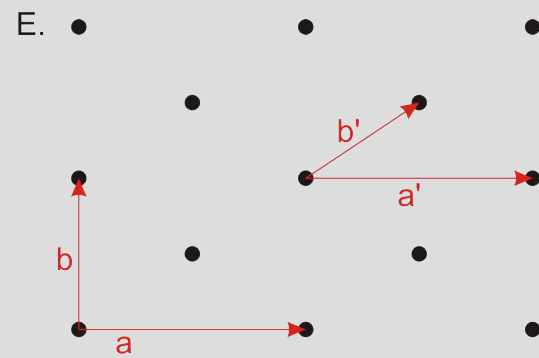
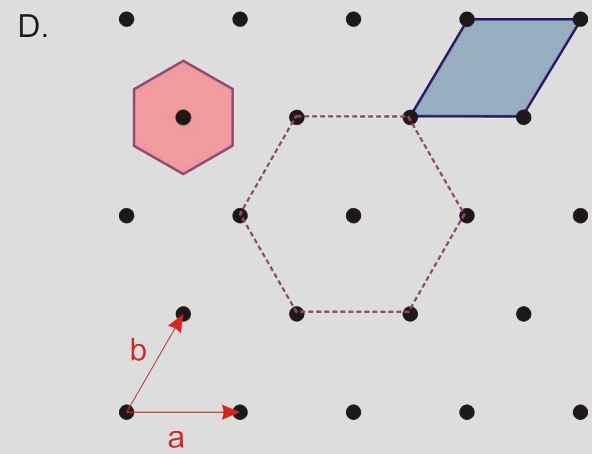
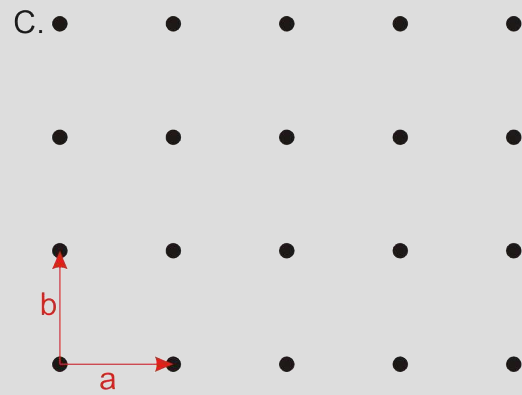
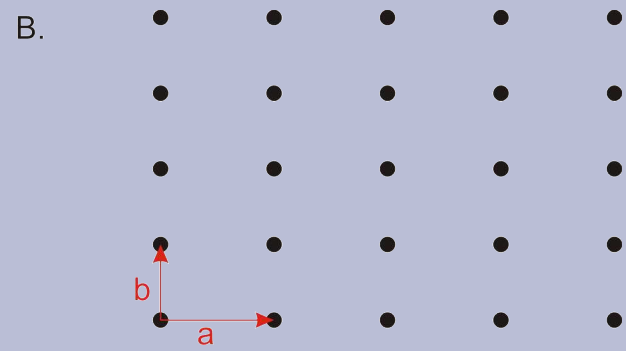
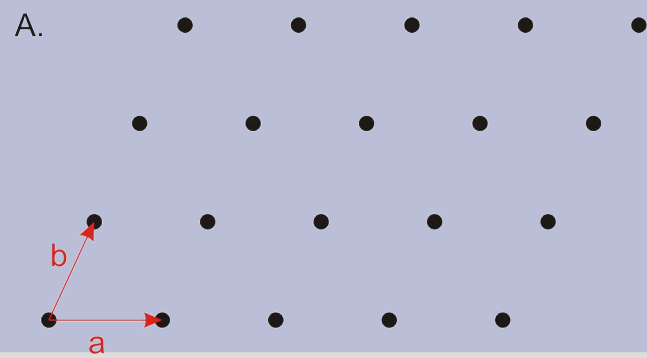


**Квантовая макрофизика.
Лекция 1. Структура и колебания
кристаллических решёток.**



Как зовут лектора....

Глазков Василий Николаевич, к.ф.-м.н., доц. МФТИ,
с.н.с. ИФП им.П.Л.Капицы РАН

vglazkov@yandex.ru, glazkov@kapitza.ras.ru

Материалы к лекциям:

- *сайт кафедры общей физики (раздел VI семестр)*
- *web-страница лектора*
<http://www.kapitza.ras.ru/people/glazkov>
- *Yotube-канал кафедры: записи лекций, консультации к экзамену*

Основная литература по курсу или

Какого Цвета Учебник

- Ч.Киттель «Введение в физику твёрдого тела»
- В.В.Шмидт «Введение в физику сверхпроводников»
- И.М.Халатников «Введение в теорию сверхтекучести»
- В.Я.Демиховский, Г.А.Вугальтер «Физика квантовых низкоразмерных структур»

По вопросам квантовой физики: Ландау и Лифшиц, том 3

Некоторые вопросы физики металлов: А.А.Абрикосов «Основы теории металлов»;

Методические пособия на сайте кафедры общей физики и кафедры теоретической физики.

Почему «квантовая макрофизика» (физика конденсированного состояния)?

«The rest is chemistry...»

П.Дирак

Почему «квантовая макрофизика» (физика конденсированного состояния)?

«The rest is chemistry...»
П.Дирак

«More is Different.»
Ф.Андерсон
*P.W.Anderson, More Is Different,
Science, 177, 393 (1972)*

Почему «квантовая макрофизика» (физика конденсированного состояния)?

Новые явления, которые не сводятся к свойствам составляющих частиц:

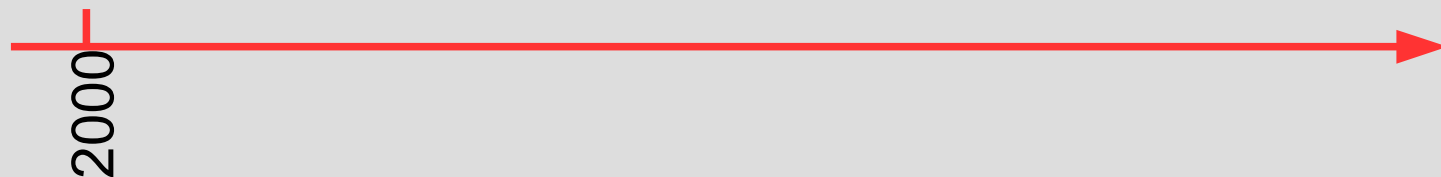
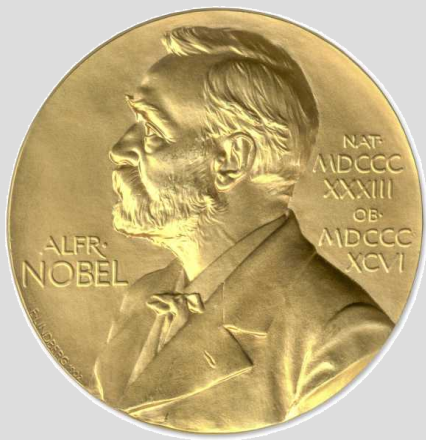
- Спонтанное нарушение симметрии
- Квазичастицы, как универсальный язык описания многочастичных систем
- Универсальные для физики методы
- Технологии...

«More is Different.»

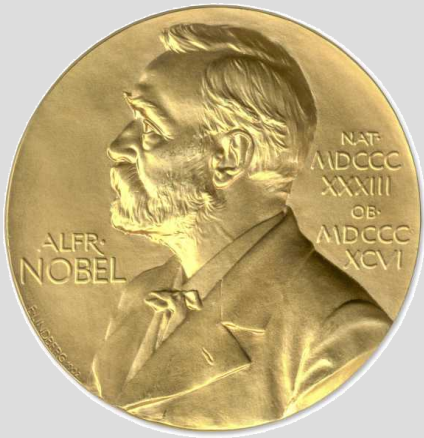
Ф.Андерсон

*P.W.Anderson, More Is Different,
Science, 177, 393 (1972)*

Физика твердого тела как часть современной физики

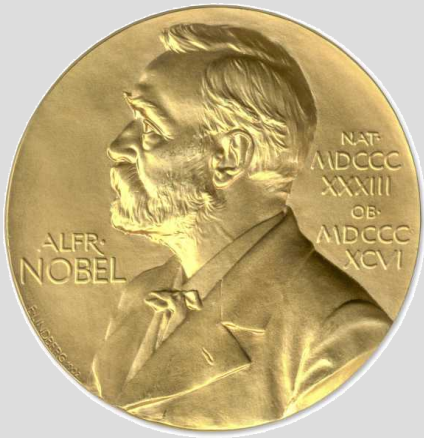


Физика твердого тела как часть современной физики



The Nobel Prize in Physics 2018
Gérard Mourou and Donna Strickland
“for their method of generating high-intensity,
ultra-short optical pulses”

Физика твердого тела как часть современной физики

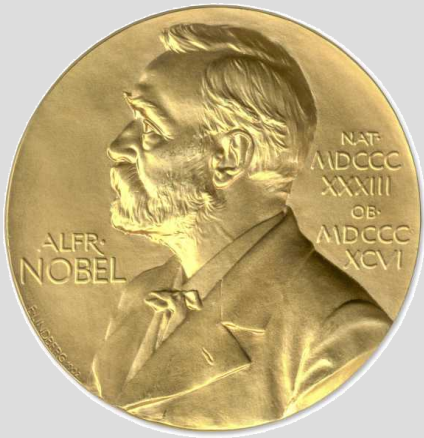


The Nobel Prize in Physics 2016

D. J. Thouless, F. D.M. Haldane and J. M. Kosterlitz

“for theoretical discoveries of topological phase transitions and topological phases of matter”

Физика твердого тела как часть современной физики



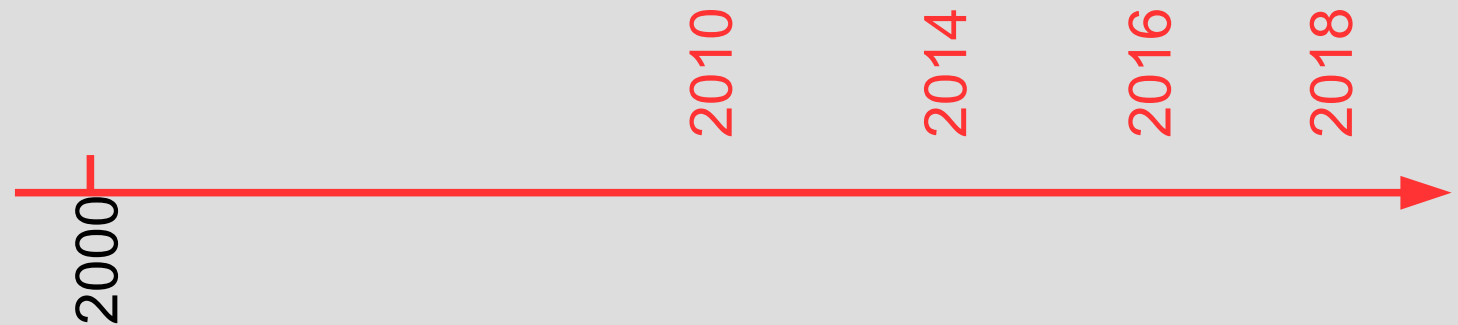
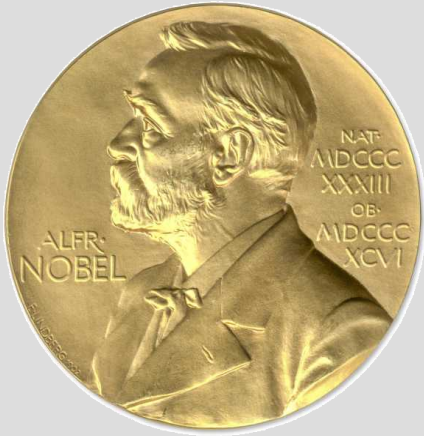
The Nobel Prize in Physics 2016

The Nobel Prize in Physics 2014

Isamu Akasaki, Hiroshi Amano and Shuji Nakamura

“for the invention of efficient blue light-emitting diodes which has enabled bright and energy-saving white light sources”

Физика твердого тела как часть современной физики



The Nobel Prize in Physics 2016

The Nobel Prize in Physics 2014

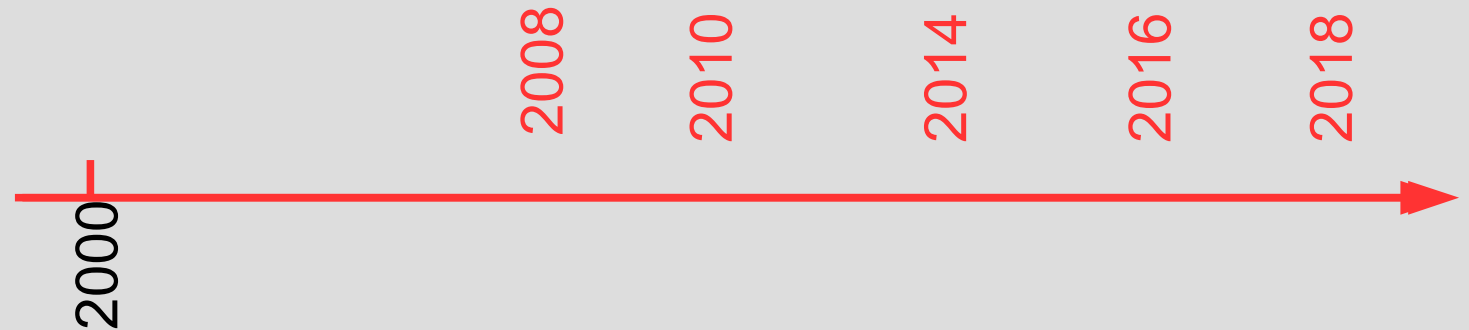
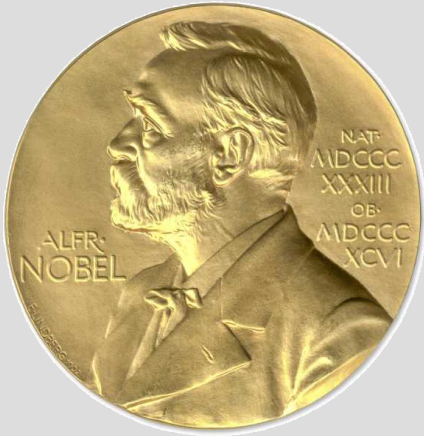
“for Isamu Akasaki, Hiroshi Amano and Shuji Nakamura

