Домашнее задание по интегрируемым иерархиям

Драчов Ярослав
Факультет общей и прикладной физики МФТИ

20 апреля 2021 г.

Задание 1

Упражнение 1.0.

Решение.

$$l_i = \varepsilon_{ijk} r_j p_k.$$

$$\{l_i, l_j\} = \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial l_j}{\partial p_k}\frac{\partial l_i}{\partial r_k} - \frac{\partial l_i}{\partial p_k}\frac{\partial l_j}{\partial r_k} = \varepsilon_{jpl} r_p \delta_{lk} \varepsilon_{imn} \delta_{mk} p_n - \varepsilon_{imn} r_m \delta_{kn} \varepsilon_{jpl} \delta_{pk} p_l =$$
$$= \varepsilon_{jpk} r_p \varepsilon_{ikm} p_m - \varepsilon_{imk} r_m \varepsilon_{jkl} p_l = (\delta_{jm}\delta_{pi} - \delta_{ji}\delta_{pm}) r_p p_m - (\delta_{il}\delta_{mj} - \delta_{ij}\delta_{lm}) r_m p_l =$$
$$= r_i p_j - \delta_{ij} r_m p_m - r_j p_i + \delta_{ij} r_m p_m = r_i p_j - r_j p_i.$$

С другой стороны

$$\varepsilon_{ijk} l_k = \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm} r_l p_m = (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}) r_l p_m = r_i p_j - r_j p_i.$$

Откуда следует, что

$$\{l_i, l_j\} = \varepsilon_{ijk} l_k.$$

Далее

$$A_i = \varepsilon_{ijk} l_j p_k + \frac{\alpha}{r} r_i = \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{jmn} r_m p_n p_k + \frac{\alpha}{r} r_i = (\delta_{km}\delta_{in} - \delta_{kn}\delta_{im}) r_m p_n p_k + \frac{\alpha}{r} r_i =$$
$$= (\mathbf{r}, \mathbf{p}) p_i + \left(\frac{\alpha}{r} - \mathbf{p}^2\right) r_i.$$

$$\{l_i, A_j\} = \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial l_i}{\partial r_k}\frac{\partial A_j}{\partial p_k} - \frac{\partial A_j}{\partial r_k}\frac{\partial l_i}{\partial p_k} =$$
$$= \varepsilon_{inm}\delta_{nk} p_m \left(r_k p_j + (\mathbf{r}, \mathbf{p})\delta_{jk} - 2 p_k r_j\right) - \left(p_k p_j - \frac{\alpha r_k}{r^3} r_j + \left(\frac{\alpha}{r} - \mathbf{p}^2\right)\delta_{jk}\right) \varepsilon_{inm} r_n \delta_{mk} =$$
$$= \varepsilon_{ikm} p_m \left(r_k p_j + (\mathbf{r}, \mathbf{p})\delta_{jk}\right) - \left(p_k p_j + \left(\frac{\alpha}{r} - \mathbf{p}^2\right)\delta_{jk}\right) \varepsilon_{ink} r_n =$$
$$= \varepsilon_{ijm}\left((\mathbf{r}, \mathbf{p}) p_m + \left(\frac{\alpha}{r} + \mathbf{p}^2\right) r_m\right) = \varepsilon_{ijk} A_k.$$

