# Домашняя работа по квантовой механике

Драчов Ярослав
Факультет общей и прикладной физики МФТИ

9 апреля 2021 г.

## Первое задание

**1.** Вычислите интеграл по траекториям:

$$Z[\mathbf{J}(\cdot)] = \int\limits_{\mathbf{z}(0)=\mathbf{y},\ \mathbf{z}(t)=\mathbf{x}} \mathcal{D}\mathbf{z}(\tau) e^{i\int\limits_0^t d\tau \left[\frac{m\dot{\mathbf{z}}^2(\tau)}{2} + \mathbf{J}(\tau)\mathbf{z}(\tau)\right]}.$$

*Решение.* Разложим переменную интегрирования следующим образом:

$$\mathbf{z}(\tau) = \mathbf{z}_{cl}(\tau) + \mathbf{q}(\tau),$$

где

$$\mathbf{z}_{cl}(0) = \mathbf{y},\, \mathbf{z}_{cl}(t) = \mathbf{x}, \quad \mathbf{q}(0) = 0,\, \mathbf{q}(t) = 0.$$

Т. к.

$$\mathcal{L} = \frac{m\dot{\mathbf{z}}_{cl}^2}{2} + \mathbf{J}(\tau)\mathbf{z}_{cl},$$

то

$$m\ddot{\mathbf{z}}_{cl} = \mathbf{J}(\tau)$$

и

$$S_{cl} = \int\limits_0^t d\tau \left(\frac{m}{2}\dot{\mathbf{z}}_{cl}^2 + \mathbf{J}(\tau)\mathbf{z}_{cl}\right).$$

Тогда

$$S = S_{cl} + \int\limits_0^t d\tau \left[m\dot{\mathbf{z}}_{cl}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{J}(\tau)\mathbf{q}\right] + \int\limits_0^t d\tau \frac{m\dot{\mathbf{q}}^2}{2}.$$

$$\int\limits_0^t d\tau \left[m\dot{\mathbf{z}}_{cl}\dot{\mathbf{q}}\right] = m\dot{\mathbf{z}}_{cl}\mathbf{q}\big|_0^t - \int\limits_0^t d\tau \ddot{\mathbf{z}}_{cl}\mathbf{q}m = -\int\limits_0^t d\tau \ddot{\mathbf{z}}_{cl}\mathbf{q}m.$$

$$\int\limits_0^t d\tau \left[m\dot{\mathbf{z}}_{cl}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{J}\mathbf{q}\right] = \int\limits_0^t d\tau \left[\mathbf{J}(\tau)\mathbf{q} - \ddot{\mathbf{z}}_{cl}\mathbf{q}m\right] = \int\limits_0^t d\tau \mathbf{q} \underbrace{\left[-m\ddot{\mathbf{z}}_{cl} + \mathbf{J}(\tau)\right]}_{=0} = 0.$$

Следовательно

$$S = S_{cl} + \int\limits_0^t d\tau \frac{m\dot{\mathbf{q}}^2}{2}.$$

Значит

$$Z=\exp\left(i\frac{S_{cl}(t,\mathbf{x},\mathbf{y})}{\hbar}\right)\underbrace{\int\limits_{\mathbf{q}(0)=\mathbf{0},\ \mathbf{q}(t)=\mathbf{0}}\mathcal{D}\mathbf{q}(\tau)\exp\left(\frac{i}{\hbar}\int\limits_0^t d\tau\frac{m\dot{\mathbf{q}}^2}{2}\right)}_{K(t|\mathbf{0},\mathbf{0})}.$$

$$K(t|\mathbf{x},\mathbf{y})=\langle\mathbf{x}|\,e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m}t}\,|\mathbf{y}\rangle=\langle\mathbf{x}|\,e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m}t}\int\limits_{\mathbb{R}^3}d^3\mathbf{p}\,|\mathbf{p}\rangle\,\langle\mathbf{p}|\mathbf{y}\rangle=$$

$$=\int\limits_{\mathbb{R}^3}d^3\mathbf{p}e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{\mathbf{p}^2}{2m}t}\frac{1}{(2\pi\hbar)^3}e^{-\frac{i\mathbf{p}(\mathbf{x}-\mathbf{y})}{\hbar}}.$$

$$K(t|\mathbf{0},\mathbf{0})=\int\limits_{\mathbb{R}^3}d^3\mathbf{p}e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{\mathbf{p}^2}{2m}t}\frac{1}{(2\pi\hbar)^3}=\frac{1}{(2\pi\hbar)^3}\sqrt{\frac{\pi^3}{i\left(\frac{t}{2m\hbar}\right)^3}}=\left(\sqrt{\frac{m}{2\pi\hbar ti}}\right)^3.$$

**2.** Волновая функция гармонического осциллятора с массой $m$ и частотой $\omega$ в начальный момент времени имеет вид:

$$\Psi(x,t=0)=Ce^{-\frac{m\omega}{2\hbar}(x-x_0)^2},$$

где $C$ и $x_0$ — некоторые константы. Используя ядро оператора эволюции для осциллятора, найдите вид волновой функции в произвольный момент времени.

*Решение.*

$$\Psi(t,x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}dyK_\omega(t|x,y)\Psi(y|t=0).$$

Ядро оператора эволюции для осциллятора:

$$K_\omega(t|x,y)=\sqrt{\frac{m\omega}{2\pi i\hbar\sin\omega t}}\exp\left(\frac{i}{\hbar}S_{cl}(t,x,y)\right).$$

$$S_{cl}(t,x,y)=\frac{m\omega}{2\sin\omega t}\left[(x^2+y^2)\cos\omega t-2xy\right].$$

$$\Psi(x,t=0)=Ce^{-\frac{m\omega}{2\hbar}(x-x_0)^2}.$$

$$\Psi(t|x)=C\sqrt{\frac{m\omega}{2\pi i\hbar\sin\omega t}}\int\exp\left[\frac{i}{\hbar}\left(\frac{m\omega}{2\sin}\left\{(x^2+y^2)\cos\omega t-2xy\right\}\right)-\frac{m\omega}{2\hbar}(y-x_0)^2\right]dy=$$

$$=C\sqrt{\frac{m\omega}{2\pi i\hbar\sin\omega t}}\int\exp\left[\left(\frac{im\omega\cos\omega t}{2\hbar\sin\omega t}-\frac{m\omega}{2\hbar}\right)y^2-\frac{im\omega}{\hbar\sin\omega t}xy+\frac{m\omega}{\hbar}x_0y+\frac{im\omega\cos\omega t}{2\hbar\sin\omega t}x^2-\frac{m\omega}{2\hbar}x_0^2\right]dy=$$

$$=C\sqrt{\frac{m\omega}{2\pi i\hbar\sin\omega t}}\exp\left[\frac{im\omega}{2\hbar}\operatorname{ctg}\omega t\cdot x^2-\frac{m\omega}{2\hbar}x_0^2\right]\cdot\int\exp\left[\left(\frac{im\omega\cos\omega t}{2\hbar\sin\omega t}-\frac{m\omega}{2\hbar}\right)\right].$$