조건!

ARMA | 식별성

$$X_t = Z_t$$

위 식은 $(1 - \phi B)X_t = (1 + \theta B)Z_t \leftrightarrow \phi = -\theta$ 을 만족하는 ARMA(1, 1)

⋮

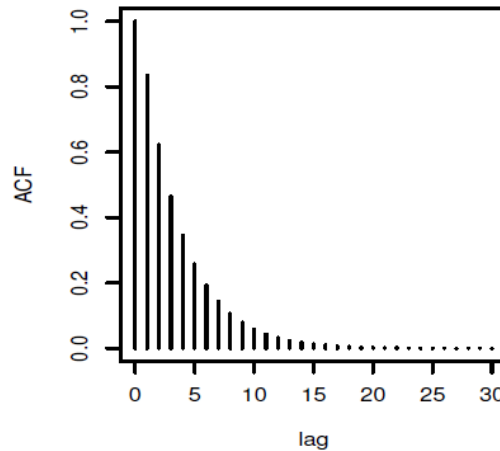


그러나, $(1 - \phi B) = (1 + \theta B)$ 조건 만족시
 $X_t = Z_t$, 즉 WN이 되어 모형 식별 어려우므로
추가적으로 $\phi + \theta \neq 0$ 식별성 조건 필요

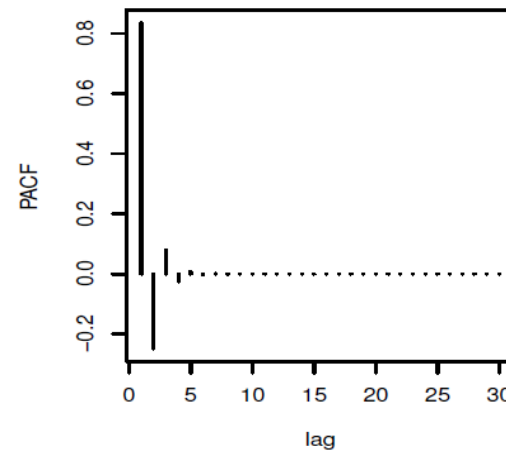


ARMA 모형 | ARMA 모형의 ACF & PACF

ARMA(1,1) : ACF



ARMA(1,1) : PACF



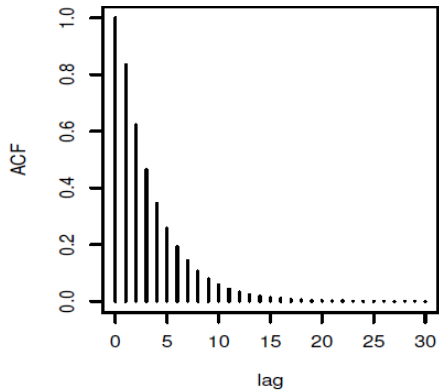
그림을 통해 ARMA 모형의 ACF와 PACF를 살펴보면,

두 그래프 모두 **지수적으로 감소**하거나

싸인함수 형태로 소멸되는 양상이 나타남

ARMA 모형 | ARMA 모형의 ACF & PACF

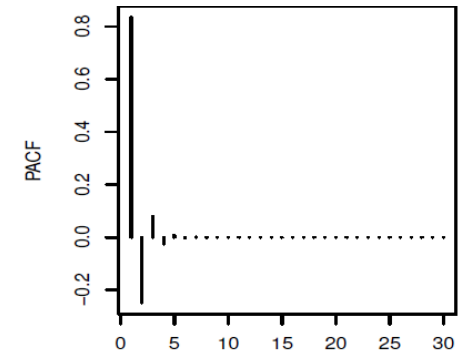
ARMA(1,1) : ACF



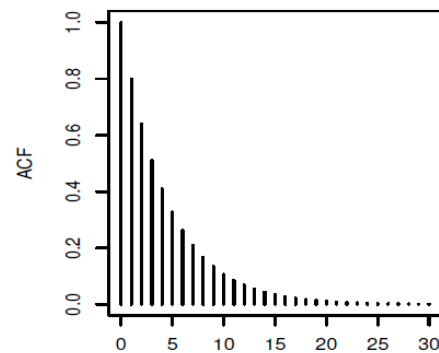
ARMA ACF 와 AR ACF,
ARMA PACF 와 MA PACF 그래프가 유사



