Задание 2

Драчов Ярослав
Факультет общей и прикладной физики МФТИ

11 мая 2021 г.

Тема XII. Общая теория сходимости для уравнений в частных производных

7.1.

Решение.

$$-i\frac{\Psi_m^{n+1}-\Psi_m^n}{\tau} = \xi\left(\frac{\Psi_{m+1}^{n-1}-2\Psi_m^{n+1}+\Psi_{m-1}^{n+1}}{h^2}+\tilde{U}\Psi^n\right)+ \\ +(1-\xi)\left(\frac{\Psi_{m+1}^{n}-2\Psi_m^{n}+\Psi_{m-1}^{n}}{h^2}+\tilde{U}\Psi^n\right).$$

Сначала рассмотрим схему с $\tilde{U}=0$:

$$-i\frac{\Psi_m^{n+1}-\Psi_m^n}{\tau} = \xi\frac{\Psi_{m+1}^{n+1}-2\Psi_m^{n+1}+\Psi_{m-1}^{n+1}}{h^2}+(1-\xi)\frac{\Psi_{m+1}^{n}-2\Psi_m^{n}+\Psi_{m-1}^{n}}{h^2}.$$

Пусть $\Psi_m^n=\Psi$. Разложим в окрестности точки (x_m, t_n):

$$-\frac{i}{\tau}\left(\Psi_t\tau+\Psi_{tt}\frac{\tau^2}{2}+O\left(\tau^3\right)\right)= \\ =\frac{\xi}{h^2}\left(\Psi_t\tau+\Psi_x h+\Psi_{tt}\frac{\tau^2}{2}+\Psi_{xx}\frac{h^2}{2}+2\Psi_{tx}\frac{\tau h}{2}+\Psi_{xxx}\frac{h^3}{6}+\right. \\ +\Psi_{xxt}\frac{h^2\tau}{6}\cdot 3+\Psi_{xtt}\frac{h\tau^2}{6}\cdot 3+\Psi_{ttt}\frac{\tau^3}{6}-2\left(\Psi_t\tau+\Psi_{tt}\frac{\tau^2}{2}+\Psi_{ttt}\frac{\tau^3}{6}\right)+\Psi_t\tau- \\ -\Psi_x h+\Psi_{tt}\frac{\tau^2}{2}+\Psi_{xx}\frac{h^2}{2}-\Psi_{xt}\frac{h\tau}{2}\cdot 2-\Psi_{xxx}\frac{h^2}{2}+\Psi_{xxx}\frac{h^3}{6}- \\ \left.-\Psi_x h+\Psi_{xx}\frac{h^2}{2}-\Psi_{xxx}\frac{h^3}{6}\right).$$

Таким образом:

$$-i\Psi_t+O(\tau)=\Psi_{xx}+O(h^2).$$

Если Ψ — решение уравнения, то

$$-i\frac{\partial\Psi}{\partial t}=\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}.$$

Следовательно схема аппроксимирует исходную задачу. Устойчивость проверим по спектральному признаку:

$$\Psi_m^n = \lambda^n e^{i\varphi m}.$$

$$-i\frac{\lambda-1}{\tau} = \frac{\xi}{h^2}\left(\lambda e^{i\varphi} - 2\lambda + \lambda e^{i\varphi}\right) + \frac{1-\xi}{h^2}\left(e^{i\varphi} - 2 - e^{-i\varphi}\right).$$

$$\begin{aligned}-\,i\frac{\lambda-1}{\tau} &= \frac{\xi\lambda\cdot 2}{h^2}(\cos\varphi-1) + \frac{1-\xi}{h^2}\cdot 2(\cos\varphi-1) = \\ &= \frac{\xi(\lambda-1)}{h^2}\cdot 2(\cos\varphi-1) + \frac{2}{h^2}(\cos\varphi-1).\end{aligned}$$

$$(\lambda-1)\left(\frac{2\xi(1-\cos\varphi)}{h^2} - \frac{i}{\tau}\right) = \frac{2}{h^2}(\cos\varphi-1).$$

Значит

$$\lambda = -\frac{2(1-\cos\varphi)}{h^2\left(\frac{1}{h^2}\cdot 2\xi(1-\cos\varphi) - \frac{i}{\tau}\right)} + 1.$$

$$\lambda = \frac{2(\xi-1)(1-\cos\varphi) - \frac{ih^2}{\tau}}{2\xi(1-\cos\varphi) - \frac{i}{\tau}h^2} = \frac{1 - i\frac{\tau}{h^2}\cdot 4(1-\xi)\sin^2\frac{\varphi}{2}}{1 + i\frac{\tau}{h^2}\cdot 4\xi\sin^2\frac{\varphi}{2}}.$$

Числитель и знаменатель последней дроби имеют равные действительные части, поэтому $|\lambda| \leqslant 1$, если абсолютное значение мнимой части числителя меньше чем знаменателя, т. е. $1-\xi \leqslant \xi$, следовательно $\xi \geqslant 0{,}5$.

