

# Домашнее задание по интегрируемым иерархиям

Драчов Ярослав  
Факультет общей и прикладной физики МФТИ

15 апреля 2021 г.

## Упражнение 1.0.

Решение.

$$l_i = \varepsilon_{ijk} r_j p_k.$$

$$\begin{aligned} \{l_i, l_j\} &= \sum_{k=1}^3 \frac{\partial l_j}{\partial p_k} \frac{\partial l_i}{\partial r_k} - \frac{\partial l_i}{\partial p_k} \frac{\partial l_j}{\partial r_k} = \varepsilon_{jpl} r_p \delta_{lk} \varepsilon_{imn} \delta_{mk} p_n - \varepsilon_{imn} r_m \delta_{kn} \varepsilon_{jpl} \delta_{pk} p_l = \\ &= \varepsilon_{jpk} r_p \varepsilon_{ikm} p_m - \varepsilon_{imk} r_m \varepsilon_{jkl} p_l = (\delta_{jm} \delta_{pi} - \delta_{ji} \delta_{pm}) r_p p_m - (\delta_{il} \delta_{mj} - \delta_{ij} \delta_{lm}) r_m p_l = \\ &= r_i p_j - \delta_{ij} r_m p_m - r_j p_i + \delta_{ij} r_m p_m = r_i p_j - r_j p_i. \end{aligned}$$

С другой стороны

$$\varepsilon_{ijk} l_k = \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{klm} r_l p_m = (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) r_l p_m = r_i p_j - r_j p_i.$$

Откуда следует, что

$$\{l_i, l_j\} = \varepsilon_{ijk} l_k.$$

Далее

$$\begin{aligned} A_i &= \varepsilon_{ijk} l_j p_k + \frac{\alpha}{r} r_i = \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{jmn} r_m p_n p_k + \frac{\alpha}{r} r_i = (\delta_{km} \delta_{in} - \delta_{kn} \delta_{im}) r_m p_n p_k + \frac{\alpha}{r} r_i = \\ &= (\mathbf{r}, \mathbf{p}) p_i + \left( \frac{\alpha}{r} - \mathbf{p}^2 \right) r_i. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \{l_i, A_j\} &= \sum_{k=1}^3 \frac{\partial l_i}{\partial r_k} \frac{\partial A_j}{\partial p_k} - \frac{\partial A_j}{\partial r_k} \frac{\partial l_i}{\partial p_k} = \\ &= \varepsilon_{imn} \delta_{nk} p_m (r_k p_j + (\mathbf{r}, \mathbf{p}) \delta_{jk} - 2 p_k r_j) - \left( p_k p_j - \frac{\alpha r_k}{r^3} r_j + \left( \frac{\alpha}{r} - \mathbf{p}^2 \right) \delta_{jk} \right) \varepsilon_{imn} r_n \delta_{mk} = \\ &= \varepsilon_{ikm} p_m (r_k p_j + (\mathbf{r}, \mathbf{p}) \delta_{jk}) - \left( p_k p_j + \left( \frac{\alpha}{r} - \mathbf{p}^2 \right) \delta_{jk} \right) \varepsilon_{ink} r_n = \\ &= \varepsilon_{ijm} \left( (\mathbf{r}, \mathbf{p}) p_m + \left( \frac{\alpha}{r} + \mathbf{p}^2 \right) r_m \right) = \varepsilon_{ijk} A_k. \end{aligned}$$