ARMA(1,1) : PACF



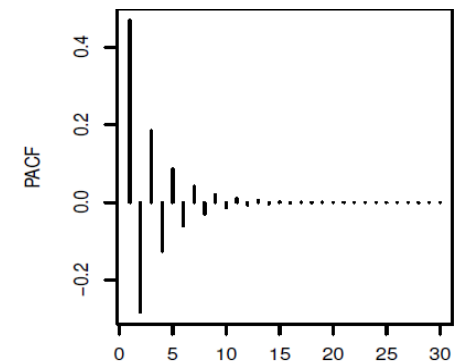
AR(1) : ACF



모형 식별을 위한
추가적인 방법 필요



MA(1) : PACF



모형적합에서 이를 알아보자!

8

모형 적합

모형 식별

ARMA



AR



MA



모형 식별

STEP 1) 사용할 모형과 차수 결정

AR / MA : ACF 또는 PACF 확인을 통해 차수까지 쉽게 결정 가능

ARMA : ACF와 PACF 모두 지수적으로 감소

→ **IC(Information Criteria)** 사용



IC를 가장 작게 만드는 모형 선택하여 분석 !

모형 식별

① AIC (Akaike Information Criteria)

$$-2 \ln L_n(\hat{\theta}) + 2(p + q + 1)$$

IID 가정

② AICC (AIC bias corrected)

$$-2 \ln L_n(\hat{\theta}) + \frac{2(p + q + 1)n}{n - (p + q + 1) + 1}$$

time dependency 에 대한 correction

③ BIC (Bayesian information Criteria)

$$-2 \ln L_n(\hat{\theta}) + (p + q + 1) \ln n$$

모수 추정

STEP 2) 모수 추정

모수의 차수를 결정했다면, 파라미터 ϕ, θ, σ^2 을 추정

① 최대가능도추정법 (MLE)

관측된 시계열의 결합확률밀도함수의 가능도 함수를 최대화하는 모수를 추정량으로 함

② 최소제곱법 (LSE)

오차 제곱합이 가장 작게 되도록 모수의 추정량을 구함

③ 적률추정법 (MME/MoM)

모집단의 적률을 상응하는 표본의 적률로 대체한 후, 방정식을 풀어 모수의 추정량을 구함

모형 진단

STEP 3) 모형 진단

모형 식별과 모수 추정을 마쳤다면, 모형 적합성을 진단



모수에 대한 검정

- 1) 모형의 조건을 만족하는지 확인 : 정상성, 가역성, 식별성 조건 만족 여부
- 2) 모수의 유효성 확인 : 모수가 0이 아니라는 귀무가설 검정

모형 진단

STEP 3) 모형 진단

모형 식별과 모수 추정을 마쳤다면, 모형 적합성을 진단



잔차에 대한 검정

- 1) 추세, 계절성, 이상치가 없는지 확인
- 2) $WN(0, \sigma^2)$ 을 따르는지 확인 (자기상관성 유무)
- 3) 정규성을 만족하는지 확인

잔차에 대한 ACF, PACF 그래프 / Ljung-Box test / McLeod-Li test / Different sign test 등

예측 (Prediction)

STEP 4) 예측

과거의 모든 정보를 알고 있다고 가정하는 infinite한 방법

알고 있는 정보만을 사용해 예측하는 **finite**한 방법



가지고 있는 데이터의 **선형결합**을 활용해 미래를 예측

좀만 더
힘내보자!



