

# Вопросы к экзамену по теорполю

3 июня 2020 г.

## Перед просмотром

После названий некоторых вопросов указаны страницы с информацией по данной теме в лекциях Э. Т. Ахмедова <https://mipt.ru/upload/medialibrary/37f/lecturesto.pdf>.

## Содержание

	4
1 Преобразование Лоренца вдоль направления оси $x$ . Релятивистские $\gamma$ - и $\beta$ -факторы. . . . .	4
2 Световой конус и относительность одновременности (стр. 8) . .	5
3 Лоренцево сокращение длин (стр. 10) . . . . .	6
4 Релятивистское сложение скоростей вдоль одного и того же направления (стр. 11) . . . . .	7
5 Вычислить $\operatorname{div} \mathbf{r}$ . . . . .	8
6 Вектор 4-скорости и 4-ускорения и их скалярное произведение. .	8
7 Компоненты 4-импульса и связь энергии с трёхмерным импульсом.	8
8 Преобразование Лоренца произвольного вектора при бусте вдоль оси $x$ . . . . .	8
9 Эффективная масса нескольких частиц. . . . .	9
10 Калибровочные преобразования потенциалов. . . . .	9
11 Калибровочные преобразования потенциалов в трёхмерной форме (стр. 40) . . . . .	9
12 Калибровочные преобразования потенциалов в четырехмерной форме (стр. 41) . . . . .	9
13 Выражения для $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ через компоненты 4-потенциала (стр. 40)	10
14 Выражение для тензора электромагнитного поля через 4-вектор потенциал. . . . .	10

15	Сила Лоренца (стр. 44)	10
16	Скорость дрейфа в скрещенных электромагнитных полях (стр. 49)	11
17	Магнитное зеркало (стр. 54)	12
18	Вычислить среднее $\langle (\vec{a}, \vec{n}) (\vec{b}, \vec{n}) \rangle$ по всем направлениям единичного вектора $\vec{n}$ при постоянных $\vec{a}, \vec{b}$ (стр. 56)	12
19	Вычислить среднее $\langle [\vec{a}, \vec{n}] (\vec{b}, \vec{n}) \rangle$ по всем направлениям единичного вектора $\vec{n}$ при постоянных $\vec{a}, \vec{b}$ (стр. 56)	13
20	Четыре-вектор тока и его компоненты (стр. 60)	13
21	Уравнение непрерывности в четырехмерной и трехмерной форме (стр. 60)	13
22	Плотность энергии электромагнитного поля (стр. 75)	14
23	Вектор Умова-Пойнтинга (стр. 75)	15
24	Вектор потенциал $A$ для плоской и монохроматической электромагнитной волны.	15
25	Поляризация плоской монохроматической электромагнитной волны.	17
26	Векторы $E, B$ и Умова-Пойнтинга в плоской и монохроматической электромагнитной волне.	17
27	Классический радиус электрона и как он возникает в выражениях, описывающих рассеяние электромагнитных волн.	17
28	Аберрация света.	17
29	Собственное время.	17
30	Вычислить $\text{grad} \frac{1}{ \vec{r} }$	17
31	Вычислить $\text{grad} \frac{1}{(\vec{k}, \vec{r})}$ , где $\vec{k}$ — постоянный вектор.	17
32	Вычислить $\text{grad} e^{i(\vec{k}, \vec{r})}$ , где $\vec{k}$ — постоянный вектор.	18
33	Вычислить $\varepsilon_{ijk} x_i x_k$ .	18
34	Вычислить $\delta_{ij} \partial_i x_k$ .	18
35	Вычислить $\delta_{ij} \partial_i x_j$ .	18
36	Действие для свободной релятивистской частицы.	18
37	Вывести формулу для эффекта Доплера.	18
38	Может ли свободный электрон излучить фотон? Объяснение.	18
39	Действие для релятивистской частицы во внешнем электромагнитном поле.	18
40	Уравнение движения для релятивистской частицы во внешнем электромагнитном поле в 4-мерной форме.	18
41	Обобщенный импульс и энергия.	19

42	Получите инварианты поля в четырехмерной (через тензор поля) исходя из тензора э-м поля. . . . .	19
43	Инварианты электромагнитного поля в трехмерной форме (через $E$ и $B$ ). . . . .	19
44	Вычислить среднее $\langle [\vec{a}, \vec{r}] \vec{r} \rangle$ по всем направлениям вектора $\vec{r}$ при постоянных $ \vec{r} $ , $\vec{a}$ , $\vec{b}$ . . . . .	19
45	Вычислить среднее $\langle [\vec{a}, \vec{n}] [\vec{b}, \vec{n}] \rangle$ по всем направлениям вектора $\vec{n}$ при постоянных $\vec{a}$ , $\vec{b}$ . . . . .	19
46	Первая и вторая пара уравнений Максвелла в четырехмерной форме. . . . .	19
47	Дипольный электрический момент и поле, создаваемое им. . . . .	19
48	Квадрупольный момент. . . . .	19
49	Энергия электрического диполя и квадрупольного во внешнем поле. . . . .	20
50	Потенциальная энергия взаимодействия диполя с диполем. . . . .	20
51	Закон Био-Савара – магнитное поле, создаваемое стационарным током. . . . .	20
52	Калибровка Лоренца и вторая пара уравнений Максвелла в ней. . . . .	20
53	Калибровка Кулона и уравнение на три-вектор потенциал $A$ в присутствии стационарного тока. . . . .	20
54	Дипольный магнитный момент и поле, создаваемое им. . . . .	20
55	Прецессия магнитного момента в магнитном поле. Частота Лармора. . . . .	20
56	Запаздывающие потенциалы. . . . .	20
57	Получить Потенциалы Лиенара-Вихерта в трехмерной и четырехмерной форме из запаздывающих потенциалов. . . . .	21
58	Волновая зона. Характер поведения полей $E$ и $B$ вблизи движущегося заряда. . . . .	21
59	Длина формирования излучения или длина когерентности. . . . .	21
60	Характер распределения по углам излучения в ультрарелятивистском случае. . . . .	21
61	Интенсивность излучения в дипольном приближении. . . . .	21
62	Характерная частота при синхротронном излучении. . . . .	21
63	Радиационная сила трения. Критерий применимости. . . . .	21
64	Лоренцева линия. Естественная ширина линии. . . . .	21
65	Формула Томсона для сечения рассеяния. . . . .	21
66	Тензор электромагнитного поля и связь его компонент с $E$ и $B$ . . . . .	22
67	Гамильтониан частицы в нерелятивистском приближении во внешнем электромагнитном поле. . . . .	22
68	Можно ли превысить скорость света при движении под действием постоянной силы? Объяснение. . . . .	22