“for The Nobel Prize in Physics 2010

w Andre Geim and Konstantin Novoselov

w “for groundbreaking experiments regarding the two-dimensional material graphene”

Физика твердого тела как часть современной физики



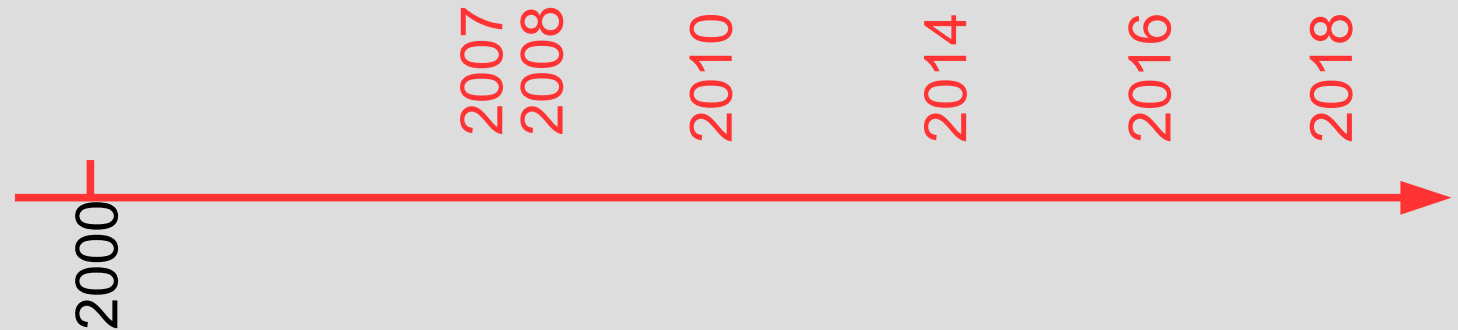
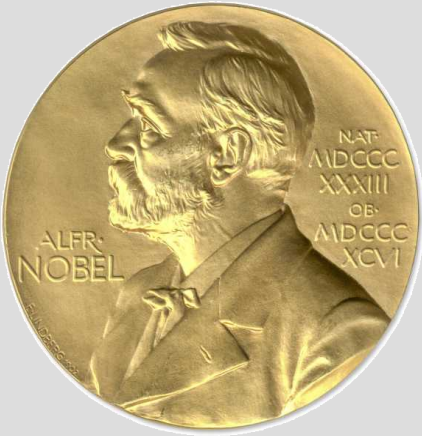
The Nobel Prize in Physics 2008

Charles Kuen Kao “for groundbreaking achievements concerning the transmission of light in fibers for optical communication”

Willard S. Boyle and George E. Smith

“for the invention of an imaging semiconductor circuit – the CCD sensor”

Физика твердого тела как часть современной физики



The Nobel Prize in Physics 2010

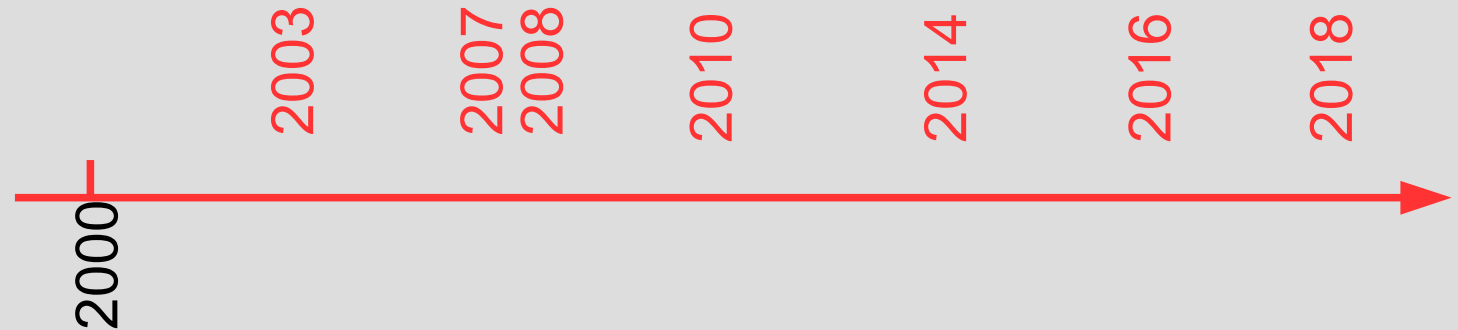
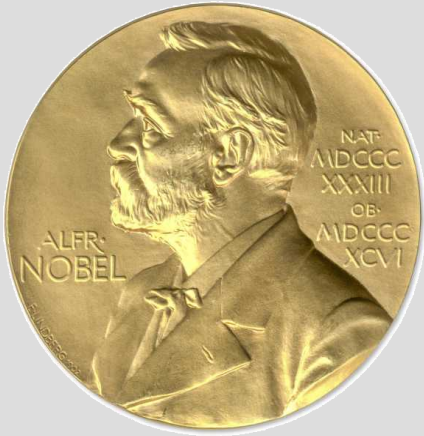
The Nobel Prize in Physics 2008

Charles Kuen Kao "for groundbreaking achievements concerning the transmission of light"

The Nobel Prize in Physics 2007

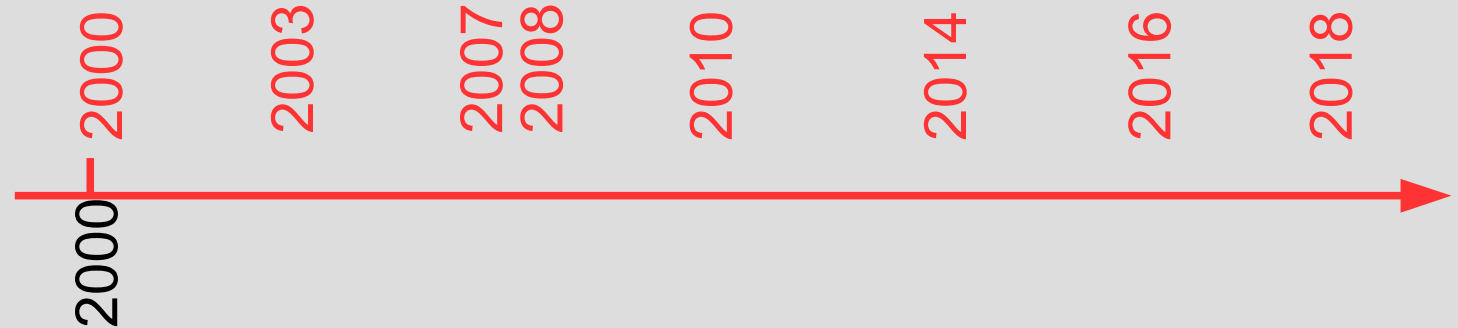
Albert Fert and Peter Grünberg
"for the discovery of Giant Magnetoresistance"

Физика твердого тела как часть современной физики



- The Nobel Prize in Physics 2018
- The Nobel Prize in Physics 2008
Charles Kuen Kao "for groundbreaking achievements concerning the transmission of light"
- The Nobel Prize in Physics 2007
- The Nobel Prize in Physics 2003
Alexei A. Abrikosov, Vitaly L. Ginzburg and A. J. Leggett
"for pioneering contributions to the theory of superconductors and superfluids"

Физика твердого тела как часть современной физики



The Nobel Prize in Physics 2000

“for basic work on information and communication technology”

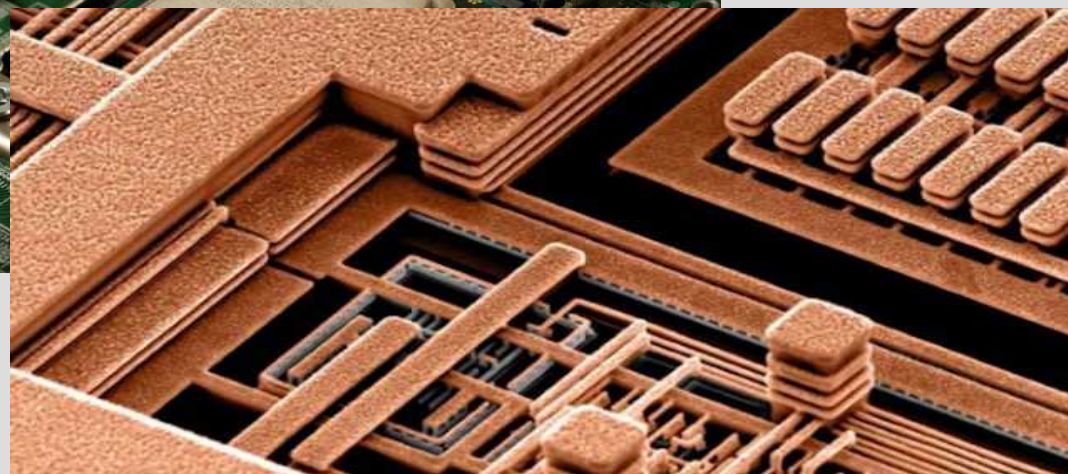
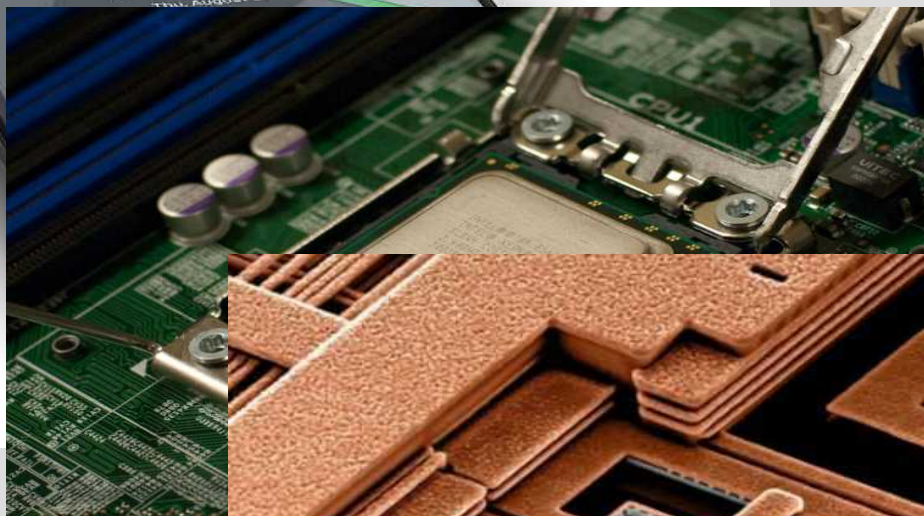
Zhores I. Alferov and Herbert Kroemer

“for developing semiconductor heterostructures used in high-speed- and opto-electronics”

Jack S. Kilby “for his part in the invention of the integrated circuit”

The Nobel
Alexei A. Abrikosov
“for pioneer
supercondu

Вклад в современные технологии



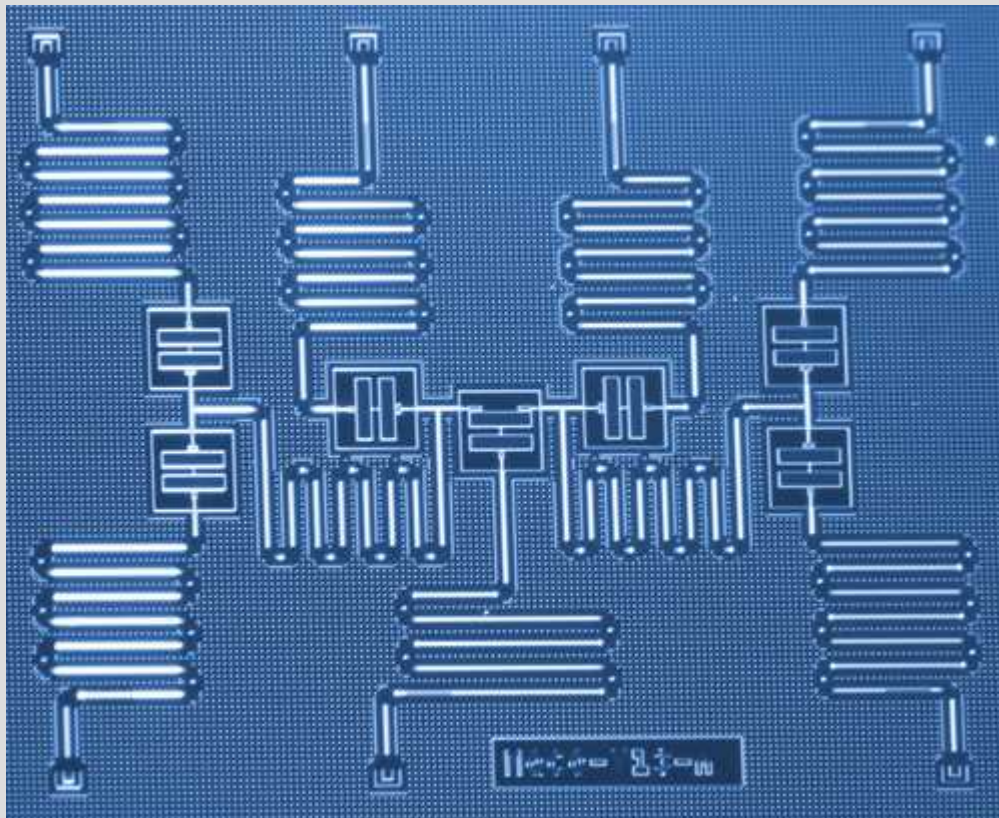
полупроводниковые технологии,
минитюаризация элементной базы

Детекторы и «железо» сложных экспериментов



<http://cms.web.cern.ch/news/superconducting-magnet>

IBM 7 Qubit Device



Итак...

