

# Квантовая макрофизика.

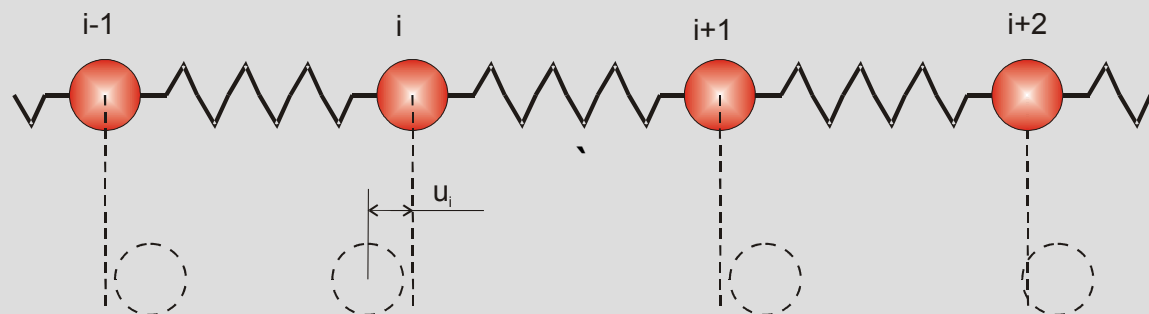
## Лекция 2. Теплоёмкость твёрдых тел.

### Квантование колебаний решётки.

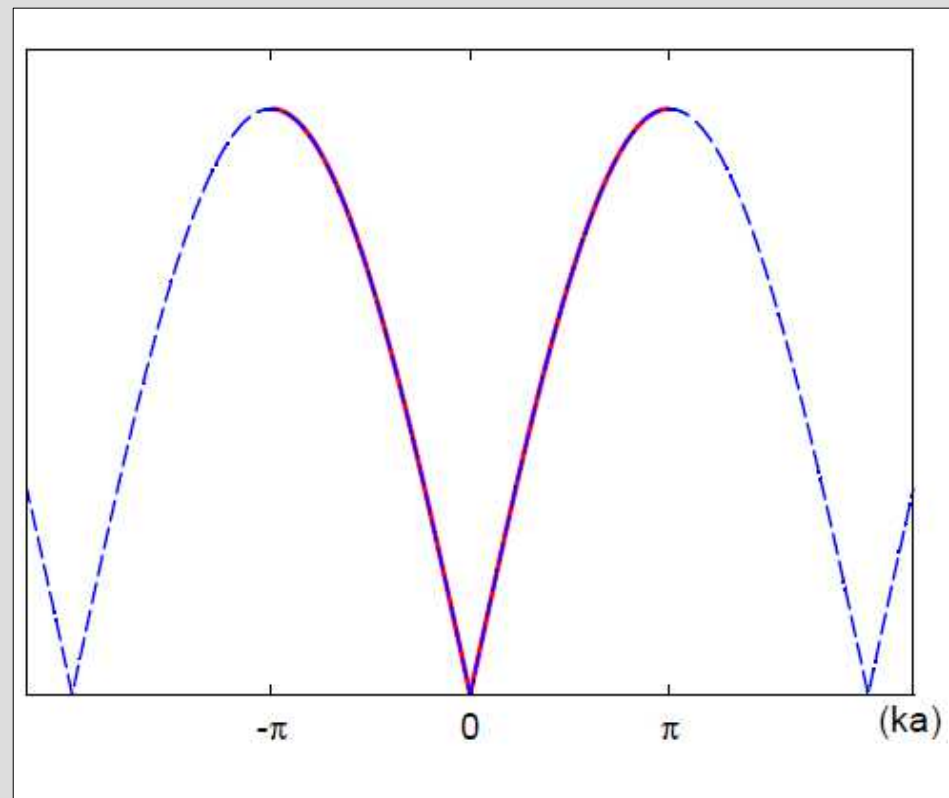
### Фононы.

# Часть 1: Спектр упругих волн в кристалле

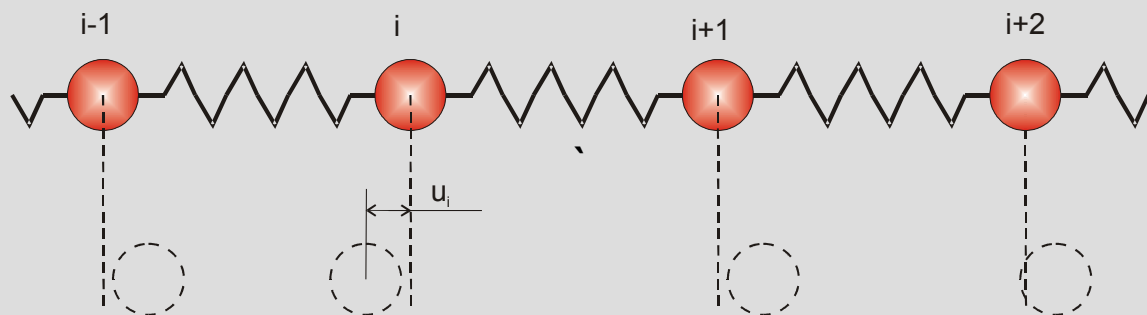
# Напоминание: Продольные колебания в однородной цепочке



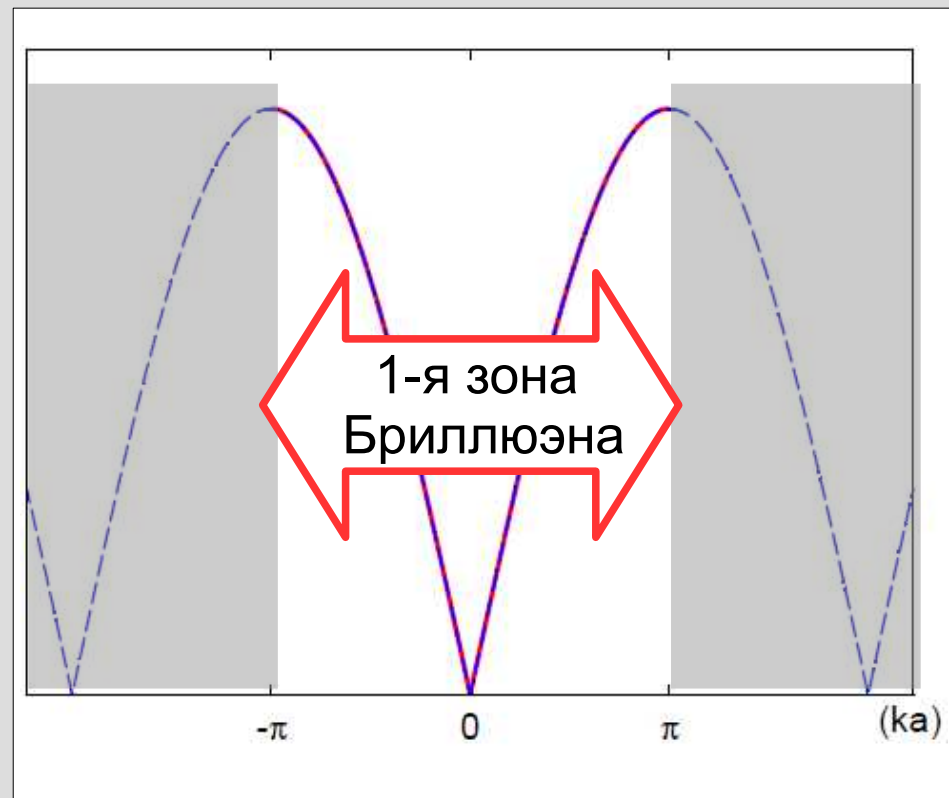
$$\omega = \sqrt{\frac{4C}{M}} \left| \sin\left(\frac{k a}{2}\right) \right| = \frac{2s}{a} \left| \sin\left(\frac{k a}{2}\right) \right|$$



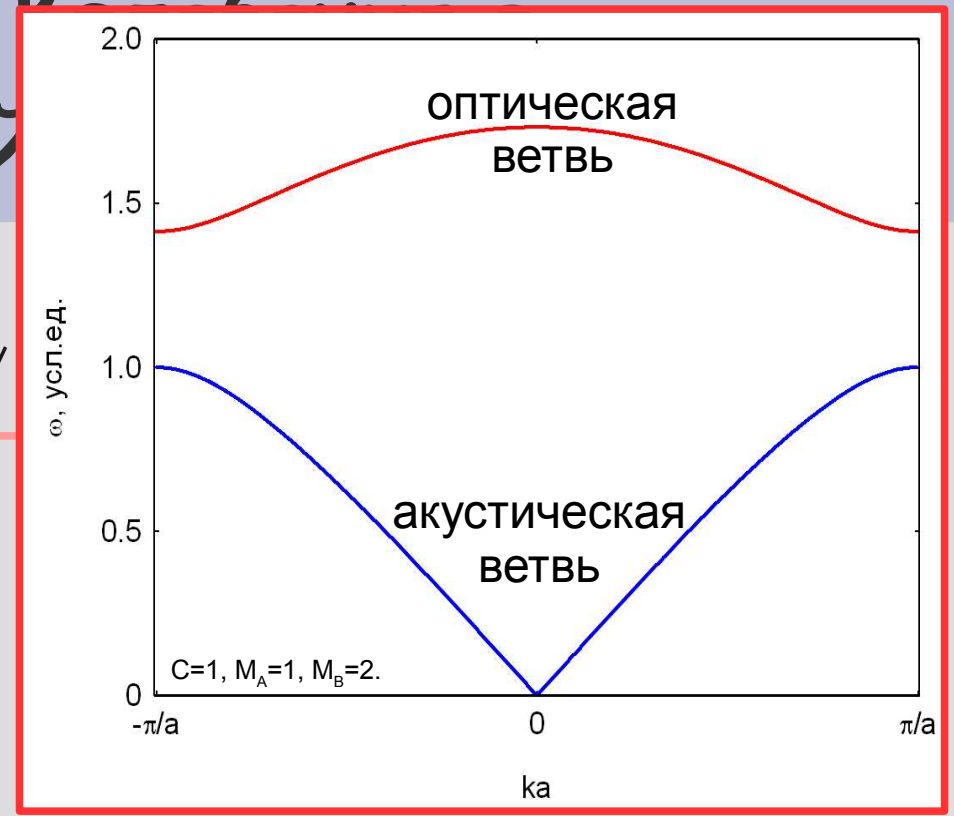
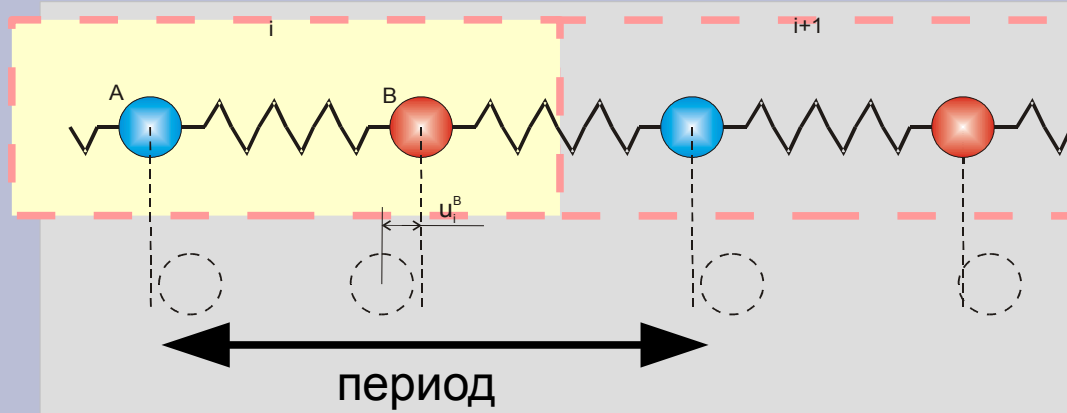
# Напоминание: Продольные колебания в однородной цепочке



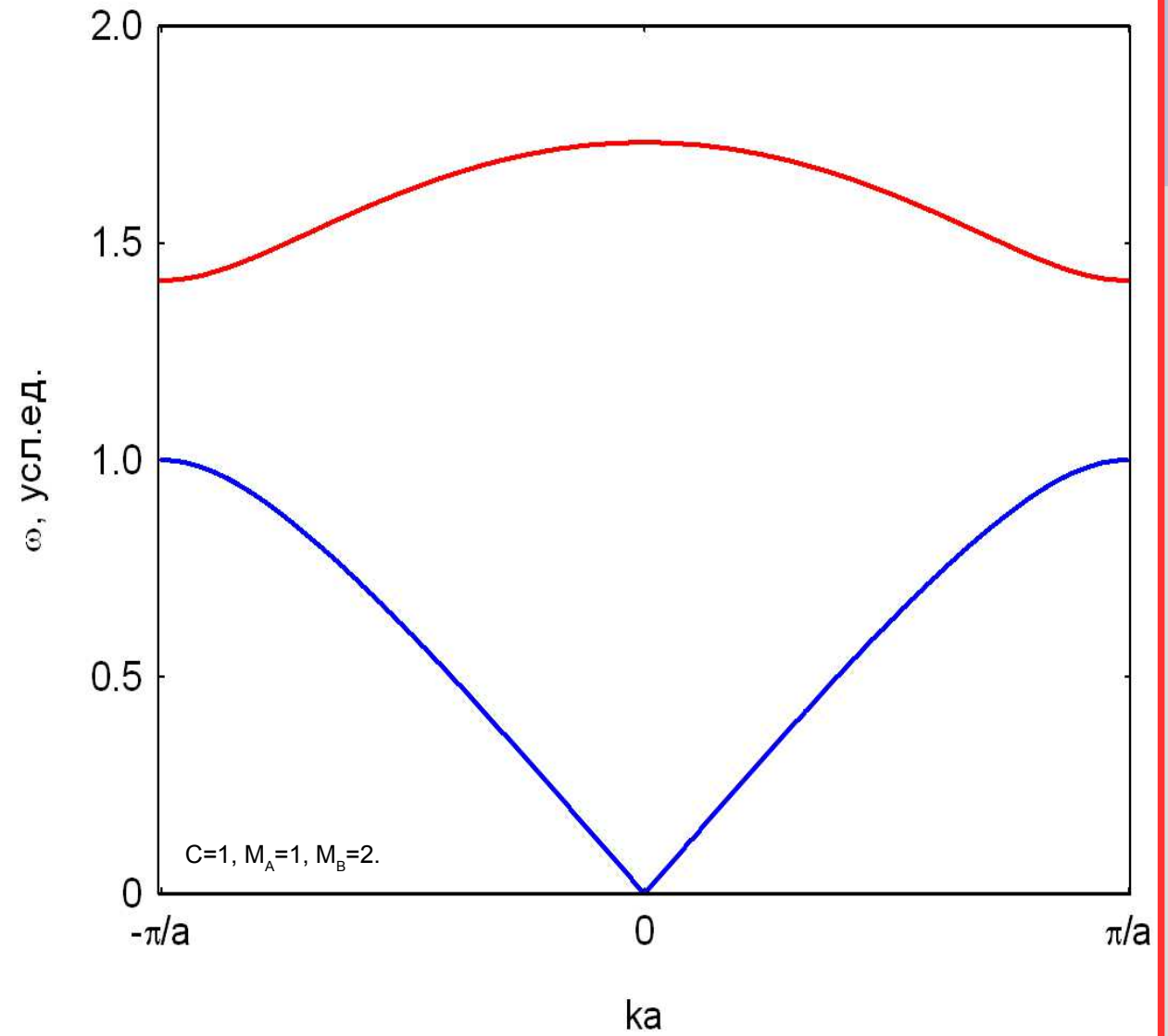
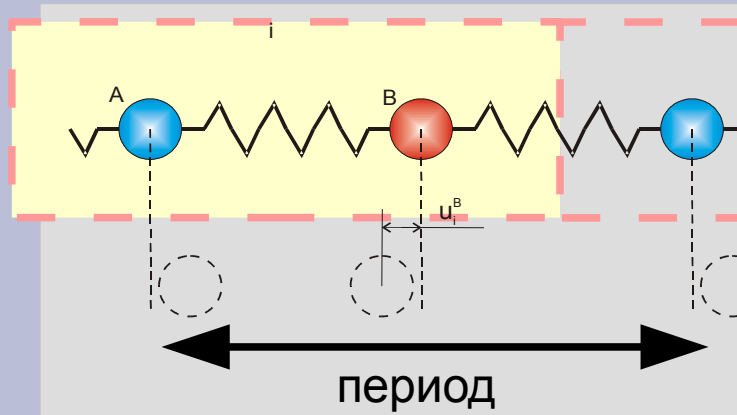
$$\omega = \sqrt{\frac{4C}{M}} \left| \sin\left(\frac{k a}{2}\right) \right| = \frac{2s}{a} \left| \sin\left(\frac{k a}{2}\right) \right|$$



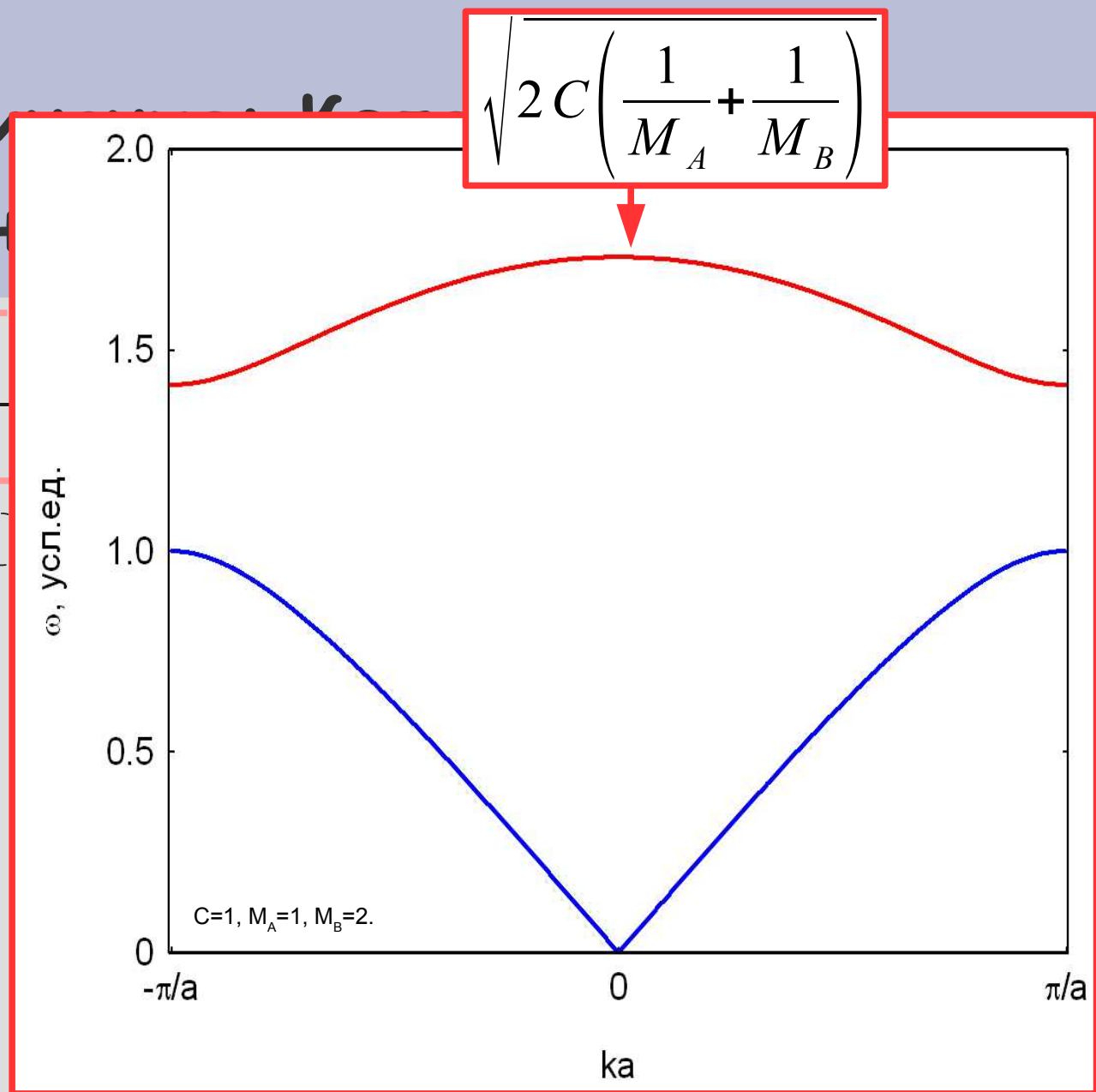
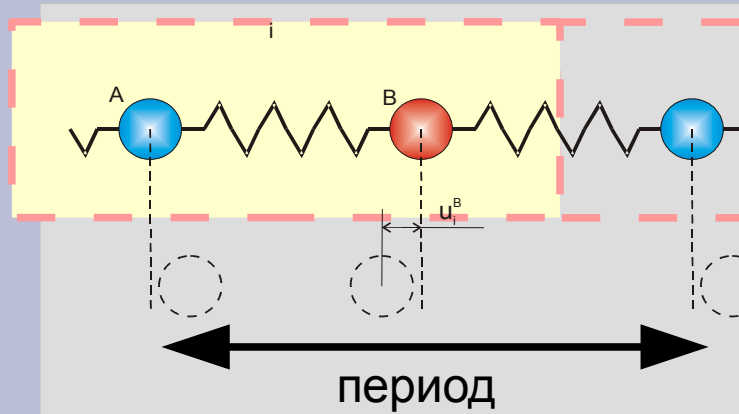
# Напоминание: Квантовая механика неоднородной цепи