69	Четыре-вектор тока для точечной частицы. . . . .	22
70	Первая и вторая пара уравнений Максвелла в трехмерной форме. . . . .	22
71	Тензор энергии-импульса для точечной частицы. . . . .	22
72	Тензор энергии-импульса электромагнитного поля. . . . .	22
73	Закон сохранения тензора энергии-импульса. . . . .	22
74	Уравнение Пуассона и его решение. Потенциал Кулона. . . . .	22
75	Разложение электромагнитного поля на осцилляторы. Фурье разложение $A$ , $E$ и $B$ . . . . .	23
76	Действие для осцилляторов (собственных колебаний) электромагнитного поля. . . . .	23
77	Запаздывающая функция Грина для электромагнитного поля и ее свойства. . . . .	23
78	Получить запаздывающие потенциалы из запаздывающей функции Грина. . . . .	23
79	Характер зависимости поля произвольно движущегося заряда от расстояния. Сколько слагаемых в $E$ и $B$ ? Как они падают с расстоянием? Как зависят от ускорения? . . . . .	23
80	Мощность потерь на излучение в релятивистском случае и его связь с полной интенсивностью излучения. . . . .	23
81	Критерий применимости силы радиационного терия. . . . .	23
82	Критерий применимости нерелятивистского приближения для излучения. . . . .	23
83	Критерий применимости формулы Томсона для рассеяния. . . . .	24

**Определение.** Здесь может быть *определение* чего-нибудь.

**Теорема** (Кого-нибудь о чём-нибудь). *Здесь может быть теорема.*

В данном документе для 3-векторов используются латинские индексы, а для 4-векторов — греческие.

## 1 Преобразование Лоренца вдоль направления оси $x$ . Релятивистские $\gamma$ - и $\beta$ -факторы.

Буст Лоренца со скоростью  $v$  в положительном направлении оси  $x$

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

где  $\beta = v/c$ ,  $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$ .

## 2 Световой конус и относительность одновременности (стр. 8)

**Определение.** Фигура, которая замещается в ПВ всеми возможными лучами света, проходящими через данную точку, называется *световой конус* (см. рис. 1).

**Определение.** Точка в ПВ называется *событием* или *мировой точкой*.

**Определение.** Линия, замещаемая точечной частицей в ПВ, называется *мировой линией*.

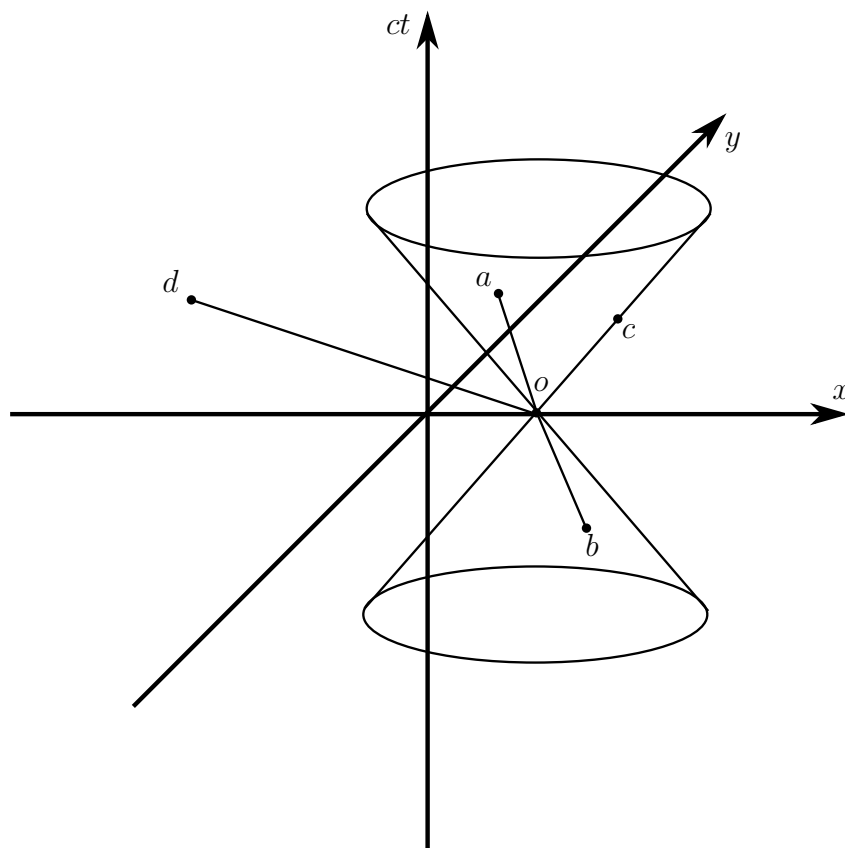


Рис. 1: Световой конус

В данном вопросе стоит обсудить *принцип причинности* (рис. 1). Любое событие из верхней части светового конуса (например в мировой точке  $a$  находится в абсолютном будущем по отношению к вершине конуса  $o$ . Т. е. в любой