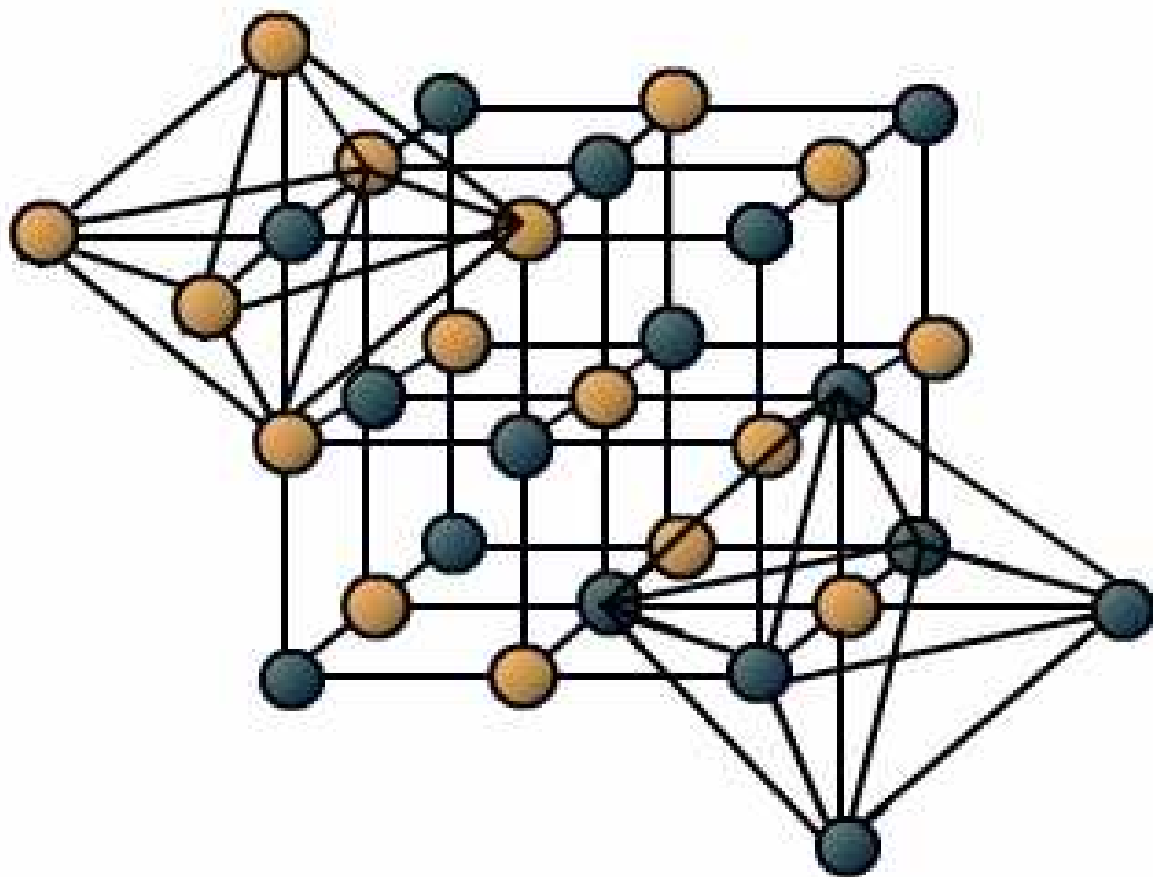
- Нетривиальные основные состояния
- Термодинамика систем многих тел, фазовые переходы
- Описание свойств систем многих тел на универсальном языке квазичастиц
- Возможность создания (экспериментального) систем с пространственной размерностью меньше 3

Примерный план:

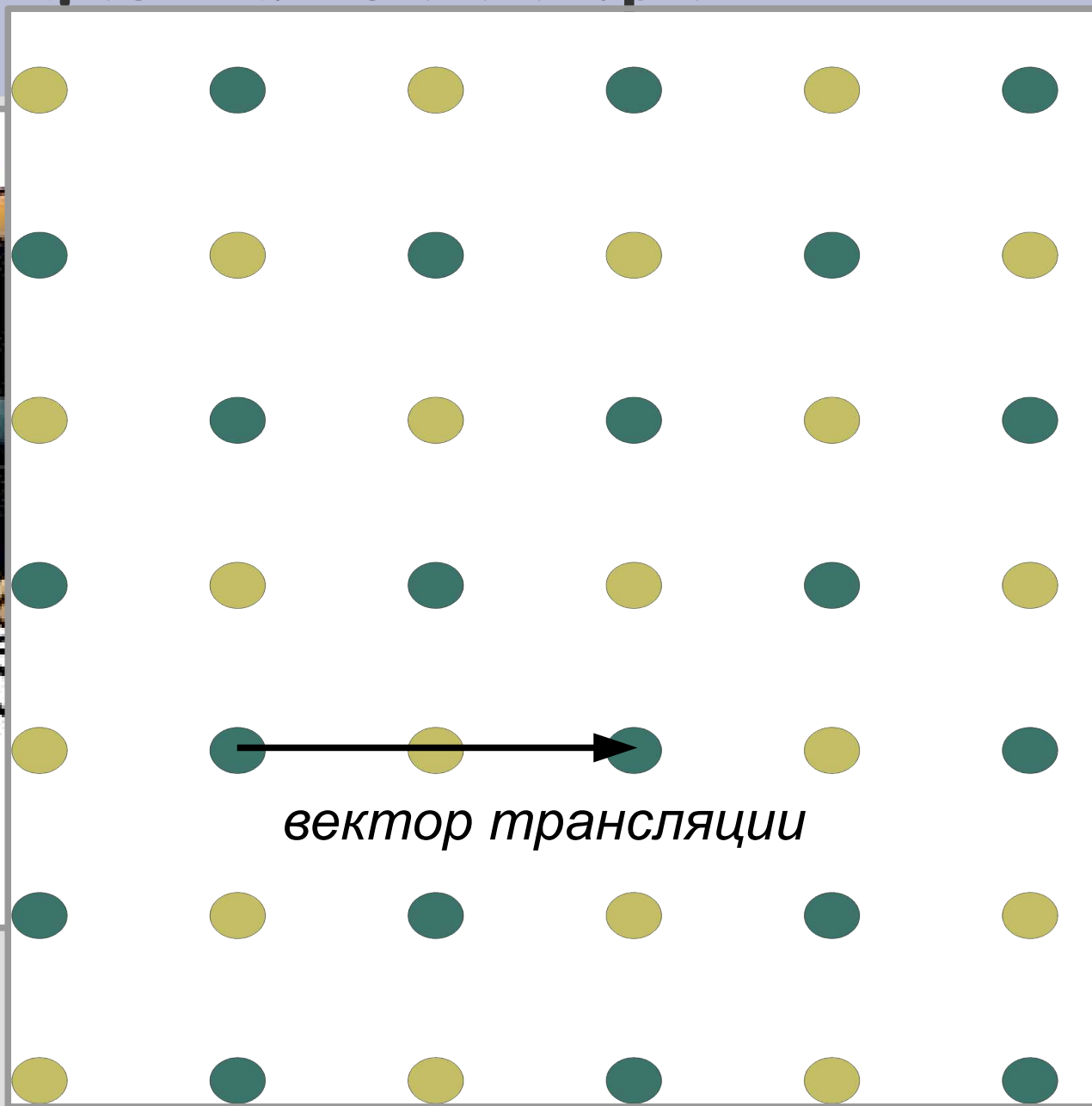
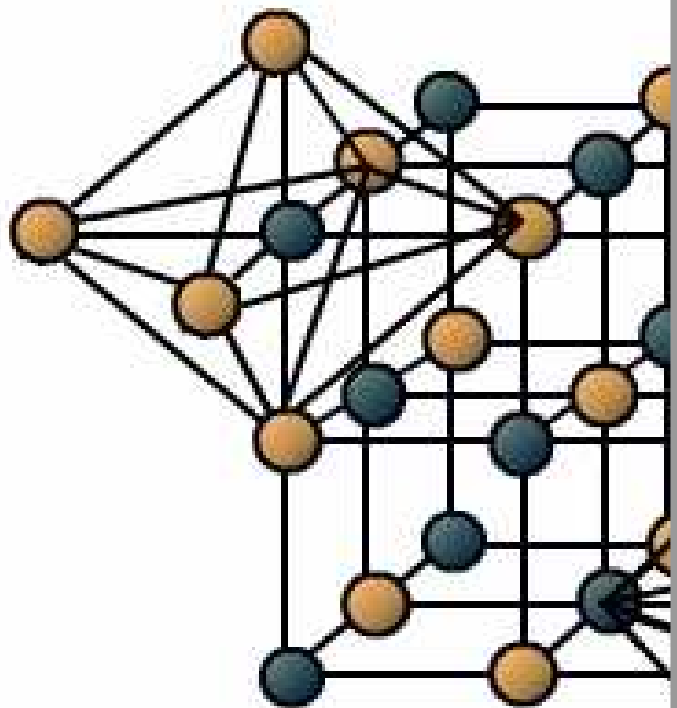
- ознакомление с языком этой области физики (кристаллы, колебания, движение частицы в кристалле)
- физика металлов и полупроводников
- физика низкоразмерных систем
- сверхтекучесть и сверхпроводимость
- магнетизм.

Часть 1. «Азбука кристаллографии»: структура, решётка, базис.

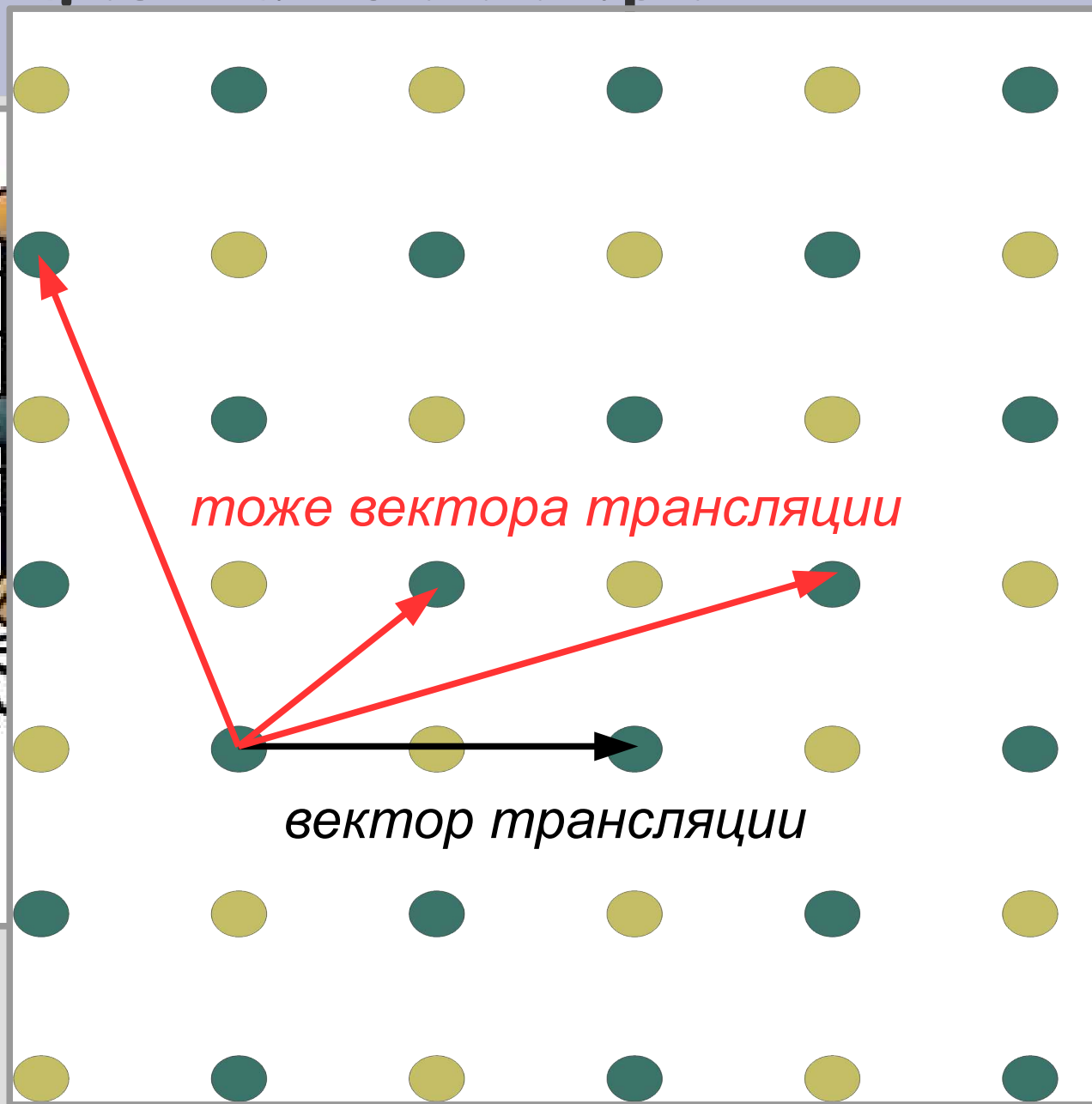
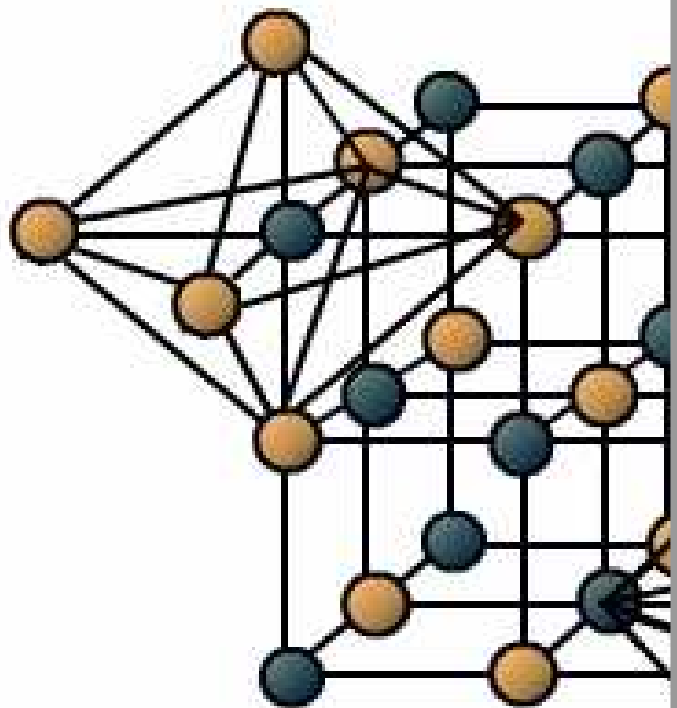
Кристаллическая структура



Трансляционная симметрия



Трансляционная симметрия



Решётка и базис

Кристаллическая решётка = ГМТ, получающихся применением трансляций к исходной точке.