При $\tilde{U} \neq 0$:

$$-i\frac{\lambda-1}{\tau} = \frac{\xi}{h^2}\left(\lambda e^{i\varphi} - 2\lambda + \lambda e^{-i\varphi}\right) + \frac{1-\xi}{h^2}\left(e^{i\varphi} - 2 + e^{-i\varphi}\right) + \xi\lambda\tilde{U} + (1-\xi)\tilde{U}.$$

$$-i\frac{\lambda-1}{\tau} = \frac{\xi(\lambda-1)}{h^2}\cdot 2\,(\cos\varphi-1) + \frac{2}{h^2}\,(\cos\varphi-1) + \xi(\lambda-1)\tilde{U} + \tilde{U}.$$

$$(\lambda-1)\left(-\frac{i}{\tau} + \frac{2\xi}{h^2}(1-\cos\varphi) - \tilde{U}\xi\right) = \frac{2}{h^2}(\cos\varphi-1) + \tilde{U}.$$

$$\lambda = 1 + \frac{-2(-\cos\varphi+1) + \tilde{U}h^2}{-\frac{i}{\tau}h^2 + 2\xi(1-\cos\varphi) - \tilde{U}\xi h^2}.$$

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{-\frac{i}{\tau}h^2 + 2(\xi-1)(1-\cos\varphi) + \tilde{U}h^2(1-\xi)}{-\frac{i}{\tau}h^2 + 2\xi(1-\cos\varphi) - \tilde{U}\xi h^2} = \\ &= \frac{1 - \frac{\tau i}{h^2}\cdot 4(1-\xi)\sin^2\frac{\varphi}{2} + \frac{i\tau}{h^2}\tilde{U}h^2(1-\xi)}{1 + i\frac{\tau}{h^2}\cdot 4\xi\sin^2\frac{\varphi}{2} + i\tau\tilde{U}\xi}.\end{aligned}$$

Видим, что введение потенциала меняет только мнимую часть в λ, но синхронно в числителе и знаменателе, следовательно не меняет полученный для случая $\tilde{U} = 0$ результат, поэтому схема устойчива при $\xi \geqslant 0{,}5$ и сходимость имеет место при $\xi \geqslant 0{,}5$.

7.2.

Решение.

$$u_t + cu_x = 0.$$

$$\alpha y_m^{n+1} + \beta y_{m-1}^n + \gamma y_m^n + \delta y_{m+1}^n = 0.$$

$$\alpha\left(u + u_t\tau + \frac{1}{2}u_{tt}\tau^2\right) + \beta\left(u - u_x h + \frac{1}{2}u_{xx}h^2\right) + \gamma u +$$
$$+ \delta\left(u + u_x h + u_{xx}\frac{1}{2}h^2\right) + O\left(h^2\right) + O\left(\tau^2\right) = 0.$$

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 0 \implies \gamma = -\alpha - \beta - \delta.$$

$$\alpha u_t\tau + (\delta - \beta)u_x h = 0 \implies \alpha\tau = 1 \implies \alpha = \frac{1}{\tau},\ (\delta - \beta)h = c.$$

$$\begin{cases} u_{tt} + cu_{xt} = 0 \\ u_{tx} + cu_{xx} = 0 \end{cases} \implies u_{tt} - c^2u_{xx} = 0,\ u_{tt} = c^2u_{xx}.$$

$$\alpha c^2\tau^2 + \beta h^2 + \delta h^0.$$

$$c^2\tau + (\beta + \delta)h^2 = 0.$$

$$\delta - \beta = \frac{c}{h} \implies \delta = \beta + \frac{c}{h} \implies c^2\tau + \left(2\beta + \frac{c}{h}\right)h^2 = 0.$$

$$c^2\tau + 2\beta h^2 + ch = 0 \implies \beta = -\frac{c(c\tau + h)}{2h^2} = \frac{-c^2\tau - ch}{2h^2}.$$

$$\delta = \frac{ch - c^2\tau}{2h^2}, \quad \gamma = \frac{c^2\tau}{h^2} - \frac{1}{\tau}.$$

Значит

$$\frac{y_{m+1}^{n+1} - y_{m+1}^n}{\tau} + \frac{c}{2h}\left(y_{m+1}^n - y_{m-1}^n\right) - \frac{c^2\tau}{2h^2}\left(y_{m+1}^n - 2y_m^n + y_{m-1}^n\right) = 0.$$

Порядок аппроксимации: $O(\tau^2, h^2)$. Исследуем устойчивость:

$$u_m^n = \lambda^n e^{im\varphi}.$$

$$\frac{\lambda - 1}{\tau} + \frac{c}{2h}\left(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}\right) - \frac{c^2\tau}{2h^2}\left(e^{i\varphi} - 2 + e^{-i\varphi}\right) = 0.$$

$$\frac{\lambda - 1}{\tau} + \frac{ic}{h}\sin\varphi + \frac{c^2\tau}{h^2}(1 - \cos\varphi) = 0.$$

$$\lambda = 1 - \frac{ic}{h}\sin\varphi + \frac{c^2\tau}{h^2}(1 - \cos\varphi) = 0.$$

$$\lambda = 1 - \frac{ic\tau}{h}\sin\varphi - \frac{c^2\tau^2}{h^2}(1 - \cos\varphi) = 0.$$

$$\sigma = \frac{c\tau}{h}.$$

$$\lambda = 1 - i\sigma\sin\varphi - \sigma^2(1 - \cos\varphi).$$

$|\lambda|^2 \leqslant 1$ для устойчивости, поэтому

$$|\lambda|^2 = (1 - \sigma^2(1 - \cos\varphi))^2 + \sigma^2\sin^2\varphi \leqslant 1.$$

$$\sigma^2\sin^2\varphi \leqslant 1-\left(1-\sigma^2\left(1-\cos\varphi\right)\right)^2 = \sigma^2\left(1-\cos\varphi\right)\left(2-\sigma^2\left(1-\cos\varphi\right)\right).$$

$$\frac{\sin^2\varphi}{1-\cos\varphi} \leqslant 2-\sigma^2(1-\cos\varphi).$$

$$\sigma^2 \leqslant \frac{1}{1-\cos\varphi}\left(2-\frac{\sin^2\varphi}{1-\cos\varphi}\right) = \frac{2-2\cos\varphi-\sin^2\varphi}{2\sin^2\left(\varphi/2\right)\left(1-\cos\varphi\right)} = 1.$$

Значит схема устойчива при

$$\frac{c\tau}{h} \leqslant 1.$$

7.3.

