Уравнения математической физики

Драчов Ярослав
Факультет общей и прикладной физики МФТИ

30 ноября 2020 г.

Содержание

$\mathbb{R}^3$

$\Delta u = 0$ в D

D: шар, внешность шар или сф. слой либо $u \mid_{\partial D} = u_0$, либо $u_r \mid_{\partial D} = u_1$, либо $(\alpha u + \beta u_r) \mid_{\partial D} = u_2$

$$\Delta u = u_{rr} + \frac{2}{r} u_r + \frac{1}{r^2} \underbrace{\left[\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \frac{\partial u}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} \right]}_{\Delta_{\text{угл}} \text{ — оператор Лапласа-Бельтрами}}.$$

Собственные функции $\Delta_{\text{угл}}$ называются сферическими функциями.

Полиномы Лежандра:

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dt^n} (t^2 - 1)^n \text{ — полная ортоогональная система (базис) в } L_2[-1, 1].$$

Присоединённые полиномы Лежандра

$$P_n^m(t) = \left(\sqrt{1 - t^2} \right)^m \frac{d^m}{dt^m} P_n(t) \text{ — образуют базис в } L_2[-1, 1] \text{ при каждом } m$$

$$m = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Сферические функции

$$Y_{n,\,m}(\theta, \varphi) = \begin{cases} P_n^m(\cos\theta)\cos m\varphi \\ P_n^m(\cos\theta)\sin m\varphi \end{cases} \subset \lambda_n = -n(n+1)$$

$$Y_n(\theta, \varphi) = \sum_{m=0}^{n} \left[a_{n,\,m} P_n^m(\cos\theta)\cos m\varphi + b_{n,\,m} P_n^m(\cos\theta)\sin m\varphi \right].$$

$$\Delta_{\text{угл}} Y_n(\theta, \varphi) = -n(n+1) Y_n(\theta, \varphi).$$

$$u(z, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(z) Y_n(\theta, \varphi).$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n'' Y_n + \frac{2}{r} \sum_{n=0}^{\infty} A_n' Y_n + \frac{1}{r^2} \sum_{n=0}^{\infty} (-n)(n+1) A_n Y_n = 0.$$

$$A_n'' + \frac{2}{r}A_n' - \frac{n(n+1)}{r^2}A_n = 0.$$

$$r^2A_n'' + 2rA_n' - n(n+1)A_n = 0.$$

$$\lambda(\lambda-1) + 2\lambda - n(n+1) = 0.$$

$$\lambda^2 + \lambda - n(n+1) = 0.$$

$$\lambda_{1,\,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4n(n+1)}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4n^2+4n}}{2} = \frac{-1 \pm (2n+1)}{2} = n, -n-1.$$

$$A_n = C_n r^n + d_n \frac{1}{r^{n+1}}.$$

1. В сф. слое

$$u = \sum_{n=0}^{\infty}\left[r^n Y_n(\theta,\varphi) + \frac{1}{r^{n+1}}\tilde{Y}_n(\theta,\varphi)\right] =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\left[a_{n,\,m}r^nP_n^m(\cos\theta)\cos n\varphi + b_{m,\,n}\frac{1}{r^{n+1}}P_n^m(\cos\theta)\cos m\varphi + \right.$$
$$\left. + \; c_{m,\,n}r^nP_n^m(\cos\theta)\sin m\varphi + d_{m,\,n}\frac{1}{m+1}P_n^m(\cos\theta)\sin m\varphi\right].$$

2. В шаре

$$u = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\left[a_{n,\,m}r^nP_n^m(\cos\theta)\cos m\varphi + C_{n,\,m}r^nP_n^m(\cos\theta)\sin m\varphi\right].$$

3. Вне шара (+ огр. на $+\infty$)

$$u = a + \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\left[b_{n,\,m}\frac{1}{r^{n+1}}P_n^m(\cos\theta)\cos m\varphi + d_{n,\,m}\frac{1}{r^{n+1}}P_n^m(\cos\theta)\sin m\varphi\right].$$

Задача $\Delta u = 0$, $|x| < 1$,

$$u\,|_{|x|=1} = x_2^2x_3 = r^3\sin^2\theta\sin^2\varphi\cos\theta\,|_{r=1} = \frac{1}{2}(1-\cos 2\varphi)\sin^2\theta\cos\theta =$$
$$= \frac{1}{2}\sin^{\theta}\cos\theta - \frac{1}{2}\sin^2\theta\cos\theta\cos 2\varphi$$

$$P_3(t) = \frac{1}{8\cdot 6}\left((t^2-1)^3\right)''' = \frac{1}{48}(t^6-3t^4+3t^2-1)'' = \frac{1}{48}(6\cdot 5\cdot 4t^3 - 3\cdot 4\cdot 3\cdot 2t) =$$
$$= \frac{1}{2}(5t^2-3t) \to P_3(\cos\theta) = -\frac{1}{5}P_3(\cos\theta) + \frac{1}{5}P_1(\cos\theta) - \frac{1}{30}P_3^2(\cos\theta)\cos 2\varphi\frac{1}{2}(5\cos^3\theta - 3\cos\theta).$$

$$\frac{1}{2}\sin^2\theta\cos\theta = \frac{1}{2}\cos\theta - \frac{1}{2}\cos^3\theta = -\frac{1}{5}\cdot\underbrace{\frac{1}{2}(5\cos^3\theta - 3\cos\theta)}_{P_3(\cos\theta)} + \frac{1}{5}\underbrace{\cos\theta}_{P_1(\cos\theta)}.$$

$$P_1(t) = \frac{1}{2}(t^2-1)' = t \to P_1(\cos\theta) = \cos\theta.$$

$$P_3^2(t) = (1-t^2)\cdot\frac{1}{2}(5t^3-3t)'' = 15(1-t^2)t \to P_3^2(\cos\theta) = 15\sin^2\theta\cos\theta.$$

$$u = AP_3(\cos\theta)r^3 + BP_1(\cos\theta)r + CP_3^2(\cos\theta)\cos 2\varphi r^3.$$

$$u\,|_{r=1} = AP_3(\cos\theta) + BP_1(\cos\theta) + CP_3^2(\cos\theta)\cos 2\varphi =$$
$$= -\frac{1}{5}P_3(\cos\theta) + \frac{1}{5}P_1(\cos\theta) - \frac{1}{30}P_3^2(\cos\theta)\cos_2\varphi.$$

$$A = -\frac{1}{5}, B = \frac{1}{5}, C = -\frac{1}{30}.$$