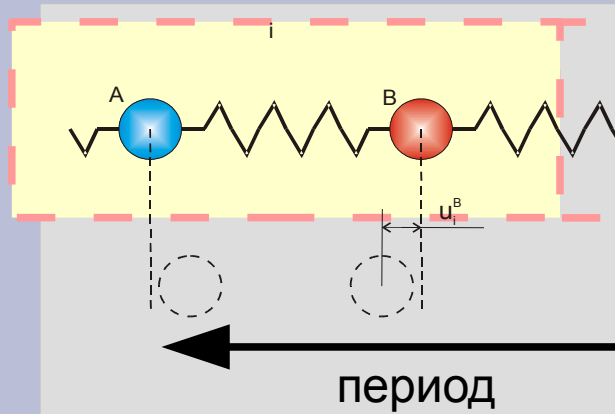
# Напоминание о Кривой Брэгга неоднородности



Напоминание  
неодн



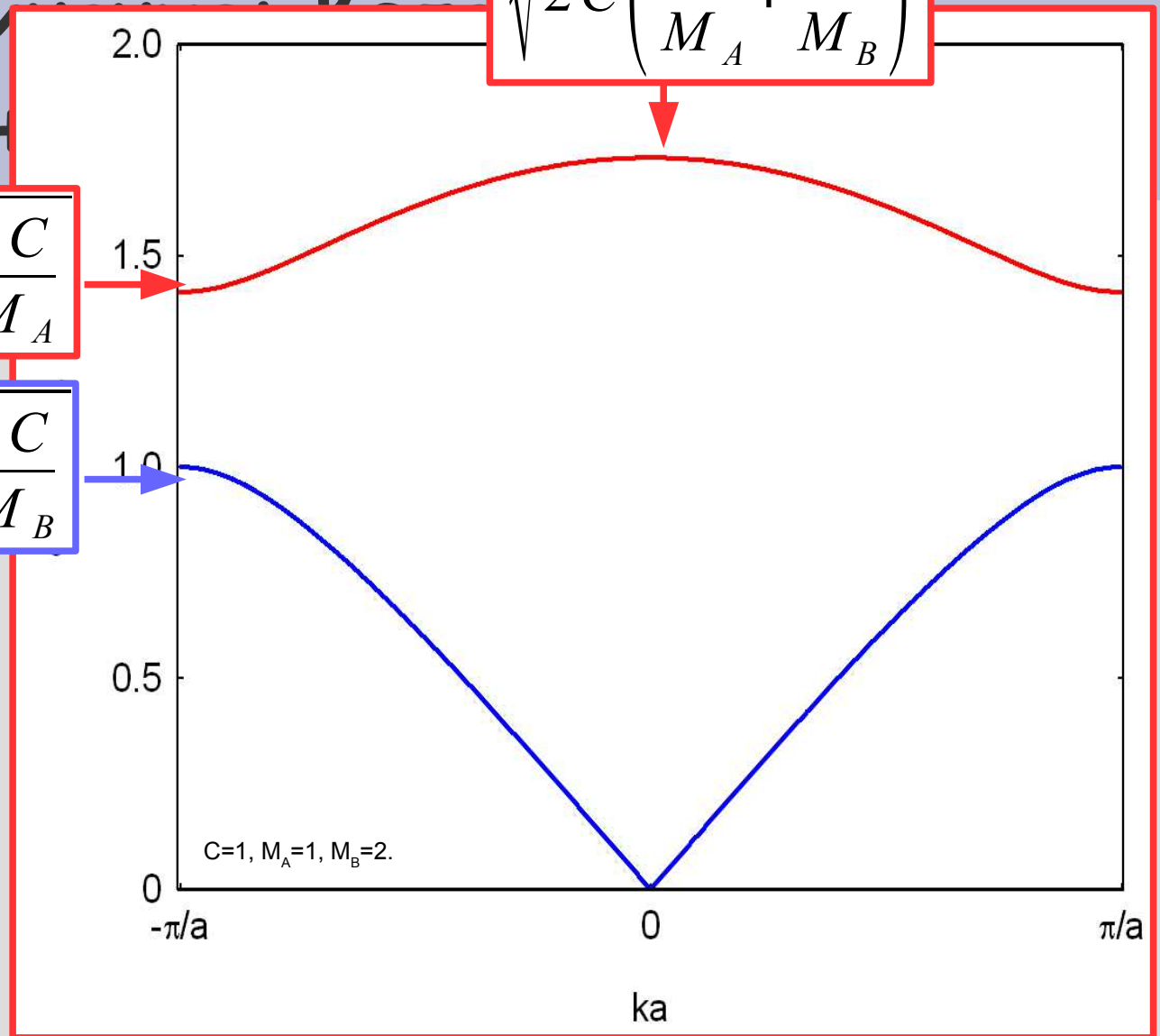
Напоминание:  $K$  — коэффициент жесткости  
неоднородности



$$\sqrt{\frac{2C}{M_A}}$$

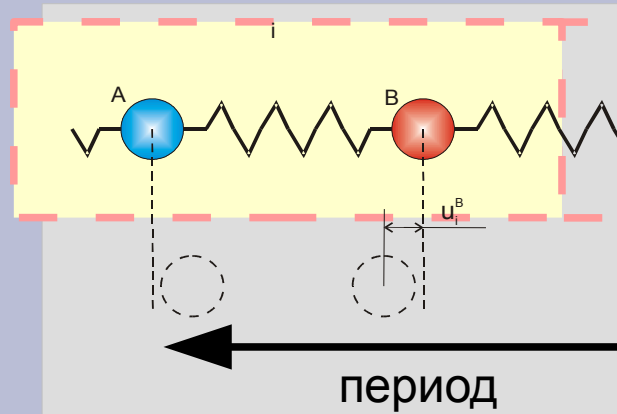
$$\sqrt{\frac{2C}{M_B}}$$

$$\sqrt{2C \left( \frac{1}{M_A} + \frac{1}{M_B} \right)}$$



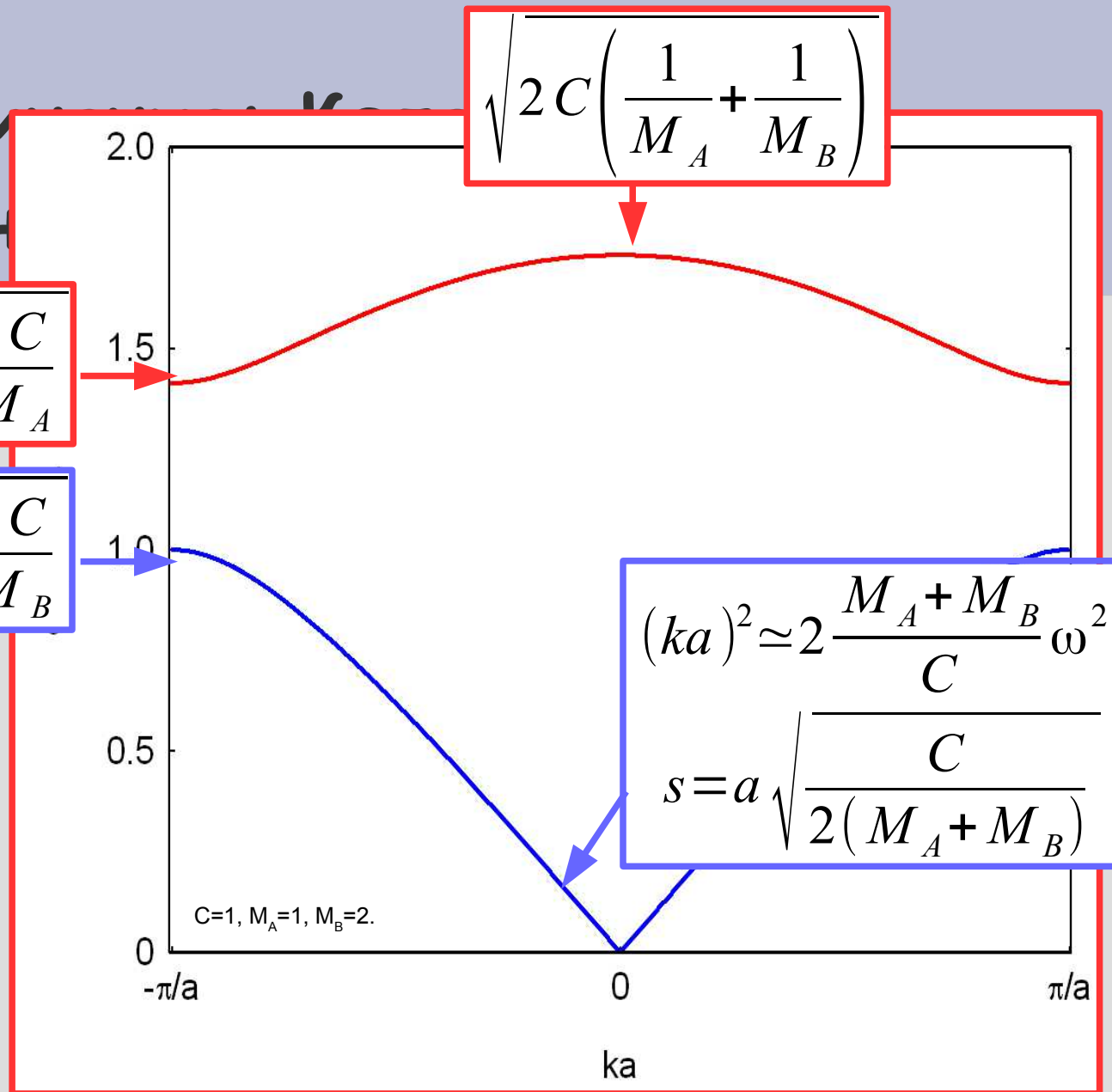


Напоминание:  $\omega$  — частота  
неоднородного колебания



$$\sqrt{\frac{2C}{M_A}}$$

$$\sqrt{\frac{2C}{M_B}}$$



# Несколько общих утверждений о колебаниях.

- В 3D твёрдых телах возможно три поляризации (продольная и две поперечных), скорости звука (силовые постоянные) вообще говоря не обязаны совпадать.

$$s_l > \frac{2}{\sqrt{3}} s_t \quad (\text{теория упругости, для изотропного тела})$$

- 1 атом в примитивной элементарной ячейке: 3 типа (поляризации) акустических колебаний;
- 2 атома в примитивной элементарной ячейке: 3 акустических, 3 оптических
- N атомов в примитивной элементарной ячейке: 3 акустических, 3(N-1) оптических, всего 3N.

# Что это даёт?

Колебания атомов — это форма теплового движения в кристалле. Если описание колебаний на языке волн окажется удобным...

*...мы сможем описать термодинамику кристаллов, в частности - теплоёмкость*

Колебательное движение атомов может нарушать идеальность регулярной кристаллической решетки, мешать движению электронов в проводниках...

*...нужно уметь описывать это движение, оценивать вносимую им степень беспорядка*

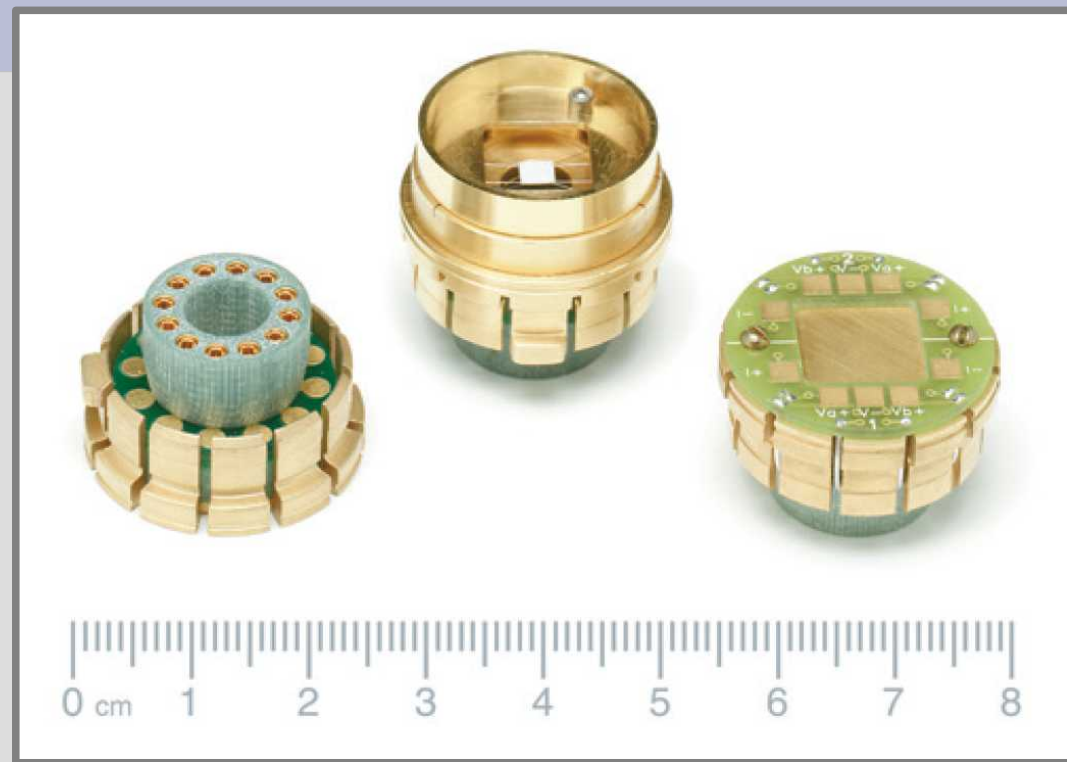


## Часть 2. Теплоёмкость твёрдых тел: способ измерения.

# Методы измерения теплоёмкости.



Фотография системы PPMS. Слева - стойка электроники, справа - дьюар.



Примеры стандартных вставок в установку PPMS. Слева и справа вставка для электрических измерений (в перевёрнутом и нормальном виде), по центру - калориметрическая вставка.

# Релаксационный метод измерения теплоёмкости.

стабильный  
тепловой  
контакт

платформа с  
образцом,  
термометром  
и нагревателем



# Релаксационный метод измерения теплоёмкости.



$$C_{tot} \frac{dT_p}{dt} = -K_w (T_p - T_b) + P(t)$$



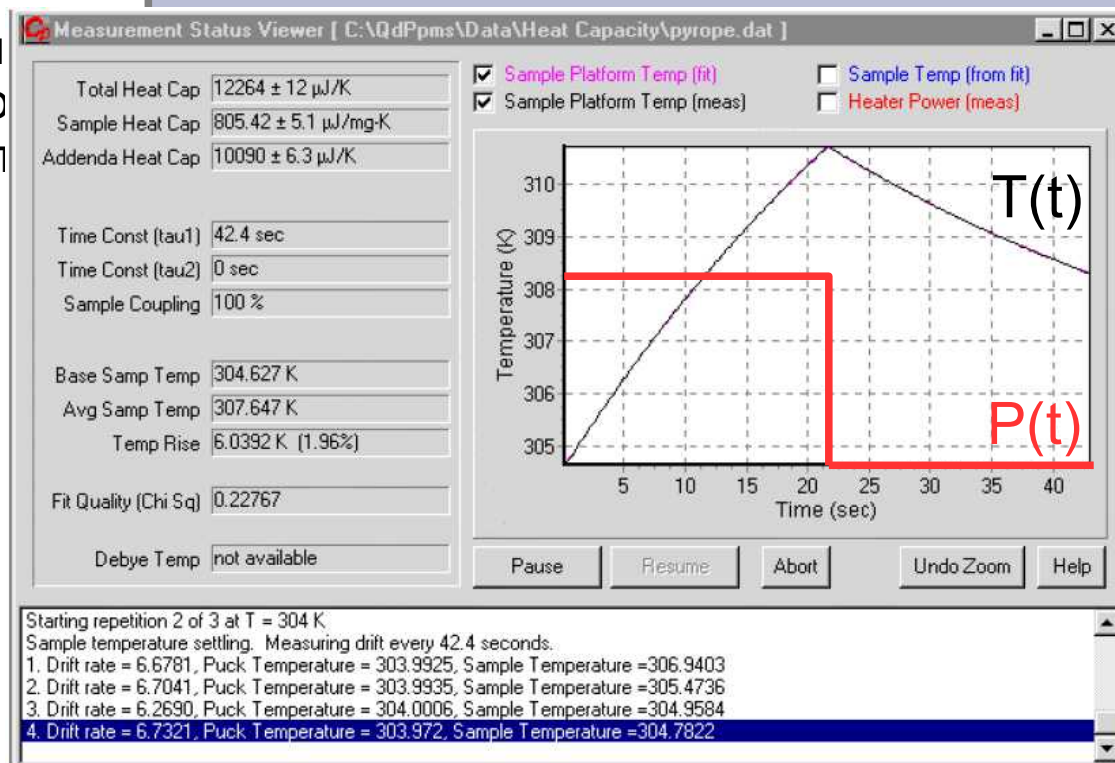
# Релаксационный метод измерения теплоёмкости.

стабильный  
тепловой  
контакт



платформа с  
образцом,  
термометром  
и нагревателем

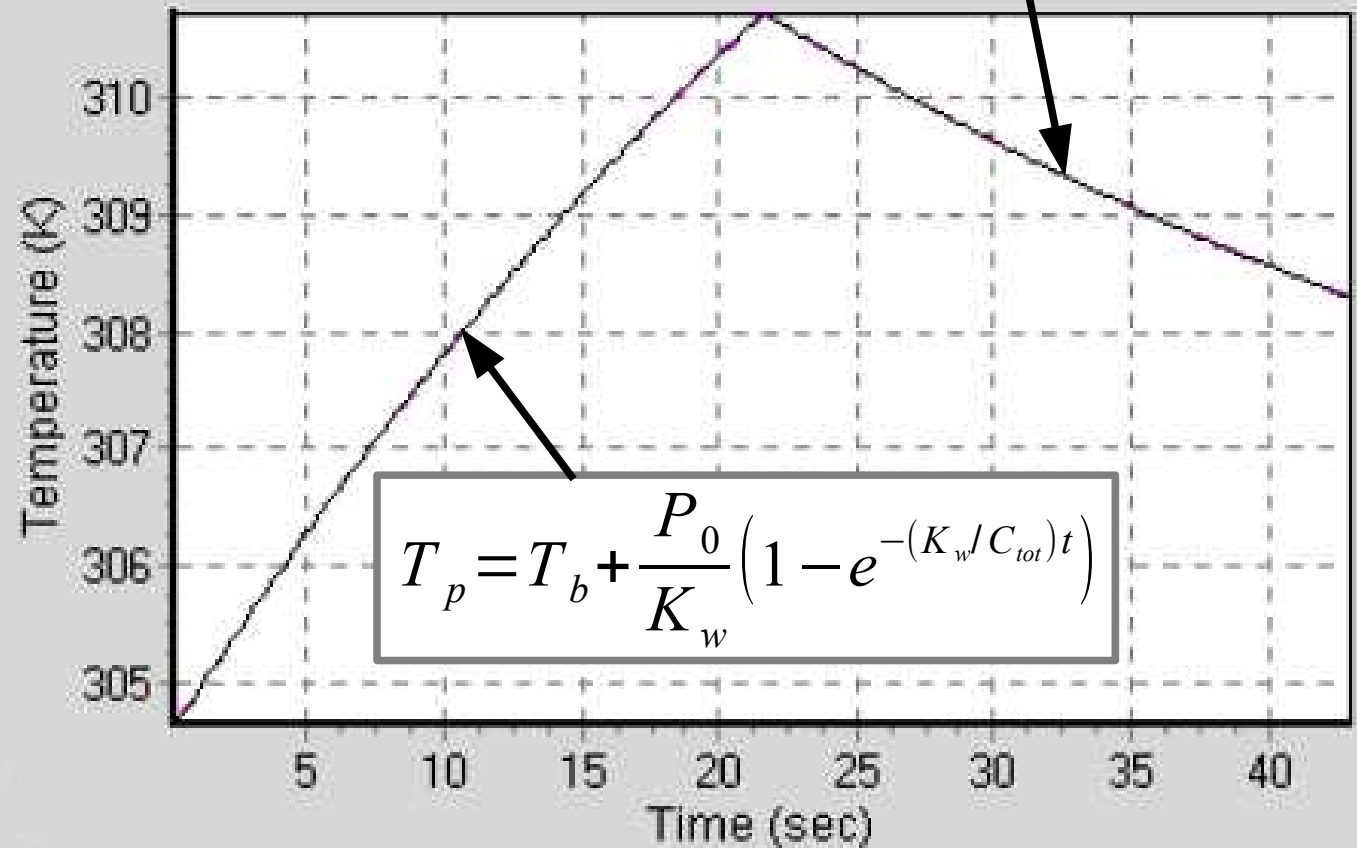
$$C_{tot} \frac{dT_p}{dt} = -K_w (T_p - T_b) + P(t)$$



Пример кривой отклика термометра при измерении теплоёмкости. Из руководства Quantum Design, PPMS Heat Capacity Option User's Manual, Quantum Design, 11-th edition, 2004

