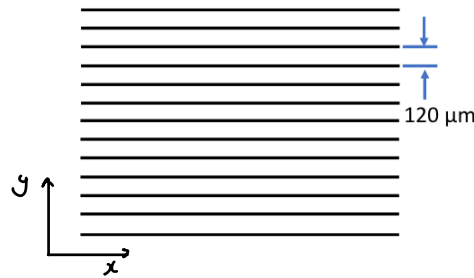


Homework #3

2023 EE402
Digital Image Processing

1. (60 pts) The size of the strip image is 2000 by 2000, and the pixel distance (Δx and Δy) is $20 \mu\text{m}$. Assume that the width of the strips is very thin, so that it can be considered as an impulse train along the vertical axis. The distance between the strips is $120 \mu\text{m}$.

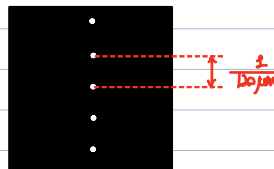


- (a) Draw the 2D frequency spectrum of the image, explain why. (10 pts)

2방향으로의 Fourier transform과 y 방향으로의 Fourier transform을 관련해서 생각해 보면, 아래와 같다.

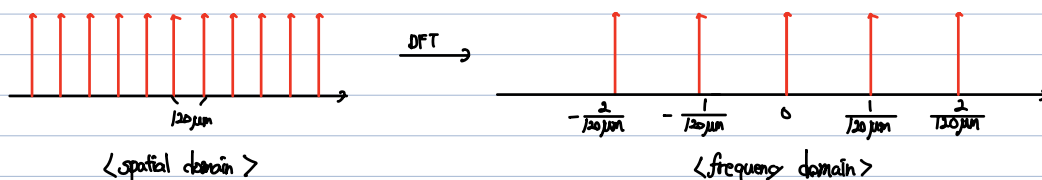
(x방향: spatial domain에서 constant 이므로, frequency domain에서는 delta function이 된다.
y방향: spatial domain에서 impulse train 이므로, frequency domain에서 역시 impulse train 이 된다.
여기서, frequency domain에서의 impulse train의 주기는 spatial domain에서의 주기의 역수가 된다.
문제를 주어진 정보에 따르면, strip 사이의 간격은 $120 \mu\text{m}$ 이므로, frequency domain에서
생기는 impulse train function 사이의 간격은 $\frac{1}{120 \mu\text{m}}$ 이 될 것이다.

이를 그림으로 표현하면 아래와 같은 형태를 가질 것이다.



- (b) What is the maximum frequency of the 2D frequency spectrum? Indicate the frequencies of the principal spectral components in the spectral image. Assume that the spectrum was centered; the center is the zero frequency. (15 pts)

pixel distance가 $20 \mu\text{m}$ 이므로, $f_s = \frac{1}{20 \mu\text{m}}$ 이다. $\frac{1}{\Delta T} = 2 f_{\max}$ 이고, $f_s = \frac{1}{\Delta T}$ 이므로, $f_{\max} = \frac{1}{40 \mu\text{m}}$ 이다.
위에서 이야기했듯이 frequency domain에서의 impulse train 사이의 간격은 spatial domain에서 impulse train 사이의
간격의 역수이고, spectrum이 중심에 위치해있다고 가정하였으므로 이를 그림으로 표현하면 아래와 같다.



- (c) You want to remove all the frequency components except DC. How to do this? Explain the method by using the equations based on a Butterworth shaped transfer function. (15 pts)

Butterworth shaped transfer function을 이용하여 DC를 제외한 frequency component를 제거하는 과정은 아래와 같다.

