Контрольная работа по квантовой механике

Драчов Ярослав
Факультет общей и прикладной физики МФТИ

1 декабря 2020 г.

Задача 1

С помощью теории возмущений найдём поправки к уровням энергии линейного гармонического осциллятора, возмущённого полем вида $\hat{V} = ax$. Для расчётов используем выражение оператора координаты $\hat{x}$ для гармонического осциллятора через операторы рождения и уничтожения (x_0 — осцилляторная единица длины)

$$\hat{x} = \frac{x_0}{\sqrt{2}}\left(\hat{a}^{+} + \hat{a}\right).$$

Поправка первого приближения $E_n^{(1)} = 0$, т. к. $\left\langle \hat{x}^{2k+1} \right\rangle = 0$. Поправка второго приближения

$$E_n^{(2)} = \sum_{k \neq n} \frac{|V_{nk}|^2}{E_n^{(0)} - E_k^{(0)}} = \frac{a^2 x_0^2}{2}\left(\frac{n}{\hbar\omega} - \frac{n+1}{\hbar\omega}\right) = -\frac{\alpha^2}{2m\omega^2},$$

где $V_{nk} = \left\langle n \left| \hat{V} \right| k \right\rangle$, $E_n^{(0)} = \hbar\omega(n + 1/2)$.

$$\frac{m\omega^2 x^2}{2} + ax = \frac{m\omega^2 x^2}{2} + ax + \frac{a^2}{2m\omega^2} - \frac{a^2}{2m\omega^2} = \left(\omega\sqrt{\frac{m}{2}}x + \frac{a}{\omega}\sqrt{\frac{1}{2m}}\right)^2 - \frac{a^2}{2m\omega^2} =$$
$$= \frac{m\omega^2}{2}\left(x + \frac{a}{\omega^2 m}\right)^2 - \frac{a^2}{2m\omega^2} \overset{y = x + a/(\omega^2 m)}{=\!=\!=} \frac{m\omega^2 y^2}{2} - \frac{a^2}{2m\omega^2}.$$

Запишем стационарное уравнение Шрёдингера в координатном представлении

$$\left\{-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V(x)\right\}\psi_E(x) = E\psi_E(x).$$

$$\left\{-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dy^2} + V(y)\right\}\psi_E\left(y - \frac{a}{m\omega^2}\right) = E\psi_E\left(y - \frac{a}{m\omega^2}\right).$$

Задача 2

Решение.

$$\left[\hat{L}_j, \hat{x}_k \hat{p}_l\right] = \hat{x}_k\left[\hat{L}_j, \hat{p}_l\right] + \left[\hat{L}_j, \hat{x}_k\right]\hat{p}_l = i\hat{x}_k \varepsilon_{jli}\hat{p}_i + i\varepsilon_{jki}\hat{x}_i\hat{p}_l.$$