Квантовая макрофизика.

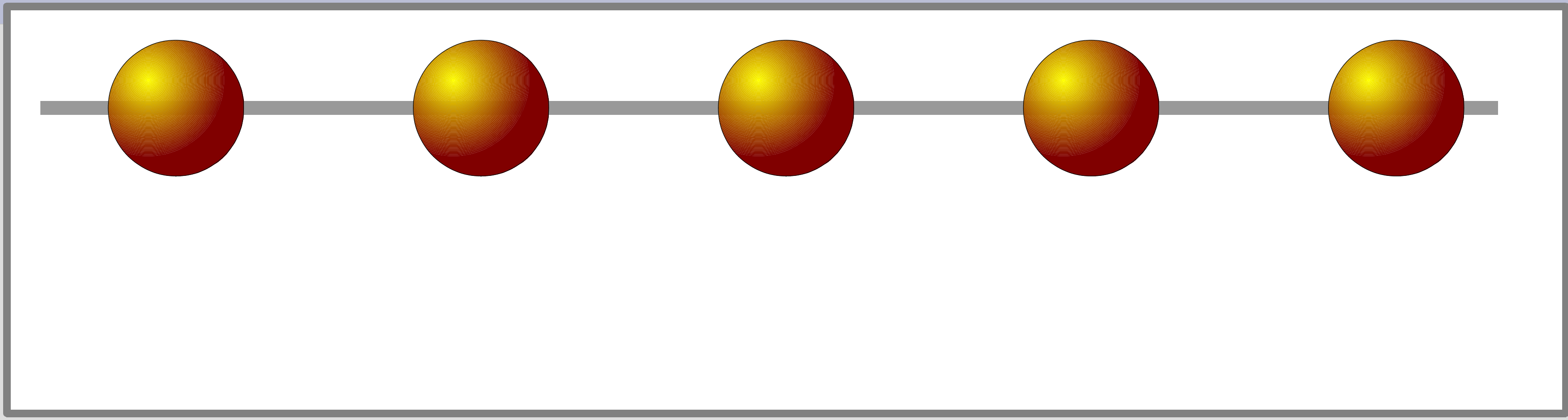
Лекция 12: Низкоразмерные электронные системы.

Часть 1: Общие свойства и специфика низкоразмерных систем

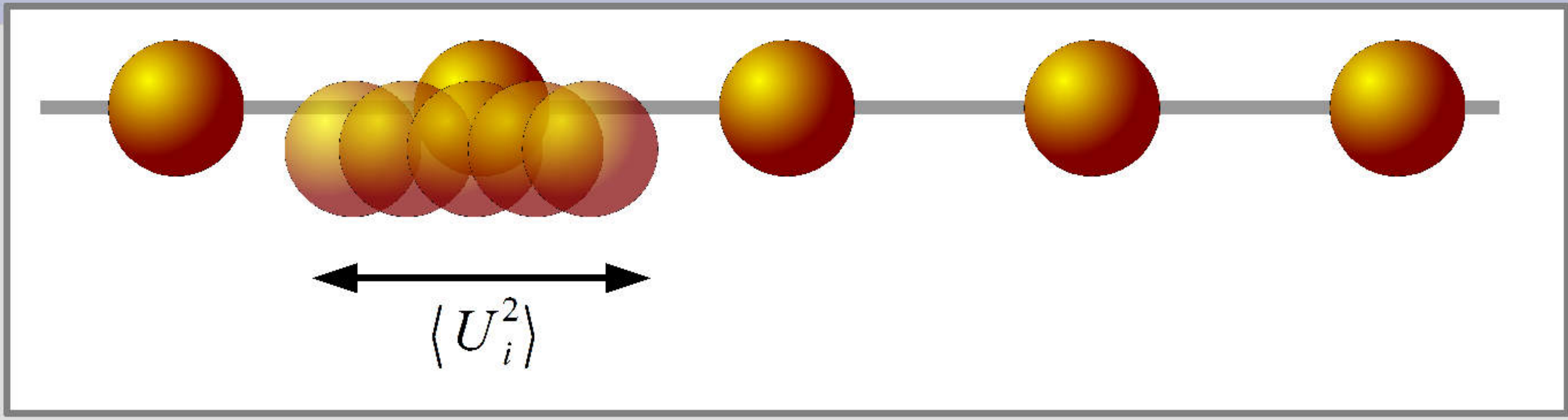
https://www.tripadvisor.com/LocationPhotoDirectLink-g190746-d188689-i146338610-West_Somerset_Railway-Minehead_Somerset_England.html

Задача 1. Существование одномерных и двумерных кристаллов

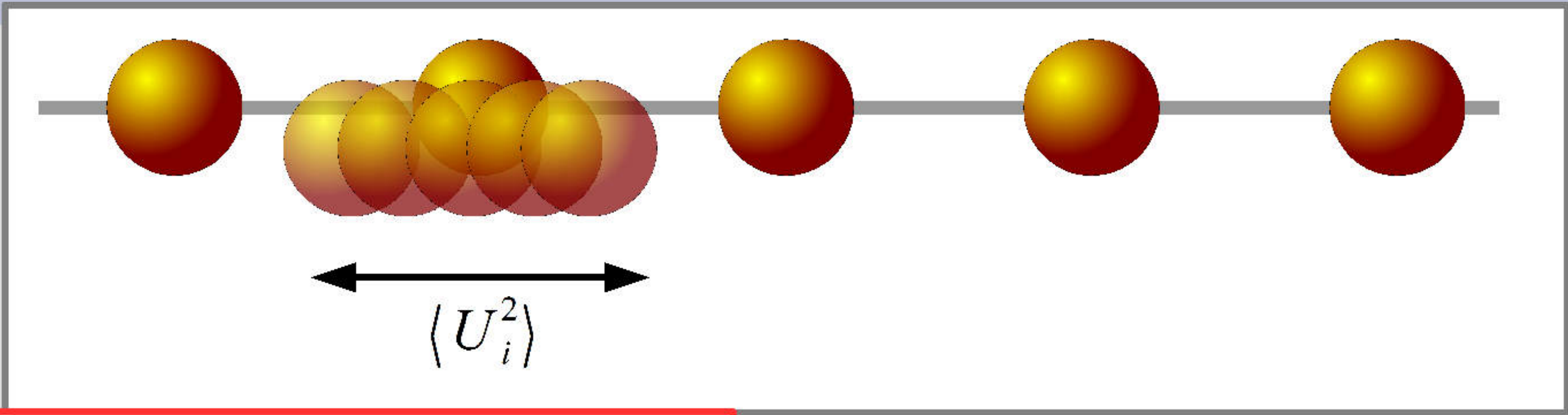
Задача 1. Существование одномерных и двумерных кристаллов



Задача 1. Существование одномерных и двумерных кристаллов



Задача 1. Существование одномерных и двумерных кристаллов

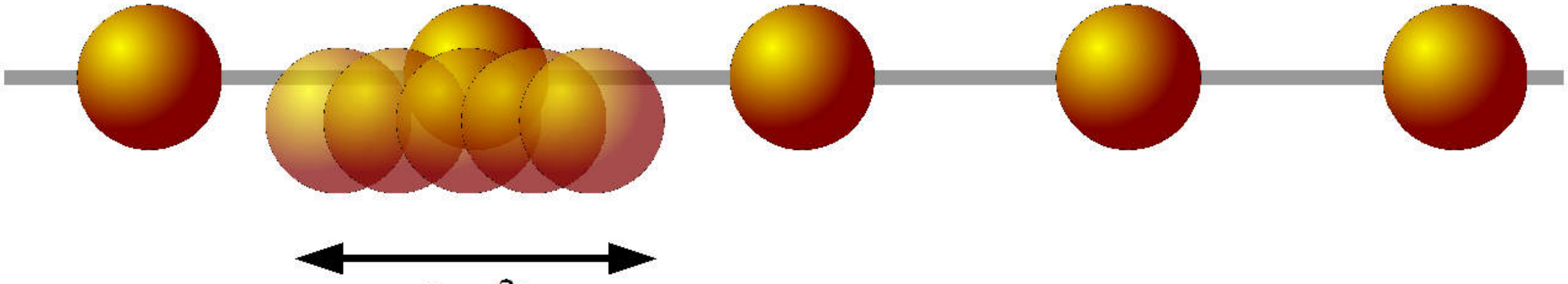


$$U_j = \sum_k U_k e^{i(k r_j - \omega_k t)}$$

$$U_j^2 = \sum_{k,k'} U_k U_{k'}^* e^{i(k-k')r_j} e^{i(\omega' - \omega)t}$$

$$\langle U_j^2 \rangle = \frac{1}{N} \sum_j U_j^2 = \sum U_k^2$$

Задача 1. Существование одномерных и двумерных кристаллов



$$\langle U_i^2 \rangle$$

$$U_j = \sum_k U_k e^{i(kr_j - \omega_k t)}$$

$$U_j^2 = \sum_{k,k'} U_k U^*_{k'} e^{i(k-k')r_j} e^{i(\omega' - \ldots}$$

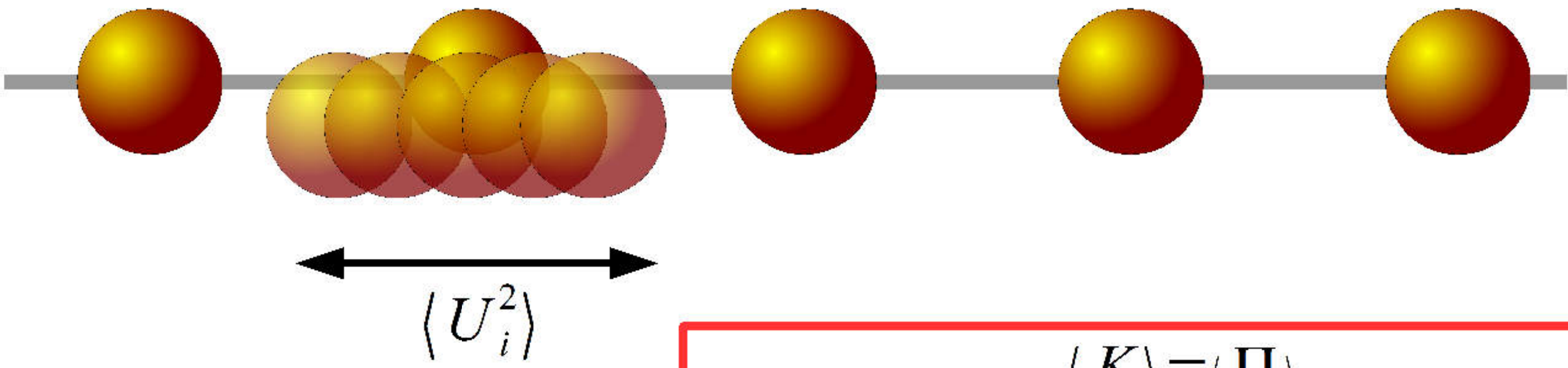
$$\langle U_j^2 \rangle = \frac{1}{N} \sum_j U_j^2 = \sum U_k^2$$

$$\langle K \rangle = \langle \Pi \rangle$$

$$E_k = \langle E \rangle = 2 \left\langle \sum \frac{M \dot{U}_j^2}{2} \right\rangle = \frac{\omega_k^2 N M}{2} U_k^2$$

$$E_k = \hbar \omega_k \left(\frac{1}{2} + n(\varepsilon_k, T) \right)$$

Задача 1. Существование одномерных и двумерных кристаллов



$$U_j = \sum_k U_k e^{i(k r_j - \omega_k t)}$$

$$U_j^2 = \sum_{k,k'} U_k U^*_{k'} e^{i(k-k') r_j} e^{i(\omega' - \ldots}$$

$$\langle U_j^2 \rangle = \frac{1}{N} \sum_j U_j^2 = \sum U_k^2$$

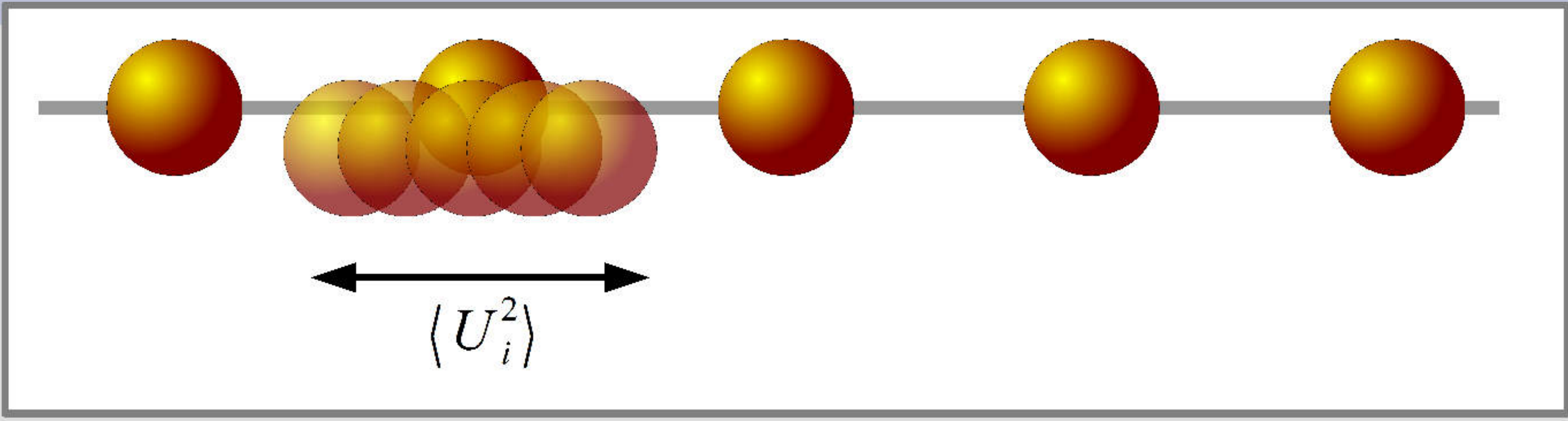
$$\langle K \rangle = \langle \Pi \rangle$$

$$E_k = \langle E \rangle = 2 \left\langle \sum \frac{M \dot{U}_j^2}{2} \right\rangle = \frac{\omega_k^2 N M}{2} U_k^2$$

$$E_k = \hbar \omega_k \left(\frac{1}{2} + n(\varepsilon_k, T) \right)$$

$$\langle U_j^2 \rangle \propto \sum_k \frac{1}{\omega_k} \left(\frac{1}{2} + n(\varepsilon_k, T) \right)$$

Задача 1. Существование одномерных и двумерных кристаллов



$$\langle U_j^2 \rangle \propto \sum_k \frac{1}{\omega_k}\left(\frac{1}{2}+n(\varepsilon_k, T)\right)$$

T=0:

$$\langle U^2 \rangle \propto \int_0^{k_{max}} \frac{d^D k}{\omega_k} \approx \int_0^{k_{max}} \frac{d^D k}{s\,k} = \begin{cases} \propto \ln 0, & 1D \\ \propto k_{max}, & 2D \\ \propto k_{max}^2, & 3D \end{cases}$$

Задача 1. Существование одномерных и двумерных кристаллов

T>0:

$$\langle U^2\rangle_T \propto \int_0^{k_{max}} n(T)\frac{d^D k}{\omega_k} \approx \int_0^{k_{max}} \frac{1}{e^{\hbar s k/T}-1}\frac{d^D k}{s k} = \begin{cases} \propto \ln 0,\ 2D \\ \propto k_{max},\ 3D \end{cases}$$

$$\langle U_j^2\rangle \propto \sum_k \frac{1}{\omega_k}\left(\frac{1}{2}+n(\varepsilon_k, T)\right)$$

T=0:

$$\langle U^2\rangle \propto \int_0^{k_{max}} \frac{d^D k}{\omega_k} \approx \int_0^{k_{max}} \frac{d^D k}{s k} = \begin{cases} \propto \ln 0,\ 1D \\ \propto k_{max},\ 2D \\ \propto k_{max}^2,\ 3D \end{cases}$$

Задача 1. Существование одномерных и двумерных кристаллов

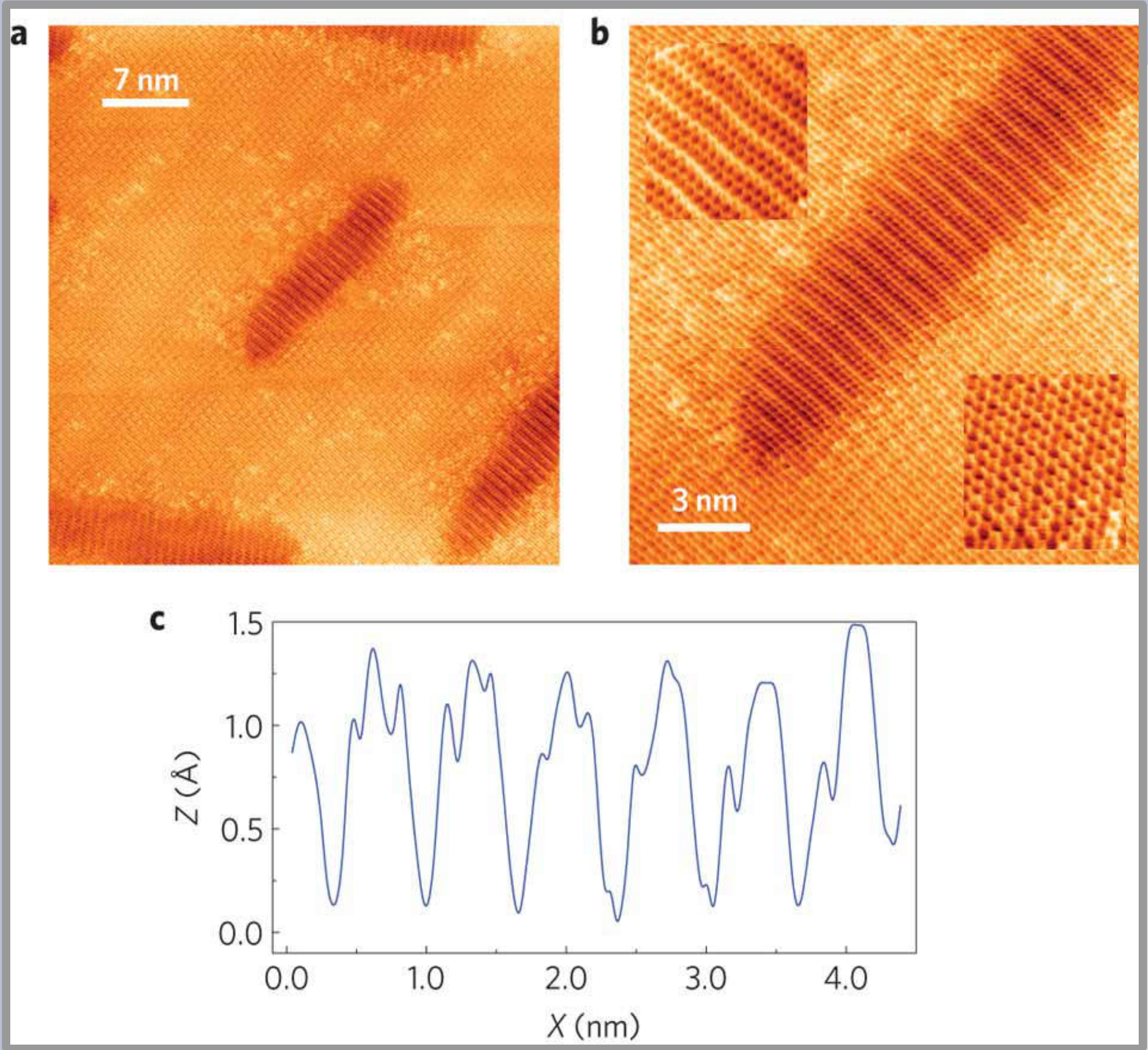
T>0:

$$\approx \int_0^{k_{max}} \frac{1}{e^{\hbar s k/T}-1}\frac{d^D k}{s k} = \begin{cases} \propto \ln 0, \ 2D \\ \propto k_{max}, \ 3D \end{cases}$$

1D и 2D кристаллов не существует

$$\langle U^2\rangle \propto \int_0^{k_{max}} \frac{d^D k}{\omega_k} \approx \int_0^{k_{max}} \frac{d^D k}{s k} = \begin{cases} \propto \ln 0, \ 1D \\ \propto k_{max}, \ 2D \\ \propto k_{max}^2, \ 3D \end{cases}$$

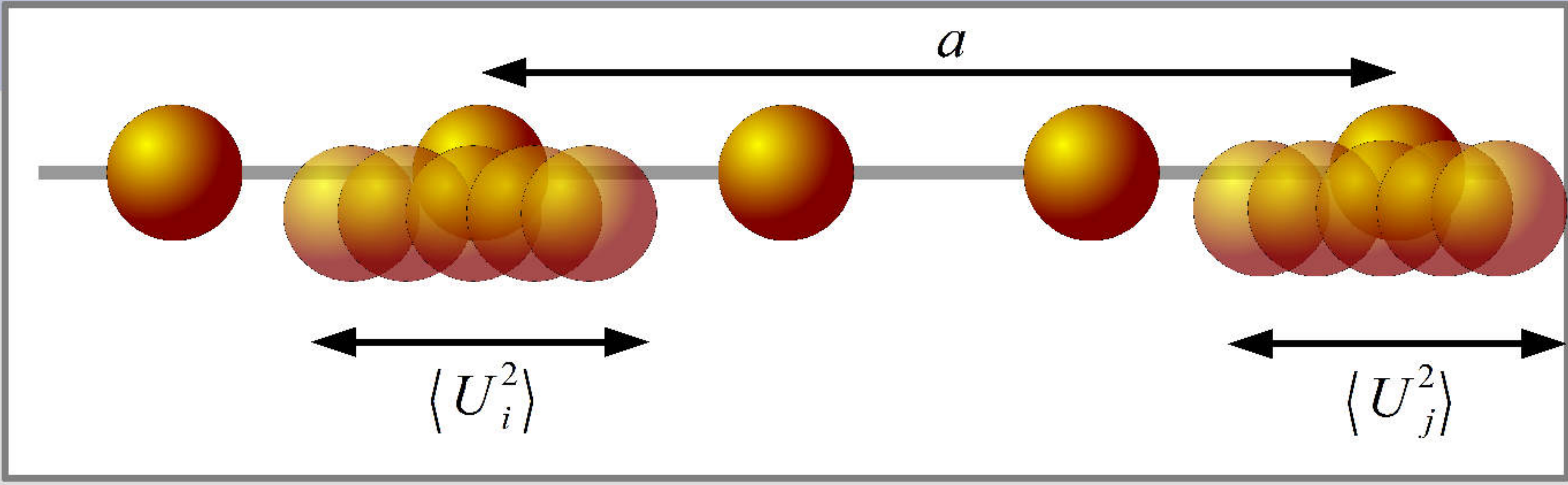
А как же графен?!



