

# Вопросы к экзамену по теорполю

2 июня 2020 г.

## Содержание

	4
1 Преобразование Лоренца вдоль направления оси $x$ . Релятивистские $\gamma$ - и $\beta$ -факторы. . . . .	4
2 Световой конус и относительность одновременности. . . . .	4
3 Лоренцево сокращение длин. . . . .	5
4 Релятивистское сложение скоростей вдоль одного и того же направления. . . . .	5
5 Вычислить $\operatorname{div} \mathbf{r}$ . . . . .	5
6 Вектор 4-скорости и 4-ускорения и их скалярное произведение. . . . .	5
7 Компоненты 4-импульса и связь энергии с трёхмерным импульсом. . . . .	5
8 Преобразование Лоренца произвольного вектора при бусте вдоль оси $x$ . . . . .	6
9 Эффективная масса нескольких частиц. . . . .	6
10 Калибровочные преобразования потенциалов. . . . .	6
11 Калибровочные преобразования потенциалов в трехмерной форме. . . . .	6
12 Калибровочные преобразования потенциалов в четырехмерной форме. . . . .	6
13 Выражения для $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ через компоненты 4-потенциала. . . . .	7
14 Выражение для тензора электромагнитного поля через 4-вектор потенциал. . . . .	7
15 Сила Лоренца. . . . .	7
16 Скорость дрейфа в скрещенных электромагнитных полях. . . . .	7
17 Магнитное зеркало. . . . .	7
18 Вычислить среднее $\langle (\vec{a}, \vec{n}) (\vec{b}, \vec{n}) \rangle$ по всем направлениям единичного вектора $\vec{n}$ при постоянных $\vec{a}, \vec{b}$ . . . . .	8

19	Вычислить среднее $\langle [\vec{a}, \vec{n}] (\vec{b}, \vec{n}) \rangle$ по всем направлениям единичного вектора $\vec{n}$ при постоянных $\vec{a}, \vec{b}$ . . . . .	8
20	Четыре-вектор тока и его компоненты. . . . .	8
21	Уравнение непрерывности в четырехмерной и трехмерной форме. . . . .	8
22	Плотность энергии электромагнитного поля. . . . .	9
23	Вектор Умова-Пойнтинга. . . . .	9
24	Вектор потенциал $A$ для плоской и монохроматической электромагнитной волны. . . . .	9
25	Поляризация плоской монохроматической электромагнитной волны. . . . .	9
26	Векторы $E, B$ и Умова-Пойнтинга в плоской и монохроматической электромагнитной волне. . . . .	9
27	Классический радиус электрона и как он возникает в выражениях, описывающих рассеяние электромагнитных волн. . . . .	10
28	Абберация света. . . . .	10
29	Собственное время. . . . .	10
30	Вычислить $\text{grad } \frac{1}{ \vec{r} }$ . . . . .	10
31	Вычислить $\text{grad } \frac{1}{(\vec{k}, \vec{r})}$ , где $\vec{k}$ — постоянный вектор. . . . .	10
32	Вычислить $\text{grad } e^{i(\vec{k}, \vec{r})}$ , где $\vec{k}$ — постоянный вектор. . . . .	10
33	Вычислить $\varepsilon_{ijk} x_i x_k$ . . . . .	10
34	Вычислить $\delta_{ij} \partial_i x_k$ . . . . .	10
35	Вычислить $\delta_{ij} \partial_i x_j$ . . . . .	10
36	Действие для свободной релятивистской частицы. . . . .	10
37	Вывести формулу для эффекта Доплера. . . . .	11
38	Может ли свободный электрон излучить фотон? Объяснение. . . . .	11
39	Действие для релятивистской частицы во внешнем электромагнитном поле. . . . .	11
40	Уравнение движения для релятивистской частицы во внешнем электромагнитном поле в 4-мерной форме. . . . .	11
41	Обобщенный импульс и энергия. . . . .	11
42	Получите инварианты поля в четырехмерной (через тензор поля) исходя и тензора э-м поля. . . . .	11
43	Инварианты электромагнитного поля в трехмерной форме (через $E$ и $B$ ). . . . .	11
44	Вычислить среднее $\langle [\vec{a}, \vec{r}] \vec{r} \rangle$ по всем направлениям вектора $\vec{r}$ при постоянных $ \vec{r} , \vec{a}, \vec{b}$ . . . . .	11
45	Вычислить среднее $\langle [\vec{a}, \vec{n}] [\vec{b}, \vec{n}] \rangle$ по всем направлениям вектора $\vec{n}$ при постоянных $\vec{a}, \vec{b}$ . . . . .	12