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + n \vec{a} + m \vec{b} + p \vec{c}$$

Решётка и базис

Кристаллическая решётка = ГМТ, получающихся применением трансляций к исходной точке.

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + n \vec{a} + m \vec{b} + p \vec{c}$$

Базис (кристаллографический базис): группа атомов, применением к которой операций трансляции можно полностью восстановить пространственное расположение атомов в данном теле.

Решётка и базис

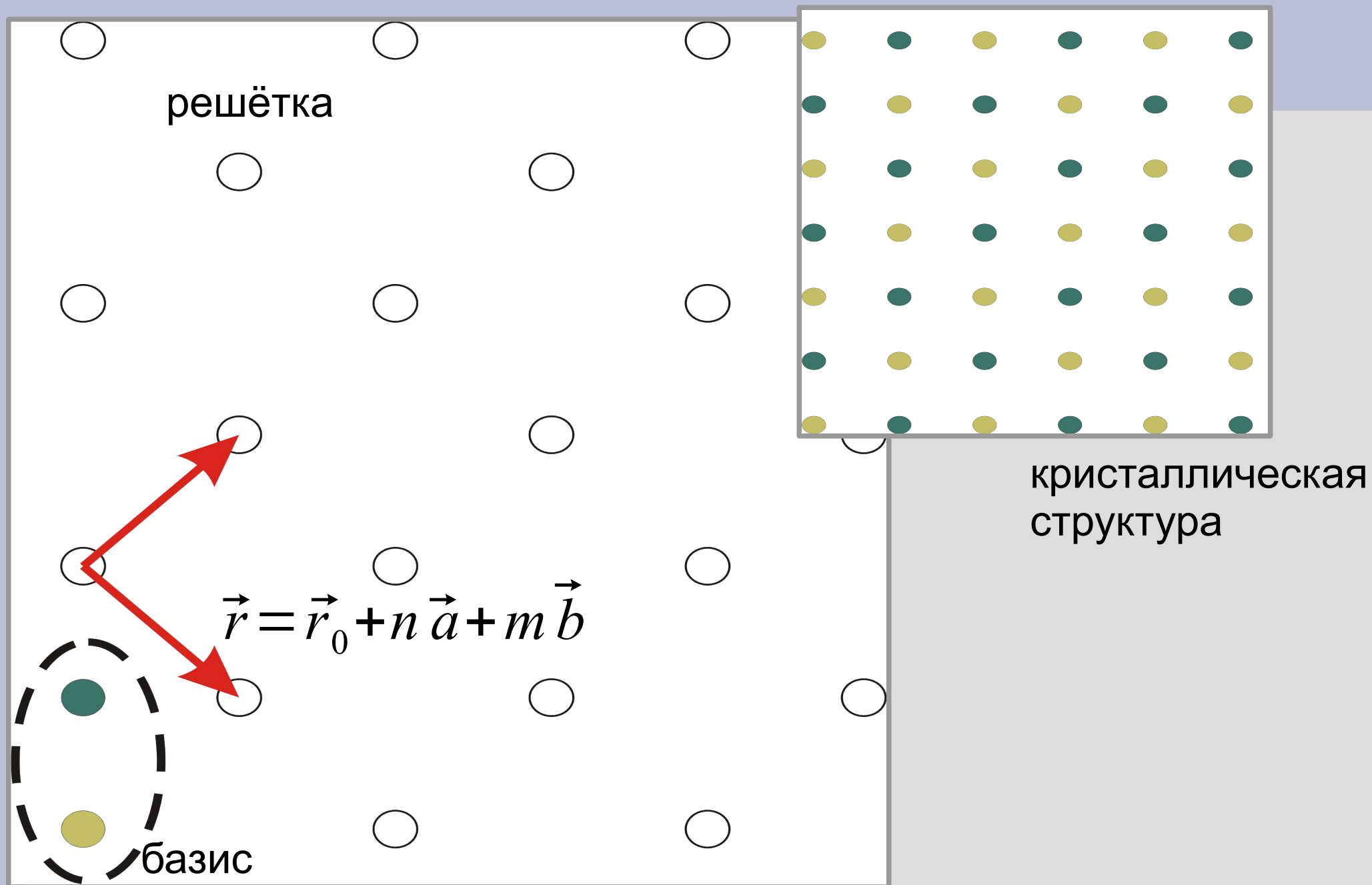
Кристаллическая решётка = ГМТ, получающихся применением трансляций к исходной точке.

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + n \vec{a} + m \vec{b} + p \vec{c}$$

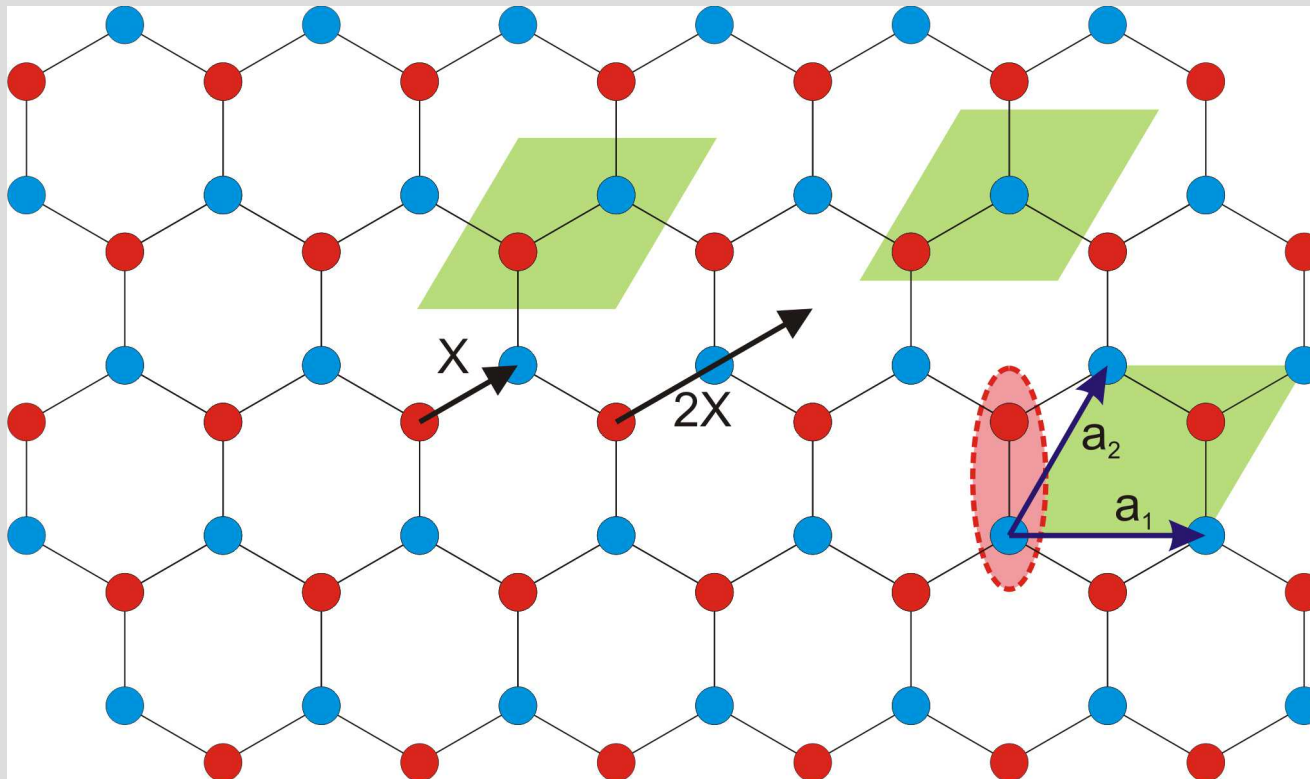
Базис (кристаллографический базис): группа атомов, применением к которой операций трансляции можно полностью восстановить пространственное расположение атомов в данном теле.

