

# Домашняя работа по квантовой физике

Драчов Ярослав  
Факультет общей и прикладной физики МФТИ

8 ноября 2020 г.

## Задача 0-6-1

Решение.

$$E_l = \frac{\hbar^2}{2I} l(l+1).$$

$$E_1 - E_0 = \frac{\hbar^2}{I}.$$

$$kT = \frac{\hbar^2}{I} = \frac{\hbar^2}{\mu a^2} = \frac{2\hbar^2}{m_O a^2}.$$

$$T = \frac{2\hbar^2}{m_O k a^2} = \frac{2(1,0546 \cdot 10^{-27})^2}{16 \cdot 1,66 \cdot 10^{-24} \cdot 1,38 \cdot 10^{-16} \cdot (1,2 \cdot 10^{-8})^2} = 4,2 \text{ К}.$$

## Задача 0-6-2

Решение.

$$E_1 = -\frac{me^4}{2\hbar^2} \cdot \frac{1}{1} = -Ry = -13,6 \text{ эВ}.$$

$$E_2 = -\frac{me^4}{2\hbar^2} \cdot \frac{1}{4} = -Ry = -3,4 \text{ эВ} \rightarrow \Delta E_{12} = 10,2 \text{ эВ}.$$

$$E_3 = -\frac{me^4}{2\hbar^2} \cdot \frac{1}{9} = -Ry = -1,51 \text{ эВ} \rightarrow \Delta E_{13} = 12,09 \text{ эВ}.$$

$$E_4 = -\frac{me^4}{2\hbar^2} \cdot \frac{1}{16} = -Ry = -0,85 \text{ эВ} \rightarrow \Delta E_{14} = 12,75 \text{ эВ}.$$

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 - \Delta E_{13} = 12,5 - 12,09 = 0,41 \text{ эВ}.$$

## Задача 4.29

Решение.

$$\mu = \frac{m_p}{2}.$$

$$E_n = -\frac{\mu e^4}{2\hbar^2 n^2} = -Ry \frac{m_p}{m_e} \frac{1}{2n^2} \approx -12,5 \frac{1}{n^2} \text{ кэВ}.$$

Следовательно, вклад кулоновского взаимодействия в энергию перехода  $2p \rightarrow 1s$  в атоме протония составляет

$$\Delta \mathcal{E}_{\text{кул}} = 12,5 \left( \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} \right) \approx 9,4 \text{ кэВ}.$$

Расхождение с экспериментальным значением обусловлено вкладом сильного взаимодействия. Таким образом,

$$\Delta\mathcal{E}_{\text{сил}} = \Delta\mathcal{E}_{\text{эксп}} - \Delta\mathcal{E}_{\text{кул}} = 10,1 - 9,4 \approx 0,7 \text{ кэВ}.$$

В силу короткодействия ядерных сил их влияние на положение  $2p$ -состояния незначительно по сравнению с  $1s$  состоянием, поскольку в кулоновском потенциале вероятность частице в  $2p$ -состоянии попасть в окрестность начала координат близка к нулю.

#### Задача 4.38

*Решение.* Согласно закону Мозли энергия кванта, излученного при переходе электрона с уровня  $n_2$  на уровень  $n_1$  (заряд ядра  $Z$ , а  $\sigma$  — поправка на экранирование заряда ядра электронами  $K$ -оболочки)

$$\mathcal{E} = \hbar\omega = \text{Ry}(Z - \sigma)^2 \left( \frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right).$$

Для линии  $K_\alpha$   $n_1 = 1$ ,  $n_2 = 2$ . Поскольку энергия такого кванта в спектре излучения серебра известна и равна  $\mathcal{E} = 21,6$  кэВ, то из приведённой формулы найдём поправку  $\sigma$  на экранирование заряда ядра электронами на  $K$ -оболочке (в обоих случаях  $Z < 50$ )

$$\sigma = Z_{\text{Ag}} - \sqrt{\frac{4\mathcal{E}}{3\text{Ry}}} \approx 1.$$

Энергия, необходимая для освобождения электрона из  $K$ -оболочки атома  $_{30}\text{Zn}$  (переход с  $n = 1$  в  $n = \infty$ ), равна

$$(\hbar\omega)_{\text{Zn}} = \text{Ry}(Z_{\text{Zn}} - 1)^2 = 13,6 \cdot 29^2 = 11,4 \text{ кэВ},$$

