Теория функций комплексного переменного

Драчов Ярослав
Факультет общей и прикладной физики МФТИ

14 сентября 2020 г.

Содержание

Неделя 1

Пт 11 сен 2020 17:06

Неделя 2

Пт 11 сен 2020 17:06

Лекция

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

— голом. в $\mathbb{C}$

$$\overline{e^z} = e$$

Теорема (Теорема сложения)**.** $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}.$$

$$f(x) = e^z \cdot e^{a-z}.$$

$$f'(x) = e^z(-1)e^{a-z} + e^z \cdot e^{a-z}.$$

$$f(x) = \mathrm{const} \qquad f(0) = e^a \qquad e^z e^{a-z} = e^a.$$

$$a, z \in \mathbb{C} \qquad z = z_1 \qquad a = z_1 + z_2.$$

$$e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2} \qquad e^z \cdot e^{-z-z} = \frac{1}{e^z}.$$

$$e^z \neq \text{ в } \mathbb{C} \qquad z = x + iy.$$

$$e^z = e^x \cdot e^{iy} \qquad e^{iy} \cdot \overline{e^{iy}} = e^{iy} \cdot e^{-iy} = 1 \implies |e^{iy}| = 1.$$

$$|e^z| = e^{\operatorname{Re} z}.$$

$$\cos z = \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right), \qquad \sin z = \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right).$$

$$\operatorname{ch} z = \frac{1}{2}\left(e^z + e^{-z}\right), \operatorname{sh} z = \frac{1}{2}\left(e^z - e^{-z}\right).$$

$$\forall z \in \mathbb{C} \qquad e^{iz} = \cos z + i \sin z.$$

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \qquad (\cos z)' = -\sin z \qquad (\sin z)' = \cos z.$$

Периоодичность

$$f(z + c) = f(z) \forall z.$$

$$e^{z+c} = e^z \implies e^c = 1.$$

$$c = \alpha + i\beta \qquad e^{\alpha} \cdot e^{i\beta} = 1 \implies \alpha = 0.$$

$$\begin{cases} \cos\beta = 1 \\ \sin\alpha = 0 \end{cases} \implies \beta = 2k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z} \implies c = 2k\pi i \text{ — период. эксп-ты.}$$

Логарифм

$$a \in \mathbb{C} \qquad \ln a - ?.$$

$$z = \ln a \qquad e^z = a \qquad a \neq_0 \ .$$

$$e^z = a \implies a = re^{i\varphi} \qquad \varphi \in \operatorname{Arg}\{a\}.$$

$$e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy}.$$

$$\left\{ e^x = ry = \varphi + 2k\pi \right. .$$

$$x = \ln r = \ln|a| \qquad y = \varphi + 2k\pi.$$

$$\forall a \neq 0 \qquad \operatorname{Ln}\{a\} = \ln|a| + \operatorname{Arg}\{a\}.$$

D-область

$$f(z) \qquad e^{f(z)} = z.$$

$$f(z) \in \operatorname{Ln}\{z\} \qquad f \text{ — ветвь } \operatorname{Ln}\{z\} \text{ в обл. } D.$$

$$f(z) = \ln|z| + i\,\mathrm{z}\,.$$

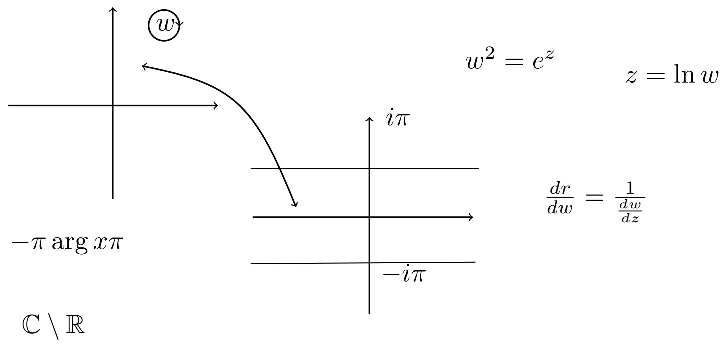
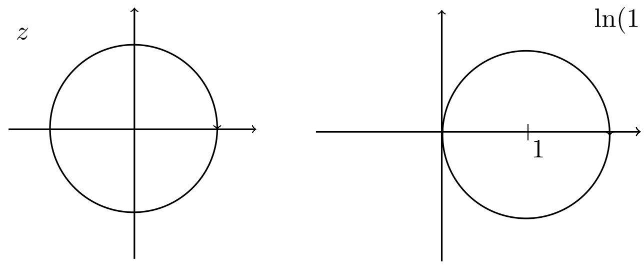


Рис. 1



$\ln(1+z)|_{z=0} = 0$

$\frac{d}{dx}\ln(1+z) = \frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n$