Кристаллическая структура = решётка + базис

Решетка и базис: пример 1

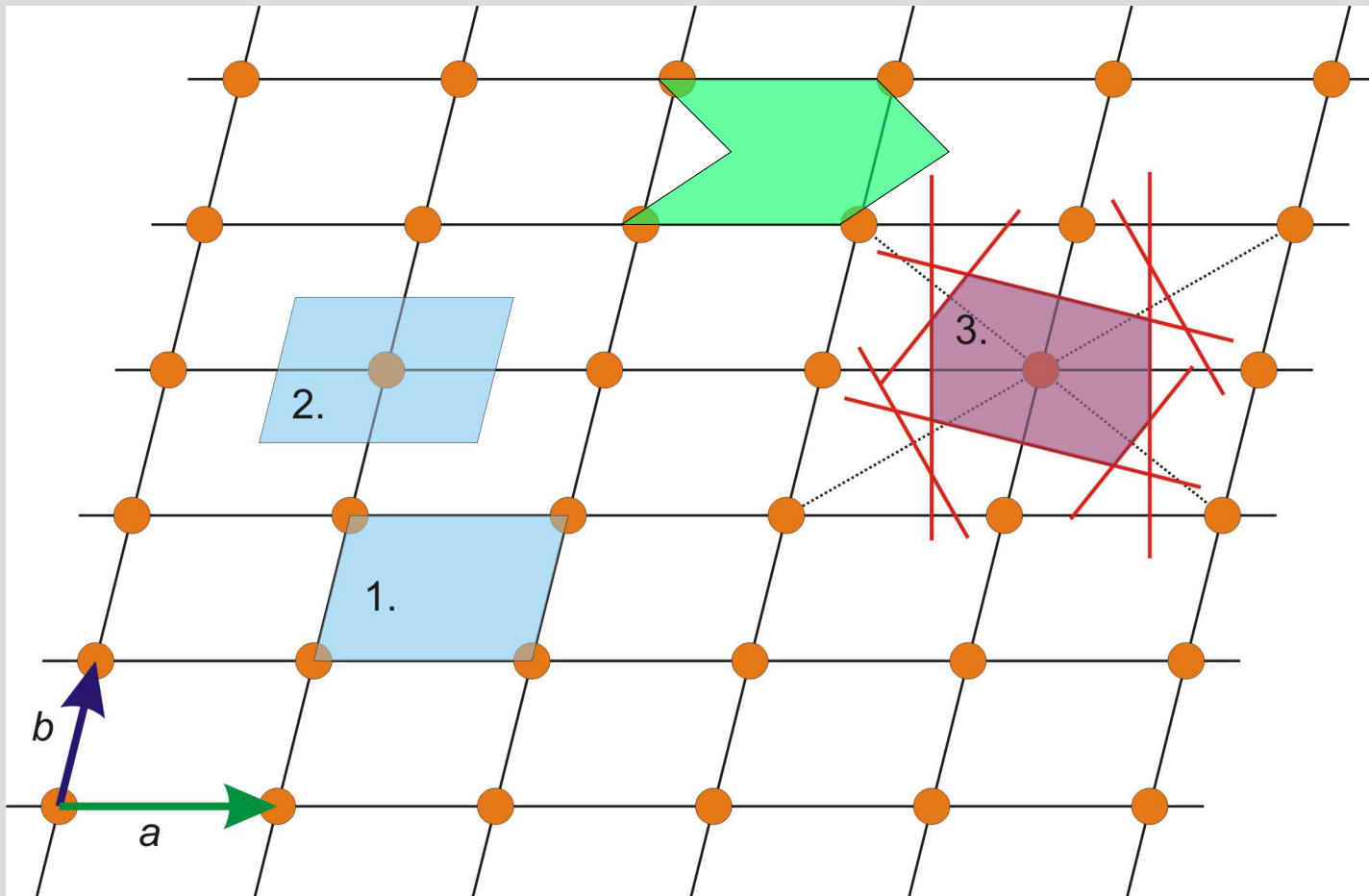


Решетка и базис: пример 2



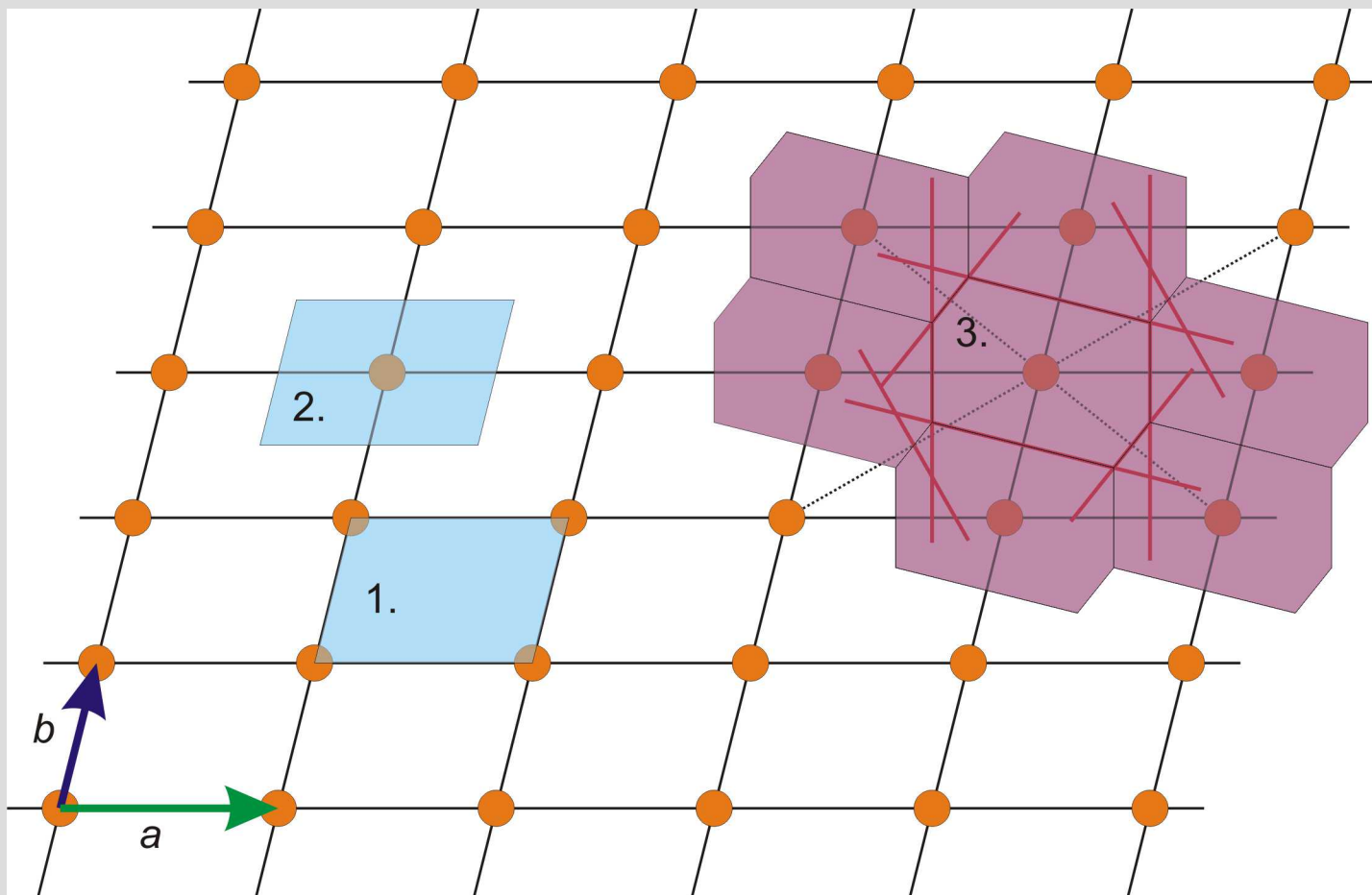
Структура «пчелиные соты» не описывается парой векторов трансляции, приходится выделять базис из двух атомов. Решётка «шестиугольной» структуры будет иметь вид сетки из ромбов. Элементарная ячейка — например один из отмеченных ромбов, содержит два атома (один базис).

Элементарная ячейка.



Варианты выбора элементарной ячейки на двумерной решётке: 1 и 2 - построение на векторах трансляции с разным расположением элементарной ячейки относительно узлов решётки, 3 - построение ячейки Вигнера-Зейтца.

Элементарная ячейка.

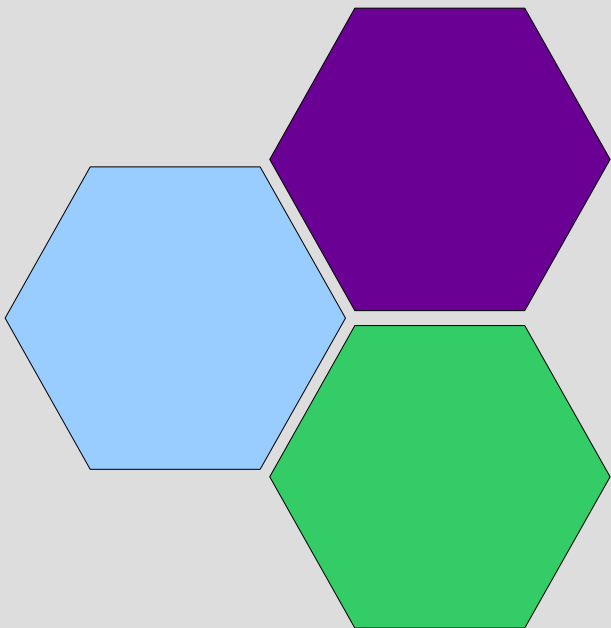


Мощение плоскости ячейкой Вигнера-Зейтца

Другие операции симметрии.

Кристаллы могут обладать и другими симметриями:

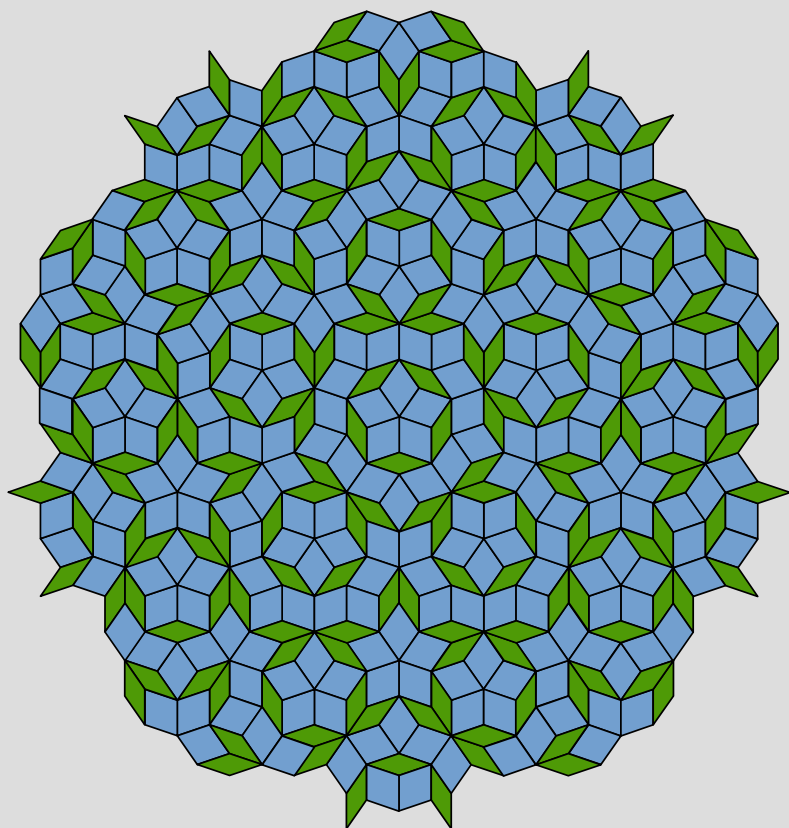
- инверсия,
- оси вращения,
- плоскости отражения.



Но: Всего существует 230 пространственных групп симметрии.

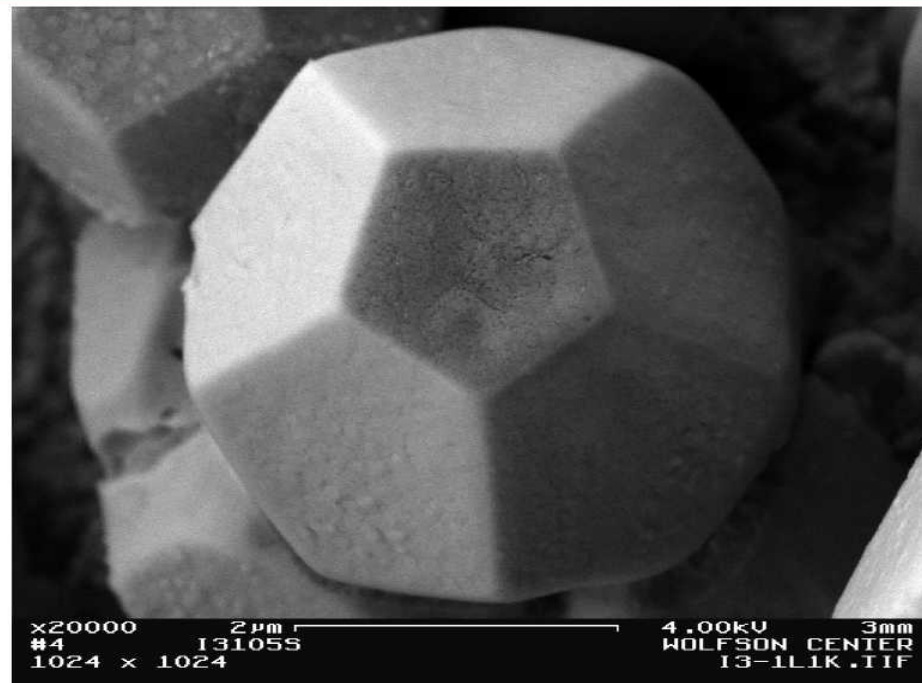
Сочетание с трансляциями накладывает ограничение: возможны только оси 2, 3, 4 и 6 порядка.

Квазикристаллы: есть ось 5 порядка, но нет трансляционной инвариантности



https://en.wikipedia.org/wiki/Penrose_tiling

A quasi-periodic crystal of the system Mg-Zn-Ce



Из слайдов нобелевской лекции Д.Шехтмана, С сайта <http://www.nobelprize.org>

И в результате получаем...



Естественная
огранка
часто
отражает
форму
элементарно
й ячейки и
наличие осей
симметрии

Естественная огранка кристаллов. С сайта Минералогического музея РАН. Верхний ряд: (слева) благородная шпинель, (справа) топаз. Нижний ряд: (слева) топаз, (справа) рутил.

А если кристалл растёт достаточно долго...

Это человек.
И это не фотошоп.



Гигантские кристаллы гипса (селенит, структурная разновидность гипса, $\text{CaSO}_4 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$) из "Пещеры кристаллов" в шахтном комплексе Найка (Мексика). Фото из статьи в журнале National Geographic

Giant Crystal Cave Comes to Light , <http://news.nationalgeographic.com/news/2007/04/photogalleries/giant-crystals-cave/index.html>

И в человеческих силах...



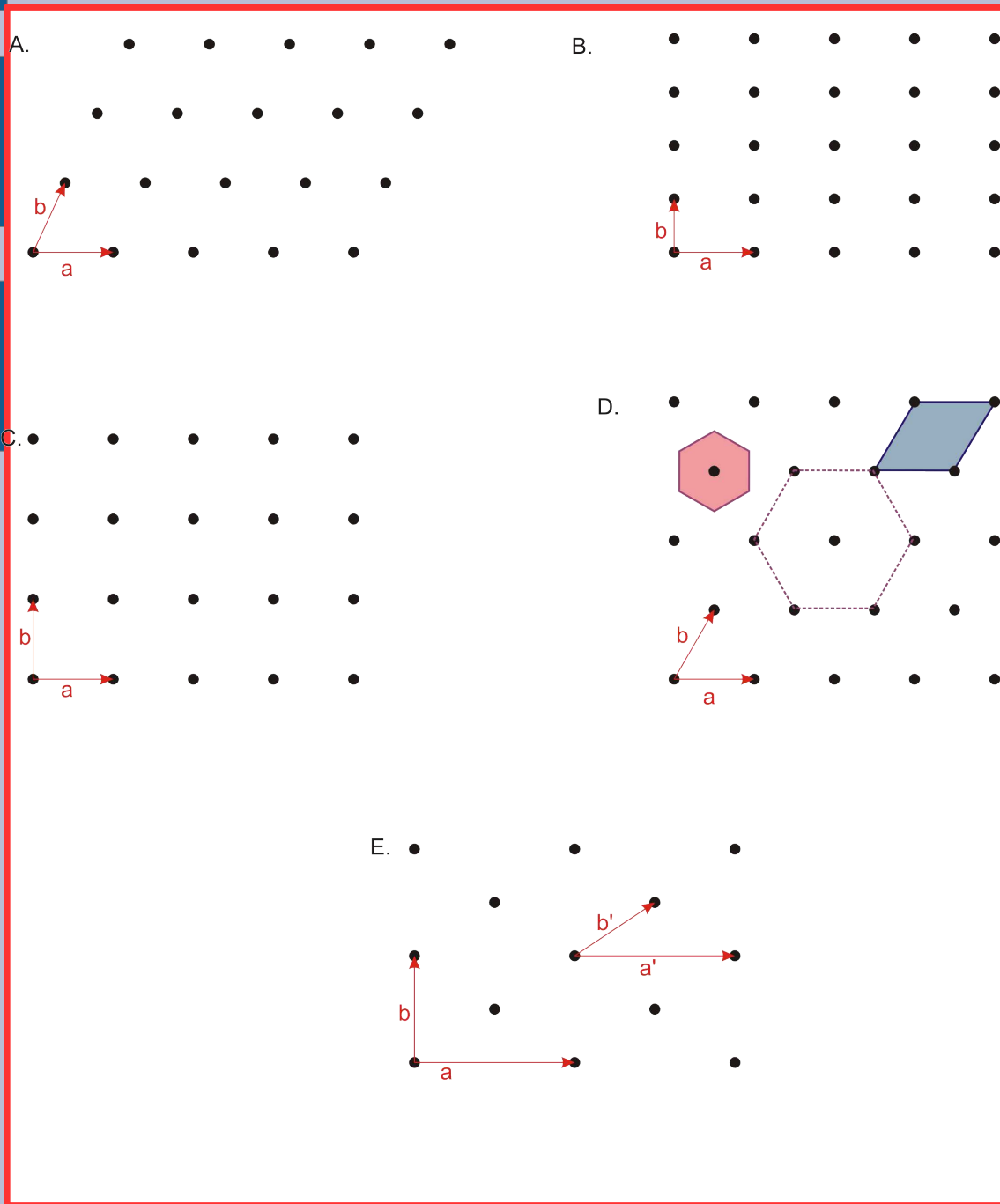
https://www.tf.uni-kiel.de/matwis/amat/iss/kap_5/illustr/i5_3_1.html

Классификация кристаллических решёток (решётки Браве)

2D

Двумерные решётки Браве:

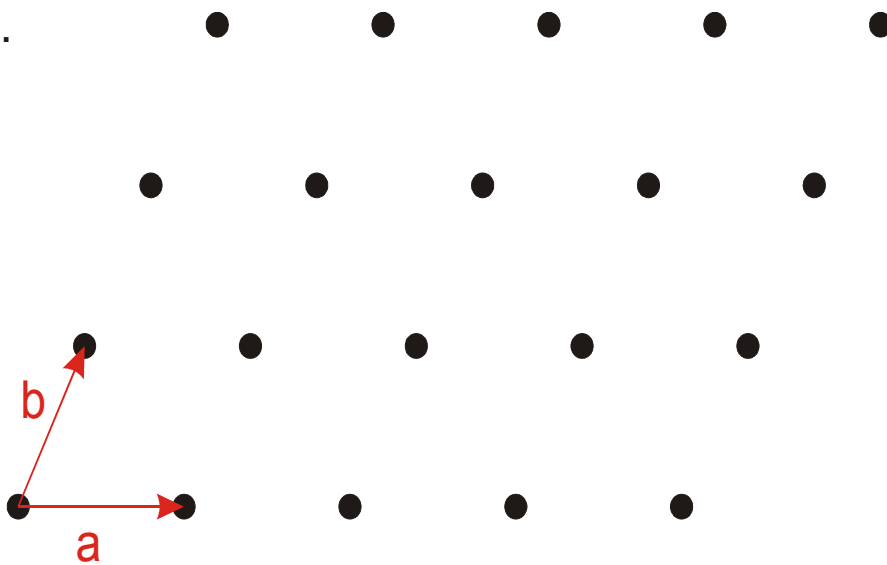
Показаны также оси элементарной ячейки. Для прямоугольной центрированной дополнительно показаны оси примитивной ячейки. Для гексагональной пунктир выделяет шестиугольный мотив структуры, залитые области — два способа выбора примитивной элементарной ячейки.