а значит, кинетическая энергия  $T_e$  вылетевшего оттуда электрона равна

$$T_e = \mathcal{E} - (\hbar\omega)_{\text{Zn}} = 21,6 - 11,4 = 10,2 \text{ кэВ}.$$

#### Задача 4.42

*Решение.* Считаем, что решение задачи об уровнях энергии в кулоновском поле точечного заряда известно:  $\hat{H}\varphi = \mathcal{E}\psi$ , где  $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} - \frac{Ze^2}{r}$ ,  $\mathcal{E} = -\frac{Z^2 m e^4}{2\hbar^2} \frac{1}{n^2}$ . Рассмотрим  $n = 1$ , тогда  $\psi_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi r_1^3}} e^{-r/r_1}$ . Истинный потенциал при  $r \geq R_{\text{я}}$  совпадает с потенциалом точечного ядра и отличается от него при  $r < R_{\text{я}}$ . Если считать ядро равномерно заряженной по поверхности сферой, то  $U(r < R_{\text{я}}) = -\frac{Ze^2}{R_{\text{я}}}$ ; если равномерно заряженным шаром, то  $U(r < R_{\text{я}}) = -\frac{3}{2} \frac{Ze^2}{R_{\text{я}}} \left( 1 - \frac{r^2}{3R_{\text{я}}^2} \right)$ .

Представим истинный гамильтониан в виде

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} - \frac{Ze^2}{r} + \delta U,$$

где для шара

$$\delta U = \begin{cases} 0, & r \geq R_{\text{я}}, \\ \frac{Ze^2}{r} - \frac{3}{2} \frac{Ze^2}{R_{\text{я}}} \left( 1 - \frac{r^2}{3R_{\text{я}}^2} \right), & r < R_{\text{я}} \end{cases}$$

и для сферы

$$\delta U = \begin{cases} 0, & r \geq R_{\text{я}}, \\ \frac{Ze^2}{r} - \frac{Ze^2}{R_{\text{я}}}, & r < R_{\text{я}}. \end{cases}$$

Так как всё отличие происходит при  $r < R_{\text{я}} \ll r_1$ , то рассматриваем  $\delta U$  как поправку. Среднее значение  $\delta U$  в основном состоянии и есть сдвиг уровня:

$$\langle \psi_1 | \hat{H} | \psi_1 \rangle = \langle \psi_1 | \frac{\hat{p}^2}{2m} - \frac{Ze^2}{r} | \psi_1 \rangle + \langle \psi_1 | \delta U | \psi_1 \rangle = -\frac{mZ^2e^4}{2\hbar^2} + \Delta\mathcal{E},$$

$$\Delta\mathcal{E} = \int dV \psi_1^* \delta U \psi_1 = \frac{1}{\pi r_1^3} 4\pi \int_0^{R_{\text{я}}} e^{-2r/r_1} \left\{ \frac{Ze^2}{r} - \frac{3}{2} \frac{Ze^2}{R_{\text{я}}} \left( 1 - \frac{r^2}{3R_{\text{я}}^2} \right) \right\} r^2 dr,$$

т. к.  $\frac{R_{\text{я}}}{r_1} \leq \frac{3,5 \cdot 10^{-13}}{25,6 \cdot 10^{-13}} \sim 0,1$ , то  $e^{-2r/r_1} \approx 1$ . Тогда

$$\Delta\mathcal{E} \approx \frac{4}{r_1^3} \int_0^{R_{\text{я}}} \left\{ Ze^2 \left( r - \frac{r^2}{R_{\text{я}}} \right) \right\} dr = \begin{cases} \frac{2}{3} \frac{Ze^2}{r_1} \left( \frac{R_{\text{я}}}{r_1} \right)^2 & \text{— сфера,} \\ \frac{2}{5} \frac{Ze^2}{r_1} \left( \frac{R_{\text{я}}}{r_1} \right)^2 & \text{— шар.} \end{cases}$$