СО это событие произойдет позже, чем то, что произойдёт в вершине конуса. Любое же событие в нижней части светового конуса (например, событие в мировой точке  $b$  находится в абсолютном прошлом по отношению к вершине конуса. В прошлом или в будущем событие вне светового конуса (например, событие в мировой точке  $d$  по отношению к вершине конуса зависят от СО.

Объясним откуда следуют эти утверждения. Любая мировая точка внутри светового конуса соединяется с его вершиной отрезком с интервалом  $\Delta s^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 > 0$ , т. к. для такого интервала смещение в пространстве и во времени связаны как  $|\Delta \mathbf{x}| < c|\Delta t|$ . Более того  $\Delta t$  не возможно положить равным нулю выбором СО, т. к. иначе нарушилось бы условие  $\Delta s^2 > 0$ . Поэтому если  $\Delta t > 0$  в одной СО, то  $\Delta t > 0$  и в любой другой СО. Тоже верно и в случае, если  $\Delta t < 0$ . Интервалы, для которых верно  $\Delta s^2 > 0$  называются *временноподобными*.

Любая мировая точка вне светового конуса соединяется с его вершиной отрезком с  $\Delta s^2 < 0$ , т. к. для таких интервалов  $|\Delta \mathbf{x}| > c|\Delta t|$ . Поэтому, для таких интервалов выбором СО можно положить  $\Delta = 0$ , т. е., меняя систему отсчёта, можно сменить знак  $\Delta t$ . Следовательно, если событие было в прошлом по отношению к вершине конуса в одной СО, то его можно положить в будущее по отношению к вершине выбором другой СО. Интервалы, для которых верно  $\Delta s^2 < 0$  называются *пространственноподобными*.

И наконец, любая точка на световом конусе соединяется с его вершиной интервалом с  $\Delta s^2 = 0$ , т. к. для такого интервала  $|\Delta \mathbf{x}| = c|\Delta t|$ . Такие интервалы называются *нулевыми* или *светоподобными*. Очевидно, является ли интервал светоподобными, пространственноподобным или временноподобным не зависит от СО, т. к. величина интервала не зависит от СО.

В СТО дновременность относительна. См., например, вопрос 3

### 3 Лоренцево сокращение длин (стр. 10)

Рассмотрим движение стержня длины  $l_0$  вдоль своей оси симметрии со скоростью  $v$ . Пусть в ИСО стержня его задний конец находится в начале координат  $x'_1 = 0$ , а передний, соответственно в  $x'_2 = l_0$ . Пусть теперь в ЛСО в какой-то момент времени  $t$  (по часам ЛСО) задний конец стержня находится в точке  $x_1$ , а передний в точке  $x_2$ . Найдём  $l = x_2 - x_1$ . Из формулы для буста

Лоренца (см. вопрос 1) мы знаем как  $x'$  и  $t'$  связаны с  $x$  и  $t$ :

$$\begin{aligned}x'_1 &\equiv 0 = (x_1 - \beta ct)\gamma \\x'_2 &\equiv l_0 = (x_2 - \beta ct)\gamma \\t'_1 &= \left(t - \frac{\beta x_1}{c}\right)\gamma \\t'_2 &= \left(t - \frac{\beta x_2}{c}\right)\gamma\end{aligned}$$

Из рассматриваемых уравнений следует, что

$$t'_2 - t'_1 = \frac{\gamma\beta}{c}(x_2 - x_1) \equiv \frac{\gamma\beta l}{c} > 0.$$

Т. е. если в ЛСО концы стержня находятся в точках  $x_1$  и  $x_2$  одновременно, то в системе отсчёта стержня попадание его заднего конца в точку  $x_1$ , а переднего — в точку  $x_2$  в ЛСО не есть одновременные события. Но при этом интервалы в двух ИСО должны быть равны:

$$\begin{aligned}ds^2 &= c^2(t - t)^2 - (x_2 - x_1)^2 = -(x_2 - x_1)^2 \equiv -l^2 \\ds^2 &= c^2(t'_2 - t'_1)^2 - (x'_2 - x'_1)^2 = l^2\gamma^2\beta^2 - l_0^2.\end{aligned}$$

Поэтому  $l^2 = -l^2\gamma^2\beta^2 + l_0^2$ , отсюда

$$l = l_0/\gamma.$$

Это явление в СТО и называется *Лоренцевым сокращением длин*.