Решение.

$$u_t + cu_x = 0.$$

$$\alpha y_m^{n+1} + \beta y_m^n + \gamma y_{m-1}^n + \delta y_{m-2}^n = 0.$$

$$\alpha\left(u+\tau u_t+\frac{1}{2}\tau^2 u_{tt}+\frac{1}{6}\tau^3 u_{ttt}\right)+\beta u+\gamma\left(u-u_x h+\frac{1}{2}h^2 u_{xx}-\frac{1}{6}h^3 u_{xxx}\right)+$$

$$+\delta\left(u-2hu_x+2h^2u_{xx}-\frac{4}{3}h^3u_{xxx}\right)=0.$$

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta=0 \implies \beta=\alpha-\gamma-\delta.$$

$$\alpha c\tau+\left(\gamma+2\delta\right)h=0 \implies \alpha=\frac{1}{\tau}.$$

$$\gamma+2\delta=-\frac{c}{h} \implies \gamma=-\frac{c}{h}-2\delta.$$

$$\alpha c^2\tau^2+(\gamma+4\delta)h^2=0.$$

$$c^2\tau+\left(-\frac{c}{h}-2\delta+4\delta\right)h^2=0.$$

$$-\frac{c^2\tau}{h^2}=-\frac{c}{h}+2\delta \implies \delta=\frac{c}{2h}-\frac{c^2\tau}{2h^2}.$$

$$\gamma=-\frac{c}{h}-\frac{c}{h}+\frac{c^2\tau}{h^2}=-\frac{2c}{h}+\frac{c^2\tau}{h^2}.$$

$$\beta=-\frac{1}{\tau}+\frac{2c}{h}-\frac{c^2\tau}{h^2}-\frac{c}{2h}+\frac{c^2\tau}{2h^2}=-\frac{1}{\tau}+\frac{3c}{2h}-\frac{c^2\tau}{2h^2}.$$

Откуда разностная схема:

$$\frac{y_m^{n+1}-y_m^n}{\tau}+\frac{c}{h}\left(\frac{3}{2}y_m^n-2y_{m-1}^n+\frac{1}{2}y_{m-2}^n\right)-\frac{c^2\tau}{2h^2}\left(y_m^n-2y_{m-1}^n+y_{m-2}^n\right)=0.$$

Порядок аппроксимации: $O\left(\tau^2+h^2\right)$.

Исследуем на устойчивость: $u_m^n=\lambda^n e^{im\varphi}$.

$$\frac{\lambda-1}{\tau}e^{i\varphi}+\frac{c}{h}\left(\frac{1}{2}e^{i\varphi}-\frac{1}{2}e^{-i\varphi}+e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}-2\right)-\frac{c^2\tau}{2h^2}\left(e^{i\varphi}-2+e^{-i\varphi}\right)=0.$$

$$\frac{\lambda-1}{\tau}e^{i\varphi}+\frac{c}{h}\left(2\left(\cos\varphi-1\right)+i\sin\varphi\right)+\frac{c^2\tau}{h^2}(1-\cos\varphi)=0.$$

$$\lambda=1-e^{-i\varphi}\left(\sigma^2(1-\cos\varphi)+\sigma\left(2\left(\cos\varphi-1\right)+i\sin\varphi\right)\right).$$

Оценка этого выражения в Mathematica даёт, что $|\lambda|\leqslant 1$ для любого φ при $\sigma\leqslant 2$, значит схема устойчива при $c\tau\leqslant 2h$.

7.4.

Решение.

$$u_t + cu_x = 0.$$

Характеристика:

$$x - ct = \mathrm{const}.$$

Значит

$$u_* = u_m^{n+1}.$$

Получим значение решения в точке x^* интерполяцией по значениям в трёх узлах сетки на нижнем слое.

$$\begin{gathered}
P_2(x_*) = y_{m-2} - \frac{y_{m_1} - y_{m-2}}{h}(x_* - x_{m-2}) + \\
+ \frac{y_m - 2y_{m-1} + y_{m-2}}{2h^2}(x_* - x_{m-2})(x_* - x_{m-1}) = \\
= y_{m-2} + \frac{1}{h}\left(y_{m-1} - y_{m-2}\right)\left(2h - c\tau\right) + \\
+ \frac{1}{2h^2}\left(y_m - 2y_{m-1} + y_{m-2}\right)\left(2h - c\tau\right)\left(h - c\tau\right) = \\
= y_{m-2} + \left(2 - \frac{c\tau}{h}\right)\left(y_{m-1} - y_{m-2}\right) + \\
+ \left(1 - \frac{c\tau}{2h}\right)\left(1 - \frac{c\tau}{h}\right)\left(y_m - 2y_{m-1} + y_{m-2}\right) = \\
= y_{m-2} + 2y_{m-1} - 2y_{m-2} + y_m - 2y_{m-1} + y_{m-2} + \\
+ \frac{c\tau}{h}\left(-y_{m-1} + y_{m-2} - \frac{1}{2}y_m + y_{m-1} - \frac{1}{2}y_{m-2} - y_m + 2y_{m-1} - y_{m-2}\right) + \\
+ \frac{c^2\tau^2}{h^2}\left(y_m - 2y_{m-1} + 2y_m\right).
\end{gathered}$$

$$P_2(x_*) = y_m^{n+1}.$$

Значит

$$\frac{y_m^{n+1} - y_m^n}{\tau} + \frac{c}{h}\left(\frac{3}{2}y_m^n - 2y_{m-1}^n + \frac{1}{2}y_{m-2}^n\right) - \frac{c^2\tau^2}{h^2}(y_m^n - 2y_{m-1}^n + y_{m-2}^n) = 0.$$

Результат совпадает с предыдущей задачей.

7.8.

