# Старшие гомотопические группы

## Доклад на семинар по геометрической топологии

Драчов Ярослав

Московский физико-технический институт

19 ноября 2020 г.

### Определение

*Путём* в пространстве $X$ называют непрерывное отображение $f : I \to X$, где $I$ — это единичный интервал $[0, 1]$. *Петлёй* с *базовой точкой* $x_0$ называется путь, для которого $f(0) = f(1) = x_0 \in X$.

### Определение

*Путём* в пространстве $X$ называют непрерывное отображение $f\colon I \to X$, где $I$ — это единичный интервал $[0, 1]$. *Петлёй* с *базовой точкой* $x_0$ называется путь, для которого $f(0) = f(1) = x_0 \in X$.

### Определение

*Гомотопия путей* в $X$ — это семейство отображений $f_t\colon I \to X$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, таких, что

1. Конечные точки $f_t(0) = x_0$ и $f_t(1) = x_1$ не зависят от $t$.
2. Связанное отображение $F\colon I \times I \to X$ определённое соотношением $F(s, t) = f_t(s)$ — непрерывно.

### Определение

*Фундаментальной группой* $\pi_1(X, x_0)$ мы называли группу классов гомотопической эквивалентности петель с операцией умножения $[f][g] = [f \cdot g]$, где

$$f \cdot g(s) = \begin{cases} f(2s), & 0 \leqslant s \leqslant \frac{1}{2}, \\ g(2s-1), & \frac{1}{2} \leqslant s \leqslant 1. \end{cases}$$

Можно обобщить конструкцию фундаментальной группы $\pi_1(X)$ на случай «$n$-мерных петель» — сфер $S^n$ с определённой базовой точкой $x_0$.

Пусть $I^n$ — единичный $n$-куб, произведение $n$ копий интервала $[0, 1]$. Граница $\partial I^n$ пространства $I^n$ — подпространство, состоящее из точек, с хотя бы одной координатой равной 0 или 1.

Пусть $I^n$ — единичный $n$-куб, произведение $n$ копий интервала $[0,1]$. Граница $\partial I^n$ пространства $I^n$ — подпространство, состоящее из точек, с хотя бы одной координатой равной 0 или 1.

### Определение

Для пространства $X$ с базовой точкой $x_0 \in X$, определим $\pi_n(X, x_0)$ как множество гомотопических классов отображений $f : (I^n, \partial I^n) \to (X, x_0)$, где гомотопии $f_t$ должны удовлетворять условию $f_t(\partial I^n) = x_0$ для всех $t$. Определение расширяется на случай $n = 0$, если взять $I^0$ точкой и $\partial I^0$ пустым множеством. Так, $\pi_0(X, x_0)$ — множество компонент связности $X$.

### Определение

Если $n \geqslant 2$, операция суммирования в $\pi_n(X, x_0)$, обобщая операцию умножения в $\pi_1$, определяется как

$$(f+g)(s_1, s_2, \dots, s_n) = \begin{cases} f(2s_1, s_2, \dots, s_n), & s_1 \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \\ g(2s_1 - 1, s_2, \dots, s_n), & s_1 \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]. \end{cases}$$

## Определение

Если $n \geqslant 2$, операция суммирования в $\pi_n(X, x_0)$, обобщая операцию умножения в $\pi_1$, определяется как

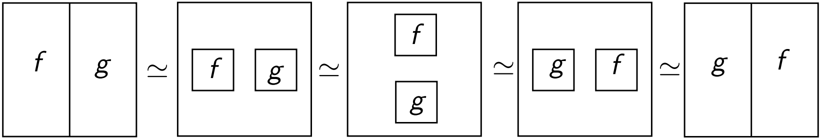
$$(f+g)(s_1, s_2, \dots, s_n) = \begin{cases} f(2s_1, s_2, \dots, s_n), & s_1 \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \\ g(2s_1 - 1, s_2, \dots, s_n), & s_1 \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]. \end{cases}$$

Ясно, что эта сумма однозначно определена на гомотопических классах. Т. к. только первая координата вовлечена в операцию суммирования, такие же доводы, как и для $\pi_1$ показывают, что $\pi_n(X, x_0)$ — это группа с постоянной функцией, отображающей $I^n$ в $x_0$, в качестве единичного элемента и обратными элементами, задаваемыми
$-f(s_1, s_2, \dots, s_n) = f(1 - s_1, s_2, \dots, s_n)$.

