Задание по уравнениям математической физики

Драчов Ярослав
Факультет общей и прикладной физики МФТИ

18 декабря 2020 г.

Содержание

Начально-краевая задача на отрезке

№12. Дан линейный оператор

$$A\colon D(A) \to L_2[0,1],$$

где

$$D(A) = \left\{ f \in W^{2,2}[0,1] : f(0) = 0,\, f'(1) = 0 \right\},$$
$$(Af)(x) = f''(x), \quad x \in [0,1],\, f \in D(A).$$

1. Найдите в $L_2[0,1]$ ортогональный базис из собственных функций оператора A.

2. Докажите, что A — самосопряжённый оператор.

3. Напишите спектральное разложение оператора A.

4. В $L_2[0,1]$ при $t>0$ решить задачу

$$\frac{d^2}{dt^2}u(t) = Au(t), \quad t>0,\, u(t)\in D(A),$$

$$u(+0)=0, \quad \frac{d}{dt}u(+0) = x.$$

Решение. 1. *Симметричность* A. Для любых $f, g \in D(A)$

$$(Af, g) = \int\limits_0^1 Af\cdot\overline{g}\,dx = \int\limits_0^1 f''\overline{g}\,dx \xlongequal{\text{по частям}} \underbrace{f'\overline{g}\big|_0^1}_{\substack{=0\\ \text{т. к.} f'(1)=0\\ f'(0)=0}} \int\limits_0^1 f'\overline{g'}\,dx \xlongequal{\text{по част.}}$$

$$= -f\overline{g'}\big|_0^1 + \int\limits_0^1 fg''\,dx = (f, g'') = (f, Ag).$$

2. *Базис* A.

$$f \in C^2[0,1] \subset W^{2,2}[0,1].$$

$$f'' = \lambda f, \quad f(0)=0,\, f'(1)=0.$$

а) Случай $\lambda>0$

$$f = A\operatorname{sh}\sqrt{\lambda}x + B\operatorname{ch}\sqrt{\lambda}x.$$

$$f' = A\sqrt{\lambda}\operatorname{ch}\sqrt{\lambda}x + B\sqrt{\lambda}\operatorname{sh}\sqrt{\lambda}x.$$

$$f(0) = B = 0 \implies B=0.$$

$$f'(1) = A\sqrt{\lambda}\operatorname{ch}\sqrt{\lambda} = 0 \implies A = 0.$$

$$\varnothing.$$

б) Случай $\lambda=0$

$$f = Ax+B, \quad f' = A.$$

$$f(0)=B=0, \quad f'(1)=A=0.$$

$$\varnothing.$$

в) Случай $\lambda<0$

$$f = A\sin\sqrt{-\lambda}x + B\cos\sqrt{-\lambda}x.$$

$$f' = A\sqrt{-\lambda}\cos\sqrt{-\lambda}x + B\sqrt{-\lambda}\sin\sqrt{-\lambda}x.$$

$$f(0)=B=0.$$

$$f'(1) = A\sqrt{-\lambda}\cos\sqrt{-\lambda} = 0 \implies \cos\sqrt{-\lambda}=0.$$

$$\sqrt{-\lambda} = -\frac{\pi}{2}+\pi n, \quad n=1,2,\ldots$$

$$\lambda_n = -\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n\right)^2, \quad e_n = \sin\left[\left(-\frac{1}{2}+n\right)\pi x\right].$$

3. *Самосопряжённость A.*

а) Докажем, что

$$D(A) \subset \left\{ f \in L_2[0,1] \colon \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n^2 |(f, e_n)|^2}{\|e_n\|^2} < \infty \right\}.$$

Для любого $f \in D(A)$

$$Af = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(Af, e_n)}{(e_n, e_n)} e_n \xlongequal[\substack{f \in D(A) \\ e_n \in D(A)}]{\text{сим.}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(f, Ae_n)}{(e_n, e_n)} e_n \xlongequal{\text{с.в.}}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(f, \lambda_n e_n)}{(e_n, e_n)} e_n = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \frac{(f, e_n)}{(e_n, e_n)} e_n \text{ — спектр. разл. } A.$$

$$\|Af\|^2 \xlongequal{\substack{\text{р-во} \\ \text{Парсеваля}}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n^2 |(f, e_n)|^2}{\|e_n\|^2} < \infty.$$

б) Построим A^*. Для начала докажем, что

$$D(A^*) \subset \left\{ f \in L_2[0,1] \colon \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n^2 |(f, e_n)|^2}{\|e_n\|^2} < \infty \right\}.$$

Для любых $f \in D(A^*)$, $g_N = \sum\limits_{n=1}^{N} \frac{\lambda_n (f, e_n)}{(e_n, e_n)} e_n \in D(A)$ по определению сопряжённого оператора получаем

$$|(Ag_N, f)| \leqslant C_f \cdot \|g_N\| = C_f \sqrt{\sum_{n=1}^{N} \frac{\lambda_n^2 |(f, e_n)|^2}{\|e_n\|^2}}.$$

$$\left| \left(A \left(\sum_{n=1}^{N} \frac{\lambda_n (f, e_n)}{(e_n, e_n)} e_n \right), f \right) \right| = \left| \left(\sum_{n=1}^{N} \frac{\lambda_n (f, e_n)}{(e_n, e_n)} \lambda_n e_n, f \right) \right| =$$

$$= \left| \sum_{n=1}^{N} \frac{\lambda_n^2 (f, e_n)}{(e_n, e_n)} (e_n, f) \right| = \sum_{n=1}^{N} \frac{\lambda_n^2 |(f, e_n)|^2}{\|e_n\|^2}.$$

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{\lambda_n^2 |(f, e_n)|^2}{\|e_n\|^2} \leqslant C_f \sqrt{\sum_{n=1}^{N} \frac{\lambda_n^2 |(f, e_n)|^2}{\|e_n\|^2}}.$$

$$\sqrt{\sum_{n=1}^{N} \frac{\lambda_n^2 |(f, e_n)|^2}{\|e_n\|^2}} \leqslant C_f.$$

Частичный ряд ограничен, следовательно ряд сходится.

в) Докажем, что

$$D(A^*) \supset \left\{ f \in L_2[0,1] \colon \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n^2 |(f,e_n)|^2}{\|e_n\|^2} < \infty \right\} = B.$$

А именно

$$\forall f \in B \implies f \subset D(A^*).$$

$$\forall g \in D(A) \quad |(Ag,f)| \leqslant C_f \|g\|?$$

$$|(Ag,f)| \xlongequal[\text{разл.}A]{\text{спектр.}} \left| \left(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \frac{(g,e_n)}{(e_n,e_n)} e_n, f \right) \right| \xlongequal{\substack{\text{непр. ск.}\\ \text{произвед.}}}$$

$$= \left| \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \frac{(g,e_n)}{(e_n,e_n)} (e_n,f) \right| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} \left(g, \lambda_n \frac{(f,e_n)}{(e_n,e_n)} \right) e_n \right| \xlongequal{\substack{\text{непр. ск.}\\ \text{произвед.}}}$$

$$= \left| \left(g, \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \frac{(f,e_n)}{(e_n,e_n)} e_n \right) \right| \overset{\text{КБШ}}{\leqslant} \|g\| \cdot \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \frac{(f,e_n)}{(e_n,e_n)} e_n \right\| =$$

$$= \|g\| \cdot \underbrace{\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 \frac{|(f,e_n)|^2}{\|e_n\|^2}}}_{C_f} < \infty \implies D(A^*) = B.$$

$$A^* f = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \frac{(f,e_n)}{(e_n,e_n)} e_n \text{ — спектральное разложение } A^*.$$

г) Докажем, что $D(A) \supset D(A^*)$ $\forall f \in D(A^*)$. Для этого

i. Докажем, что существует обобщённая производная $f' \in L_2[0,1]$

$$f_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{(f,e_n)}{(e_n,e_n)} e_n \in C^\infty[0,1] \implies$$

$$\implies \exists f'_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{(f,e_n)}{(e_n,e_n)} \left(-\frac{1}{2} + n \right) \pi \cos \left[\left(-\frac{1}{2} + n \right) \pi x \right].$$

Мы нашли нормальную, а следовательно и обобщённую производную f_N. Для любых $h \in C^1[0,1]$, таких, что $h(0) = 0$ и $h(1) = 0$ выполнено

$$\int_0^1 f_N h' dx = - \int_0^1 f'_N h \, dx.$$

$$\left(f, \overline{h'}\right) \xleftarrow[\|f_N - f\|_{L_2} \to 0]{\substack{\text{непр. ск.}\\ \text{произвед.}}} \left(f_N, \overline{h'}\right) = - \left(f'_N, \overline{h}\right) \xrightarrow[\|f_N - f\|_{L_2} \to 0]{\substack{\text{непр. ск.}\\ \text{произвед.}}} = - \left(f', \overline{h}\right).$$

$$f'_N \to \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(f,e_n)}{(e_n,e_n)} \sqrt{-\lambda_n} \cos \left[\left(-\frac{1}{2} + n \right) \pi x \right] = f' \overset{?}{\in} L_2[0,1].$$

$$\|f'\|^2 \xlongequal{\text{Парс.}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|(f,e_n)|^2}{\|e_n\|^4}(-\lambda_n) \left\|\cos\left[\left(-\frac{1}{2}+n\right)\pi x\right]\right\|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|(f,e_n)|^2}{\|e_n\|^2}\lambda_n^2 < \infty \text{ т. к. } f \in D(A^*).$$

ii. Докажем, что существует вторая обобщённая производная $f'' \in L[0,1]$. Для любого $h \in C^2[0,1]$, такого, что $h(0) = 0$ и $h(1) = 0$ выполнено

$$\int\limits_0^1 f_N h'' dx = \int\limits_0^1 f_N'' h\, dx.$$

Аналогично предыдущим рассуждениям

$$\left(f, \overline{h''}\right) \leftarrow \left(f_N, \overline{h''}\right) = \left(f_N'', \overline{h}\right) \to \left(f'', \overline{h}\right).$$

$$f_N'' = \sum_{n=1}^{N} \frac{(f,e_n)}{(e_n,e_n)}\lambda_n e_n \to \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(f,e_n)}{(e_n,e_n)}\lambda_n e_n \text{ — сх-ся в } L_2[0,1].$$

iii. Краевые условия.

$$f'' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n (f,e_n)}{(e_n,e_n)} e_n, \quad f'' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(f'',e_n)}{(e_n,e_n)} e_n \implies$$

$$\implies \lambda_n (f,e_n) = (f'',e_n)\ \forall n.$$

$$(f'',e_n) = \int\limits_0^1 f''\overline{e}_n\, dx \xlongequal{\text{по част.}} f'\overline{e}_n\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 f'\overline{e_n'}\, dx =$$

$$= f'(1)(-1)^{1+n} - f\overline{e_n'}\Big|_0^1 + \int\limits_0^1 f\overline{e_n''}\, dx =$$

$$= f'(1)(-1)^{1+n} - f(0)\left(-\frac{1}{2}+n\right)\pi + \lambda_n(f,e_n) \implies$$

$$\implies f'(1)(-1)^{1+n} - f(0)\left(-\frac{1}{2}+n\right) = 0\ \forall n \implies$$

$$\implies f(0) = f'(1) = 0.$$

Тем самым мы доказали, что $D(A) \supset D(A^*)$. Ранее было доказано, что $D(A) \subset D(A^*)$. Откуда $D(A) = D(A^*)$.

Принимая во внимание также ранее доказанный факт, что $A = A^*$ на $D(A)$, завершаем тем самым доказательство самосопряжённости A.