Решение.

$$\text{Ш} = \left\{(x_{m-1}, y_{k-1}),\ (x_{m-1}, y_{k+1}),\ (x_{m+1}, y_{k-1}),\ (x_{m+1}, y_{k+1},\ (x_m, y_k))\right\}.$$

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0.$$

$$aY_{m+1}^{k+1} + bY_{m+1}^{k-1} + cY_{m-1}^{k+1} + dY_{m-1}^{k-1} - lY_m^k = 0.$$

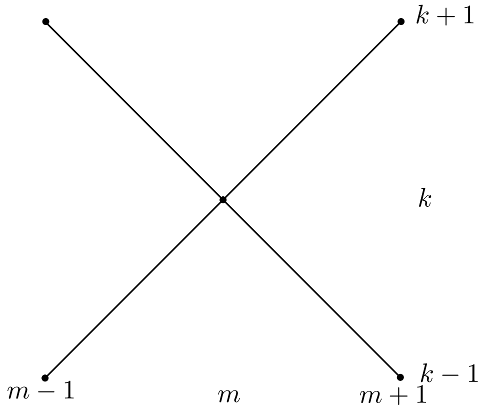

Рис. 1: К задаче 7.8

$$
\begin{aligned}
a\left(u + hu_x + hu_y + \frac{1}{2}h^2u_{xx} + h^2u_{xy} + \frac{1}{2}h^2u_{yy}\right) + \\
+ b\left(u + hu_x - hu_y + \frac{1}{2}h^2u_{xx} - h^2u_{xy} + \frac{1}{2}h^2u_{yy}\right) + \\
+ c\left(u - hu_x + hu_y + \frac{1}{2}h^2u_{xx} - h^2u_{xy} + \frac{1}{2}h^2u_{yy}\right) + \\
+ d\left(u - hu_x - hu_y + \frac{1}{2}h^2u_{xx} + h^2u_{xy} + \frac{1}{2}h^2u_{yy}\right) + lu = 0.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{cases}
a+b+c+d+l=0 \\
a+b-c-d=0 \\
a-b+c-d=0 \\
a-b-c+d=0
\end{cases}
\Longrightarrow
\begin{cases}
a=b=c=d \\
l=-4a
\end{cases}
$$

$$
\frac{h^2}{2}\left(a+b+c+d\right)\left(u_{xx}+u_{yy}\right)=0; \quad \frac{h^2}{2}\left(a+b+c+d\right)=1.
$$

$$
a=b=c=d=\frac{1}{2h^2}; \quad l=-\frac{2}{h^2}.
$$

Значит разностная схема:

$$
\frac{Y_{m+1}^{k+1}-2Y_m^k+Y_{m-1}^{k-1}}{2h^2}+\frac{Y_{m-1}^{k+1}-2Y_m^k+Y_{m+1}^{k-1}}{2h^2}=0.
$$

Тема XIII. Численные методы для уравнений в частных производных параболического типа

7.3.

Решение.
$$\frac{y_m^{n+1}-y_m^n}{\tau}=D\frac{y_{m-1}^n-2y_m^{n+1}+y_{m+1}^n}{h^2}. \qquad (*)$$
$$\frac{y_m^{n+1}-y_m^n}{\tau}=D\frac{y_{m-1}^n-2y_m^n+y_{m+1}^n}{h^2}-\frac{2D}{h^2}\left(y_m^{n+1}-y_m^n\right).$$
$$\left(y_m^{n+1}-y_m^n\right)\left(\frac{1}{\tau}+\frac{2D}{h^2}\right)=D\frac{y_{m-1}^n-2y_m^n+y_{m+1}^n}{h^2}.$$
Значит
$$\frac{y_m^{n+1}-y_m^n}{\tau^*}=D\frac{y_{m-1}^n-2y_m^n+y_{m+1}^n}{h^2}.$$
$$\tau^*=\frac{\tau}{1+2D\tau/h^2}<\tau.$$
Следовательно (*) эквивалентна явной схеме с уменьшенным значением шага по времени.

8.3.

Решение. Ознакомился.

9.3.

Решение.
$$\frac{y_m^{n+1}-y_m^n}{\tau}=\frac{y_{m+1}^n-2y_m^n+y_{m+1}^n}{h^2}.$$
Разложим в окрестности (t_n,x_m):
$$u_m^n\equiv u.$$
$$u_m^{n+1}=u+\tau u_t+\frac{\tau^2}{2}u_{tt}+\frac{\tau^3}{6}u_{ttt}+O\left(\tau^4\right).$$
$$u_{m\pm1}^n=u\pm hu_x+\frac{h^2}{2}u_{xx}\pm\frac{h^3}{6}u_{xxx}+\frac{h^4}{24}u_{xxxx}\pm\frac{h^5}{120}u_{xxxxx}+O\left(x^6\right).$$
Значит
$$r_{\tau h}=u_t+\frac{\tau}{2}u_{tt}+\frac{\tau^2}{6}u_{ttt}-u_{xx}-\frac{h^2}{12}u_{xxxx}+O\left(\tau^2h^4\right).$$
Из исходного уравнения: $u_t=u_{xx}$. Следовательно
$$\begin{cases}u_{tt}=u_{xxt}\\ u_{tx}=u_{xxx}\\ u_{txx}=u_{xxxx}\end{cases}\implies u_{tt}=u_{u_{xxxx}}.$$
Поэтому
$$r_{\tau h}=\left(\frac{\tau}{2}u_{tt}-\frac{h^2}{12}\underbrace{u_{xxxx}}_{=u_{tt}}\right)+O\left(\tau^2+h^4\right).$$
Как итог схема будет иметь порядок аппроксимации $O\left(\tau^2,h^4\right)$ при условии:
$$\frac{\tau}{2}u_{tt}=\frac{h^2}{12}u_{xxxx}\implies\frac{h^2}{\tau}=6.$$

9.1.