## 4 Релятивистское сложение скоростей вдоль одного и того же направления (стр. 11)

Пусть  $K$  — ЛСО;  $K_1$  — ИСО, движущаяся с скоростью  $v$  в ЛСО;  $K_2$  — ИСО, движущаяся со скоростью  $u$  в системе  $K_1$ . Сделаем два буста Лоренца подряд — сначала для перехода из  $K$  в  $K_1$ , а затем из  $K_1$  в  $K_2$ . Т. е. мы должны применить композицию двух Лоренцевских бустов с параметрами:  $\cosh \alpha_1 = 1/\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ ,  $\tanh \alpha_1 = v/c$  и  $\cosh \alpha_2 = 1/\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}$ ,  $\tanh \alpha_2 = u/c$ :

$$\begin{pmatrix} ct_1 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \alpha_1 & \sinh \alpha_1 \\ \sinh \alpha_1 & \cosh \alpha_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} ct_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \alpha_2 & \sinh \alpha_2 \\ \sinh \alpha_2 & \cosh \alpha_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct_1 \\ x_1 \end{pmatrix}.$$

В результате мы получим опять буст Лоренца для перехода из  $K$  прямо в  $K_2$ , а параметр его будет равен  $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ . Т. е. скорость системы  $K_2$  по отношению к системе  $K$  будет равна

$$\frac{V}{c} = \tanh(\alpha_1 + \alpha_2) = \frac{\tanh \alpha_1 + \tanh \alpha_2}{1 + \tanh \alpha_1 \tanh \alpha_2} = \frac{v/c + u/c}{1 + \frac{vu}{c^2}}.$$

$$\frac{V}{c} = \frac{v/c + u/c}{1 + \frac{vu}{c^2}}.$$

## 5 Вычислить $\operatorname{div} \mathbf{r}$

$$\operatorname{div} \mathbf{r} = \partial_i x_i = \delta_{ii} = 3.$$

## 6 Вектор 4-скорости и 4-ускорения и их скалярное произведение.

Компоненты 4-вектора скорости имеют вид

$$u^\mu = (\gamma, \gamma \boldsymbol{\beta}),$$

где  $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{v}/c$ . 4-ускорение определяется как:

$$w^\mu \equiv \frac{du^\mu}{ds} = \frac{du^\mu}{cdt \sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

$$u^\mu u_\mu = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{ds} (u^\mu u_\mu) = 0 \quad \Rightarrow \quad w^\mu u_\mu = 0.$$

## 7 Компоненты 4-импульса и связь энергии с трёхмерным импульсом.

Компоненты ковариантного 4-импульса:

$$p^\mu = (mc\gamma, m\mathbf{v}\gamma) = (\mathcal{E}/c, \mathbf{p}).$$

Связь энергии с трёхмерным импульсом:

$$\mathbf{p} = \frac{\mathcal{E}\mathbf{v}}{c^2}, \quad \frac{\mathcal{E}^2}{c^2} - \mathbf{p}^2 = m^2 c^2.$$

## 8 Преобразование Лоренца произвольного вектора при бусте вдоль оси $x$ .

См. вопрос [1](#).



## 9 Эффективная масса нескольких частиц.

**Определение.** Эффективной массой  $n$  частиц называют величину

$$M = \left( \sum_{i=1}^n p_i^\mu \right)^2.$$

## 10 Калибровочные преобразования потенциалов.

**Определение.** Калибровочными преобразованиями потенциалов  $\mathbf{A}$  и  $\varphi$  называют такие преобразования данных потенциалов, при которых построенные ЭМ поля  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  по новым потенциалам не будут отличаться от ЭМ полей, построенных по старым потенциалам.

## 11 Калибровочные преобразования потенциалов в трёхмерной форме (стр. 40)

$$\begin{aligned} \mathbf{A}' &= \mathbf{A} + \text{grad } \alpha, \\ \varphi' &= \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \alpha}{\partial t}, \end{aligned}$$

где  $\alpha = \alpha(t, \mathbf{x})$  — произвольная дифференцируемая функция. Прямой проверкой следует из вопросов 10, 13.

## 12 Калибровочные преобразования потенциалов в четырёхмерной форме (стр. 41)

См. вопрос 11.

Электромагнитный потенциал имеет следующий вид

$$A^\mu \equiv (\varphi, \mathbf{A}) \quad \Rightarrow \quad A_\mu = (\varphi, -\mathbf{A}).$$

Калибровочные преобразования для данного потенциала можно записать следующим образом

$$A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu \alpha.$$

### 13 Выражения для $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ через компоненты 4-потенциала (стр. 40)

По определению

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}.$$

Четвёртое уравнение Максвелла

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

при данной подстановке принимает вид

$$\text{rot} \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0.$$

Полученное уравнение выполняется тождественно, если:

$$\mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\text{grad } \varphi \quad \Rightarrow \quad \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \text{grad } \varphi,$$

для любого дифференцируемого поля  $\varphi(t, \mathbf{x})$ , т. к.  $\text{rot grad} \equiv 0$ .

### 14 Выражение для тензора электромагнитного поля через 4-вектор потенциал.

По определению

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu.$$

### 15 Сила Лоренца (стр. 44)

Уравнение движения релятивистской частицы во внешнем ЭМ поле:

$$mc \frac{du^\mu}{ds} = \frac{e}{c} F^{\mu\nu} u_\nu.$$

Пространственные компоненты данного 4-мерного уравнения имеют вид:

$$mc \frac{du^i}{dt} = \frac{e}{c} F^{i\nu} \frac{dz_\nu}{dt} \equiv \frac{e}{c} \left( F^{i0} \frac{dz_0}{dt} + F^{ij} \frac{dz_j}{dt} \right).$$

Чтобы получить это уравнение, мы умножили левую и правую части исходного уравнения на  $ds/dt$ , тем самым заменив  $du^\mu/ds$  на  $du^\mu/dt$ , а  $u_\nu = dz_\nu/ds$  на  $dz_\nu/dt$ .