# Релаксационный метод

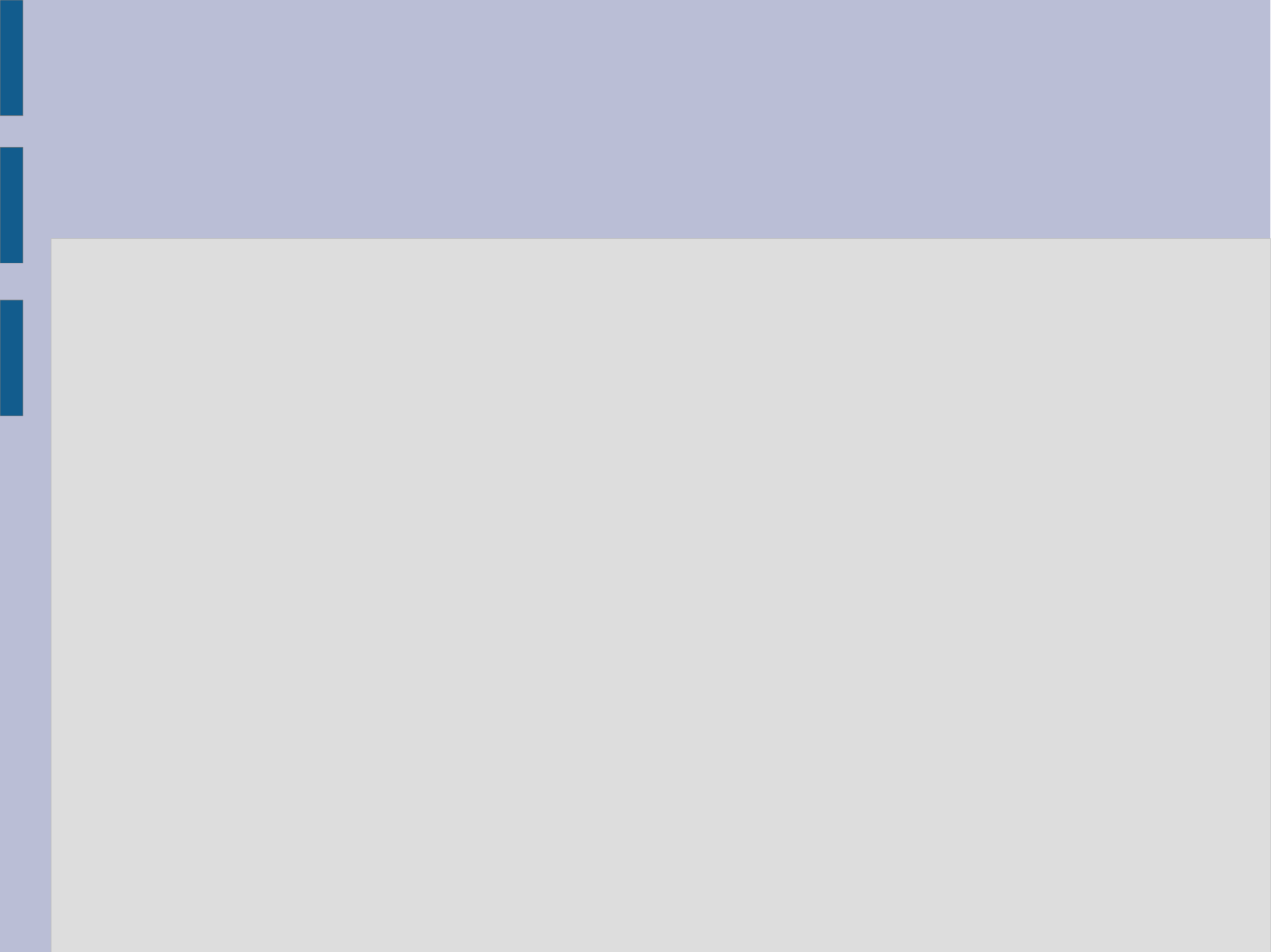
$$T_p = T_b + \Delta T e^{-(K_w/C_{tot})t}$$



платформа с  
образцом,  
термометром  
и нагревателем

$$C_{tot} \frac{dT_p}{dt} = -K_w (T_p - T_b) + P(t)$$

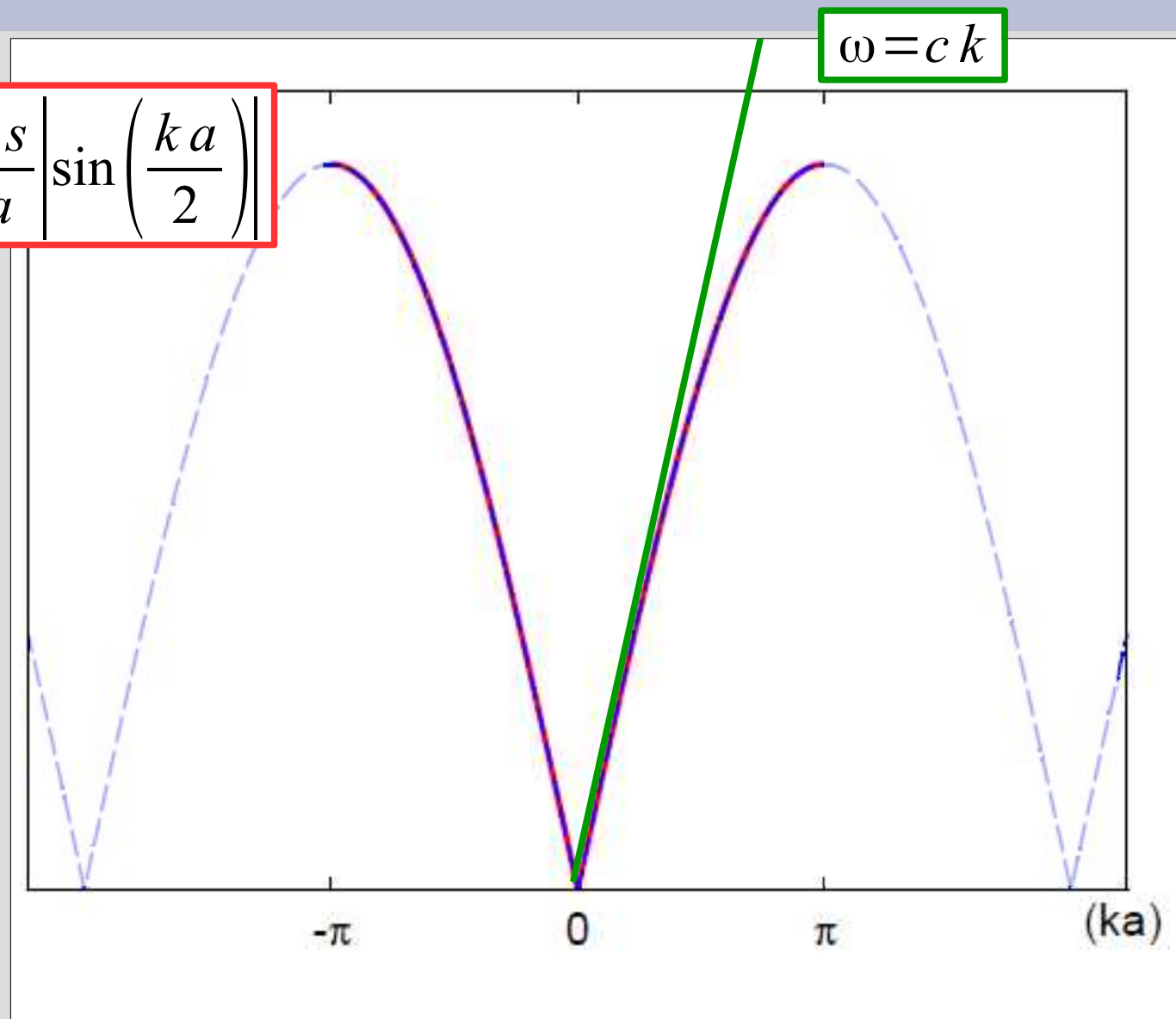
Пример кривой отклика термометра при измерении теплоёмкости. Из руководства Quantum Design, PPMS Heat Capacity Option User's Manual, Quantum Design, 11-th edition, 2004



# Часть 3: Теплоёмкость твёрдых тел: Энергия тепловых колебаний решётки.

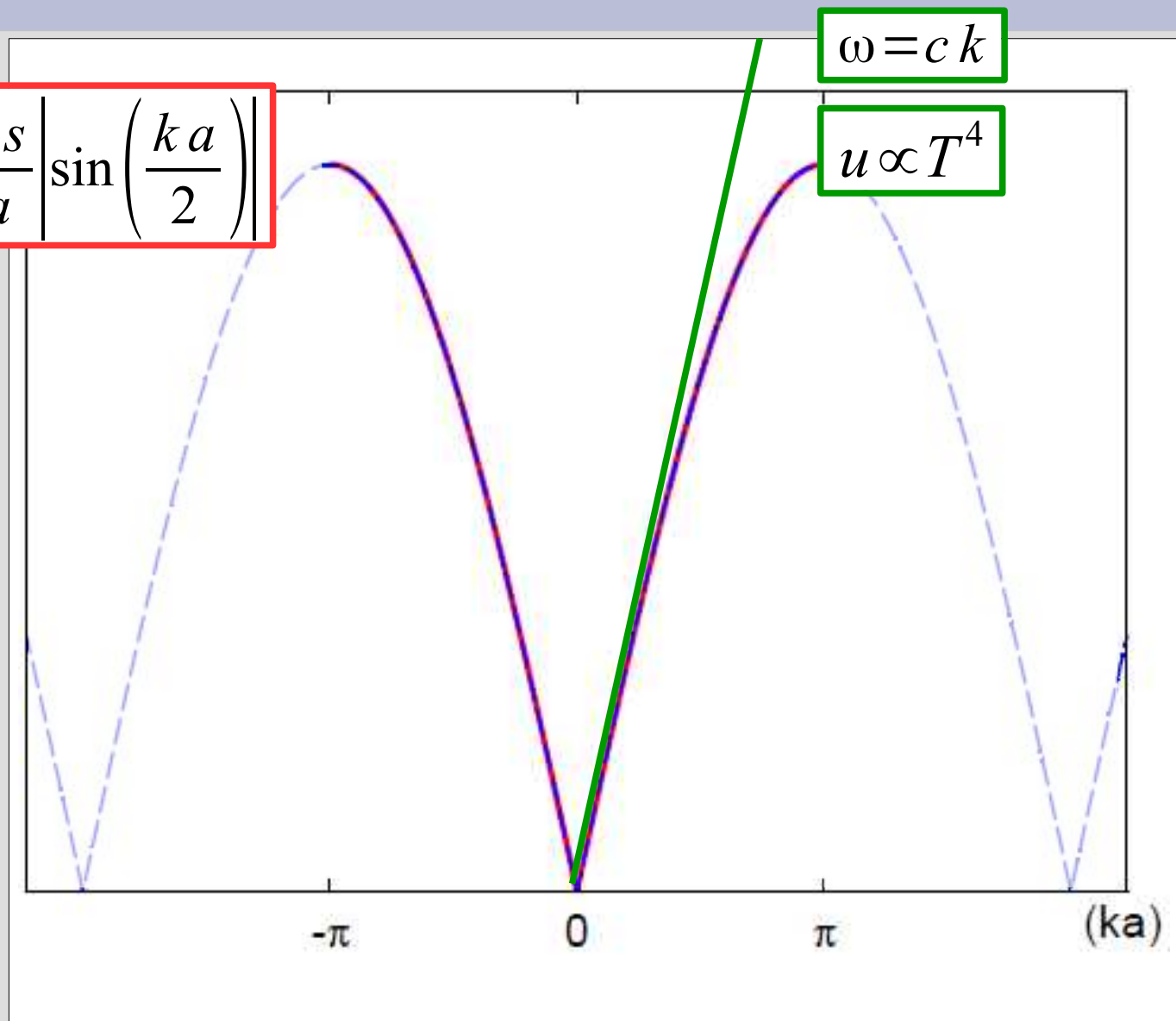
## Напоминание: аналогия с АЧТ

$$\omega = \sqrt{\frac{4C}{M}} \left| \sin \left( \frac{k a}{2} \right) \right| = \frac{2s}{a} \left| \sin \left( \frac{k a}{2} \right) \right|$$

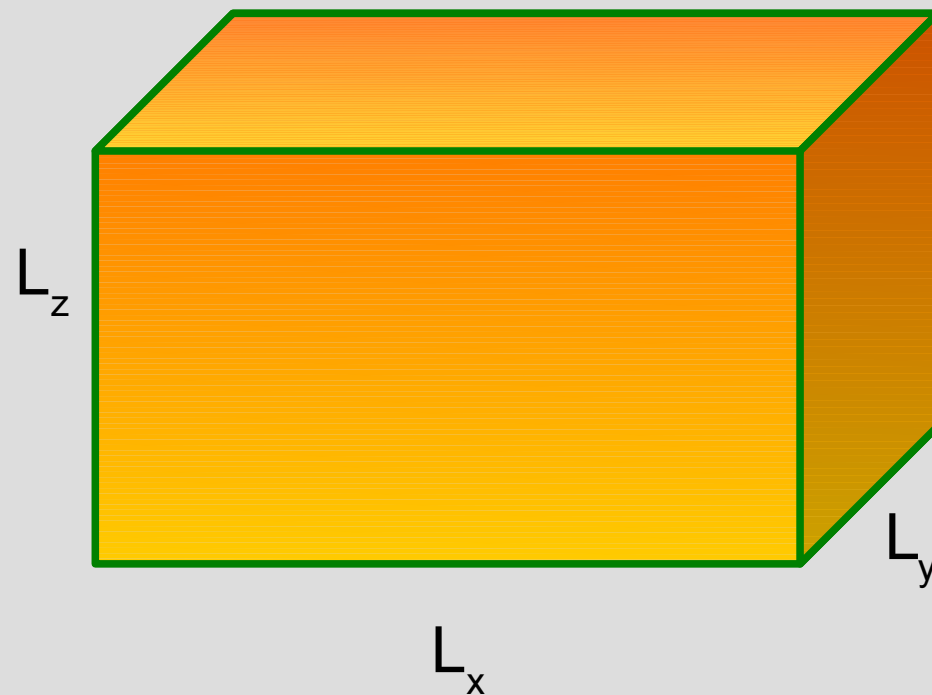


## Напоминание: аналогия с АЧТ

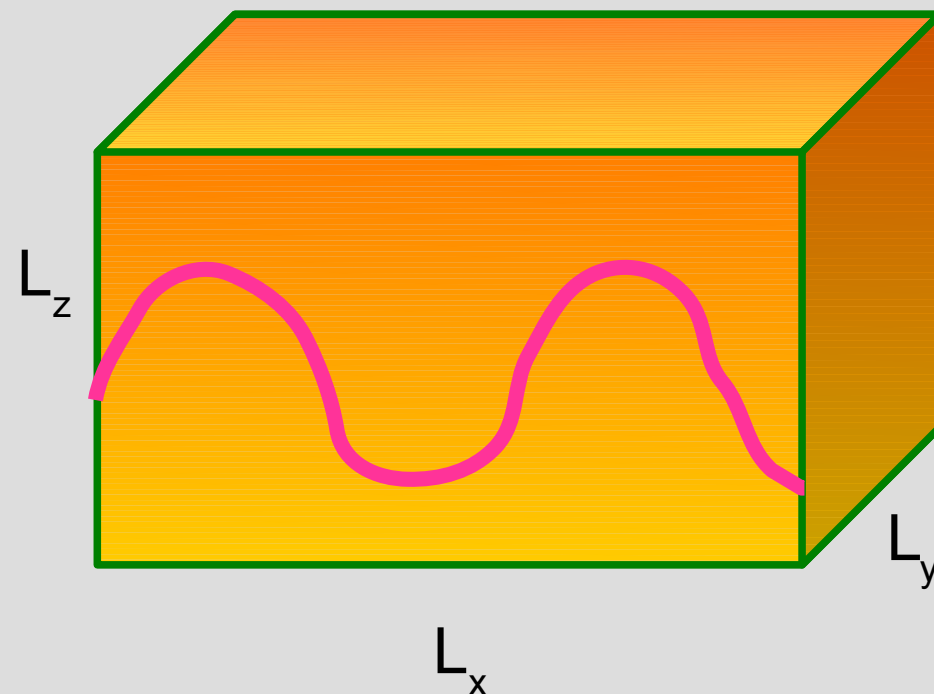
$$\omega = \sqrt{\frac{4C}{M}} \left| \sin \left( \frac{k a}{2} \right) \right| = \frac{2s}{a} \left| \sin \left( \frac{k a}{2} \right) \right|$$



# Шаг 1: Подсчёт числа колебаний.

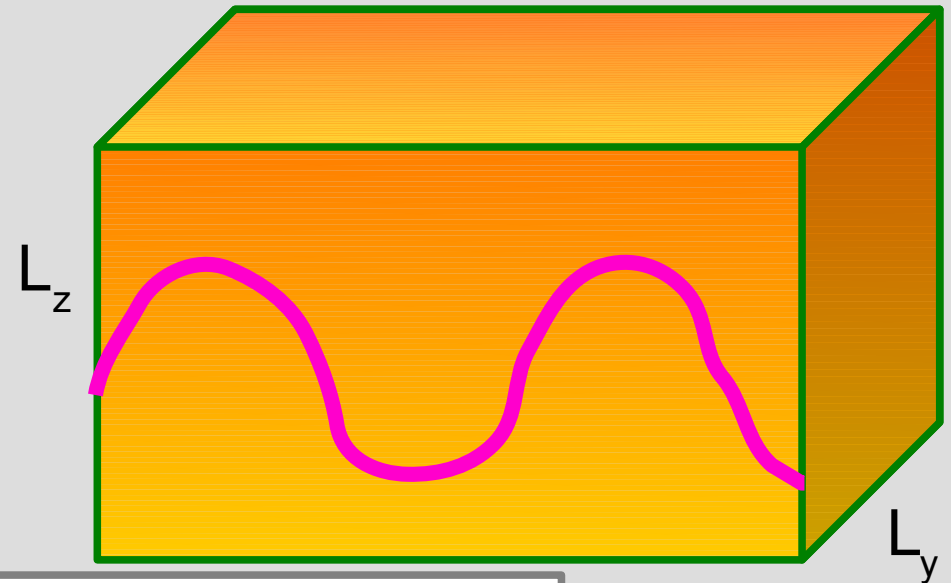


# Шаг 1: Подсчёт числа колебаний.





# Шаг 1: Подсчёт числа колебаний. Граничные условия.



Граничные условия:

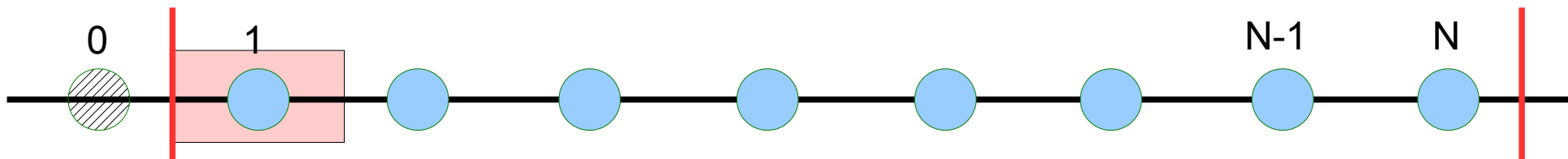
периодические

$$\vec{u}(x, y, z) = \vec{u}(x + L_x, y, z) = \\ = \vec{u}(x, y + L_y, z) = \vec{u}(x, y, z + L_z)$$

закреплённые

$$\vec{u}(0, y, z) = \vec{u}(L_x, y, z) = 0 \text{ etc}$$

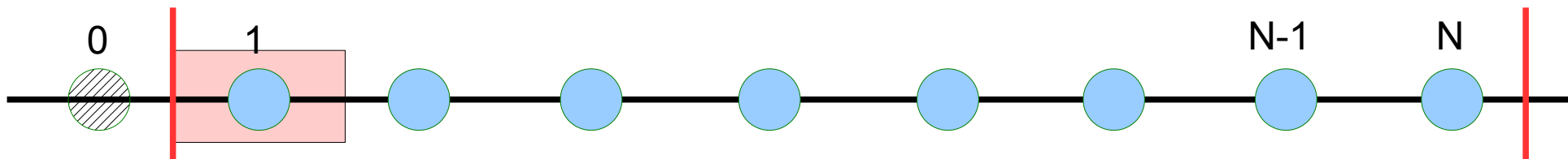
# Число колебаний в 1D. Периодические граничные условия.