2D

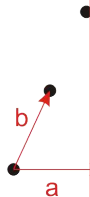
двухмерные решётки Браве:

A.

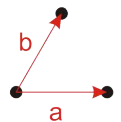
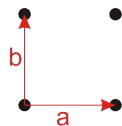


кососоугольная

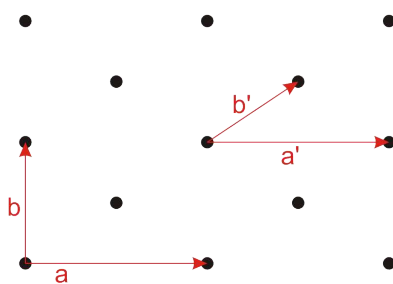
A.



C.



E.

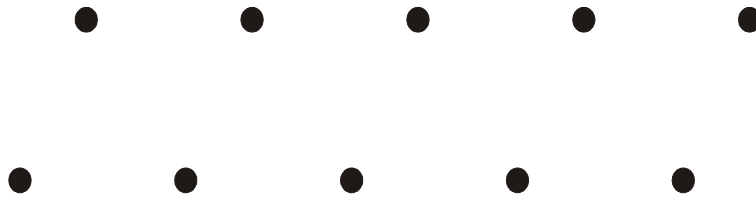


Показаны также оси элементарной ячейки. Для прямоугольной центрированной дополнительно показаны оси примитивной ячейки. Для гексагональной пунктир выделяет шестиугольный мотив структуры, заштрихованные области — два способа выбора примитивной элементарной ячейки.

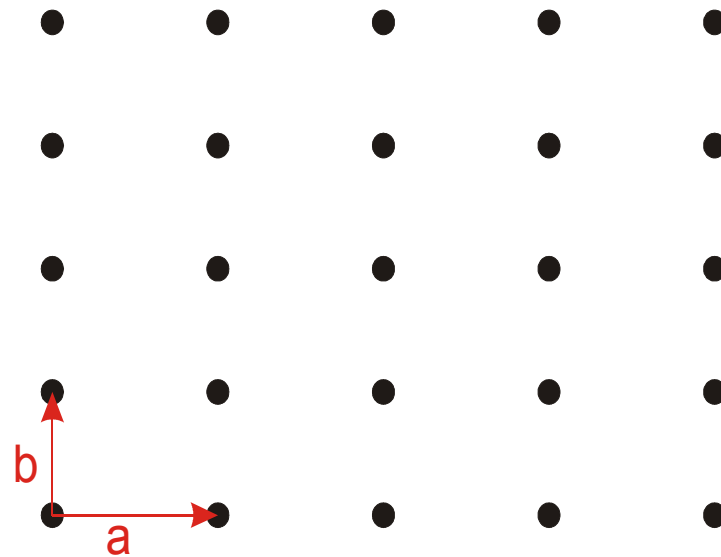
2D

Основные решётки Браве:

A.

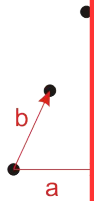


B.

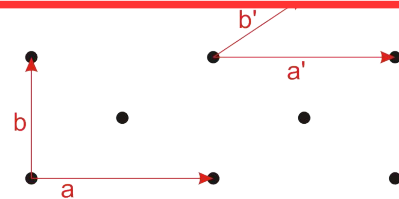


прямоугольная

A.



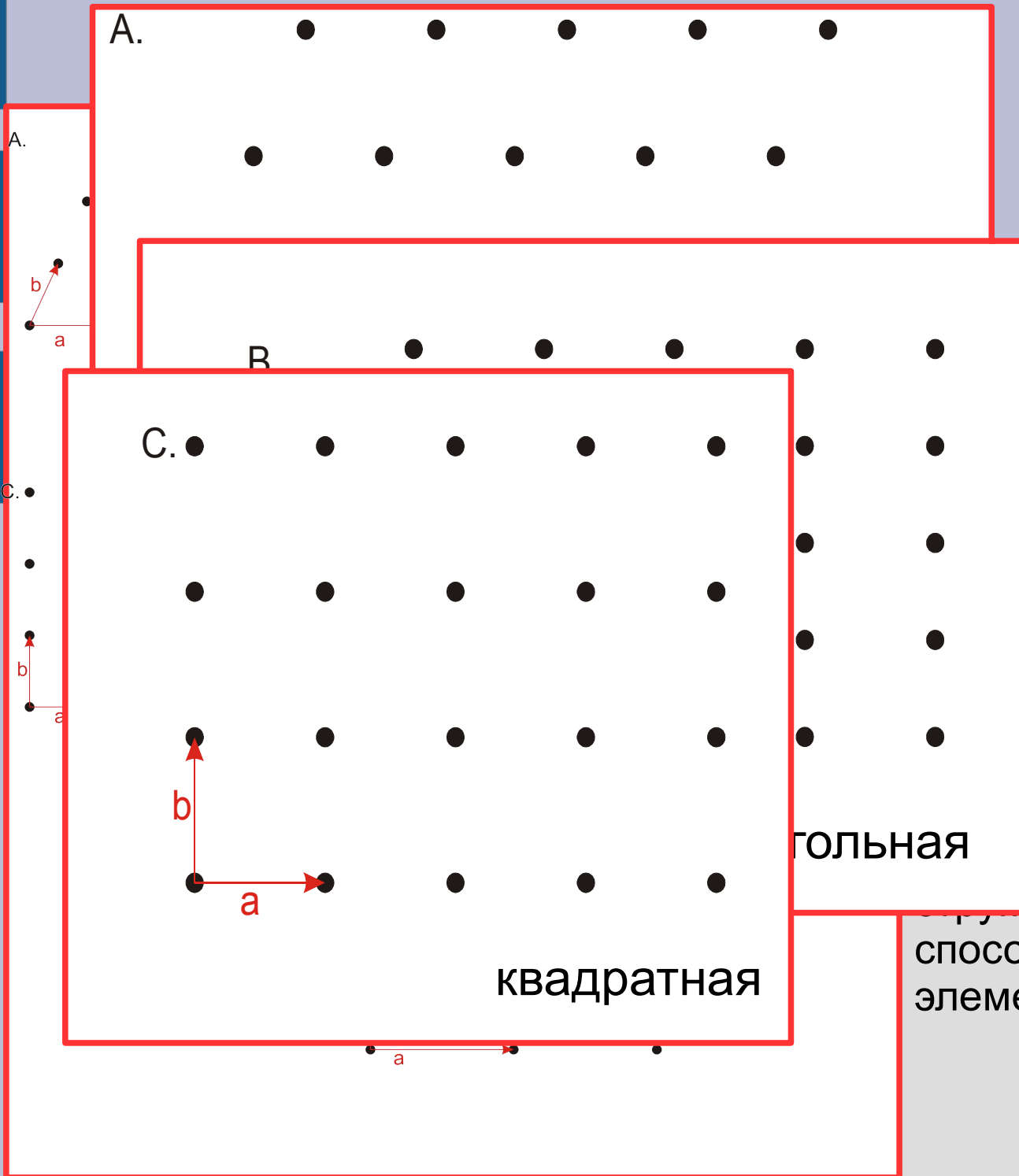
C.



аны также оси элементарной
и. Для прямоугольной
ированной дополнительно
аны оси примитивной ячейки.
ексагональной пунктир
яет шестиугольный мотив
уры, заштрихованные области — два
способа выбора примитивной
элементарной ячейки.

2D

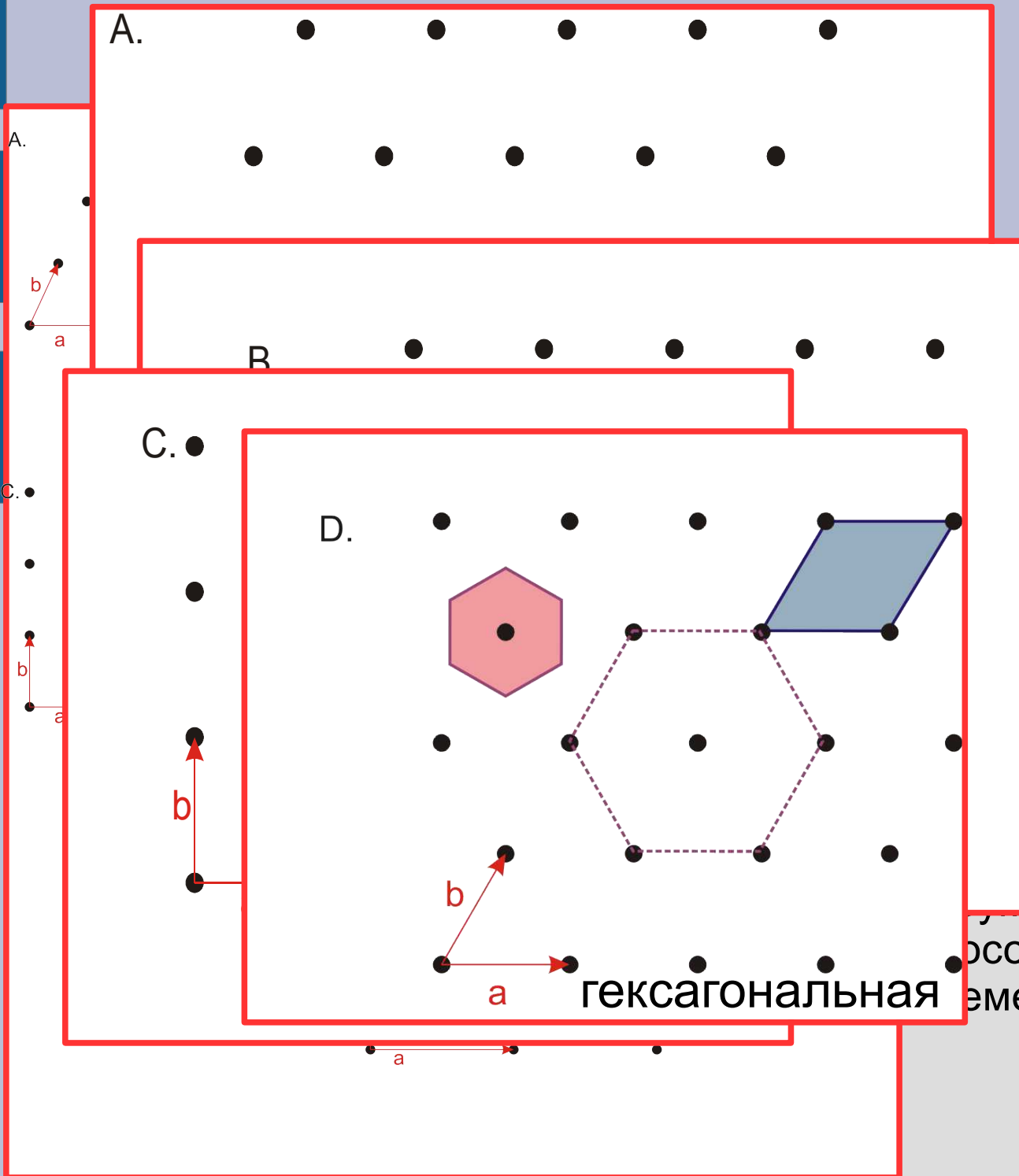
Основные решётки Браве:



аны также оси элементарной
и. Для прямоугольной
ированной дополнительно
аны оси примитивной ячейки.
ексагональной пунктир
гольная имеет шестиугольный мотив
и фигуры, заштрихованные области — два
способа выбора примитивной
элементарной ячейки.