Вспоминая, что  $mcu^i = p^i$ ,  $dz_0/dt = c$  и выражая компоненты тензора  $F^{0i}$  и  $F^{ij}$  через компоненты ЭМ полей  $B_i$  и  $E_i$ , получаем уравнение:

$$\frac{dp_i}{dt} = eE_i + \frac{e}{c}\varepsilon_{ijk}v_jB_k,$$

которое в векторной форме имеет вид

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c}\mathbf{v} \times \mathbf{B}.$$

## 16 Скорость дрейфа в скрещенных электромагнитных полях (стр. 49)

Ограничимся рассмотрением нерелятивистского случая, т. е. когда  $v(t) \ll c$ ,  $\forall t$ . Тогда  $\mathbf{p} \approx m\mathbf{v}$ . Пусть поле  $\mathbf{B}$  направлено вдоль оси  $z$ , а плоскость, проходящая через  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$ , совпадает с  $yz$ . Тогда уравнения движения частицы

$$m\dot{\mathbf{v}} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c}[\mathbf{v} \times \mathbf{B}]$$

запишутся в виде

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= \frac{e}{c}\dot{y}B, \\ m\ddot{y} &= eE_y - \frac{e}{c}\dot{x}B, \\ m\ddot{z} &= eE_z. \end{aligned}$$

Из последнего уравнения очевидно следует  $z(t) = \frac{eE_z t^2}{2m} + v_{0z}t$  — обычное равноускоренное движение. Первые два уравнения в этой системе можно записать как одно комплексное:

$$\frac{d}{dt}(\dot{x} + i\dot{y}) + i\omega(\dot{x} + i\dot{y}) = i\frac{e}{m}E_y,$$

где  $\omega = eB/mc$  — частота Лармора. Решение полученного уравнения есть сумма общего решения однородного уравнения  $ae^{-i\omega t}$ , с амплитудой  $a$  следующей из начальных условий, и частного решения неоднородного уравнения. В качестве последнего мы выберем  $(\dot{x} + i\dot{y})_{par} = eE_y/m\omega = cE_y/B$ . Т. е. общее решение рассматриваемого уравнения есть:

$$\dot{x} + i\dot{y} = at^{i\omega t} + \frac{cE_y}{B}.$$

Выберем начальные условия такими, чтобы  $a$  была действительной. Тогда:

$$\dot{x} = a \cos \omega t + \frac{cE_y}{B}, \quad \dot{y} = -a \sin \omega t.$$

Полученные компоненты скорости частицы являются периодическими функциями. Их средние по времени значения равны:

$$\bar{x} = \frac{cE_y}{B}, \quad \bar{y} = 0.$$

и определяют среднюю скорость движения заряда в скрещенных ЭМ полях — скорость *электрического дрейфа*. Её направление перпендикулярно обоим полям и не зависит от знака заряда. В векторном виде её можно записать как

$$\mathbf{v}_{dr} = \frac{c}{B^2} \mathbf{E} \times \mathbf{B}.$$

## 17 Магнитное зеркало (стр.54)

Заряженная частица движется в магнитном поле по спирали с радиусом  $r = mv_{\perp}/eH$ . Если поле переменное, то адиабатически сохраняется

Роман  
Солецкий

$$I = \oint p_{\perp} dq_{\perp} = 2\pi r m v_{\perp} \sim \frac{v_{\perp}^2}{H}$$

При движении в магнитном поле энергия сохраняется, поэтому  $v_{\perp}^2$  ограничено сверху и частица не сможет преодолеть барьер в некоторое  $H_{\max}$

## 18 Вычислить среднее $\langle (\vec{a}, \vec{n}) (\vec{b}, \vec{n}) \rangle$ по всем направлениям единичного вектора $\vec{n}$ при постоянных $\vec{a}, \vec{b}$ (стр. 56)

Вычислим следующее среднее

$$\langle n_i n_j \rangle \equiv \int \frac{d\Omega}{4\pi} n_i n_j.$$

$\langle n_i n_j \rangle$  должен быть инвариантным относительно вращений тензором с двумя индексами, который симметричен относительно перестановки его индексов. Единственным тензором в трёхмерном пространстве, который удовлетворяет этим условиям, является метрический —  $\delta_{ij}$ . То есть имеем следующее соотношение:

$$\langle n_i n_j \rangle = c \delta_{ij},$$

где  $c$  — некоторая константа, которую невозможно зафиксировать из симметрических соображений. Чтобы найти эту константу, свернём индексы  $i$  и  $j$  (положим их равными и просуммируем по всем их значениям) слева и справа

в полученном выражении. Тогда, пользуясь тем что  $n_i n_j \equiv \mathbf{n}^2 = 1$  и  $\langle 1 \rangle = 1$ , мы получаем следующее соотношение:  $1 = c \cdot 3$ . Откуда следует, что

$$\langle n_i n_j \rangle \frac{1}{3} \delta_{ij}.$$

Отсюда

Роман  
Солецкий

$$\langle (\vec{a}, \vec{n}) (\vec{b}, \vec{n}) \rangle = \langle a_i n_i b_k n_k \rangle = \frac{a_i b_k \delta_{ik}}{3} = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{3}$$

**19 Вычислить среднее  $\langle [\vec{a}, \vec{n}] (\vec{b}, \vec{n}) \rangle$  по всем направлениям единичного вектора  $\vec{n}$  при постоянных  $\vec{a}, \vec{b}$  (стр. 56)**

См. вопрос 18.

