Домашка по теории групп

11 мая 2020 г.

Часть 1

1 $\mathcal{U}_{\mathbf{H}}$

Определение. *Группой* $\mathcal{U}_{\mathbf{H}}$ называется группа невырожденных комплексных матриц T, удовлетворяющих соотношению

$$\mathbf{H} = T^{\dagger} \cdot \mathbf{H} \cdot T, \tag{1}$$

где $\mathbf{H}$ — некоторая эрмитова матрица.

2 $O(n, \mathbb{C})$

Определение. *Ортогональной группой* $O(n, \mathbb{C})$ называется группа комплексных ортогональных матриц

$$O^T \cdot O = I_n. \tag{2}$$

Группа вещественных ортогональных матриц $O(n)$ и соответствующее многообразие, вложенное в $\mathbb{R}^{n^2}$, задаётся системой уравнений (2). Поскольку матрицы $O \cdot O^T$ и I_n — симметричны, то число независимых уравнений, определяющих многообразие $O(n)$, равно $n(n+1)/2$. Отсюда следует, что многообразие группы $O(n)$ имеет размерность

$$\dim(O(n)) = n^2 - n(n+1)/2 = n(n-1)/2 = \dim(SO(n)). \tag{3}$$

Последнее равенство вытекает из того факта, что многообразие группы $O(n)$ состоит из двух несвязанных частей одинаковой размерности, одна из которых представляет собой многообразие $SO(n) =)_+(n)$ (множество ортогональных матриц O с условием $\det(O) = 1$, а вторая часть $O_-(n)$) (множество ортогональных матриц O с условием $\det(O) = -1$) состоит из элементов смежного класса $R \cdot SO(n)$, где R любой фиксированный элемент из $O_-(n)$.

3 $SO(n, \mathbb{C})$

Определение. *Специальной ортогональной группой* $SO(n, \mathbb{C})$ называется подгруппа комплексных ортогональных матриц, удовлетворяющих (2), и таких, что $\det(O) = +1$.

Это группа Ли размерности (3) как подгруппа $O(n)$. Алгебра Ли группы $SO(2)$ — $so(2)$. Рассмотрим кривую O_φ около единичного элемента (для малых углов φ)

$$O_\varphi = I_2 + \varphi \mathbf{i} + O(\varphi^2), \quad \mathbf{i} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Сравнивая кривую $g(t) = O_\varphi \mid_{\varphi = at}$ (t — мало и $a \in \mathbb{R}$ с выражением, связывающим элементы алгебры и группы Ли в малой окрестности

$$g\,(t) = I_n + tA + O(t^2), \tag{5}$$

мы заключаем что алгебра Ли $so(2)$ состоит из антисимметричных двумерных матриц $a\mathbf{i}$, которые образуют одномерное векторное пространство. Отметим, что любой элемент O_φ группы $SO(2)$ можно представить в виде линейной комбинации матриц I_2 и $\mathbf{i}$

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} = I_2 \cos\varphi + \mathbf{i}\sin\varphi. \tag{6}$$

Имеет место следующее тождество (операторный аналог формулы Эйлера):

$$\exp\left(\hat{\mathbf{i}}\varphi\right) = I\cos\varphi + \hat{\mathbf{i}}\sin\varphi, \quad \varphi \in \mathbb{R} \text{ или } \mathbb{C}. \tag{7}$$

Из формулы (7) следует, что любой элемент $O_\varphi \in SO(2)$, заданный в (6), представляется в виде $O_\varphi = \exp(\mathbf{i}\varphi)$, то есть в виде экспоненты от элемента $(\mathbf{i}\varphi)$ алгебры Ли $so(2)$.

$$A \in SO(2,\mathbb{C}) \Leftrightarrow (A^T = A^{-1}, \det A = 1). \tag{8}$$

Настя О.

$SO(n,\mathbb{C})$ абелева группа, т.к. она изоморфна группе вращений $(n-1)$-мерной сферы, которая является абелевой.