4. *Поиск «кандидата» на решение начально-краевой задачи*

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) e_n, \quad Au = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n T_n(t) e_n, \quad x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n''(t) e_n = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n T_n(t).$$

$$T_n'' = \lambda_n T_n, \quad T_n(0) = 0,\, T_n'(0) = \alpha_n.$$

$$T_n = A \cos \sqrt{-\lambda_n} t + B \sin \sqrt{-\lambda_n} t.$$

$$T_n(0) = 0 \implies A = 0.$$

$$T_n' = B\sqrt{-\lambda_n} \cos \sqrt{-\lambda_n} t.$$

$$T_n'(0) = \alpha_n \implies B = \frac{\alpha_n}{\sqrt{-\lambda_n}}.$$

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n e_n}{\sqrt{-\lambda_n}} \sin \sqrt{-\lambda_n} t.$$

5. *Проверка* $u \in L_2[0,1]$.

$$\|u\|^2 \overset{\text{Парс.}}{=\!=\!=} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\alpha_n|^2 \|e_n\|^2}{-\lambda_n} \sin^2 \sqrt{-\lambda_n} t \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\alpha_n|^2 \|e_n\|^2}{-\lambda_n} \left(1 + \sqrt{-\lambda_n}\right)^2 \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\alpha_n|^2 \|e_n\|^2}{-\lambda_n} \left(2\sqrt{-\lambda_n}\right)^2 = 4 \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2 \|e_n\|^2 = 4\|x\|^2 < \infty. \quad (*)$$

6. *Проверка* $u \in D(A)$. Для дальнейшей оценки нам следует найти коэффициенты α_n

$$\alpha_n = \frac{(x, e_n)}{(e_n, e_n)}.$$

$$(e_n, e_n) = \int_0^1 \sin^2 \left[\left(-\frac{1}{2} + n\right) \pi x\right] dx = \frac{1}{2}.$$

$$(x, e_n) = \int_0^1 x \sin \left[\left(-\frac{1}{2} + n\right) \pi x\right] dx = \frac{4(-1)^{n+1}}{(\pi - 2n\pi)^2}.$$

$$\|Au\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^2 \frac{|\alpha_n|^2 \|e_n\|^2}{-\lambda_n} \sin^2 \sqrt{-\lambda_n} t \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1+2n)\pi \cdot 16}{2\pi^4 (-1+2n)^4} =$$

$$= \frac{8}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^3} < \infty.$$

7. *Проверка* $u(+0) = 0$. Согласно (*)

$$\|u\|^2 \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\alpha_n|^2 \|e_n\|^2}{-\lambda_n} \left(1 + \sqrt{-\lambda_n}\right)^2.$$

Последняя оценка не зависит от t. Ряд сходится, значит по признаку Вейерштрасса равномерная сходимость $\|u\|^2$ по t позволяет нам переходить к пределу при $t \to 0$ почленно. Следовательно $\|u\|^2 \to 0$ при $t \to +0$.

8. *Проверка сходимости* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} T_n'(t)e_n$ *в* L_2.

$$\left\|\sum_{n=1}^{\infty} T_n'(t)e_n\right\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2 \left|\cos\sqrt{-\lambda}t\right|^2 \|e_n\|^2 \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2 \|e_n\|^2 = \|x\| < \infty.$$

9. *Проверка* $\dfrac{du}{dt} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} T_n'(t)e_n$ *в* $L_2[0,1]$.

$$\left\|\frac{u(t+\Delta t)-u(t)}{\Delta t} - \sum_{n=1}^{\infty} T_n' e_n\right\|^2 =$$

$$= \left\|\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t_n(t+\Delta t)-T_n(t)}{\Delta t} - \sum_{n=1}^{\infty} T_n' e_n\right\|^2 \overset{\text{Парс.}}{=\!=\!=}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{T_n(t+\Delta t)-T_n(t)}{\Delta t} - T_n'(t)\right|^2 \|e_n\|^2 \underset{\xi_n \in (t,\, t+\Delta t)}{\overset{\substack{\text{теор. Лагр.}\\ \text{о среднем}}}{=\!=\!=\!=}}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left|T_n'(\xi_n) - T_n'(t)\right|^2 \|e_n\|^2 =$$

$$= \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2 \left|\cos\sqrt{-\lambda_n}\xi_n - \cos\sqrt{-\lambda_n}t\right|^2 \|e_n\|^2}_{(**)} \leqslant$$

$$\leqslant 4\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2 \|e_n\|^2 = 4\|x\| < +\infty.$$

Заметим, что последние оценки не зависят от t, а ряд сходится. Значит по признаку Вейерштрасса ряд $(**)$ сходится равномерно по Δt, поэтому можем переходить к пределу почленно, завершая тем самым доказательство предъявленного утверждения.

10. *Проверка* $\dfrac{du}{dt}(+0) = x$.

$$\left\|\sum_{n=1}^{\infty} T_n'(t)e_n - \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n\right\|^2 = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \left|\alpha_n \cos\sqrt{-\lambda_n}t - \alpha_n\right|^2 \|e_n\|^2}_{(***)} \leqslant$$

$$\leqslant 4\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2 \|e_n\|^2 = 4\|x\|.$$

Полученная оценка не зависит от t и ряд сходится. Значит по признаку Вейерштрасса ряд $(***)$ сходится равномерно по t, поэтому можем переходить к пределу почленно, получая тем самым доказательство требуемой проверки.

11. *Проверка сходимости* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} T_n'' e_n$ *в* $L_2[0,1]$.

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} T_n''(t) e_n \right\|^2 = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n T_n(t) e_n \right\|^2 = \|Au\|^2 < \infty.$$

12. *Проверка* $\dfrac{d^2u}{dt^2} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} T_n'' e_n$ *в* $L_2[0,1]$.

$$\left\| \frac{\frac{du}{dt}(t+\Delta t) - \frac{du}{dt}(t)}{\Delta t} - \sum_{n=1}^{\infty} T_n'' e_n \right\|^2 =$$

$$= \left\| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T_n'(t+\Delta t) - T_n'(t)}{\Delta t} - \sum_{n=1}^{\infty} T_n'' e_n \right\|^2 \overset{\text{Парс.}}{=\!=\!=}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{T_n'(t+\Delta t) - T_n'(t)}{\Delta t} - T_n''(t) \right|^2 \|e_n\|^2 \underset{\xi_n \in (t,\, t+\Delta t)}{\overset{\substack{\text{теор. Лагр.} \\ \text{о среднем}}}{=\!=\!=\!=}}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left| T_n''(\xi_n) - T_n''(t) \right|^2 \|e_n\|^2 =$$

$$= \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2 \sqrt{-\lambda_n} \left| \sin \sqrt{-\lambda_n} \xi_n - \sin \sqrt{-\lambda_n} t \right|^2 \|e_n\|^2}_{\text{(iv)}} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1+2n)\pi \cdot 64}{2\pi^4 (-1+2n)^4} = \frac{32}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^3} < \infty.$$

Заметим, что последние оценки не зависят от t, а ряд сходится. Значит по признаку Вейерштрасса ряд (iv) сходится равномерно по Δt, поэтому можем переходить к пределу почленно, завершая тем самым доказательство предъявленного утверждения.

Начально-краевая задача в прямоугольнике

№20. Пусть множество функций

$$D(\Delta) = \left\{ \begin{array}{c} u(x,y) \in C^2\left(\left[0, \frac{1}{3}\right] \times \left[0, \frac{1}{3}\right]\right) : \\ u_x|_{x=0} = 0,\ u|_{x=\frac{1}{3}} = 0,\ u_y|_{y=0} = 0,\ u_y|_{y=\frac{1}{3}} = 0 \end{array} \right\}.$$

является областью определения оператора Лапласа

$$\Delta \colon D(\Delta) \to L_2\left(\left[0, \frac{1}{3}\right] \times \left[0, \frac{1}{3}\right]\right).$$

1. Доказать, что Δ — симметричный оператор.
2. Доказать, что Δ — отрицательно определён.

3. Найти в $L_2\left(\left[0,\frac{1}{3}\right]\times\left[0,\frac{1}{3}\right]\right)$ ортогональный базис из собственных функций оператора Δ.

4. Построить оператор $\overline{\Delta}$, являющийся замыканием оператора Δ, указать его спектральное разложение.

5. В $L_2\left(\left[0,\frac{1}{3}\right]\times\left[0,\frac{1}{3}\right]\right)$ решить задачу

$$9\frac{d}{dt}u(t)=\overline{\Delta}u(t)+xy\cdot\sin t,\quad t>0,\ u(t)\in D\left(\overline{\Delta}\right),\ u(+0)=0.$$

Решение. 1. *Симметричность* Δ. $u,v\in D(\Delta)$

$$(\Delta u,v)\overset{?}{=\!=}(u,\Delta v).$$

$$(\Delta v,u)=\int_0^{\frac{1}{3}}\int_0^{\frac{1}{3}}(u_{xx}+u_{yy})\overline{v}\,dxdy=\int_0^{\frac{1}{3}}dy\int_0^{\frac{1}{3}}u_{xx}\overline{v}\,dx+\int_0^{\frac{1}{3}}dx\int_0^{\frac{1}{3}}u_{yy}\overline{v}\,dy=$$
$$=-\int_0^{\frac{1}{3}}dy\int_0^{\frac{1}{3}}u_x\overline{v}_xdx-\int_0^{\frac{1}{3}}dx\int_0^{\frac{1}{3}}u_y\overline{v}_y\,dy=\int_0^{\frac{1}{3}}dy\int_0^{\frac{1}{3}}u\overline{v}_{xx}dx+\int_0^{\frac{1}{3}}dx\int_0^{\frac{1}{3}}u\overline{v}_{yy}dy=$$
$$=\int_0^{\frac{1}{3}}\int_0^{\frac{1}{3}}u\left(\overline{v}_{xx}+\overline{v}_{yy}\right)dxdy=(v,\Delta u).$$

2. *Отрицательная определённость* Δ. $f\in D(\Delta)$

$$(\Delta f,f)=-\int_0^{\frac{1}{3}}\int_0^{\frac{1}{3}}(|f_x|^2+|f_y|^2)dxdy\leqslant 0.$$

Причём $(\Delta f,f)=0$ только если $f_x=f_y=0$, но учитывая граничные условия в данной нам области из этого напрямую следует $f=0$.