$\mathrm{Ln}\{z_1 \cdot z_2\} = \mathrm{Ln}\{z_1\} + \mathrm{Ln}\{z_2\}$

Рис. 2: 4

$$\ln(1+z) = \ln|1+z| + i\arg(1+z).$$

$$a^b \qquad a \neq 0 \qquad a, b \in \mathbb{C}.$$

$$i^i \qquad \{a^b\} = e^{b\,\mathrm{Ln}\{a\}} \text{ — по определению.}$$

$$\{i^i\} = e^{i\,\mathrm{Ln}\{i\}} = e^{-\frac{\pi}{2}+2\pi k}.$$

$$\mathrm{Ln}\{i\} = 0 + i[\ldots].$$

Комплексное интегрирование

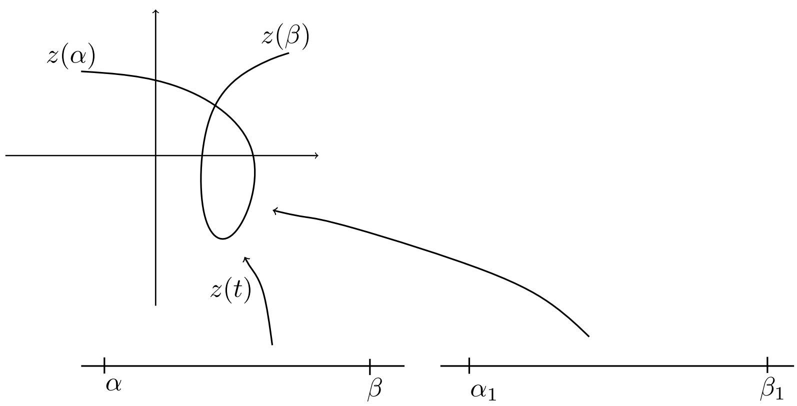


Рис. 3

$$t \to -t \qquad \tau = -t \qquad -\beta \leqslant \tau \leqslant \alpha.$$

$$\gamma \to -\gamma.$$

Плоская кривая

$$z = z(t) \qquad z'(t) = x'(t) + iy'(t) \qquad \ldots.$$

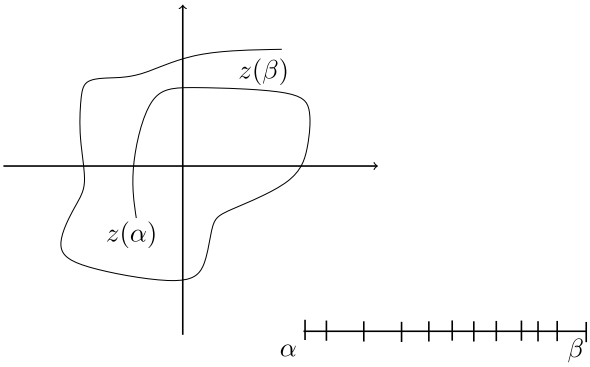


Рис. 4: 6

$$w = f(x) = u(z) + iv(z), \qquad z = x + iy.$$

f — непр.

$$\gamma : z = z(t), \qquad \alpha \leqslant t \leqslant \beta.$$

$$t_0 = \alpha < t_1 < \ldots < t_n = \beta.$$

$$\theta_k = [t_{k-1}, t_k].$$

$$\Delta z_k = z(t_k) - z(t_{k-1}).$$

$$\sum_{k=1}^{n} f\left((x(\theta_k))\right) \Delta z_k = \sum_{k=1}^{n} \left(u(z(\theta_k))\Delta x_k + v(z(\theta_k))\Delta y_k\right).$$

Св-ва интеграла Линейность

$$\int\limits_{\gamma} \left(af(x) + bg(x)\right) dx = a \int\limits_{\gamma} f(x)dx + b \int\limits_{\gamma} g(x)dx.$$

$$\int\limits_{-\gamma} f(x)dx = -\int\limits_{\gamma} f(x)dx.$$

$$\int\limits_{-\gamma} f(z)|dz| = \int\limits_{\gamma} f(x)|dx|.$$

Нер-во
$$\left|\int\limits_{\gamma} f(x)dx\right| \leqslant \int\limits_{\gamma} |f(x)||dx|.$$
$$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2.$$
$$\int\limits_{\gamma_1+\gamma_2} f(x)dx = \int\limits_{\gamma_1} f(x)dx + \int\limits_{\gamma_2} dx.$$
$f(z)$ опр. в обл. D

Будем говорить, что $f(z)dz$ является полным дифференциалом в области D если сщществует голоморфная в D функция $F(z)$:
$$F'(z) = f(z) \qquad dF(z) = f(z)dz,$$
F — первообразная f.

