

## Семинар №5

Драчов Ярослав  
Факультет общей и прикладной физики МФТИ

12 марта 2021 г.

Производная Хироты

$$f(x-y)g(x-y) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} (D_x^i f \cdot g) y^i.$$

$$D_x f \cdot g = f(x)g(x) + \frac{\partial f}{\partial x} y g(x) - f(x)y \frac{\partial g}{\partial x} + \dots$$

Уравнение КдФ в производных Хироты

$$(4D_t D_x - D_x^4) \tau \tau = 0.$$

Обобщаем

$$P(D_1, D_2, \dots) \tau \tau = 0.$$

Тривиальное решение:  $\tau \equiv 1$ . Ищем решение

$$\tau = 1 + \varepsilon f_1 + o(\varepsilon^2).$$

В первом порядке по  $\varepsilon$  уравнение преобразуется к виду

$$P(\partial_1, \partial_2, \dots) f_1 = 0.$$

$$k_i P(k_1, k_2, \dots) = 0.$$

$$f_1 = e^{k_1 x_1 + k_2 x_2 + \dots}.$$

Для нескольких наборов (=солитонов?)

$$k_1^{(1)}, k_2^{(2)}, \dots, k_1^{(2)}, k_2^{(2)}, \dots$$

$$f_1 = \sum_{j=1}^n c_j e^{k_1^{(j)} x_1 + k_2^{(j)} x_2}.$$

$$\varepsilon : \quad 2P(\partial_1, \partial_2, \dots) 1 \cdot f_1 = 0.$$

$$\tau = 1 + C e^{2kx + 2k^3 t} \text{ (КдФ)}.$$

Рассмотрим двухсолитонное решение

$$n = 2 : \quad k_i^{(1)}, k_i^{(2)}.$$

$$\tau = 1 + \varepsilon \sum_{j=1}^2 c_j e^{k_1^{(j)} x_1 + k_2^{(j)} x_2 + \dots} + \varepsilon^2 f_2 + o(\varepsilon^2).$$

$$\varepsilon^2 : \quad P(\partial_1, \partial_2, \dots) f_2 + c_1 c_2 P(k_1^{(1)} - k_1^{(2)}, k_2^{(1)} - k_2^{(2)}, \dots) e^{(k_1^{(1)} + k_1^{(2)}) x_1 + \dots} = 0.$$

$$P(D_1, D_2, \dots) (1 + \varepsilon A + \varepsilon^2 f_2) (1 + \varepsilon A + \varepsilon^2 f_2) = 0 \dots$$

$$f_2 = - \frac{P(k_1^{(1)} - k_1^{(2)})}{P(k_1^{(1)} + k_1^{(2)})} c_1 c_2 e^{((k_1^{(1)} k_1^{(2)}) x_1 + \dots)}.$$

КдФ:

$$k^{(i)} = (2k_i, 2k_i^3) \implies f_2 = \frac{(k_1 - k_2)^2}{(k_1 + k_2)^2} c_1 c_2 e^{2(k_1 + k_2)x + 2(k_1^3 + k_2^3)t}.$$

Расширяем набор переменных по правилу

$$x_1 = , \quad x_3 = t, \quad x_5, x_5 \dots$$

Для  $n$ -солитонной системы

$$c_1, \dots, c_n \quad k_1, \dots, k_n.$$

$$\xi(x, k) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j k^j.$$

$$\xi_i = 2 \sum_{j=1}^{\infty} k_i^{2j+1} x_{2j+1} = \xi(x, k_i) - \xi(x, -k_i).$$

$$a_{ii'} = \frac{(k_i - k_{i'})^2}{(k_i + k_{i'})^2}.$$

$$I = \{1, \dots, n\}.$$

$n$ -солитонное решение иерархии КдФ:

$$\tau(x_1, x_3, \dots) = \sum_{J \subset I} \left( \prod_{i \in J} c_i \right) \left( \prod_{\substack{i, i' \in J \\ i < i'}} a_{ii'} \right) \exp \left( \sum_{i \in J} \xi_i \right).$$

$$n = 3 : \quad \tau = 1 + c_1 e^{\xi_1} + c_2 e^{\xi_2} + c_3 e^{\xi_3} + c_1 c_2 a_{12} e^{\xi_1 + \xi_2} + c_1 c_3 a_{13} e^{\xi_1 + \xi_3} +$$

$$+ c_2 c_3 a_{23} e^{\xi_2 + \xi_3} + c_1 c_2 c_3 a_{12} a_{13} a_{23} e^{\xi_1 + \xi_2 + \xi_3}.$$

Уравнение КдФ:

$$\tau = 1 + c e^{2k_1 x_1 + 2k_1^3 x_3}.$$

Иерарх. КдФ:

$$\tau = 1 + c_1 e^{2 \sum_{j=1}^{\infty} k_1^{2j+1} x_{2j+1}}.$$

$$u = 2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln \tau = \frac{8 c k_1^2 e^{2k_1(k_1^2 t + x)}}{\left( c e^{2k_1(k_1^2 t + x)} + 1 \right)^2} = \frac{2 e^{\frac{A}{2}} k_1^2}{\operatorname{ch}^2 \left( k_1 x + k_1^3 t + \frac{A}{2} \right)}.$$

## Вершинные операторы

$X$  — не диф. оператор.