3. *Ортогональный базис из с.ф.* Δ. Будем искать ортогональный базис для пространства $L_2\left(\left[0,\frac{1}{3}\right]\times\left[0,\frac{1}{3}\right]\right)$ в виде $\{f_n\otimes g_m\}$. Итак

a) $f(x)$ т.ч. $f''=\lambda f$, $f'(0)=0$, $f\left(\frac{1}{3}\right)=0$.

i. $\lambda>0$

$$f=A\operatorname{sh}\sqrt{\lambda}x+B\operatorname{ch}\sqrt{\lambda}x.$$
$$f'(0)=A\sqrt{\lambda}=0\implies A=0.$$
$$f\left(\frac{1}{3}\right)=B\operatorname{ch}\frac{1}{3}\sqrt{\lambda}=0\implies B=0.$$
$$\varnothing.$$

ii. $\lambda = 0$

$$f = Ax + B.$$

$$f'(0) = A = 0, \quad f\left(\frac{1}{3}\right) = B = 0 \implies \varnothing.$$

iii. $\lambda < 0$

$$f = A \sin \sqrt{-\lambda} x + B \cos \sqrt{-\lambda} x.$$

$$f'(0) = A\sqrt{-\lambda} = 0 \implies A = 0.$$

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = B \cos \frac{1}{3}\sqrt{-\lambda} = 0 \implies \cos \frac{1}{3}\sqrt{-\lambda} = 0 \implies \frac{1}{3}\sqrt{-\lambda} = \frac{\pi}{2} + \pi n.$$

$$\lambda_n = -9\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n\right)^2.$$

$$f_n = \cos\left[3\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n\right) x\right].$$

б) $g(y)$, т.ч. $g'' = \lambda g$, $g'(0) = g'\left(\frac{1}{3}\right) = 0$

i. $\lambda > 0$

$$g = A \operatorname{sh} \sqrt{\lambda} y + B \operatorname{ch} \sqrt{\lambda} y.$$

$$g'(0) = A\sqrt{\lambda} = 0 \implies A = 0.$$

$$g'\left(\frac{1}{3}\right) = B \operatorname{sh} \frac{1}{3}\sqrt{\lambda} \implies B = 0.$$

$$\varnothing.$$

ii. $\lambda = 0$

$$g = Ay + B.$$

$$g'(0) = A = 0, \quad g'\left(\frac{1}{3}\right) = A = 0.$$

$$g_0 = 1.$$

iii. $\lambda < 0$

$$g = A \sin \sqrt{-\lambda} y + B \cos \sqrt{-\lambda} y.$$

$$g'(0) = A\sqrt{-\lambda} = 0 \implies A = 0.$$

$$g'\left(\frac{1}{3}\right) = -B\sqrt{-\lambda} \sin \frac{1}{3}\sqrt{-\lambda} = 0 \implies \sin \frac{1}{3}\sqrt{-\lambda} = 0 \implies \frac{1}{3}\sqrt{-\lambda} = \pi m.$$

$$\lambda_m = -9\pi^2 m^2.$$

$$g_m = \cos 3\pi m y.$$

$$e_{n,m} = \cos\left[3\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n\right) x\right] \cdot \cos 3\pi m y.$$

$$\lambda_{n,m} = -9\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n\right)^2 - 9\pi^2 m^2.$$

4. *Область определения и спектральное разложение* $\overline{\Delta}$.

$$\overline{\Delta} = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} \lambda_{n,\,m} \frac{(u, e_{n,\,m})}{(e_{n,\,m}, e_{n,\,m})} e_{n,\,m} \text{ — спектр. разл..}$$

$$D\left(\overline{\Delta}\right) = \left\{ u \in L_2\left(\left[0, \frac{1}{3}\right] \times \left[0, \frac{1}{3}\right]\right) : \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} \lambda_{n,\,m}^2 \frac{|(u, e_{n,\,m})|^2}{\|e_{n,\,m}\|^2} < \infty \right\}.$$

5. *Решение в* $L_2\left(\left[0, \frac{1}{3} \times \left[0, \frac{1}{3}\right]\right]\right)$ *начально-краевой задачи*

$$9\frac{d}{dt}u(t) = \overline{\Delta}u(t) + xy \cdot \sin t, \quad t > 0,\ u(t) \in D\left(\overline{\Delta}\right),\ u(+0) = 0.$$

$$u = \sum_{n,\,m}^{\infty} T_{n,\,m}(t) e_{n,\,m}, \quad \overline{\Delta}u = \sum_{n,\,m} \lambda_{n,\,m} T_{n,\,m} e_{n,\,m}.$$

$$xy = \sum_{n,\,m} \alpha_{n,\,m} e_{n,\,m}.$$

$$(e_{n,\,m}, e_{n,\,m}) = \int_0^{\frac{1}{3}}\int_0^{\frac{1}{3}} e_{n,\,m}^2 dxdy.$$

$$(xy, e_{n,\,m}) = \int_0^{\frac{1}{3}}\int_0^{\frac{1}{3}} xy e_{n,\,m} dxdy.$$

$$\alpha_{n,\,m} = \frac{(xy, e_{n,\,m})}{(e_{n,\,m}, e_{n,\,m})}.$$

$$9\sum_{n,\,m} T'_{n,\,m} e_{n,\,m} = \sum_{n,\,m} \lambda_{n,\,m} T_{n,\,m} e_{n,\,m} + \sum_{n,\,m} \alpha_{n,\,m} e_{n,\,m} \sin t.$$

$$\begin{cases} 9T'_{n,\,m} = \lambda_{n,\,m} T_{n,\,m} + \alpha_{n,\,m} \sin t \\ T_{n,\,m}(0) = 0 \end{cases}.$$

Решая данное дифференциальное уравнение, получаем

$$T_{n,\,m} = \frac{\alpha_{n,\,m}}{81 + \lambda_{n,\,m}^2}\left(9e^{t\lambda_{n,\,m}/9} - 9\cos t - \lambda_{n,\,m}\sin t\right).$$

И, соответственно

$$u(t, x, y) = \sum_{n,\,m} \frac{\alpha_{n,\,m} e_{n,\,m}}{81 + \lambda_{n,\,m}^2}\left(9e^{-t|\lambda_{n,\,m}|/9} - 9\cos t + |\lambda_{n,\,m}|\sin t\right).$$

6. *Проверка* $u \in L_2\left(\left[0, \frac{1}{3}\right], \left[0, \frac{1}{3}\right]\right)$.

$$\|u\|^2 = \sum_{n,\,m} \frac{|\alpha_{n,\,m}|^2 \|e_{n,\,m}\|^2}{|81 + \lambda_{n,\,m}^2|^2} \left|9e^{-t|\lambda_{n,\,m}|/9} - 9\cos t + |\lambda_{n,\,m}|\sin t\right|^2 \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{n,\,m} \frac{|\alpha_{n,\,m}|^2 \|e_{n,\,m}\|^2}{|81 + \lambda_{n,\,m}^2|^2} \left|18 + |\lambda_{n,\,m}|\right|^2 \leqslant \sum_{n,\,m} \frac{|\alpha_{n,\,m}|^2 \|e_{n,\,m}\|^2}{\left|18 + |\lambda_{n,\,m}|\right|^2} \left|18 + |\lambda_{n,\,m}|\right|^2 \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{n,\,m} |\alpha_{n,\,m}|^2 \|e_{n,\,m}\|^2 = \|xy\| < \infty.$$

7. *Проверка* $u \in D\left(\overline{\Delta}\right)$. Здесь нам пригодится оценка

$$|\lambda_{n,\,m}| > 9\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \geqslant 20 \implies \lambda_{n,\,m}^2 \geqslant 20|\lambda_{n,\,m}|.$$

$$\left\|\overline{\Delta}u\right\|^2 = \sum_{n,\,m} |\lambda_{n,\,m}|^2 \frac{|\alpha_{n,\,m}|^2 \|e_{n,\,m}\|^2}{|81 + \lambda_{n,\,m}^2|^2} \left|9e^{-t|\lambda_{n,\,m}|/9} - 9\cos t + |\lambda_{n,\,m}|\sin t\right|^2 =$$
$$= \sum_{n,\,m} |\lambda_{n,\,m}|^2 \frac{|\alpha_{n,\,m}|^2 \|e_{n,\,m}\|^2}{|81 + \lambda_{n,\,m}^2|^2} \left|18 + |\lambda_{n,\,m}|\right|^2 =$$
$$= \sum_{n,\,m} 16\left|18 + |\lambda_{n,\,m}|\right|^2 \frac{|\alpha_{n,\,m}|^2 \|e_{n,\,m}\|^2}{\left|18 + |\lambda_{n,\,m}|\right|^4} \left|18 + |\lambda_{n,\,m}|\right|^2 \leqslant$$
$$\leqslant 16 \sum_{n,\,m} |\alpha_{n,\,m}|^2 \|e_{n,\,m}\|^2 = 16\|xy\| < +\infty.$$

8. *Проверка* $u(+0) = 0$. В пункте 6 мы ограничили ряд для $\|u\|$ сходящимся рядом, не зависящим от t, следовательно по признаку Вейерштрасса в первоначальном ряду можно переходить к пределу по t почленно, откуда напрямую получаем требуемое утверждение.

9. *Проверка сходимости* $\sum\limits_{n,\,m} T'_{n,\,m} e_{n,\,m}$ *в* $L_2\left(\left[0, \frac{1}{3}\right], \left[0, \frac{1}{3}\right]\right)$.

$$\left\|\sum_{n,\,m} T'_{n,\,m} e_{n,\,m}\right\|^2 =$$
$$= \left\|\sum_{n,\,m} \frac{\alpha_{n,\,m}}{81 + \lambda_{n,\,m}^2} \left(\lambda_{n,\,m} e^{t\lambda_{n,\,m}/9} + 9\sin t - \lambda_{n,\,m}\cos t\right) e_{n,\,m}\right\|^2 =$$
$$= \sum_{n,\,m} \frac{|\alpha_{n,\,m}|^2}{|81 + \lambda_{n,\,m}^2|^2} \left|-|\lambda_{n,\,m}| e^{-t|\lambda_{n,\,m}|/9} + 9\sin t + |\lambda_{n,\,m}|\cos t\right| \|e_{n,\,m}\|^2 =$$
$$= \sum_{n,\,m} \frac{|\alpha_{n,\,m}|^2}{|81 + \lambda_{n,\,m}^2|^2} \left|9 + 2|\lambda_{n,\,m}|\right| \|e_{n,\,m}\|^2 \leqslant 2 \sum_{n,\,m} |\alpha_{n,\,m}|^2 \|e_{n,\,m}\|^2 = 2\|xy\|.$$

10. *Проверка* $\dfrac{du}{dt} = \sum\limits_{n,\,m} T'_{n,\,m} e_{n,\,m}$ *в* $L_2\left(\left[0, \dfrac{1}{3}\right], \left[0, \dfrac{1}{3}\right]\right)$.

$$\left\| \frac{u(t+\Delta t) - u(t)}{\Delta t} - \sum_{n,\,m} T'_{n,\,m} e_{n,\,m} \right\|^2 \overset{\text{Парс.}}{=\!=\!=}$$

$$= \sum_{n,\,m} \left| \frac{T_{n,\,m}(t+\Delta t) - T_{n,\,m}(t)}{\Delta t} - T'_{n,\,m}(t) \right|^2 \|e_{n,\,m}\|^2 \underset{\xi_{n,\,m} \in (t,\, t+\Delta t)}{\overset{\substack{\text{теор. Лагр.} \\ \text{о среднем}}}{=\!=\!=\!=\!=}}$$

$$= \sum_{n,\,m} \left| T'_{n,\,m}(\xi_{n,\,m}) - T'_{n,\,m}(t) \right|^2 \cdot \|e_{n,\,m}\|^2.$$

В пункте 9 мы показали, что

$$|T'_{n,\,m}|^2 \leqslant 2|\alpha_{n,\,m}|^2$$

для любого t, следовательно

$$|T'_{n,\,m}(t) - T'_{n,\,m}(\xi_{n,\,m})|^2 \leqslant \left| \sqrt{2}|\alpha_{n,\,m}| + \sqrt{2}|\alpha_{n,\,m}| \right|^2 = 4|\alpha_{n,\,m}|^2.$$

Данная оценка не зависит от Δt, а получаемый с помощью неё ряд сходится. Следовательно по признаку Вейерштрасса ряд, содержащий Δt сходится равномерно и мы можем переходить к пределу почленно при $\Delta t \to 0$:

$$\xi_{n,\,m} \to t \ (\Delta t \to 0),$$

также $T'_{n,\,m}$ — непрерывная функция, поэтому

$$\left| T'_{n,\,m}(\xi_{n,\,m}) - T'_{n,\,m}(t) \right|^2 \to 0 \ (\Delta t \to 0),$$

откуда следует требуемое утверждение.

