0em

Домашнее задание №1

Драчов Ярослав
Факультет общей и прикладной физики МФТИ

17 декабря 2020 г.

Задача 1

Решение. Гомотопическая эквивалетность — это *пара* непрерывных отображений $f : X \to Y$ и $g : Y \to X \dots$

Как понимать утверждение «$f : X \to Y$ — это гомотопическая эквивалентность»?

$f \circ g : Y \to Y$ — гомотопическая эквивалентность $\Leftrightarrow \exists \gamma : Y \to Y : \gamma \circ f \circ g \simeq \mathrm{id}_Y$ и $f \circ g \circ \gamma \simeq \mathrm{id}_Y$

$h \circ f : X \to X$ — гомотопическая эквивалентность $\Leftrightarrow \exists \rho : X \to X : \rho \circ h \circ f \simeq \mathrm{id}_X$ и $h \circ f \circ \rho \simeq \mathrm{id}_X$

$f \circ g \simeq h \circ f$

Требуется доказать, что $f : X \to Y$ — гомотопическая эквивалентность, т. е. $\exists \varphi : Y \to X : \varphi \circ f \simeq \mathrm{id}_X$ и $f \circ \varphi \simeq \mathrm{id}_Y$

$$\varphi \circ h \circ f \simeq \varphi \circ f \circ g \simeq g.$$

$$h \circ f \circ \varphi \simeq h.$$

Задача 2

Решение. Пусть $F(x, y) = \frac{xy^2}{x^2+y^4}$, тогда $f_{1,\,x_0}(y) = \frac{x_0 y^2}{x_0^2+y^4}$ — непрерывна $\forall x_0 \in \mathbb{R}$, $f_{2,\,y_0}(x) = \frac{xy_0^2}{x^2+y_0^4}$ — непрерывна $\forall y_0 \in \mathbb{R}$, однако при $x = y^2$ справедливо равенство $F(x, y) = \frac{y^4}{2y^4} = \frac{1}{2}$, а при $x = 0$, $y \neq 0$ — равенство $F(x, y) = 0$, следовательно $F(x, y)$ — не непрерывна.

Задача 3

Решение. Будем задавать координаты на торе $\mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1$ углами α и β, а на сфере S^2 — комплексным числом $z = x+iy$ (стереографическая проекция S^2 на $\overline{\mathbb{C}}$). Тогда отображение $f(\alpha, \beta) = \operatorname{tg} \alpha + i \operatorname{tg} \beta$ будет гомотопически нетривиальным.

Задача 4

Решение. См. рис. 1.

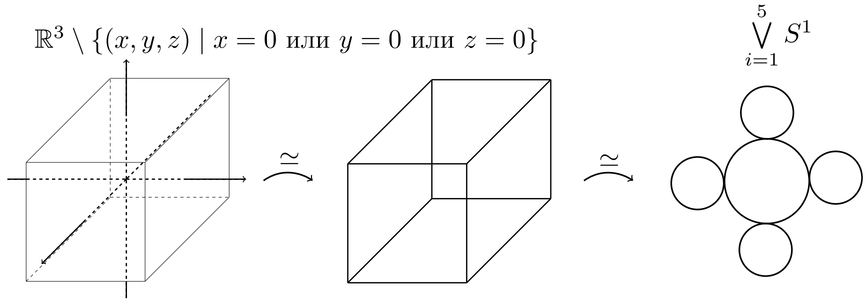

Рис. 1

Задача 5

Доказательство. $\pi_1(X \vee Y)$ представляет из себя группу классов эквивалентности путей, построенных на $X \vee Y$. Каждый путь на $X \vee Y$ представим в виде последовательного произведения (в смысле путей) отдельных его частей на X и на Y. Соответственно класс эквивалентности от такого произведения будет представим в виде последовательного произведения классов эквивалентности частей данного пути на X и Y, т. е. будет являться словом, составленным из алфавитов $\pi_1(X)$ и $\pi_1(Y)$, следовательно $\pi_1(X \vee Y) = \pi_1(x) * \pi_1(Y)$. □

Задача 6

Доказательство. Рассмотрим две петли $\alpha, \beta : [0, 1] \to G$ в $\pi_1(G)$, определим отображение $A : [0, 1] \times [0, 1] \to G$ правилом $A(s, t) = \alpha(s) \cdot \beta(t)$, где умножение происходит в смысле G. Рассмотрим гомотопическое семейство путей в прямоугольнике от $(s, t) = (0,0)$ до $(1, 1)$, которое начинается с горизонтального-затем-вертикального пути, двигается дальше через диагональные пути и заканчивается на вертикальном-затем-горизонтальном пути. Применяя к этому семейству A, получим гомотопию $\alpha{*}\beta \simeq \beta{*}\alpha$, которая показывает, что фундаментальная группа — абелева. □