Полученное при помощи сканирующего туннельного микроскопа изображение листа графена на медной подложке. Более тёмные области соответствуют местам, где в медной подложке есть протяжённые (ширина около 5 нм, длина около 20 нм) вакансии на поверхности - «провалы» в атомно-гладкой поверхности. Над этими вакансиями фрагмент листа графена оказывается свободно подвешенным и на его поверхности возникает модуляция в поперечном направлении. На панели (b) показаны увеличенные фрагменты поверхности над «провалом» (сверху) и на гладкой поверхности (снизу). На панели (c) показан профиль поверхности вдоль «провала».

Из статьи Levente Tapasztó, Traian Dumitrică, Sung Jin Kim, Péter Nemes-Incze, Chanyong Hwang and László P. Biró, Breakdown of continuum mechanics for nanometre-wavelength rippling of graphene ,Nature Physics,8, 739(2012)

И всё чуть хитрее...

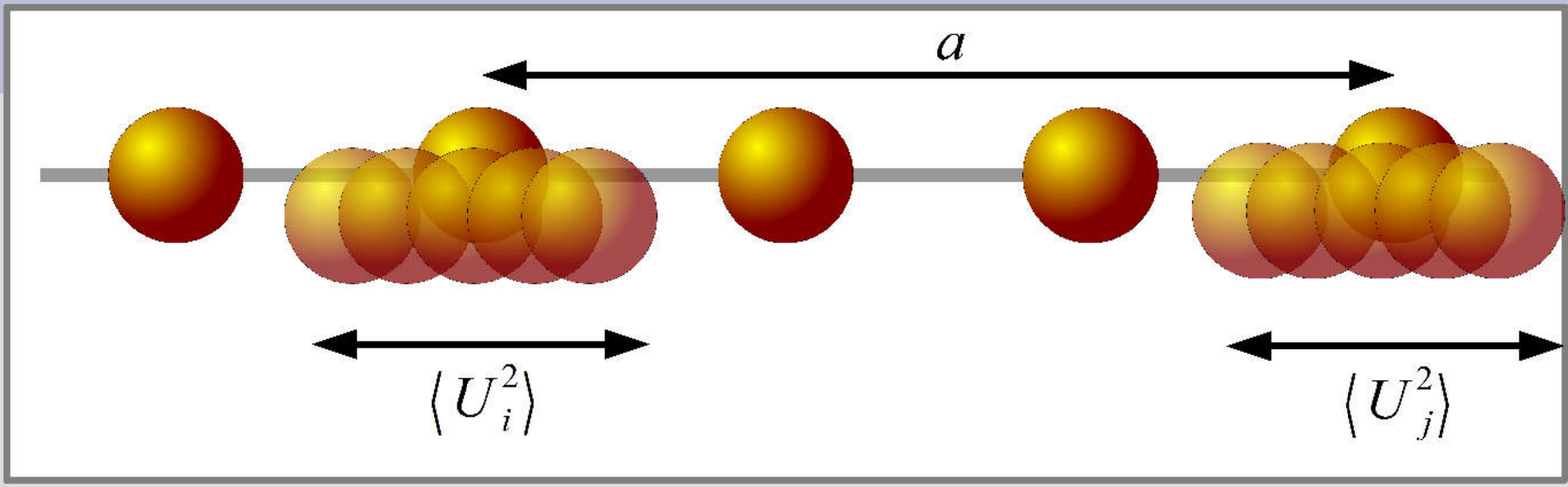


$$f(a) = \left\langle \left(U(r_j) - U(r_j + a) \right)^2 \right\rangle = \frac{1}{N} \sum_j \left(U(r_j) - U(r_j + a) \right)^2 =$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{j,k,k'} U_k U_{k'} e^{i(k-k')r_j} \left(1 - e^{ika} \right) \left(1 - e^{-ik'a} \right) \propto$$

$$\propto \sum_k U_k^2 \sin^2 \left(\frac{ka}{2} \right)$$

И всё чуть хитрее...



$$f(a) = \langle (U(r_j) - U(r_j + a))^2 \rangle = \frac{1}{N} \sum_j (U(r_j) - U(r_j + a))^2 =$$

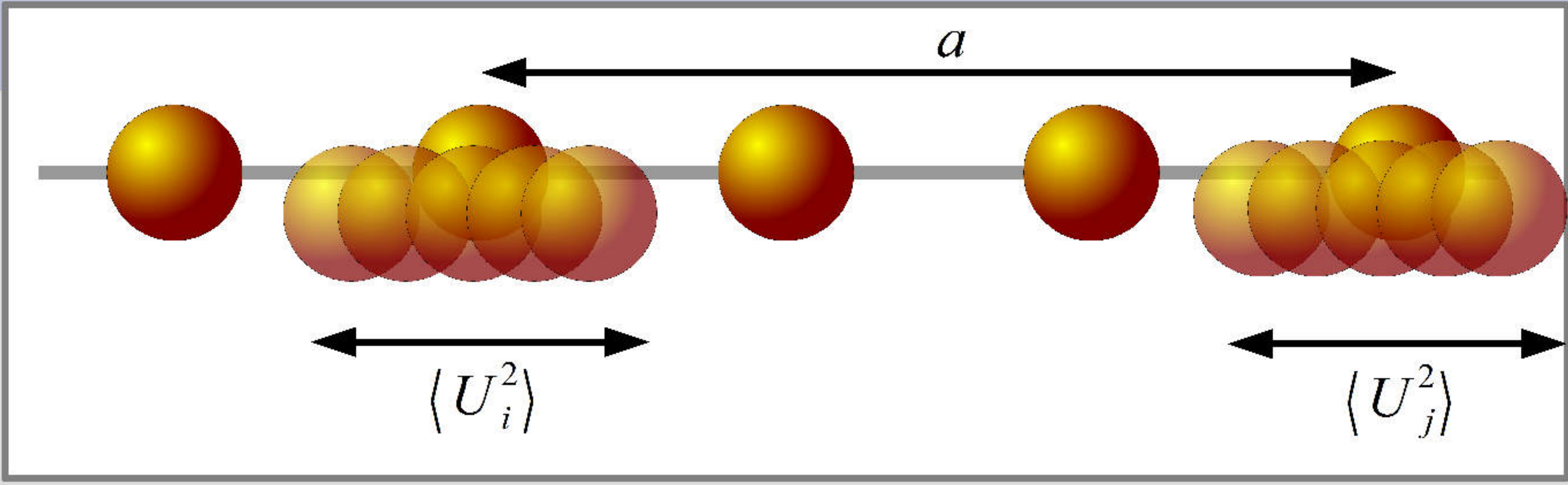
$$= \frac{1}{N} \sum_{j,k,k'} U_k U_{k'} e^{i(k-k')r_j} \left(1 - e^{ika}\right)\left(1 - e^{-ik'a}\right) \propto$$

$$\propto \sum_k U_k^2 \sin^2\left(\frac{ka}{2}\right)$$

1D, T=0:

$$f(a) \propto \int_0^{k_{max}} \frac{\sin^2(ka/2)}{sk} dk$$

И всё чуть хитрее...



$$f(a) = \langle (U(r_j) - U(r_j + a))^2 \rangle = \frac{1}{N} \sum_j (U(r_j) - U(r_j + a))^2 =$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{j,k,k'} U_k U_{k'} e^{i(k-k')r_j} (1 - e^{ika})(1 - e^{-ik'a}) \propto$$

$$\propto \sum U_k^2 \sin^2\left(\frac{ka}{\ldots}\right)$$

1D, T=0:

$$f(a) \propto \int_0^{k_{max}} \frac{\sin^2(ka/2)}{s k} dk$$

Definite integral:

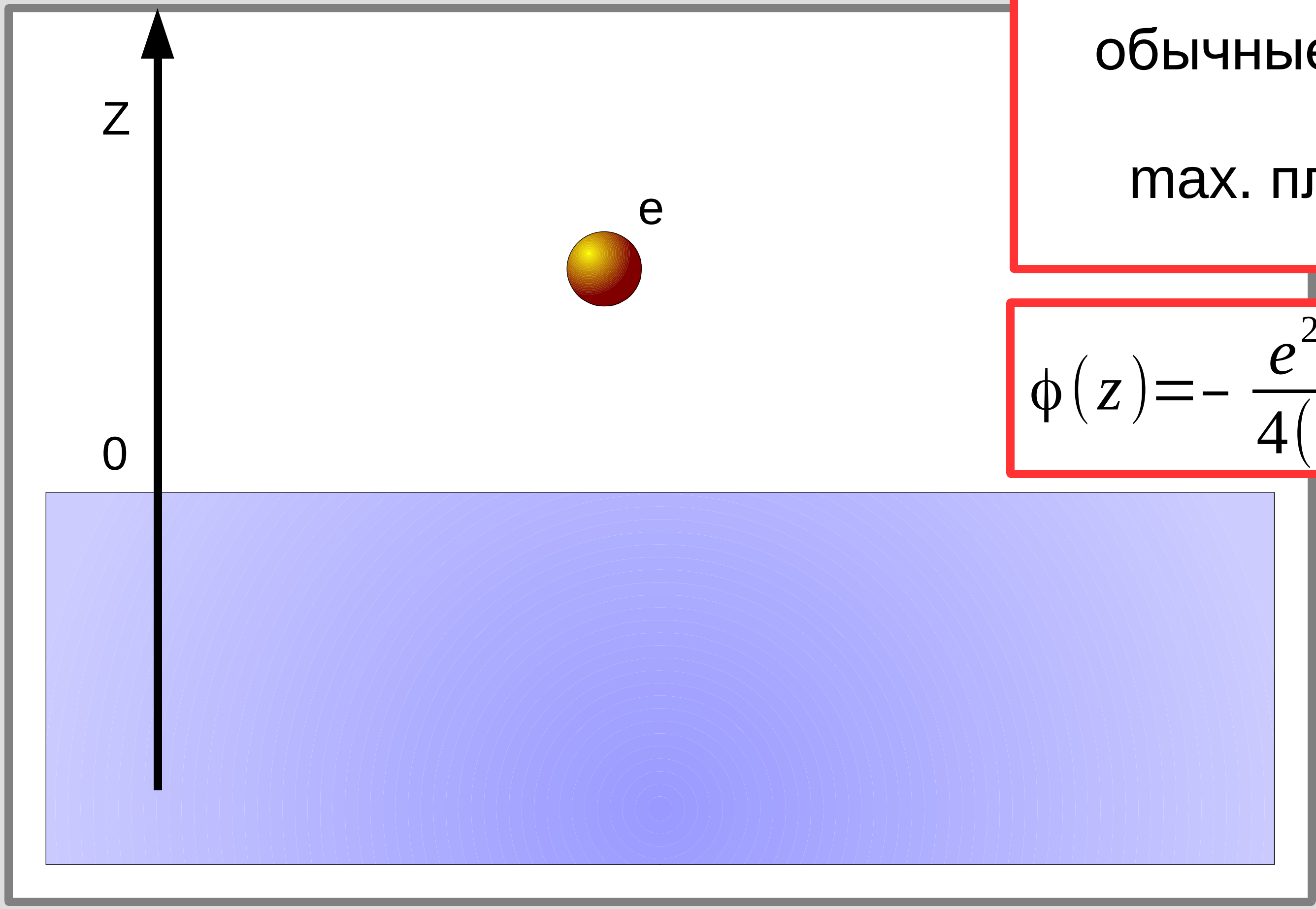
$$\int_0^a \frac{\sin^2(x)}{x} dx = \frac{1}{2}(-\mathrm{Ci}(2a) + \log(a) + \gamma + \log(2))$$

Промежуточный вывод

- ИДЕАЛЬНЫЕ одномерные и двумерные кристаллы термодинамически неустойчивы.
- РЕАЛЬНО ИЗУЧАЮТСЯ квази-низкоразмерные системы (понижение размерности имеет место с некоторой точностью и по некоторым категориям)

Задача 2. Двумерный и одномерный ферми-газ.

Пример двумерной электронной системы: Электроны над поверхностью жидкого гелия.



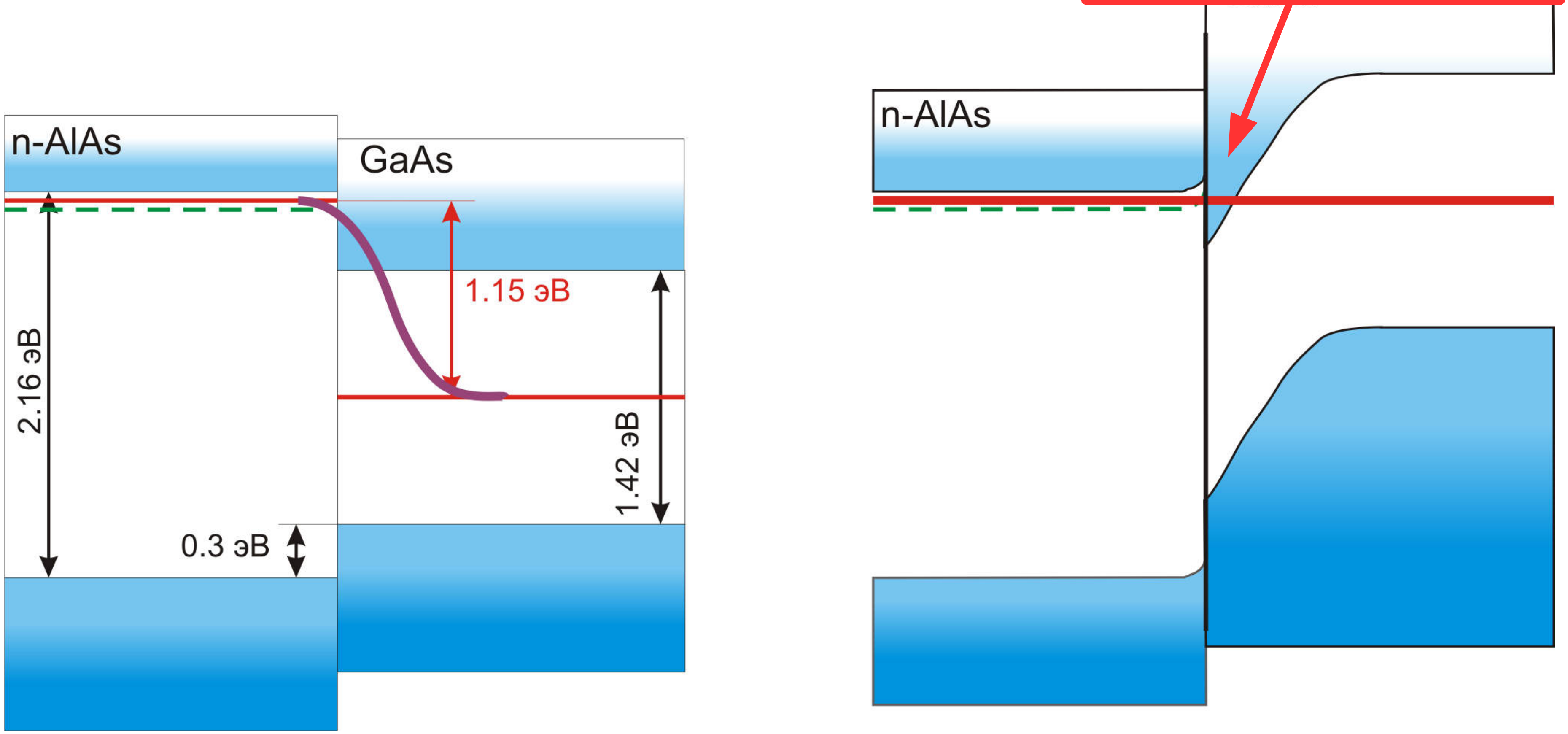
обычные температуры ~1K

max. плотность 10^9 1/см^2

$$\phi(z) = -\frac{e^2(\epsilon - 1)}{4(\epsilon + 1)z}$$

Пример низкоразмерной электронной системы. Двумерный электронный газ в гетероструктуре.

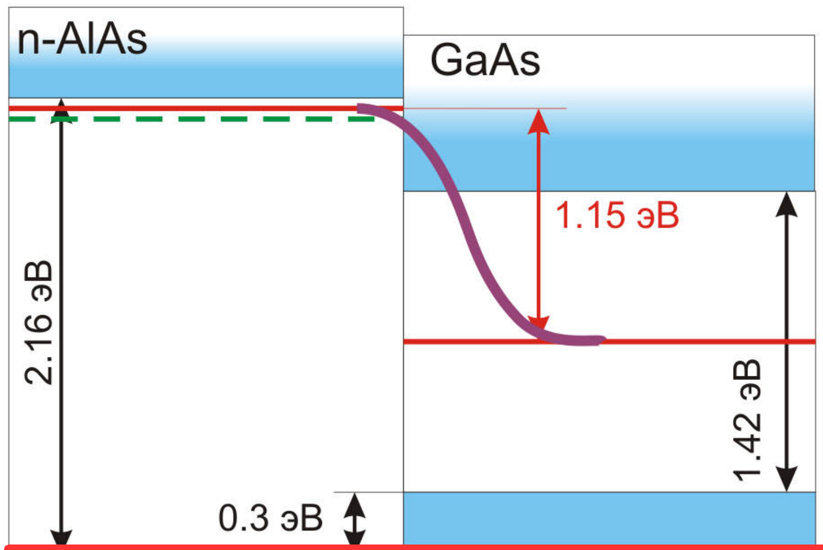
$$U(z) = \begin{cases} +\infty, & z < 0 \\ kz, & z > 0 \end{cases}$$

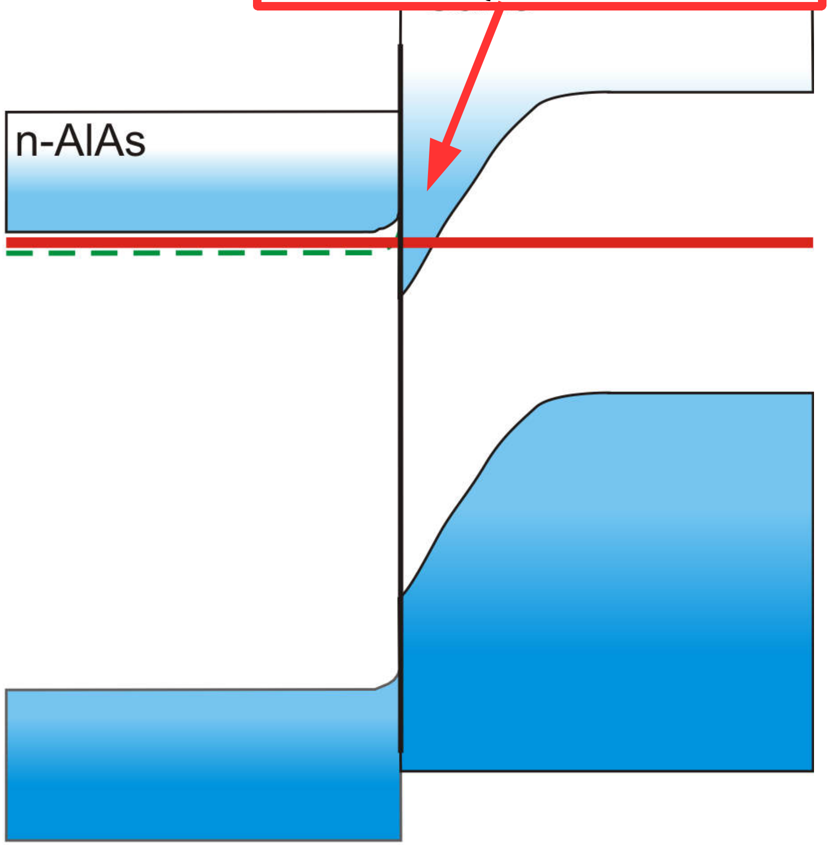


Построение энергетической диаграммы для гетероперехода между сильно легированным n-AlAs и чистым GaAs. Ширина запрещённой зоны и разрывы зон показаны в масштабе.