Уравнение Лапласа в круговых областях

2005/2006 уч.г. №4. Решить краевую задачу:

$$\Delta u = -2\frac{\sin\varphi}{r^2}, \quad \left(r = \sqrt{x^2+y^2} > 1,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi\right);$$

$$(u - u_r)\big|_{r=1} = 16\sin^3\varphi, \quad (0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi);\ u(r,\varphi) \text{ — огр. функция при } r > 1.$$

Решение. 1. *Общее решение* $\Delta u = 0$ *(для* $r > 1$*)*

$$u(r,\varphi) = c_{1,\,0} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{2,\,n} r^{-n} \cos n\varphi + d_{2,\,n} r^{-n} \sin n\varphi.$$

2. *Частное решение неоднородного уравнения*

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi} = -2\frac{\sin\varphi}{r^2}.$$

$$u = \alpha \sin\varphi + \beta \cos\varphi.$$

$$u_r = u_{rr} = 0.$$

$$u_{\varphi\varphi} = -\alpha \sin\varphi - \beta\cos\varphi.$$

$$\frac{1}{r^2}(-\alpha\sin\varphi - \beta\cos\varphi) = -\frac{2}{r^2}\sin\varphi.$$

$$\begin{cases} \alpha = 2, \\ \beta = 0. \end{cases}$$

$$u_{\text{частн}} = 2\sin\varphi.$$

3. *Граничные условия*

$$(u - u_r)|_{r=1} = 16\sin^3\varphi = 12\sin\varphi - 4\sin 3\varphi.$$

$$c_{1,\,0} + 2\sin\varphi + \sum_{n=1}^{\infty}(1+n)(c_{2,\,n}\cos n\varphi + d_{2,\,n}\sin n\varphi) = 12\sin\varphi - 4\sin 3\varphi.$$

$$\begin{cases} d_{2,\,1} = 5 \\ d_{2,\,3} = -1 \\ c_{1,\,0} = 0 \\ c_{2,\,n} = 0\ \forall n \\ d_{2,\,n} = 0\ \forall n \in \mathbb{Z}\setminus\{1,3\} \end{cases}.$$

Как ответ остаётся записать

$$u(r,\varphi) = \frac{5}{r}\sin\varphi - \frac{1}{r^3}\sin 3\varphi + 2\sin\varphi.$$

Замыкание оператора Лапласа на плоскости

№11. Рассматривается оператор Лапласа

$$\Delta\colon C^2\left(\overline{K}\right) \to L_2(K),$$

где $K = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon x^2+y^2<1,\ x>0,\ y>0\right\}$ с границей $\partial K = \gamma_1\cup\gamma_2\cup\gamma_3$, где

$$\gamma_1 = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon\ \leqslant 1,\ y=0\right\},$$
$$\gamma_2 = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon 0\leqslant y\leqslant 1,\ x=0\right\},$$
$$\gamma_3 = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon x^2+y^2=1,\ x>0,\ y>0\right\}.$$

Найти решение задачи

$$\overline{\Delta}u = 0 \text{ в } L_2(K),$$

$$u|_{\gamma_1} = 0 \text{ в } L_2(\gamma_1),\quad u|_{\gamma_2} = y \text{ в } L_2(\gamma_2),\quad u|_{\gamma_3} = 0 \text{ в } L_2(\gamma_3).$$

Решение. На рис. 1 изображена исследуемая область.

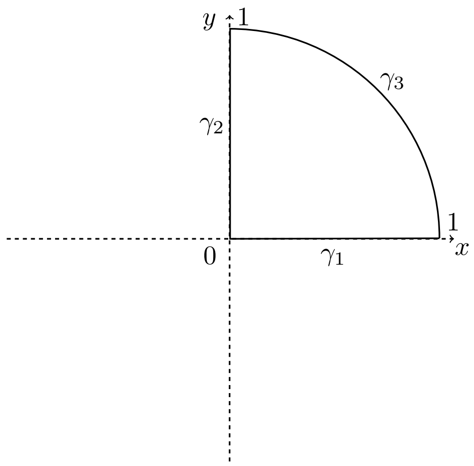

Рис. 1

1. *Зануляем граничные условия на радиусах.* Пусть $u = y + v$, тогда мы будем искать v, удовлетворяющую следующим условиям

$$\begin{cases} \overline{\Delta} v = 0, \\ v|_{\gamma_1} = 0 \\ v|_{\gamma_2} = 0 \\ v|_{\gamma_3} = -y \end{cases}.$$

2. *Выбираем базис в γ_3 так, чтобы выполнялись условия на радиусах.* $\left\{e_n(\varphi)\colon e_n(0) = 0,\ e_n\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0\right\}$. Базис в $L_2\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$: $\{\sin nx, \cos nx\}$. С учётом граничных условий получаем $\{e_n\} = \{\sin 2n\varphi\}$.

3. *Раскладываем краевое условие на γ_3 в ряд Фурье по найденному базису*

$$-y = -\sin\varphi = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \sin 2k\varphi.$$

$$\alpha_k = -\frac{(\sin\varphi,\ \sin 2k\varphi)}{(\sin 2k\varphi,\ \sin 2k\varphi)}.$$

$$(\sin\varphi,\ \sin 2k\varphi) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi \sin 2k\varphi \, d\varphi = \frac{2(-1)^k k}{1 - 4k^2}.$$

$$(\sin 2k\varphi,\ \sin 2k\varphi) = \frac{\pi}{4}.$$

$$\alpha_k = \frac{8(-1)^k k}{\pi(4k^2 - 1)}.$$

4. *Ищем решение в виде*

$$v_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k r^{2k} \sin 2k\varphi.$$

5. *Докажем фундаментальность* $\{v_n\}$ *в* L_2 . Для любых n и m таких, что $n > m$ запишем

$$\|v_n - v_m\|^2 = \left\| \sum_{k=m+1}^{n} \alpha_k r^{2k} \sin 2k\varphi \right\|^2 = \sum_{k=m+1}^{n} |\alpha_k|^2 \left\| r^{2k} \sin 2k\varphi \right\|^2 =$$
$$= \left(\sum_{k=m+1}^{n} \alpha_k r^{2k} \sin 2k\varphi, \sum_{k=m+1}^{n} \alpha_k r^{2k} \sin 2k\varphi \right) =$$
$$= \sum_{l,\,k=m+1}^{n} \alpha_l \overline{\alpha_k} \left(r^{2l} \sin 2l\varphi, r^{2k} \sin 2k\varphi \right).$$

Заметим, что

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2l\varphi \sin 2k\varphi \, d\varphi = \frac{\pi}{2} \delta_l^k, \quad \int\limits_0^1 r^{2l} r^{2k} r \, dr \leqslant 1.$$

Поэтому можем переписать последнюю оценку как

$$\|v_n - v_m\|^2 = \sum_{k=m+1}^{n} |\alpha_k|^2 \|r^{2k} \sin 2k\varphi\|^2 \leqslant \sum_{k=m+1}^{n} |\alpha_k|^2 \| \sin 2k\varphi\|^2.$$

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \sin 2k\varphi \xrightarrow{n\to\infty} -\sin\varphi \text{ в } L_2 \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Значит по критерию Коши $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N(\varepsilon)$ такое, что $\forall n, m > N(\varepsilon)$ выполняется

$$\left\| \sum_{k=m+1}^{n} \alpha_k \sin 2k\varphi \right\|^2 = \sum_{k=m+1}^{n} |\alpha_k|^2 \| \sin 2k\varphi\|^2 < \varepsilon.$$

Следовательно $\|v_n - v_m\|^2 < \varepsilon$, поэтому $\{v_n\}$ — фундаментальна и $v_n \xrightarrow{n\to\infty} v \in L_2(K)$

6. $v_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k r^{2k} \sin 2k\varphi$. $\Delta v_n \to 0$ в $L_2(K)$. $\overline{\Delta} u = \overline{\Delta}(v + y) = 0$. Получаем

$$u = r \sin\varphi + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8(-1)^k k}{\pi(4k^2 - 1)} r^{2k} \sin 2k\varphi.$$

7. *Краевые условия.*

$$u|_{\gamma_1} = u(\varphi = 0) = 0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8(-1)^k k}{\pi(4k^2 - 1)} r^{2k} \cdot 0 = 0,$$

$$u|_{\gamma_2} = u\left(\varphi = \frac{\pi}{2}\right) = r + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8(-1)^k k}{\pi(4k^2 - 1)} \sin \pi k = r = y.$$

$$u|_{\gamma_3} = u(r = 1) = \sin\varphi + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8(-1)^k k}{\pi(4k^2 - 1)} \sin 2k\varphi = \sin\varphi - \sin\varphi = 0.$$

Сферические функции

2015-2016 уч.г. №5. Решить краевую задачу для сферического слоя

$$\Delta u = 12r, \quad 1 < r < 2,$$

$$(u - u_r)|_{r=1} = 4 + 3\sin\theta\sin\varphi, \quad u|_{r=2} = 11, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi,\, 0 \leqslant \varphi < 2\pi.$$

Решение. Найдём сперва частное решение

$$u_{\text{частн}} = \alpha r^3, \quad 6\alpha r + 6\alpha r = 12r \implies u_{\text{частн}} = r^3.$$

Запишем общий вид гармонических функций в сферическом слое вместе с частным решением:

$$u_{\text{общ}} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\Bigg[a_{n,\,m} r^n P_n^m(\cos\theta)\cos m\varphi + b_{m,\,n}\frac{1}{r^{n+1}}P_n^m(\cos\theta)\cos m\varphi +$$
$$+ c_{m,\,n} r^n P_n^m(\cos\theta)\sin m\varphi + d_{m,\,n}\frac{1}{r^{n+1}}P_n^m(\cos\theta)\sin m\varphi\Bigg] + r^3.$$

Граничные условия тогда можно переписать в следующем виде

$$(u{-}u_r)|_{r=1} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}[a_{n,\,m}(1-n)P_n^m(\cos\theta)\cos m\varphi + b_{m,\,n}(n+2)P_n^m(\cos\theta)\cos m\varphi +$$
$$+ c_{m,\,n}(1-n)P_n^m(\cos\theta)\sin m\varphi + d_{m,\,n}(n+2)P_n^m(\cos\theta)\sin m\varphi] - 2 =$$
$$= 4 + 3\sin\theta\sin\varphi.$$

$$u|_{r=2} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\Bigg[a_{n,\,m}2^n P_n^m(\cos\theta)\cos m\varphi + b_{m,\,n}\frac{1}{2^{n+1}}P_n^m(\cos\theta)\cos m\varphi +$$
$$+ c_{m,\,n}2^n P_n^m(\cos\theta)\sin m\varphi + d_{m,\,n}\frac{1}{2^{n+1}}P_n^m(\cos\theta)\sin m\varphi\Bigg] + 8 = 11.$$

$$P_0^0(\cos\theta) = 1, P_1^1(\cos\theta) = \sin\theta.$$

Откуда получаем

$$\begin{cases} a_{0,\,0} + 2b_{0,\,0} = 6 \\ 3d_{1,\,1} = 3 \\ a_{0,\,0} + \dfrac{1}{2}b_{0,\,0} = 3 \\ 2c_{1,\,1} + \dfrac{1}{4}d_{1,\,1} = 0 \\ \text{ост. коэф-ты} = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} a_{0,\,0} = 2 \\ b_{0,\,0} = 2 \\ d_{1,\,1} = 1 \\ c_{1,\,1} = -\dfrac{1}{8} \end{cases}.$$

Откуда

$$u_{\text{общ}} = 2 + \frac{2}{r} + \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{8}r\right)\sin\theta\sin\varphi + r^3.$$