46	Первая и вторая пара уравнений Максвелла в четырехмерной форме. . . . .	12
47	Дипольный электрический момент и поле, создаваемое им. . . .	12
48	Квадрупольный момент. . . . .	12
49	Энергия электрического диполя и квадруполья во внешнем поле.	12
50	Потенциальная энергия взаимодействия диполя с диполем. . . .	12
51	Закон Био-Савара – магнитное поле, создаваемое стационарным током. . . . .	12
52	Калибровка Лоренца и вторая пара уравнений Максвелла в ней.	12
53	Калибровка Кулона и уравнение на три-вектор потенциал $A$ в присутствии стационарного тока. . . . .	13
54	Дипольный магнитный момент и поле, создаваемое им. . . . .	13
55	Прецессия магнитного момента в магнитном поле. Частота Лармора. . . . .	13
56	Запаздывающие потенциалы. . . . .	13
57	Получить Потенциалы Лиенара-Вихерта в трехмерной и четырехмерной форме из запаздывающих потенциалов. . . . .	13
58	Волновая зона. Характер поведения полей $E$ и $B$ вблизи движущегося заряда. . . . .	13
59	Длина формирования излучения или длина когерентности. . . .	13
60	Характер распределения по углам излучения в ультрарелятивистском случае. . . . .	13
61	Интенсивность излучения в дипольном приближении. . . . .	14
62	Характерная частота при синхротронном излучении. . . . .	14
63	Радиационная сила трения. Критерий применимости. . . . .	14
64	Лоренцева линия. Естественная ширина линии. . . . .	14
65	Формула Томсона для сечения рассеяния. . . . .	14
66	Тензор электромагнитного поля и связь его компонент с $E$ и $B$ .	14
67	Гамильтониан частицы в нерелятивистском приближении во внешнем электромагнитном поле. . . . .	14
68	Можно ли превысить скорость света при движении под действием постоянной силы? Объяснение. . . . .	14
69	Четыре-вектор тока для точечной частицы. . . . .	14
70	Первая и вторая пара уравнений Максвелла в трехмерной форме.	15
71	Тензор энергии-импульса для точечной частицы. . . . .	15
72	Тензор энергии-импульса электромагнитного поля. . . . .	15
73	Закон сохранения тензора энергии-импульса. . . . .	15
74	Уравнение Пуассона и его решение. Потенциал Кулона. . . . .	15
75	Разложение электромагнитного поля на осцилляторы. Фурье разложение $A$ , $E$ и $B$ . . . . .	15

76	Действие для осцилляторов (собственных колебаний) электромагнитного поля. . . . .	15
77	Запаздывающая функция Грина для электромагнитного поля и ее свойства. . . . .	15
78	Получить запаздывающие потенциалы из запаздывающей функции Грина. . . . .	15
79	Характер зависимости поля произвольно движущегося заряда от расстояния. Сколько слагаемых в $E$ и $B$ ? Как они падают с расстоянием? Как зависят от ускорения? . . . . .	16
80	Мощность потерь на излучение в релятивистском случае и его связь с полной интенсивностью излучения. . . . .	16
81	Критерий применимости силы радиационного терия. . . . .	16
82	Критерий применимости нерелятивистского приближения для излучения. . . . .	16
83	Критерий применимости формулы Томсона для рассеяния. . . .	16

**Определение.** Здесь может быть *определение* чего-нибудь.

**Теорема** (Кого-нибудь о чём-нибудь). *Здесь может быть теорема.*

В данном документе для 3-векторов используются латинские индексы, а для 4-векторов — греческие.

## 1 Преобразование Лоренца вдоль направления оси $x$ . Релятивистские $\gamma$ - и $\beta$ -факторы.

Буст Лоренца со скоростью  $v$  в положительном направлении оси  $x$

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

где  $\beta = v/c$ ,  $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$ .