# Коммутативность $\pi_n(X)$ для $n \geqslant 2$

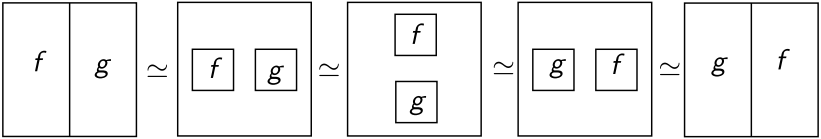
## Аддитивная запись

Аддитивная запись для груповой операции используется потому, что $\pi_n(X, x_0)$ — абелевы для $n \geqslant 2$. А именно, $f + g \simeq g + f$ с гомотопией, изображённой на рисунке.



# Коммутативность $\pi_n(X)$ для $n \geqslant 2$

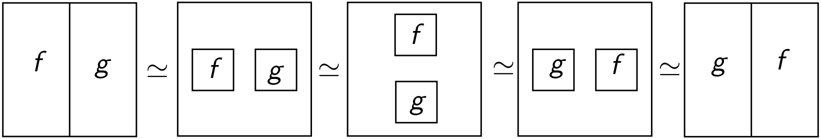
## Аддитивная запись




Гомотопия начинает с уменьшения областей определения $f$ и $g$ до меньших подкубов $I^n$, с областью снаружи этих подкубов, отображающихся в базовую точку.

# Коммутативность $\pi_n(X)$ для $n \geqslant 2$

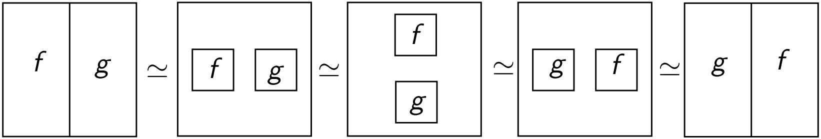
## Аддитивная запись




После того, как это сделано, у нас появляется возможность переставить два подкуба куда угодно, пока они остаются разъединёнными, поэтому если $n \geqslant 2$, они могут при такой перестановке обойти друг друга и поменяться местами.

# Коммутативность $\pi_n(X)$ для $n \geqslant 2$

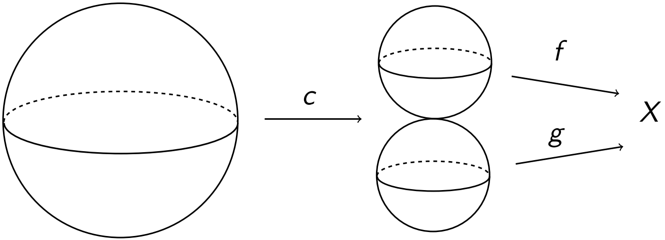
## Аддитивная запись




После этого для завершения гомотопии, области определения $f$ и $g$ могут быть расширены до их начальных размеров. Весь этот процесс может быть проведён, используя только координаты $s_1$ и $s_2$, оставляя остальные координаты фиксироованными.

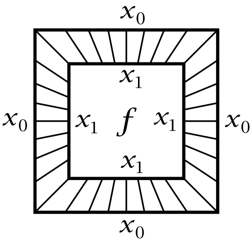
Отображения $(I^n, \partial I^n) \to (X, x_0)$ — это то же самое, что и отображения факторпространства $I^n/\partial I^n = S^n$ на $X$, переводящие базовую точку $s_0 = \partial I^n/\partial I^n$ в $x_0$. Это означает, что мы можем также рассматривать $\pi_n(X, x_0)$ как гомотопические классы карт $(S^n, s_0) \to (X, x_0)$, где гомотопии — это отображения одного вида $(S^n, s_0) \to (X, x_0)$.

В такой интерпретации $\pi_n(X, x_0)$, сумма $f + g$ — это композиция $S^n \xrightarrow{c} S^n \vee S^n \xrightarrow{f \vee g} X$, где $c$ сжимает экватор $S^{n-1}$ в $S^n$ в точку и мы выбираем базовую точку $s_0$ так, чтобы она лежала в этой $S^{-1}$.



Далее покажем, что если $X$ — линейно связное пространство, то для различных $x_0$ их гомотопические группы $\pi_n(X, x_0)$ всегда дают изоморфные группы $\pi_n(X, x_0)$, как и для $\pi_1$, поэтому в таком случае разрешено написание $\pi_n(X)$ для $\pi_n(X, x_0)$.