А также

$$\begin{aligned}
\{A_i, A_j\} &= \sum_{k=1}^3 \frac{\partial A_i}{\partial r_k} \frac{\partial A_j}{\partial p_k} - \frac{\partial A_j}{\partial r_k} \frac{\partial A_i}{\partial p_k} = \\
&= \left( p_k p_i - \frac{\alpha r_k}{r^3} r_i + \left( \frac{\alpha}{r} - \mathbf{p}^2 \right) \delta_{ik} \right) (r_k p_j + (\mathbf{r}, \mathbf{p}) \delta_{jk} - 2 p_k r_j) - \\
&- \left( p_k p_j - \frac{\alpha r_k}{r^3} r_j + \left( \frac{\alpha}{r} - \mathbf{p}^2 \right) \delta_{jk} \right) (r_k p_i + (\mathbf{r}, \mathbf{p}) \delta_{ik} - 2 p_k r_i) = \\
&= 2(\mathbf{r}, \mathbf{p}) p_i p_j - 2 \mathbf{p}^2 p_i r_j - \frac{\alpha}{r} r_i p_j + \frac{\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{p})}{r^3} r_i r_j + \\
&+ \left( \frac{\alpha}{r} - \mathbf{p}^2 \right) r_i p_j + \left( \frac{\alpha}{r} - \mathbf{p}^2 \right) \delta_{ij} - 2 \left( \frac{\alpha}{r} - \mathbf{p}^2 \right) p_i r_j - \\
&- 2(\mathbf{r}, \mathbf{p}) p_i p_j + 2 \mathbf{p}^2 p_j r_i + \frac{\alpha}{r} r_j p_i - \frac{\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{p})}{r^3} r_i r_j - \\
&- \left( \frac{\alpha}{r} - \mathbf{p}^2 \right) r_j p_i - \left( \frac{\alpha}{r} - \mathbf{p}^2 \right) \delta_{ij} + 2 \left( \frac{\alpha}{r} - \mathbf{p}^2 \right) p_j r_i = \\
&- 2 \mathbf{p}^2 p_i r_j - \frac{\alpha}{r} r_i p_j + \left( \frac{\alpha}{r} - \mathbf{p}^2 \right) r_i p_j - 2 \left( \frac{\alpha}{r} - \mathbf{p}^2 \right) p_i r_j + \\
&+ 2 \mathbf{p}^2 p_j r_i + \frac{\alpha}{r} r_j p_i - \left( \frac{\alpha}{r} - \mathbf{p}^2 \right) r_j p_i + 2 \left( \frac{\alpha}{r} - \mathbf{p}^2 \right) p_j r_i = \\
&\left( 2 \mathbf{p}^2 - \frac{\alpha}{r} + \left( \frac{\alpha}{r} - \mathbf{p}^2 \right) + 2 \left( \frac{\alpha}{r} - \mathbf{p}^2 \right) \right) (r_i p_j - r_j p_i) = \\
&= - \left( \mathbf{p}^2 - 2 \frac{\alpha}{r} \right) (r_i p_j - r_j p_i) = -2 E \varepsilon_{ijk} l_k.
\end{aligned}$$

### Упражнение 1.2.

Решение.

$$H_3 = \frac{1}{3} \sum_{i,j,k} L_{ij} L_{jk} L_{ki} = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^N L_{ii}^3 + \frac{1}{3} \sum_{j=k \neq i} L_{ij} L_{jk} L_{ki} + \frac{1}{3} \sum_{\substack{i \neq j, j \neq k, \\ k \neq i}} L_{ij} L_{jk} L_{ki}.$$

$$\sum_{\substack{i \neq j, j \neq k, \\ k \neq i}} L_{ij} L_{jk} L_{ki} = \sum_{\substack{i > j, j \neq k, \\ k \neq i}} L_{ij} L_{jk} L_{ki} + \sum_{\substack{i < j, j \neq k, \\ k \neq i}} L_{ij} L_{jk} L_{ki}.$$

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{i < j, j \neq k, \\ k \neq i}} L_{ij} L_{jk} L_{ki} &= - \sum_{\substack{i < j, j \neq k, \\ k \neq i}} L_{ji} L_{kj} L_{ik} = \\
&= - \sum_{\substack{j < i, i \neq k, \\ k \neq j}} L_{ij} L_{ki} L_{jk} = - \sum_{\substack{i > j, j \neq k, \\ k \neq i}} L_{ij} L_{jk} L_{ki}.
\end{aligned}$$