Замыкание оператора Лапласа в пространстве

№16. Рассматривается оператор Лапласа

$$\Delta\colon C^2(B) \to L_2(B),$$

где B — замкнутый единичный шар в $\mathbb{R}^3$ с центром в нуле. Найти решение задачи

$$\overline{\Delta} = 0, \quad u \in D\left(\overline{\Delta}\right), \quad u|_{\partial B} = x_1 x_2 \sin x_3, \quad x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3.$$

Решение.

$$u|_{\partial B} = r^2 \sin^2\theta \sin\varphi \cos\varphi \sin(r\cos\theta) \xlongequal{r=1} \frac{1}{2}\sin^2\theta \sin 2\varphi \sin(\cos\theta) = \\ = \frac{1}{2}(1-\cos\theta)\sin(\cos\theta)\sin 2\varphi.$$

$m = 2$, следовательно базис из функций $P_n^2(\cos\theta)\sin 2\varphi$. Т. к. P_n^2, $n = 0, 1, \ldots$ — базис в $L_2[-1{,}1]$, то по этому базису можно разложить

$$u|_{r=1} = \frac{1}{2}(1-\cos^2\theta)\sin(\cos\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n^2(\cos\theta).$$

$$a_n = \frac{\int\limits_0^\pi \frac{1}{2}(1-\cos^2\theta)\sin(\cos\theta) P_n^2(\cos\theta)\sin\theta\, d\theta}{\int\limits_0^\pi (P_n^2(\cos\theta))^2 \sin\theta\, d\theta}.$$

Рассмотрим решение в виде

$$v_n = \sum_{m=0}^{N} a_m P_m^2(\cos\theta) r^m.$$

Докажем фундаментальность $\{v_n\}$:

$$\|v_{n+k}-v_n\|^2_{L_2(B)} = \left\| \sum_{m=n+1}^{n+k} a_m P_m^2(\cos\theta) r^m \right\|^2_{L_2(B)} =$$
$$= \sum_{m=n+1}^{n+k} |a_m|^2 \left\| P_m^2(\cos\theta) r^m \right\|^2_{L_2(B)} =$$
$$= \sum_{m=n+1}^{n+k} |a_m|^2 \iiint\limits_B \left(P_m^2(\cos\theta)\right)^2 r^{2m} \cdot r^2 \sin\theta \, dr d\theta d\varphi =$$
$$= \sum_{m=n+1}^{n+k} |a_m|^2 \int\limits_0^1 dr \int\limits_0^\pi d\theta \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \left(P_m^2(\cos\theta)\right)^2 \sin\theta r^{2m+2} =$$
$$= \sum_{m=n+1}^{n+k} |a_m|^2 \underbrace{\int\limits_0^1 r^{2m+2} dr}_{\leqslant 1} \underbrace{\int\limits_0^\pi d\theta \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \left(P_m^2(\cos\theta)\right)^2 \sin\theta}_{\|P_m^2(\cos\theta)\|^2_{L_2(\partial B)}} \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{m=n+1}^{n+k} |a_m|^2 \left\| P_m^2(\cos\theta) \right\|^2_{L_2(\partial B)} < \varepsilon.$$

В силу критерия Коши для $(1-\cos^2\theta)\sin(\cos\theta) = \sum\limits_{m=0}^{\infty} a_m P_m^2(\cos\theta)$ получаем фундаментальность $\{v_n\}$. Принимая также во внимание полноту $L_2(B)$, мы тем самым доказали, что существует $v \in L_2(B)$: $v_n \xrightarrow{n\to\infty} v$ в $L_2(B)$.Откуда $\Delta v_n = 0 \to 0$ в $L_2(B)$.

$$\operatorname{Gr}\Delta \ni \begin{pmatrix} v_n \\ \Delta v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_n \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{n\to\infty} \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix} \in \overline{\operatorname{Gr}\Delta} = \operatorname{Gr}\overline{\Delta} \implies \overline{\Delta} v = 0.$$

$$v_n|_{\partial B} = \left. \left(\sum_{m=0}^{n} a_m P_m^2(\cos\theta) r^m \right) \right|_{r=1} = \sum_{m=0}^{n} a_m P_m^2(\cos\theta) \xrightarrow{n\to\infty}$$
$$\to (1-\cos^2\theta)\sin(\cos\theta).$$

Интегральные уравнения с вырожденным ядром

№1. Найти характеристические числа, собственные функции интегрального оператора и решить при всех допустимых λ, a, b уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin(|x|+y)\,\varphi(y) dy + a\cos x + bx.$$

Решение.

$$\varphi(x) = \lambda \sin|x| \underbrace{\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos y\varphi(y)\, dy}_{C_1} + \lambda \cos|x| \underbrace{\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin y\varphi(y)\, dy}_{C_2} + a\cos x + bx$$

$$\varphi(x) = \lambda C_1 \sin|x| + \lambda C_2 \cos x + a\cos x + bx.$$

$$C_1 = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos y\varphi(y)dy = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos y\left(\lambda C_1 \sin|y| + \lambda C_2 \cos y + a\cos y + by\right) dy =$$

$$= \frac{1}{2}(a\pi + 2C_1\lambda + \pi C_2\lambda).$$

$$C_2 = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin y\varphi(y)\, dy = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin y\left(\lambda C_1 \sin|y| + \lambda C_2 \cos y + a\cos y + by\right) dy =$$

$$= 2b.$$

$$a\pi + 2C_1(\lambda - 1) + 2b\pi\lambda = 0.$$

Для однородного уравнения получаем

$$\lambda_{\text{хар}} - 1 = 0 \implies \lambda_{\text{хар}} = 1.$$

Решим неоднородное уравнение для всех допустимых λ, a, b:

$$\begin{cases} C_1 = \frac{\pi(a+2b\lambda)}{2(\lambda-1)}, & \lambda \neq 1, \\ C_1 \text{ — любое}, & \lambda = 1,\ a = -2b, \\ \varnothing, & \lambda = 1,\ a \neq -2b. \end{cases}$$

Соответственно

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{\lambda\pi(a+2b\lambda)}{2(\lambda-1)} \sin|x| + (2b\lambda + a)\cos x + bx, & \lambda \neq 1, \\ C\sin|x| + bx, & \lambda = 1,\ a = -2b, \\ \varnothing, & \lambda = 1,\ a \neq -2b. \end{cases}$$

Для найденного характеристического числа

$$\varphi_{\text{соб}}(x) = \varphi(x, \lambda = 1, a = b = 0, C = 1) = \sin|x|.$$

Самосопряжённые интегральные операторы

№5. Линейный оператор $A : L_2[0,1] \to L_2[0,1]$ имеет вид

$$(Au)(x) = \int\limits_0^x (2x-3)tu(t)dt + \int\limits_x^1 x(2t-3)u(t)dt, \quad x \in [0,1],\ u \in L_2[0,1].$$

1. Доказать, что A — компактный, самосопряжённый, взаимно-однозначный оператор.

2. Найти спектральное разложение оператора A.

3. Решить уравнение

$$u(x) = \frac{1}{3}(Au)(x) + x, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

Решение. 1. Представим оператор A в виде

$$(Au)(x) = \int\limits_0^1 K(t,x)u(t)dt, \quad u \in L_2[0,1], \quad x \in [0,1],$$

где

$$K(t,x) = \begin{cases} (2x-3)t, & 0 \leqslant t \leqslant x \leqslant 1, \\ x(2t-3), & 0 \leqslant x \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

$K(t,x)$ непрерывна на $[0,1] \times [0,1]$, значит $K(t,x) \in L_2\left([0,1] \times [0,1]\right)$. Следовательно оператор компактен.

$K(t,x) \in L_2\left([0,1] \times [0,1]\right)$ и $K(t,x) = \overline{K(x,t)}$ для всех $x \in [0,1]$ и всех $t \in [0,1]$. Поэтому оператор A самосопряжён.

Для доказательства взаимной однозначности оператора A покажем, что $\operatorname{Ker} A = \{0\}$. Используя свойство линейных операторов в гильбертовом пространстве

$$\operatorname{Ker} A^* = (\operatorname{Im} A)^{\perp}$$

и самосопряжённость оператора A, получаем:

$$\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} A^* = (\operatorname{Im} A)^{\perp}.$$

Докажем, что $\overline{\operatorname{Im} A} = L_2[0,1]$. Для этого рассмотрим функцию $u \in C[0,1]$ и функцию

$$v(x) = (Au)(x) = \int\limits_0^x (2x-3)tu(t)dt + \int\limits_x^1 x(2t-3)u(t)dt =$$

$$= (2x-3)\int\limits_0^x tu(t)dt + x\int\limits_x^1 (2t-3)u(t)dt.$$

Из свойств интегралов с переменными верхним и нижним пределами и непрерывности функции u получаем, что функция v дифференцируема на $[0,1]$. Продифференцируем последнее равенство.

$$v'(x) = x(2x-3)u(x) + \int\limits_0^1 2tu(t)dt - x(2x-3)u(x) + \int\limits_x^1 (2t-3)u(t)dt =$$

$$= 2\int\limits_0^x tu(t)dt + \int\limits_x^1 (2t-3)u(t)dt.$$

Поскольку при дифференцировании функции, отличающиеся на константу, дают один и тот же результат, то к последнему результату нужно добавить краевое условие

$$v(0) = 0.$$

$v'(x)$ дифференцируема, т. к. она включает в себя интегралы от непрерывных функций. Найдём $v''(x)$:

$$v''(x) = 2xu(x) - (2x-3)u(x) = 3u(x).$$

И снова добавим краевое условие, уже при $x = 1$. Для этого заметим, что

$$v(1) = -\int\limits_0^1 tu(t)dt; \quad v'(1) = 2\int\limits_0^1 tu(t)dt \implies 2v(1) = -v'(1).$$

Таким образом, мы получили, что

$$A(C[0,1]) = \left\{v \in C^2[0,1] \colon v(0) = 0,\ v'(1) = -2v(1)\right\}.$$

Из курса математического анализа известно, что это множество всюду плотно в $L_2[0,1]$. Поэтому

$$\overline{A(C[0,1])} = L_2[0,1] \implies \overline{\operatorname{Im} A} = L_2[0,1] \implies \operatorname{Ker} A = (\operatorname{Im} A)^\perp = \{0\}.$$

Следовательно, оператор A является взаимно-однозначным.

2. *Спектральное разложение.*

Найдём сначала собственные значения и собственные функции оператора A.

Заметим, что в силу самосопряжённости оператора A все его собственные значения действительные, а в силу взаимной однозначности оператора A число $\lambda = 0$ не является его собственным значением.

Рассмотрим уравнение

$$Au = \lambda u, \quad u \in L_2[0,1],$$

$$\int\limits_0^x (2x-3)tu(t)dt + \int\limits_x^1 x(2t-3)u(t)dt = \lambda u, \quad u \in L_2[0,1].$$

Поскольку $u \in L_2[0,1]$, то по свойствам интегралов с переменными верхним и нижним пределами получаем, что левая часть последнего уравнения является непрерывной функцией, значит, и в правой части $u \in C[0,1]$.

Снова обозначим $v = Au$ и воспользуемся результатами, полученными при доказательстве взаимной однозначности A

$$v''(x) = \lambda u''(x) = 3u(x),$$

$$u(0) = \frac{1}{\lambda}v(0) = 0, \quad u'(1) = \frac{1}{\lambda}v'(1) = -\frac{2}{\lambda}v(1) = -2u(1).$$

Возможны два случая.

