Работа над ошибками
Вариант 2

Драчов Ярослав
Факультет общей и прикладной физики МФТИ

17 ноября 2020 г.

Задача 3

Далее будем считать, что

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

1. Вычислим евклидовы нормы матриц $\mathbf{A}$ и $\mathbf{A}^{-1}$:

$$\|\mathbf{A}\|_3 = 5, \qquad \|\mathbf{A}^{-1}\| = 1.$$

Тогда число обусловленности μ_3 матрицы $\mathbf{A}$ будет равно:

$$\mu_3(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}\|\|\mathbf{A}^{-1}\| = 5.$$

2. Приведём разложение матрицы $\mathbf{A}$ на диагональную $\mathbf{D}$, нижнюю и верхнюю треугольные матрицы с нулевыми элементами на главной диагонали ($\mathbf{L}$ и $\mathbf{U}$ — соответственно):

$$\mathbf{D} = \operatorname{diag}(1, 1, 4), \qquad \mathbf{L} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{U} = \mathbf{L}^T.$$

Пользуясь следующими обозначениями для общего вида итерационного метода

$$\mathbf{u}^{(k+1)} = \mathbf{R}\mathbf{u}^{(k)} + \mathbf{F}$$

запишем вычислительные формулы для метода Якоби:

$$\mathbf{R} = -\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L} + \mathbf{U}) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{F} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{f} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

и метода Зейделя:

$$\mathbf{R} = -(\mathbf{L} + \mathbf{D})^{-1}\mathbf{U} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{F} = (\mathbf{L} + \mathbf{D})^{-1}\mathbf{f} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Далее воспользуемся критерием сходимости метода Якоби (для сходимости необходимо и достаточно, чтобы все корни уравнения

$$\begin{vmatrix} \lambda a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & \lambda a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & \lambda a_{33} \end{vmatrix} = 0$$

по модулю не превосходили единицы):

$$\begin{vmatrix} \lambda & -2 & -1 \\ -2 & \lambda & 1 \\ -1 & 1 & 4\lambda \end{vmatrix} = 4 - 18\lambda + 4\lambda^3 = 2(\lambda - 2)\left(2\lambda^2 + 4\lambda - 1\right) = 0.$$

Заметим, что данное уравнение имеет как минимум один корень $\lambda_1 = 2$, по модулю превосходящий единицу. Следовательно итерационный метод Якоби по приведённому критерию не сходится.

Для сходимости метода Зейделя необходимо и достаточно, чтобы все корни уравнения

$$\begin{vmatrix} \lambda a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & a_{23} \\ \lambda a_{31} & \lambda a_{32} & \lambda a_{33} \end{vmatrix} = 0$$

по модулю не превосходили единицы.

$$\begin{vmatrix} \lambda & -2 & -1 \\ -2\lambda & \lambda & 1 \\ -\lambda & \lambda & 4\lambda \end{vmatrix} = 4\lambda^3 - 16\lambda^2 + 2\lambda = 2\lambda\left(2\lambda^2 - 8\lambda + 1\right) = 0.$$

Решением данного уравнения, кроме прочих, будет корень

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}\left(4 + \sqrt{14}\right) > 1.$$

Следовательно метод Зейделя по критерию в данном случае также не сходится.

3. Считая начальным приближением вектор

$$\mathbf{u}^{(0)} = \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

и пользуясь полученными ранее значениями $\mathbf{R}$ и $\mathbf{F}$ для методов Якоби и Зейделя для итерационного метода вида $\mathbf{u}^{(k+1)} = \mathbf{R}\mathbf{u}^{(k)} + \mathbf{F}$, выполним по три итерации данных методов:

- *Метод Якоби*:

$$\mathbf{u}^{(1)} = \mathbf{R}\mathbf{u}^{(0)} + \mathbf{F} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{u}^{(2)} = \mathbf{R}\mathbf{u}^{(1)} + \mathbf{F} = \begin{pmatrix} -2 \\ 10 \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{u}^{(3)} = \mathbf{R}\mathbf{u}^{(2)} + \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \frac{49}{2} \\ -\frac{17}{2} \\ -\frac{5}{2} \end{pmatrix}.$$

- *Метод Зейделя*:

$$\mathbf{u}^{(1)} = \mathbf{R}\mathbf{u}^{(0)} + \mathbf{F} = \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{u}^{(2)} = \mathbf{R}\mathbf{u}^{(1)} + \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \frac{43}{2} \\ \frac{83}{2} \\ -\frac{9}{2} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{u}^{(3)} = \mathbf{R}\mathbf{u}^{(2)} + \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \frac{161}{2} \\ \frac{327}{2} \\ -\frac{81}{4} \end{pmatrix}.$$