Решение.

$$\frac{\hat{y}-y}{\tau} = a\xi\Lambda_{xx}\hat{y} + a(1-\xi)\Lambda_{xx}y + \xi Q^{n+1} + (1-\xi)Q^n.$$

а) *Метод энергетических неравенств.*

Представим схему в виде:

$$\underbrace{(E - a\xi\tau\Lambda_{xx})}_{B}\frac{\hat{y}-y}{\tau}\underbrace{-a\Lambda_{xx}}_{A}y = 0.$$

Условие устойчивости:

$$B \geqslant \frac{\tau}{2}A.$$

$$E - a\xi\tau\Lambda_{xx} \geqslant \frac{\tau}{2}\left(-a\Lambda_{xx}\right).$$

$$E \geqslant -\tau\Lambda_{xx}a\left(\frac{1}{2}-\xi\right).$$

$$1 \geqslant -\tau a\lambda^{(k)}\left(\frac{1}{2}-\xi\right),$$

где $\lambda^{(k)}$ — спектр Λ_{xx}.

Известно, что для разностного оператора второй производной верно:

$$-\Lambda_{xx} \leqslant \frac{4}{n^2}E \implies \Lambda_{xx} \geqslant -\frac{4}{n^2}E.$$

Следовательно

$$1 \geqslant \tau\cdot\frac{4}{h^2}\left(\frac{1}{2}-\xi\right)a \implies \xi \geqslant \frac{1}{2} - \frac{1}{4\sigma},$$

где $\sigma = \tau a/h^2$.

б) *Спектральный метод.*

Подставим $y = \lambda^n e^{im\varphi}$:

$$\frac{\lambda-1}{\tau} = a\xi\lambda\frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}-2}{h^2} + a(1-\xi)\frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}-2}{h^2}.$$

Значит

$$\lambda = 1 + \frac{1}{-\xi + (-2\sigma + 2\sigma\cos\varphi)^{-1}} = 1 - \frac{1}{\xi + \left(4\left(\sin^2\frac{\varphi}{2}\right)\sigma\right)^{-1}} =$$

$$= 1 - \frac{4\sigma\sin^2\frac{\varphi}{2}}{4\xi\sigma\sin^2\frac{\varphi}{2}+1} = \frac{1-(1-\xi)\cdot 4\sigma\sin^2\frac{\varphi}{2}}{1+4\xi\sigma\sin^2\frac{\varphi}{2}}.$$

Для устойчивости должно выполняться: $|\lambda| \leqslant 1$. Тогда

$$0 \leqslant \frac{4\sigma\sin^2\frac{\varphi}{2}}{4\xi\sigma\sin^2\frac{\varphi}{2}+1} \leqslant 2.$$

$$2\sigma \sin^2 \frac{\varphi}{2} \leqslant 4\sigma\xi \sin^2 \frac{\varphi}{2} + 1 \implies 2\sigma \leqslant 4\sigma\xi + 1.$$

Откуда

$$\xi \geqslant \frac{1}{2} - \frac{1}{4\sigma}; \quad \sigma = \frac{\tau a}{h^2}.$$

Результаты совпадают.

9.2.

Решение. Однородное уравнение теплопроводности:

$$u_t = a u_{xx}.$$

Разностная схема:

$$\frac{y_m^{n+1} - y_m^n}{\tau} = a\xi \frac{y_{m+1}^{n+1} - 2y_m^{n+1} + y_{m-1}^{n+1}}{h^2} + a\left(1-\xi\right) \frac{y_{m+1}^n - 2y_m^n + y_{m-1}^n}{h^2}.$$

Разложим в окрестности точки (t_n, x_m):

$$u_m^n \equiv u.$$

$$u_m^{n+1} = u + \tau u_t + \frac{\tau^2}{2} u_{tt} + \frac{\tau^3}{6} u_{ttt} + O\left(\tau^4\right).$$

$$u_{m\pm1}^n = u \pm h u_x + \frac{h^2}{2} u_{xx} \pm \frac{h^3}{6} u_{xxx} + \frac{h^4}{24} u_{xxxx} \pm \frac{h^5}{120} u_{xxxxx} + O\left(h^6\right).$$

$$\left(u_{xx}\right)_m^{n+1} = u_{xx} + \tau u_{xxt} + \frac{\tau^2}{2} u_{xxtt} + \frac{\tau^3}{6} u_{xxttt} + O\left(\tau^4\right).$$

Значит

$$\begin{aligned}
r_{\tau h} &= u_t + \frac{\tau}{2} u_{tt} + O\left(\tau^2\right) + a(\xi - 1) \left[u_{xx} + \frac{h^2}{12} u_{xxxx} + O\left(h^4\right)\right] - \\
&- a\xi \left[u_{xx} + \tau u_{xxt} + \frac{h^2}{12}\left(u_{xxxx} + \tau u_{xxxxt} + O\left(\tau^2\right)\right) + O\left(\tau^2\right) + O\left(h^4\right)\right] = \\
&\overset{u_t = a u_{xx}}{=\!=\!=} \frac{\tau}{2} u_{tt} + a\left(\xi - 1\right) \frac{h^2}{12} u_{xxxx} - a\xi \frac{h^2}{12} u_{xxxx} - a\xi\tau u_{xxt} - a\xi\tau \frac{h^2}{12} u_{xxxxt} + O\left(\tau^2, h^4\right) = \\
&= \frac{\tau}{2} u_{tt} - \frac{h^2}{12} u_{xxxx} - a\xi\tau u_{xxt} - a\xi\tau \frac{h^2}{12} u_{xxxxt} + O\left(\tau^2, h^4\right).
\end{aligned}$$

$$u_t = a u_{xx}.$$

Поэтому

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xxt} \cdot a \\ u_{tx} = u_{xxx} \cdot a \\ u_{txx} = u_{xxxx} \cdot a \end{cases} \implies \frac{1}{a^2} u_{tt} = u_{xxxx} = u_{xxt} \frac{1}{a}.$$

$$r_{\tau h} = \left(\frac{\tau}{2} - \frac{h^2}{12a^2} - \frac{a}{a}\xi\tau\right) u_{tt} + O\left(\tau^2, h^4\right).$$

Следовательно схема будет иметь порядок аппроксимации $O\left(\tau^2, h^4\right)$ при условии

$$\frac{\tau}{2} - \frac{h^2}{12a^2} - \xi\tau = 0 \implies \xi = \frac{1}{2} - \frac{h^2}{12a^2\tau}.$$

9.8.