а) $\lambda > 0$

В этом случае, решая уравнение

$$u'' = \frac{3}{\lambda} u, \qquad u(0) = 0,\ u'(1) = -2u(1)$$

получим

$$u(x) = c_1 \operatorname{sh}\left(\sqrt{\frac{3}{\lambda}} x\right) + c_2 \operatorname{ch}\left(\sqrt{\frac{3}{\lambda}} x\right).$$

$$u(0) = c_2 = 0.$$

$$u'(1) = c_1 \sqrt{\frac{3}{\lambda}} \operatorname{ch}\left(\sqrt{\frac{3}{\lambda}}\right) = -2u(1) = -2c_1 \operatorname{sh}\left(\sqrt{\frac{3}{\lambda}}\right).$$

Поскольку нас интересует случай $c_1 \neq 0$, то

$$\operatorname{th}\left(\sqrt{\frac{3}{\lambda}}\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{\lambda}}.$$

Обозначим

$$\mu = \sqrt{\frac{3}{\lambda}}.$$

Тогда

$$\operatorname{th} \mu = -\frac{1}{2}\mu, \quad \mu > 0.$$

Заметим, что в левой части уравнения находится строго возрастающая функция, а в правой — строго убывающая. Они имеют единственную точку пересечения $\mu = 0$.

Таким образом у оператора A не имеется положительных собственных значений.

б) $\lambda < 0$

В этом случае, решая уравнение

$$u'' = \frac{3}{\lambda}, \qquad u(0) = 0,\ u'(1) = -2u(1)$$

получим

$$u(x) = c_1 \sin\left(\sqrt{\frac{3}{-\lambda}} x\right) + c_2 \cos\left(\sqrt{\frac{3}{-\lambda}} x\right).$$

$$u(0) = c_2 = 0.$$

$$u'(1) = c_1 \sqrt{\frac{3}{\lambda}} \cos\left(\sqrt{\frac{3}{-\lambda}}\right) = -2u(1) = -2c_1 \sin\left(\sqrt{\frac{3}{-\lambda}}\right).$$

Поскольку нас интересует случай $c_1 \neq 0$, то

$$\operatorname{tg}\left(\sqrt{\frac{3}{-\lambda}}\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{-\lambda}}.$$

Обозначим
$$\mu = \sqrt{\frac{3}{-\lambda}}.$$
Тогда
$$\operatorname{tg}\mu = -\frac{1}{2}\mu, \quad \mu > 0.$$
Графики левой и правой частей уравнения представлены на рис. 2 Как видно из графиков, уравнение имеет счетное множество кор-

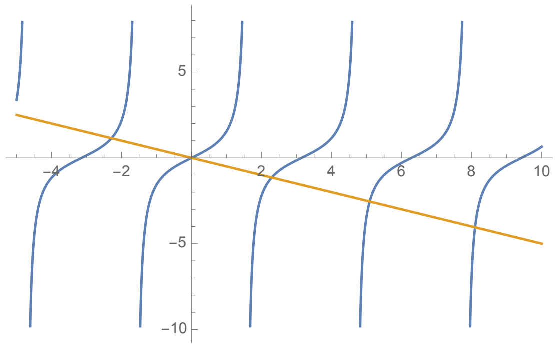

Рис. 2

ней
$$\mu_1 < \mu_2 < \ldots, \quad \mu_k \in \left(\pi k, \frac{\pi}{2} + \pi k\right), \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$
Таким образом, у оператора A есть счётное множество отрицательных собственных значений и соответствующих этим собственным значениям собственных функций
$$\lambda_k = -\frac{3}{\mu_k^2}; \qquad u_k = \sin\left(\mu_k x\right).$$
По теореме Гильберта-Шмидта у компактного самосопряжённого оператора существует ортогональный базис из собственных функций в $(\operatorname{Ker} A)^{\perp}$. В нашем случае оказалось, что $\operatorname{Ker} = \{0\}$, поэтому собственные функции
$$u_1, u_2 \ldots$$
будут образовывать ортогональный базис во всём пространстве $u \in L_2[0,1]$ и $\forall u \in L_2[0,1]$ будут выполнены равенства
$$u = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(u, u_k)}{(u_k, u_k)} u_k;$$
$$Au = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(Au, u_k)}{(u_k, u_k)} u_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(u, Au_k)}{(u_k, u_k)} u_k = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \frac{(u, u_k)}{(u_k, u_k)} u_k.$$
Итак, мы получили спектральное разложение оператора A.

3. *Решение уравнения.*

$$u = \frac{1}{3}Au + x, \quad u \in L_2[0,1].$$

Выпишем разложения u, Au и x по базису $\{u_k\}$

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k u_k, \quad Au = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \beta_k u_k, \quad \text{где } \beta_k = \frac{(u, u_k)}{(u_k, u_k)};$$

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k u_k, \quad \text{где } \alpha_k = \frac{(x, u_k)}{(u_k, u_k)}.$$

Коэффициенты разложения α_k вычислим позднее. Подставив все разложения в уравнение, получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k u_k = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \beta_k u_k + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k u_k.$$

Приравнивая коэффициенты при каждой базисной функции, находим

$$\left(1 - \frac{1}{3}\lambda_k\right)\beta_k = \alpha_k, \quad k = 0, 1, \ldots.$$

$$\beta_k = \frac{3\alpha_k}{3 - \lambda_k}.$$

Следовательно, кандидатом на решение уравнения будет ряд

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k u_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3\alpha_k}{3 - \lambda_k} u_k.$$

4. *Проверка сходимости в* $L_2[0,1]$. Поскольку

$$\left|1 - \frac{\lambda_k}{3}\right|^2 > 1, \quad k = 1, 2, \ldots$$

то справедлива оценка

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\alpha|^2}{|1 - \lambda_k/3|^2} \|u_k\|^2 \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2 \|u_k\|^2 = \|x\|^2 = \int\limits_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}.$$

Значит,

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3\alpha_k}{3 - \lambda_k} u_k$$

действительно является решением уравнения. Теперь осталось только вычислить коэффициенты α_k

$$\alpha_k = \frac{(x, u_k)}{(u_k, u_k)} = \frac{\int_0^1 x \sin \mu_k x \, dx}{\int_0^1 \sin^2 \mu_k x \, dx} = \frac{-\frac{x}{\mu_k} \cos \mu_k x \Big|_0^1 + \frac{1}{\mu_k} \int_0^1 \cos \mu_k x \, dx}{\frac{1}{2} \int_0^1 (1 - \cos 2\mu_k x) dx} =$$

$$= \frac{-\frac{1}{\mu_k} \cos \mu_k + \frac{1}{\mu_k^2} \sin \mu_k}{\frac{1}{2} - \frac{1}{4\mu_k} \sin(2\mu_k)}.$$

Задача Штурма-Лиувилля

№11. Для оператора Штурма-Лиувилля $A\colon D(A) \to L_2[0,1]$ с областью определения

$$D(A) = \left\{ f \in W^{2,\,2}\left([0,1]\right) : f'(0) = 2f(0),\; f'(1) = 0 \right\}$$

имеющего вид

$$(Af)(x) = -(x+1)^3 f''(x) - 3(x+1)^2 f'(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1,\; f \in D(A),$$

найдите формулу, задающую обратный оператор $A^{-1}\colon L_2[0,1] \to D(A)$.

Решение. Сначала преобразуем оператор A к стандартному виду

$$(Af)(x) = -(x+1)^3 f''(x) - 3(x+1)^2 f'(x) = -\left((x+1)^3 f'(x)\right)'.$$

Построим интегральное ядро оператора A. Решим уравнение $(Af)(x) = 0$:

$$-\left((x+1)^3 f'(x)\right)' = 0.$$

$$(x+1)^3 f'(x) = C_1.$$

$$f'(x) = \frac{C_1}{(x+1)^3}.$$

$$f(x) = C_1 \int \frac{dx}{(x+1)^3} = -\frac{C_1}{2(x+1)^2} + C_2.$$

Найдём $f_1(x)$:

$$f_1'(0) = 2f(0) \implies C_1 = 2C_2 - C_1 \implies f_1(x) = -\frac{1}{2(x+1)^2} + 1.$$

Найдём $f_2(x)$

$$f_2'(1) = 0 \implies \frac{C_1}{8} = 0 \implies C_1 = 0 \implies f_2(x) \equiv 1.$$

Найдём определитель Вронского:

$$W(x) = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2(x+1)^2} + 1 & 1 \\ \frac{1}{(1+x)^3} & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{(1+x)^3}.$$

Тогда

$$p(x)W(x) = -\frac{(x+1)^3}{(x+1)^3} = -1.$$

Выпишем интегральное ядро оператора Штурма-Лиувилля

$$G(x,t) = -\frac{1}{(-1)} \begin{cases} -\frac{1}{2(x+1)^2} + 1, & 0 \leqslant x \leqslant t \leqslant 1, \\ -\frac{1}{2(t+1)^2} + 1, & 0 \leqslant t \leqslant x \leqslant 1. \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} -\frac{1}{2(x+1)^2} + 1, & 0 \leqslant x \leqslant t \leqslant 1, \\ -\frac{1}{2(t+1)^2} + 1, & 0 \leqslant t \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

Поскольку определитель Вронского $W(x) \neq 0$ для всех $x \in [0,1]$, то $\lambda = 0$ не является собственным значением оператора A. Значит, $\operatorname{Ker} A = \{0\}$ и у оператора есть обратный оператор A^{-1}. Докажем, что обратный оператор A^{-1} определяется формулой

$$(A^{-1}g)(x) = \int\limits_0^1 G(x,t)g(t)dt, \quad g \in L_2\,[0,1]\,, \quad x \in [0,1].$$

Для этого рассмотрим сначала произвольную функцию $g \in C[0,1]$ и обозначим

$$f(x) = \int\limits_0^1 G(t,x)g(t)dt.$$

Тогда

$$f(x) = \int\limits_0^x \left(-\frac{1}{2(t+1)^2} + 1\right) g(t)dt + \left(-\frac{1}{2(x+1)^2} + 1\right) \int\limits_x^1 g(t)dt.$$

Из свойств интегралов с переменными верхним и нижним пределами и непрерывности функции g получаем, что функция f дифференцируема на $[0,1]$.

Продифференцируем последнее равенство.

$$f'(x) = \frac{1}{(x+1)^3}\int\limits_x^1 g(t)dt + \left(-\frac{1}{2(x+1)^2} + 1\right) g(x) - \left(-\frac{1}{2(x+1)^2} + 1\right) g(x) = \\ = \frac{1}{(x+1)^3}\int\limits_x^1 g(t)dt.$$

Следовательно

$$(x+1)^3 f'(x) = \int\limits_x^1 g(t)dt.$$

В правой части последнего равенства подынтегральная функция непрерывна, значит, это равенство можно продифференцировать:

$$\big((x+1)^3 f'(x)\big)' = -g(x).$$

Таким образом мы получили, что для любой непрерывной функции $g(x)$

$$(Af)(x) = -\big((x+1)^3 f'(x)\big) = g(x).$$

Проверим выполнение краевых условий. Получаем:

$$f'(0) = \int\limits_0^1 g(t)dt = 2 \cdot \frac{1}{2}\int\limits_0^1 g(t)dt = 2f(0).$$

$$f'(1) = 0.$$

Значит

$$f(x) = \int\limits_0^1 G(t,x)g(t)dt = (A^{-1}g)(x).$$

Докажем теперь, что для всех функций $g \in L_2[0,1]$ обратный оператор $(A^{-1}g)$ определяется последней формулой.

Для этого вспомним, что множество непрерывных на отрезке $[0,1]$ функций является всюду плотным в $L_2[0,1]$, поэтому для любой функции $g \in L_2[0,1]$ существует последовательность $\{g_n(x)\}$ таких, что

- $g_n(x) \in C[0,1]$ для всех n ;
- $g_n \to g$ при $n \to \infty$ в пространстве $L_2[0,1]$.