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon} \tau(x_1, x_3, \dots) = X \tau(x_1, x_3, \dots).$$

$$\tau_{n+1} = e^{\varepsilon X} \tau_n.$$

Для параметра  $k$  определим

$$X(k) = \exp \left( 2 \sum_{j=0}^{\infty} k^{2j+1} x_{2j+1} \right) \cdot \exp \left( -2 \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2j+1)k^{2j+1}} \frac{\partial}{\partial x_{2j+1}} \right).$$

$$X(k)f(x_1, x_3, \dots) = \exp \left( 2 \sum_{j=0}^{\infty} k^{2j+1} x_{2j+1} \right) f \left( x_1 - \frac{2}{k}, x_3 - \frac{2}{3k^3}, \dots \right).$$

Понадобится следующая лемма:

$$X(k_1)X(k_2) = \frac{(k_1 - k_2)^2}{(k_1 + k_2)^2} \exp \left( 2 \sum_{i=1}^2 \sum_{j=0}^{\infty} k_i^{2j+1} x_{2j+1} \right) \exp \left( -2 \sum_{i=1}^2 \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2j+1)k_i^{2j+1}} \frac{\partial}{\partial x_{2j+1}} \right).$$

$$e^{cX(k)} = 1 + cX(k).$$

$$\tau_1 = e^{cX(k)} \cdot 1 - 1\text{-солит. реш..}$$

$$\tau = e^{c_1 X(k_1)} \dots e^{c_n X(k_n)} \cdot 1 - n\text{-солит. реш..}$$

$$(D_1^4 + 3D_2^2 - 4D_1 D_3) \tau \tau = 0.$$

$$P(k_1, k_2, k_3) = k_1^4 + 3k_2^2 - 4k_1 k_3.$$

$$(k_1, k_2, k_3) = (p - q, p^2 - q^2, p^3 - q^3).$$

Для наборов

$$k_i^{(1)}, k_i^{(2)}.$$

Получим

$$-\frac{D \left( k_1^{(1)} - k_1^{(2)}, \dots \right)}{P \left( k_1^{(1)} + k_1^{(2)}, \dots \right)} = \frac{(p_1 - p_2)(q_1 - q_2)}{(p_1 - q_2)(q_1 - p_2)}.$$

$$\xi_i = \sum_{j=1}^{\infty} \left( p_i^j q_i^j \right) x_j = \xi(x, p_i) - \xi(x, q_i).$$

$$a_{ii'} = \frac{(p_i - p_{i'})(q_i - q_{i'})}{(p_i - q_{i'})(q_i - p_{i'})}.$$

$$X(p, q) = \exp \left( \sum_{j=1}^{\infty} (p^j - q^j) x_j \right) \cdot \exp \left( - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} (p^{-j} - q^{-j}) \frac{\partial}{\partial x_j} \right).$$

$$\tau = e^{c_1 X(p_1, q_1)} \dots e^{c_n X(p_n, q_n)} \dots 1.$$

$$p^i = -q^i \implies \text{КдФ.}$$

## Билинейное тождество

**Теорема.** Для любых  $x, x', \xi := \xi(x, k), \xi' := \xi(x', k)$ :

$$\oint \frac{dk}{2\pi i} e^{\xi - \xi'} \tau \left( x_1 - \frac{1}{k}, x_2 - \frac{1}{2k^2}, \dots \right) \tau \left( x'_1 + \frac{1}{k}, x'_2 + \frac{1}{2k^2}, \dots \right) = 0.$$

*Доказательство.*

$$\exp \left( \xi \left( x_1 - \frac{1}{k}, \dots \right) \right) = \exp \left( \sum_{j=1}^{\infty} (p_i^j - q_i^j) \left( x_j - \frac{1}{jk^j} \right) \right) = \frac{k - p_i}{k - q_i} e^{\xi_i}.$$

□

Введём вспомогательные функции

$$w(x, k) = e^{\xi(x, k)} \left( 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{w_i}{k^i} \right).$$

$$w^*(x, k) = e^{-\xi(x, k)} \left( 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{w_i^*}{k^i} \right).$$

По теореме получаем

$$\oint \frac{dk}{2\pi i} w(x, k) w^*(x', k).$$

$$\frac{\partial w}{\partial x_j} = B_j w, \quad B_j = (L^j)_+.$$

$$1. \quad \forall Q \hookrightarrow \oint \frac{dk}{2\pi i} Q(w) w^*(x', k) = 0$$

$$2. \quad \tilde{w}(x, k) = e^{\xi(x, k)} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\tilde{w}_i}{k^i}$$

$$\oint \frac{dk}{2\pi i} \tilde{w}(x, k) w^*(x', k) = 0 \implies \tilde{w}_i \equiv 0.$$

$$Q = \frac{\partial}{\partial x_j} - (L^j)_+.$$

$$Qw = \frac{\partial w}{\partial x_j} - L^j w + (L^j)_- w \text{ — имеет вид 2} \implies Qw = 0 \text{ и т.д.}$$

$$\begin{aligned} 0 &= \oint \frac{dk}{2\pi i} \exp \left( 2 \sum_{j=1}^{\infty} k^j y_j \right) \tau \left( x_1 + y_1 - \frac{1}{k}, \dots \right) \tau \left( x_1 - y_1 + \frac{1}{k}, \dots \right) = \\ &= \oint \frac{dk}{2\pi i} \exp \left( 2 \sum_{i=1}^{\infty} k^i y_i \right) \exp \left( \sum_{j=1}^{\infty} \left( y_j - \frac{1}{jk_j} \right) D_j \right) \tau \tau. \end{aligned}$$

lknlnkljbjkb