## 2 Световой конус и относительность одновременности.

**Определение.** Фигура, которая замечается в ПВ всеми возможными лучами света, проходящими через данную точку, называется *световой конус*.

В СТО дновременность относительна. . .

### 3 Лоренцево сокращение длин.

$$l = l_0/\gamma.$$

### 4 Релятивистское сложение скоростей вдоль одного и того же направления.

$$\frac{V}{c} = \frac{v/c + u/c}{1 + \frac{vu}{c^2}}.$$

### 5 Вычислить $\operatorname{div} \mathbf{r}$

$$\operatorname{div} \mathbf{r} = \partial_i x_i = \delta_{ii} = 3.$$

### 6 Вектор 4-скорости и 4-ускорения и их скалярное произведение.

Компоненты 4-вектора скорости имеют вид

$$u^\mu = (\gamma, \gamma \boldsymbol{\beta}),$$

где  $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{v}/c$ . 4-ускорение определяется как:

$$w^\mu \equiv \frac{du^\mu}{ds} = \frac{du^\mu}{cdt \sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

$$u^\mu u_\mu = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{ds} (u^\mu u_\mu) = 0 \quad \Rightarrow \quad w^\mu u_\mu = 0.$$

### 7 Компоненты 4-импульса и связь энергии с трёхмерным импульсом.

Компоненты ковариантного 4-импульса:

$$p^\mu = (mc\gamma, m\mathbf{v}\gamma) = (\mathcal{E}/c, \mathbf{p}).$$

Связь энергии с трёхмерным импульсом:

$$\mathbf{p} = \frac{\mathcal{E}\mathbf{v}}{c^2}, \quad \frac{\mathcal{E}^2}{c^2} - \mathbf{p}^2 = m^2 c^2.$$

## 8 Преобразование Лоренца произвольного вектора при бусте вдоль оси $x$ .

См. вопрос 1.

## 9 Эффективная масса нескольких частиц.

**Определение.** *Эффективной массой  $n$  частиц называют величину*

$$M = \left( \sum_{i=1}^n p_i^\mu \right)^2.$$

## 10 Калибровочные преобразования потенциалов.

**Определение.** *Калибровочными преобразованиями потенциалов  $\mathbf{A}$  и  $\varphi$  называют такие преобразования данных потенциалов, при которых построенные ЭМ поля  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  по новым потенциалам не будут отличаться от ЭМ полей, построенных по старым потенциалам.*

## 11 Калибровочные преобразования потенциалов в трехмерной форме.

$$\begin{aligned}\mathbf{A}' &= \mathbf{A} + \text{grad } \alpha, \\ \varphi' &= \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \alpha}{\partial t},\end{aligned}$$

где  $\alpha = \alpha(t, \mathbf{x})$  — произвольная дифференцируемая функция.

## 12 Калибровочные преобразования потенциалов в четырехмерной форме.

*Электромагнитный потенциал имеет следующий вид*

$$A^\mu \equiv (\varphi, \mathbf{A}) \quad \Rightarrow \quad A_\mu = (\varphi, -\mathbf{A}).$$

Калибровочные преобразования для данного потенциала можно записать следующим образом

$$A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu \alpha.$$

**13 Выражения для  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  через компоненты 4-потенциала.**

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \text{grad } \varphi$$
$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$$

**14 Выражение для тензора электромагнитного поля через 4-вектор потенциал.**

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu.$$

**15 Сила Лоренца.**

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B}.$$

**16 Скорость дрейфа в скрещенных электромагнитных полях.**

$$\mathbf{v}_{dr} = \frac{c}{B^2} \mathbf{E} \times \mathbf{B}.$$

**17 Магнитное зеркало.**

Заряженная частица движется в магнитном поле по спирали с радиусом  $r = mv_\perp / eH$ . Если поле переменное, то адиабатически сохраняется

Роман  
Солецкий

$$I = \oint p_\perp dq_\perp = 2\pi r m v_\perp \sim \frac{v_\perp^2}{H}$$

При движении в магнитном поле энергия сохраняется, поэтому  $v_\perp^2$  ограничено сверху и частица не сможет преодолеть барьер в некоторое  $H_{\max}$

- 18 Вычислить среднее  $\langle (\vec{a}, \vec{n}) (\vec{b}, \vec{n}) \rangle$  по всем направлениям единичного вектора  $\vec{n}$  при постоянных  $\vec{a}, \vec{b}$