2D

Основные решётки Браве:

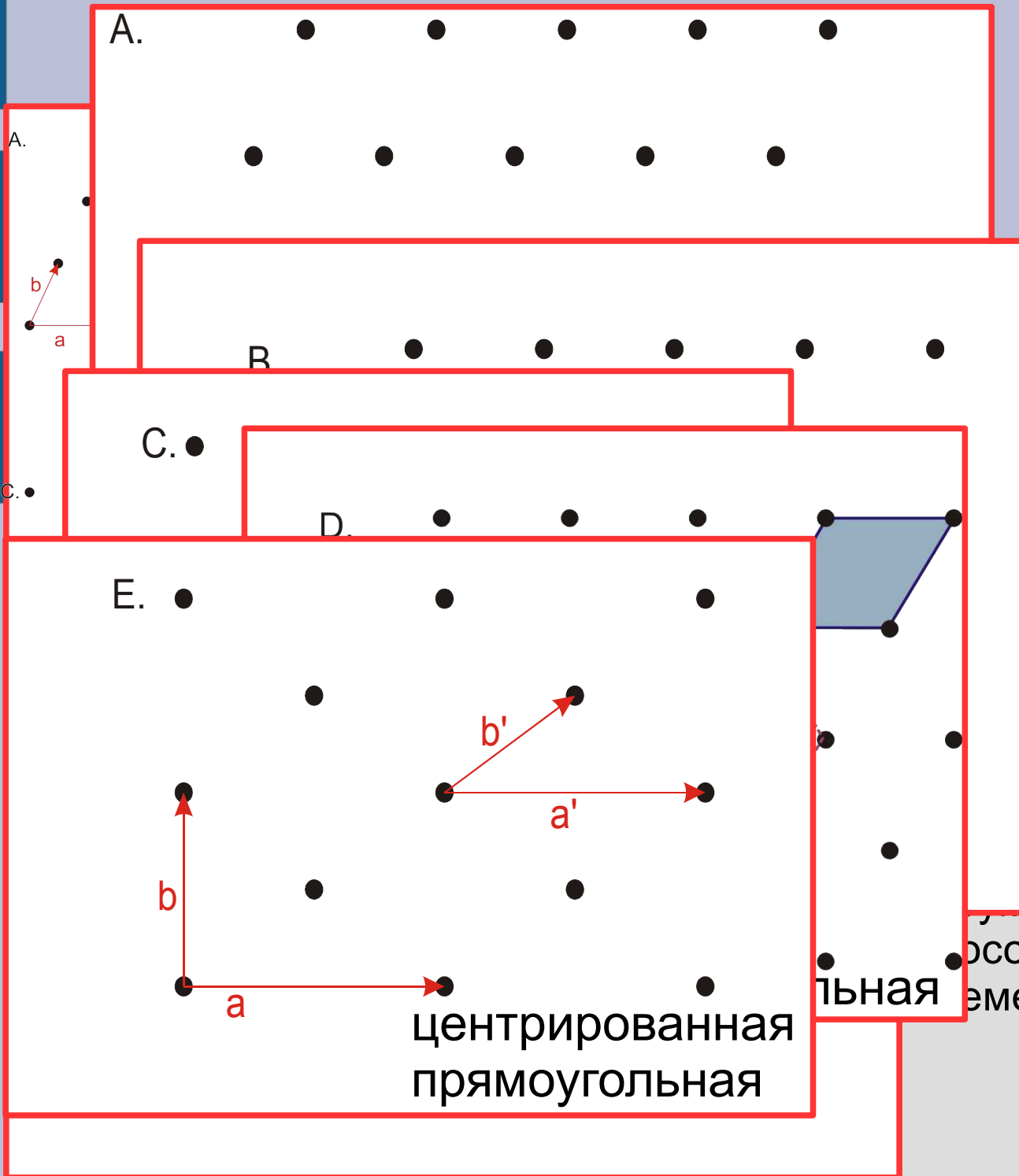


гексагональная

аны также оси элементарной
и. Для прямоугольной
ированной дополнительно
аны оси примитивной ячейки.
гексагональной пунктир
яет шестиугольный мотив
у, фигуры, залитые области — два
особа выбора примитивной
элементарной ячейки.

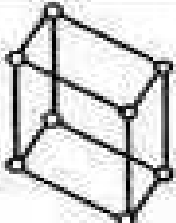
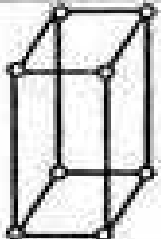
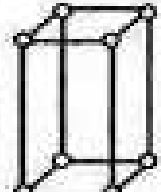
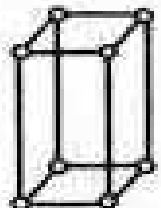
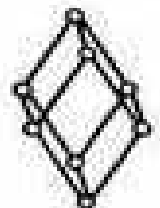
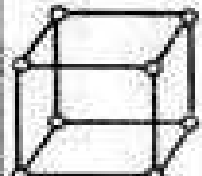
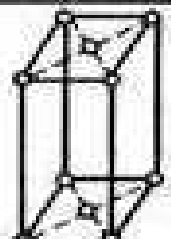
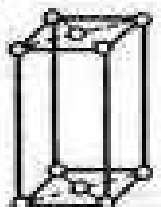
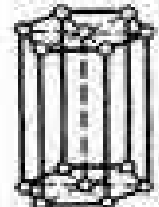
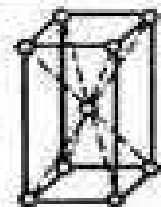
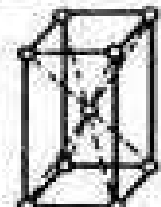
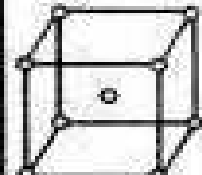
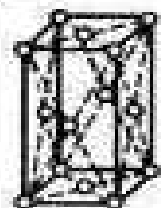
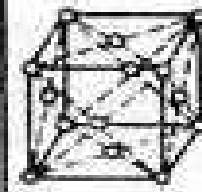
2D

Основные решётки Браве:

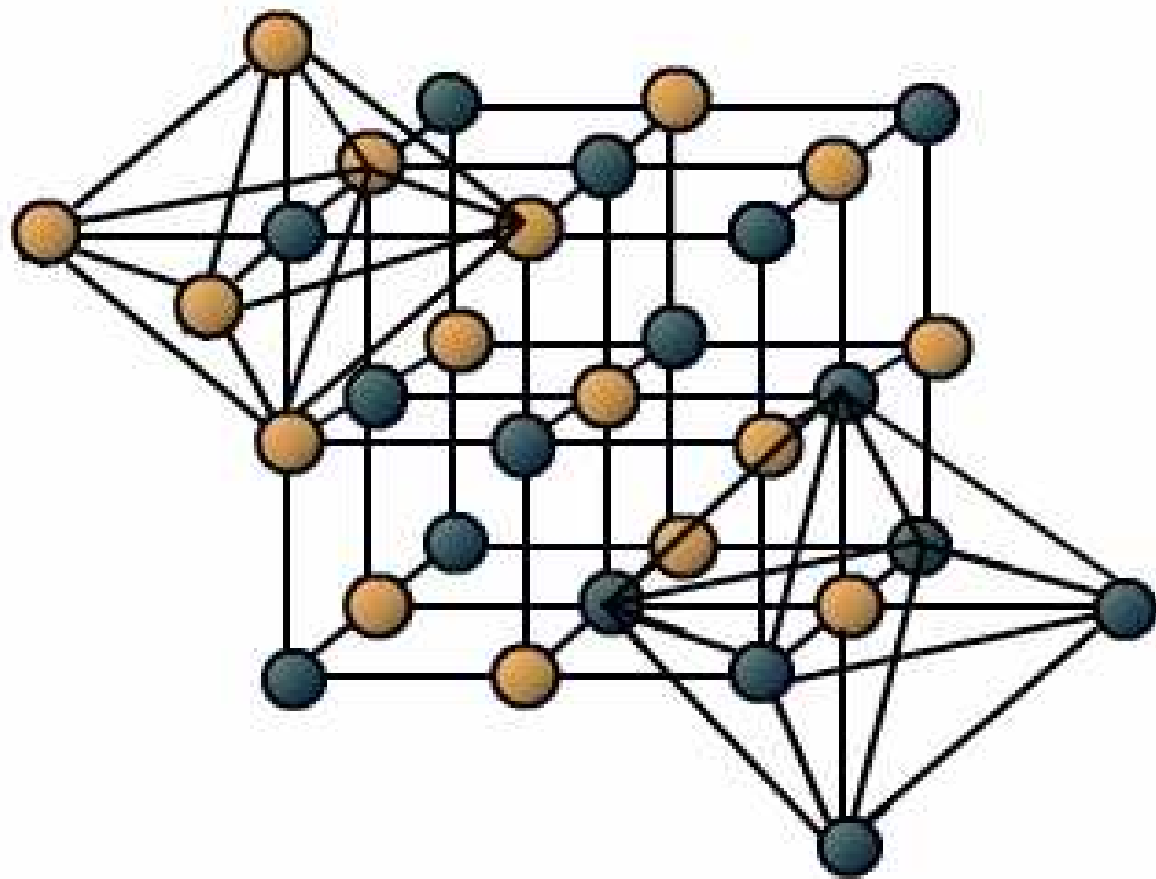


аны также оси элементарной
и. Для прямоугольной
ированной дополнительно
аны оси примитивной ячейки.
ексагональной пунктир
яет шестиугольный мотив
у, фигуры, залитые области — два
особа выбора примитивной
элементарной ячейки.

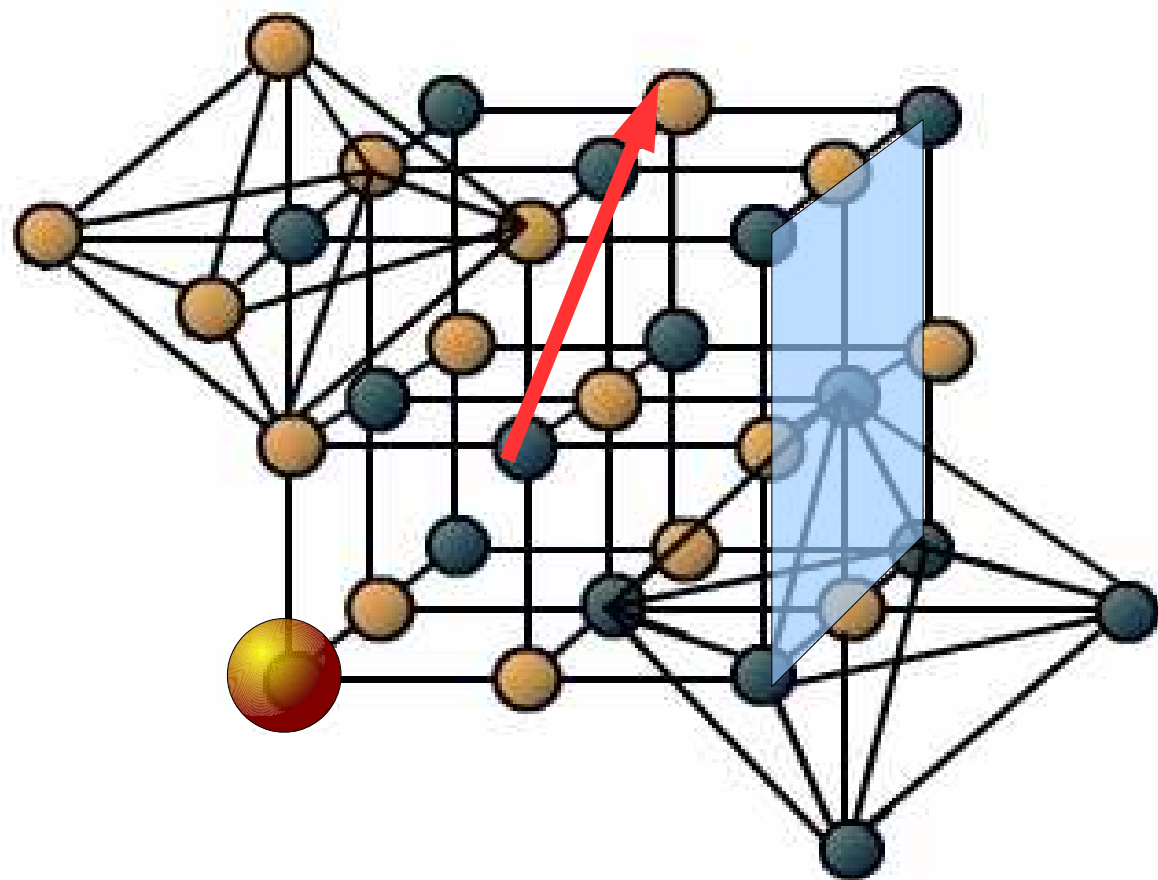
Решётки Браве в 3D.

Сингония Тип решетки	Три- клинная	Моно- клинная	Ромби- ческая	Тетраго- нальная	Триго- нальная (ромбоэ- дрическая)	Гексаго- нальная	Куби- ческая
Примитивный							
Базоцентри- рованный							
Объемноцен- трированный							
Гранецентри- рованный							

Описание позиций, направлений и плоскостей в кристалле.



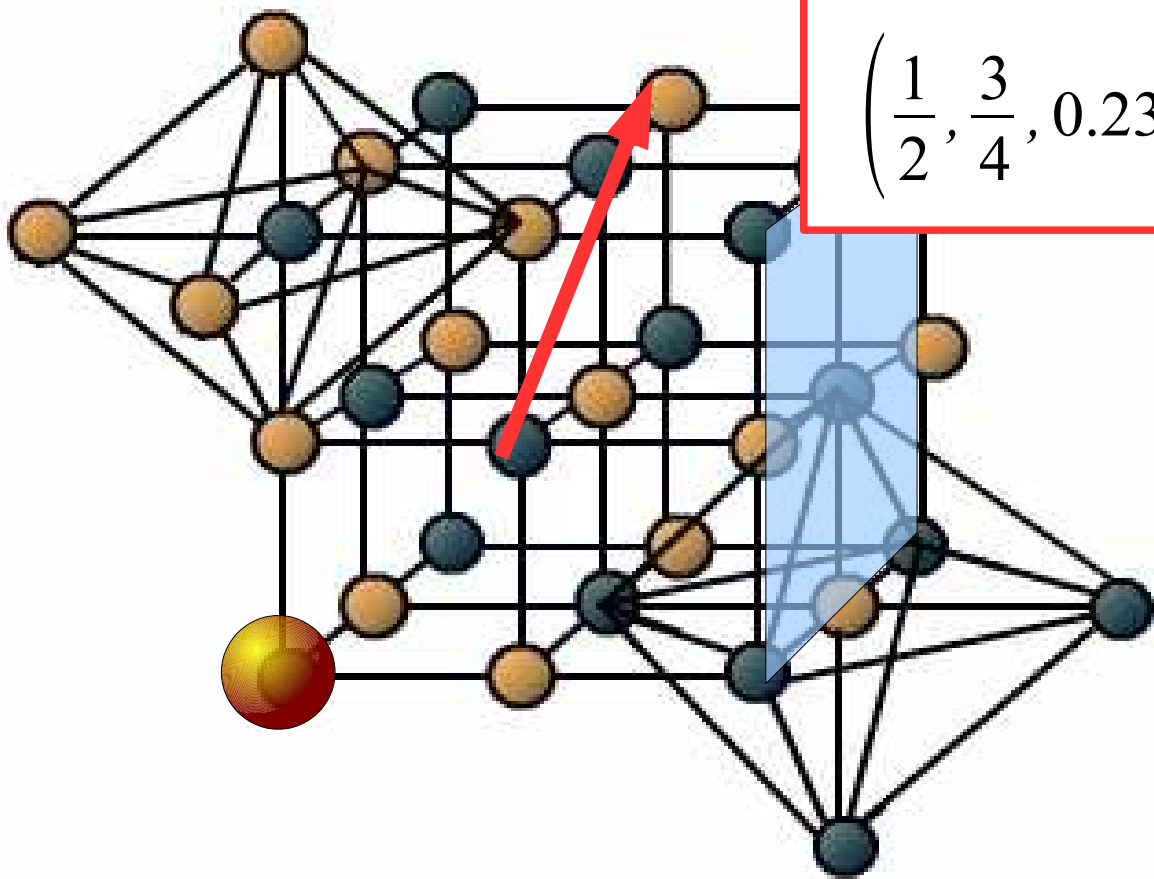
Описание позиций, направлений и плоскостей в кристалле.



