Зачёт по геометрической топологии

Драчов Ярослав
Факультет общей и прикладной физики МФТИ

17 декабря 2020 г.

Задача 0

Решение. Имеем
$$\partial_n(\sigma) = \sum_i (-1)^i \sigma|_{[v_0,\ldots,\hat{v}_i,\ldots,v_n]},$$
и поэтому
$$\partial_{n-1}\partial_n(\sigma) = \sum_{j<1} (-1)^i (-1)^j \sigma|_{[v_0,\ldots,\hat{v}_j,\ldots,\hat{v}_i,\ldots,\, v_n]} +$$
$$+ \sum_{j>i} (-1)^i (-1)^{j-1} \sigma|_{[v_0,\ldots\hat{v}_i,\ldots,\, \hat{v}_j,\ldots,\, v_n]}.$$

Меняя индексы суммирования i и j местами во второй сумме получаем нечто совпадающее по модулю и отличающееся знаком от первой суммы, откуда следует требуемое утверждение.

Задача 1

Решение. На рис. 1 представлен Δ-комплекс для $\mathbb{T}^2$ Его структура такова:

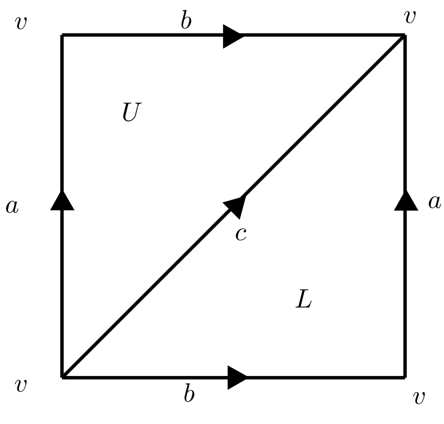

Рис. 1

одна вершина a, три грани a, b, и c, и два 2-симплекса U и L. $\partial_1 a = \partial_1 b = v - v = 0$, поэтому $H_0^{\Delta}(\mathbb{T}^2) \approx \mathbb{Z}$. Т. к. $\partial_2 U = a + b - c = \partial_2 L$ и $\{a, b, a + b - c\}$

— базис для $\Delta_1(\mathbb{T}^2)$, то $H_1^\Delta(\mathbb{T}^2) \approx \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ с базисом классов гомологий $[a]$ и $[b]$. Т. к. отсутствуют 3-симплексы, $H_2^\Delta(\mathbb{T}^2)$ это фактически $\operatorname{Ker} \partial_2$, которая в свою очередь является бесконечной циклической группой, порождённой $U - L$, т. к. $\partial(pU + qL) = (p+q)(a+b-c) = 0$ только когда $p = -q$. Поэтому

$$H_n^\Delta(\mathbb{T}^2) \approx \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, & n = 1, \\ \mathbb{Z}, & n = 0, 2, \\ 0, & n \geqslant 3. \end{cases}$$

Задача 2

Решение. Предъявив гомотопию постоянного и тождественного отображений мы, тем самым, докажем требуемое утверждение. Для этого, во-первых, определим $f_t \colon \mathbb{R}^\infty \to \mathbb{R}^\infty$ как $f_t(x_1, x_2, \ldots) = (1-t)(x_1, x_2, \ldots) + t(0, x_1, x_2, \ldots)$. Данное отображение переводит все ненулевые векторы в ненулевые векторы для любых $t \in [0, 1]$, поэтому $f_t/|f_t|$ даёт нам гомотопию между тождественным отображением S^∞ и отображением $(x_1, x_2, \ldots) \to (0, x_1, x_2, \ldots)$. Далее, гомотопия между данным отображением и постоянным отображением задается как $g_t/|g_t|$, где $g_t(x_1, x_2, \ldots) = (1 - t)(0, x_1, x_2, \ldots) + t(1, 0, 0, \ldots)$.