$\langle n_i n_i \rangle$  не зависит от  $i$ . Из независимости компонент

$$\sum_{i=1}^3 \langle n_i n_i \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^3 n_i n_i \right\rangle = 1 \Rightarrow \langle n_i n_i \rangle = \frac{1}{3}.$$

Отсюда

$$\langle n_i n_k \rangle = \frac{\delta_{ik}}{3},$$

$$\langle (\vec{a}, \vec{n}) (\vec{b}, \vec{n}) \rangle = \langle a_i n_i b_k n_k \rangle = \frac{a_i b_k \delta_{ik}}{3} = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{3}$$

- 19 Вычислить среднее  $\langle [\vec{a}, \vec{n}] (\vec{b}, \vec{n}) \rangle$  по всем направлениям единичного вектора  $\vec{n}$  при постоянных  $\vec{a}, \vec{b}$

$$\langle [\vec{a}, \vec{n}] (\vec{b}, \vec{n}) \rangle = \langle \varepsilon_{ijk} a_j n_k b_l n_l \rangle = \frac{[\vec{a}, \vec{b}]}{3}$$

Роман  
Солецкий

- 20 Четыре-вектор тока и его компоненты.

$de = \rho dV$  - количество заряда в области (скаляр).

Роман  
Солецкий

$$dedx^i = \rho dV dt \frac{dx^i}{dt}$$

$dV dt$  - скаляр,  $dedx^i$  - 4-х вектор,  $\rho dx^i / dt$  - 4-х вектор тока  $j^i$ .  $j^i = (c\rho, \rho \vec{v}) = (c\rho, \vec{j})$

- 21 Уравнение непрерывности в четырехмерной и трехмерной форме.

$$\frac{\partial j^i}{\partial x^i} = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } j = 0$$

Роман  
Солецкий



## 22 Плотность энергии электромагнитного поля.

Роман  
Солецкий

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \mathbf{H} = \mathbf{E} \left( \operatorname{rot} \mathbf{H} - \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \right) - \mathbf{H} \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{E} \mathbf{j} - \operatorname{div} [\mathbf{E}, \mathbf{H}]$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \mathbf{H} = \frac{1}{2c} \frac{\partial (\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2)}{\partial t}$$

$$\int \mathbf{E} \mathbf{j} dV = \int \mathbf{E} \rho dV \mathbf{v} = \sum e \mathbf{E} \mathbf{v} = \frac{dE_{\text{кин}}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt} \left[ E_{\text{кин}} + \int dV \frac{\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2}{8\pi} \right] = - \int dV \frac{c}{4\pi} \operatorname{div} [\mathbf{E}, \mathbf{H}] = - \oint dS \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E}, \mathbf{H}]$$

Слева записано изменение полной энергии системы заключенной в некоторой оболочке, а справа то что эта энергия изменяется при излучении из оболочки. Полная энергия электромагнитного поля

$$W = \frac{\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2}{8\pi}$$

## 23 Вектор Умова-Пойнтинга.

Из предыдущего билета

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E}, \mathbf{H}]$$

Роман  
Солецкий

## 24 Вектор потенциал $A$ для плоской и монохроматической электромагнитной волны.

hi

## 25 Поляризация плоской монохроматической электромагнитной волны.

hi

## 26 Векторы $E$ , $B$ и Умова-Пойнтинга в плоской и монохроматической электромагнитной волне.

hi

**27** Классический радиус электрона и как он возникает в выражениях, описывающих рассеяние электромагнитных волн.

hi

**28** Абберрация света.

hi

**29** Собственное время.

hi

**30** Вычислить  $\text{grad } \frac{1}{|\vec{r}|}$

hi

**31** Вычислить  $\text{grad } \frac{1}{(\vec{k}, \vec{r})}$ , где  $\vec{k}$  — постоянный вектор.

hi

**32** Вычислить  $\text{grad } e^{i(\vec{k}, \vec{r})}$ , где  $\vec{k}$  — постоянный вектор.

hi

**33** Вычислить  $\varepsilon_{ijk} x_i x_k$ .

hi

**34** Вычислить  $\delta_{ij} \partial_i x_k$ .

hi

**35** Вычислить  $\delta_{ij} \partial_i x_j$ .

hi

**36** Действие для свободной релятивистской частицы.

hi

37 Вывести формулу для эффекта Доплера.