Видно, что поправка положительна, следовательно, уровни сдвигаются вверх. Относительная поправка

$$\delta = \left| \frac{\Delta\mathcal{E}}{\mathcal{E}_1} \right| = \frac{\Delta\mathcal{E}}{\frac{Ze^2}{2r_1}} = \begin{cases} \frac{4}{3} \left( \frac{R_{\text{я}}}{r_1} \right)^2 & \text{— сфера,} \\ \frac{4}{5} \left( \frac{R_{\text{я}}}{r_1} \right)^2 & \text{— шар,} \end{cases}$$

где  $r_1 = \frac{\hbar^2}{Zm_e e^2}$ , откуда

$$\frac{\Delta\mathcal{E}}{\mathcal{E}} = \begin{cases} 5,94 \cdot 10^{-7} & \text{— сфера,} \\ 3,56 \cdot 10^{-7} & \text{— шар.} \end{cases}$$

#### Задача 4.45

Решение.

$$r_{\mu} = \frac{\hbar^2}{m_{\mu} Z e^2} \frac{m_e}{m_e} = r_{\text{Б}} \frac{m_e}{Z m_{\mu}} = 1,27 \cdot 10^{-11} \text{ см} \ll r_{\text{Б}}.$$

$$\frac{1}{\lambda_{32}} = R_{\infty} \left( \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} \right) = \frac{5}{36} R_{\infty} = \frac{5}{36} = 1,52 \cdot 10^4 \text{ см}^{-1}.$$

$$\lambda_{32} = 656 \text{ нм.}$$

$$\mathcal{E}_{32} = \frac{hc}{\lambda_{32}} = 1,89 \text{ эВ.}$$

**Задача 5.16***Решение.*

$$I = \mu d^2 \approx m d^2.$$

$$\Delta E_l = \frac{\hbar^2}{I}(l+1) = \frac{\hbar^2}{I}.$$

$$\Delta E = \frac{\hbar^2}{m d^2} = \frac{hc}{\lambda} = hc \left( \frac{1}{\lambda} \right).$$

$$d^2 = \frac{\hbar^2}{m h c \left( \frac{1}{\lambda} \right)} = \frac{\hbar^2}{2\pi m c \Delta} = 1,97 \cdot 10^{-16} \text{ см}^2.$$

$$d = 1,4 \cdot 10^{-8} \text{ см}.$$

**Задача 5.25***Решение.*

$$\overline{E} = \overline{E}_{\text{кин}} + \overline{E}_{\text{пот}}.$$

$$\overline{E}_{\text{к}} = \overline{E}_{\text{п}} = \frac{\mu \omega^2 \overline{x^2}}{2}.$$

$$\overline{E} = \frac{\hbar \omega}{2}.$$

$$\overline{x^2} = \overline{A_0^2 \cos^2 \omega t} = \frac{\overline{A_0^2}}{2} \rightarrow \frac{\hbar \omega}{2} = 2 \cdot \frac{\mu \omega^2}{2} \frac{A_0^2}{2}.$$

$$A_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{\mu \omega}}.$$

$$\mu = \frac{m_O m_C}{m_O + m_C} = \frac{16 \cdot 12}{16 + 12} \cdot 1,66 \cdot 10^{-24} \text{ г} = 11,45 \cdot 10^{-24} \text{ г}.$$

$$\omega = \frac{2\pi c}{\lambda} \rightarrow A_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{\mu \omega}} = \sqrt{\frac{\hbar \cdot \lambda}{2\pi c \mu}} \approx 4,7 \cdot 10^{-10} \text{ см}.$$

$$kT \geq \hbar \omega.$$

$$T \geq \frac{2\pi \hbar c}{k \cdot \lambda} \approx 3100 \text{ К}.$$

**Задача 5.51***Решение.*  $\text{H}^{35}\text{Cl} : \mu_{35} = \frac{1 \cdot 35}{1+35} = 0,9722 m_p.$  $\text{H}^{37}\text{Cl} : \mu_{37} = \frac{1 \cdot 37}{1+37} = 0,9737 m_p$ 

$$\Delta \mu = 0,0015 m_p.$$

$$\lambda = \frac{hc}{\Delta \mathcal{E}_{\text{кол}}} = \frac{hc}{\hbar \sqrt{\frac{k}{\mu}}} = 2\pi c \sqrt{\frac{\mu}{k}} \propto \sqrt{\mu}.$$

$$\frac{\Delta \lambda}{\lambda} = \frac{1}{2} \frac{\Delta \mu}{\mu} = 7,7 \cdot 10^{-4}.$$

**Задача 5.55**

Решение. При  $n > n_{\max}$  не  $\exists$  реальных  $n$ .

$$\frac{dE_n}{dn} = \hbar\omega \left[ 1 - 2\alpha \left( n + \frac{1}{2} \right) \right] = 0.$$

$$n^{\max} = \frac{1 - \alpha}{2\alpha} = 80,9.$$

$$N_{\max} = 81.$$

**Задача 0-7-1**

Решение. См. табл. 1.