$$u(j, t) = u_0 e^{i(kx_j - \omega t)}$$

$$u(0, t) = u(N, t)$$

# Число колебаний в 1D. Периодические граничные условия.

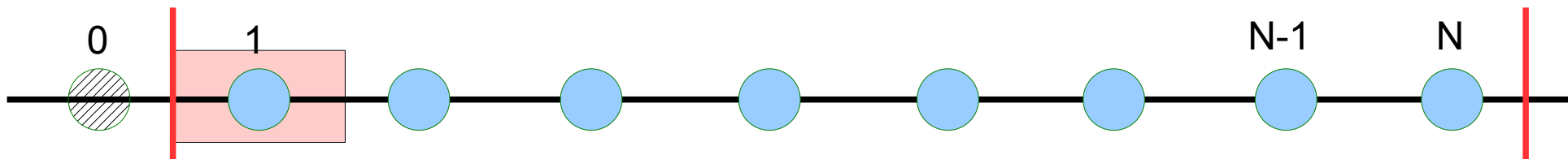


$$u(j, t) = u_0 e^{i(kx_j - \omega t)}$$

$$u(0, t) = u(N, t)$$

$$1 = e^{ikL} = e^{ikNa}$$
$$k a N = 2\pi p$$

# Число колебаний в 1D. Периодические граничные условия.



$$u(j, t) = u_0 e^{i(kx_j - \omega t)}$$

$$u(0, t) = u(N, t)$$

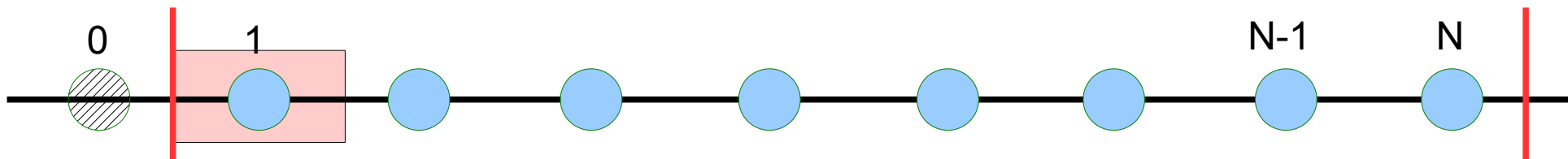
$$1 = e^{ikL} = e^{ikNa}$$

$$k a N = 2\pi p$$

к в 1-ой зоне  
Бриллюэна:  
 $p = \{0, 1, \dots, N-1\}$   
или  $\{-N/2, \dots, N/2\}$

$$k = 0; \pm \frac{2\pi}{Na}; \pm \frac{2\pi}{Na} \times 2; \pm \frac{2\pi}{Na} \times 3; \pm \frac{2\pi}{Na} \times 4; \dots \pm \frac{2\pi}{Na} \times p; \dots; \frac{\pi}{a};$$

# Число колебаний в 1D. Периодические граничные условия.



$$u(j, t) = u_0 e^{i(kx_j - \omega t)}$$

$$u(0, t) = u(N, t)$$

$$1 = e^{ikL} = e^{ikNa}$$

$$k a N = 2\pi p$$

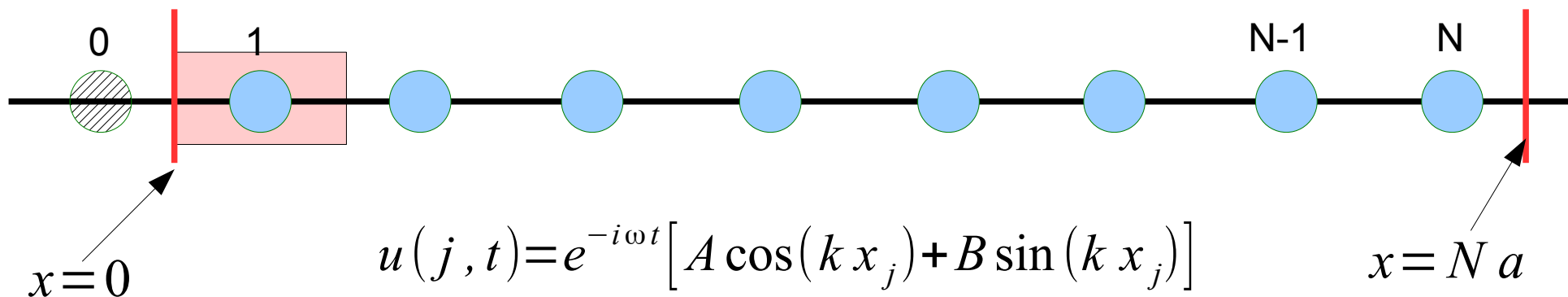
к в 1-ой зоне  
Бриллюэна:  
 $p = \{0, 1, \dots, N-1\}$   
или  $\{-N/2, \dots, N/2\}$

$$k = 0; \pm \frac{2\pi}{Na}; \pm \frac{2\pi}{Na} \times 2; \pm \frac{2\pi}{Na} \times 3; \pm \frac{2\pi}{Na} \times 4; \dots \pm \frac{2\pi}{Na} \times p; \dots; \frac{\pi}{a};$$

число мод в  
интервале  $\Delta K$

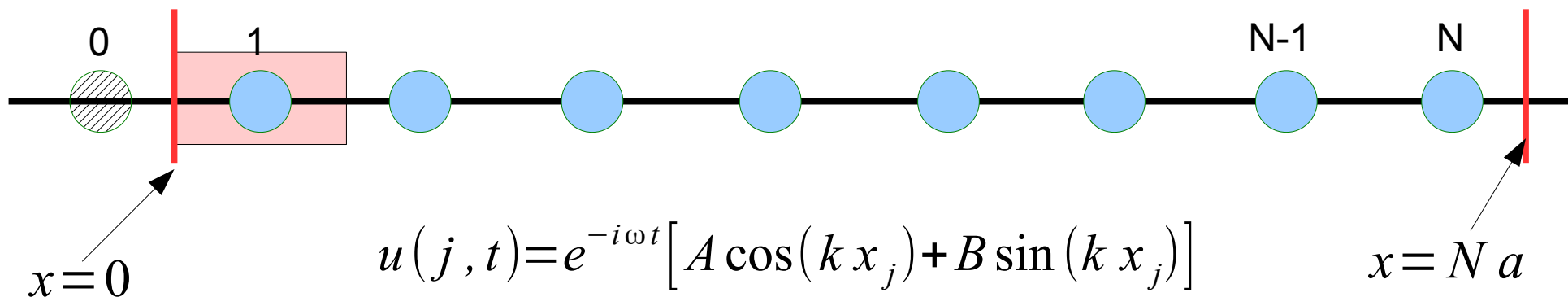
$$\Delta N = \frac{\Delta K}{(2\pi/L)} = \frac{\Delta K \cdot L}{2\pi}$$

# Число колебаний в 1D. Закреплённые граничные условия.



$$u(x=0, t) = u(x=Na, t) = 0$$

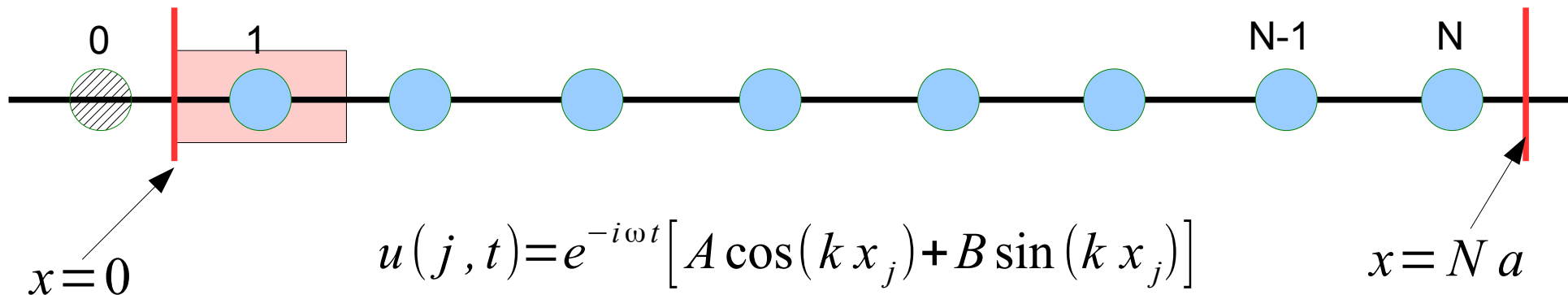
# Число колебаний в 1D. Закреплённые граничные условия.



$$u(x=0, t) = u(x = N a, t) = 0$$

$$\begin{aligned} A &= 0 \\ \sin(k N a) &= 0 \\ k a N &= \pi p > 0 \end{aligned}$$

# Число колебаний в 1D. Закреплённые граничные условия.



$$u(x=0, t) = u(x=Na, t) = 0$$

$$\begin{aligned} A &= 0 \\ \sin(kNa) &= 0 \\ kNa &= \pi p > 0 \end{aligned}$$

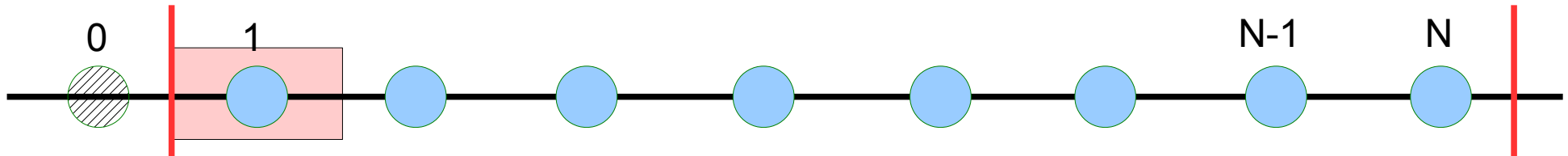
$$k = \frac{\pi}{Na}; \frac{\pi}{Na} \times 2; \frac{\pi}{Na} \times 3; \frac{\pi}{Na} \times 4; \dots; \frac{\pi}{Na} \times p; \dots; \frac{\pi}{a}$$

число мод в  
интервале  $\Delta K$

$$\Delta N = \frac{\Delta K}{(\pi/L)} = \frac{\Delta K \cdot L}{\pi}$$



# Сравнение результатов для разных граничных условий в 1D.



- Число колебаний
- Доступная область  $k$ -пространства
- «Объём»  $k$ -пространства на одно состояние

периодические

закреплённые

$N$

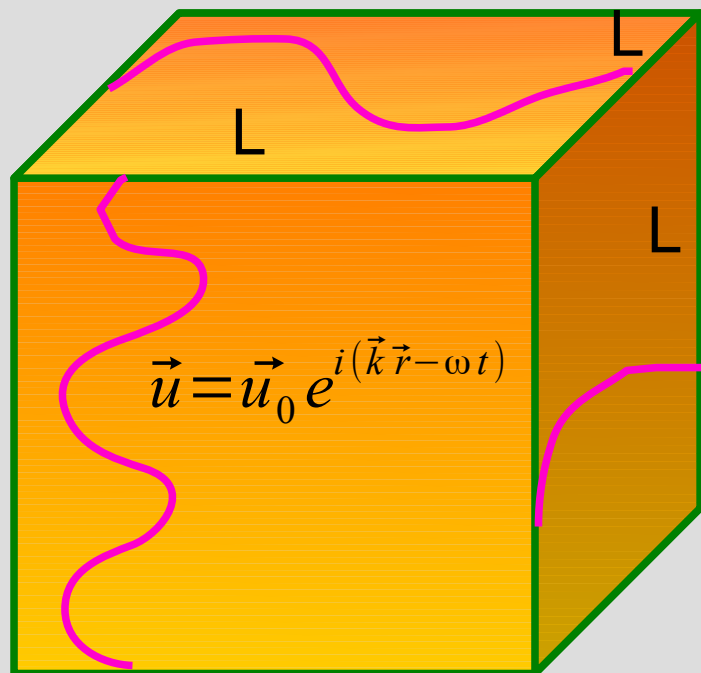
$$-\pi/a < k \leq \pi/a$$

$$0 < k \leq \pi/a$$

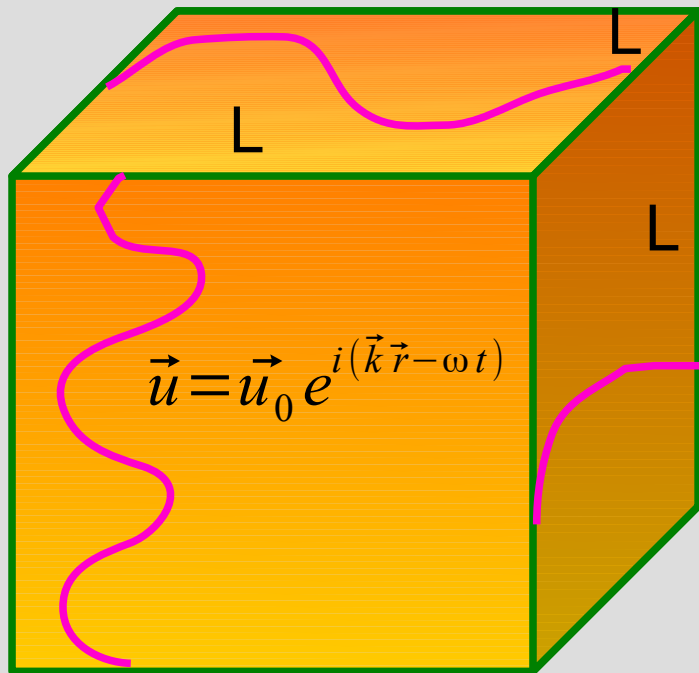
$$2\pi/L$$

$$\pi/L$$

## Число колебаний в 3D.



## Число колебаний в 3D.

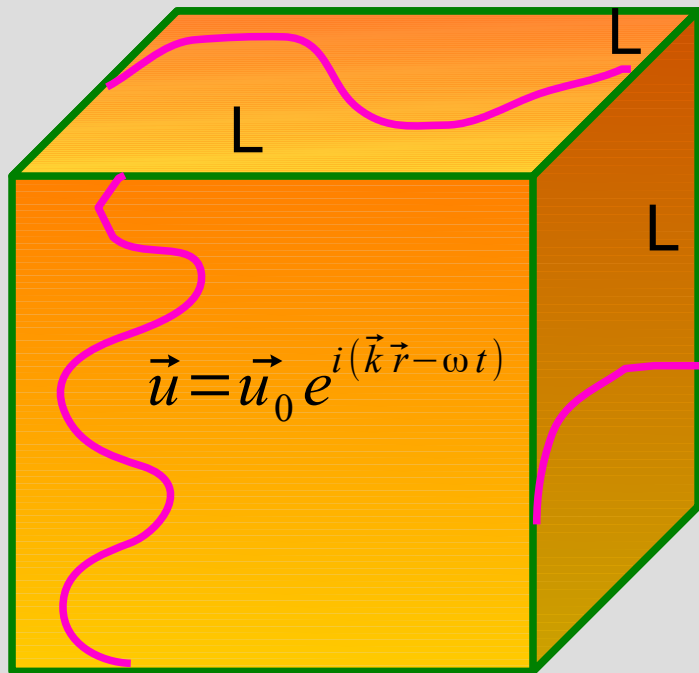


Периодические граничные условия  
(удобнее)

$$\vec{u}(x, y, z) = \vec{u}(x + L, y, z) = \\ = \vec{u}(x, y + L, z) = \vec{u}(x, y, z + L)$$

$$k_{x,y,z} = 0; \pm \frac{2\pi}{L}; \pm \frac{2\pi}{L} \times 2; \pm \frac{2\pi}{L} \times 3; \pm \frac{2\pi}{L} \times 4; \dots \pm \frac{2\pi}{L} \times p; \dots; \frac{\pi}{a};$$

# Число колебаний в 3D.



Период  
(удобн

$$\vec{u} = \vec{u}_0$$

На одно колебание объём  
k-пространства:

$$\left( \frac{2\pi}{L} \right)^3 = \frac{(2\pi)^3}{V}$$

Число колебаний:

$$dN = \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 / V} = \frac{V d^3 k}{(2\pi)^3}$$

$$k_{x,y,z} = 0; \pm \frac{2\pi}{L}; \pm \frac{2\pi}{L} \times 2; \pm \frac{2\pi}{L} \times 3; \dots, \pm \frac{2\pi}{L} \times P, \dots, a,$$

## Шаг 2. Плотность состояний.

$$dN = D(\omega) d\omega$$

## Шаг 2. Плотность состояний.

$$dN = D(\omega) d\omega$$

1D: спектр  $\omega = \omega_{max} \left| \sin \left( \frac{k a}{2} \right) \right|$   
периодич.  
гран. усл.  $dN = \frac{L dk}{2\pi}$

## Шаг 2. Плотность состояний.

$$dN = D(\omega) d\omega$$

1D: спектр  $\omega = \omega_{max} \left| \sin \left( \frac{ka}{2} \right) \right|$   
периодич.  
гран. усл.  $dN = \frac{L dk}{2\pi}$

$$D(\omega) = \frac{dN}{d\omega} = 2 \frac{dN}{dk} \frac{1}{d\omega/dk}$$

## Шаг 2. Плотность состояний.

$$dN = D(\omega) d\omega$$

1D: спектр  $\omega = \omega_{max} \left| \sin \left( \frac{ka}{2} \right) \right|$   
периодич.  
гран. усл.  $dN = \frac{L dk}{2\pi}$

$$D(\omega) = \frac{dN}{d\omega} = 2 \frac{dN}{dk} \frac{1}{d\omega/dk} = 2 \frac{L}{2\pi} \frac{1}{\omega_{max} \times (a/2) \times \cos(ka/2)}$$



## Шаг 2. Плотность состояний.

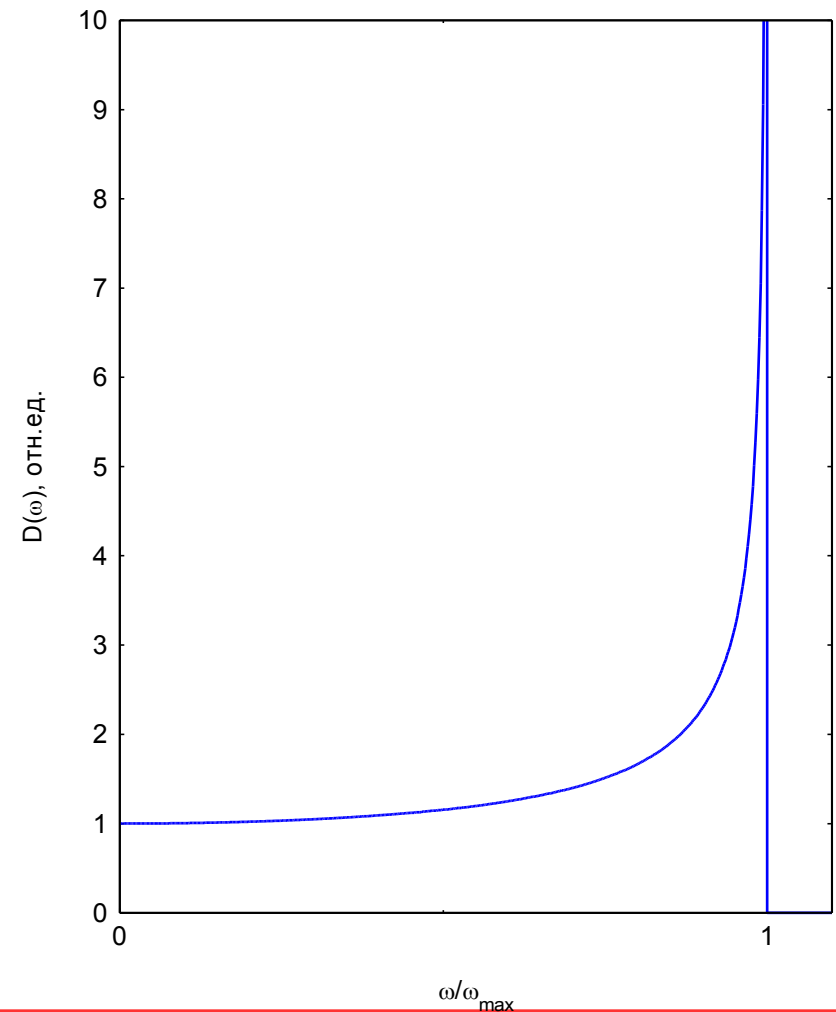
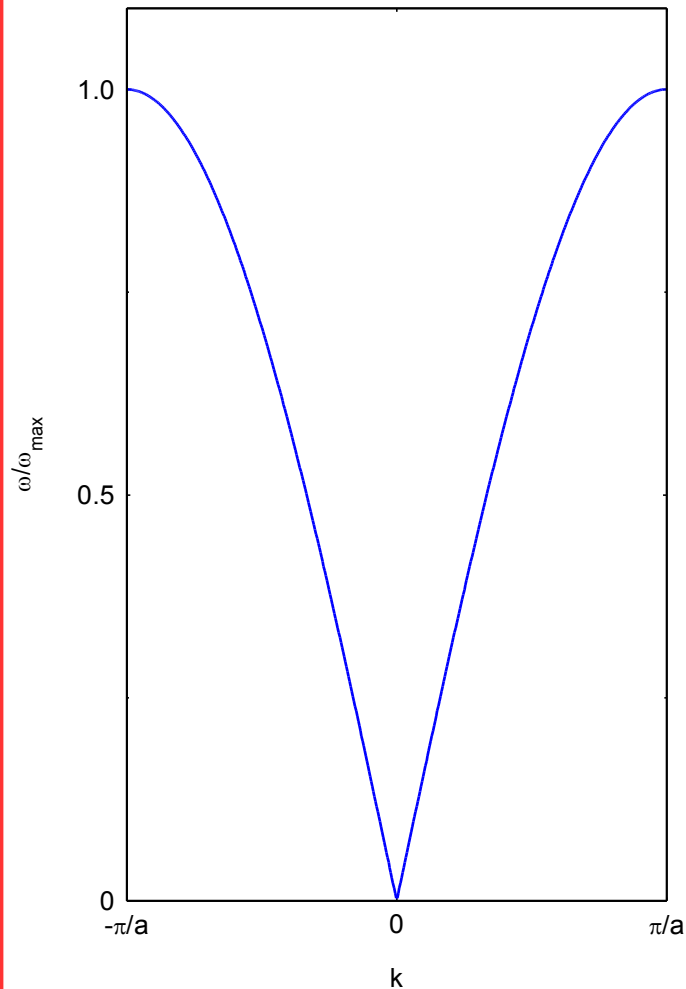
$$dN = D(\omega) d\omega$$