hi

38 Может ли свободный электрон излучить фотон? Объяснение.

hi

39 Действие для релятивистской частицы во внешнем электромагнитном поле.

hi

40 Уравнение движения для релятивистской частицы во внешнем электромагнитном поле в 4-мерной форме.

hi

41 Обобщенный импульс и энергия.

hi

42 Получите инварианты поля в четырехмерной (через тензор поля) исходя из тензора э-м поля.

hi

43 Инварианты электромагнитного поля в трехмерной форме (через  $E$  и  $B$ ).

hi

44 Вычислить среднее  $\langle [\vec{a}, \vec{r}] \vec{r} \rangle$  по всем направлениям вектора  $\vec{r}$  при постоянных  $|\vec{r}|$ ,  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ .

hi

45 Вычислить среднее  $\langle [\vec{a}, \vec{n}] [\vec{b}, \vec{n}] \rangle$  по всем направлениям вектора  $\vec{n}$  при постоянных  $\vec{a}, \vec{b}$ .

hi

46 Первая и вторая пара уравнений Максвелла в четырехмерной форме.

hi

47 Дипольный электрический момент и поле, создаваемое им.

hi

48 Квадрупольный момент.

hi

49 Энергия электрического диполя и квадрупольного во внешнем поле.

hi

50 Потенциальная энергия взаимодействия диполя с диполем.

hi

51 Закон Био-Савара – магнитное поле, создаваемое стационарным током.

hi

52 Калибровка Лоренца и вторая пара уравнений Максвелла в ней.

hi

53 Калибровка Кулона и уравнение на три-вектор потенциал  $A$  в присутствии стационарного тока.

hi

54 Дипольный магнитный момент и поле, создаваемое им.

hi

55 Прецессия магнитного момента в магнитном поле. Частота Лармора.

hi

56 Запаздывающие потенциалы.

hi

57 Получить Потенциалы Лиенара-Вихерта в трехмерной и четырехмерной форме из запаздывающих потенциалов.

hi

58 Волновая зона. Характер поведения полей  $E$  и  $B$  вблизи движущегося заряда.

hi

59 Длина формирования излучения или длина когерентности.

hi

60 Характер распределения по углам излучения в ультррелятивистском случае.

hi

61 Интенсивность излучения в дипольном приближении.

hi

62 Характерная частота при синхротронном излучении.

hi

63 Радиационная сила трения. Критерий применимости.

hi

64 Лоренцева линия. Естественная ширина линии.

hi

65 Формула Томсона для сечения рассеяния.

hi

66 Тензор электромагнитного поля и связь его компонент с  $E$  и  $B$ .

hi

67 Гамильтониан частицы в нерелятивистском приближении во внешнем электромагнитном поле.

hi

68 Можно ли превысить скорость света при движении под действием постоянной силы? Объяснение.

hi

69 Четыре-вектор тока для точечной частицы.

hi

70 Первая и вторая пара уравнений Максвелла в трехмерной форме.

hi

71 Тензор энергии-импульса для точечной частицы.

hi

72 Тензор энергии-импульса электромагнитного поля.

hi

73 Закон сохранения тензора энергии-импульса.

hi

74 Уравнение Пуассона и его решение. Потенциал Кулона.

hi

75 Разложение электромагнитного поля на осцилляторы. Фурье разложение  $A$ ,  $E$  и  $B$ .

hi

76 Действие для осцилляторов (собственных колебаний) электромагнитного поля.

hi

77 Запаздывающая функция Грина для электромагнитного поля и ее свойства.

hi

78 Получить запаздывающие потенциалы из запаздывающей функции Грина.

hi

79 Характер зависимости поля произвольно двигающегося заряда от расстояния. Сколько слагаемых в  $E$  и  $B$ ? Как они падают с расстоянием? Как зависят от ускорения?

hi

80 Мощность потерь на излучение в релятивистском случае и его связь с полной интенсивностью излучения.

hi

81 Критерий применимости силы радиационного терия.

hi

82 Критерий применимости нерелятивистского приближения для излучения.

hi

83 Критерий применимости формулы Томсона для рассеяния.

hi