$n$	$l$	$j$
3	0	$\pm 1/2$
	1	$3/2; 1/2$
	2	$5/2; 3/2$

Таблица 1

$$l = 0; \dots; n - 1 = 0; 1; 2.$$

$$j = l + s, \text{ т. е. } j = l + \frac{1}{2}, \text{ либо } j = l - \frac{1}{2}.$$

$$j = \pm \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; \frac{5}{2}.$$

**Задача 0-7-2**

Решение.  $2p$ -сост:  $n = 2; l = 1$

$$j = \frac{1}{2}; \frac{3}{2}.$$

$$J = m_j \hbar; \quad m_j = \pm j; \pm(j - 1); \dots; 0 = \pm \frac{3}{2}; \pm \frac{1}{2}; 0.$$

$$J = 0; \pm \frac{1}{2} \hbar; \pm \frac{3}{2} \hbar.$$

**Задача 6.10**

Решение.

$$I\omega = 2lN \rightarrow \omega = \frac{2lN}{I}.$$

$$\omega = \frac{2N \cdot \hbar}{0,5mr^2}; \quad \nu = \frac{m}{A} = \frac{N}{N_A} \rightarrow N = \frac{mN_A}{A}.$$

$$\omega = \frac{4N\hbar}{mr^2} = \frac{4\hbar}{mr^2} \cdot \frac{mN_A}{A} \cdot \frac{\pi\rho L}{\pi\rho L} = \frac{2\hbar N_A \rho L}{A \pi r^2 L} = \frac{2\hbar N_A \rho L}{mA} = 1,1 \cdot 10^{-3} \text{ с}^{-1}.$$

### Задача 6.15

$$f_z = \mu \frac{\partial B_z}{\partial z} = m_n \cdot a_{\perp}.$$

$$a_{\perp} = \frac{v_{\perp}}{\tau}; \quad \tau = \frac{L}{v_{\parallel}}.$$

$$f_z = m_n \cdot \frac{v_{\parallel} v_{\perp}}{L} = \mu \frac{\partial B_z}{\partial z}.$$

$$v_{\perp} = \frac{\mu \frac{\partial B_z}{\partial z} L}{m_n v_{\parallel}}.$$

$$\text{Дифф. уширение: } \alpha_{\text{диф}} \sim \frac{\lambda}{d} = \frac{h}{d\sqrt{2mE}}$$

$$\alpha_{\text{маг}} = \frac{v_{\perp}}{v_{\parallel}} = \frac{\mu \frac{\partial B_z}{\partial z} L}{m v_{\parallel}^2} = \alpha_{\text{диф}} = \frac{h}{d\sqrt{2mE}}.$$

$$\frac{\partial B_z}{\partial z} = \frac{2Eh}{L\mu d\sqrt{2mE}} = 150 \frac{\text{Гс}}{\text{см}}.$$

### Задача 6.20

Решение.

$$\mathcal{E}_1 = \hbar\omega_1 = \frac{hc}{\lambda_1}.$$

$$\mathcal{E}_2 = \frac{hc}{\lambda_2}.$$

$$\Delta\mathcal{E} = hc \left( \frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1} \right) = 2 \cdot 10^{-3} \text{ эВ}.$$

$$\Delta\mathcal{E} = 2\mu B.$$

$$B = \frac{\Delta\mathcal{E}}{2m_{\text{Б}}} = 1,8 \cdot 10^5 \text{ Гс}.$$

### Задача 6.48

Решение.

$$\mathbf{H} = -\beta\mathbf{M}; \quad \beta = \frac{4\pi}{3}.$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi\mathbf{M} = \left( -\frac{4\pi}{3} + 4\pi \right) \mathbf{M} = \frac{8\pi}{3} \frac{g_s m_{\text{Б}} \cdot \mathbf{S}_e}{\frac{4}{3}\pi r_{\text{Б}}^3}.$$

