Неделя №1
Структура и колебания кристаллической решётки, фононы

Драчов Ярослав
Факультет общей и прикладной физики МФТИ

25 марта 2021 г.

2.20.

Решение.

$$\omega = \frac{2s}{a}\left|\sin\frac{ka}{2}\right|.$$

$$\Delta\varphi = k\Delta x = 10ka = \frac{\pi}{2} \implies ka = \frac{\pi}{20} \ll 1.$$

$$\omega \approx \frac{2s}{a}\frac{\pi}{40} \approx 1{,}05 \cdot 10^1 2\ \text{с}^{-1}.$$

2.62.

Решение. Закон сохранения энергии: $\omega = \omega' + \Omega$ (здесь и далее прописные буквы для фононов, простые — для фотонов, штрихованные для рассеянного фотона).

Закон сохранения импульса:

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}' + \mathbf{K}.$$

Так как фонон рождается в жидкости, периодичности нет и вектор обратной решётки в закон сохранения квазиимпульса в принципе вводить не надо. Впрочем, можно показать, что и в кристалле при рассеянии видимого света могут рождаться только фононы с малыми волновыми векторами.

При рассеянии на 90 градусов

$$k = K_z, \quad k' = -K_y.$$

$$\frac{\Omega^2}{s^2} = K^2 = k^2 + k'^2 = \left(\frac{n}{c}\right)^2\left(\omega^2 + (\omega')^2\right) \approx 2\omega^2\left(\frac{n}{c}\right)^2.$$

$$\frac{1}{R} = \frac{\omega - \omega'}{\omega} = \frac{\Omega}{\omega} \approx \frac{\sqrt{2}ns}{c} \approx 0{,}94 \cdot 10^{-5}.$$

2.77.

Решение. Предлагается считать граничные условия для фононов закреплёнными, при этом условие формирования стоячих волн в кристалле в форме прямоугольного параллелепипеда $\sin(k_x L_x)\sin(k_y L_y)\sin(k_z L_z) = 0$. Минимальное значение волнового вектора для возбуждаемой стоячей волны

$k_{\min} \simeq \frac{\pi}{L}$, где L — характерный линейный размер (считаем форму кристалла кубиком).

Частота такого фонона (который оказывается длинноволновым)

$$\omega = k_{\min} s.$$

Её надо приравнять по закону сохранения разнице энергии спиновых подуровней. Так как по условию парамагнетик в s-состоянии, то $g = 2$.

$$L \simeq \frac{\pi}{k_{\min}} = \frac{\pi s \hbar}{\hbar \omega} = \frac{\pi s \hbar}{g \mu_B B} \approx 0{,}57 \text{ мкм}.$$

2.72.

Решение. Мы знаем, что решения для колебания в кристалле имеют вид (для цепочки)

$$\omega^2 = \omega_{\max}^2 \sin^2 \frac{ka}{2}$$

для заданной частоты получается синус больше единицы, что соответствует комплексному волновому вектору — то есть волне, амплитуда которой зависит от координаты.

$$\sin \frac{ka}{2} = 1{,}001.$$

$$e^{ika/2} - e^{-ika/2} = 2{,}002i.$$

$$\left(e^{ika/2}\right)^2 - 2{,}002ie^{ika/2} - 1 = 0.$$

$$e^{ika/2} = 1{,}001i \pm \sqrt{-(1{,}001)^2 + 1} = (1{,}001 \pm -0{,}045)\, i = \begin{cases} 1{,}046i \\ 0{,}956i \end{cases}.$$

Подставляем $ka = \pi + i\delta$.

$$e^{-\delta a/2} = \begin{cases} 1{,}046 \\ 0{,}956 \end{cases}.$$

$$\delta_1 a = -0{,}090.$$

$$\delta_2 a = 0{,}090.$$

Получается два решения, одно соответствует волне, растущей с ростом X, другое — убывающей с ростом X. Решения отличаются только знаком, они равны по модулю.

Выбор решения зависит от того, слева или справа от иона, на который идёт воздействие, находится интересующий нас ион. В одном случае надо выбирать решение, затухающее налево, в другом — затухающее направо. Очевидно, что так и должно быть — затухающие колебания симметрично распространяются в обе стороны.

Соответствен, для искомого отношения амплитуд

$$\frac{u_{100}}{u_0} = e^{-100 \cdot 0{,}090} = 1{,}23 \cdot 10^{-4}.$$