Решение.

$$u_t = u_{xx}.$$

$$\frac{y_m^{n+1} - y_m^{n-1}}{2\tau} = \frac{y_{m+1}^n - y_m^{n+1} - y_m^{n-1} + y_{m-1}^n}{h^2}.$$

Исследуем на устойчивость: $y_m^n = \lambda^n e^{im\varphi}$

$$\frac{\lambda^2 - 1}{2\tau} = \frac{\lambda e^{i\varphi} - \lambda^2 - 1 + \lambda e^{-i\varphi}}{h^2}.$$

$$\lambda = \frac{2\tau\cos\varphi \pm \sqrt{h^4 - 2\tau^2 + 2\tau^2\cos 2\varphi}}{h^2 + 2\tau}.$$

$$\sigma = \frac{\tau}{h^2} \implies \lambda = \frac{2\sigma\cos\varphi \pm \sqrt{1 - 2\sigma^2 + 2\sigma^2\cos 2\varphi}}{1 + 2\sigma}.$$

Построением графика функции $\lambda(\sigma)$ с параметром φ нетрудно убедиться, что условие $|\lambda| \leqslant 1$ выполнено для любых φ и $\sigma > 0$ (что так по определению σ). Следовательно схема безусловно устойчива.

Разложим в окрестности точки (t_n, x_m):

$$r_{\tau h} = u_t + \frac{\tau^2}{6}u_{ttt} - u_{xx} + \frac{\tau^2}{h^2}u_{tt} + O\left(\tau^2, h^2\right).$$

Если $\tau/h = c = \text{const}$, то

$$r_{\tau h} = -u_{xx} + u_t + c^2 u_{tt} + O\left(\tau^2, h^2\right).$$

Т. е. аппроксимируется уравнение

$$u_t + c^2 u_{tt} = u_{xx}.$$

9.9.

Решение.

$$\frac{1}{12}\frac{y_{m+1}^{n+1} - y_{m+1}^n}{\tau} + \frac{5}{6}\frac{y_m^{n+1} - y_m^n}{\tau}\frac{1}{12}\frac{y_{m-1}^{n+1} - y_{m-1}^n}{\tau} = \frac{1}{2}\frac{y_{m+1}^n - 2y_m^n + y_{m-1}^n}{h^2} + \frac{1}{2}\frac{y_{m+1}^{n+1} - 2y_m^{n+1} + y_{m-1}^{n+1}}{h^2}.$$

Разложим в окрестности точки (t_n, x_m):

$$r_{\tau h} = \frac{1}{12}\left(u_t + hu_{tx} + \frac{h^2}{2}u_{txx} + \frac{h^3}{6}u_{txxx} + O\left(h^4\right) + u_t - hu_{tx} + \right.$$
$$+ \frac{h^2}{2}u_{txx} - \frac{h^3}{6}u_{txxx} + O\left(h^4\right) + \frac{\tau}{2}\left(u_{tt} + \frac{h^2}{2}u_{ttxx}\cdot 2 + \frac{h^4}{12}u_{ttxxxx} + O\left(h^6\right)\right) +$$
$$\left. + \frac{\tau^2}{6}\left(u_{ttt} + h^2 u_{tttxx} + \frac{h^4}{12}u_{tttxxxx} + O\left(h^6\right)\right)\right) + \frac{5}{6}\left(u_t + \frac{\tau}{2}u_{tt} + \frac{\tau^2}{6}u_{ttt} + O\left(\tau^3\right)\right) -$$
$$- \frac{1}{2}\left[u_{xx} + \frac{h^2}{12}u_{xxxx} + O\left(h^4\right) + u_{xx} + \tau u_{xxt} + \right.$$
$$\left. + \frac{h^2}{12}\left(u_{xxxx} + \tau u_{xxxxt} + \frac{\tau^2}{2}u_{xxxxtt} + O\left(\tau^3\right)\right) + O\left(\tau^2\right) + O\left(h^4\right)\right] =$$
$$= u_t - u_{xx} + \frac{h^2}{12}\left(u_{txx} - u_{xxxx}\right) + \frac{1}{2}\tau\left(u_{tt} - u_{xxt}\right) + \frac{h^2\tau}{24}\left(u_{ttxx} - u_{xxxxt}\right) +$$
$$+ \tau^2\left(\frac{u_{ttt}}{6} - \frac{u_{xxtt}}{4}\right) + h^2\tau^2\left(\frac{u_{tttxx}}{72} - \frac{u_{xxxxtt}}{48}\right) + h^4\left(\frac{u_{txxxx}}{144} - \frac{u_{xxxxxx}}{360}\right).$$

$$u_t = u_{xx} \implies \begin{cases} u_{txx} = u_{xxxx} \\ u_{tt} = u_{xxt} \\ u_{ttxx} = u_{xxxxt} \end{cases}$$

Значит порядок аппроксимации: $O\left(\tau^2, h^4, h^2\tau^2\right)$.