예측 (Prediction)

예측 시점을 선형결합으로 표현

$$P_n X_{n+h} = a_0 \cdot 1 + a_1 X_n + a_2 X_{n-1} + \cdots + a_n X_1$$

n개의 자료를 이용해 n+h 시점을 예측한 선형결합



MSPE 최소화

$$\text{MSPE} = E[X_{n+h} - P_n X_{n+h}]^2 = E[X_{n+h} - a_0 \cdot 1 + a_1 X_n + a_2 X_{n-1} + \cdots + a_n X_1]^2$$

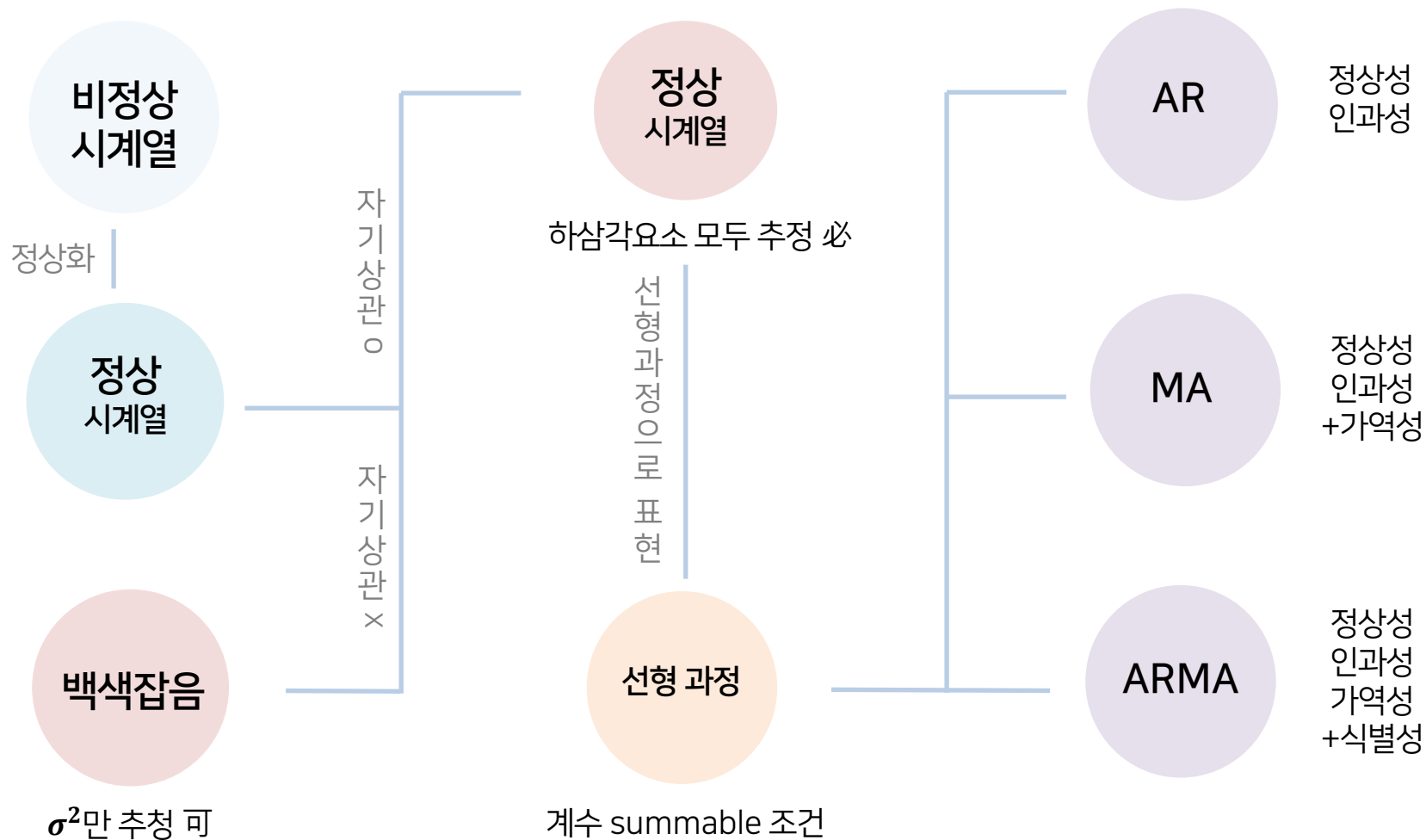
위 식을 최소화하는 계수 P_n 추정

회귀분석의 LSE와 동일한 계산 방식



흐름정리

시계열 자료 분석 흐름정리



감사합니다