Энергия взаимодействия:

$$\begin{aligned} U_{ep} &= -(\boldsymbol{\mu}_p, \mathbf{B}) = -g_p m_{\text{яд}} \mathbf{S}_p \mathbf{B} = -g_p m_{\text{яд}} \mathbf{S}_p \cdot 2g_s \frac{m_{\text{Б}}}{r_{\text{Б}}^3} \mathbf{S}_e = \\ &= -2g_s g_p \frac{m_{\text{яд}} m_{\text{Б}}}{r_{\text{Б}}^3} (\mathbf{S}_p, \mathbf{S}_e). \end{aligned}$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}_e + \mathbf{S}_p, \quad S = 1, 0.$$

$$\Delta E = |U_{ep}(S=1) - U_{ep}(S=0)|.$$

$$\overline{S^2} = \overline{(\mathbf{S}_e + \mathbf{S}_p)^2} = \overline{S_e^2} + \overline{S_p^2} + 2\overline{\mathbf{S}_e \mathbf{S}_p}.$$

$$2\overline{\mathbf{S}_e \mathbf{S}_p} = \left( \overline{S^2} - \overline{S_e^2} - \overline{S_p^2} \right).$$

$$\overline{S^2} = S(S+1) \stackrel{S=1}{=} 1 \cdot 2 = 2.$$

$$\overline{S_e^2} = S(S+1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{4}.$$

$$\text{При } S=1: 2\overline{\mathbf{S}_e \mathbf{S}_p} = \left( 1 \cdot 2 - \frac{3}{4} - \frac{3}{4} \right) = \frac{1}{2}.$$

$$\text{При } S=0: 2\overline{\mathbf{S}_e \mathbf{S}_p} = \left( 0 - \frac{3}{4} - \frac{3}{4} \right) = -\frac{3}{2}.$$

$$\Delta E = g_s g_p \frac{m_{\text{яд}} m_B}{r_B^3} \left( \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \right) = 2g_s g_p \frac{m_B^2}{r_B^3} \frac{m_e}{m_p}.$$

$$\lambda = \frac{hc}{\Delta E} = \frac{hcr_B^3 m_p}{2g_s g_p m_B^2 m_e} = 28,2 \text{ см.}$$

### Задача 6.78

Решение. Энерг. спин-орб. вз-я:  $\mathcal{E}_{SL} = A(\overline{\mathbf{L}, \mathbf{S}}).$

$$\begin{aligned} \mathbf{J} = \mathbf{S} + \mathbf{L} &\implies \overline{J^2} = \overline{S^2} + \overline{L^2} + 2\overline{(\mathbf{S}, \mathbf{S})} \implies \overline{(\mathbf{L}, \mathbf{S})} = \\ &= \frac{1}{2} \left( \overline{J^2} - \overline{S^2} - \overline{L^2} \right) = \frac{1}{2} (J(J+1) - S(S+1) - L(L+1)). \end{aligned}$$

$$^1D_2: \quad \mathcal{E}_{SL}(^1D_2) = \frac{A}{2} (2 \cdot 3 - 0 - 2 \cdot 3) = 0.$$

$$^3P_2: \quad \mathcal{E}_{SL}(^3P_2) = \frac{A}{2} (2 \cdot 3 - 1 \cdot 2 - 1 \cdot 2) = A.$$

$$^3P_1: \quad \mathcal{E}_{SL}(^3P_2) = \frac{A}{2} (1 \cdot 3 - 1 \cdot 2 - 1 \cdot 2) = -A.$$

$$^3P_0: \quad \mathcal{E}_{SL}(^3P_2) = \frac{A}{2} (0 \cdot 3 - 1 \cdot 2 - 1 \cdot 2) = -2A.$$

$$\begin{cases} \frac{hc}{\lambda_1} = \mathcal{E}(^1D_2) - \mathcal{E}(^3P_2) = \mathcal{E}(^1D_2) - (\mathcal{E}(^3P) + \mathcal{E}_{SL}(^3P_2)) \\ \frac{hc}{\lambda_2} = \mathcal{E}(^1D_2) - \mathcal{E}(^3P_1) = \mathcal{E}(^1D_2) - (\mathcal{E}(^3P) + \mathcal{E}_{SL}(^3P_1)) \end{cases}.$$