А также

$$
\begin{aligned}
\{A_i, A_j\} = \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial A_i}{\partial r_k}\frac{\partial A_j}{\partial p_k} - \frac{\partial A_j}{\partial r_k}\frac{\partial A_i}{\partial p_k} = \\
= \left(p_k p_i - \frac{\alpha r_k}{r^3} r_i + \left(\frac{\alpha}{r} - \mathbf{p}^2\right)\delta_{ik}\right)(r_k p_j + (\mathbf{r},\mathbf{p})\delta_{jk} - 2p_k r_j) - \\
- \left(p_k p_j - \frac{\alpha r_k}{r^3} r_j + \left(\frac{\alpha}{r} - \mathbf{p}^2\right)\delta_{jk}\right)(r_k p_i + (\mathbf{r},\mathbf{p})\delta_{ik} - 2p_k r_i) = \\
= 2(\mathbf{r},\mathbf{p})p_i p_j - 2\mathbf{p}^2 p_i r_j - \frac{\alpha}{r} r_i p_j + \frac{\alpha(\mathbf{r},\mathbf{p})}{r^3} r_i r_j + \\
+ \left(\frac{\alpha}{r} - \mathbf{p}^2\right) r_i p_j + \left(\frac{\alpha}{r} - \mathbf{p}^2\right)\delta_{ij} - 2\left(\frac{\alpha}{r} - \mathbf{p}^2\right) p_i r_j - \\
- 2(\mathbf{r},\mathbf{p})p_i p_j + 2\mathbf{p}^2 p_j r_i + \frac{\alpha}{r} r_j p_i - \frac{\alpha(\mathbf{r},\mathbf{p})}{r^3} r_i r_j - \\
- \left(\frac{\alpha}{r} - \mathbf{p}^2\right) r_j p_i - \left(\frac{\alpha}{r} - \mathbf{p}^2\right)\delta_{ij} + 2\left(\frac{\alpha}{r} - \mathbf{p}^2\right) p_j r_i = \\
- 2\mathbf{p}^2 p_i r_j - \frac{\alpha}{r} r_i p_j + \left(\frac{\alpha}{r} - \mathbf{p}^2\right) r_i p_j - 2\left(\frac{\alpha}{r} - \mathbf{p}^2\right) p_i r_j + \\
+ 2\mathbf{p}^2 p_j r_i + \frac{\alpha}{r} r_j p_i - \left(\frac{\alpha}{r} - \mathbf{p}^2\right) r_j p_i + 2\left(\frac{\alpha}{r} - \mathbf{p}^2\right) p_j r_i = \\
\left(2\mathbf{p}^2 - \frac{\alpha}{r} + \left(\frac{\alpha}{r} - \mathbf{p}^2\right) + 2\left(\frac{\alpha}{r} - \mathbf{p}^2\right)\right)(r_i p_j - r_j p_i) = \\
= -\left(\mathbf{p}^2 - 2\frac{\alpha}{r}\right)(r_i p_j - r_j p_i) = -2E\varepsilon_{ijk} l_k.
\end{aligned}
$$

Упражнение 1.2.

Решение.

$$
H_3 = \frac{1}{3}\sum_{i,j,k} L_{ij}L_{jk}L_{ki} = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{N} L_{ii}^3 + \frac{1}{3}\sum_{j=k\neq i} L_{ij}L_{jk}L_{ki} + \frac{1}{3}\sum_{\substack{i\neq j, j\neq k,\\ k\neq i}} L_{ij}L_{jk}L_{ki}.
$$

$$
\sum_{\substack{i\neq j, j\neq k,\\ k\neq i}} L_{ij}L_{jk}L_{ki} = \sum_{\substack{i> j, j\neq k,\\ k\neq i}} L_{ij}L_{jk}L_{ki} + \sum_{\substack{i< j, j\neq k,\\ k\neq i}} L_{ij}L_{jk}L_{ki}.
$$

$$
\begin{aligned}
\sum_{\substack{i< j, j\neq k,\\ k\neq i}} L_{ij}L_{jk}L_{ki} = - \sum_{\substack{i< j, j\neq k,\\ k\neq i}} L_{ji}L_{kj}L_{ik} = \\
= - \sum_{\substack{j< i, i\neq k,\\ k\neq j}} L_{ij}L_{ki}L_{jk} = - \sum_{\substack{i> j, j\neq k,\\ k\neq i}} L_{ij}L_{jk}L_{ki}.
\end{aligned}
$$

Следовательно

$$
\sum_{\substack{i\neq j, j\neq k,\\ k\neq i}} L_{ij}L_{jk}L_{ki} = 0.
$$

И

$$
H_3 = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{N} L_{ii}^3 + \frac{1}{3}\sum_{j=k\neq i} L_{ij}L_{jk}L_{ki} = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{N} p_i^3 - \nu^2 \sum_{k\neq i} \frac{p_i}{(q_i - q_k)^2}.
$$

Упражнение 1.3.

Решение. Уравнения движения:

$$-\dot{p}_k = \frac{\partial H}{\partial q_k} = 2\nu^2 \sum_{i<j} \frac{\delta_{ik} - \delta_{jk}}{(q_i - q_j)^3} = 2\nu^2 \left(\sum_{k<j} \frac{1}{(q_k - q_j)^3} - \sum_{i<k} \frac{1}{(q_i - q_k)^3} \right) =$$

$$= 2\nu^2 \sum_{k \neq i} \frac{1}{(q_k - q_i)^3},$$

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k} = p_k.$$

По определению

$$M_{ij} = \delta_{ij} d_i - (1 - \delta_{ij}) \frac{\nu}{(q_i - q_j)^2}.$$

Уравнение Лакса:

$$\delta_{ij} \dot{p}_i + (\delta_{ij} - 1) \frac{\nu\,(\dot{q}_i - \dot{q}_j)}{(q_i - q_j)^2} =$$