Пример низкоразмерной электронной системы. Двумерный электронный газ в гетероструктуре.

$$U(z)=\begin{cases}+\infty, & z<0\\ kz, & z>0\end{cases}$$



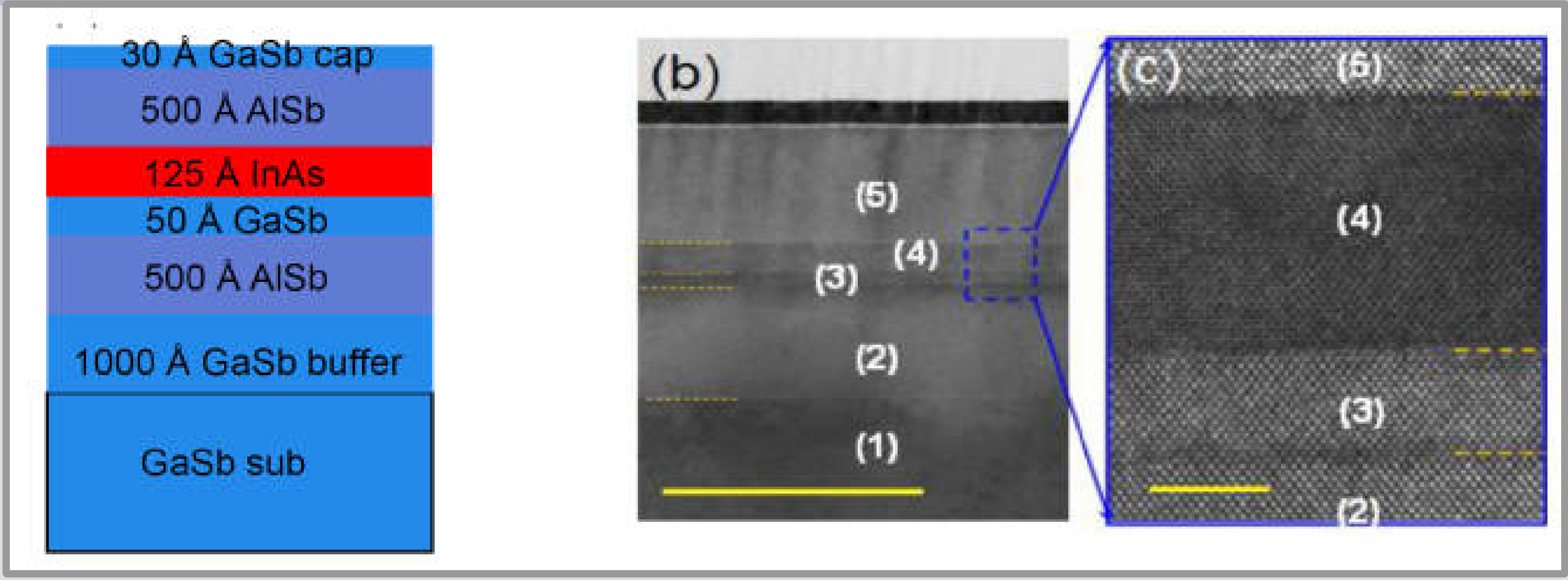


температуры до ~100 мК

max. плотность ~10^{12} 1/см^2

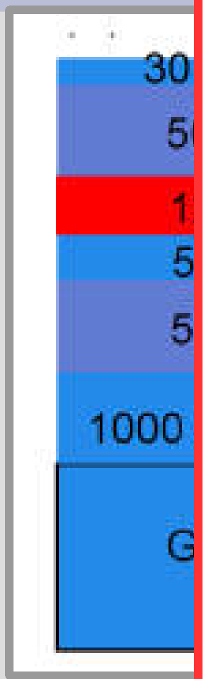
ильно легированным n-AlAs и чистым GaAs. Ширина

Технологии: Эпитаксиальный рост гетероструктур

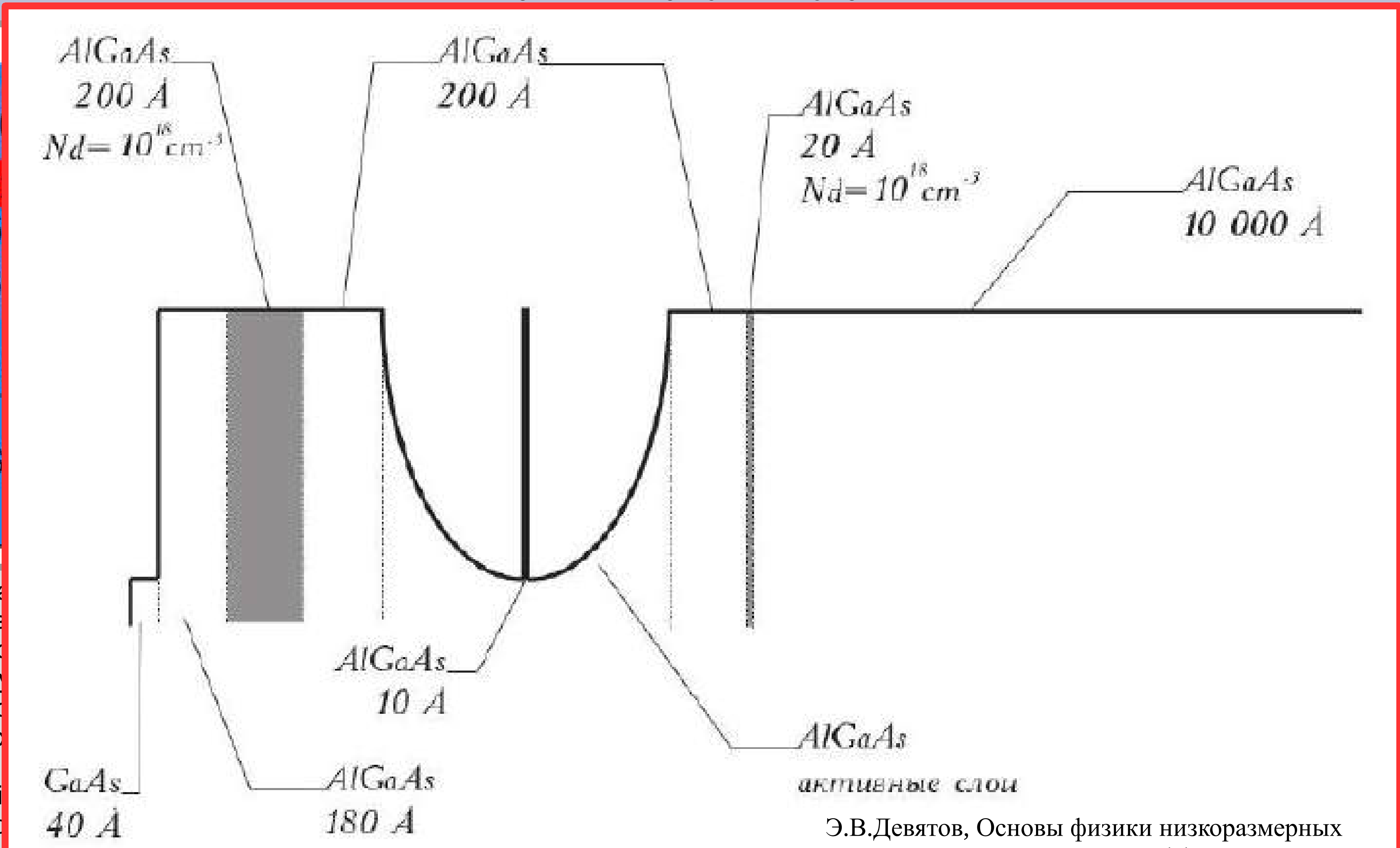


Слева: схема чередования слоёв в сложной гетероструктуре. Красным цветом выделен слой InAs, в котором формируется потенциальная яма для электронов. В центре и справа: изображения (туннельная электронная микроскопия) среза реальной гетероструктуры. Горизонтальная жёлтая линия задаёт масштаб, она равна 100 нм для центрального рисунка и 5 нм для правого. Жёлтый пунктир показывает границы слоёв.
Нумерация слоёв: (1) буферный слой GaSb, (2) AlSb, (3) GaSb (потенциальная яма для дырок), (4) InAs (потенциальная яма для электронов), (5) AlSb. Из работы Binh-Minh Nguyen, Wei Yi, Ramsey Noah, Jacob Thorp, Marko Sokolich, High mobility backgated InAs/GaSb double quantum well grown on GaSb substrate, HRL Laboratories Report, (2014)

Технологии: Эпитаксиальный рост гетероструктур

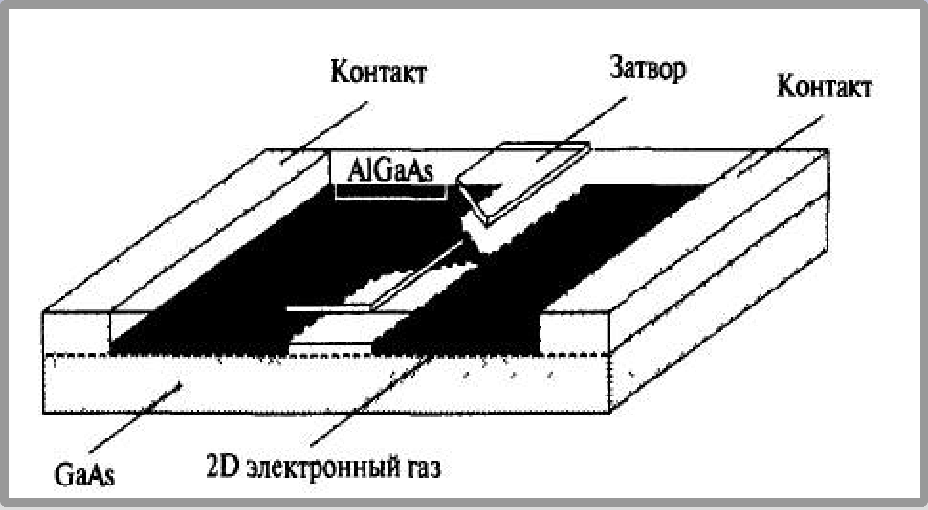


Слева: схема
слой InAs, в
справа: изо
гетерострукту
центрального
Нумерация с
дырок), (4) I
Nguyen, Wei
InAs/GaSb do

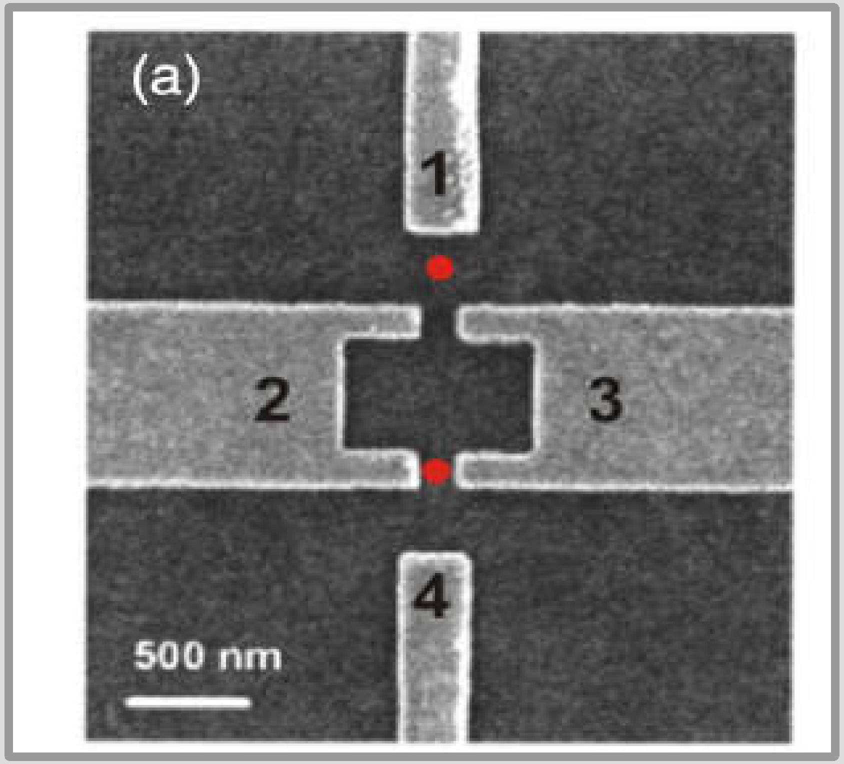


Э.В.Девятов, Основы физики низкоразмерных систем и режима квантового эффекта Холла., 2015

Технологии: «Игра электродов»

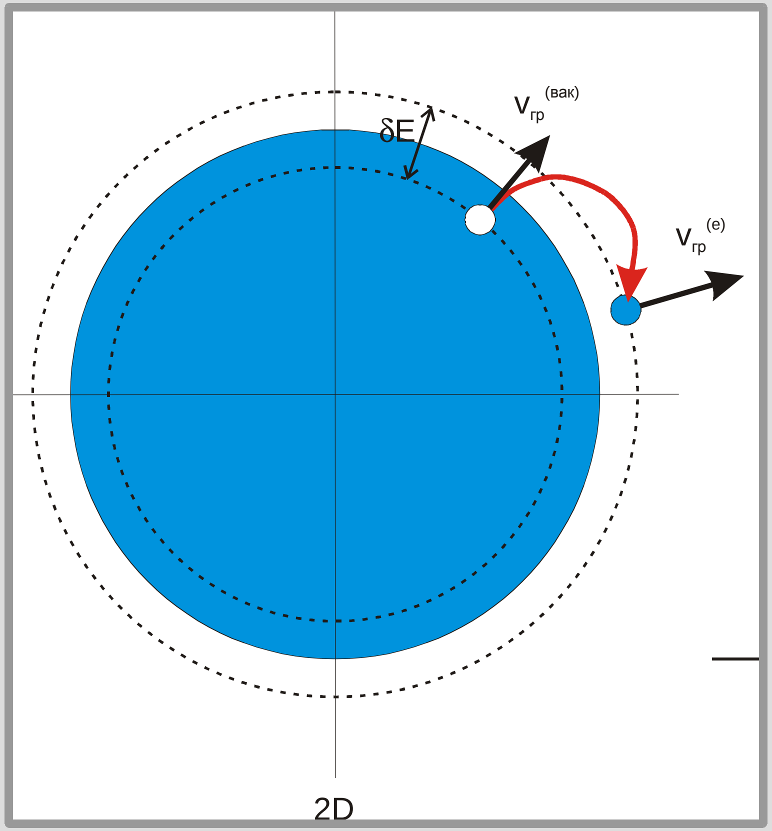


Квантовый микромостик, из книги В.Я.Демиховского



Электронная микрофотография затворов из работы A. P. Micolich, What lurks below the last plateau: experimental studies of the 0.7 × $2e^2/h$ conductance anomaly in one-dimensional systems , Journal of Physics: Condensed Matter, 23, 443201 (2011)

Температура вырождения двумерного электронного газа

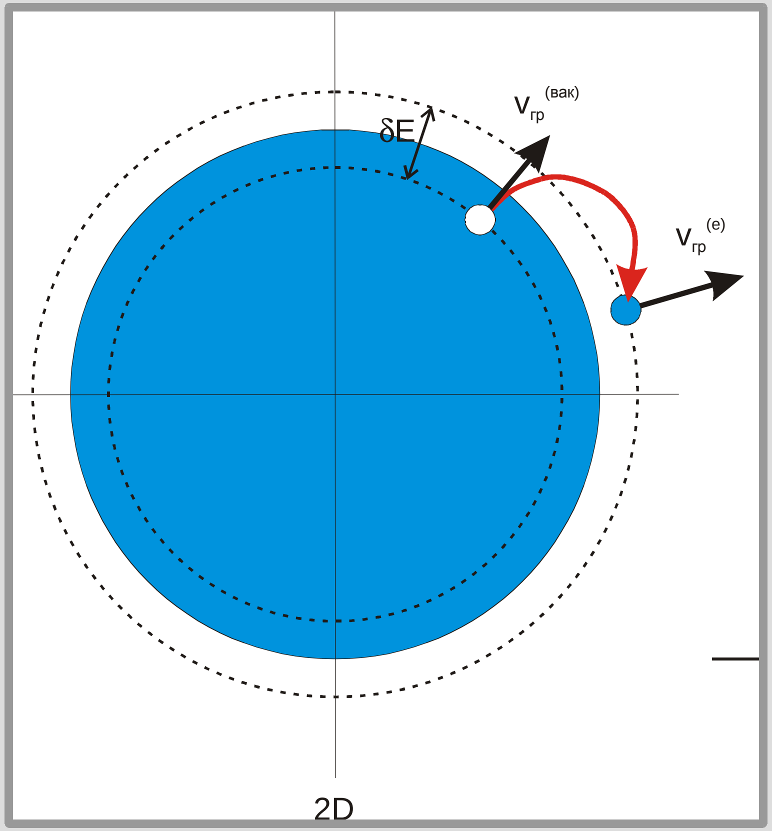


$$\pi k_F^2 = \frac{N}{2}\frac{(2\pi)^2}{S}$$

$$k_F^2 = 2\pi n_S$$

$$E_F = \frac{\pi \hbar^2 n_S}{m^*}$$

Температура вырождения двумерного электронного газа



$$\pi k_F^2 = \frac{N}{2} \frac{(2\pi)^2}{S}$$

$$k_F^2 = 2\pi n_S$$

$$E_F = \frac{\pi \hbar^2 n_S}{m^*}$$

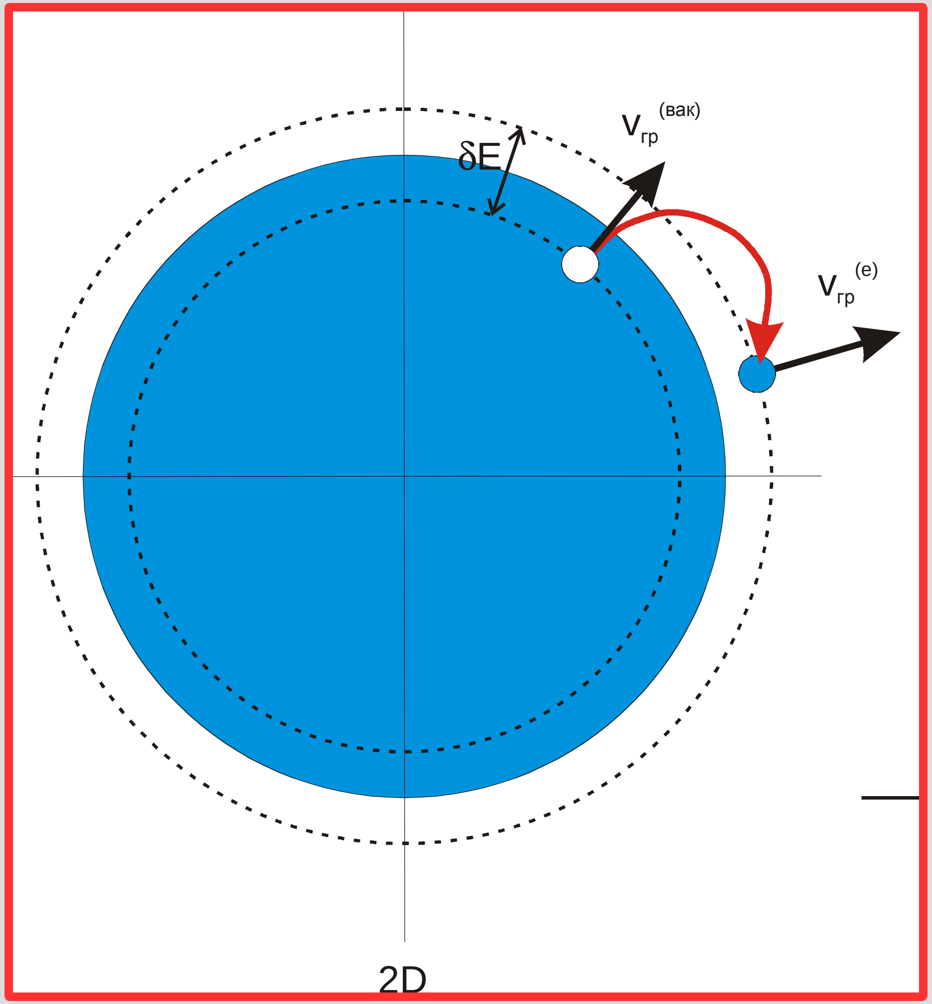
Электроны над гелием (10^9 1/см^2)

$$E_F \simeq 20\,\text{мК}$$

Электроны в гетероструктуре (10^{12} 1/см^2, $m^*=0.1m_0$)

$$E_F \simeq 200\,\text{К}$$

Возбуждения в двумерном газе с ваимодействием.

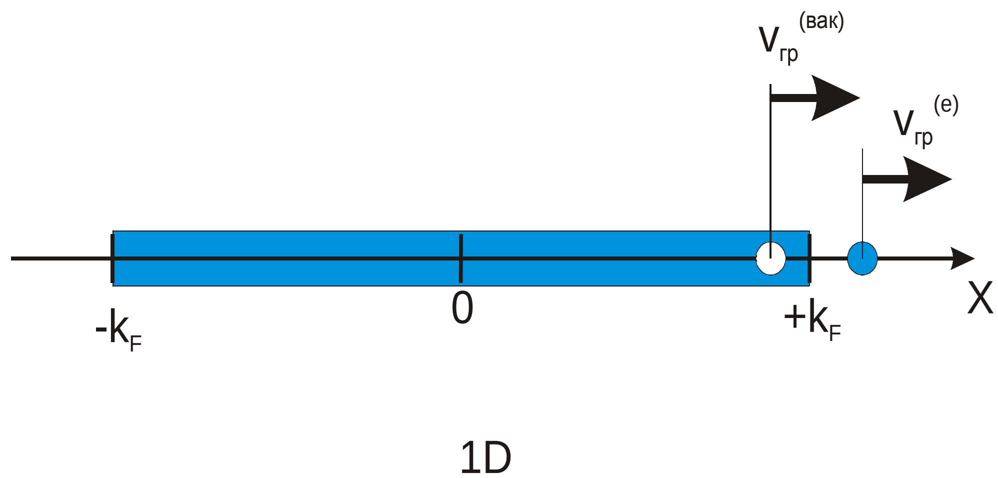


Одномерные электронные системы. Импульс и энергия Ферми, возбуждения.

$$n = 2\frac{2k_F}{2\pi}$$

$$k_F = \frac{\pi}{2}n$$

$$\varepsilon_F = \frac{\pi^2\hbar^2}{8m}n^2$$

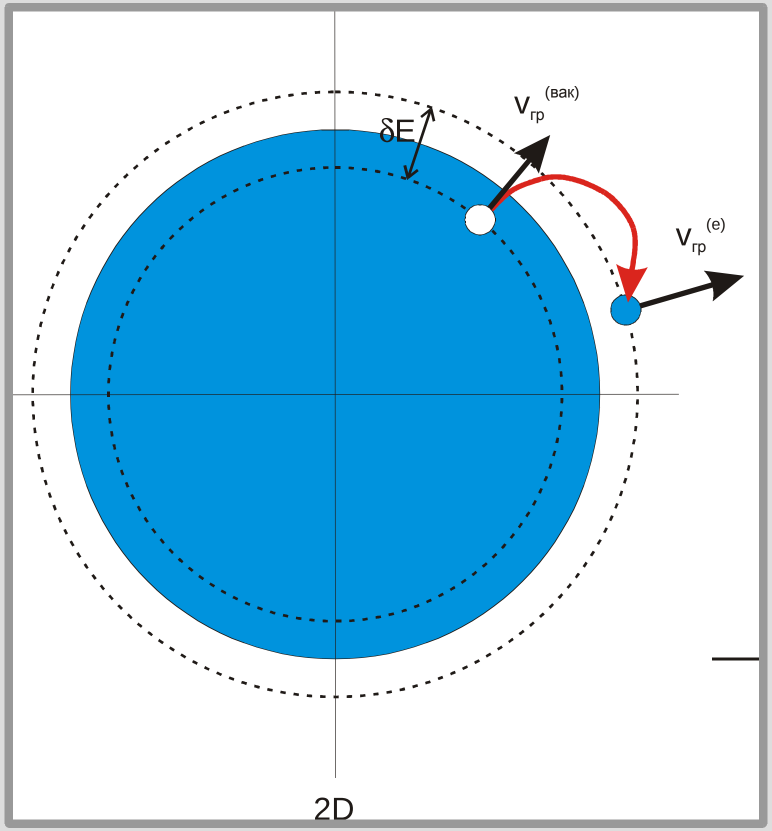


Промежуточный вывод

- можно получать «практически» одномерные и двумерные электронные системы
- для одномерных ферми-систем с взаимодействием не сработают «обычные» подходы

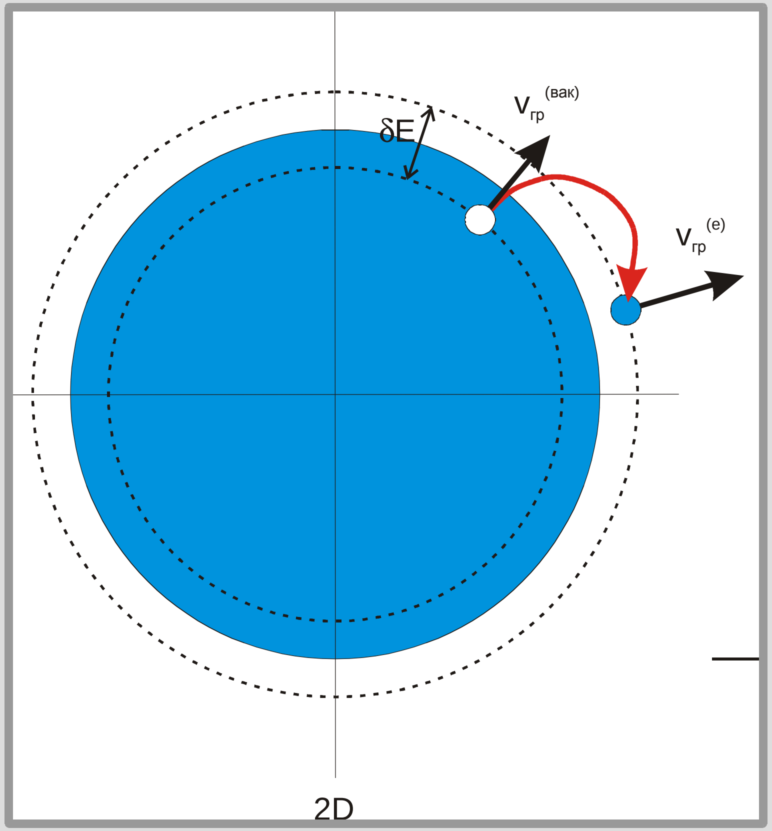
Задача 3. Состояние вигнеровского кристалла в двумерном электронном газе.