1D: спектр  $\omega = \omega_{max} \left| \sin \left( \frac{k a}{2} \right) \right|$   
периодич.  
гран. усл.  $dN = \frac{L dk}{2\pi}$

$$\begin{aligned} D(\omega) &= \frac{dN}{d\omega} = 2 \frac{dN}{dk} \frac{1}{d\omega/dk} = 2 \frac{L}{2\pi} \frac{1}{\omega_{max} \times (a/2) \times \cos(ka/2)} = \\ &= \frac{2L}{\pi a} \frac{1}{\sqrt{\omega_{max}^2 - \omega^2}} \end{aligned}$$

$$dN = D(\omega) d\omega$$

1D: спек  
пер  
гран

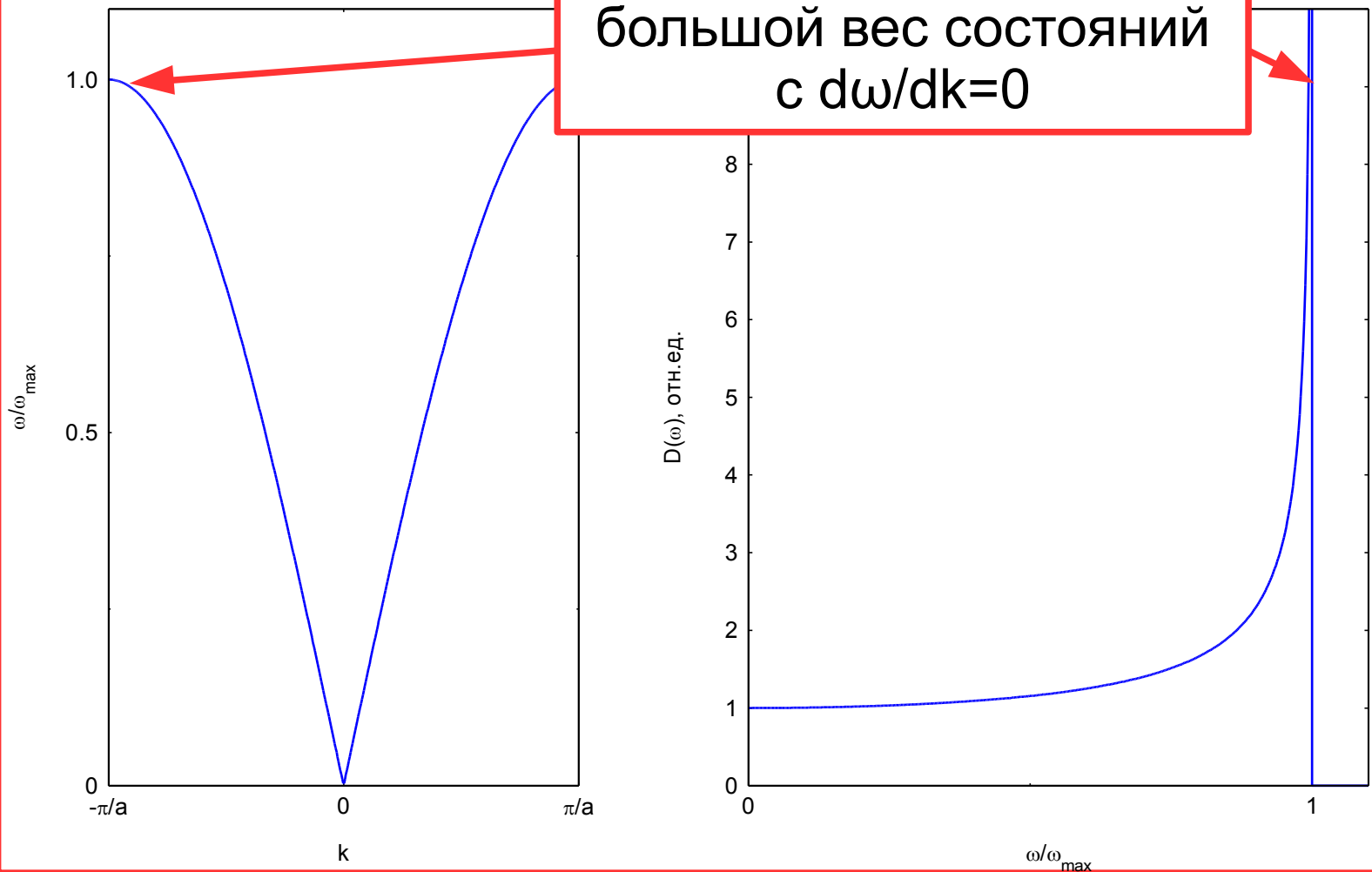


$$D(\omega) = \frac{dN}{d\omega} = 2 \frac{dN}{dk} \frac{1}{d\omega/dk} = 2 \frac{L}{2\pi \omega_{\max}} \frac{1}{(a/2) \times \cos(ka/2)} =$$

$$= \frac{2L}{\pi a} \frac{1}{\sqrt{\omega_{\max}^2 - \omega^2}}$$

$$dN = D(\omega) d\omega$$

1D: спек  
пер  
гран



$$D(\omega) = \frac{dN}{d\omega} = 2 \frac{dN}{dk} \frac{1}{d\omega/dk} = 2 \frac{L}{2\pi \omega_{max}} \frac{1}{(a/2) \times \cos(ka/2)} =$$

$$= \frac{2L}{\pi a} \frac{1}{\sqrt{\omega_{max}^2 - \omega^2}}$$

### Шаг 3. Энергия тепловых колебаний решётки.

$$E_n = \hbar \omega \left( n + \frac{1}{2} \right)$$
$$\bar{E} = \frac{\sum E_n e^{-E_n/T}}{\sum e^{-E_n/T}} = \frac{\hbar \omega}{2} + \frac{\hbar \omega}{e^{\hbar \omega/T} - 1} = \left( \frac{1}{2} + n(\omega) \right) \hbar \omega$$

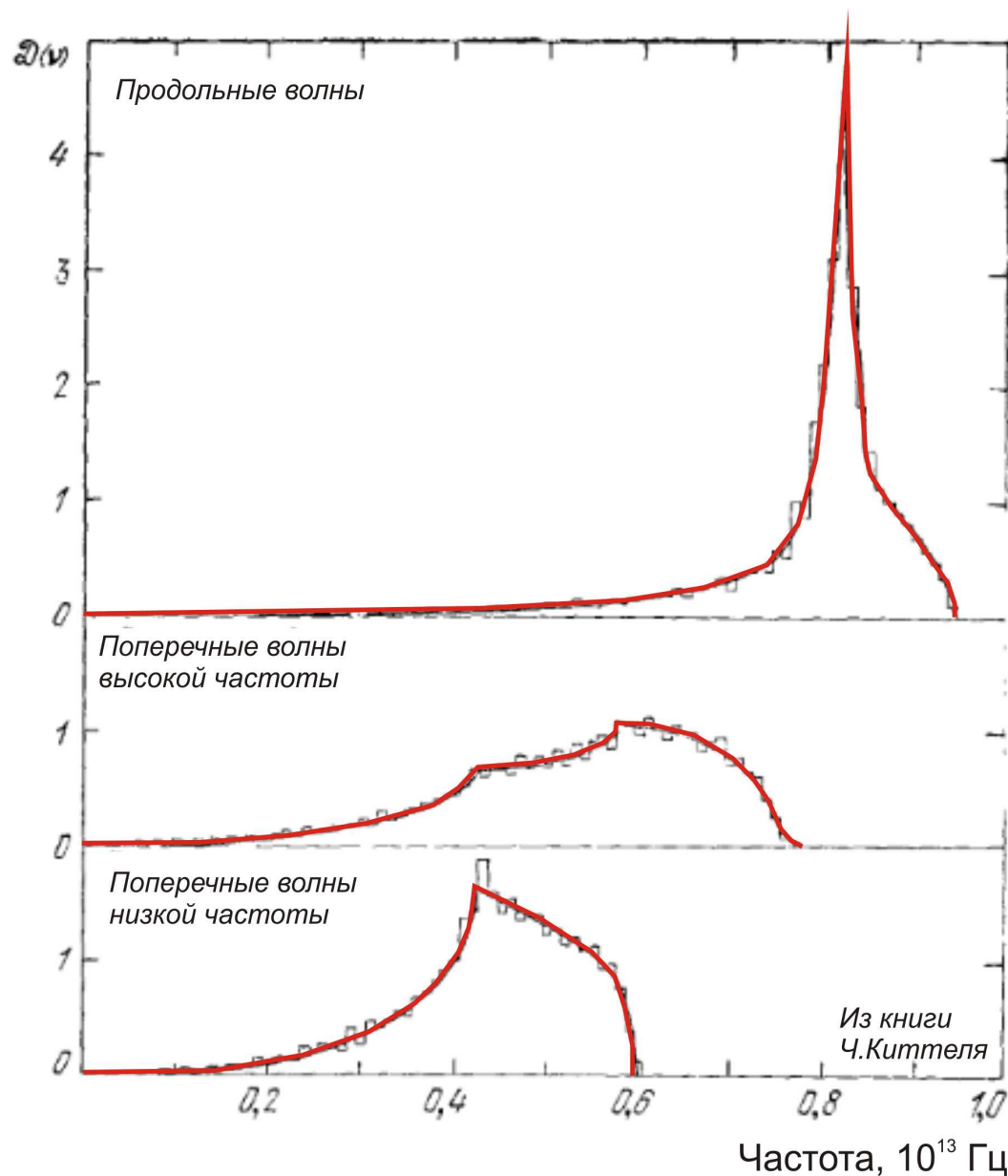
### Шаг 3. Энергия тепловых колебаний решётки.

$$E_n = \hbar \omega \left( n + \frac{1}{2} \right)$$
$$\bar{E} = \frac{\sum E_n e^{-E_n/T}}{\sum e^{-E_n/T}} = \frac{\hbar \omega}{2} + \frac{\hbar \omega}{e^{\hbar \omega/T} - 1} = \left( \frac{1}{2} + n(\omega) \right) \hbar \omega$$

суммируем вклады всех колебаний:

$$E = \sum_i \int_{13.B.} \bar{E}(\omega_i(\vec{k})) \frac{V d^3 k}{(2\pi)^3}$$
$$E = \sum_i \int_0^\infty D_i(\omega) \left( \frac{1}{2} + n(\omega) \right) \hbar \omega d\omega$$

# Плотность состояний для упругих колебаний в реальном кристалле.



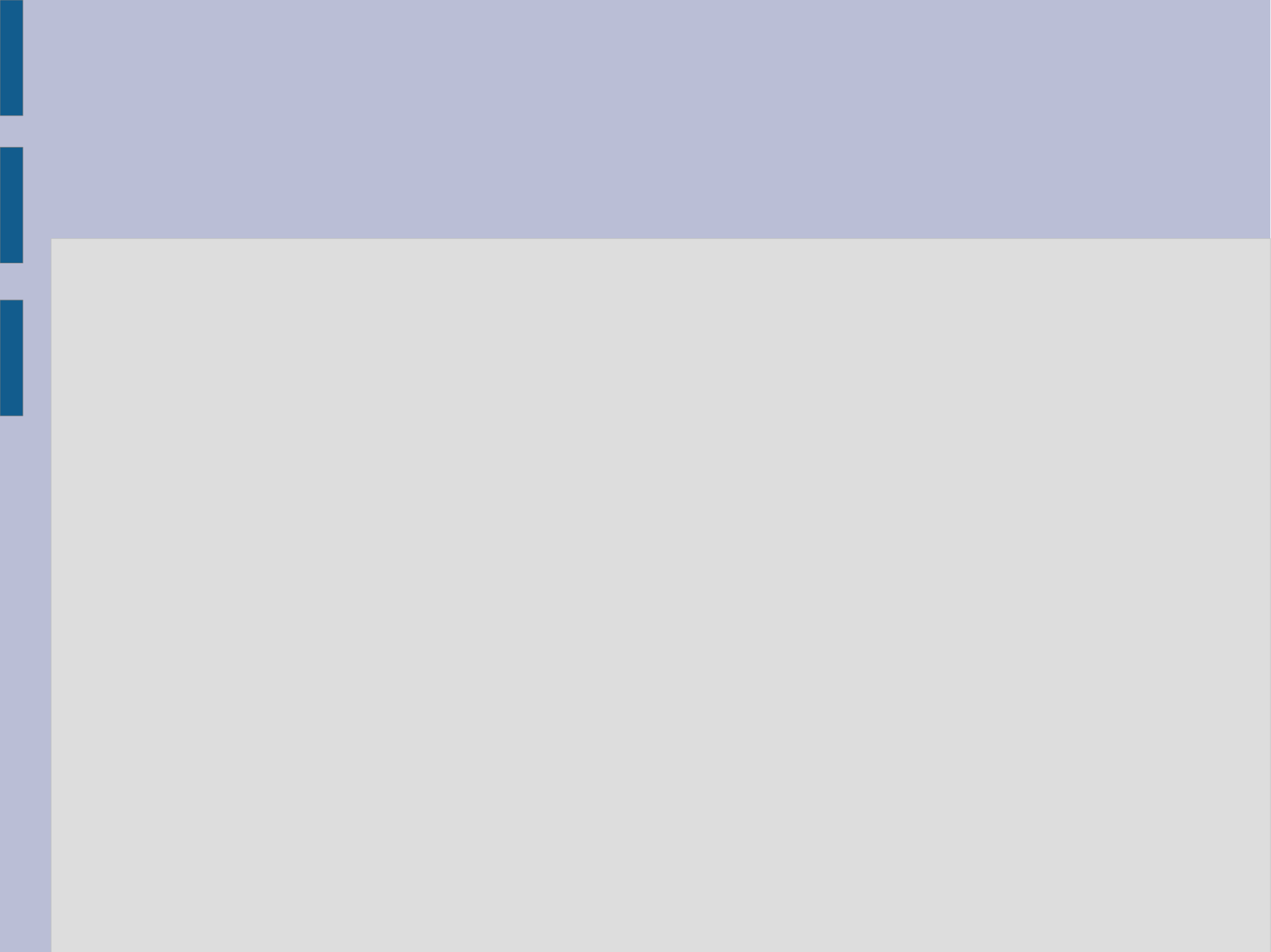
Плотность состояний для упругих волн в кристалле алюминия. Вычисление по экспериментально измеренным спектрам упругих колебаний, распространяющихся в различных направлениях. Показаны отдельно вклады разных поляризаций.

Для каждой моды

$$\int_0^{\infty} D(\omega) d\omega = N$$



число примитивных элементарных ячеек



## Часть 4. Модель Дебая и модель Эйнштейна



# Модель Эйнштейна и модель Дебая.

Эйнштейн

$$D(\omega) = N \delta(\omega - \omega_0)$$

Все атомы колеблются на одной частоте,  $N$  — число примитивных элементарных ячеек.

Дебай

$$\omega = s k$$

Спектр заменяется изотропным линейным спектром.

# Модель Эйнштейна и модель Дебая.

Эйнштейн

$$D(\omega) = N \delta(\omega - \omega_0)$$

Все атомы колеблются на одной частоте,  $N$  — число примитивных элементарных ячеек.

Дебай

$$\omega = s k$$

Спектр заменяется изотропным линейным спектром.

$$\int_0^{\infty} D(\omega) d\omega = N$$

по определению  
верно

необходимо ограничить  
доступные в модели частоты

# Дебаевский волновой вектор, дебаевская частота. Одномерный случай.

$$\int_0^{\infty} D(\omega) d\omega = N$$

$$D(\omega) = \frac{dN}{d\omega} =$$

# Дебаевский волновой вектор, дебаевская частота. Одномерный случай.

$$\int_0^{\infty} D(\omega) d\omega = N$$

$$D(\omega) = \frac{dN}{d\omega} = 2 \frac{dN}{dk} \frac{1}{d\omega/dk} = 2 \frac{L}{2\pi} \frac{1}{s} = \frac{L}{\pi s}$$

# Дебаевский волновой вектор, дебаевская частота. Одномерный случай.

$$\int_0^{\infty} D(\omega) d\omega = N$$

$$D(\omega) = \frac{dN}{d\omega} = 2 \frac{dN}{dk} \frac{1}{d\omega/dk} = 2 \frac{L}{2\pi s} \frac{1}{s} = \frac{L}{\pi s}$$

$$\omega_D \frac{L}{\pi s} = N$$

$$\omega_D = \frac{\pi s}{a} = \frac{\pi}{2} \omega_{max}$$

$$k_D = \frac{\omega_D}{s} = \frac{\pi}{a} = k_{Br}$$

# Дебаевский волновой вектор, дебаевская частота. Одномерный случай.

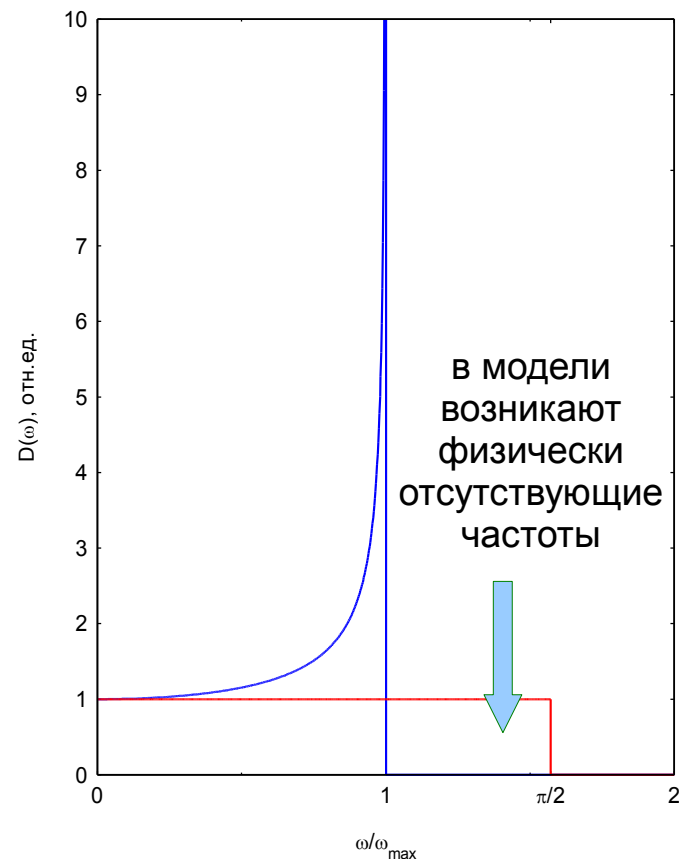
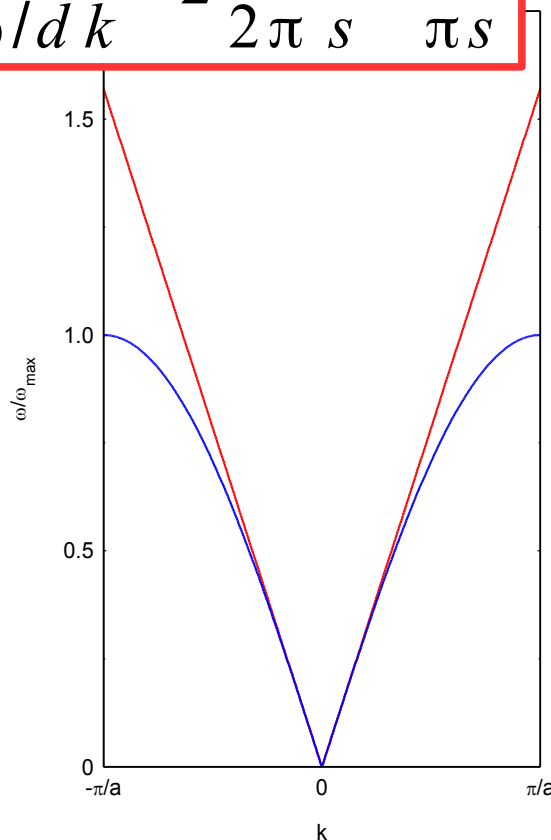
$$\int_0^{\infty} D(\omega) d\omega = N$$

$$D(\omega) = \frac{dN}{d\omega} = 2 \frac{dN}{dk} \frac{1}{d\omega/dk} = 2 \frac{L}{2\pi s} \frac{1}{s} = \frac{L}{\pi s}$$

$$\omega_D \frac{L}{\pi s} = N$$

$$\omega_D = \frac{\pi s}{a} = \frac{\pi}{2} \omega_{max}$$

$$k_D = \frac{\omega_D}{s} = \frac{\pi}{a} = k_{Br}$$



# Дебаевская частота и дебаевский волновой вектор в трёхмерном случае.

$$\omega = s k$$
$$d N = \frac{V d^3 k}{(2 \pi)^3} = \frac{V 4 \pi k^2 d k}{(2 \pi)^3}$$

# Дебаевская частота и дебаевский волновой вектор в трёхмерном случае.

$$\omega = s k$$
$$d N = \frac{V d^3 k}{(2 \pi)^3} = \frac{V 4 \pi k^2 d k}{(2 \pi)^3}$$

$$D(\omega) = \frac{d N}{d \omega} = \frac{d N}{d k} \frac{1}{d \omega / d k} = \frac{1}{s} \frac{V k^2}{2 \pi^2} = \frac{V \omega^2}{2 \pi^2 s^3}$$