Т.к. $SO(n,\mathbb{C})$ абелева группа, то $Z(SO(n,\mathbb{C})) = SO(n,\mathbb{C})$, значит классом эквивалентности любого элемента будет являться тот же элемент.

Т.к. $SO(n,\mathbb{C})$ изоморфна группе вращений $(n-1)$-мерной сферы, сфера изоморфна множеству своих вращений и является гладким многообразием, то $SO(n,\mathbb{C})$ тоже гладкое многообразие (кроме того, состоит из бесконечного числа элементов) $\Rightarrow SO(n,\mathbb{C})$ — группа Ли.

Рассмотрим матрицу $A \in SO(n,\mathbb{C})$ близкую к I_n:

$$A = I_n + tB + O(t^2), \quad t \to 0. \tag{9}$$

Т.к. $A^T = A^{-1}$, то $I_n = AA^T = I_n + t(B + B^T) + O(t^2)$, значит алгебра Ли $so(2,\mathbb{C})$ состоит из матриц B: $-B = B^T$, т.е. кососимметричных.

$a_i, i = 1, 2, 3, \ldots, n(n-1)/2$ — генераторы алгебры Ли.

Структурные константы для $SO(2,\mathbb{C})$ равны 0 (т.к. генератор всего 1).

Структурные константы для $SO(3,\mathbb{C})$ равны ε_{ij}^k (символ Леви-Чевиты).

Возножно, для других n — тоже. Не знаю как доказать. Вообще, они зависят от выбора генераторов, который неоднозначен, но я брала самый простой.

$SO(n,\mathbb{R})$ компактна, т.к. сфера является компактом, а для $SO(n,\mathbb{C})$ нельзя ввести для понятие компактности (оно только для вещественных алгебр).

$g_{ab} = C^d_{ac} C^c_{bd}$ — метрика Киллинга ($C^d_{ac} C^c_{bd}$ — структурные константы).

$so(2,\mathbb{C})$ не полупростая, а $so(3,\mathbb{C})$ полупростая по критерию Картана ($\det(g_{ab}) \neq 0$).

$so(2,\mathbb{C})$ абелева, а для абелевой алгебры понятия простоты я не нашла.

У $so(3,\mathbb{C})$ нет неочевидных идеалов, значит она простая.

В $SO(2,\mathbb{R})$ и в $SO(3,\mathbb{R})$ $C^1(SO(2,\mathbb{R})) = SO(2,\mathbb{R})$, $C^1(SO(3,\mathbb{R})) = SO(3,\mathbb{R})$, значит они нильпотентны.

4 $Sp(2r,\mathbb{R})$

Определение. *Симплектической группой* $Sp(2r,\mathbb{R})$ называется группа вещественных матриц T, удовлетворяющих условию симплектичности

$$T^T \cdot \begin{pmatrix} 0 & I_r \\ -I_r & 0 \end{pmatrix} \cdot T = \begin{pmatrix} 0 & I_r \\ -I_r & 0 \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Алгебра Ли $sp(2r,\mathbb{R}$ группы $Sp(2r,\mathbb{R})$. Для симплектических матриц близких к единице имеем

$$J = (I_{2r} + tA^T + O(n^2)) \cdot J \cdot (I_{2r} + tA + O(t^2)) = J + t(A^T \cdot J + J \cdot A) + O(t^2), \tag{11}$$

то есть

$$A^T \cdot J + J \cdot A = 0, \tag{12}$$

где антисимметричная матрица J задана в (10). Таким образом, $sp(2r,\mathbb{R})$ — это множество матриц, удовлетворяющих условию

$$A^T \begin{pmatrix} 0 & I_r \\ -I_r & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & I_r \\ -I_r & 0 \end{pmatrix} A = 0. \tag{13}$$

Матрицу A можно представить в блочном виде

$$A = \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & W \end{pmatrix}, \tag{14}$$

где X, Y, Z, W — матрицы $r \times r$ с элементами из $\mathbb{R}$, которые в силу условия (13) удовлетворяют соотношениям

$$Y^T = Y, \qquad Z^T = Z, \qquad X^T = -W. \tag{15}$$

Вещественная размерность пространства $sp(2r,\mathbb{R})$ равна

$$\dim(sp(2r,\mathbb{R})) = r(2r+1). \tag{16}$$

Если $A \in sp(2r,\mathbb{R})$, то $\exp(A) \in Sp(2r,\mathbb{R})$.