Двумерный электронный газ: Роль взаимодействия электронов.



$$\Pi \sim \frac{e^2\sqrt{n_S}}{\varepsilon} \quad \text{vs.} \quad K \simeq \begin{cases} E_F \\ T \end{cases}$$

Двумерный электронный газ: Роль взаимодействия электронов.



$$\Pi \sim \frac{e^2\sqrt{n_S}}{\varepsilon} \quad \text{vs.} \quad K \simeq \begin{cases} E_F \\ T \end{cases}$$

«кристаллизация» при

$$\Gamma = \frac{\Pi}{K} \sim 100...150$$

Холодное и горячее плавление двумерного «кристалла».

$$\Pi \sim \frac{e^2 \sqrt{n_S}}{\varepsilon} \quad \text{vs.} \quad K \simeq \begin{cases} E_F \\ T \end{cases}$$

вырожденный ферми-газ

невырожденный ферми-газ

Холодное и горячее плавление двумерного «кристалла».

$$\Pi \sim \frac{e^2 \sqrt{n_S}}{\varepsilon} \quad \text{vs.} \quad K \simeq \begin{cases} E_F \\ T \end{cases}$$

вырожденный ферми-газ

$$\Gamma = \frac{\Pi}{K} \simeq \frac{e^2 \sqrt{n_S}\, m^*}{\varepsilon \hbar^2 \pi n_S}$$

$$n_S^{(c)} \simeq \left(\frac{e^2 m^*}{\varepsilon \Gamma \hbar^2} \right)^2 \simeq 10^8 \frac{1}{\text{см}^2}$$

невырожденный ферми-газ

Холодное и горячее плавление двумерного «кристалла».

$$\Pi \sim \frac{e^2 \sqrt{n_S}}{\varepsilon} \quad \text{vs.} \quad K \simeq \begin{cases} E_F \\ T \end{cases}$$

вырожденный ферми-газ

$$\Gamma = \frac{\Pi}{K} \simeq \frac{e^2 \sqrt{n_S} m^*}{\varepsilon \hbar^2 \pi n_S}$$

$$n_S^{(c)} \simeq \left(\frac{e^2 m^*}{\varepsilon \Gamma \hbar^2} \right)^2 \simeq 10^8 \frac{1}{\text{см}^2}$$

невырожденный ферми-газ

$$\Gamma = \frac{\Pi}{K} \simeq \frac{e^2 \sqrt{n_S}}{k_B T \varepsilon}$$

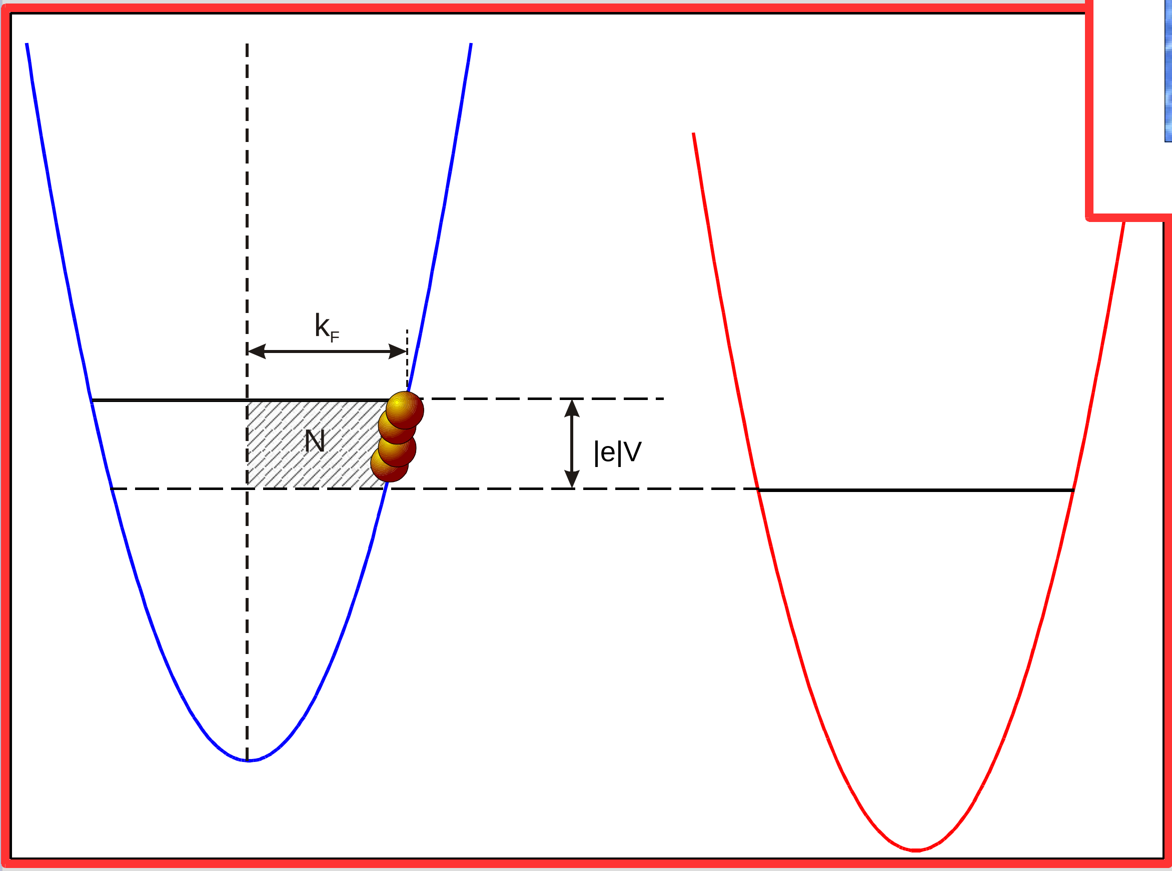
$$T_c \simeq \frac{e^2 \sqrt{n_S}}{\Gamma k_B \varepsilon} \simeq 1\,\text{К}$$

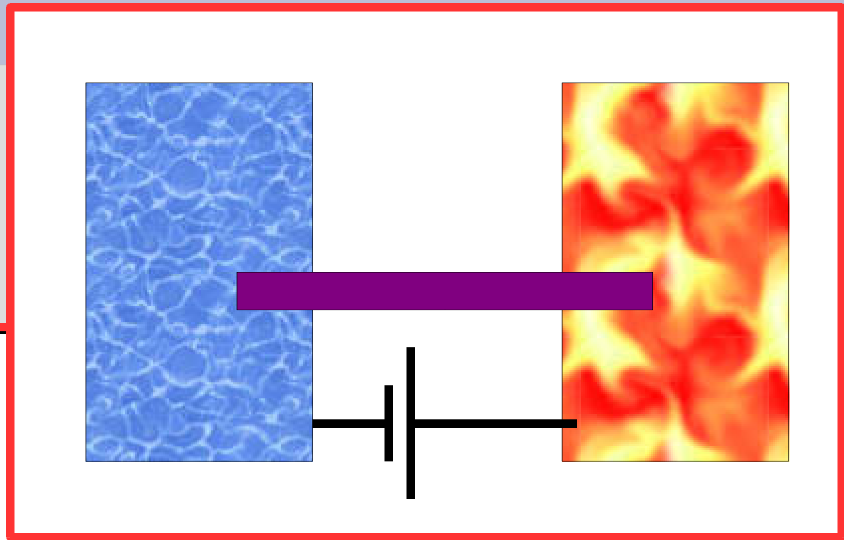
Промежуточный вывод

- существуют необычные формы упорядочения в низкоразмерных системах

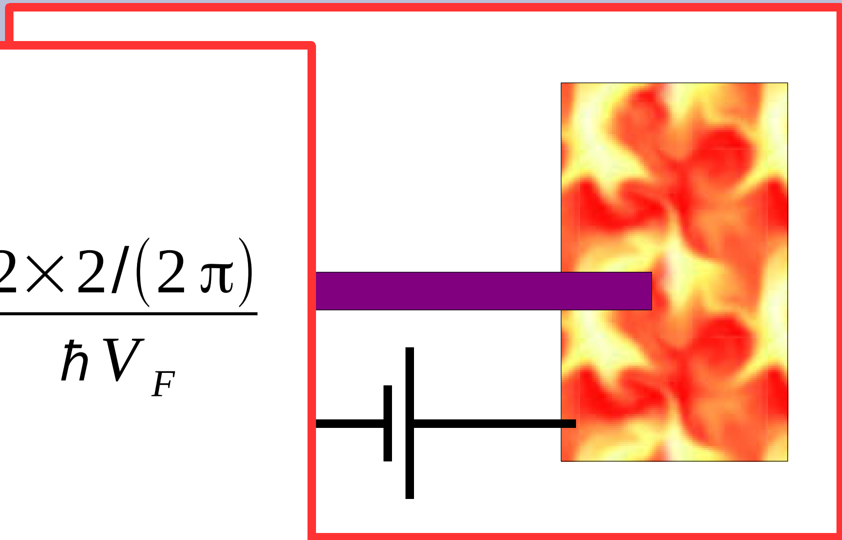
Задача 5. Квантование проводимости одномерного проводника в баллистическом режиме.

Квантование проводимости одномерного проводника в баллистическом режиме.





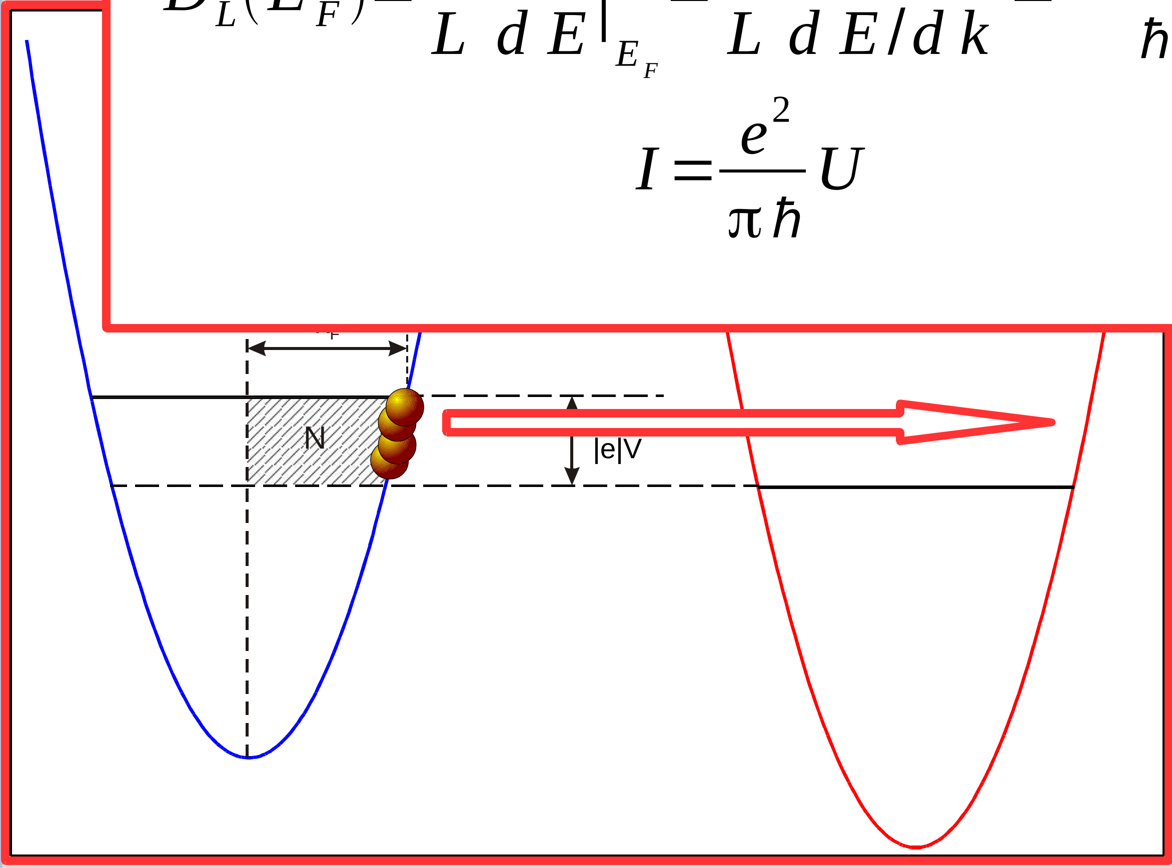
Квантование проводимости одномерного проводника в баллистическом режиме.



$$I=\left(\frac{D_L(E_F)}{2}eU\right)eV_F$$

$$D_L(E_F)=\frac{1}{L}\frac{dN}{dE}\bigg|_{E_F}=\frac{1}{L}\frac{dN/dk}{dE/dk}=\frac{2\times 2/(2\pi)}{\hbar V_F}$$

$$I=\frac{e^2}{\pi\hbar}U$$

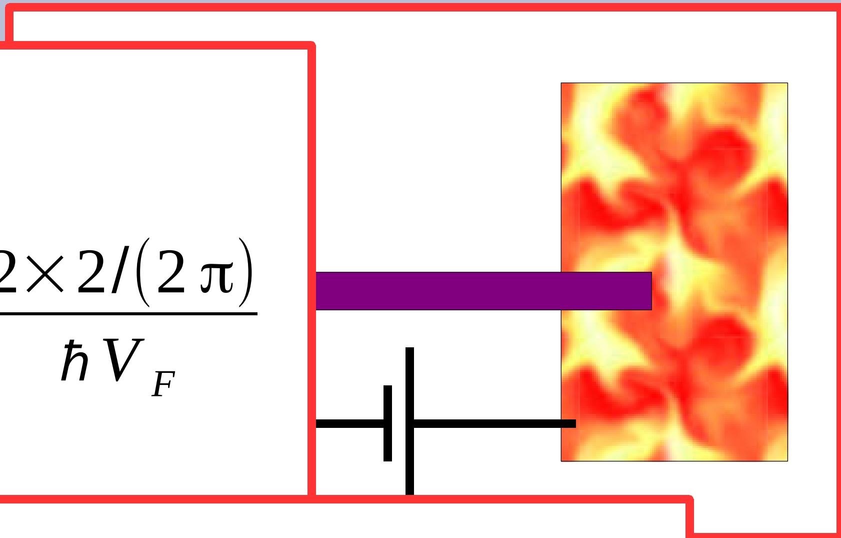


Квантование проводимости одномерного проводника в баллистическом режиме.

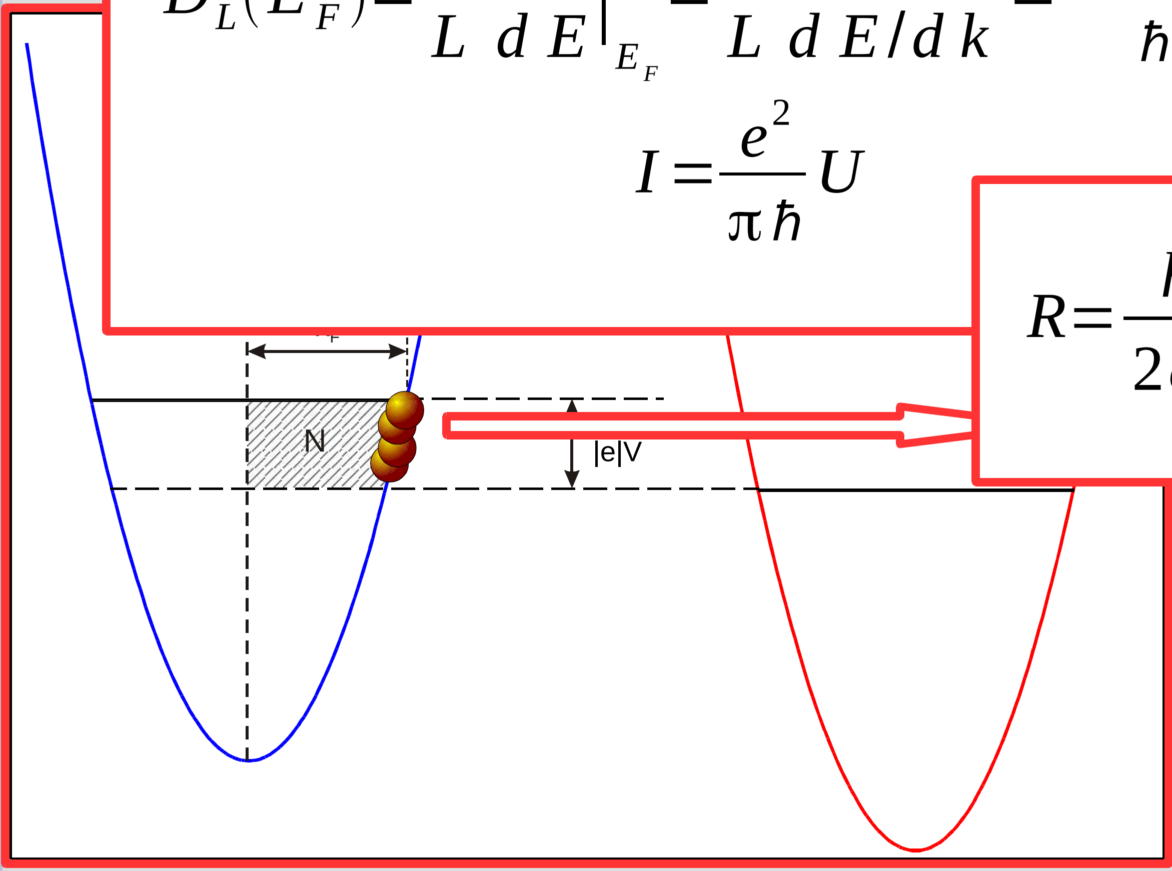
$$I=\left(\frac{D_L(E_F)}{2}eU\right)eV_F$$

$$D_L(E_F)=\frac{1}{L}\frac{dN}{dE}\bigg|_{E_F}=\frac{1}{L}\frac{dN/dk}{dE/dk}=\frac{2\times 2/(2\pi)}{\hbar V_F}$$

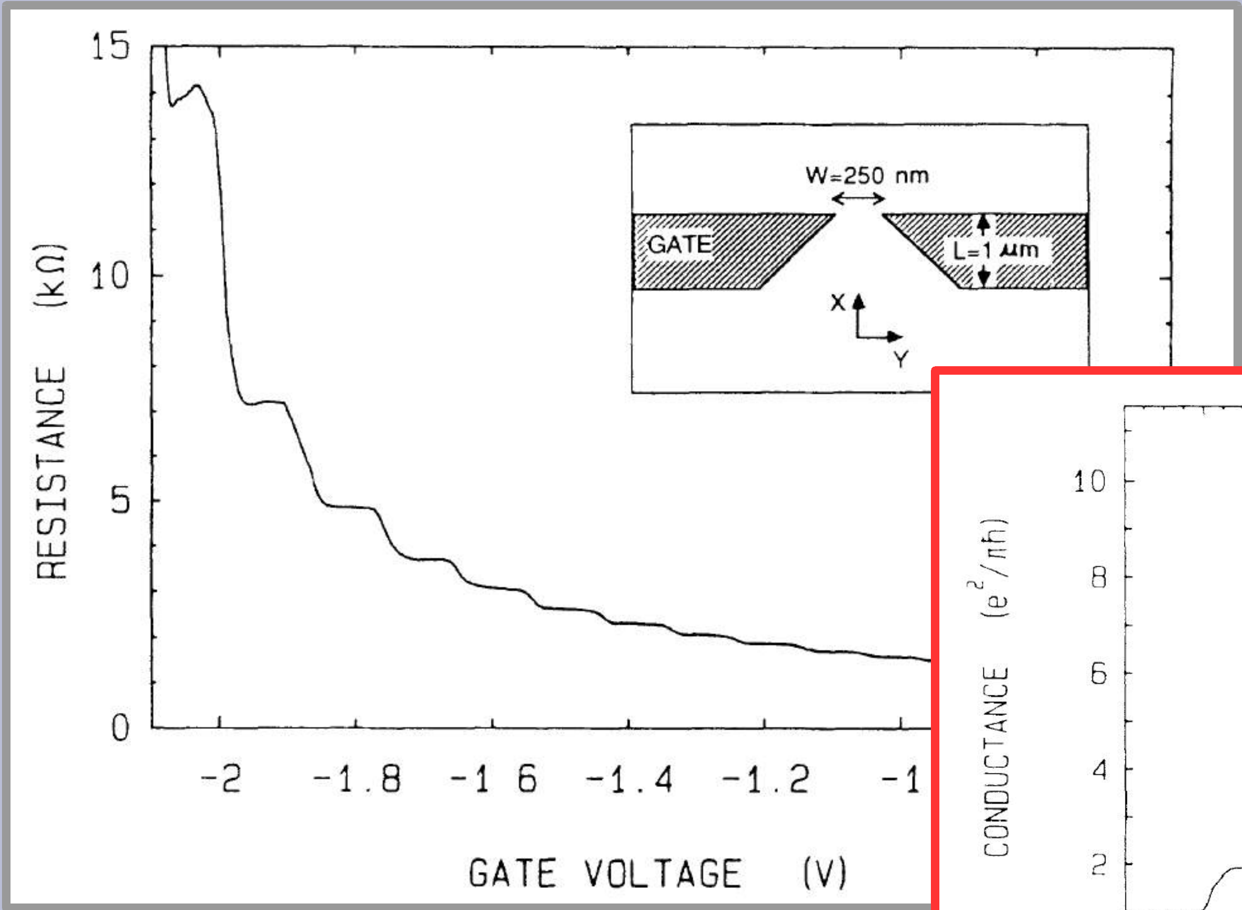
$$I=\frac{e^2}{\pi\hbar}U$$



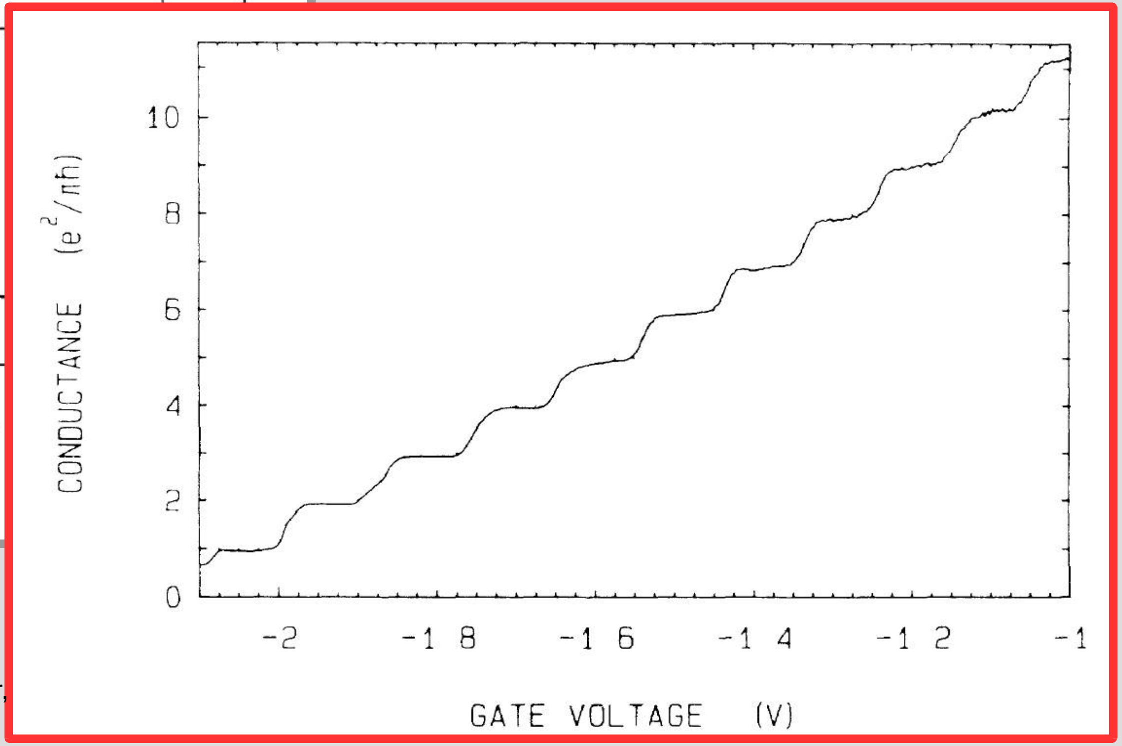
$$R=\frac{h}{2e^2}=\frac{1}{2G_0}\approx 12.9\ \text{кОм}$$



Проводимость одномерного проводника: эксперимент.