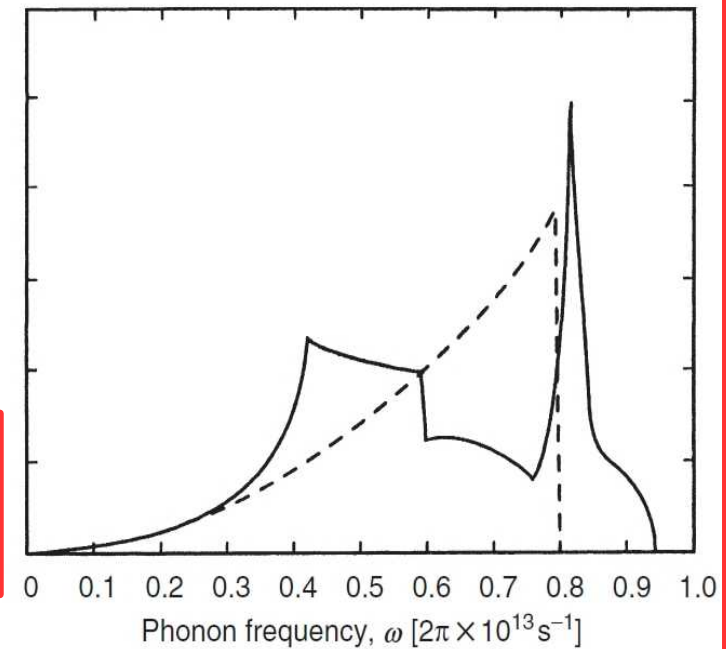
# Дебаевская частота и дебаевский волновой вектор в трёхмерном случае.

$$\omega = s k$$

$$d N = \frac{V d^3 k}{(2\pi)^3} = \frac{V 4\pi k^2 dk}{(2\pi)^3}$$

$$D(\omega) = \frac{d N}{d \omega} = \frac{d N}{d k} \frac{1}{d \omega / d k} = \frac{1}{s} \frac{V k^2}{2\pi^2} = \frac{V \omega^2}{2\pi^2 s^3}$$

on density of states,  $g_{ph}$



(a)

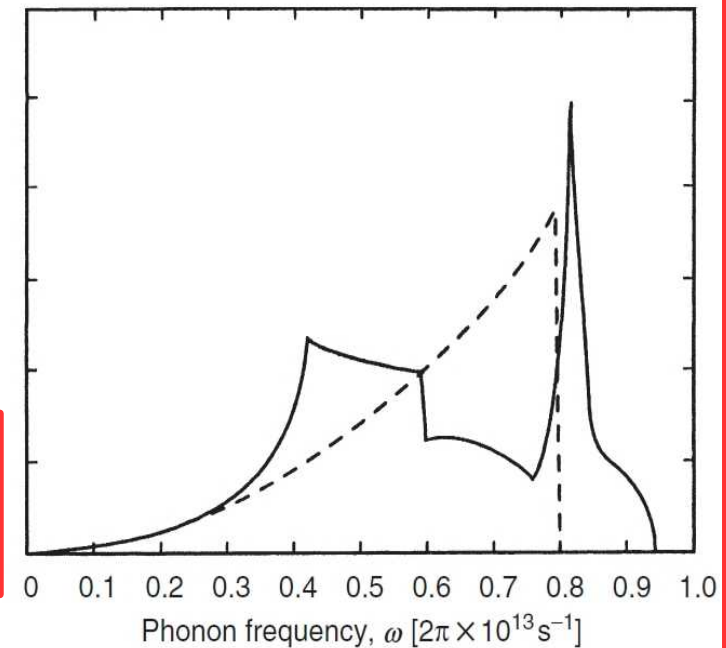
# Дебаевская частота и дебаевский волновой вектор в трёхмерном случае.

$$\omega = s k$$

$$d N = \frac{V d^3 k}{(2\pi)^3} = \frac{V 4\pi k^2 dk}{(2\pi)^3}$$

$$D(\omega) = \frac{d N}{d \omega} = \frac{d N}{d k} \frac{1}{d \omega / d k} = \frac{1}{s} \frac{V k^2}{2\pi^2} = \frac{V \omega^2}{2\pi^2 s^3}$$

on density of states,  $g_{ph}$



$$N = \int_0^{\omega_D} D(\omega) d\omega = \frac{V}{6\pi^2} \frac{\omega_D^3}{s^3}$$



$$\omega_D = s \sqrt[3]{6\pi^2 \frac{N}{V}} = s \sqrt[3]{6\pi^2 n_{яч}}$$

$$k_D = \sqrt[3]{6\pi^2 n_{яч}}$$

# Дебаевская частота и дебаевский волновой вектор в трёхмерном случае.

$$\omega = s k$$
$$d N = \frac{V d^3 k}{(2 \pi)^3} = \frac{V 4 \pi k^2 d k}{(2 \pi)^3}$$

$$D(\omega) = \frac{d N}{d \omega} = \frac{d N}{d k} \frac{1}{d \omega / d k} = \frac{1}{s} \frac{V}{2}$$

$$N = \int_0^{\omega_D} D(\omega) d \omega = \frac{V}{6 \pi^2} \frac{\omega_D^3}{s^3}$$

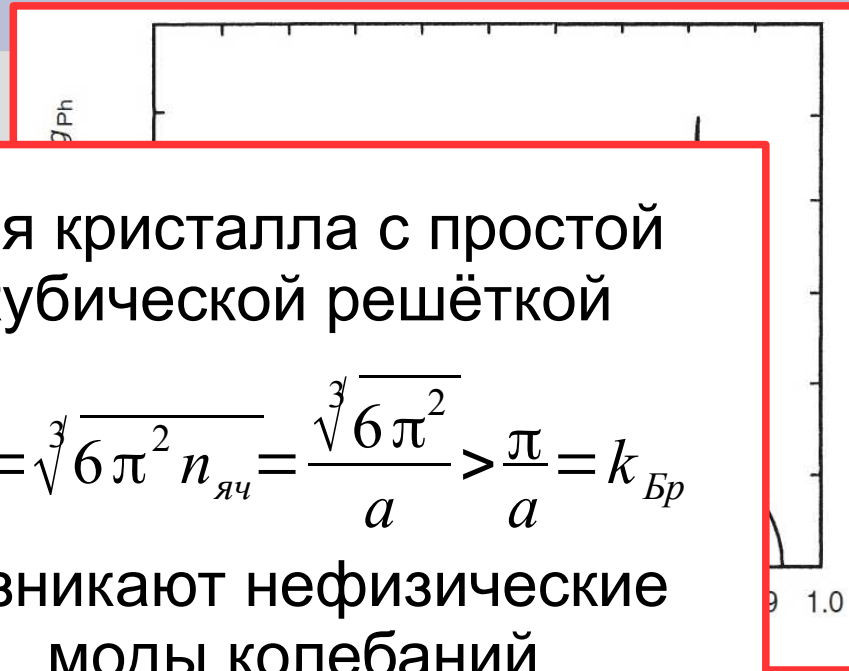


$$\omega_D = s \sqrt[3]{6 \pi^2 \frac{N}{V}} = s \sqrt[3]{6 \pi^2 n_{яч}}$$
$$k_D = \sqrt[3]{6 \pi^2 n_{яч}}$$

Для кристалла с простой кубической решёткой

$$k_D = \sqrt[3]{6 \pi^2 n_{яч}} = \frac{\sqrt[3]{6 \pi^2}}{a} > \frac{\pi}{a} = k_{Бр}$$

возникают нефизические моды колебаний



# Теория теплоёмкости Дебая (3D)

$$E = \sum_i \int_0^{\infty} D_i(\omega) \left( \frac{1}{2} + n(\omega) \right) \hbar \omega d\omega$$
$$D(\omega) = \frac{V}{2\pi^2} \frac{\omega^2}{s^3}, \quad \omega < \omega_D$$

# Теория теплоёмкости Дебая (3D)

$$E = \sum_i \int_0^{\infty} D_i(\omega) \left( \frac{1}{2} + n(\omega) \right) \hbar \omega d\omega$$
$$D(\omega) = \frac{V}{2\pi^2} \frac{\omega^2}{s^3}, \quad \omega < \omega_D$$

$$E - E_0 = 3 \times \frac{V}{2\pi^2 s^3} \int_0^{\omega_D} \omega^2 \frac{\hbar \omega}{e^{\hbar \omega / T} - 1} d\omega = T^4 \frac{3V}{2\pi^2 \hbar^3 s^3} \int_0^{\Theta/T} \frac{x^3 dx}{e^x - 1}$$

$$\Theta = \hbar \omega_D / k_B = \frac{\hbar s}{k_B} \left( 6\pi^2 n_{\text{яч}} \right)^{1/3}$$

!!! здесь вернули  
!!! постоянную Больцмана

# Теория теплоёмкости Дебая (3D)

$$E = \sum_i \int_0^{\infty} D_i(\omega) \left( \frac{1}{2} + n(\omega) \right) \hbar \omega d\omega$$
$$D(\omega) = \frac{V}{2\pi^2} \frac{\omega^2}{s^3}, \quad \omega < \omega_D$$

$$E - E_0 = 3 \times \frac{V}{2\pi^2 s^3} \int_0^{\omega_D} \omega^2 \frac{\hbar \omega}{e^{\hbar \omega / T} - 1} d\omega = T^4 \frac{3V}{2\pi^2 \hbar^3 s^3} \int_0^{\Theta/T} \frac{x^3 dx}{e^x - 1}$$

$$\Theta = \hbar \omega_D / k_B = \frac{\hbar s}{k_B} \left( 6\pi^2 n_{\text{яч}} \right)^{1/3}$$

!!! здесь вернули  
!!! постоянную Больцмана

$$E - E_0 = 9 N k_B T \left( \frac{T}{\Theta} \right)^3 \times \int_0^{\Theta/T} \frac{x^3 dx}{e^x - 1}$$

# Порядки величины дебаевской температуры

$$\Theta = \hbar \omega / k_B = \frac{\hbar s}{k_B} \left( 6 \pi^2 n_{\text{яч}} \right)^{1/3}$$

$$\Theta \sim \frac{3 \hbar s}{k_B a} \sim \frac{3 \times 10^{-27} \times 3 \times 10^5}{1.4 \times 10^{-16} \times 3 \times 10^{-8}} \sim 2 \times 10^2 \text{ K} = 200 \text{ K}$$

вещество	$\Theta$ , K	вещество	$\Theta$ , K	вещество	$\Theta$ , K
Алмаз	2200	Ag	227	Si	645
Mg	400	Au	162	Ge	374
Cu	344	He	26	Ar	92
Fe	470	NaCl	275	Pb	105
Al	428	Pt	239		

# Теория теплоёмкости Дебая (3D). Предельные случаи.

$$E - E_0 = 9 N k_B T \left( \frac{T}{\Theta} \right)^3 \times \int_0^{\Theta/T} \frac{x^3 dx}{e^x - 1}$$

$$T \gg \Theta, \quad \Theta/T \ll 1$$
$$\int_0^{\Theta/T} \frac{x^3 dx}{e^x - 1} \approx \int_0^{\Theta/T} x^2 dx = \frac{1}{3} \left( \frac{\Theta}{T} \right)^3$$
$$E - E_0 = 3 N k_B T$$
$$C = 3 N k_B$$

Закон Дюлонга-  
Пти

$$T \ll \Theta, \quad \Theta/T \gg 1$$
$$\int_0^{\Theta/T} \frac{x^3 dx}{e^x - 1} \approx \int_0^{\infty} \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \frac{\pi^4}{15}$$
$$E - E_0 = \frac{3 \pi^4 N k_B}{5} \frac{T^4}{\Theta^3}$$
$$C = \frac{12 \pi^4 N k_B}{5} \left( \frac{T}{\Theta} \right)^3$$

Закон  $T^3$  Дебая



# Теория теплоёмкости Дебая (3D). Общий случай.

$$E - E_0 = 3 \times \frac{V}{2\pi^2 s^3} \int_0^{\omega_D} \omega^2 \frac{\hbar \omega}{e^{\hbar \omega / T} - 1} d\omega$$

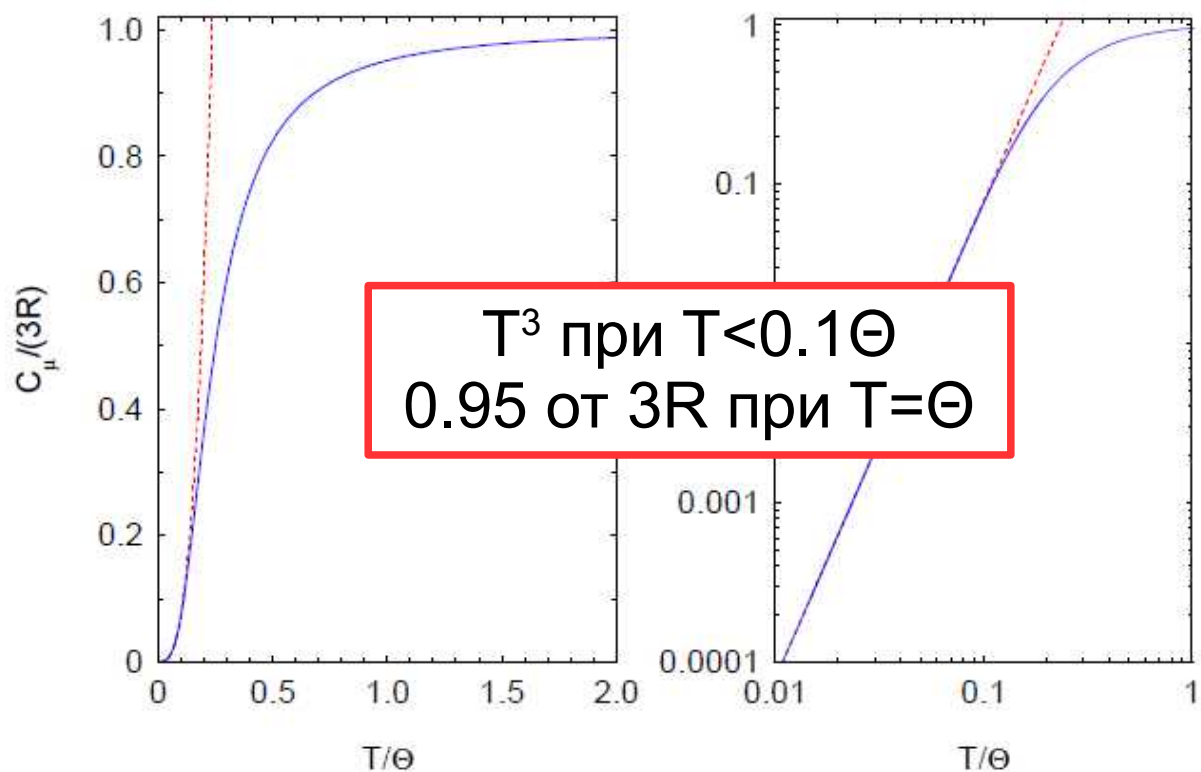
$$\begin{aligned} C &= 3 \times \frac{V}{2\pi^2 s^3} \int_0^{\omega_D} \omega^2 \frac{\hbar \omega \times e^{\hbar \omega / T} \times (\hbar \omega / T^2)}{(e^{\hbar \omega / T} - 1)^2} d\omega = \\ &= \frac{3 V T^3}{2\pi^2 \hbar^3 s^3} \int_0^{\Theta/T} \frac{x^4 e^x dx}{(e^x - 1)^2} = 9 N k_B T \left( \frac{T}{\Theta} \right)^3 \times \int_0^{\Theta/T} \frac{x^4 e^x dx}{(e^x - 1)^2} \end{aligned}$$

# Теория теплоёмкости Дебая (3D). Общий случай.

$$E - E_0 = 3 \times \frac{V}{2\pi^2 s^3} \int_0^{\omega_D} \omega^2 \frac{\hbar \omega}{e^{\hbar \omega / T} - 1} d\omega$$

$$C = 3 \times \frac{V}{2\pi^2 s^3} \int_0^{\omega_D} \omega^2 \hbar \omega \times e^{\hbar \omega / T} \times (\hbar \omega / T^2)$$

$$= \frac{3 V T^3}{2\pi^2 \hbar^3 s^3} \int_0^{\Theta/T} \frac{x^4 e^x dx}{(e^x - 1)^2} =$$



# Теория теплоёмкости Эйнштейна.

$$D(\omega) = N \delta(\omega - \omega_0)$$

$$E = \sum_i \int_0^\infty D_i(\omega) \left( \frac{1}{2} + n(\omega) \right) \hbar \omega d\omega$$

$$E - E_0 = \frac{N \hbar \omega_0}{e^{\hbar \omega_0 / T} - 1}$$

# Теория теплоёмкости Эйнштейна.

$$D(\omega) = N \delta(\omega - \omega_0)$$

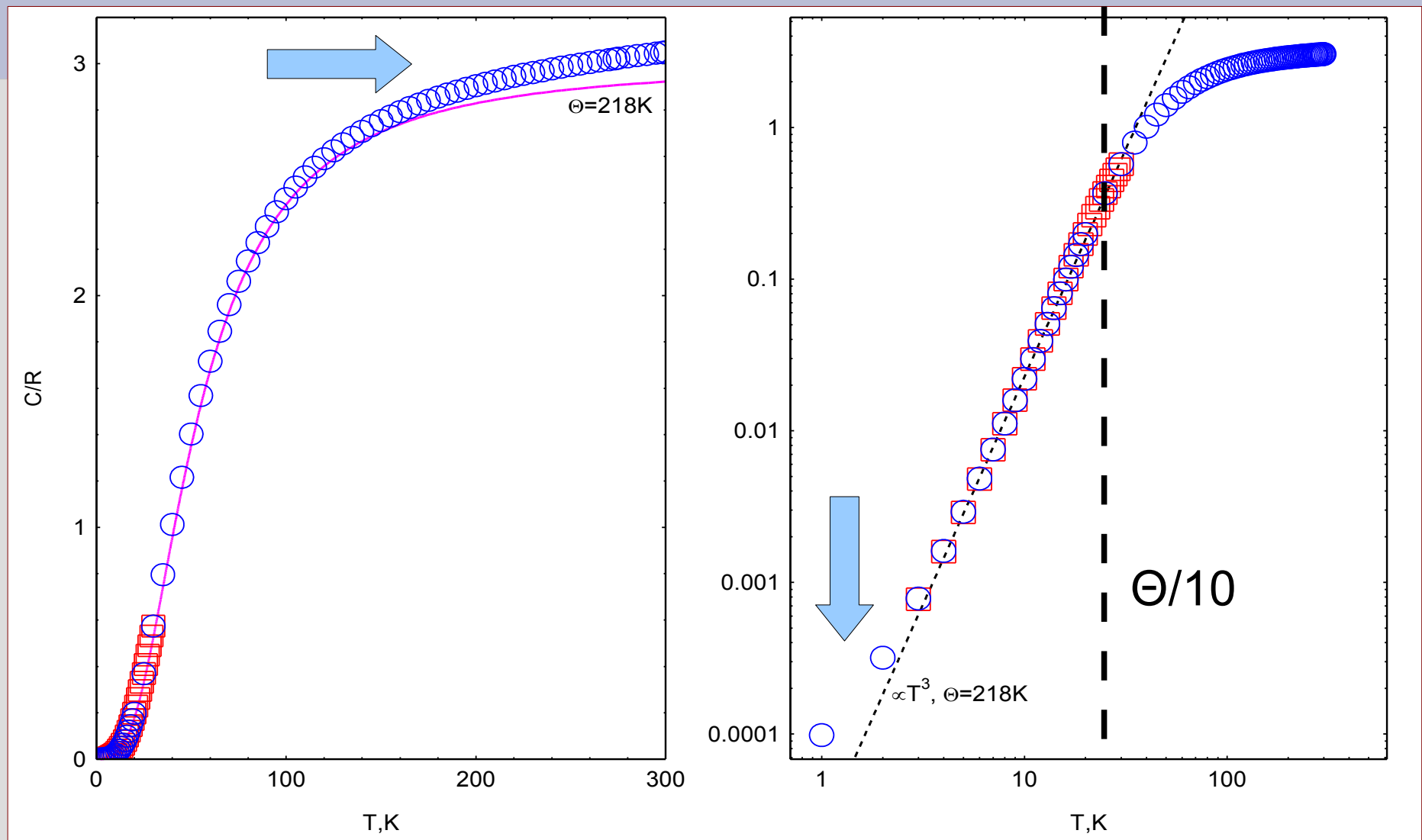
$$E = \sum_i \int_0^\infty D_i(\omega) \left( \frac{1}{2} + n(\omega) \right) \hbar \omega d\omega$$

$$E - E_0 = \frac{N \hbar \omega_0}{e^{\hbar \omega_0 / T} - 1}$$

$$C = N k_B \left( \frac{\hbar \omega}{k_B T} \right)^2 \frac{e^{\hbar \omega_0 / (k_B T)}}{(e^{\hbar \omega_0 / (k_B T)} - 1)^2} = \begin{cases} \propto e^{-\hbar \omega_0 / (k_B T)}, & k_B T \ll \hbar \omega_0 \\ N k_B, & k_B T \gg \hbar \omega_0 \end{cases}$$