1. $M \times N$ 의 size를 갖는 input image $f(x, y)$ 로 부터 padding size P, Q 를 얻는다. 이때, $P = 2M, Q = 2N$ 이다.
문제에서 주어진 image의 크기는 2000×2000 이므로 $M = N = 2000, P = Q = 4000$ 이다.
2. $f(x, y)$ 에 padding을 적용하여 $P \times Q$ size를 갖는 $f_p(x, y)$ 를 얻는다.
3. $f_p(x, y)$ 에 $(-1)^{x+y}$ 를 곱해준다. (Fourier Transform의 결과가 $P \times Q$ frequency rectangle에서 중앙에 위치하도록 하기 위한.)
4. 위의 3에서 얻은 결과의 DFT를 계산한다. 그 결과를 $F(u, v)$ 라 하자.
5. frequency domain에서의 filter transfer function, $H(u, v)$ 를 construct 한다. 이때, Butterworth shaped transfer function을 사용한다고 하였으므로, $H(u, v)$ 는 아래와 같다.

$$H(u, v) = \frac{1}{1 + [D(u, v)/D_0]^{2n}}$$

이때, D_0 는 positive constant, $D(u, v)$ 는 point (u, v) 와 center $(P/2, Q/2)$ 사이의 Euclidean distance이다.
 n 값을 조절하여 $H(u, v)$ 의 sharpness를 조절할 수 있으며 일반적으로 2~3 사이의 값을 이용한다. 정리하면, $H(u, v)$ 는 아래와 같다.

$$H(u, v) = \frac{1}{1 + \left(\frac{\sqrt{(u-2000)^2 + (v-2000)^2}}{D_0} \right)^{2n}}$$

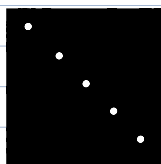
6. 위에서 구한 $F(u, v)$ 와 $H(u, v)$ 를 곱해 (array multiplication) $G(u, v)$ 를 얻는다. ($G(u, v) = H(u, v)F(u, v)$)
7. $G(u, v)$ 에 inverse DFT를 적용하여 실수부만을 취하고, $(-1)^{x+y}$ 를 곱해 $g_p(x, y)$ 를 얻는다.
 $g_p(x, y) = \{ \text{real} [F^{-1} [G(u, v)]] \} (-1)^{x+y}$
8. $g_p(x, y)$ 의 과정에서 $M \times N (= 2000 \times 2000)$ 크기의 영역을 crop 하여, 최종 결과인 $g(x, y)$ 를 얻는다.

- (d) What happen to the image in the spatial domain after (c), i.e., rejection of all the frequency components except DC. (10 pts)

frequency domain에서 DC component만을 남겨두고 모두 rejection 하였으므로, 이는 delta function이다. delta function의 Fourier Transform은 constant 이므로, (c) 과정 이후 spatial domain에서는 모든 pixel이 동일한 값을 가질 것이다.
이때, $F(0, 0) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y)$ 이므로 spatial domain에서 모든 pixel이 original image에서의 평균 pixel 값을 가질 것이다.

- (e) If the strip image is rotated 45° counterclockwise, draw the 2D frequency spectrum of the rotated image. Explain why (10 pts).

polar coordinate ($x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, u = w \cos \phi, v = w \sin \phi$)를 이용하면, $f(r, \theta) \xrightarrow{FT} F(w, \phi)$ 이때,
 $f(r, \theta + \theta_0) \xrightarrow{FT} F(w, \phi + \phi_0)$ 일 수 있다. 따라서, strip image를 반시계 방향으로 45° 회전시켰을 때의 2D frequency spectrum은 (a)에서 구한 결과를 반시계 방향으로 45° 회전시킨 결과와 같다. 이를 그리면 아래와 같다.



2. (80 pts) For edge detection, you may use a high pass filter in either the spatial or frequency domain.



$$h = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -8 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- (a) Write a program to obtain the edge information of the moon image (i.e., moon-blurry.tif) by the filtering in the spatial domain. Use the Laplacian kernel including the diagonal terms. Show the resultant image. (30 pts)

결과 이미지는 뒤에 따로 첨부했습니다.

- (b) Write a program to obtain the edge information of the moon image by the filtering in the frequency domain. You need to obtain the transfer function of the Laplacian kernel including the diagonal terms. Show the transfer function and resultant image. (40 pts)

결과 이미지는 뒤에 따로 첨부했습니다.