эффективная ширина канала 0...360 нм,



Слева: зависимость сопротивления точечного контакта от напряжения на затворе, на вставке показана схема точечного контакта. Справа: квантование проводимости как функция напряжения на затворе. Температура опыта 0.6К. B. J. van Wees, H. van Houten, C. W. J. Beenakker, J. G. Williamson, L. P. Kouwenhoven, D. van der Marel, and C. T. Foxon, Quantized conductance of point contacts in a two-dimensional electron gas ,Physical Review Letters,60, 848(1988)

Промежуточный вывод

- Некоторые из наблюдаемых явлений могут иметь метрологическую ценность: измеряемые величины зависят только от фундаментальных констант.

Часть 2: Двумерные электроны в квантующем магнитном поле. Квантовый эффект Холла.

Шаг 1. Тензор проводимости и тензор сопротивления в магнитном поле.

Классический эффект Холла.

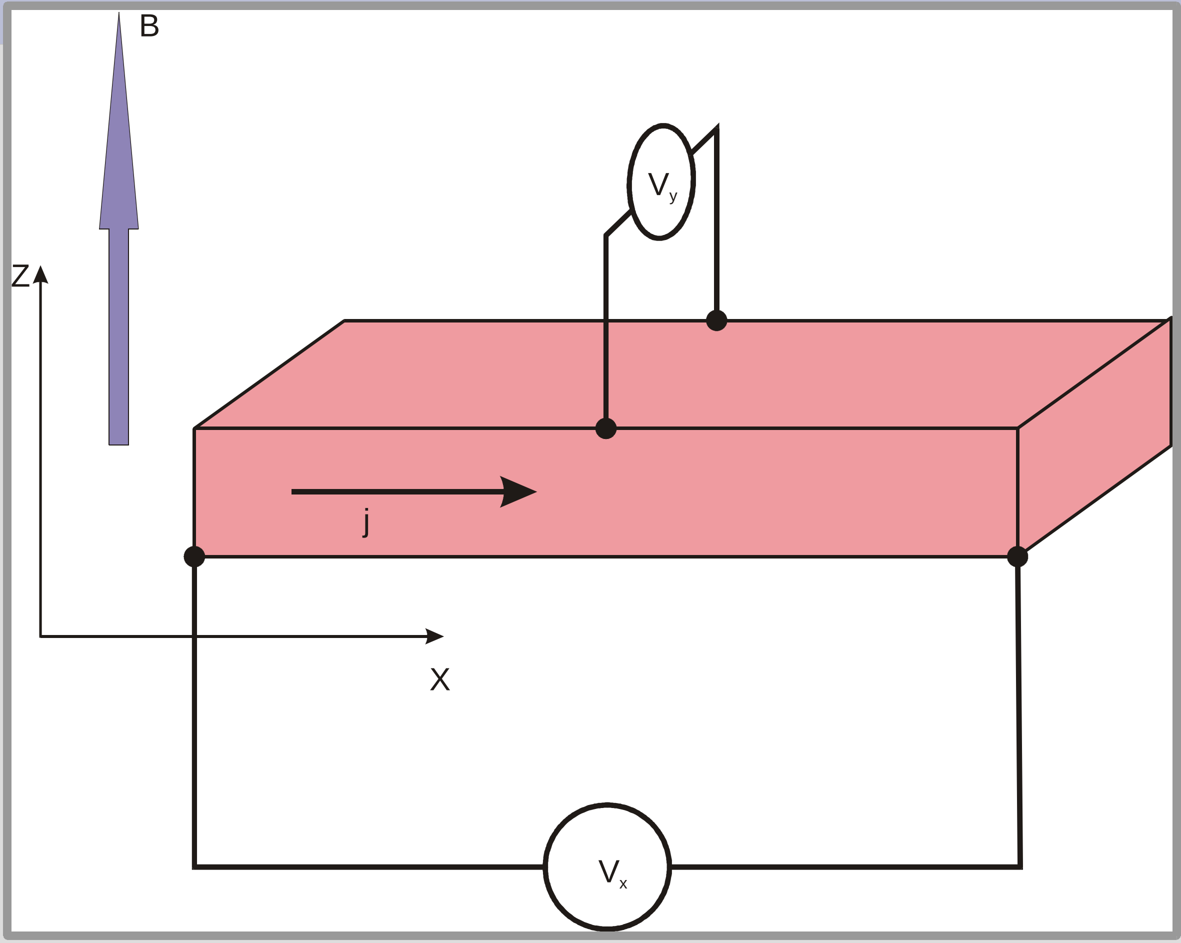


Схема опыта по измерению эффекта Холла.

$$m\frac{d\vec{V}}{dt} = q\vec{E} + \frac{q}{c}\vec{V}\times\vec{B}$$

Классический эффект Холла.

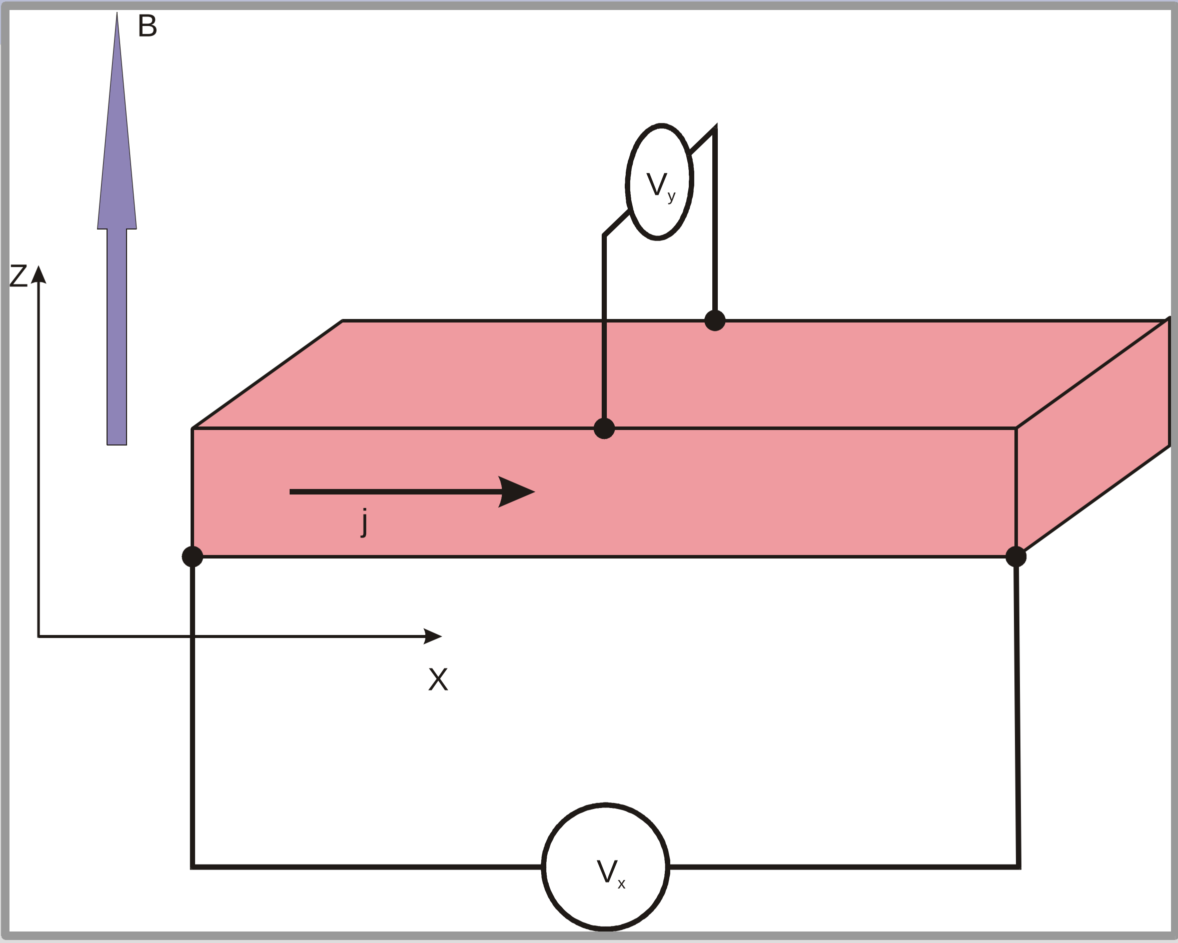


Схема опыта по измерению эффекта Холла.

$$m\frac{d\vec{V}}{dt} = q\vec{E} + \frac{q}{c}\vec{V}\times\vec{B}$$

$$\vec{V}_{\partial p} = q\left(\vec{E} + \frac{1}{c}\vec{V}_{\partial p}\times\vec{B}\right)\frac{\tau}{m}$$

Тензор проводимости и сопротивления.

$$\vec{V}_{\partial p}=q\left(\vec{E}+\frac{1}{c}\vec{V}_{\partial p}\times\vec{B}\right)\frac{\tau}{m}$$

$$\vec{j}=ne\vec{V}_d=\frac{ne^2\tau}{m}\vec{E}+\frac{e\tau}{mc}\vec{j}\times\vec{B}$$

$$\begin{pmatrix} j_x \\ j_y \end{pmatrix}=\sigma_0\vec{E}+\omega_c\tau\begin{pmatrix} j_y \\ -j_x \end{pmatrix}$$

$$\vec{j}=\hat{\sigma}\vec{E} \qquad \vec{E}=\hat{\rho}\vec{j}$$

$$\sigma_0=\frac{ne^2\tau}{m}$$

$$\omega_c=\frac{eB}{mc}$$

Тензор проводимости и сопротивления.

$$\vec{V}_{\partial p} = q\left(\vec{E} + \frac{1}{c}\vec{V}_{\partial p} \times \vec{B}\right)\frac{\tau}{m}$$

$$\vec{j} = ne\vec{V}_d = \frac{ne^2\tau}{m}\vec{E} + \frac{e\tau}{mc}\vec{j} \times \vec{B}$$

$$\begin{pmatrix} j_x \\ j_y \end{pmatrix} = \sigma_0 \vec{E} + \omega_c \tau \begin{pmatrix} j_y \\ -j_x \end{pmatrix}$$

$$\vec{j} = \hat{\sigma}\vec{E} \qquad \vec{E} = \hat{\rho}\vec{j}$$

$$\sigma_0 = \frac{ne^2\tau}{m}$$

$$\omega_c = \frac{eB}{mc}$$

$$\hat{\rho} = \frac{1}{\sigma_0}\begin{pmatrix} 1 & -\omega_c\tau \\ \omega_c\tau & 1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\sigma} = \frac{\sigma_0}{1 + (\omega_c\tau)^2}\begin{pmatrix} 1 & \omega_c\tau \\ -\omega_c\tau & 1 \end{pmatrix}$$

Тензор проводимости и сопротивления.

$$\vec{V}_{\partial p} = q\left(\vec{E} + \frac{1}{c}\vec{V}_{\partial p} \times \vec{B}\right)\frac{\tau}{m}$$

$$\vec{j} = ne\vec{V}_d = \frac{ne^2\tau}{m}\vec{E} + \frac{e\tau}{mc}\vec{j} \times \vec{B}$$

$$\begin{pmatrix} j_x \\ j_y \end{pmatrix} = \sigma_0 \vec{E} + \omega_c \tau \begin{pmatrix} j_y \\ -j_x \end{pmatrix}$$

$$\vec{j} = \hat{\sigma}\vec{E} \qquad \vec{E} = \hat{\rho}\vec{j}$$

$$\sigma_0 = \frac{ne^2\tau}{m}$$

$$\sigma_{xx} = \frac{\rho_{xx}}{\rho_{xx}^2 + \rho_{xy}^2}$$

$$\sigma_{xy} = -\frac{\rho_{xy}}{\rho_{xx}^2 + \rho_{xy}^2}$$

$$\hat{\rho} = \frac{1}{\sigma_0}\begin{pmatrix} 1 & -\omega_c\tau \\ \omega_c\tau & 1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\sigma} = \frac{\sigma_0}{1 + (\omega_c\tau)^2}\begin{pmatrix} 1 & \omega_c\tau \\ -\omega_c\tau & 1 \end{pmatrix}$$

Тензор проводимости и сопротивления.

$$\vec{V}_{\partial p} = q\left(\vec{E} + \frac{1}{c}\vec{V}_{\partial p}\times\vec{B}\right)\frac{\tau}{m}$$

$$\vec{j} = ne\vec{V}_d = \frac{ne^2\tau}{m}\vec{E} + \frac{e\tau}{mc}\vec{j}\times\vec{B}$$

$$\begin{pmatrix} j_x \\ j_y \end{pmatrix} = \sigma_0\vec{E} + \omega_c\tau\begin{pmatrix} j_y \\ -j_x \end{pmatrix}$$

$$\vec{j} = \hat{\sigma}\vec{E} \qquad \vec{E} = \hat{\rho}\vec{j}$$

$$\sigma_0 = \frac{ne^2\tau}{m}$$

$$\omega_c = \frac{eB}{mc}$$

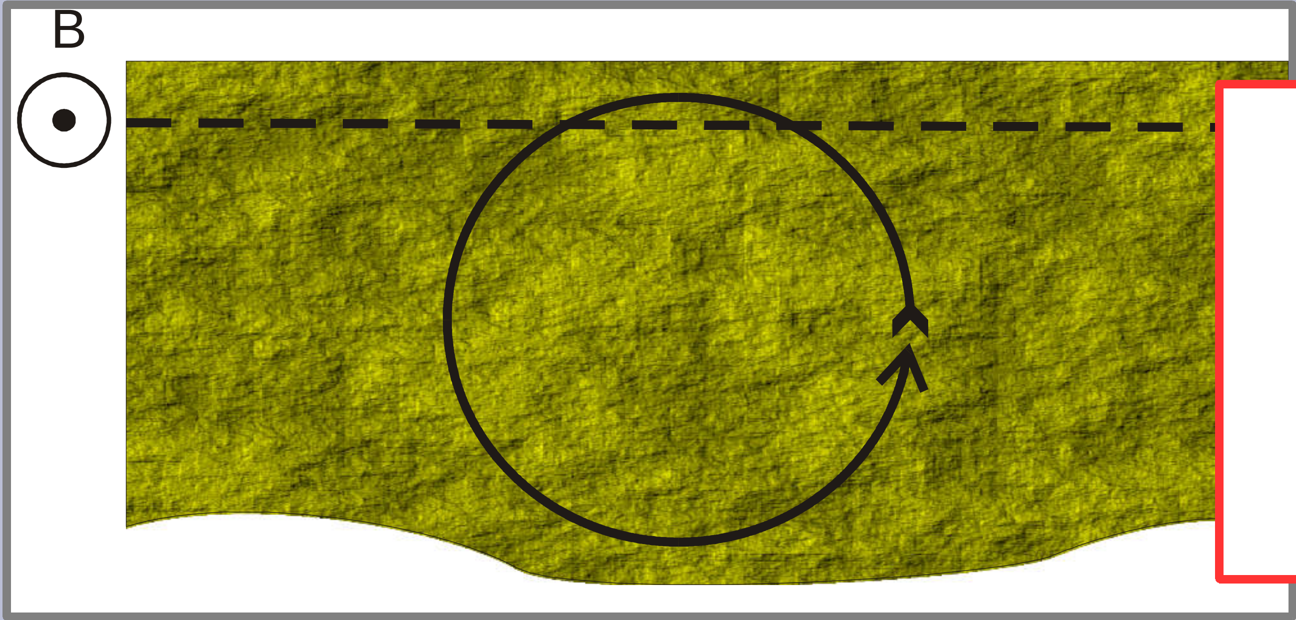
$$\hat{\rho} = \frac{1}{\sigma_0}\begin{pmatrix} 1 & -\omega_c\tau \\ \omega_c\tau & 1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\sigma} = \frac{\sigma_0}{1+(\omega_c\tau)^2}\begin{pmatrix} 1 & \omega_c\tau \\ -\omega_c\tau & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rho_H = \frac{\omega_c\tau}{\sigma_0} = \frac{B}{nec}$$

Шаг 2. Квантование движения двумерного электрона в магнитном поле. Уровни Ландау.

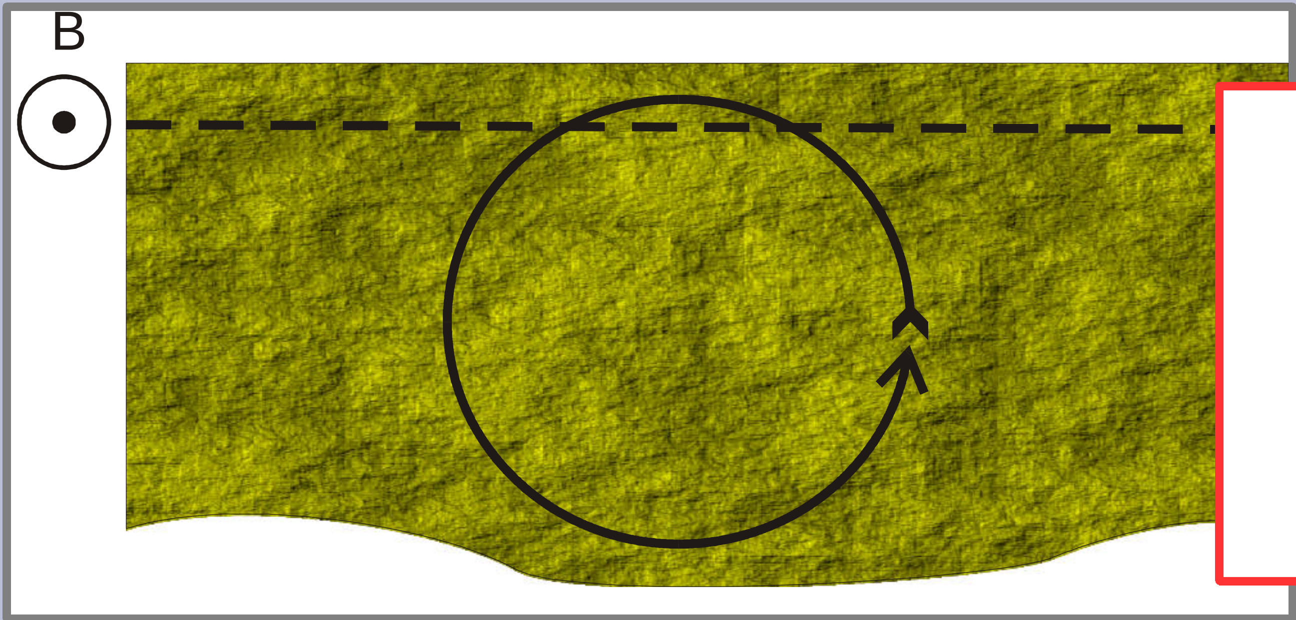
Циклотронное движение свободного эдектрона



$$m\omega^2 R = \frac{e}{c}\omega R B$$

$$\omega_c = \frac{eB}{mc}$$

Циклотронное движение свободного эдектрона



$$m\omega^2 R = \frac{e}{c}\omega R B$$

$$\omega_c = \frac{eB}{mc}$$

$$\oint\left(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}\right)d\vec{l} = nh$$

$$2\pi r m\omega_c r - \frac{e}{c}B\pi r^2 = nh$$

$$\pi\frac{eB}{c}r^2 = nh \Rightarrow r_n^2 = \frac{2n\hbar c}{eB} \Rightarrow E_n = \frac{p^2}{2m} = \frac{m}{2}\omega_c^2 r_n^2 = n\hbar\omega_c$$

Уровни Ландау в двумерном случае. Строгий результат.

$$\vec{A}=(0, Bx, 0)$$

$$\frac{1}{2\mathrm{m}}\left(\hat{p}_x^2+\left(\hat{p}_y-\frac{e}{c}B\hat{x}\right)^2\right)\Psi(x,y)=E\Psi(x,y)$$

$$\Psi(x,y)=e^{ik_y y}\psi(x)$$

$$l_B=\sqrt{\frac{\hbar c}{eB}}$$

$$x_0=\frac{\hbar c k_y}{eB}=l_B^2 k_y$$

$$\Rightarrow$$

$$-\psi''+\frac{(x-x_0)^2}{l_B^4}\psi=\varepsilon\psi$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\psi''+\frac{e^2B^2}{mc^2}\frac{(x-x_0)^2}{2}\psi=E\psi$$

Уровни Ландау в двумерном случае. Строгий результат.