Исследуем на устойчивость: $y_m^n = \lambda^n e^{im\varphi}$.

$$\frac{(\lambda - 1)\, e^{i\varphi}}{12\tau} + \frac{5\,(\lambda - 1)}{6\tau} + \frac{(\lambda - 1)e^{-i\varphi}}{12\tau} = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi} - 2}{2h^2} + \lambda\frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi} - 2}{2h^2}.$$

$$\lambda = \frac{5h^2 - 6\tau + \left(h^2 + 6\tau\right)\cos\varphi}{5h^2 + 6\tau + (h^2 - 6\tau)\cos\varphi)}.$$

$$\sigma = \frac{\tau}{h^2}.$$

$$\lambda = \frac{5 - 6\sigma + (1 + \sigma\cdot 6)\cos\varphi}{5 + 6\sigma + (1 - 6\sigma)\cos\varphi}.$$

$$\lambda = \frac{5 + \cos\varphi - 6\sigma\,(1 - \cos\varphi)}{5 + \cos\varphi + 6\sigma(1 - \cos\varphi)}.$$

$|\lambda| \leqslant 1$ при любых φ и σ (т. к. $(1 - \cos\varphi) \geqslant 0 \implies 6\sigma(1 - \cos\varphi) \geqslant 0$). Значит схема безусловно устойчива.

Тема XIV. Численные методы для уравнений в частных производных гиперболического типа

8.5.

Решение.

$$u_t + au_x = 0, \quad a \neq \text{const}.$$

Ищем дисперсионное соотношение для разностного уравнения в виде: $y_m^n = e^{\lambda(k)t_n}\cdot e^{ikx_m} = e^{\lambda n\tau + ikmh}$.

Подставим в схему «правый уголок» 1-го порядка аппроксимации:

$$\frac{1}{\tau}\left(e^{\lambda\tau}-1\right)+\frac{a}{h}\left(1-e^{-ikh}\right)=0.$$

Значит

$$\lambda\left(\tau,h,k\right)=\frac{1}{\tau}\ln\left(1-\frac{a\tau}{h}+\frac{a\tau}{h}e^{-ikh}\right).$$

При $a\tau/h=1$ $\lambda(k)=\lambda\left(\tau,h,k\right)$. Предположим, что $kh\ll 1$, h — малый параметр.

Аппроксимация тем лучше, чем меньше k. Следовательно

$$\lambda\left(\tau,h,k\right)\approx -iak-\frac{ahk^2}{2}\left(1-\frac{a\tau}{h}\right)=\lambda(k)-\frac{k^2}{2}ah(1-\sigma).$$

$\sigma=a\tau/h$ — число Куранта. Частное решение:

$$\exp\left(ik\left(mh-an\tau\right)\right)\exp\left(-\frac{1}{2}ak^2\left(n-a\tau\right)n\tau\right).$$

При $a<0$, $h-a\tau>0$ рассматриваемую схему нельзя использовать. Второй сомножитель имеет порядок $\exp\left(k^2|a|ht_n\right)$ — быстро растёт при $k\sim h^{-1}$, $h\ll 1$. Аналогично при $a>0$, $-a\tau<0$. При $a>0$, $h-a\tau>0$ численное решение отличается от точного наличием затухающего множителя для гармоник с большим k (малым λ). Значит наблюдаем сглаживание решений.

Для разностной схемы Л-В 2-го порядка аппроксимации:

$$\left(y_m^{n+1}-y_m^n\right)+\frac{\sigma}{2}\left(y_{m+1}^n-y_{m-1}^n\right)-\frac{\sigma^2}{2}\left(y_{m-1}^n-2y_m^n+y_{m+1}^n\right)=0.$$

Получаем

$$\lambda=\frac{1}{\tau}\ln\left(1-i\sigma\sin kh-2\sigma^2\sin^2\frac{kh}{2}\right)\overset{kh\ll 1}{=\!=\!=}-ika+ika\cdot\frac{k^2h^2}{6}\left(1-3\sigma^2\right).$$

Значит решения дифференциального уравнения переноса имеют вид волн:

$$u\left(t,x\right)=\exp\left(ikx+\lambda(k)t\right)=\exp\left(ik\left(x-at\right)\right).$$

Решения:

$$\begin{aligned}y\left(t_n,x_m\right)&=\exp\left(ikx_n+\lambda\left(\tau,h,k\right)t_n\right)=\\&=\exp\left[ik\left\{x_m-a\left[1-\frac{k^2h^2}{6}\left(1-3\sigma^2\right)\right]it_n\right\}\right]=\\&\overset{A_k=-\frac{k^2h^2\left(1-3\sigma^2\right)}{6}}{=\!=\!=\!=\!=\!=}\exp\left(ik\left\{x_m-a\left[1+A_k(k)\right]t_n\right\}\right).\end{aligned}$$

Следовательно каждая волна со своей частотой движется со скоростью $a_k=a(1+A_k)$, поэтому теряется монотонность профиля $u(x)$, появляется сеточная дисперсия.

9.1.

Доказательство.

$$u_t - u_x = 0.$$

$$u(t,x) = e^{i\alpha t} e^{i\alpha x}.$$

$$\frac{y_m^{p+1} - y_m^p}{\tau} - \frac{y_{m+1}^p - y_m^p}{h} = 0$$

— имеет решение $y_m^p = \left[1 - \sigma + \sigma e^{i\alpha h}\right]^p \cdot e^{i\alpha h m}$, $p = \frac{t}{\tau}$, $m = \frac{x}{h}$.

$$\sigma = \frac{\tau}{h} \implies \lambda = 1 - \frac{\tau}{h} + \frac{\tau}{h} e^{i\alpha h} = 1 - \frac{\tau}{h}\left(1 - e^{i\alpha h}\right) \sim$$

$$\sim 1 - \frac{\tau}{h}\left[1 - \left(1 + i\alpha h + \frac{i^2\alpha^2 h^2}{2} + \ldots\right)\right] \sim$$

$$\sim 1 - \frac{\tau}{h}\left(-i\alpha h - \frac{\alpha^2 h^2}{2}\right) \sim 1 + i\alpha\tau + \frac{\alpha^2 h}{2} + \ldots \to 1 + i\alpha\tau \ (h \to +0).$$

$$(1 + i\alpha\tau)\,\frac{t}{\tau} = \left(\left(1 + i\alpha\frac{1}{1/\tau}\right)^{\frac{1}{\tau}}\right) t \xrightarrow[\tau\to 0]{1/\tau\to\infty} e^{i\alpha t}.$$

Значит на самом деле решение разностной схемы стремится к решению дифференциальной задачи при $h \to 0$, если дополнительно $\tau \to 0$, т. е. $\tau = O\left(h^n\right)$, $n \geqslant 1$. Наибольший интерес представляет случай $n = 1 \Leftrightarrow \tau = ch$, где c задаёт наклон характеристик: $c = 1/a$, где a — коэффициент при u_x в дифференциальном уравнении. Поэтому $c = -1$, $\sigma = -1 = c\tau/h$, таким образом случай $\sigma > 1$ не реализуется. □

9.5.