$$= \sum_{k=1}^{N} \left[\left(\delta_{ik} p_i + (1 - \delta_{ik}) \frac{\nu}{q_i - q_k} \right) \left(\delta_{kj} d_k - (1 - \delta_{kj}) \frac{\nu}{(q_k - q_j)^2} \right) - \right.$$

$$\left. - \left(\delta_{ik} d_i - (1 - \delta_{ik}) \frac{\nu}{(q_i - q_k)^2} \right) \left(\delta_{kj} p_k + (1 - \delta_{kj}) \frac{\nu}{q_k - q_j} \right) \right] =$$

$$= \delta_{ij} p_i d_i - p_i (1 - \delta_{ij}) \frac{\nu}{(q_i - q_j)^2} + d_j (1 - \delta_{ij}) \frac{\nu}{q_i - q_j} - \nu^2 \sum_{k \neq i, k \neq j} \frac{1}{(q_i - q_k)(q_k - q_j)^2} -$$

$$- \delta_{ij} d_i p_i - d_i (1 - \delta_{ij}) \frac{\nu}{q_i - q_j} + p_j (1 - \delta_{ij}) \frac{\nu}{(q_i - q_j)^2} + \nu^2 \sum_{k \neq i, k \neq j} \frac{1}{(q_i - q_k)^2 (q_k - q_j)} =$$

$$= (\delta_{ij} - 1) \left((p_i - p_j) \frac{\nu}{(q_i - q_j)^2} + \frac{\nu^2}{q_i - q_j} \left(\sum_{k \neq i} \frac{1}{(q_i - q_k)^2} - \sum_{k \neq j} \frac{1}{(q_j - q_k)^2} \right) \right) -$$

$$- \nu^2 \sum_{k \neq i, k \neq j} \frac{q_i + q_j - 2q_k}{(q_i - q_k)^2 (q_k - q_j)^2}.$$

Из последнего уравнения получаем

$$\dot{p}_i = 2\nu^2 \sum_{k \neq i} \frac{1}{(q_k - q_i)^3}.$$

Учтя, что

$$\sum_{k \neq i} \frac{1}{(q_i - q_k)^2} - \sum_{k \neq j} \frac{1}{(q_j - q_k)^2} = \frac{1}{(q_i - q_j)^2} - \frac{1}{(q_j - q_i)^2} +$$

$$+ \sum_{k \neq i, k \neq j} \frac{(q_j - q_i)(q_i + q_j - 2q_k)}{(q_i - q_k)^2 (q_j - q_k)^2} = \sum_{k \neq i, k \neq j} \frac{(q_j - q_i)(q_i + q_j - 2q_k)}{(q_i - q_k)^2 (q_j - q_k)^2},$$

также получаем, что

$$\dot{q}_k = p_k.$$

Задание 3

Упражнение 1.1.

Решение.

$$x^2 \frac{\partial}{\partial x} x = x^2.$$

Упражнение 1.2.

Решение. Для уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u^2 u_x + u_{xxx}$$

$$K(u) = u^2 u_x + u_{3x}.$$

В свою очередь

$$\frac{\partial}{\partial s} K(u) = (u^2 u_x + u_{3x})_s = (u^2)_s u_x + u^2 u_{sx} + u_{s3x} =$$
$$= 2u\hat{K}(u)u_x + u^2 \hat{K}_x(u) \hat{K}_{3x}(u).$$

Рассматриваем

$$\hat{K}(u) = Au^4 u_x + Bu^2 u_{3x} + Cuu_x u_{2x} + Du_x^3 + Eu_{5x}.$$

Для такого случая

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{K}(u) = A\left(4u^3 \hat{K}(u) u_x + u^4 K_x(u)\right) + B\left(2uK(u)u_{3x} + u^2 K_{3x}(u)\right) +$$
$$+ C\left(K(u)u_x u_{2x} + uK_x(u)u_{2x} + uu_x K_{2x}(u)\right) + 3Du_x^2 K_x(u) + EK_{5x}(u).$$

Из равенства

$$\frac{\partial}{\partial s} K(u) = \frac{\partial}{\partial t} \hat{K}(u)$$

получаем, принимая $A = 1$ (код в Mathematica прилагается):

$$\hat{K}(u) = u^4 u_x + 2u^2 u_{3x} + 8uu_x u_{2x} + 2u_x^3 + \frac{6}{5} u_{5x}.$$

Следовательно

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \hat{K}(u)$$

является симметрией данного уравнения.

Упражнение 1.3.

Решение. Выкладки приложены в Mathematica. Ответ:

$$6uu_x + 3u_{xt} + u_{3x} = 0.$$