$\vec{A}=(0,$

$\frac{1}{2m}\left(\hat{p}_x^2\right.$

$\Psi(x,$

эквивалентная задача о гармоническом осцилляторе

x_0 — *координата ведущего центра*

l_B — *магнитная длина (в 10 Тл 80 Å)*

$$\omega_c=\frac{eB}{mc}, \qquad E_n=\hbar\omega_c\left(n+\frac{1}{2}\right)$$

$$l_B=\sqrt{\frac{\hbar c}{eB}}$$

$$x_0=\frac{\hbar c k_y}{eB}=l_B^2 k_y$$

$$-\psi''+\frac{(x-x_0)^2}{l_B^4}\psi=\varepsilon\psi$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\psi''+\frac{e^2B^2}{mc^2}\frac{(x-x_0)^2}{2}\psi=E\psi$$

Уровни Ландау в двумерном случае. Строгий результат.

$\vec{A}=(0,$

$\frac{1}{2\mathrm{m}}\left(\hat{p}_x^2\right.$

$\Psi(x,$

l

$x_0=$

eB

эквивалентная задача о гармоническом осцилляторе

x_0 — *координата ведущего центра*

l_B — *магнитная длина (в 10 Тл 80 Å)*

$$\omega_c=\frac{eB}{mc}, \qquad E_n=\hbar\omega_c\left(n+\frac{1}{2}\right)$$

в поле 10 Тл

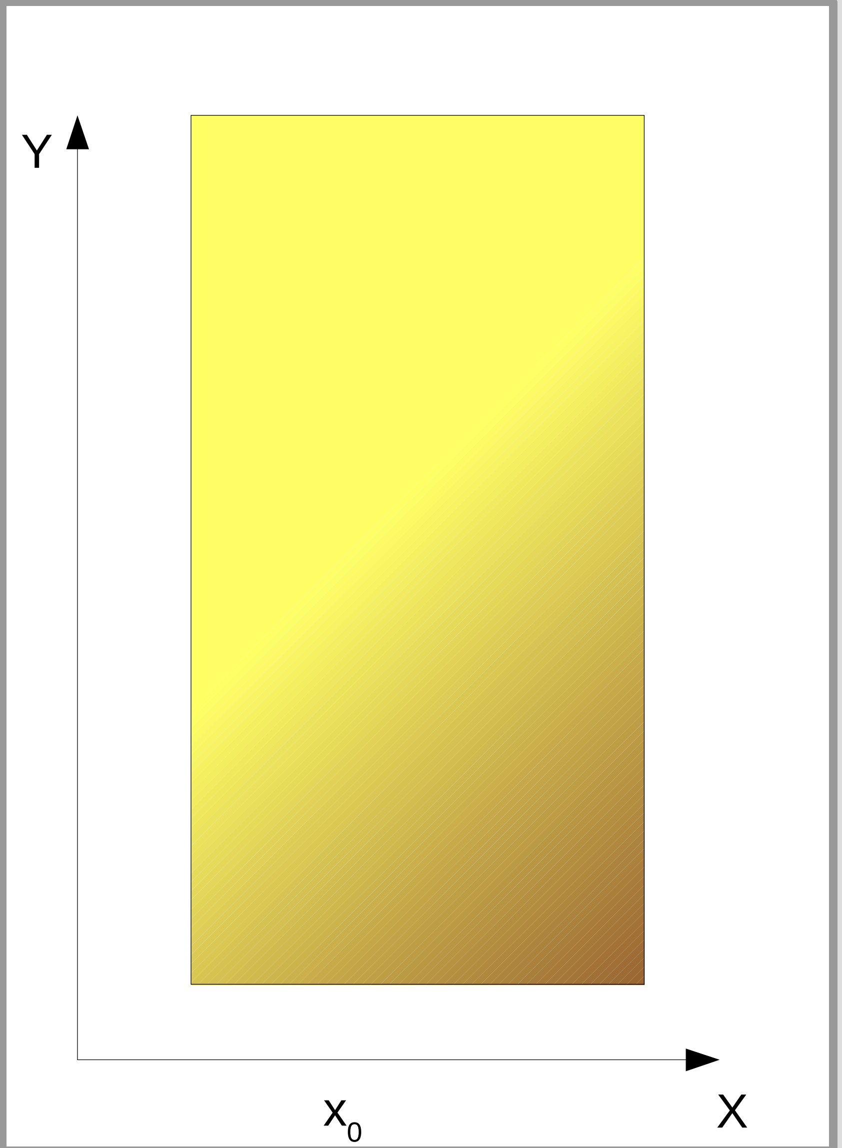
$$\frac{\hbar\omega_c}{k_B}\simeq 10\,\mathrm{K}$$

$$-\psi''+\frac{(x-x_0)^2}{l_B^4}\psi=\varepsilon\psi$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\psi''+\frac{e^2B^2}{mc^2}\frac{(x-x_0)^2}{2}\psi=E\psi$$

Шаг 3. Кратность вырождения (ёмкость) уровней Ландау.

Уровни Ландау в двумерном случае: кратность вырождения.

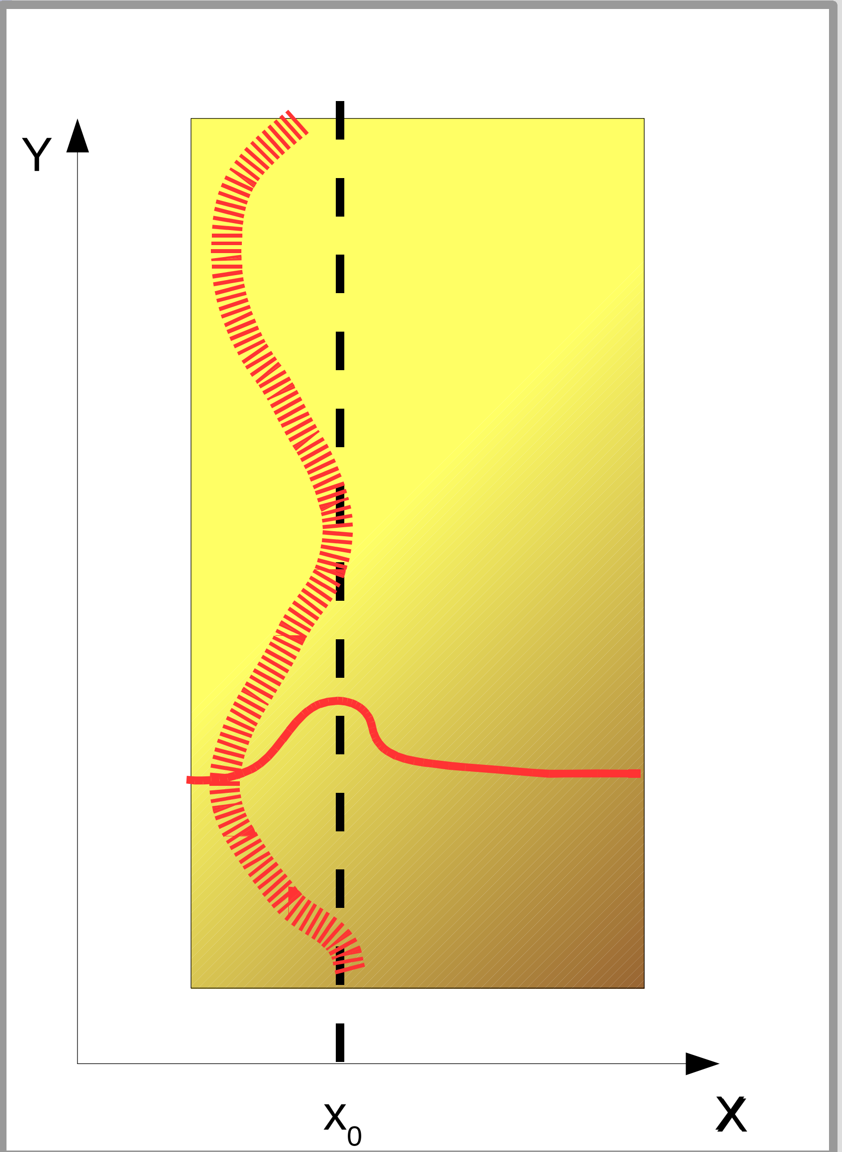


$$\Psi(x,y)=e^{ik_y y}\psi(x)$$

$$l_B=\sqrt{\frac{\hbar c}{eB}}$$

$$x_0=\frac{\hbar c k_y}{eB}=l_B^2 k_y$$

Уровни Ландау в двумерном случае: кратность вырождения.

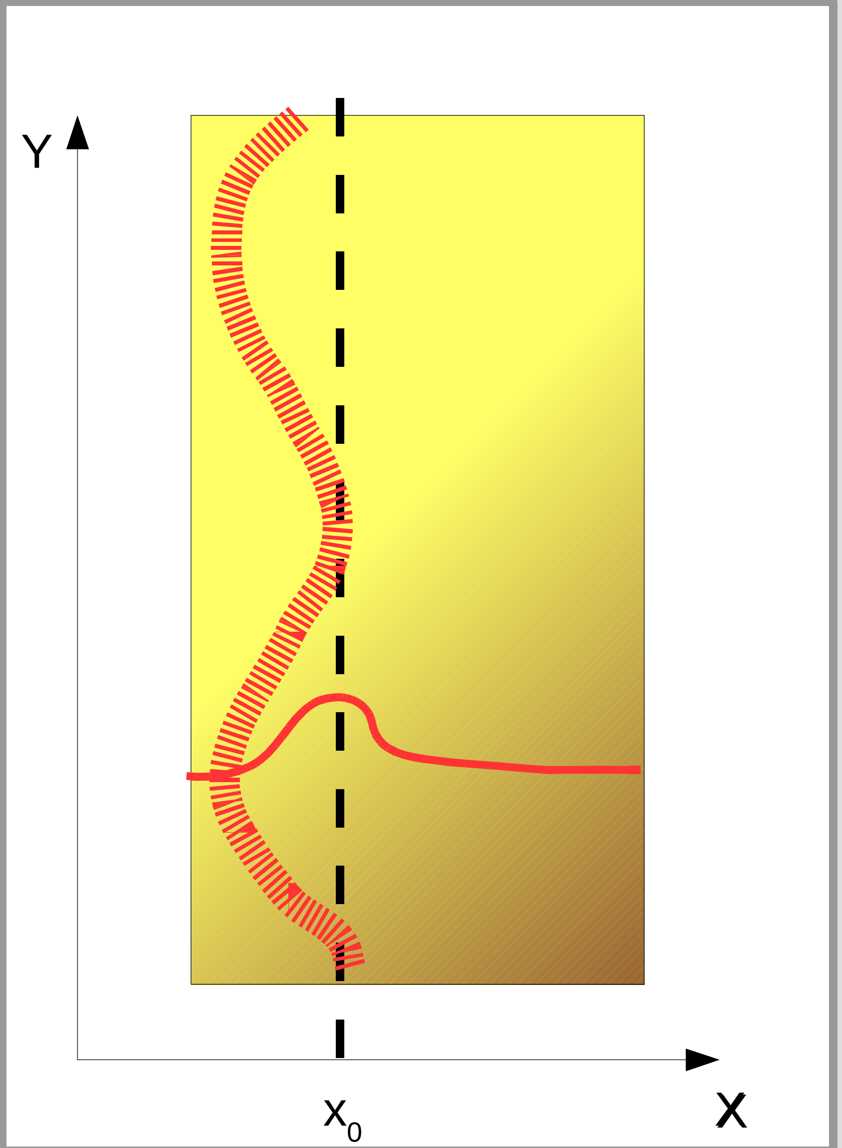


$$\Psi(x,y)=e^{ik_y y}\psi(x)$$

$$l_B=\sqrt{\frac{\hbar c}{eB}}$$

$$x_0=\frac{\hbar c k_y}{eB}=l_B^2 k_y$$

Уровни Ландау в двумерном случае: кратность вырождения.



$$\Psi(x,y)=e^{ik_y y}\psi(x)$$

$$l_B=\sqrt{\frac{\hbar c}{eB}}$$

$$x_0=\frac{\hbar c k_y}{eB}=l_B^2 k_y$$

$$0<x_0<L_x$$

$$k_y=\frac{2\pi}{L_y}N$$

$$N_{max}=\frac{eB}{hc}L_x L_y=\frac{1}{2\pi}\frac{S}{l_B^2}$$

Уровни Ландау в двумерном случае:

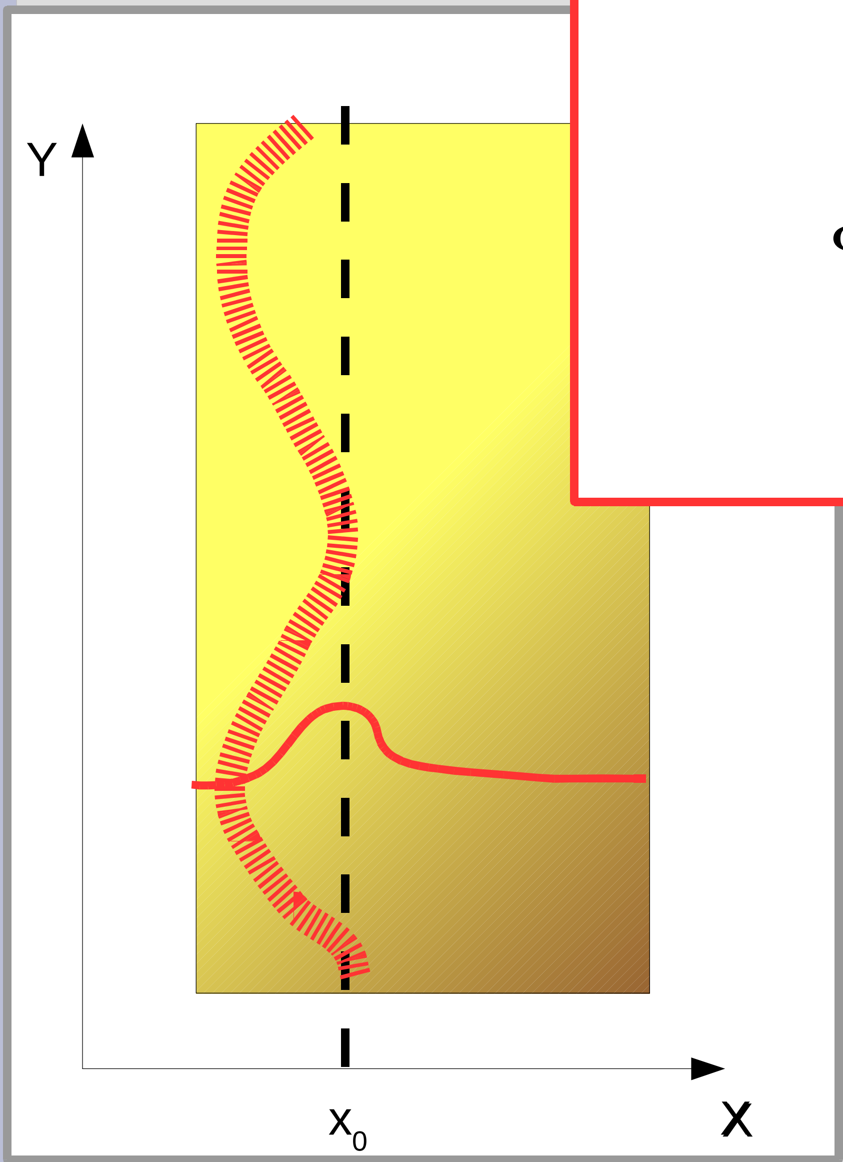
кр

без учёта спинового вырождения!

$$n_0 = \frac{1}{2\pi l_B^2} = \frac{eB}{hc} = \frac{B}{2\Phi_0}$$

$$\Phi_0 = \frac{\pi \hbar c}{e} = 2.05 \cdot 10^{-7}\ \text{Э} \cdot \text{см}^2$$

$$n_0(10\ \text{Тл}) \simeq 5 \cdot 10^{11} \frac{1}{\text{см}^2}$$

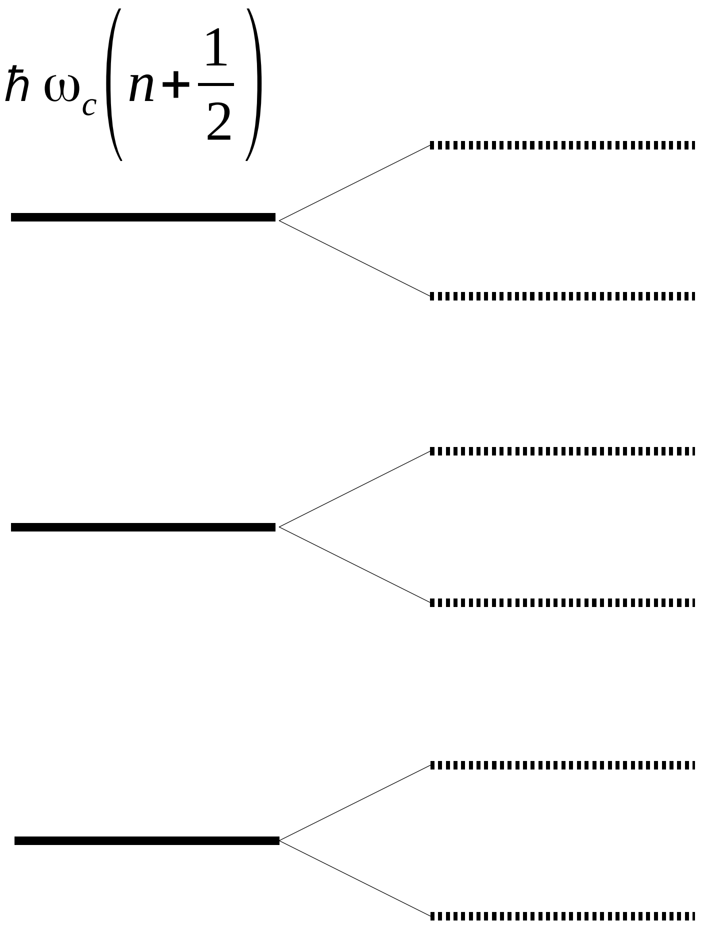


$$0 < x_0 < L_x$$

$$k_y = \frac{2\pi}{L_y} N$$

$$N_{max} = \frac{eB}{hc} L_x L_y = \frac{1}{2\pi} \frac{S}{l_B^2}$$

Спиновые подуровни уровней Ландау.

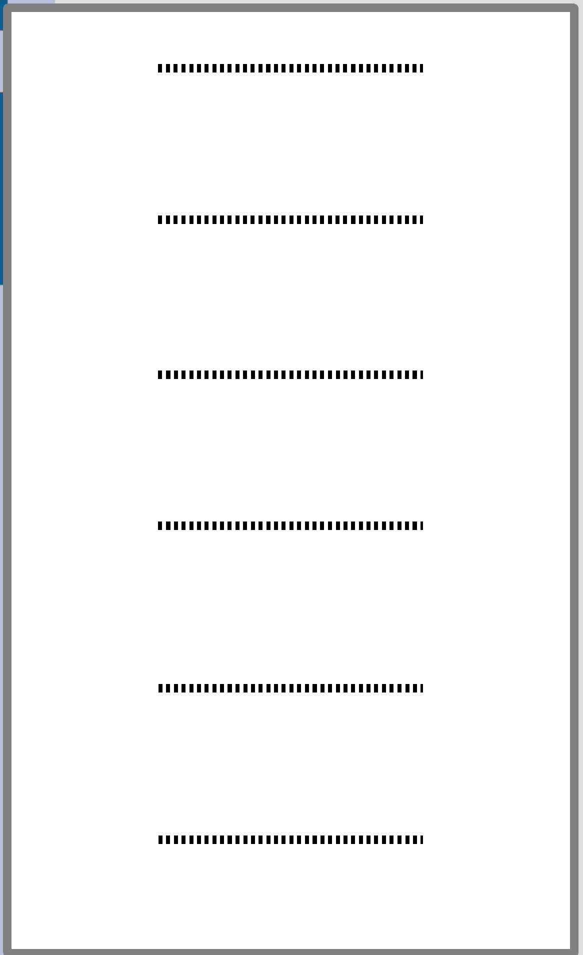


$$E_{n,\pm}=\hbar\omega_c\left(n+\frac{1}{2}\right)\pm\frac{1}{2}g\mu_B B$$

$$\omega_c=\frac{eB}{mc},\mu_B=\frac{e\hbar}{2mc}$$

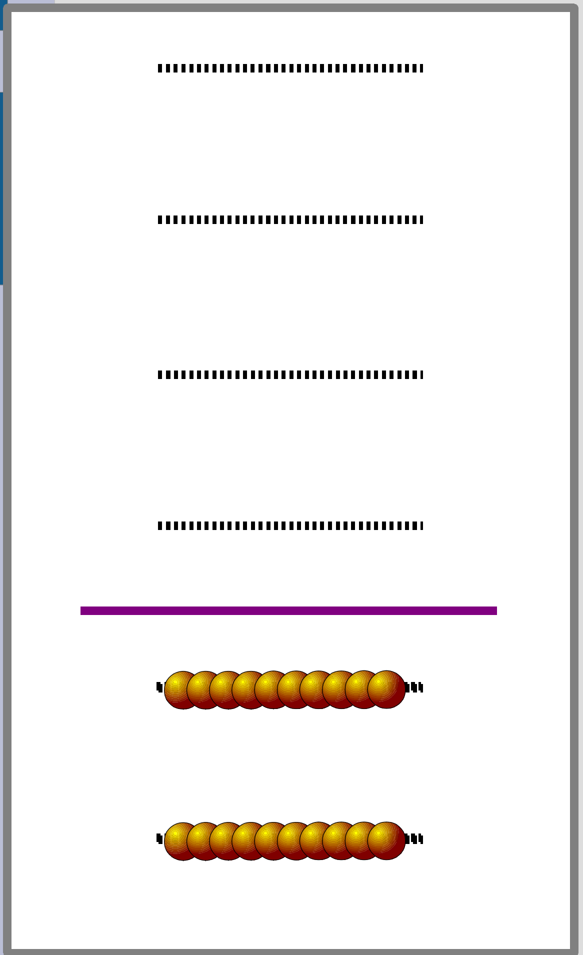
Шаг 4. Заполнение уровней Ландау и квантовый эффект Холла.