Решение. Отрицательная схемная вязкость:

$$\gamma = \frac{ch}{2}\left(1 - \frac{c\tau}{h}\right) < 0 \implies \frac{c\tau}{h} > 1.$$

$$r_{\tau h} = Lu - \frac{ch}{2}\left(1 - \frac{c\tau}{h}\right) u_{xx} + O\left(\tau^2, h^2\right).$$

Следовательно если $\gamma < 0$, то задача Коши ставится некорректно, а разностная схема *неустойчива* (Аристова, стр. 182).

Т. к. у всех схем 1-го порядка есть схемная вязкость, то точно есть порядок аппроксимации $O(\tau, h)$, но т. к. устойчивости нет, то *сходимости нет.*

$$c\frac{\tau}{h} > 1.$$

Решим для схемы «явный левый уголок», т. к. у неё отрицательный коэффициент вязкости:

$$\frac{y_m^{n+1} - y_m^n}{\tau} + c\frac{y_m^n - y_{m-1}^n}{h} = 0.$$

$$y_m^{n+1} = -\frac{c\tau}{h}\left(y_m^n - y_{m-1}^n\right) + y_m^n.$$

$$y_{m+1}^{n+1} = -\frac{c\tau}{h}\left(y_{m+1}^n - y_m^n\right) + y_{m+1}^n.$$

Пусть $\left(y_{m+1}^n - y_m^n\right) > 0$, тогда

$$y_{m+1}^{n+1} - y_m^{n+1} = -\frac{c\tau}{h}\left[y_{m+1}^n - \left(y_m^n - y_{m-1}^n\right)\right] + y_{m+1}^n - y_m^n =$$
$$= \frac{c\tau}{h}\left(y_m^n - y_{m-1}^n\right) - \left(\frac{c\tau}{h} - 1\right)\left(y_{m+1}^n - y_m^n\right) > 0.$$
$$\frac{c\tau}{h}\left(y_m^n - y_{m-1}^n\right) > \left(\frac{c\tau}{h} - 1\right)\left(y_{m+1}^n - y_m^n\right) > 0.$$

Следовательно *монотонность* есть при условии:

$$\left(y_m^n - y_{m-1}^n\right) > \frac{\left(\frac{c\tau}{h} - 1\right)}{c\tau/h}\left(y_{m+1}^n - y_m^n\right)$$

и нет в общем случае.

Тема XV. Численные методы для уравнений в частных производных эллиптического типа

5.1.

Решение. Ознакомился.

7.1.

Решение. В уравнении Лапласа нет выделенных пространствеенных направлений, значит веса зависят только от расстояния от центра шаблона. Поэтому схему можно представить в виде

$$u_{m,l} = \alpha\left(u_{m-1,l} + u_{m+1,l}\right) + \beta\left(u_{m,l-1} + u_{m,l+1}\right) +$$
$$+ \gamma\left(u_{m-1,l+1} + u_{m-1,l-1} + u_{m+1,l+1} + u_{m+1,l-1}\right).$$

Разложим всё по Тейлору в окрестности $u_{m,l}$ и приравняем коэффициенты при соответствующих степенях h_i: В силу уравнения Лапласа: $\alpha h_x^2 = \beta h_y^2$.

h^0	$1 = 2\alpha + 2\beta + 4\gamma$	h_x^4	$\frac{\alpha}{12}u_{xxxx}$
h_x^2	αu_{xx}	h_y^4	$\frac{\beta}{12}u_{yyyy}$
h_y^2	βu_{yy}	$h_x^2 h_y^2$	γu_{xxyy}

Таблица 1

$$0 = \left(u_{xx} + u_{yy}\right)_{xx} = u_{xxxx} + u_{xxyy}.$$
$$0 = u_{yyyy} + u_{xxyy}.$$
$$u_{xxyy} = -\frac{1}{2}\left(u_{xxxx} + u_{yyyy}\right).$$

$$h_x^4 \cdot \frac{\alpha}{12}u_{xxxx} + h_y^4\frac{\beta}{12}u_{yyyy} + h_x^2 h_y^2\frac{\gamma}{6}u_{xxyy} =$$
$$= h_x^4\frac{\alpha}{12}u_{xxxx} + h_y^4\frac{\beta}{12}u_{yyyy} - \frac{\gamma}{2}h_x^2 h_y^2\left(u_{xxxx} + u_{yyyy}\right) =$$
$$= \frac{h_x^2}{12}\left(\alpha h_x^2 - 6\gamma h_y^2\right)u_{xxxx} + \frac{h_y^2}{12}\left(\beta h_y^2 - 6\gamma h_x^2\right)u_{yyyy}.$$

- при $h_x \neq h_y$ порядок $O\left(h_x^2, h_y^2\right)$
- при $h_x = h_y = h$ коэффициенты определяются системой

$$\begin{cases} 2\alpha + 2\beta + 4\gamma = 1 \\ \alpha = \beta \\ \alpha = 6\gamma \end{cases}$$

  Порядок $O\left(h^4\right)$.