Роман  
Солецкий

$$\langle [\vec{a}, \vec{n}] (\vec{b}, \vec{n}) \rangle = \langle \varepsilon_{ijk} a_j n_k b_l n_l \rangle = \frac{[\vec{a}, \vec{b}]}{3}$$

**20 Четыре-вектор тока и его компоненты (стр. 60)**

$de = \rho dV$  - количество заряда в области (скаляр).

Роман  
Солецкий

$$dedx^i = \rho dV dt \frac{dx^i}{dt}$$

$dV dt$  - скаляр,  $dedx^i$  — 4-вектор,  $\rho dx^i / dt$  — 4-вектор тока  $j^\mu$ .

$$j^\mu = (c\rho, \rho \mathbf{v}) = (c\rho, \mathbf{j})$$

**21 Уравнение непрерывности в четырехмерной и трехмерной форме (стр. 60)**

Из уравнения Максвелла

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\nu,$$

применяя к обеим его сторонам 4-дивергенцию, получаем:

$$\frac{4\pi}{c} \partial_\nu j^\nu = \partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} = \partial_\nu \partial_\mu (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = \partial_\nu \partial^2 A^\nu - \partial_\mu \partial^2 A^\mu = 0,$$

где мы обозначили  $\partial^2 = \partial_\alpha \partial^\alpha$ . Таким образом, из уравнений Максвелла следует *уравнение непрерывности*

Роман  
Солецкий

$$\frac{\partial j^\mu}{\partial x^\mu} = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0$$

## 22 Плотность энергии электромагнитного поля (стр. 75)

Распишем покомпонентно ТЭИ через ЭМ поля  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$

$$T_0^0 = -\frac{1}{4\pi} \left[ F^{0\mu} F_{0\mu} - \frac{1}{4} \delta_0^0 F^2 \right] = -\frac{1}{4\pi} \left[ F^{0i} F_{0i} - \frac{1}{2} (\mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2) \right] = \frac{1}{8\pi} (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2).$$

Величина  $W \equiv T_0^0$  является *плотностью энергии ЭМ поля*. Действительно, Лагранжева плотность ЭМ поля равна:

плохо  
понел

$$\mathcal{L} \propto F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \propto \mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2 \equiv T - U,$$

где  $T \propto E_i^2 \propto (\partial_0 A_i - \partial_i A_0)^2$  — это кинетическая энергия ЭМ поля, т. к. содержит производные по времени от канонических переменных  $\partial_0 A_i$ , т. е. зависит от скорости изменения этих величин; при этом  $U \propto B_i^2 \propto (\varepsilon_{ijk} \partial_j A_k)^2$  не одержит производных по времени, а потому является потенциальной энергией. т. к. лагранжева плотность равна  $\mathcal{L} = T - U$ , то величина  $W = T + U \propto \mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2$  должна быть плотностью энергии.

Роман  
Солецкий

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \mathbf{H} = \mathbf{E} \left( \operatorname{rot} \mathbf{H} - \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \right) - \mathbf{H} \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{E} \mathbf{j} - \operatorname{div} [\mathbf{E}, \mathbf{H}]$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \mathbf{H} = \frac{1}{2c} \frac{\partial (\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2)}{\partial t}$$

$$\int \mathbf{E} \mathbf{j} dV = \int \mathbf{E} \rho dV \mathbf{v} = \sum e \mathbf{E} \mathbf{v} = \frac{dE_{\text{кин}}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt} \left[ E_{\text{кин}} + \int dV \frac{\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2}{8\pi} \right] = - \int dV \frac{c}{4\pi} \operatorname{div} [\mathbf{E}, \mathbf{H}] = - \oint dS \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E}, \mathbf{H}]$$

Слева записано изменение полной энергии системы заключенной в некоторой оболочке, а справа то что эта энергия изменяется при излучении из оболочки. Полная энергия электромагнитного поля

$$W = \frac{\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2}{8\pi}$$

## 23 Вектор Умова-Пойнтинга (стр. 75)

Рассмотрим 3-вектор:

$$S_i = -cT_i^0 = \frac{c}{4\pi} F^{0\mu} F_{i\mu} = \frac{c}{4\pi} F^{0j} F_{ij} = \frac{c}{4\pi} (-E_j)(-\varepsilon_{ijk} B_k) = \frac{c}{4\pi} \varepsilon_{ijk} E_j B_k,$$

где  $T_i^0$  — вектор из компонент ТЭИ. Величина

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E} \times \mathbf{B}]$$

называется *вектором Умова-Пойнтинга*.

Из предыдущего билета

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E}, \mathbf{H}]$$

Роман  
Солецкий

## 24 Вектор потенциал $A$ для плоской и монохроматической электромагнитной волны.

Рассмотрим решение уравнений Максвелла без зарядов:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0.$$

У такого уравнения есть нетривиальные решения. Такие ЭМ поля, которые существуют в отсутствии источников, называются *свободными ЭМ волнами*.

Зафиксируем калибровку Лоренца (см. вопрос 52). Тогда рассматриваемое уравнение сведётся к системе уравнений ( $F^{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ ,  $\partial_\mu \partial^\mu \equiv \square$ ):

$$\begin{cases} \square A^\mu = 0, \\ \partial_\mu A^\mu = 0, \end{cases}$$

где второе уравнение является просто калибровочным условием.