Поскольку функции $g_n(x)$ непрерывны, то

$$f_n(x) = \left(A^{-1}g_n\right)(x) = \int\limits_0^1 G(x,t)g_n(t)dt.$$

Из непрерывности интегрального оператора в последнем уравнении следует, что в пространстве $[0,1]$

$$f_n(x) \to f(x) = \int\limits_0^1 G(x,t)g(t)dt$$

при $n \to \infty$.

Проверим теперь, что $f(x) \in D(A)$. Сначала докажем, что у $f(x)$ есть две обобщённые производные.

Подставляя функции $f_n(x)$ и $g_n(x)$ в выражение для производной , получаем

$$f_n'(x) = \frac{1}{(x+1)^3}\int\limits_x^1 g_n(t)dt.$$

Из непрерывности интегрального оператора следует, что в пространстве $L_2[0,1]$

$$f_n'(x) \to u(x) = \frac{1}{(x+1)^3}\int\limits_x^1 g(t)dt$$

при $n \to \infty$.

Используя формулу для оператора Штурма-Лиувилля, получаем

$$g_n(x) = (Af_n)(x) = -(x+1)^3 f_n''(x) - 3(x+1)^2 f_n'(x).$$

$$f_n''(x) = -\frac{1}{(x+1)^3}\left(g_n(x) + 3(x+1)^2 f_n'(x)\right).$$

$$f_n''(x) \to v(x) = -\frac{1}{(x+1)^3}\left(g(x) + 3(x+1)^2 f'(x)\right).$$

Поскольку функции $f_n(x) \in C^2[0,1]$, то их обычные производные первого порядков являются обобщёнными производными. Поэтому для любой финитной в $[0,1]$ функции $h(x)$ имеем

$$\int\limits_0^1 f_n'(x)h(x)dx = -\int\limits_0^1 f_n(x)h'(x)dx$$

и

$$\int\limits_0^1 f_n''(x)h(x)dx = \int\limits_0^1 f_n h''(x)dx.$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$, получаем

$$\int\limits_0^1 u(x)h(x) = -\int\limits_0^1 f(x)h'(x)dx,$$

$$\int\limits_0^1 v(x)h(x)dx = \int\limits_0^1 f(x)h''(x)dx.$$

Таким образом, обобщённой производной f' функции f является функция u и справедлива формула

$$f'(x) = \frac{1}{(x+1)^3}\int\limits_x^1 g(t)dt.$$

Что и обеспечивает выполнение краевых условий.

Начально-краевая задача в секторе

№2. Рассмотрим сектор

$$G = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2+y^2 < \frac{1}{4},\, x>0,\, y>0\right\}.$$

Пусть множество функций

$$D(\Delta) = \left\{u(x,y) \in C^2\left(\overline{G}\right) : u|_{x^2+y^2=\frac{1}{4}} = 0,\, u_x|_{x=0} = 0,\, u_y|_{y=0} = 0\right\}$$

является областью определения оператора Лапласа

$$\Delta \colon D(\Delta) \to L_2\left(\overline{G}\right).$$

1. Доказать, что Δ — симметричный оператор.
2. Доказать, что Δ — отрицательно определён.
3. Найти собственные значения и собственные функции оператора Δ.

4. Построить оператор $\overline{\Delta}$, являющийся замыканием оператора Δ, указав его область определения и спектральное разложение.

5. В $L_2\left(\overline{G}\right)$ решить задачу

$$\frac{d}{dt}u(t) = \overline{\Delta}u, \quad t > 0,\, u(t) \in D(\overline{\Delta}),$$

$$u(+0) = xy.$$

Решение. 1. *Симметричность оператора Лапласа.* Рассмотрим две произвольные функции $f \in D(\Delta)$ и $g \in D(\Delta)$. Тогда

$$(\Delta f, g) = \iint\limits_{K} \Delta f \cdot \overline{g}\, dxdy.$$

Воспользовавшись второй формулой Грина, получаем

$$\iint\limits_{G} \Delta f \cdot \overline{g}\, dxdy = \oint\limits_{\partial G} \left(\overline{g}\frac{\partial f}{\partial n} - f\frac{\partial \overline{g}}{\partial n}\right) dS + \iint\limits_{G} f\Delta\overline{g}\, dxdy,$$

где $\partial G = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$ и

$$\gamma_1 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 \leqslant x \leqslant 1/2,\, y = 0\right\},$$

$$\gamma_2 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 \leqslant y \leqslant 1/2,\, x = 0\right\},$$

$$\gamma_c = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 = 1/4,\, x > 0,\, y > 0\right\}.$$

Т. к.

$$\left.\frac{\partial f}{\partial n}\right|_{\gamma_1} = -f'_y|_{\gamma_1} = 0; \quad \left.\frac{\partial \overline{g}}{\partial n}\right|_{\gamma_1} = -\overline{g}'_y|_{\gamma_1} = 0;$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial n}\right|_{\gamma_2} = -f'_x|_{\gamma_2} = 0; \quad f'_x|_{\gamma_2}; \quad \left.\frac{\partial \overline{g}}{\partial n}\right|_{\gamma_1} = 0;$$

$$f_{\gamma_c} = 0; \quad \overline{g}|_{\gamma_c} = 0;$$

то

$$\oint\limits_{\partial G} \left(\overline{g}\frac{\partial f}{\partial n} - f\frac{\partial \overline{g}}{\partial n}\right) dS = 0.$$

Следовательно,

$$(\Delta f, g) = \iint\limits_{G} \Delta f \cdot \overline{g}\, dxdy = \iint\limits_{G} f\overline{\Delta g}\, dxdy = (f, \Delta g).$$

Симметричность оператора Δ доказана.

2. *Отрицательная определённость оператора Лапласа.*

   Рассмотрим произвольную функцию $f \in D(\Delta)$ и воспользуемся третьей формулой Грина

   $$(\Delta f, f) = \iint\limits_G \Delta f \cdot \overline{f}\, dxdy = \oint\limits_{\partial G} \overline{f}\frac{\partial f}{\partial n} dS - \iint\limits_G |\operatorname{grad} f|^2\, dxdy.$$

   Поскольку $\partial G = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_c$ и

   $$\left.\frac{\partial f}{\partial n}\right|_{\gamma_1} = -f'_y|_{\gamma_1} = 0; \quad \left.\frac{\partial f}{\partial n}\right|_{\gamma_2} = -f'_x|_{\gamma_2} = 0; \quad \overline{f}|_{\gamma_c} = 0,$$

   то

   $$\oint\limits_{\partial G} \overline{f}\frac{\partial f}{\partial n} dS = 0.$$

   Следовательно,

   $$(\Delta f, f) = -\iint\limits_G |\operatorname{grad} f|^2\, dxdy \leqslant 0.$$

   Для доказательства отрицательной определённости оператора Δ остаётся проверить, что

   $$(\Delta f, f) = 0 \Leftrightarrow f = 0.$$

   Действительно,

   $$(\Delta f, f) = 0 \Leftrightarrow |\operatorname{grad} f| = 0 \Leftrightarrow f = \operatorname{const}.$$

   С учётом условия $f|_{\gamma_c} = 0$ получаем

   $$(\Delta f, f) = 0 \Leftrightarrow f = 0.$$

   Отрицательная определённость оператора Δ доказана.

3. *Собственные значения и собственные функции оператора Лапласа* Δ

   Решим краевую задачу на собственные значения для оператора Лапласа в секторе G

   $$\Delta f = \lambda f; \quad f|_{\gamma_c} = 0, \quad f'_y|_{\gamma_c} = 0, \quad f'_x|_{\gamma_2} = 0.$$

   Для этого сначала заметим, что из симметричности и отрицательной определённости оператора Δ следует, что собственные значения λ действительны и отрицательны.

   Перепишем краевую задачу в полярных координатах

   $$f_{rr} + \frac{1}{r} f_r + \frac{1}{r^2} f_{\varphi\varphi} = \lambda f; \quad f|_{r=1/2} = 0, \quad f'_\varphi|_{\varphi=0} = 0, \quad f'_\varphi|_{\varphi=\pi/2} = 0.$$

   Найдём сначала собственные функции $\Phi(\varphi)$ оператора

   $$L = \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

С областью определения

$$D(L) = \left\{ \Phi \in C^2 \left[0, \frac{\pi}{2}\right] : \Phi'(0) = 0, \quad \Phi'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \right\}.$$

Для этого решим задачу на собственные значения

$$\Phi'' = \mu\Phi, \quad \Phi'(0) = 0, \quad \Phi'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

Стоит отметить, что краевые условия в данной задаче совпадают с краевыми условиями по φ задачи в полярных координатах.

Рассмотрим три случая.

- $\mu > 0$
  В этом случае общее решение уравнения в последней задаче имеет вид
  $$\Phi(\varphi) = A \operatorname{sh}\left(\sqrt{\mu}\varphi\right) + B \operatorname{ch}\left(\sqrt{\mu}\varphi\right).$$
  Из краевых условий получаем
  $$\Phi'(0) = A\sqrt{\mu} = 0; \quad \Phi'\left(\frac{\pi}{2}\right) = B\sqrt{\mu} \operatorname{sh}\left(\sqrt{\mu}\frac{\pi}{2}\right) = 0 \implies B = 0.$$
  Откуда следует, что у оператора L нет положительных собственных значений.
- $\mu = 0$
  В этом случае общее решение уравнения в последней задаче имеет вид
  $$\Phi(\varphi) = A\varphi + B.$$
  Подставляя краевые условия последней задачи, получаем
  $$\Phi'(0) = A = 0; \quad \Phi'\left(\frac{\pi}{2}\right) = A = 0.$$
  Откуда следует, что у оператора L есть собственная функция
  $$\Phi_0(\varphi) \equiv 1.$$
  С нулевым собственным значением.
- $\mu < 0$
  В этом случае общее решения уравнения в последней задаче имеет вид
  $$\Phi(\varphi) = A \sin\left(\sqrt{-\mu}\varphi\right) + B \cos\left(\sqrt{-\mu}\varphi\right).$$
  Подставляя краевые условия последней задачи, получаем
  $$\Phi(0) = A\sqrt{-\mu} = 0; \quad \Phi'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -B\sqrt{-\mu} \sin\left(\sqrt{-\mu}\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$
  Поскольку собственная функция не может быть тождественно равной нулю, то
  $$\sin\left(\sqrt{-\mu}\frac{\pi}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{-\mu}\frac{\pi}{2} = \pi n \Leftrightarrow \sqrt{-\mu} = 2n.$$
  Таким образом, мы получили набор собственных значений и соответствующих им собственных функций
  $$\Phi_n(\varphi) = \cos(2n\varphi), \quad \mu_n = -4n^2; \quad n = 1, 2, \ldots.$$

В целом все найденные собственные значения и собственные функции можно записать одной формулой в виде

$$\Phi_n(\varphi) = \cos(2n\varphi), \quad \mu_n = -4n^2; \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

причём набор собственных функций $\Phi_n(\varphi)$ образует ортогональный базис в пространстве $L_2\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Теперь вернёмся к решению задачи в полярных координатах и разложим функцию $f(r, \varphi)$ при фиксированном r в ряд Фурье по базису $\{\cos(2n\varphi)\}$

$$f(r, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(r) \cos(2n\varphi).$$

Подставляя это разложение в уравнение в полярных координатах, получим

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n''(r)\cos(2n\varphi) + \frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty} A_n'(r)\cos(2n\varphi) + \frac{1}{r^2}\sum_{n=0}^{\infty}(-4n^2)A_n(r)\cos(2n\varphi) = \\ = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} A_n(r)\cos(2n\varphi).$$