5 $Sp(p, q)$

Определение. *Группой* $Sp(p, q)$, где $p + q = r$, называется группа комплексных $2r \times 2r$ матриц T, удовлетворяющих одновременно условию псевдо-унитарности

$$T^{\dagger} \cdot \begin{pmatrix} I_{p,\,q} & 0 \\ 0 & I_{p,\,q} \end{pmatrix} \cdot T = \begin{pmatrix} I_{p,\,q} & 0 \\ 0 & I_{p,q} \end{pmatrix} \tag{17}$$

и нестандартному условию симплектичности

$$T^{T} \cdot \begin{pmatrix} 0 & I_{p,\,q} \\ -I_{p,\,q} & 0 \end{pmatrix} \cdot T = \begin{pmatrix} 0 & I_{p,\,q} \\ -I_{p,\,q} & 0 \end{pmatrix}. \tag{18}$$

Алгебры Ли $sp(p, q)$. Рассматривая элементы группы $Sp(p, q)$, близкие к единичным, получаем, что алгебра Ли $sp(p, q)$ — это множество $2r \times 2r$ (здесь $r = p+q$) комплексных матриц A, удовлетворяющих соотношениям

$$A^{T} \begin{pmatrix} 0 & I_r \\ -I_r & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -I_r \\ I_r & 0 \end{pmatrix} A, \quad A^{\dagger} \begin{pmatrix} I_{p,\,q} & 0 \\ 0 & I_{p,\,q} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} I_{p,\,q} & 0 \\ 0 & I_{p,\,q} \end{pmatrix}. \tag{19}$$

Представим A в виде блочной матрицы (14), где X, Y, Z, W — комплексные $r \times r$ блоки. Из соотношений (19) следуют условия

$$W = -X^{T}, \qquad Z = -I_{p,\,q} \cdot Y^{\dagger} \cdot I_{p,\,q}, \tag{20}$$

$$Y^{T} = Y, \qquad X^{\dagger} = -I_{p,\,q} \cdot X \cdot I_{p,\,q}, \tag{21}$$

и любой элемент $A \in sp(p, q)$ представляется в виде блочной матрицы

$$A = \begin{pmatrix} X & Y \\ -I_{p,\,q} \cdot Y^{\dagger} \cdot I_{p,\,q} & -X^{T} \end{pmatrix}, \tag{22}$$

где две $r \times r$ матрицы X и Y, удовлетворяют соотношениям обобщённой анти-эрмитовости и симметричности (21). Пространства таких матриц X и Y имеют вещественные размерности r^2 и $(r + 1)r$, соответственно. Поэтому

$$\dim(sp(p, r - p)) = (r + 1)r + r^2 = r(2r + 1). \tag{23}$$

6 $USp(2r)$

Определение. *Унитарной симлектической группой* $USP(2r)$ называется группа комплексных $2r \times 2r$ матриц T, удовлетворяющих как условию симплектичности (10), так и условию унитарности $T^{\dagger} \cdot T = I_n$.

Алгебра Ли $usp(2r)$ группы $USp(2r)$. Для унитарных симплектических $(2r \times 2r$ матриц, близких к единичной, кроме соотношения унитарности

$$I_n = UU^{\dagger} = (I_n + tA + O(t^2))(I_n + tA^{\dagger} + O(t^2)) = I_n + t(A + A^{\dagger}) + O(t^2), \tag{24}$$