Положение химпотенциала при заполнении уровней Ландау в двумерном случае.



$$n_0 = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{l_B^2} = \frac{eB}{hc}$$

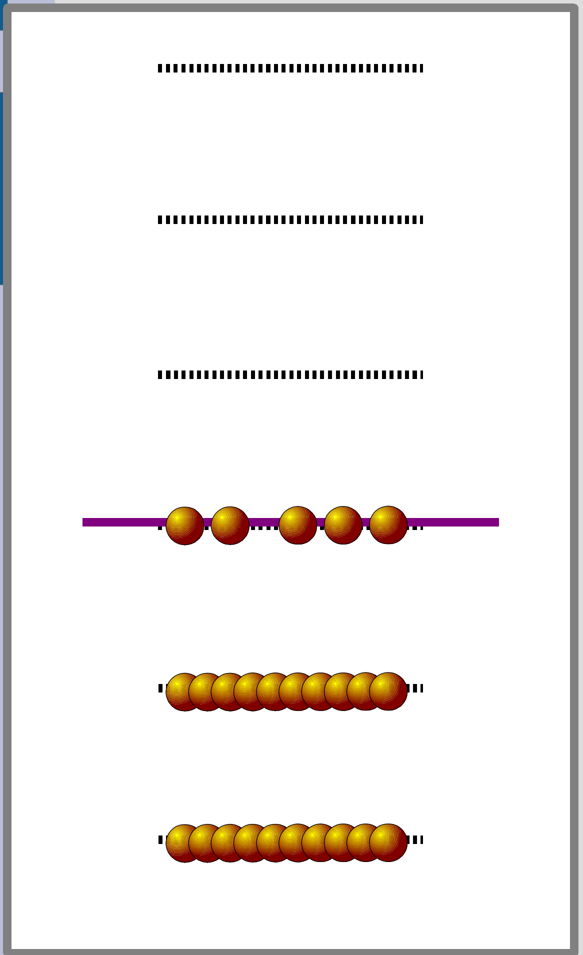
Положение химпотенциала при заполнении уровней Ландау в двумерном случае.



$$n_0 = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{l_B^2} = \frac{e\,B}{h\,c}$$

<u>Вариант 1:</u>
Полностью заполнено несколько уровней.

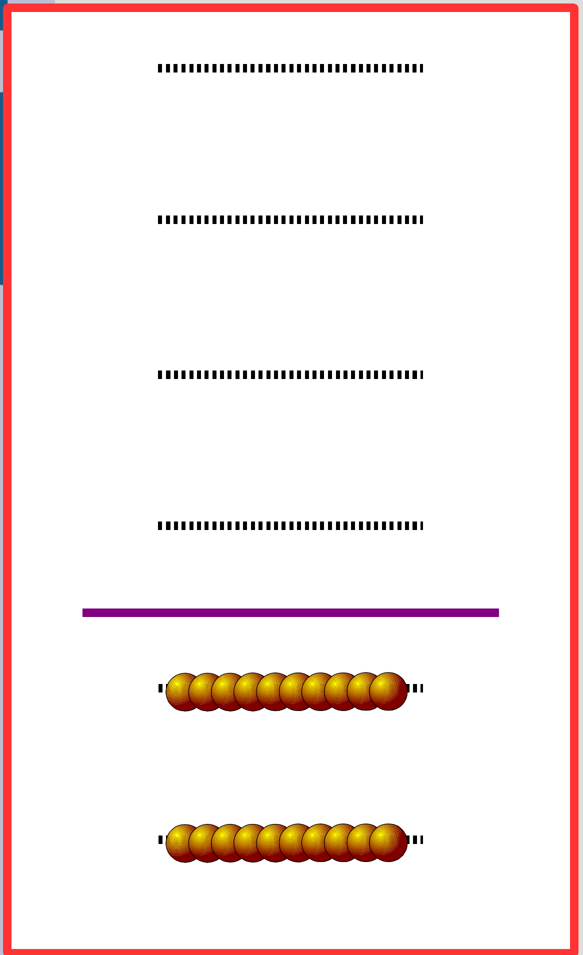
Положение химпотенциала при заполнении уровней Ландау в двумерном случае.



$$n_0 = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{l_B^2} = \frac{eB}{hc}$$

Вариант 2:
Один уровень частично заполнен.

Холловское сопротивление при полном заполнении уровней Ландау

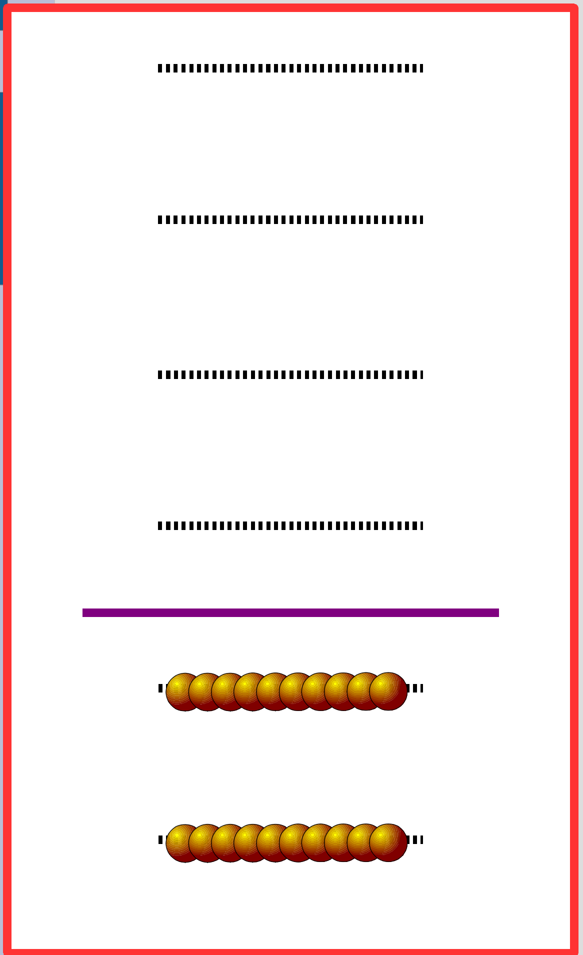


$$n_0 = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{l_B^2} = \frac{eB}{hc}$$

$$\vec{E} = \hat{\rho}\,\vec{j}$$

$$\rho_H = \frac{B}{nec}$$

Холловское сопротивление при полном заполнении уровней Ландау



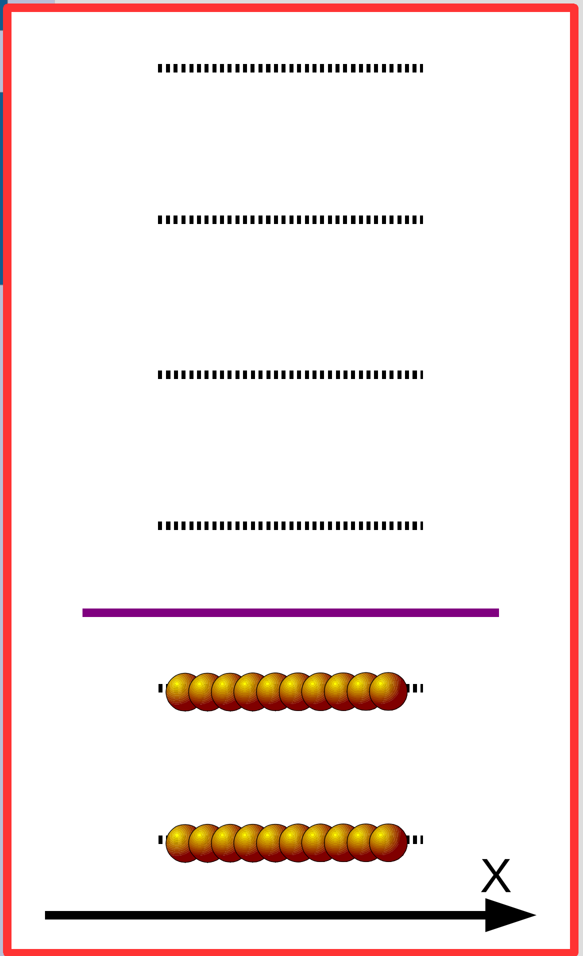
$$n_0 = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{l_B^2} = \frac{eB}{hc}$$

$$\vec{E} = \hat{\rho}\,\vec{j}$$

$$\rho_H = \frac{B}{nec}$$

$$n = N n_0 \Rightarrow \rho_H^{(2D)} = \frac{1}{N}\frac{h}{e^2}$$

Холловское сопротивление при полном заполнении уровней Ландау



$$n_0 = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{l_B^2} = \frac{eB}{hc}$$

$$\vec{E} = \hat{\rho}\,\vec{j}$$

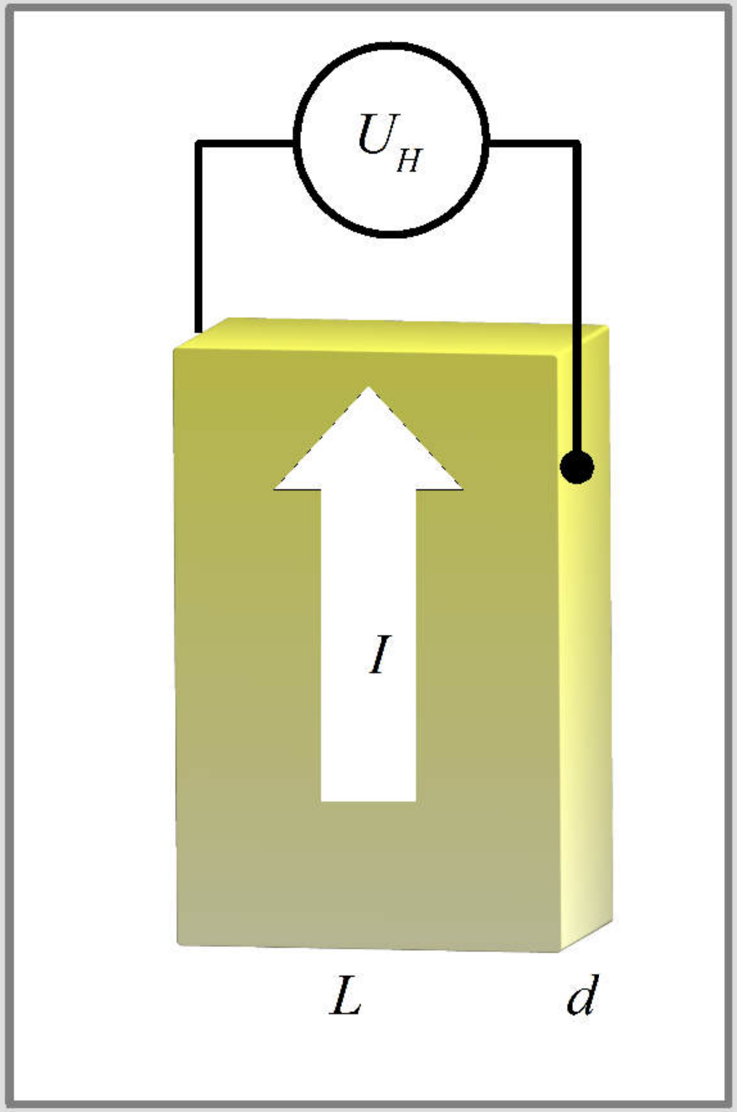
$$\rho_H = \frac{B}{nec}$$

$$n = N n_0 \Rightarrow \rho_H^{(2D)} = \frac{1}{N}\frac{h}{e^2}$$

$$\sigma_{xx} = 0$$

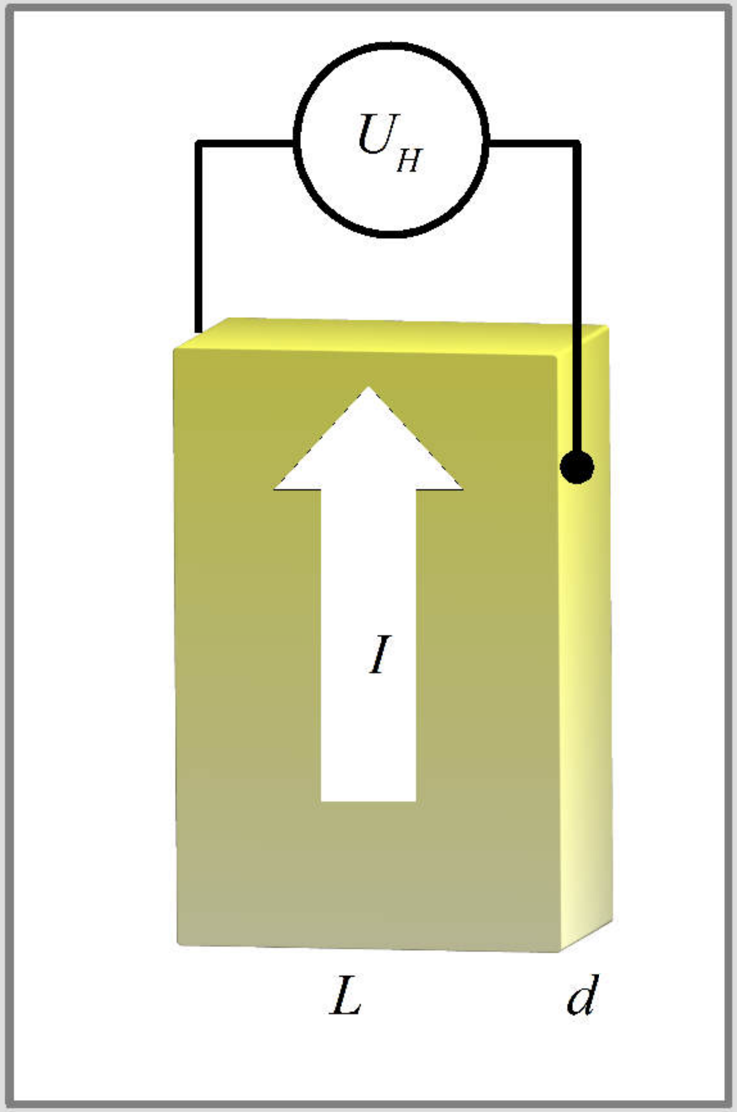
Шаг 5. Наблюдение квантового эффекта Холла

Холловское сопротивление



$$R_H = \frac{U}{I} = \frac{E \times L}{j_S (L \times d)} = \frac{E}{j_S d} = \frac{E}{j_L} = \rho_H^{(2D)}$$

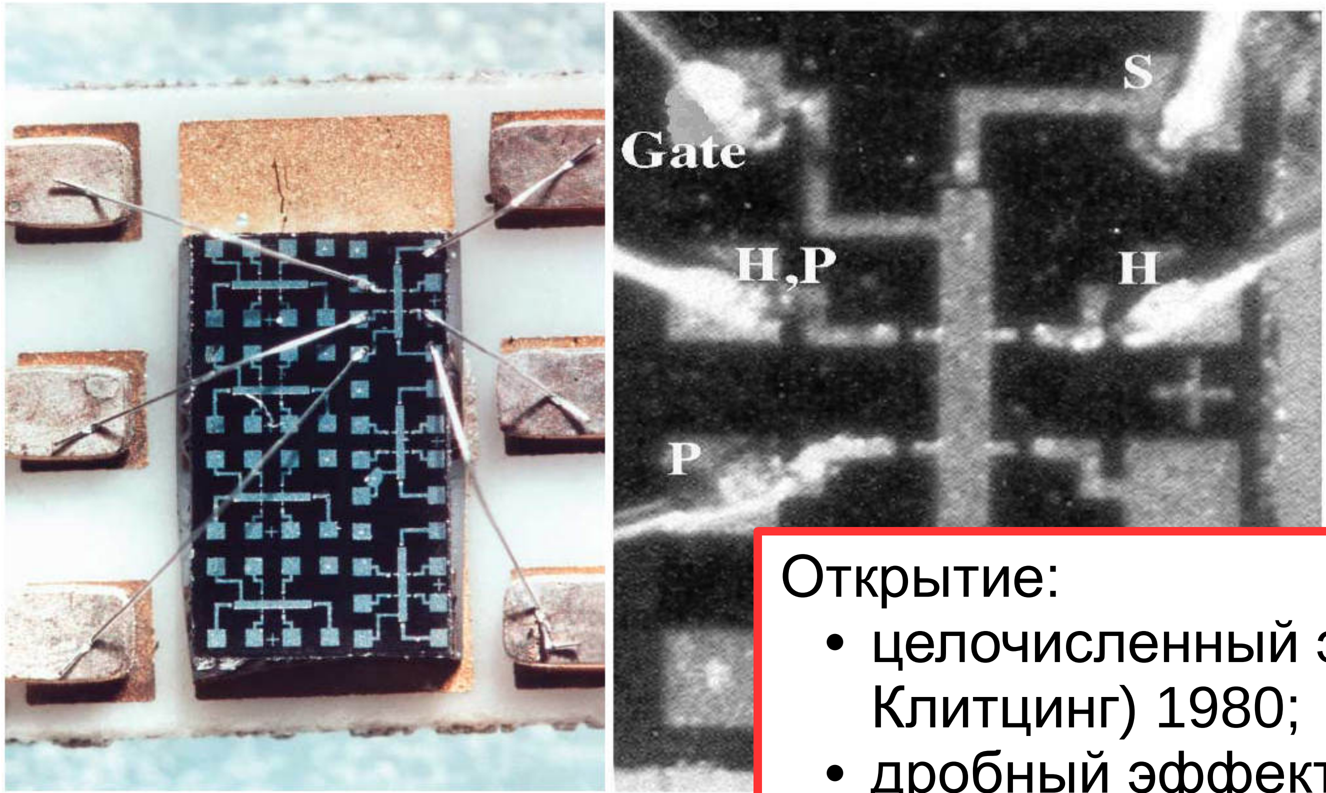
Холловское сопротивление



$$R_H = \frac{U}{I} = \frac{E \times L}{j_S (L \times d)} = \frac{E}{j_S d} = \frac{E}{j_L} = \rho_H^{(2D)}$$

$$n = N n_0 \Rightarrow \rho_H^{(2D)} = \frac{1}{N} \frac{h}{e^2}$$

История открытия КЭХ.



Слева: чип с кремниевыми МОП транзисторами, использу
Холла. Справа: увеличенное изображение одного из тран
электродов (H – измерение холловского напряжения, P
Gate — затвор, S — исток, source, D — исток, drain.

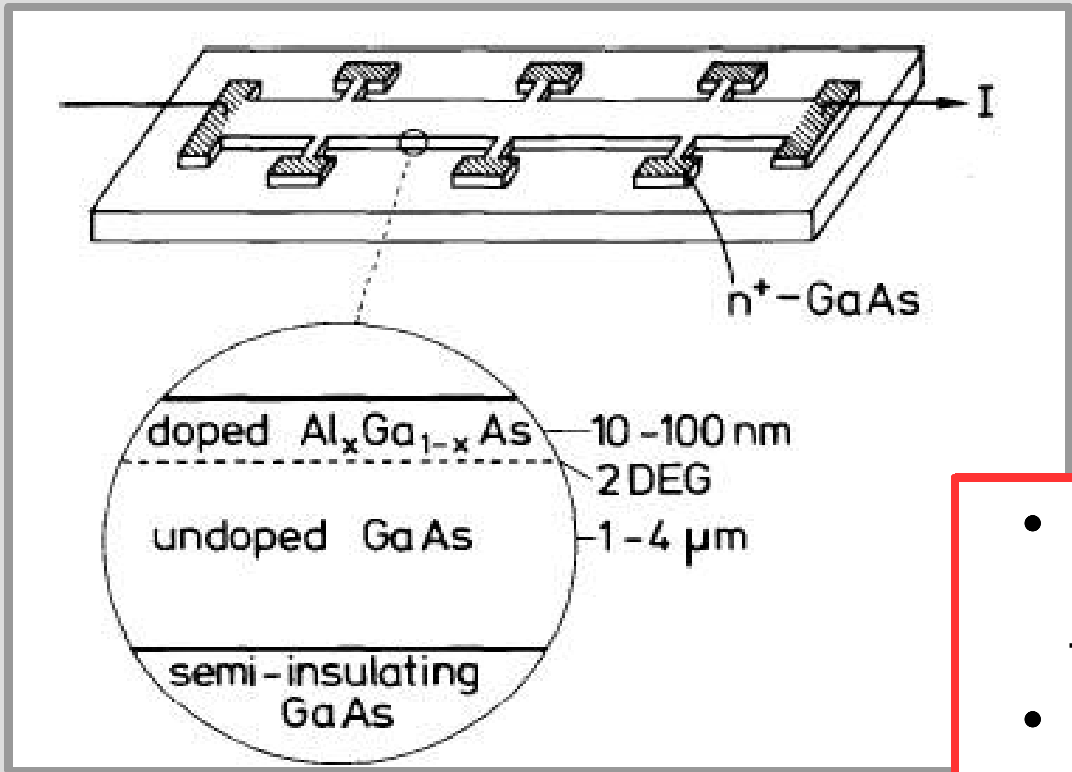
Klaus von Klitzing, 25 Years of Quantum Hall Effect (QH
Discovery, Physics and Applications of this Quantum Effect , S

Klaus von Klitzing , Developments in the quantum Hall effect ,
Royal Society A,363, 2203(2005)

Открытие:
- целочисленный эффект (фон Клитцинг) 1980;
- дробный эффект (Цуи, Штормер, Госсард) 1982.

Нобелевские премии:
- фон Клитцинг - 1985
- Цуи, Штормер, Лаглин -1998.

Условия наблюдения эффекта.