Приравнивая коэффициенты при каждом $\cos(2n\varphi)$ в левой и правой частях равенства, получаем

$$A_n''(r) + \frac{1}{r}A_n'(r) - \frac{4n^2}{r^2}A_n(r) = \lambda A_n(r), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Преобразуем уравнение, учитывая отрицательность λ, к другому виду

$$A_n''(r) + \frac{1}{r}A_n'(r) + \left(-\lambda - \frac{4n^2}{r^2}\right)A_n(r) = 0.$$

$$\frac{A_n''(r)}{\left(\sqrt{-\lambda}\right)^2} + \frac{1}{r\sqrt{-\lambda}} \cdot \frac{A_n'(r)}{\sqrt{-\lambda}} + \left(1 - \frac{4n^2}{\left(r\sqrt{-\lambda}\right)^2}\right)A_n(r) = 0.$$

Совершая в уравнении замену переменной

$$t = r\sqrt{-\lambda},$$

получаем уравнение Бесселя

$$A_n''(t) + \frac{1}{t}A_n'(t) + \left(1 - \frac{4n^2}{t^2}\right)A_n(t) = 0.$$

Поскольку нас интересуют только такие решения $A_n(t)$ уравнения Бесселя, которые ограничены в нуле, то

$$A_n(t) = J_{2n}(t) \implies A_n(r) = J_{2n}\left(r\sqrt{-\lambda}\right).$$

Воспользовавшись краевым условием в рассматриваемом круге, получаем

$$f|_{r=\frac{1}{2}} = 0 \Leftrightarrow A_n(1/2) = 0.$$

Следовательно,
$$A_n(1/2) = J_{2n}\left(\sqrt{-\lambda}/2\right),$$
то есть, число $\sqrt{-\lambda}/2$ является одним из нулей $\mu_k^{(2n)}$ функции Бесселя $J_{2n}(t)$. Имеем выражение
$$\sqrt{-\lambda} = 2\mu_k^{(2n)}.$$
Получаем набор решений уравнения
$$A_{n,\,k}(r) = J_{2n}\left(2\mu_k^{(2n)} r\right), \quad k = 1, 2, 3, \ldots.$$
Итак, мы нашли собственные значения оператора Лапласа
$$\lambda_{n,\,k} = -\left(2\mu_k^{(2n)}\right)^2; \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$
и соответствующие им собственные им собственные функции
$$f_{n,\,k} = J_{2n}\left(2\mu_k^{(2n)} r\right)\cos(2n\varphi).$$
Набор собственных функций оператора Лапласа в секторе
$$\{f_{n,\,k}\} \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \quad k = 1, 2, 3, \ \ldots$$
образует ортогональный базис в пространстве $L_2(K)$.

4. *Спектральное разложение замыкания оператора Лапласа* $\overline{\Delta}$.

   Мы выяснили, что оператор Лапласа Δ с областью определения
$$D(\Delta) = \{f \in C^2\left(\overline{G}\right) : f|_{\partial G} = 0\}$$
   является симметричным и обладает в пространстве $L_2(G)$ ортогональным базисом из собственных функций.

   Поэтому его замыкание $\overline{\Delta}$ имеет область определения
$$D\left(\overline{\Delta}\right) = \{u \in L_2(G)\colon \ \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_{n,\,k}^2\frac{|(u, f_{n,\,k})|^2}{\|f_{n,\,k}\|^2} < \infty\}$$
   и спектральное разложение
$$\overline{\Delta}u = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_{n,\,k}\frac{(u, f_{n,\,k})}{\|f_{n,\,k}\|^2}f_{n,\,k}.$$

5. *Решение начально-краевой задачи.*
$$\frac{d}{dt}u(t) = \overline{\Delta}u(t), \quad t > 0,\ u(t) \in D\left(\Delta\right),$$
$$u(+0) = xy.$$

а) Найдём *«кандидата» на решение начально-краевой задачи.*

С этой целью при каждом фиксированном t разложим функцию $u(t)$ по базису $\{f_{n,\,k}\}$

$$u(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} T_{n,\,k}(t) f_{n,\,k}.$$

Из спектрального разложения замыкания оператора Лапласа $\overline{\Delta}$ получаем

$$\overline{\Delta}u(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_{n,\,k} T_{n,\,k}(t) f_{n,\,k}.$$

Разложим функцию xy по базису $\{f_{n,\,k}\}$. Поскольку

$$xy = \frac{1}{2} r^2 \sin 2\varphi,$$

то её разложение по базису $\{f_{n,\,k}\}$ имеет вид

$$xy = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{n,\,k} f_{n,\,k} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{n,\,k} J_{2n}\left(2\mu_k^{(2n)} r\right)\cos(2n\varphi).$$

где

$$\alpha_{n,\,k} = \frac{\left(r^2\sin 2\varphi/2, f_{n,\,k}\right)}{\|f_{n,\,k}\|^2} =$$

$$= \frac{\iint\limits_G \frac{1}{2} r^2 \sin 2\varphi J_{2n}\left(2\mu_k^{(2n)} r\right)\cos 2n\varphi r\, dr d\varphi}{\iint\limits_G J_{2n}^2\left(2\mu_k^{(2n)} r\right)\cos 2n\varphi r\, dr d\varphi} =$$

$$= \frac{\int\limits_0^{\frac{1}{4}}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} r^3 \sin 2\varphi J_{2n}\left(2\mu_k^{(2n)} r\right)\cos 2n\varphi\, d\varphi dr}{\int\limits_0^{\frac{1}{2}}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} r J_{2n}^2\left(2\mu_k^{(2n)} r\right)\cos 2n\varphi\, dr d\varphi}.$$

Подставим найденные разложения в уравнение и начальное условие задачи

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} T'_{n,\,k}(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_{n,\,k} T_{n,\,k}(t), \quad \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} T_{n,\,k}(0) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{n,\,k}.$$

Приравнивая коэффициенты при каждой базисной функции $f_{n,\,k}$, для каждого $k = 1, 2, \ldots$ получаем задачу Коши

$$T'_{n,\,k}(t) = \lambda_{n,\,k} T_{n,\,k}(t), \quad T_{n,\,k}(0) = \alpha_{n,\,k}.$$

Решим эту задачу.

$$T_{n,\,k}(t) = C_{n,\,k} e^{\lambda_{n,\,k} t}.$$

Найдём константы C_k из начального условия

$$T_{n,\,k}(0) = C_{n,\,k} = \alpha_{n,\,k}.$$

Поэтому

$$T_{n,\,k}(t) = \alpha_{n,\,k} e^{\lambda_{n,\,k} t}$$

и «кандидатом» на решение начально-краевой задачи будет функция

$$u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{n,\,k} e^{\lambda_{n,\,k} t} f_{n,\,k}.$$

Проверим, что $u(t)$ *действительно является решением задачи.*

б) Покажем, что $\forall t > 0$ $u(t) \in L_2(G)$. Оценим сверху квадрат нормы функции $u(t)$ используя равенство Парсеваля.

$$\|u(t)\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_{n,\,k}|^2 |e^{\lambda_{n,\,k} t}|^2 \|f_{n,\,k}\|^2 =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_{n,\,k}|^2 |e^{-|\lambda_{n,\,k}| t}|^2 \|f_{n,\,k}\| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_{n,\,k}|^2 \|f_{n,\,k}\|^2 =$$
$$= \|xy\| < \infty.$$

в) Покажем, что $\forall t > 0$ $u(t) \in D\left(\overline{\Delta}\right)$.

$$\|\Delta u(t)\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_{n,\,k}|^2 |\alpha_{n,\,k}|^2 |e^{\lambda_{n,\,k} t}|^2 \|f_{n,\,k}\|^2 <$$
$$< \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_{n,\,k}|^2 \|f_{n,\,k}\|^2 < \|xy\| < \infty$$

т. к. $\forall \lambda$ выполняется $|\lambda^2 e^{-2|\lambda|}| \leqslant 1$.

г) Покажем, что выполнено условие $u(+0) = xy$. Сперва покажем, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_{n,\,k}|^2 |e^{\lambda_{n,\,k} t} - 1|^2 \|f_{n,\,k}\|^2 \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_{n,\,k}|^2 \|f_{n,\,k}\|^2 < \|xy\| < \infty.$$

Поэтому, ряд сходится, значит по признаку Вейерштрасса исходный ряд сходится равномерно по t на $(0,\,+\infty)$, следовательно мы можем переходить к пределу по t почленно, откуда следует требуемое утверждение.

д) Докажем, что ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \sum\limits_{k=1}^{\infty} T'_{n,\,k} f_{n,\,k}$ сходится в $L_2(G)$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |T'_{n,\,k}|^2 \|f_{n,\,k}\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_{n,\,k}|^2 |\alpha_{n,\,k}|^2 |e^{\lambda_{n,\,k} t}|^2 \|f_{n,\,k}\|^2 < \infty.$$

Последнее неравенство было доказано в предыдущих пунктах

e) Докажем, что производная $u'(t)$ в $L_2(G)$ равна сумме ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\sum\limits_{k=1}^{\infty} T'_{n,\,k} f_{n,\,k}$.

В силу определения производной нужно доказать

$$\lim_{\Delta t\to 0}\left\|\frac{u(t+\Delta t)-u(t)}{\Delta t}-\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} T'_{n,\,k} f_{n,\,k}\right\|^2=0.$$

Воспользуемся равенством Парсеваля и преобразуем выражение

$$\left\|\frac{u(t+\Delta t)-u(t)}{\Delta t}-\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} T'_{n,\,k} f_{n,\,k}\right\|^2=$$
$$=\left\|\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{T_{n,\,k}(t+\Delta t)-T_{n,\,k}(t)}{\Delta t}f_{n,\,k}-\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} T'_{n,\,k} f_{n,\,k}\right\|^2=$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{T_{n,\,k}(t+\Delta t)-T_{n,\,k}(t)}{\Delta t}-T'_{n,\,k}\right|^2\|f_{n,\,k}\|^2.$$

По теореме Лагранжа о среднем $\forall k\ \exists \xi_{n,\,k}\in(t,t+\Delta t)$, т.ч. $T_{n,\,k}(t+\Delta t)-T_{n,\,k}(t)=T'_{n,\,k}(\xi_{n,\,k})\Delta t$, значит

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{T_{n,\,k}(t+\Delta t)-T_{n,\,k}(t)}{\Delta t}-T'_{n,\,k}\right|^2\|f_{n,\,k}\|^2=$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\left|T'_{n,\,k}(\xi_{n,\,k})-T'_{n,\,k}\right|^2\|f_{n,\,k}\|^2\leqslant$$
$$\leqslant\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\left(|T'_{n,\,k}(\xi_{n,\,k})|+|T'_{n,\,k}(t)|\right)^2\|f_{n,\,k}\|^2.$$

Оценим общий член последнего ряда

$$|T'_{n,\,k}(t)|\leqslant|\alpha_{n,k}|$$

(доказано в предыдущих пунктах), значит

$$\left(|T'_{n,\,k}(\xi_{n,\,k})|+|T'_{n,\,k}(t)|\right)^2\|f_{n,\,k}\|^2\leqslant 4|\alpha_{n,\,k}|^2\|f_{n,\,k}\|^2.$$

Откуда

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\left(|T'_{n,\,k}(\xi_{n,\,k})|+|T'_{n,\,k}(t)|\right)^2\|f_{n,\,k}\|^2\leqslant 4\|xy\|<\infty.$$

Значит по признаку Вейерштрасса можем переходить к почленному пределу по Δt, чем и доказываем требуемое утверждение.