Следовательно

$$\sum_{\substack{i \neq j, j \neq k, \\ k \neq i}} L_{ij} L_{jk} L_{ki} = 0.$$

И

$$H_3 = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^N L_{ii}^3 + \frac{1}{3} \sum_{j=k \neq i} L_{ij} L_{jk} L_{ki} = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^N p_i^3 - \nu^2 \sum_{k \neq i} \frac{p_i}{(q_i - q_k)^2}.$$

### Упражнение 1.3.

Решение. Уравнения движения:

$$\begin{aligned} -\dot{p}_k &= \frac{\partial H}{\partial q_k} = 2\nu^2 \sum_{i < j} \frac{\delta_{ik} - \delta_{jk}}{(q_i - q_j)^3} = 2\nu^2 \left( \sum_{k < j} \frac{1}{(q_k - q_j)^3} - \sum_{i < k} \frac{1}{(q_i - q_k)^3} \right) = \\ &= 2\nu^2 \sum_{k \neq i} \frac{1}{(q_k - q_i)^3}, \end{aligned}$$

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k} = p_k.$$

По определению

$$M_{ij} = \delta_{ij} d_i - (1 - \delta_{ij}) \frac{\nu}{(q_i - q_j)^2}.$$

Уравнение Лакса:

$$\begin{aligned} \delta_{ij} \dot{p}_i + (\delta_{ij} - 1) \frac{\nu (\dot{q}_i - \dot{q}_j)}{(q_i - q_j)^2} &= \\ &= \sum_{k=1}^N \left[ \left( \delta_{ik} p_i + (1 - \delta_{ik}) \frac{\nu}{q_i - q_k} \right) \left( \delta_{kj} d_k - (1 - \delta_{kj}) \frac{\nu}{(q_k - q_j)^2} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \left( \delta_{ik} d_i - (1 - \delta_{ik}) \frac{\nu}{(q_i - q_k)^2} \right) \left( \delta_{kj} p_k + (1 - \delta_{kj}) \frac{\nu}{q_k - q_j} \right) \right] = \\ &= \delta_{ij} p_i d_i - p_i (1 - \delta_{ij}) \frac{\nu}{(q_i - q_j)^2} + d_j (1 - \delta_{ij}) \frac{\nu}{q_i - q_j} - \nu^2 \sum_{k \neq i, k \neq j} \frac{1}{(q_i - q_k)(q_k - q_j)^2} - \\ &\quad - \delta_{ij} d_i p_i - d_i (1 - \delta_{ij}) \frac{\nu}{q_i - q_j} + p_j (1 - \delta_{ij}) \frac{\nu}{(q_i - q_j)^2} + \nu^2 \sum_{k \neq i, k \neq j} \frac{1}{(q_i - q_k)^2 (q_k - q_j)} = \\ &= (\delta_{ij} - 1) \left( (p_i - p_j) \frac{\nu}{(q_i - q_j)^2} + \frac{\nu^2}{q_i - q_j} \left( \sum_{k \neq i} \frac{1}{(q_i - q_k)^2} - \sum_{k \neq j} \frac{1}{(q_j - q_k)^2} \right) \right) - \\ &\quad - \nu^2 \sum_{k \neq i, k \neq j} \frac{q_i + q_j - 2q_k}{(q_i - q_k)^2 (q_k - q_j)^2}. \end{aligned}$$

Из последнего уравнения получаем

$$\dot{p}_i = 2\nu^2 \sum_{k \neq i} \frac{1}{(q_k - q_i)^3}.$$

Учтя, что

$$\begin{aligned} \sum_{k \neq i} \frac{1}{(q_i - q_k)^2} - \sum_{k \neq j} \frac{1}{(q_j - q_k)^2} &= \frac{1}{(q_i - q_j)^2} - \frac{1}{(q_j - q_i)^2} + \\ &+ \sum_{k \neq i, k \neq j} \frac{(q_j - q_i)(q_i + q_j - 2q_k)}{(q_i - q_k)^2 (q_j - q_k)^2} = \sum_{k \neq i, k \neq j} \frac{(q_j - q_i)(q_i + q_j - 2q_k)}{(q_i - q_k)^2 (q_j - q_k)^2}, \end{aligned}$$

также получаем, что

$$\dot{q}_k = p_k.$$