откуда

$$A^{\dagger} = A, \tag{25}$$

имеем ещё условие симплектичности. Поэтому алгебра Ли $usp(2r)$ — это множество всех комплексных матриц A, одновременно удовлетворяющих соотношениям (25) и (13), которые можно записать в виде (19), где вместо матрицы $I_{p,q}$ необходимо взять единичную матрицу I_r. Таким образом, $usp(2r) = sp(r,0) = sp(0,r)$. Теперь мы можем воспользоваться результатами предыдущего пункта и получить для произвольного элемента $A \in usp(2r)$ представление в виде блочной матрицы

$$A = \begin{pmatrix} X & Y \\ -Y^\dagger & -X^T \end{pmatrix}, \tag{26}$$

где X и Y — комплексные $r \times r$ матрицы, удовлетворяющие условиям

$$Y^T = Y, \qquad X^\dagger = -X. \tag{27}$$

Легко проверить, что множество матриц $usp(2r)$ (26), (27) образует векторное пространство, замкнутое относительно операции коммутирования. Размерность этого пространства равна

$$\dim(usp(2r)) = r(2r+1), \tag{28}$$

что следует из (23).

7 $O(p,q)$

Определение. *Вещественной псевдо-ортогонально группой* $O(p,q)$ называется группа вещественных $(n \times n)$ матриц O, где $n = p+q$, подчиняющихся условию

$$O^T \cdot \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{pmatrix} \cdot O = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{pmatrix}. \tag{29}$$

8 $PSO(p,q)$

Определение. *Специальной вещественной псевдо-ортогональной группой* $SO(p,q)$ называется группа вещественных $(n \times n)$ матриц O, где $n = p+q$, подчиняющихся одноврменно условию псевдоортогональности (29), а также условию $\det O = 1$.

Определение. *Проективной псевдо-ортогональной группой* $PSO(p,q)$ называется фактор-группа $SO(p,q)/\mathbf{Z}_2$.

9 Группа Лоренца

Определение. *Группой Лоренца n-мерного пространства* называется группа $O(1,n-1)$.

10 $SU(p,q)$

Определение. *Специальной псевдо унитарной группой* $SU(p,q)$ называется группа комплексных $(n \times n)$ матриц U, удовлетворяющих одновременно условию (1), где в качестве $\mathbf{H}$ выбрана матрица $I_{p,q}$:

$$U^\dagger \cdot \begin{pmatrix} I_{p,q} & 0 \\ 0 & I_{p,q} \end{pmatrix} \cdot U = \begin{pmatrix} I_{p,q} & 0 \\ 0 & I_{p,q} \end{pmatrix} \tag{30}$$

и условию $\det U = 1$.

Центром группы является конечная инвариантная подгруппа матриц

$$U_k = \exp\left(i\frac{2\pi k}{n}\right) I_n \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1). \tag{31}$$

11 $PSL(n, \mathbb{K})$

Определение. *Проективной комплексной линейной группой* $PSL(n, \mathbb{C})$ называется фактор-группа $SL(n, \mathbb{C})/\mathbf{Z}_n$.

Определение. *Проективной вещественной линейной группой* $PSL(2n, \mathbb{R}$ называется фактор-группа $SL(2n\,\mathbb{R})/\mathbf{Z}_2$.

12 $\mathcal{O}_{I_n}$

$\mathcal{O}_{I_n} \equiv O(n, \mathbb{C})$

13 Группа анти-де Ситтера

Определение. *Группой анти-де Ситтера n-мерного пространства* называется группа $O(2{,}n-2)$.

14 $PSU(p, q)$

Определение. *Проективной псевдо-унитарной группой* $PSU(p, q)$ называется фактор-группа $SU(p, q)/\mathbf{Z}_n$, где $p + q = n$.

15 $\mathcal{O}_J$

$\mathcal{O}_J \equiv Sp(2r, \mathbb{C})$

16 Группа Пуанкаре

Определение. *Группой Пункаре* называется группа симметрий четырёхмерного пространства Минковского, т.е. множество преобразований вида

$$x_k \to x'_k = O_{kj} x_j + a_k, \tag{32}$$

где вещественная матрица $\|O_{ij}\| \in O(1, 3)$ и произведение элементов задаётся следующим образом

$$g_1 \cdot g_2 = (O_1, \vec{a}_1) \cdot (O_2, \vec{a}_2) = (O_1 \cdot O_2, O_1 \cdot \vec{a}_2 + \vec{a}_1). \tag{33}$$