Семинар

$$(\sin x)' = (-i\operatorname{ch} iz)' = -i^2 \operatorname{ch} iz = \operatorname{ch} iz = \cos z.$$
$$\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}.$$
$$(\operatorname{ch} z)' = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = \operatorname{sh} z.$$
$$(\operatorname{sh} z)' = \operatorname{ch} z = \left(\frac{e^z - e^{-z}}{2}\right)' = \frac{e^z - e^{-z}}{2}?.$$
$$f(z) = (z^n)' = nz^{n-1}.$$
$$z' = 1.$$
$$(z^{n+1})' = (z^n z)' = (z^n)'z + z^n z' = nz^{n-1}z + z^n = (n+1)z^n.$$

Определение. f — R- дифф-ма

Определение.
$$df = du + idv.$$

Определение.
$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}.$$

$df = du + idv = \left(\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy\right) + i\left(\frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy\right) = \left(i\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x}\right)dx + \left(i\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)dy = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$

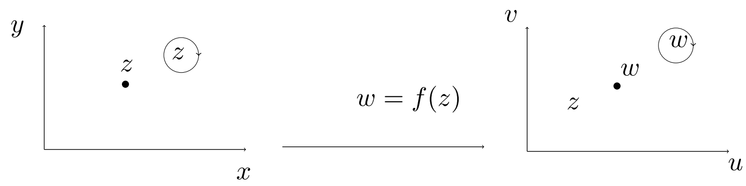


Рис. 5

Теорема.

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy.$$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial x}\right) \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right) \end{cases}.$$

Теорема.

$$df = \frac{\partial f}{\partial z}dz + \frac{\partial f}{\partial z}d\overline{z}.$$

Доказательство. ... □

Теорема.

$$df = Adz + bd\overline{z} = A(dx+idy) + B(dx-idy) = (A+B)dx + i(A-B)dy = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy.$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = A + B; \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = i(A-B).$$

Определение. $f = u + iv$ — $\mathbb{C}$-дифференцируема в точке $z_0 = x_0 + iy_0$ равносильно

$$f - \mathbb{R}\text{-дифф.} \qquad \text{и} \qquad \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0.$$

Теорема. *f — $\mathbb{C}$-дифф-ма в т. z_0 равносильно* $\exists f'(z_0) \in \mathbb{C}$.

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}.$$

Доказательство. Пусть $f = u + iv$— $\mathbb{R}$-дифф-ма

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial z}\Delta z + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\Delta\overline{z} + o(\Delta z).$$

...

$$\frac{\Delta f}{\Delta z} = \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}e^{-iz\theta} + o(1).$$

1.
$$\frac{\partial f}{\partial z} = 0 \implies \exists f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta z}.$$

2. обратно
$$\exists f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta z}.$$
$$\frac{\Delta f}{\Delta z} = f'(z_0) + o(1).$$

...

□

$$f'(z) = \frac{\partial f}{\partial z} = \text{Коши-Риман} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}.$$
$$f(z) = e^z = e^x\left(\cos y + i \sin y\right).$$
$$\begin{cases} u = e^x \cos y \\ v = e^x \sin y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases} \dots$$

Функция
$$f = x + 2yi$$
дифференцируема только в точке $(0, 0)$ по условию К-Р.

Задача 1. Доказать
$$\frac{1}{2i}\int\limits_{\partial D} f(z) = \iint\limits_{D} \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} dxdy.$$
$$\begin{cases} f \text{ — } \mathbb{R}\text{-дифф.} \\ f \text{ — непр. в } \overline{D} \end{cases}.$$

Доказательство.
$$\int\limits_{\partial D} Pdx + Qdy = \iint\limits_{D} (Q_x - P_y) dxdy.$$
$$P = P(x, y) \qquad Q = Q(x, y).$$
$$P, Q, Q_x, P_y \text{ напр. в } \overline{D}.$$

$$\int\limits_{\partial D} f(z)dz = \int\limits_{\partial D} (u + iv)(dx + idy) = \int\limits_{\partial D} udx - vdy + i\int vdx + udy = \text{Грин} =$$
$$= i\left(i\iint\limits_{D}\left(v_x + u_y\right)dxdy + \iint\limits_{D}(u_x - v_y)dxdy\right) =$$
$$= 2i\iint\limits_{D}\underbrace{\left[\frac{(u_x - v_y) + i(v_x + u_y)}{2}\right]}_{\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}} dxdy = 2i\int\limits_{D} \frac{\partial f}{\partial z} dxdy.$$

□

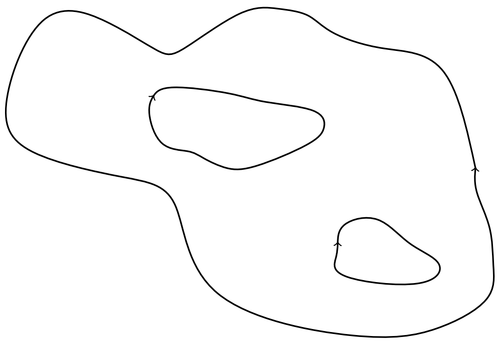


Рис. 6

Задача 2. Существует ли такая функция

$$f \in \mathbb{O}(U_\varepsilon(0)) \qquad f\left(\frac{1}{n}\right) = \sin\frac{\pi n}{2}, \qquad n \in \mathbb{N}, \qquad n \geqslant n_0.$$

Доказательство. Пусть такая f сущ.

1. $n = 2k \implies f\left(\frac{1}{n}\right) f\left(\frac{1}{2k}\right) = \sin \pi k = 0\ldots$
2. $\ldots$

теорема о единственности $\square$