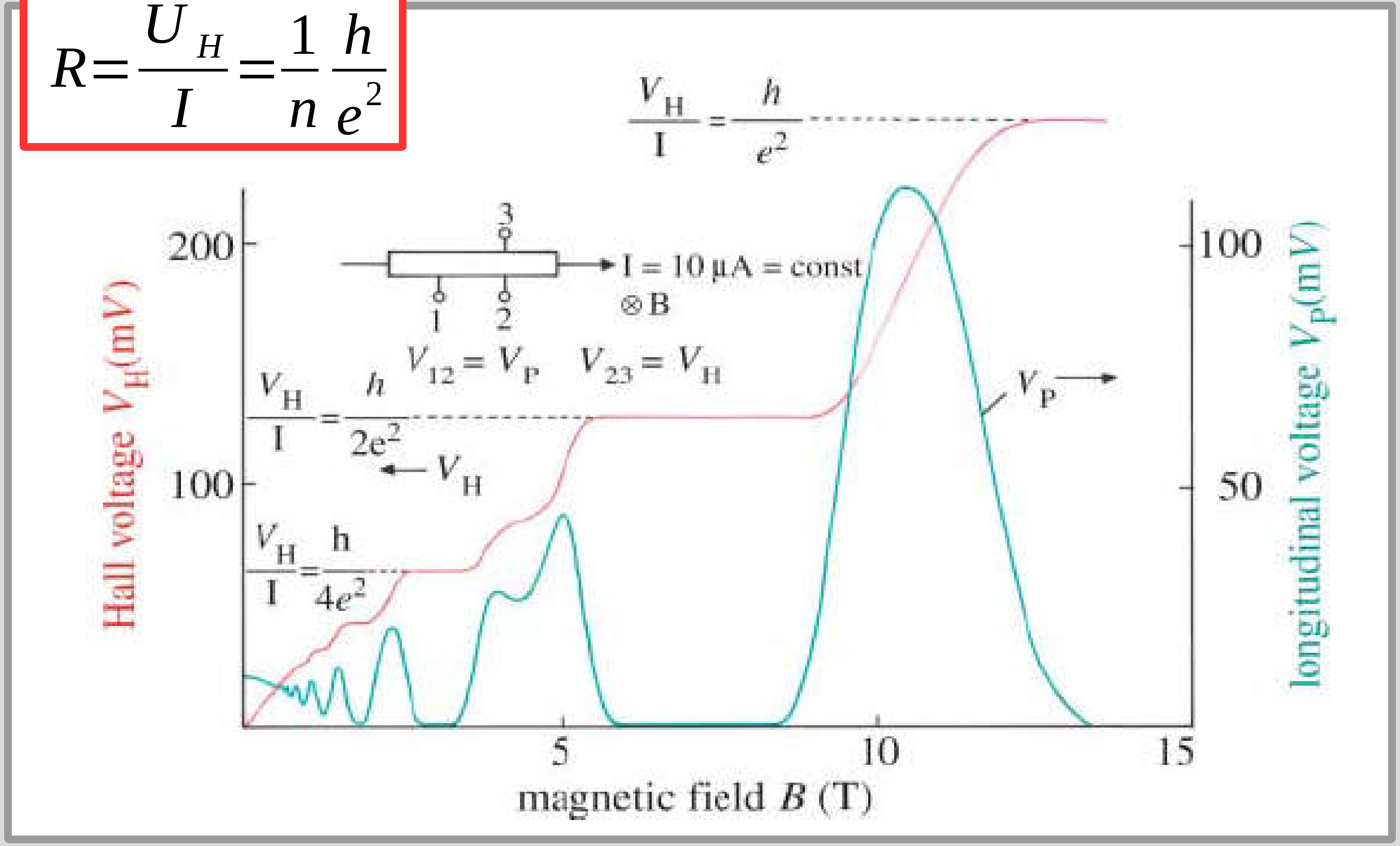
Форма и характерные размеры GaAs-AlGaAs гетероструктуры, используемой в опытах по квантовому эффекту Холла

Klaus von Klitzing, The Quantized hall effect , Nobel Prise Lecture,(1985)

- Размерное квантование (обычно требует гелиевых температур <4K)
- Квантующее магнитное поле (обычно ~10 Тл)
- Для дробного эффекта дополнительно - высокая подвижность носителей и ещё более низкие температуры.

Целочисленный квантовый эффект Холла: наблюдаемые факты.

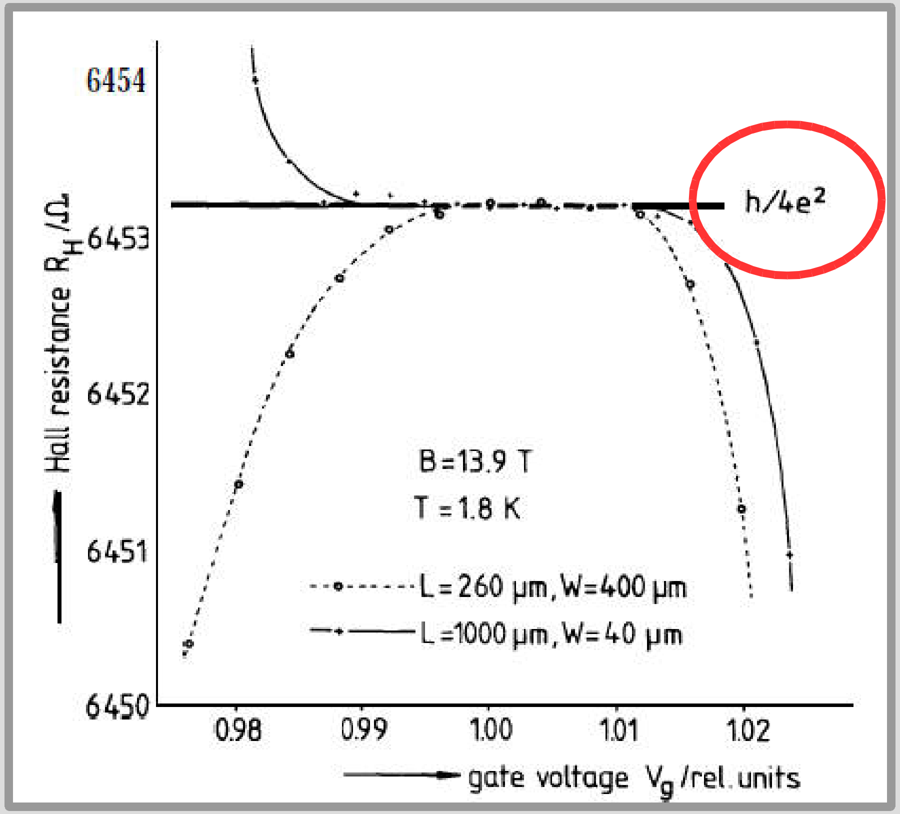
$$R=\frac{U_H}{I}=\frac{1}{n}\frac{h}{e^2}$$



Зависимости от магнитного поля продольного и холловского напряжений на гетероструктуре GaAs-AlGaAs при токе 10 мкА. T=1.6K

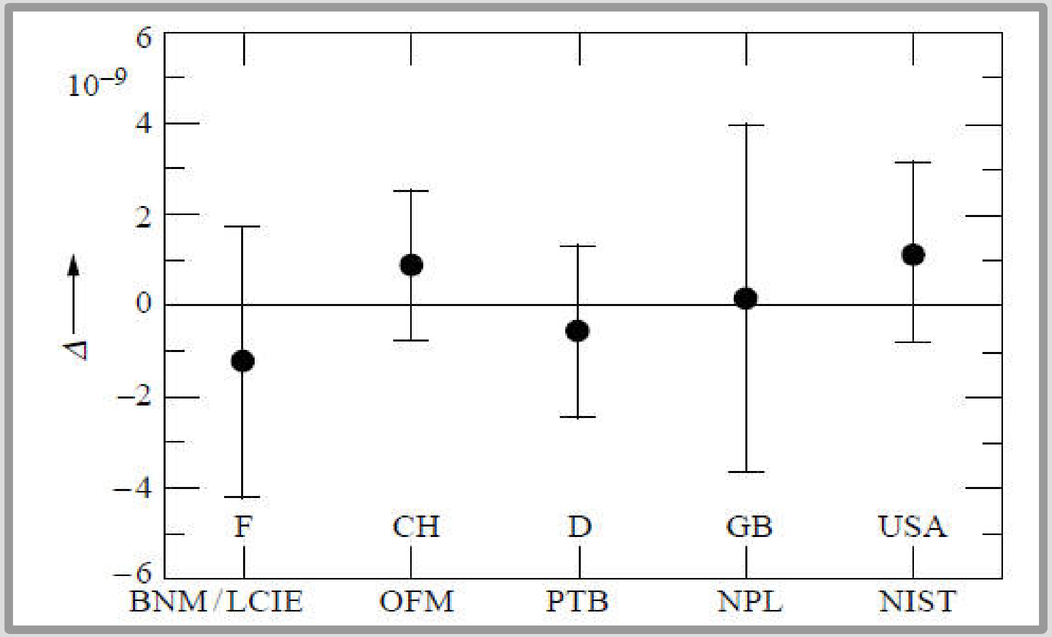
Klaus von Klitzing , Developments in the quantum Hall effect , Phylosophical Transaction of the Royal Society A,363, 2203(2005)

Целочисленный КЭХ: метрологическая ценность.



Сравнение плато Холловского сопротивления для образцов разной формы (L - длина, W - ширина). На графике изображена зависимость холловского сопротивления от напряжения на затворе МОП-структуры, контролирующего концентрацию электронов в двумерном газе.

Klaus von Klitzing, The Quantized hall effect , Nobel Prise Lecture,(1985)



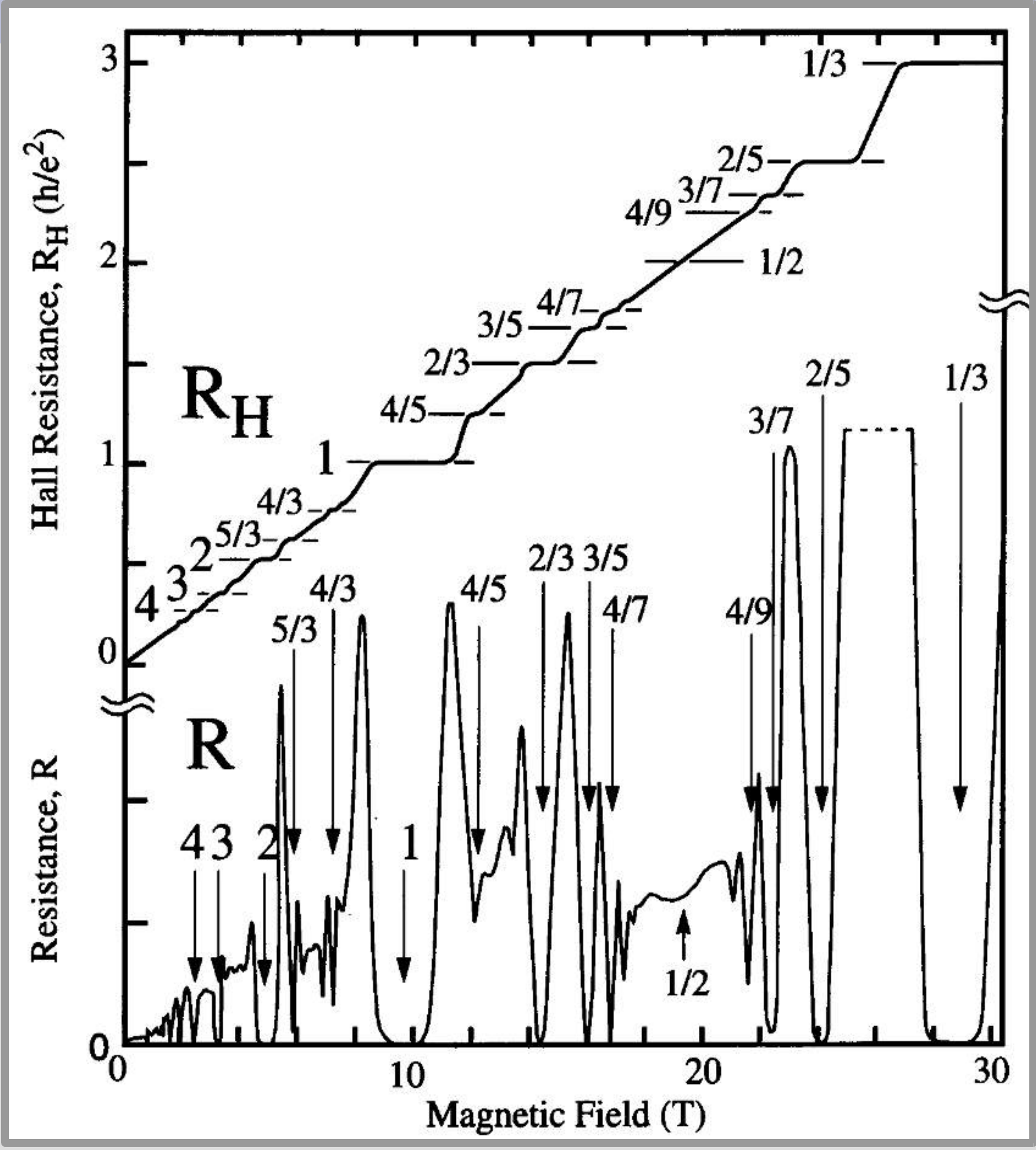
Воспроизводимость холловского сопротивления в различных лабораториях.

Klaus von Klitzing , Developments in the quantum Hall effect , Phylosophical Transaction of the Royal Society A,363, 2203(2005)

$$\boxed{R_H = \frac{h}{e^2} = 25813.801\,Ом}$$

Определение Ома, точно.

Дробный квантовый эффект Холла. Экспериментальные факты.



Дополнительные плато холловского сопротивления с дробными индексами.

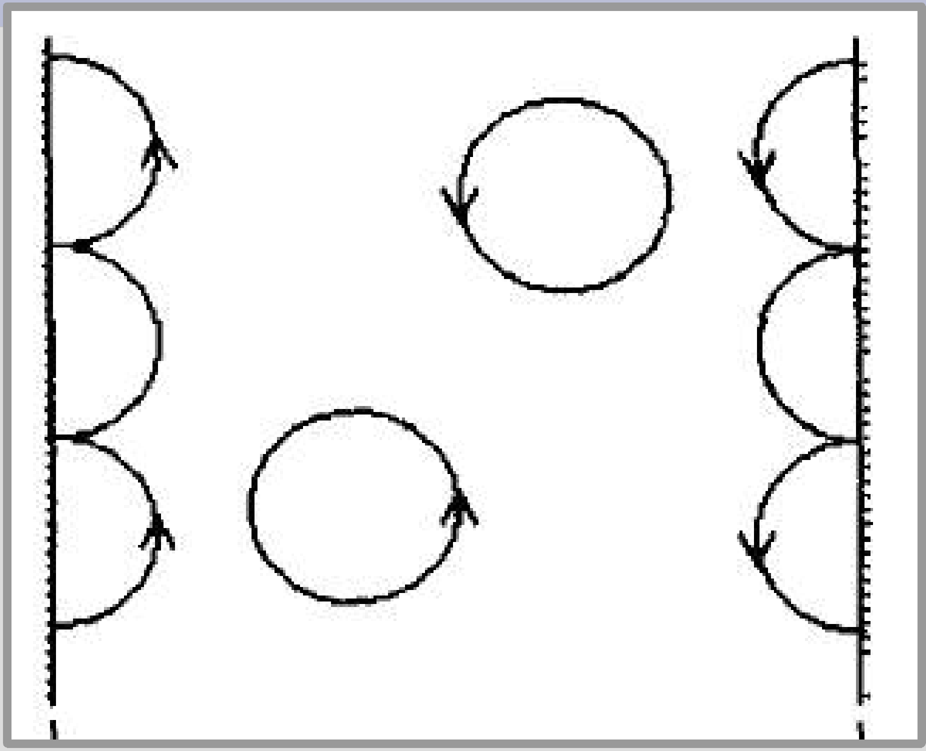
$$R = \frac{U_H}{I} = \frac{1}{n} \frac{h}{e^2} \qquad n = \frac{p}{q}$$

Наблюдение дробного квантового эффекта Холла в гетероструктуре GaAs-AlGaAs с высокой подвижностью носителей.

Horst L.Störmer, The fractional quantum hall effect , Nobel prize lecture,(1998)

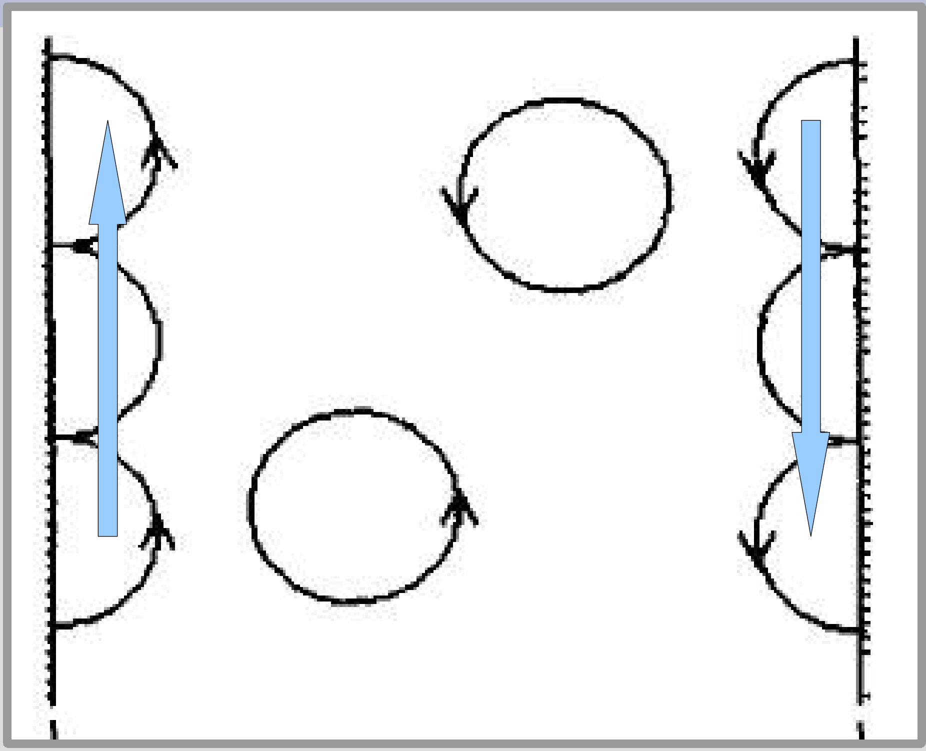
Часть 3. «Всё необычайшей и необычайшей!»

Где течёт холловский ток?



из книги В.Я.Демиховского

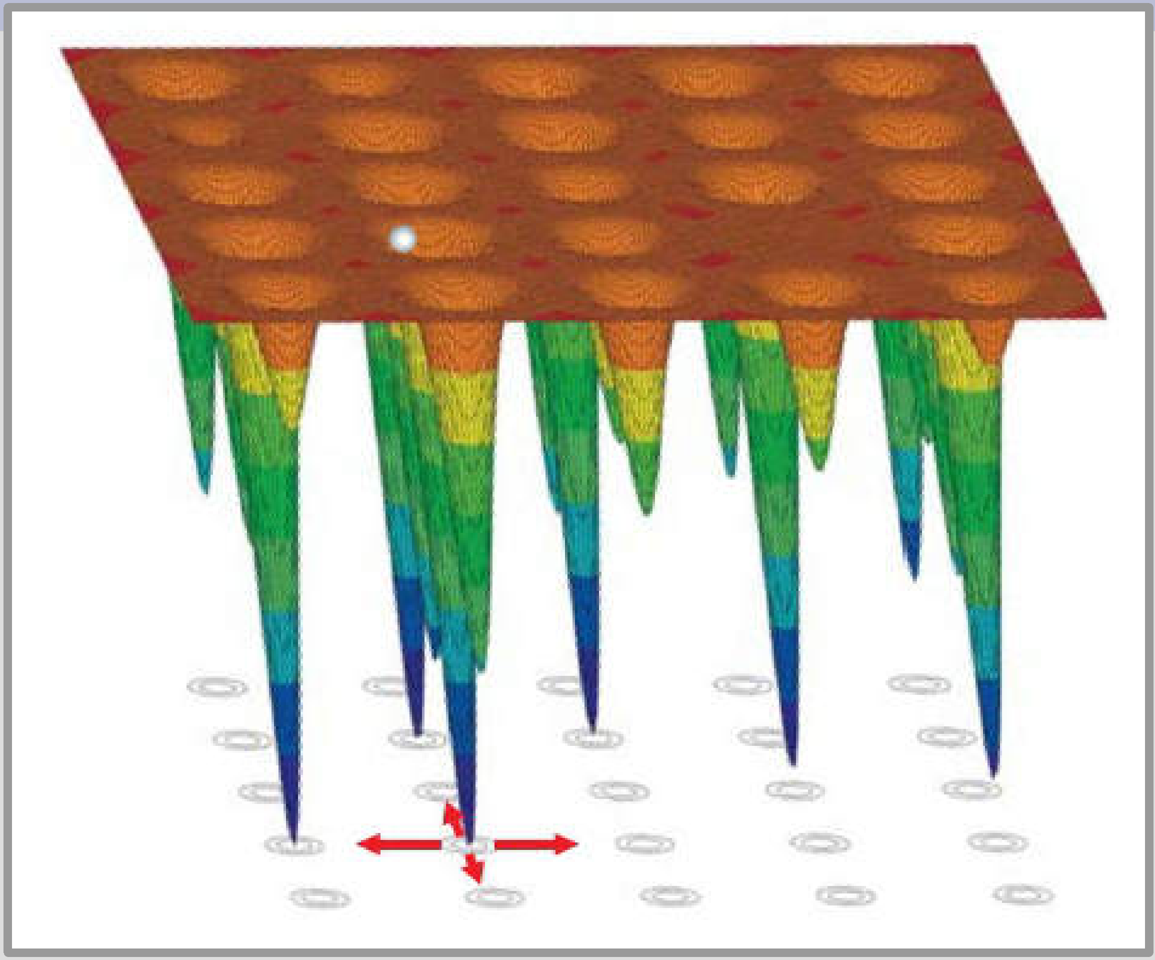
Где течёт холловский ток?



из книги В.Я.Демиховского

- На границах образца текут одномерные диамагнитные токи.
- Из-за действия силы Лоренца электрон не испытывает рассеяния назад

Беспорядок и локализация



Схематическое представление случайной модуляции потенциала
для электрона в кристалле.
Из статьи Ad Lagendijk, Bart van Tiggelen and Diederik S.Wiersma,
Fifty years of Anderson localization,Physics Today, 62, 24 (2009)

Главное на лекции.

- Термодинамическая неустойчивость одно и двумерных кристаллов, отсутствие долгоживущих квазичастиц в одномерной электронной системе с взаимодействием
- Критерии низкоразмерности
- Состояние вигнеровского кристалла в двумерной электронной системе
- Квантование проводимости в одномерном проводнике
- Уровни Ландау и КЭХ