Домашка по теории групп

2 мая 2020 г.

Часть 1

1 $\mathcal{U}_{\mathbf{H}}$

Определение. *Группой* $\mathcal{U}_{\mathbf{H}}$ называется группа невырожденных комплексных матриц T, удовлетворяющих соотношению

$$\mathbf{H} = T^{\dagger} \cdot \mathbf{H} \cdot T, \tag{1}$$

где $\mathbf{H}$ — некоторая эрмитова матрица.

2 $O(n, \mathbb{C})$

Определение. *Ортогональной группой* $O(n, \mathbb{C})$ называется группа комплексных ортогональных матриц

$$O^T \cdot O = I_n. \tag{2}$$

3 $SO(n, \mathbb{C})$

Определение. *Специальной ортогональной группой* $SO(n, \mathbb{C})$ называется подгруппа комплексных ортогональных матриц, удовлетворяющих (2), и таких, что $\det(O) = +1$.

4 $Sp(2r, \mathbb{R})$

Определение. *Симплектической группой* $Sp(2r, \mathbb{R})$ называется группа вещественных матриц T, удовлетворяющих условию симплектичности

$$T^T \cdot \begin{pmatrix} 0 & I_r \\ -I_r & 0 \end{pmatrix} \cdot T = \begin{pmatrix} 0 & I_r \\ -I_r & 0 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

5 $Sp(p, q)$

Определение. *Группой* $Sp(p, q)$, где $p + q = r$, называется группа комплексных $2r \times 2r$ матриц T, удовлетворяющих одновременно условию псевдо-унитарности

$$T^{\dagger} \cdot \begin{pmatrix} I_{p,q} & 0 \\ 0 & I_{p,q} \end{pmatrix} \cdot T = \begin{pmatrix} I_{p,q} & 0 \\ 0 & I_{p,q} \end{pmatrix} \tag{4}$$

и нестандартному условию симплектичности

$$T^T \cdot \begin{pmatrix} 0 & I_{p,q} \\ -I_{p,q} & 0 \end{pmatrix} \cdot T = \begin{pmatrix} 0 & I_{p,q} \\ -I_{p,q} & 0 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

6 $USp(2r)$

Определение. *Унитарной симлектической группой* $USP(2r)$ называется группа комплексных $2r \times 2r$ матриц T, удовлетворяющих как условию симплектичности (3), так и условию унитарности $T^\dagger \cdot T = I_n$.

7 $O(p, q)$

Определение. *Вещественной псевдо-ортогонально группой* $O(p, q)$ называется группа вещественных $(n \times n)$ матриц O, где $n = p + q$, подчиняющихся условию

$$O^T \cdot \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{pmatrix} \cdot O = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{pmatrix}. \tag{6}$$

8 $PSO(p, q)$

Определение. *Специальной вещественной псевдо-ортогональной группой* $SO(p, q)$ называется группа вещественных $(n \times n)$ матриц O, где $n = p+q$, подчиняющихся одноврменно условию псевдоортогональности (6), а также условию $\det O = 1$.

Определение. *Проективной псевдо-ортогональной группой* $PSO(p, q)$ называется фактор-группа $SO(p, q)/\mathbf{Z}_2$.

9 Группа Лоренца

Определение. *Группой Лоренца n-мерного пространства* называется группа $O(1,n-1)$.

10 $SU(p, q)$

Определение. *Специальной псевдо унитарной группой* $SU(p, q)$ называется группа комплексных $(n \times n)$ матриц U, удовлетворяющих одновременно условию (1), где в качестве $\mathbf{H}$ выбрана матрица $I_{p,q}$:

$$U^\dagger \cdot \begin{pmatrix} I_{p,q} & 0 \\ 0 & I_{p,q} \end{pmatrix} \cdot U = \begin{pmatrix} I_{p,q} & 0 \\ 0 & I_{p,q} \end{pmatrix} \tag{7}$$

и условию $\det U = 1$.

Центром группы является конечная инвариантная подгруппа матриц

$$U_k = \exp\left(i\frac{2\pi k}{n}\right) I_n \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1). \tag{8}$$

11 $PSL(n, \mathbb{K})$

Определение. *Проективной комплексной линейной группой* $PSL(n, \mathbb{C})$ называется фактор-группа $SL(n, \mathbb{C})/\mathbf{Z}_n$.

Определение. *Проективной вещественной линейной группой* $PSL(2n, \mathbb{R}$ называется фактор-группа $SL(2n\,\mathbb{R})/\mathbf{Z}_2$.

12 $\mathcal{O}_{I_n}$

$\mathcal{O}_{I_n} \equiv O(n, \mathbb{C})$

13 Группа анти-де Ситтера

Определение. *Группой анти-де Ситтера n-мерного пространства* называется группа $O(2{,}n-2)$.

14 $PSU(p, q)$

Определение. *Проективной псевдо-унитарной группой* $PSU(p, q)$ называется фактор-группа $SU(p, q)/\mathbf{Z}_n$, где $p + q = n$.

15 $\mathcal{O}_J$

$\mathcal{O}_J \equiv Sp(2r, \mathbb{C})$

16 Группа Пуанкаре

Определение. *Группой Пункаре* называется группа симметрий четырёхмерного пространства Минковского, т.е. множество преобразований вида

$$x_k \to x'_k = O_{kj}x_j + a_k, \tag{9}$$

где вещественная матрица $\|O_{ij}\| \in O(1, 3)$ и произведение элементов задаётся следующим образом

$$g_1 \cdot g_2 = (O_1, \vec{a}_1) \cdot (O_2, \vec{a}_2) = (O_1 \cdot O_2, O_1 \cdot \vec{a}_2 + \vec{a}_1). \tag{10}$$