Мы будем искать решение данной системы в виде:

$$A_\mu = \text{Re} [\xi_\mu e^{-ik_\nu x^\nu}] = \frac{1}{2} [\xi_\nu e^{-ik_\nu x^\nu} + \xi_\mu^* e^{ik_\nu x^\nu}], \quad (*)$$

где  $\xi_\mu$  — некоторый постоянный комплексный 4-вектор, называемый *вектором поляризации ЭМ волны*, а  $k_\mu$  — некоторый постоянный вещественный 4-вектор, называемый *волновым 4-вектором ЭМ волны*.

Мы имеем дело с *системой линейных дифференциальных уравнений*. Поэтому если у нас есть два решения этой системы уравнений  $A_1^\mu$  и  $A_2^\mu$ , то  $A_1^\mu + A_2^\mu$  тоже является решением этой системы уравнений. Этот факт является отражением *принципа суперпозиции*.

В силу принципа суперпозиции мы можем отбросить знак  $\text{Re}$  в рассматриваемом выражении для  $A_\mu$  и иметь дело прямо с комплексной волной  $\xi_\mu e^{-ik_\nu x^\nu}$ , коль скоро мы будем выполнять исключительно линейные операции над ней. Такая волна называется *плоской монохроматической волной*. Найдём теперь условия, которым должны удовлетворять векторы  $\xi_\mu$  и  $k_\mu$ , чтобы рассматриваемая функция решала нашу систему уравнений. Т. к.

$$\partial_\alpha \xi^\mu e^{-ik_\nu x^\nu} = \xi^\mu \partial_\alpha e^{-ik_\nu x^\nu} = -ik_\alpha \xi^\mu e^{-ik_\nu x^\nu},$$

и

$$\square \xi^\mu e^{-ik_\nu x^\nu} = -k_\alpha k^\alpha \xi^\mu,$$

то, подставив выражение (\*) в исходную систему, мы найдём, что оно является её решением, если её волновой 4-вектор и поляризационный 4-вектор удовлетворяют системе уравнений:

$$\begin{cases} k_\mu k^\mu = 0, \\ \xi_\mu \xi^\mu = 0. \end{cases} \quad (**)$$

Из первого уравнения  $k_\mu k^\mu = k_0^2 - \mathbf{k}^2 = 0$  следует, что  $k_\mu$  — нулевой (светоподобный) 4-вектор. В силу того, что мы имеем дело с пространством с сигнатурой Минковского, а не Евклида (т. е. имеем дело с  $k_0^2 - \mathbf{k}^2 = 0$ , а не  $k_0^2 + \mathbf{k}^2 = 0$ ), это уравнение имеет ненулевое решение. Поэтому уравнения Максвелла без источников имеют нетривиальные решения.

Заметим, что последняя система уравнений не меняется при замене  $\xi_\mu$  на  $\bar{\xi}_\mu = \xi_\mu + \alpha k_\mu$ , где  $\alpha$  — произвольная комплексная константа. Действительно,

$$k_\mu \bar{\xi}^\mu = k_\mu \xi^\mu + \alpha k_\mu k^\mu = k_\mu \xi^\mu.$$

Последнее равенство получено с использованием первого уравнения системы (\*\*). Теперь мы хотим явно запараметризовать решения системы уравнений (\*\*). Т. к.  $k^\mu k_\mu = k_0^2 - \mathbf{k}^2 = 0$ , то  $k_0 = |\mathbf{k}| \equiv k$ . Поэтому  $k^\mu = (k, \mathbf{k})$ . Поворотом СК в пространстве всегда можно положить  $k^\mu = (k, k, 0, 0)$ , что отвечает 3-мерному волновому вектору  $\mathbf{k}$ , направленному вдоль оси  $x$ . Тогда  $A_\mu = \xi_\mu e^{-ik_\nu x^\nu} = \xi_\mu e^{-ikct + ikx} = \xi_\mu e^{-ik(ct-x)}$ , что описывает волну, распространяющуюся в положительном направлении оси  $x$  со скоростью света. Уровни постоянной фазы этой волны лежат на плоскостях  $yz$  перпендикулярных направлению распространения волны  $x$ . Поэтому такую волну называют *плоской*. Обычно  $k_0$  обозначают как  $k_0 = \frac{\omega}{c}$ , где  $\omega$  — частота волны. При этом  $\mathbf{k} = \frac{\omega}{c} \mathbf{n} = \frac{2\pi \mathbf{n}}{\lambda}$ , где  $\mathbf{n} = \mathbf{k}/k$  — единичный вектор вдоль направления распространения волны, а  $\lambda$  — её длина. Т. е. данная ЭМ волна отвечает одной определённой частоте. Поэтому она и называется *монохроматической*.



Найдём теперь какой вид должен иметь вектор  $\xi_\mu$ , чтобы решать уравнение  $k_\mu \xi^\mu = 0$ . При нашем выборе СК это уравнение сводится к  $k_\mu \xi^\mu = k\xi^0 - k\xi^1 = 0$ . Следовательно  $\xi^0 = \xi^1$ , а  $\xi^2$  и  $\xi^3$  могут иметь произвольные значения, т. е.  $\xi^\mu = (\xi^0, \xi^0, \xi^2, \xi^3)$ . Воспользуемся теперь произволом  $\xi^\mu \rightarrow \xi^\mu + \alpha k^\mu$  и подберём  $\alpha = -\xi^0/k$ . Тогда  $\bar{\xi}^\mu = (0, 0, \xi^2, \xi^3)$ . Т. е. 4-вектор поляризации имеет только две независимых компоненты из четырёх и только вдоль пространственных направлений перпендикулярных направлению распространения волны.