Дан путь $\gamma\colon I \to X$ из $x_0 = \gamma(0)$ в другую базовую точку $x_1 = \gamma(1)$, мы можем сопоставить каждому отображению $f\colon (I^n, \partial I^n) \to (X, x_1)$ новое отображение $\gamma f\colon (I^n, \partial I^n) \to (X, x_0)$ сужая область определения $f$ до меньшего концентрического куба в $I^n$, после чего, помещая путь $\gamma$ на каждом радиальном сегменте оболочки между этим меньшим кубом и $\partial I^n$.

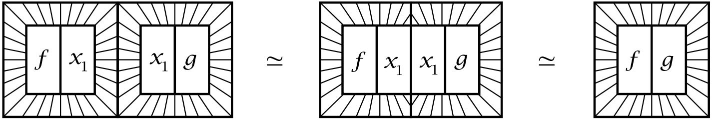


Гомотопии $\gamma$ или $f$ в отображениях связывающих $\partial I$ или $\partial I^n$, соответственно, влекут гомотопию $\gamma f$ в отображениях $(I^n, \partial I^n) \to (X, x_0)$. Ещё три важных свойства:

1. $\gamma(f+g) \simeq \gamma f + \gamma g$,
2. $(\gamma\eta)f \simeq \gamma(\eta f)$,
3. $1f \simeq f$, где 1 обозначает тривиальный путь.

Гомотопии 2 и 3 очевидны. Для 1, мы сперва деформируем $f$ и $g$ так, чтобы они были постоянными на правой и левой сторонах $I^n$, соответственно. Получившиеся отображения мы можем назвать $f+0$ и $0+g$, затем мы вырезаем все более широкий средний кусок от $\gamma(f+0)+\gamma(0+g)$, пока это не превратится в $\gamma(f+g)$:

Гомотопии 2 и 3 очевидны. Для 1, мы сперва деформируем $f$ и $g$ так, чтобы они были постоянными на правой и левой сторонах $I^n$, соответственно. Получившиеся отображения мы можем назвать $f + 0$ и $0 + g$, затем мы вырезаем все более широкий средний кусок от $\gamma(f + 0) + \gamma(0 + g)$, пока это не превратится в $\gamma(f + g)$:



Явная формула для этой гомотопии:

$$h_t(s_1, s_2, \ldots, s_n) =$$
$$= \begin{cases} \gamma(f+0)\left((2-t)s_1, s_2, \ldots, s_n\right), & s_1 \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \\ \gamma(0+g)\left((2-t)s_1 + t - 1, s_2, \ldots, s_n\right), & s_1 \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]. \end{cases}$$

Отсюда имеем $\gamma(f+g) \simeq \gamma(f+0) + \gamma(0+g) \simeq \gamma f + \gamma g$.

Если мы определим преобразование смены базовой точки $\beta_\gamma \colon \pi_n(X, x_1) \to \pi_n(X, x_0)$ как $\beta_\gamma([f]) = [\gamma f]$, то, т. к. $\gamma(f + g) \simeq \gamma f + \gamma g$, то $\beta_\gamma$ — гомоморфизм.

Если мы определим преобразование смены базовой точки $\beta_\gamma\colon \pi_n(X, x_1) \to \pi_n(X, x_0)$ как $\beta_\gamma([f]) = [\gamma f]$, то, т. к. $\gamma(f+g) \simeq \gamma f + \gamma g$, то $\beta_\gamma$ — гомоморфизм. В то же время из условий $(\gamma\eta)f \simeq \gamma(\eta f)$, $1f \simeq f$ следует, что $\beta_\gamma$ — изоморфизм с обратным элементом $\beta_{\overline{\gamma}}$, где $\overline{\gamma}$ это обратный к $\gamma$ путь, $\overline{\gamma} = \gamma(1-s)$.

Если мы определим преобразование смены базовой точки $\beta_\gamma \colon \pi_n(X, x_1) \to \pi_n(X, x_0)$ как $\beta_\gamma([f]) = [\gamma f]$, то, т. к. $\gamma(f + g) \simeq \gamma f + \gamma g$, то $\beta_\gamma$ — гомоморфизм. В то же время из условий $(\gamma\eta)f \simeq \gamma(\eta f)$, $1f \simeq f$ следует, что $\beta_\gamma$ — изоморфизм с обратным элементом $\beta_{\overline{\gamma}}$, где $\overline{\gamma}$ это обратный к $\gamma$ путь, $\overline{\gamma} = \gamma(1 - s)$. Поэтому, если $X$ линейно связное пространство, различные базовые точки одного и того же пространства доставляют нам изоморфные группы $\pi_n(X, x_0)$, что может быть кратко записано как $\pi_n(X)$.