!!! вернули постоянную Больцмана

# Эксперимент: Теплоёмкость серебра.

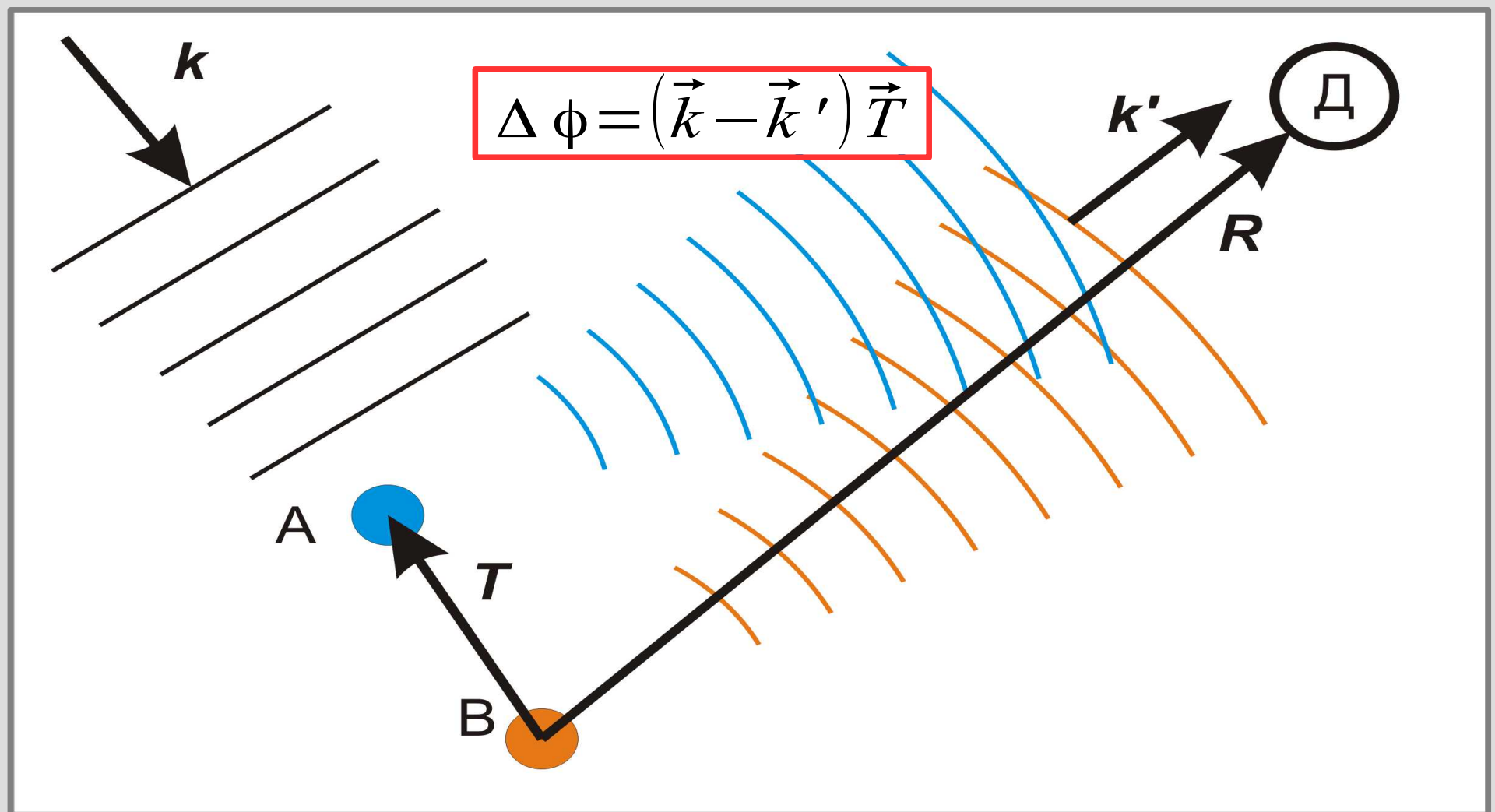


Данные: D.R.Smith and F.R.Fickett, Low-Temperature Properties of Silver, Journal of Research of the National Institute of Standards and Technology, 100, 119(1995)



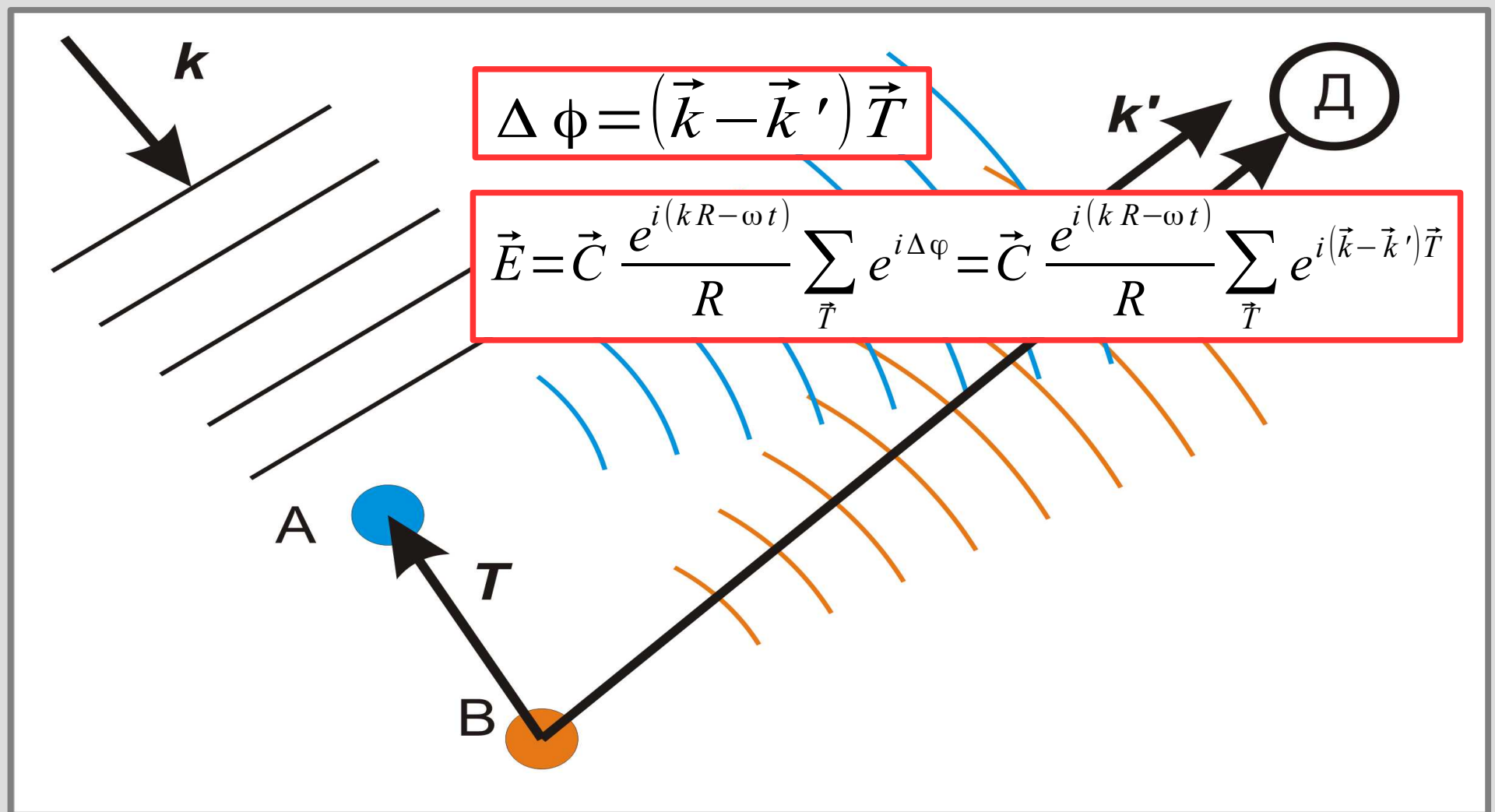
# Часть 5. Квантование колебаний решётки. Фононы.

# Напоминание: дифракция на кристалле

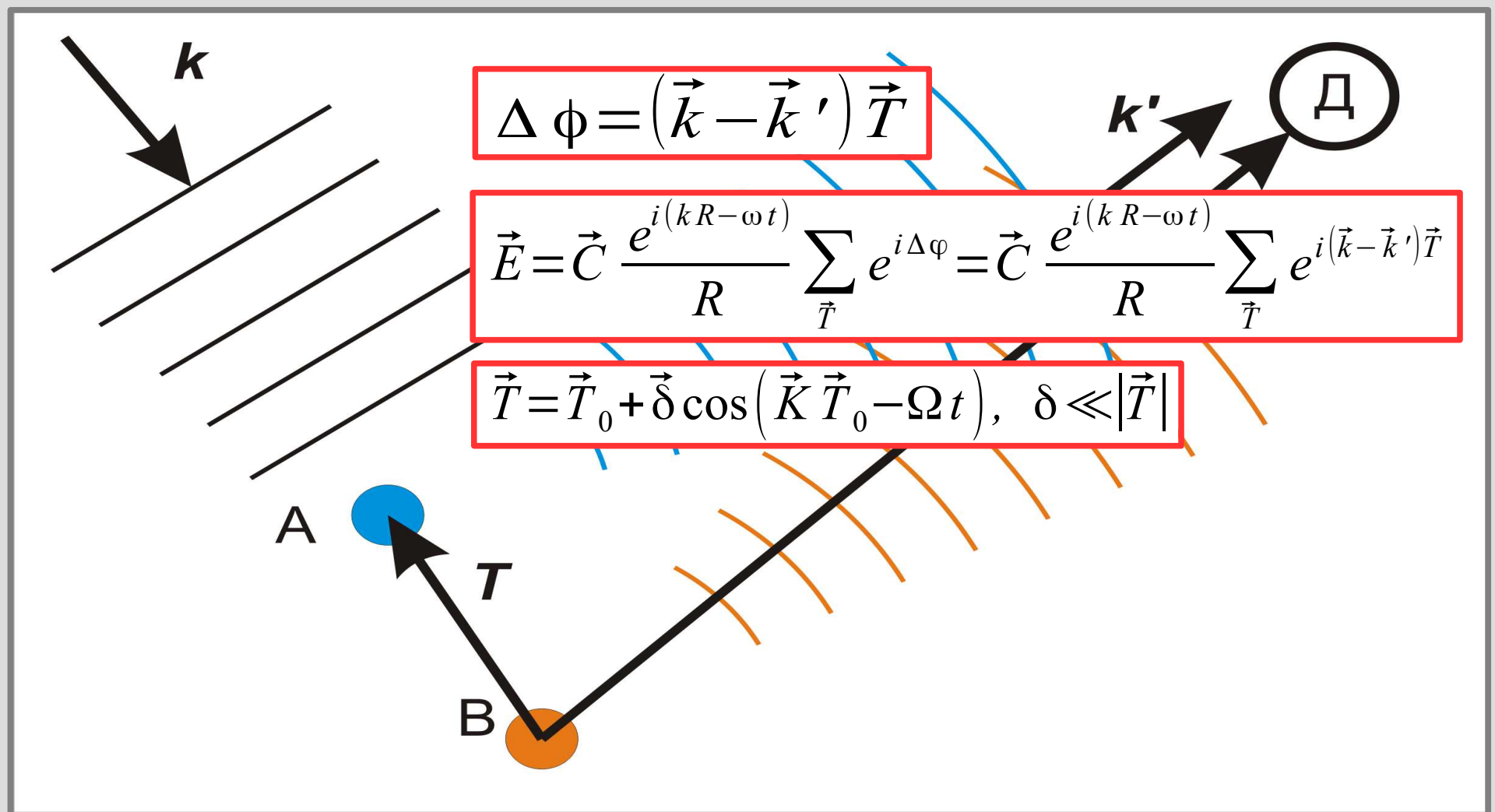




# Напоминание: дифракция на кристалле



# Учёт колебаний атомов.



# Учёт колебаний атомов.

$$\Delta \phi = (\vec{k} - \vec{k}') \vec{T}$$

$$\vec{E} = \vec{C} \frac{e^{i(kR - \omega t)}}{R} \sum_{\vec{T}} e^{i\Delta\phi} = \vec{C} \frac{e^{i(kR - \omega t)}}{R} \sum_{\vec{T}} e^{i(\vec{k} - \vec{k}')\vec{T}}$$

$$\vec{T} = \vec{T}_0 + \vec{\delta} \cos(\vec{K} \vec{T}_0 - \Omega t), \quad \delta \ll |\vec{T}|$$

$$\frac{e^{i(kR - \omega t)}}{R} \sum_{\vec{T}} e^{i(\vec{k} - \vec{k}')\vec{T}} =$$

B



# Учёт колебаний атомов.

$$\Delta \phi = (\vec{k} - \vec{k}') \vec{T}$$

$$\vec{E} = \vec{C} \frac{e^{i(kR - \omega t)}}{R} \sum_{\vec{T}} e^{i\Delta\phi} = \vec{C} \frac{e^{i(kR - \omega t)}}{R} \sum_{\vec{T}} e^{i(\vec{k} - \vec{k}')\vec{T}}$$

$$\vec{T} = \vec{T}_0 + \vec{\delta} \cos(\vec{K} \vec{T}_0 - \Omega t), \quad \delta \ll |\vec{T}|$$

$$\frac{e^{i(kR - \omega t)}}{R} \sum_{\vec{T}} e^{i(\vec{k} - \vec{k}')\vec{T}} = \frac{e^{i(kR - \omega t)}}{R} \sum_{\vec{T}_0} e^{i(\vec{k} - \vec{k}')\vec{T}_0} \left[ 1 + ((\vec{k} - \vec{k}')\vec{\delta}) \frac{e^{i(\vec{K} \vec{T}_0 - \Omega t)} + e^{-i(\vec{K} \vec{T}_0 - \Omega t)}}{2} \right]$$

B

Д

упругий процесс:

$$\omega' = \omega, \quad \vec{k} - \vec{k}' = \vec{G}$$

неупругие процессы:

$$\omega' = \omega + \Omega, \quad \vec{k} + \vec{K} - \vec{k}' = \vec{G}$$

$$\omega' = \omega - \Omega, \quad \vec{k} - \vec{K} - \vec{k}' = \vec{G}$$



$$C \frac{e^{i(kR - \omega t)}}{R} \sum_{\vec{T}} e^{i(\vec{k} - \vec{k}')\vec{T}}$$

$$I = I_0 + \delta \cos(KT_0 - \Omega t), \quad \delta \ll |\vec{T}|$$

$$\frac{e^{i(kR - \omega t)}}{R} \sum_{\vec{T}} e^{i(\vec{k} - \vec{k}')\vec{T}} = \frac{e^{i(kR - \omega t)}}{R} \sum_{\vec{T}_0} e^{i(\vec{k} - \vec{k}')\vec{T}_0} \left[ 1 + \left( (\vec{k} - \vec{k}')\vec{\delta} \right) \frac{e^{i(\vec{K}\vec{T}_0 - \Omega t)} + e^{-i(\vec{K}\vec{T}_0 - \Omega t)}}{2} \right]$$

B



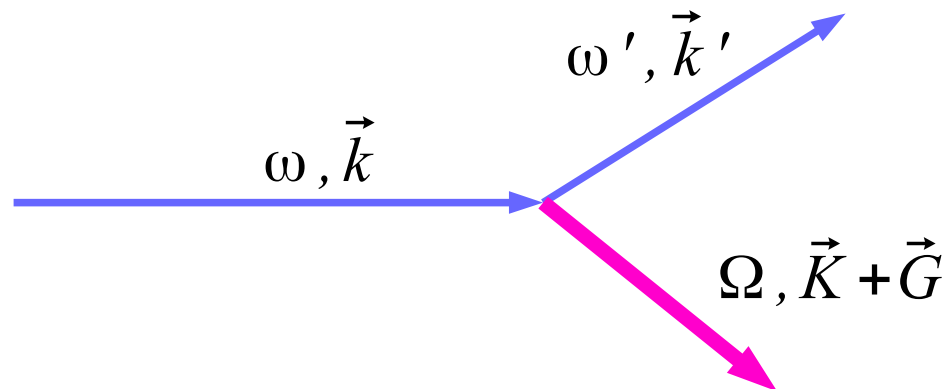
упругий процесс:

$$\omega' = \omega, \quad \vec{k} - \vec{k}' = \vec{G}$$

неупругие процессы:

$$\omega' = \omega + \Omega, \quad \vec{k} + \vec{K} - \vec{k}' = \vec{G}$$

$$\omega' = \omega - \Omega, \quad \vec{k} - \vec{K} - \vec{k}' = \vec{G}$$



$$\frac{e^{i(kR - \omega t)}}{R} \sum_{\vec{T}} e^{i(\vec{k} - \vec{k}')\vec{T}}$$

$$C \frac{e^{i(kR - \omega t)}}{\sum_{\vec{T}} e^{i(\vec{k}' - \vec{k})\vec{T}}}$$

$$\left[ \frac{-i(\vec{K}\vec{T}_0 - \Omega t)}{\dots} \right]$$

упругий процесс:

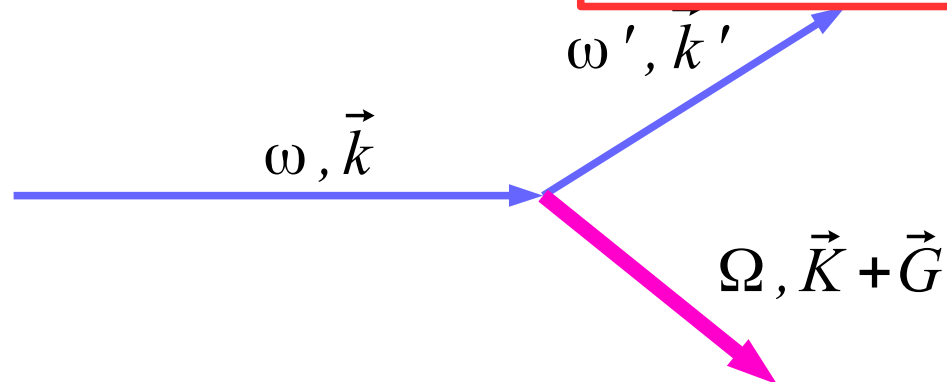
$$\omega' = \omega, \quad \vec{k} - \vec{k}' = \vec{G}$$

неупругие процессы:

$$\omega' = \omega + \Omega, \quad \vec{k} + \vec{K} - \vec{k}' = \vec{G}$$

$$\omega' = \omega - \Omega, \quad \vec{k} - \vec{K} - \vec{k}' = \vec{G}$$

При взаимодействии с фотоном квант колебаний решётки ведёт себя как квазичастица (фонон) с энергией  $\hbar \Omega$  квазиимпульсом  $\hbar (\vec{K} + \vec{G})$



$$\frac{e^{i(kR - \omega t)}}{R} \sum_{\vec{T}} e^{i(\vec{k} - \vec{k}')\vec{T}}$$

$$\left[ \frac{e^{-i(\vec{K}\vec{T}_0 - \Omega t)}}{\dots} \right]$$





## Часть 6. А можно ли строго...

# Квантовый подход к описанию колебаний атомов. Элементы вторичного квантования.

$\{\psi_k\}$  «привычные» волновые функции  
 $N_k$  количество частиц в k-ом состоянии

$\{N_k\}$  эквивалентный способ задания  
состояния системы

# Квантовый подход к описанию колебаний атомов. Элементы вторичного квантования.

$\{\psi_k\}$  «привычные» волновые функции  
 $N_k$  количество частиц в k-ом состоянии

$\{N_k\}$  эквивалентный способ задания  
состояния системы

$\hat{a}_n |N_1, N_2, \dots, N_n, \dots\rangle = \sqrt{N_n} |N_1, N_2, \dots, N_n - 1, \dots\rangle$  уничтожение

$\hat{a}_n^+ |N_1, N_2, \dots, N_n, \dots\rangle = \sqrt{N_n + 1} |N_1, N_2, \dots, N_n + 1, \dots\rangle$  рождение

# Квантовый подход к описанию колебаний атомов. Элементы вторичного квантования.

$\{\psi_k\}$  «привычные» волновые функции  
 $N_k$  количество частиц в k-ом состоянии

$\{N_k\}$  эквивалентный способ задания состояния системы

$\hat{a}_n |N_1, N_2, \dots, N_n, \dots\rangle = \sqrt{N_n} |N_1, N_2, \dots, N_n - 1, \dots\rangle$  уничтожение

$\hat{a}_n^+ |N_1, N_2, \dots, N_n, \dots\rangle = \sqrt{N_n + 1} |N_1, N_2, \dots, N_n + 1, \dots\rangle$  рождение

Число частиц:

$$\hat{a}_n^+ \hat{a}_n = N_n$$

Энергия:  $\hat{H} = \sum_n \varepsilon_n N_n = \sum_n \varepsilon_n \hat{a}_n^+ \hat{a}_n$

взаимодействие:  $\sum_{n, n', m, m'} H_{nn', mm'}^{(2)} \hat{a}_m^+ \hat{a}_n \hat{a}_m^+ \hat{a}_{n'}$

# Квант колебаний

Если подобрать такое преобразование операторов исходных физических величин

$$\hat{a}_n = \hat{f} \left( \left\{ \hat{x}_i \right\}, \left\{ \hat{p}_i \right\} \right)$$

что гамильтониан примет вид

$$\hat{H} = \sum_n \varepsilon_n \hat{a}_n^+ \hat{a}_n$$

то нам удалось переформулировать нашу задачу на задачу невзаимодействующих частиц

$\varepsilon_n$  энергетический спектр этих частиц

$$\{\psi_k\}$$

«привык

$$N_k$$

количес

$$\hat{a}_n |N_1, N_2, \dots, N_n\rangle$$

$$\hat{a}_n^+ |N_1, N_2, \dots, N_n\rangle$$

Число частиц:

$$\hat{a}_n^+ \hat{a}_n = N_n$$

Энергия: 
$$\hat{H} = \sum_n \varepsilon_n N_n = \sum_n \varepsilon_n \hat{a}_n^+ \hat{a}_n$$

взаимодействие: 
$$\sum_{n, n', m, m'} H_{nn', mm}^{(2)} \hat{a}_m^+ \hat{a}_n \hat{a}_m^+ \hat{a}_{n'}$$

## Вторичное квантование упругих колебаний «крупными мазками».

$$\hat{H} = \sum_{j=1}^N \frac{1}{2M} \hat{p}_j^2 + \frac{C}{2} (x_{j+1} - x_j)^2$$

$$x_r = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_k X_k e^{ikr}$$
$$\hat{p}_r = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_k P_k e^{-ikr}$$

$$\hat{H} = \sum_k \frac{1}{2M} P_k P_{-k} + C(1 - \cos(ka)) X_k X_{-k}$$

## Вторичное квантование упругих колебаний «крупными мазками».

$$\hat{H} = \sum_k \frac{1}{2M} P_k P_{-k} + C(1 - \cos(ka)) X_k X_{-k}$$

$$a_k^+ = \frac{1}{\sqrt{2\hbar M \omega_k}} (M \omega_k X_{-k} - iP_k)$$
$$a_k = \frac{1}{\sqrt{2\hbar M \omega_k}} (M \omega_k X_k + iP_{-k})$$

$$\omega_k = \sqrt{\frac{2C}{M} (1 - \cos(ka))} = \omega_{-k}$$

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \hbar \sum_k \omega_k (a_k a_k^+ + a_k^+ a_k) = \hbar \sum_k \omega_k \left( a_k^+ a_k + \frac{1}{2} \right) = \hbar \sum_k \omega_k \left( n_k + \frac{1}{2} \right)$$

# Вторичное квантование упругих колебаний «крупными мазками».

$$\hat{H} = \sum_k \frac{1}{2M} P_k^2$$

Исходный гамильтониан взаимодействующих гармоническим потенциалом атомов преобразован в гамильтониан невзаимодействующих частиц (т.е. фононов!) со спектром  $\omega(k)$ .

$$a_k^+ =$$

$$a_k =$$

Преобразование *строгое* = в гармоническом приближении фононы не взаимодействуют друг с другом.

$$\omega(k) = \omega(-k)$$

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \hbar \sum_k \omega_k \left( a_k a_k^+ + a_k^+ a_k \right) = \hbar \sum_k \omega_k \left( a_k^+ a_k + \frac{1}{2} \right) = \hbar \sum_k \omega_k \left( n_k + \frac{1}{2} \right)$$





Бонус (на лекции не было).  
Амплитуды тепловых и квантовых  
колебаний атомов.