## 25 Поляризация плоской монохроматической электромагнитной волны.

hi

## 26 Векторы $E$ , $B$ и Умова-Пойнтинга в плоской и монохроматической электромагнитной волне.

hi

## 27 Классический радиус электрона и как он возникает в выражениях, описывающих рассеяние электромагнитных волн.

hi

## 28 Абберация света.

hi

## 29 Собственное время.

hi

## 30 Вычислить $\text{grad } \frac{1}{|\vec{r}|}$

hi

## 31 Вычислить $\text{grad } \frac{1}{(\vec{k}, \vec{r})}$ , где $\vec{k}$ — постоянный вектор.

hi

32 Вычислить  $\text{grad } e^i(\vec{k}, \vec{r})$ , где  $\vec{k}$  — постоянный вектор.

hi

33 Вычислить  $\varepsilon_{ijk} x_i x_k$ .

hi

34 Вычислить  $\delta_{ij} \partial_i x_k$ .

hi

35 Вычислить  $\delta_{ij} \partial_i x_j$ .

hi

36 Действие для свободной релятивистской частицы.

hi

37 Вывести формулу для эффекта Доплера.

hi

38 Может ли свободный электрон излучить фотон? Объяснение.

hi

39 Действие для релятивистской частицы во внешнем электромагнитном поле.

hi

40 Уравнение движения для релятивистской частицы во внешнем электромагнитном поле в 4-мерной форме.

hi

41 Обобщенный импульс и энергия.

hi

42 Получите инварианты поля в четырехмерной (через тензор поля) исходя и тензора э-м поля.

hi

43 Инварианты электромагнитного поля в трехмерной форме (через  $E$  и  $B$ ).

hi

44 Вычислить среднее  $\langle [\vec{a}, \vec{r}] \vec{r} \rangle$  по всем направлениям вектора  $\vec{r}$  при постоянных  $|\vec{r}|$ ,  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ .

hi

45 Вычислить среднее  $\langle [\vec{a}, \vec{n}] [\vec{b}, \vec{n}] \rangle$  по всем направлениям вектора  $\vec{n}$  при постоянных  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ .

hi

46 Первая и вторая пара уравнений Максвелла в четырехмерной форме.

hi

47 Дипольный электрический момент и поле, создаваемое им.

hi

48 Квадрупольный момент.

hi

49 Энергия электрического диполя и квадрупольного поля во внешнем поле.

hi

50 Потенциальная энергия взаимодействия диполя с полем.

hi

51 Закон Био-Савара – магнитное поле, создаваемое стационарным током.

hi

52 Калибровка Лоренца и вторая пара уравнений Максвелла в ней.

53 Калибровка Кулона и уравнение на три-вектор потенциал  $A$  в присутствии стационарного тока.

hi

54 Дипольный магнитный момент и поле, создаваемое им.

hi

55 Прецессия магнитного момента в магнитном поле. Частота Лармора.

hi

56 Запаздывающие потенциалы.

hi

57 Получить Потенциалы Лиенара-Вихерта в трехмерной и четырехмерной форме из запаздывающих потенциалов.

hi

58 Волновая зона. Характер поведения полей  $E$  и  $B$  вблизи движущегося заряда.

hi

59 Длина формирования излучения или длина когерентности.

hi

60 Характер распределения по углам излучения в ультррелятивистском случае.

hi

61 Интенсивность излучения в дипольном приближении.

hi

62 Характерная частота при синхротронном излучении.

hi

63 Радиационная сила трения. Критерий применимости.

hi

64 Лоренцева линия. Естественная ширина линии.

hi

65 Формула Томсона для сечения рассеяния.

hi

66 Тензор электромагнитного поля и связь его компонент с  $E$  и  $B$ .

hi

67 Гамильтониан частицы в нерелятивистском приближении во внешнем электромагнитном поле.

hi

68 Можно ли превысить скорость света при движении под действием постоянной силы? Объяснение.

hi

69 Четыре-вектор тока для точечной частицы.

hi

70 Первая и вторая пара уравнений Максвелла в трехмерной форме.

hi

71 Тензор энергии-импульса для точечной частицы.

hi

72 Тензор энергии-импульса электромагнитного поля.

hi

73 Закон сохранения тензора энергии-импульса.

hi

74 Уравнение Пуассона и его решение. Потенциал Кулона.

hi

75 Разложение электромагнитного поля на осцилляторы. Фурье разложение  $A$ ,  $E$  и  $B$ .

hi

76 Действие для осцилляторов (собственных колебаний) электромагнитного поля.

hi

77 Запаздывающая функция Грина для электромагнитного поля и ее свойства.

hi

78 Получить запаздывающие потенциалы из запаздывающей функции Грина.

hi

79 Характер зависимости поля произвольно движущегося заряда от расстояния. Сколько слагаемых в  $E$  и  $B$ ? Как они падают с расстоянием? Как зависят от ускорения?

hi

80 Мощность потерь на излучение в релятивистском случае и его связь с полной интенсивностью излучения.

hi

81 Критерий применимости силы радиационного терия.

hi

82 Критерий применимости нерелятивистского приближения для излучения.

hi

### 83 Критерий применимости формулы Томсона для рассеяния.

hi