$$\frac{hc}{\lambda_1} - \frac{hc}{\lambda_2} = \mathcal{E}_{SL}(^3P_1) - \mathcal{E}_{SL}(^3P_2) = -2A.$$

$$\mathcal{E}(^3P_0) - \mathcal{E}(^3P_1) = \mathcal{E}(^3P) + \mathcal{E}_{SL}(^3P_0) - \mathcal{E}(^3P) - \mathcal{E}_{SL}(^3P_1) = \mathcal{E}_{SL}(^3P_0) - \mathcal{E}_{SL}(^3P_1) = -A.$$

$$-A = \frac{hc}{\lambda} = \left( \frac{hc}{\lambda_1} - \frac{hc}{\lambda_2} \right) \cdot 2 \implies \lambda = \frac{2\lambda_1\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} = 16634 \text{ Å}.$$

### Задача 6.78

Решение.  $S = 1$  — ортогелий,  $S = 0$  — парагелий.

$$E_{\text{пара}} = -W_{\text{пара}} = E + E_{\text{кул}} + V_{\text{пара}}.$$

$$E_{\text{орто}} = -W_{\text{орто}} = E + E_{\text{кул}} + V_{\text{орто}}.$$

$$\overline{\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2} = \overline{S_1^2} + \overline{S_2^2} + 2\overline{\mathbf{S}_1 \mathbf{S}_2}.$$

$$2\overline{\mathbf{S}_1 \mathbf{S}_2} = \overline{(S_1 + S_2)^2} - \overline{S_1^2} - \overline{S_2^2} = S(S+1) - \frac{3}{4} - \frac{3}{4}.$$

$$\begin{aligned} V = -\frac{A}{2} [1 + 4\overline{\mathbf{S}_1 \mathbf{S}_2}] &= -\frac{A}{2} \left[ 1 + 2 \left( S(S+1) - \frac{6}{4} \right) \right] = \\ &= -A \left[ \frac{1}{2} + S(S+1) - \frac{3}{2} \right] = -A [S(S+1) - 1]. \end{aligned}$$

$$V_{\text{пара}} = +A; \quad V_{\text{орто}} = -A.$$

$$E_{\text{пара}} = -W_{\text{пара}} = E + E_{\text{кул}} + A.$$

$$E_{\text{орто}} = -W_{\text{орто}} = E + E_{\text{кул}} - A.$$

В поле  $Z = 2$  при  $1s^1 2s^1$

$$E = -13,6 \cdot Z^2 - 13,6 \frac{Z^2}{n^2} = -13,6 \left( 4 + \frac{4}{4} \right) = -68 \text{ эВ.}$$

$$A = (E_{\text{пара}} - E_{\text{орто}}) \frac{1}{2} = 0,4 \text{ эВ.}$$

$$E_{\text{кул}} = \frac{E_{\text{пара}} + E_{\text{орто}}}{2} - E = -9,2 \text{ эВ.}$$

### Задача Т2

Решение. Термом называют макс. возможные  $M_L$  при конкретных  $M_S$  или  $M_S$  при одном  $M_L$ . См. рис. 1.

$$\begin{pmatrix} 3P \\ 3S \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1D \\ 1P \\ 1S \end{pmatrix} \quad (\underline{1S}).$$



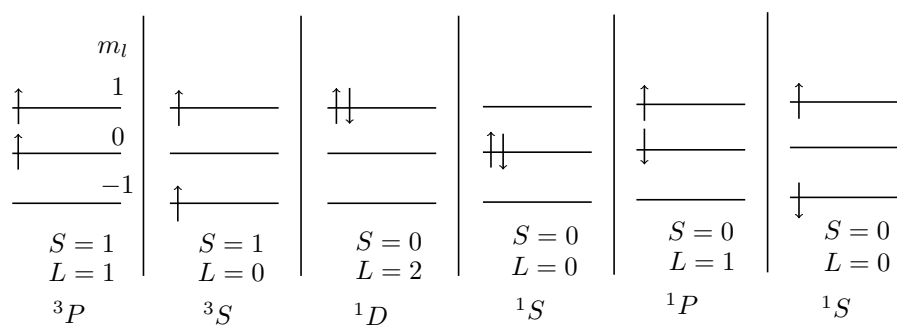


Рис. 1