# Амплитуды тепловых и квантовых колебаний атомов.

$$\langle (u(\vec{r}, t))^2 \rangle = ?$$

# Амплитуды тепловых и квантовых колебаний атомов.

$$\langle (u(\vec{r}, t))^2 \rangle = ?$$

$$\vec{u}(\vec{r}, t) = \sum_{\vec{k}, \alpha} \vec{A}_{\vec{k}, \alpha} \cos(\vec{k} \vec{r} - \omega t + \varphi_{\vec{k}, \alpha})$$
$$\langle \vec{u}^2 \rangle = \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}, \alpha} \langle (\vec{A}_{\vec{k}, \alpha})^2 \rangle$$

# Среднеквадратичные амплитуды мод колебаний в «чистой моде колебаний».

$$u_i = A \cos(\vec{k} \vec{r}_i - \omega t)$$

Для гармонических колебаний средние кинетические и потенциальные энергии равны

$$\begin{aligned} E = \langle E \rangle &= \left\langle \sum_i C \frac{(u_i - u_{i+1})^2}{2} + m \frac{(du_i/dt)^2}{2} \right\rangle = N m \langle (du_i/dt)^2 \rangle = \\ &= \frac{1}{2} N m \omega^2 A^2 \end{aligned}$$

# Среднеквадратичные амплитуды мод колебаний в «чистой моде колебаний».

$$u_i = A \cos(\vec{k} \vec{r}_i - \omega t)$$

Для гармонических колебаний средние кинетические и потенциальные энергии равны

$$\begin{aligned} E = \langle E \rangle &= \left\langle \sum_i C \frac{(u_i - u_{i+1})^2}{2} + m \frac{(du_i/dt)^2}{2} \right\rangle = N m \langle (du_i/dt)^2 \rangle = \\ &= \frac{1}{2} N m \omega^2 A^2 \end{aligned}$$

Для квантового осциллятора

$$E = \hbar \omega \left( n + \frac{1}{2} \right)$$

# Среднеквадратичные амплитуды мод колебаний в «чистой моде колебаний».

$$u_i = A \cos(\vec{k} \vec{r}_i - \omega t)$$

Для гармонических колебаний средние кинетические и потенциальные энергии равны

$$E = \langle E \rangle = \left\langle \sum_i C \frac{(u_i - u_{i+1})^2}{2} + m \frac{(du_i/dt)^2}{2} \right\rangle = N m \langle (du_i/dt)^2 \rangle = \\ = \frac{1}{2} N m \omega^2 A^2$$

$$\langle A_k^2 \rangle = \frac{2 \hbar}{M \omega_k} \left( n + \frac{1}{2} \right)$$

Для квантового осциллятора

$$E = \hbar \omega \left( n + \frac{1}{2} \right)$$

# Амплитуды тепловых и квантовых колебаний атомов.

$$\langle (u(\vec{r}, t))^2 \rangle = ?$$

$$\langle \vec{u}^2 \rangle = \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}, \alpha} \langle (\vec{A}_{\vec{k}, \alpha})^2 \rangle$$

$$\langle A_k^2 \rangle = \frac{2\hbar}{M\omega_k} \left( n + \frac{1}{2} \right)$$

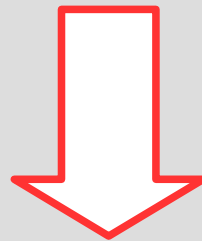


# Амплитуды тепловых и квантовых колебаний атомов.

$$\langle (u(\vec{r}, t))^2 \rangle = ?$$

$$\langle \vec{u}^2 \rangle = \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}, \alpha} \langle (\vec{A}_{\vec{k}, \alpha})^2 \rangle$$

$$\langle A_k^2 \rangle = \frac{2\hbar}{M \omega_k} \left( n + \frac{1}{2} \right)$$



$$\langle \vec{u}^2 \rangle = N_P \frac{2\hbar}{M} \int \frac{n(\omega) + 1/2}{\omega} \frac{V d^D k}{(2\pi)^D}$$

Случай  $T=0$ .

$$\langle u^2 \rangle = \frac{2 \hbar N_P}{\rho} \int \frac{\cancel{n_k} + 1/2}{\omega(\vec{k})} \frac{d^D k}{(2\pi)^D}$$

## Случай $T=0$ .

$$\langle u^2 \rangle = \frac{2 \hbar N_P}{\rho} \int \frac{\cancel{n_k} + 1/2}{\omega(\vec{k})} \frac{d^D k}{(2\pi)^D}$$

$\omega = s k$ , 1D:

$$\langle u^2 \rangle \propto \int_0^{\pi/a} \frac{dk}{k}$$

длинноволновая расходимость,  
одномерных кристаллов не  
существует даже при  $T=0$

## Случай $T=0$ .

$$\langle u^2 \rangle = \frac{2 \hbar N_P}{\rho} \int \frac{\cancel{n_k} + 1/2}{\omega(\vec{k})} \frac{d^D k}{(2\pi)^D}$$

$\omega = s k$ , 1D:

$$\langle u^2 \rangle \propto \int_0^{\pi/a} \frac{dk}{k}$$

длинноволновая расходимость,  
одномерных кристаллов не  
существует даже при  $T=0$

$\omega = s k$ , 3D, дебаевское приближение:

$$\langle u^2 \rangle = \frac{3 \hbar}{s \rho} \int_0^{k_D} \frac{4 \pi k^2 dk}{k} = \frac{6 \pi \hbar k_D^2}{s \rho} \propto \frac{a}{s m} \simeq \frac{1}{\sqrt{C m}}$$

обычно  
мало

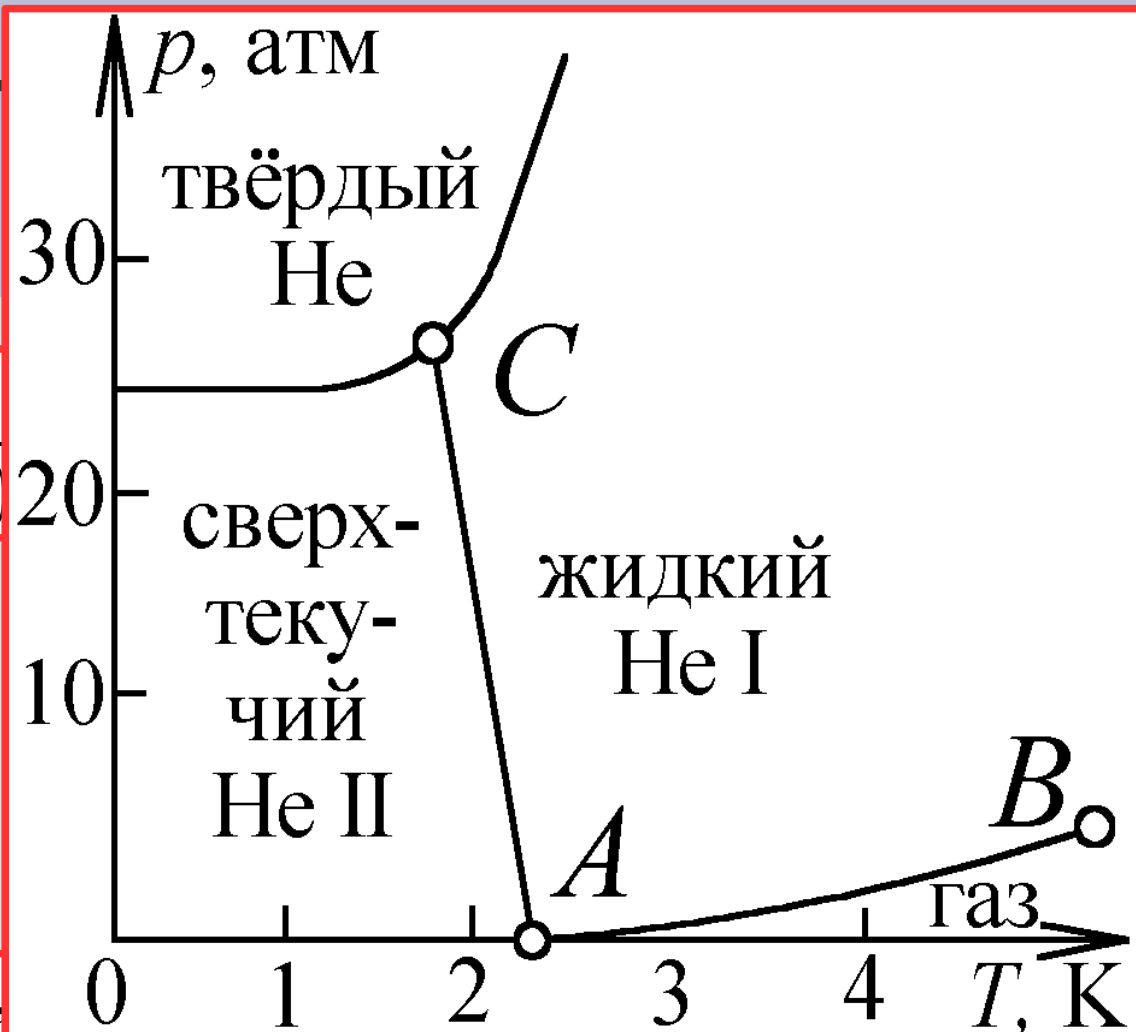
Случай Т

$$\langle u^2 \rangle = \frac{2 \hbar N_P}{\rho} \int \frac{n_k + 1/2}{\omega(\vec{k})} d\vec{k}$$

$$\omega = s k, \text{ 1D: } \langle u^2 \rangle \propto \int_0^{\pi/a} \frac{dk}{k}$$

$$\omega = s k, \text{ 3D: }$$

$$\langle u^2 \rangle = \frac{3 \hbar}{s \rho} \int_0^{k_D} \frac{4 \pi k^2 dk}{k} = \frac{6 \pi \hbar k_D^2}{s \rho} \propto \frac{a}{s m} \simeq \frac{1}{\sqrt{C m}}$$



обычно  
мало

Случай  $T > 0$ .

$$\langle u^2 \rangle = \frac{2 \hbar N_P}{\rho} \int \frac{n_k + 1/2}{\omega(\vec{k})} \frac{d^D k}{(2\pi)^D} = \langle u^2 \rangle_0 + \frac{2 \hbar N_P}{\rho} \int \frac{n_k}{\omega(\vec{k})} \frac{d^D k}{(2\pi)^D}$$

Случай  $T > 0$ .

$$\langle u^2 \rangle = \frac{2 \hbar N_P}{\rho} \int \frac{n_k + 1/2}{\omega(\vec{k})} \frac{d^D k}{(2\pi)^D} = \langle u^2 \rangle_0 + \frac{2 \hbar N_P}{\rho} \int \frac{n_k}{\omega(\vec{k})} \frac{d^D k}{(2\pi)^D}$$

$$\omega = s k, \omega \rightarrow 0$$
$$\int_0 \frac{1}{\omega} \frac{1}{e^{\hbar\omega/T} - 1} \omega^{D-1} d\omega \propto T \int_0 \frac{\omega^{D-1}}{\omega^2} d\omega$$

Расходимость при  $D=2$ ,  
двумерные кристаллы не  
существуют при  $T > 0$

## Случай $T \gg \Theta$ , 3D, модель Дебая.

$$\langle u^2 \rangle = \frac{2 \hbar N_P}{\rho} \int \frac{n_k + 1/2}{\omega(\vec{k})} \frac{d^D k}{(2\pi)^D} = \langle u^2 \rangle_0 + \frac{2 \hbar N_P}{\rho} \int \frac{n_k}{\omega(\vec{k})} \frac{d^D k}{(2\pi)^D}$$

$$\langle u^2 \rangle \simeq \frac{6}{\rho} T \int_0^{k_D} \frac{4\pi k^2 dk}{s^2 k^2 (2\pi)^3} = \frac{3}{\pi^2} \frac{k_D T}{s^2 \rho} \sim \frac{T}{m \omega_D^2}$$

заметаемая тепловыми колебаниями площадь пропорциональна  $T$



## Случай $T \gg \Theta$ , 3D, модель Дебая.

$$\langle u^2 \rangle = \frac{2 \hbar N_P}{\rho} \int \frac{n_k + 1/2}{\omega(\vec{k})} \frac{d^D k}{(2\pi)^D} = \langle u^2 \rangle_0 + \frac{2 \hbar N_P}{\rho} \int \frac{n_k}{\omega(\vec{k})} \frac{d^D k}{(2\pi)^D}$$

$$\langle u^2 \rangle \simeq \frac{6}{\rho} T \int_0^{k_D} \frac{4\pi k^2 dk}{s^2 k^2 (2\pi)^3} = \frac{3}{\pi^2} \frac{k_D T}{s^2 \rho} \sim \frac{T}{m \omega_D^2}$$

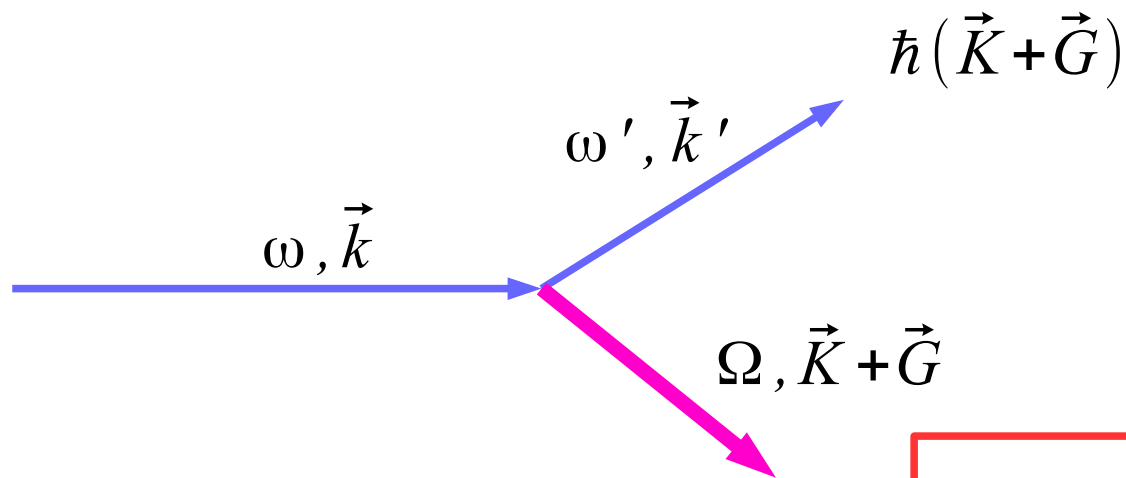
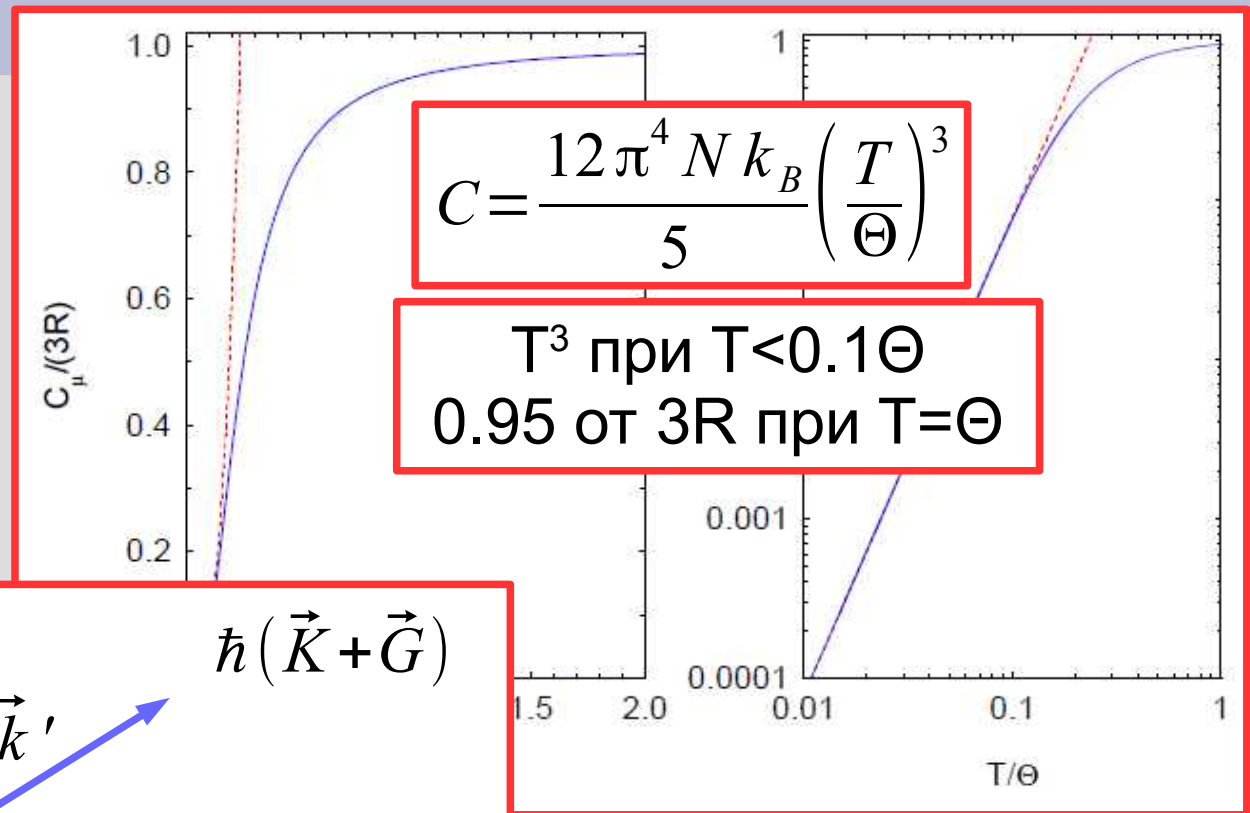
заметаемая тепловыми колебаниями площадь пропорциональна  $T$

$$T=1000\text{K}, A=50, s=3\text{км/сек}$$

$$\frac{\langle u^2 \rangle}{a^2} \sim \frac{T}{m s^2} \sim \frac{10^{-23} \times 10^3}{10^{-25} \times 10^7} = \frac{1}{100}$$

трёхмерные кристаллы всё-таки существуют

# Главное в этой лекции.



$$E = \sum_i \int_0^\infty D_i(\omega) \left( \frac{1}{2} + n(\omega) \right) \hbar \omega d\omega$$