Diagonal term을 포함한 Laplacian kernel의 transfer function을 구하는 과정은 아래와 같다.

$$\nabla^2 f(x, y) = f(x-1, y-1) + f(x, y-1) + f(x+1, y-1) + f(x-1, y) + f(x+1, y) + f(x-1, y+1) + f(x, y+1) + f(x+1, y+1) - 8f(x, y)$$

Fourier Transform을 적용한 결과는 아래와 같다. ($f(x, y)$ 의 크기가 $M \times N$ 이라 가정)

$$F.T[\nabla^2 f(x, y)] = F(u, v) \left\{ e^{-j2\pi u/M} \cdot e^{-j2\pi v/N} + e^{-j2\pi v/N} + e^{-j2\pi (-u/M)} \cdot e^{-j2\pi (v/N)} + e^{-j2\pi u/M} + e^{-j2\pi (-u/M)} + e^{-j2\pi (-v/N)} + e^{-j2\pi (-v/N)} + e^{-j2\pi (-u/M)} \cdot e^{-j2\pi (-v/N)} - 8 \right\}$$

$$= H(u, v)$$

위의 $H(u, v)$ 를 정리하면 아래와 같다.

$$H(u, v) = (e^{j2\pi v/N} + e^{-j2\pi v/N}) + (e^{j2\pi u/M} + e^{-j2\pi u/M}) + (e^{j2\pi (u/M + v/N)} + e^{-j2\pi (u/M + v/N)}) + (e^{j2\pi (u/M - v/N)} + e^{-j2\pi (u/M - v/N)}) - 8$$

$$= 2 \cos(2\pi v/N) + 2 \cos(2\pi u/M) + 2 \cos(2\pi (u/M + v/N)) + 2 \cos(2\pi (u/M - v/N)) - 8$$

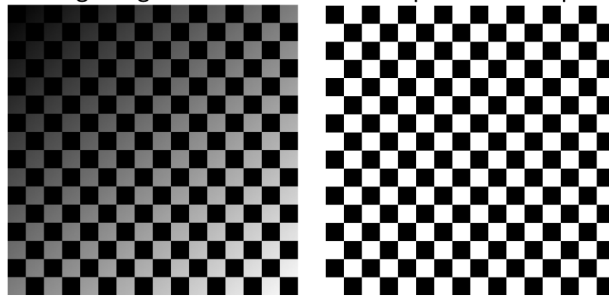
$$= 2 \cos(2\pi v/N) + 2 \cos(2\pi u/M) + 4 \cos(2\pi u/M) \cos(2\pi v/N) - 8$$

$\cos x = \frac{1}{2} (e^{jx} + e^{-jx})$
 $\cos a + \cos b = 2 \cos(\frac{a+b}{2}) \cos(\frac{a-b}{2})$

최종적으로, $H(u, v)$ 를 정리하면 아래와 같다.

$$H(u, v) = 2 \cos(2\pi (v - N/2)/N) + 2 \cos(2\pi (u - M/2)/M) + 4 \cos(2\pi (u - M/2)/M) \cos(2\pi (v - N/2)/N) - 8$$

3. (70 pts) A useful application of lowpass filtering is correcting images that exhibit a shading pattern caused by nonuniform illumination, often referred to as an illumination gradient. The following image on the left is an example of such a phenomenon.



When the illumination gradient varies slowly (i.e., it is a low-frequency spatial pattern), it is possible to estimate it using aggressive lowpass filtering. The effect of nonuniform illumination can then be corrected by dividing the image by the illumination pattern. The image on the right is an example of using the approach.

- (a) Write a function, **ShadingCorrection.m**, that implements the method just described. Use Gaussian lowpass filtering and 'symmetric' padding. Read the image 'checkerboard1024-shaded.tif' and use your function to generate a result that looks approximately like the preceding image on the right. **Display the shading pattern computed by your function and the corrected image obtained using the pattern.**

결과 이미지를 뒤에 따로 첨부했습니다.

- (b) What percentage of the padded input image power was removed using the Gaussian lowpass filter to obtain the corrected image? Explain how to obtain the value. (20 pts)

계산 과정에 대한 설명과 계산 결과는 뒤에 따로 첨부했습니다.
