

Домашка по теории групп

2 мая 2020 г.

Часть 1

1 $\mathcal{U}_{\mathbf{H}}$

Определение. Группой $\mathcal{U}_{\mathbf{H}}$ называется группа невырожденных комплексных матриц T , удовлетворяющих соотношению

$$\mathbf{H} = T^{\dagger} \cdot \mathbf{H} \cdot T, \quad (1)$$

где \mathbf{H} — некоторая эрмитова матрица.

2 $O(n, \mathbb{C})$

Определение. Ортогональной группой $O(n, \mathbb{C})$ называется группа комплексных ортогональных матриц

$$O^T \cdot O = I_n. \quad (2)$$

3 $SO(n, \mathbb{C})$

Определение. Специальной ортогональной группой $SO(n, \mathbb{C})$ называется подгруппа комплексных ортогональных матриц, удовлетворяющих (2), и таких, что $\det(O) = +1$.

4 $Sp(2r, \mathbb{R})$

Определение. Симплектической группой $Sp(2r, \mathbb{R})$ называется группа вещественных матриц T , удовлетворяющих условию симплектичности

$$T^T \cdot \begin{pmatrix} 0 & I_r \\ -I_r & 0 \end{pmatrix} \cdot T = \begin{pmatrix} 0 & I_r \\ -I_r & 0 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

5 $Sp(p, q)$

Определение. Группой $Sp(p, q)$, где $p + q = r$, называется группа комплексных $2r \times 2r$ матриц T , удовлетворяющих одновременно условию псевдо-унитарности

$$T^{\dagger} \cdot \begin{pmatrix} I_{p,q} & 0 \\ 0 & I_{p,q} \end{pmatrix} \cdot T = \begin{pmatrix} I_{p,q} & 0 \\ 0 & I_{p,q} \end{pmatrix} \quad (4)$$

и нестандартному условию симплектичности

$$T^T \cdot \begin{pmatrix} 0 & I_{p,q} \\ -I_{p,q} & 0 \end{pmatrix} \cdot T = \begin{pmatrix} 0 & I_{p,q} \\ -I_{p,q} & 0 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

6 $USp(2r)$

Определение. Унитарной симплектической группой $USP(2r)$ называется группа комплексных $2r \times 2r$ матриц T , удовлетворяющих как условию симплектичности (3), так и условию унитарности $T^\dagger \cdot T = I_n$.

7 $O(p, q)$

Определение. Вещественной псевдо-ортогональной группой $O(p, q)$ называется группа вещественных $(n \times n)$ матриц O , где $n = p + q$, подчиняющихся условию

$$O^T \cdot \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{pmatrix} \cdot O = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{pmatrix}. \quad (6)$$

8 $PSO(p, q)$

Определение. Специальной вещественной псевдо-ортогональной группой $SO(p, q)$ называется группа вещественных $(n \times n)$ матриц O , где $n = p + q$, подчиняющихся одновременно условию псевдоортогональности (6), а также условию $\det O = 1$.

Определение. Проективной псевдо-ортогональной группой $PSO(p, q)$ называется фактор-группа $SO(p, q)/\mathbf{Z}_2$.

9 Группа Лоренца

Определение. Группой Лоренца n -мерного пространства называется группа $O(1, n-1)$.

10 $SU(p, q)$

Определение. Специальной псевдо унитарной группой $SU(p, q)$ называется группа комплексных $(n \times n)$ матриц U , удовлетворяющих одновременно условию (1), где в качестве \mathbf{H} выбрана матрица $I_{p,q}$:

$$U^\dagger \cdot \begin{pmatrix} I_{p,q} & 0 \\ 0 & I_{p,q} \end{pmatrix} \cdot U = \begin{pmatrix} I_{p,q} & 0 \\ 0 & I_{p,q} \end{pmatrix} \quad (7)$$

и условию $\det U = 1$.

Центром группы является конечная инвариантная подгруппа матриц

$$U_k = \exp \left(i \frac{2\pi k}{n} \right) I_n \quad (k = 0, 1, \dots, n-1). \quad (8)$$

11 $PSL(n, \mathbb{K})$

Определение. *Проективной комплексной линейной группой $PSL(n, \mathbb{C})$ называется фактор-группа $SL(n, \mathbb{C})/\mathbf{Z}_n$.*

Определение. *Проективной вещественной линейной группой $PSL(2n, \mathbb{R})$ называется фактор-группа $SL(2n, \mathbb{R})/\mathbf{Z}_2$.*

12 \mathcal{O}_{I_n}

$$\mathcal{O}_{I_n} \equiv O(n, \mathbb{C})$$

13 Группа анти-де Ситтера

Определение. *Группой анти-де Ситтера n -мерного пространства называется группа $O(2, n-2)$.*

14 $PSU(p, q)$

Определение. *Проективной псевдо-унитарной группой $PSU(p, q)$ называется фактор-группа $SU(p, q)/\mathbf{Z}_n$, где $p + q = n$.*

15 \mathcal{O}_J

$$\mathcal{O}_J \equiv Sp(2r, \mathbb{C})$$