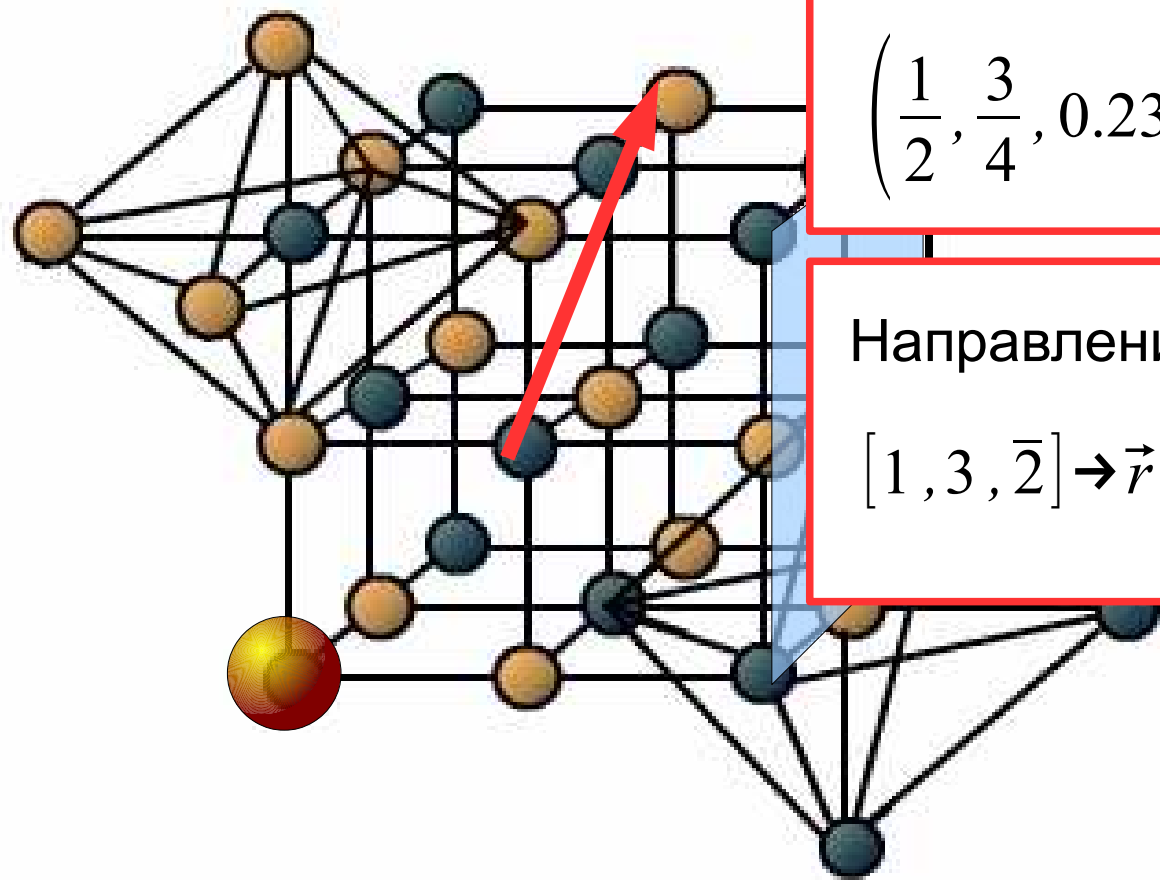
Описание позиций, направлений и плоскостей в кристалле.

Положение атома:

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 0.234\right) \rightarrow \vec{r} = \frac{1}{2} \vec{a} + \frac{3}{4} \vec{b} + 0.234 \vec{c}$$



Описание позиций, направлений и плоскостей в кристалле.



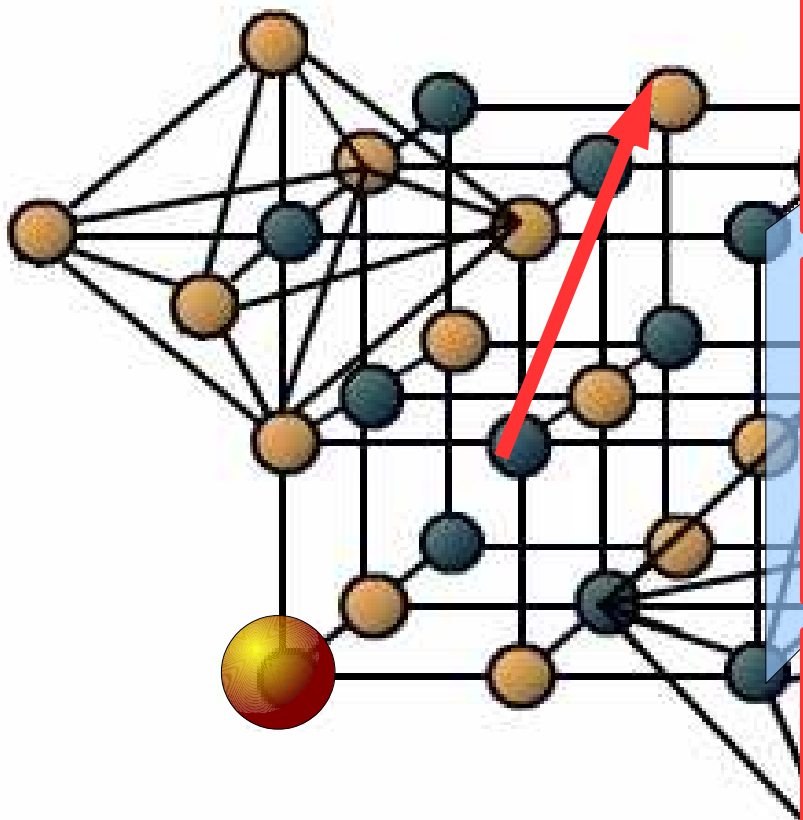
Положение атома:

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 0.234\right) \rightarrow \vec{r} = \frac{1}{2} \vec{a} + \frac{3}{4} \vec{b} + 0.234 \vec{c}$$

Направление относительно кристалла:

$$[1, 3, \bar{2}] \rightarrow \vec{r} = 1 \vec{a} + 3 \vec{b} - 2 \vec{c}$$

Описание позиций, направлений и плоскостей в кристалле.



Положение атома:

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 0.234\right) \rightarrow \vec{r} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b} + 0.234\vec{c}$$

Направление относительно кристалла:

$$[1, 3, \bar{2}] \rightarrow \vec{r} = 1\vec{a} + 3\vec{b} - 2\vec{c}$$

Плоскость в кристалле:

индексы Миллера (h/k)

Индексы Миллера.

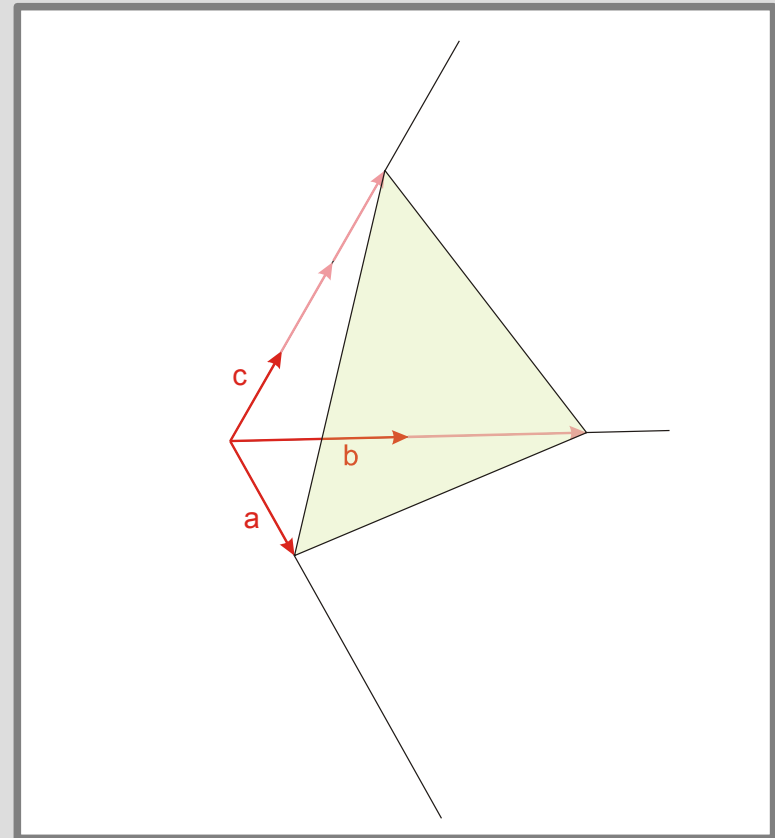
Алгоритм:

- построить плоскость до пересечения с кристаллографическими осями координат
- определить какие отрезки отсекаются от осей координат
- взять обратные числа
- привести их к наименьшему целому, кратному этим числам

Индексы Миллера.

Алгоритм:

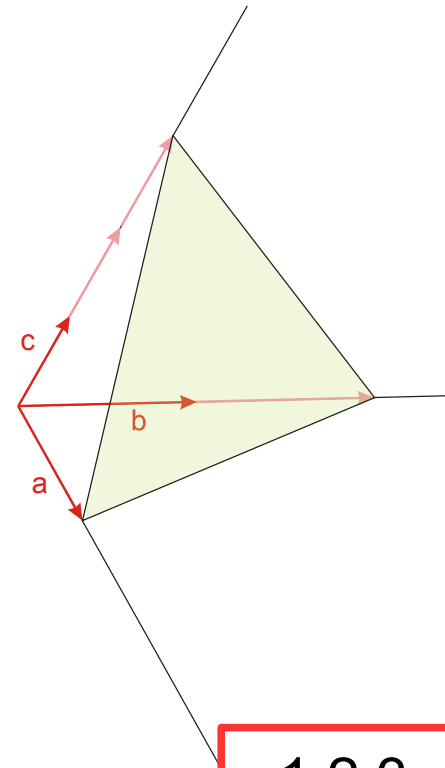
- построить плоскость до пересечения с кристаллографическими осями координат
- определить какие отрезки отсекаются от осей координат
- взять обратные числа
- привести их к наименьшему целому, кратному этим числам



Индексы Миллера.

Алгоритм:

- построить плоскость до пересечения с кристаллографическими осями координат
- определить какие отрезки отсекаются от осей координат
- взять обратные числа
- привести их к наименьшему целому, кратному этим числам



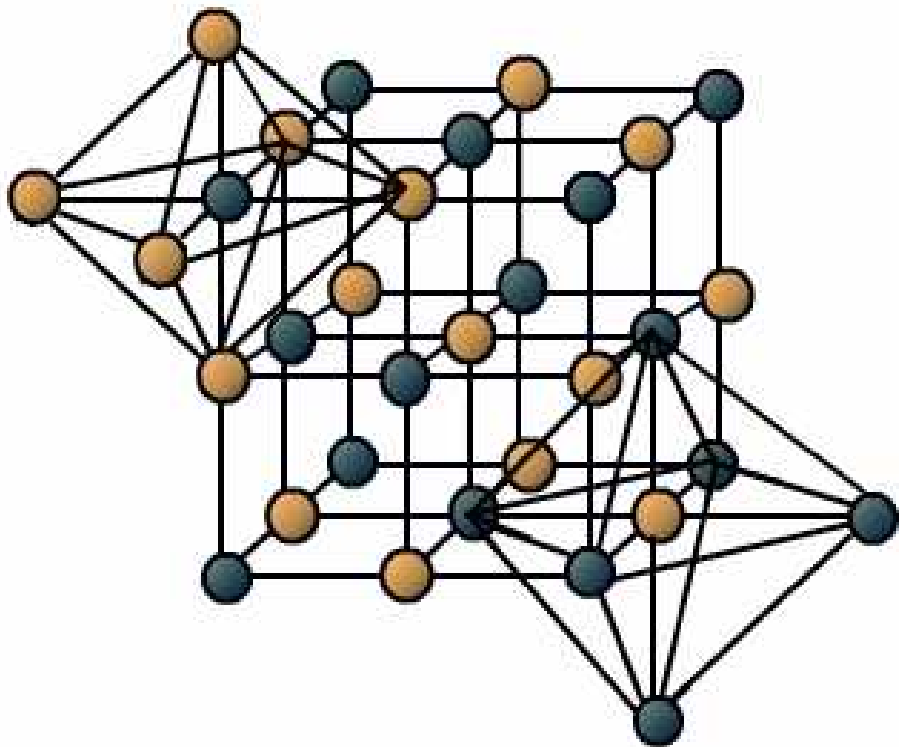
1;2;3

1;1/2;1/3

6;3;2

Ответ: (632)

Пример 1: Структура NaCl



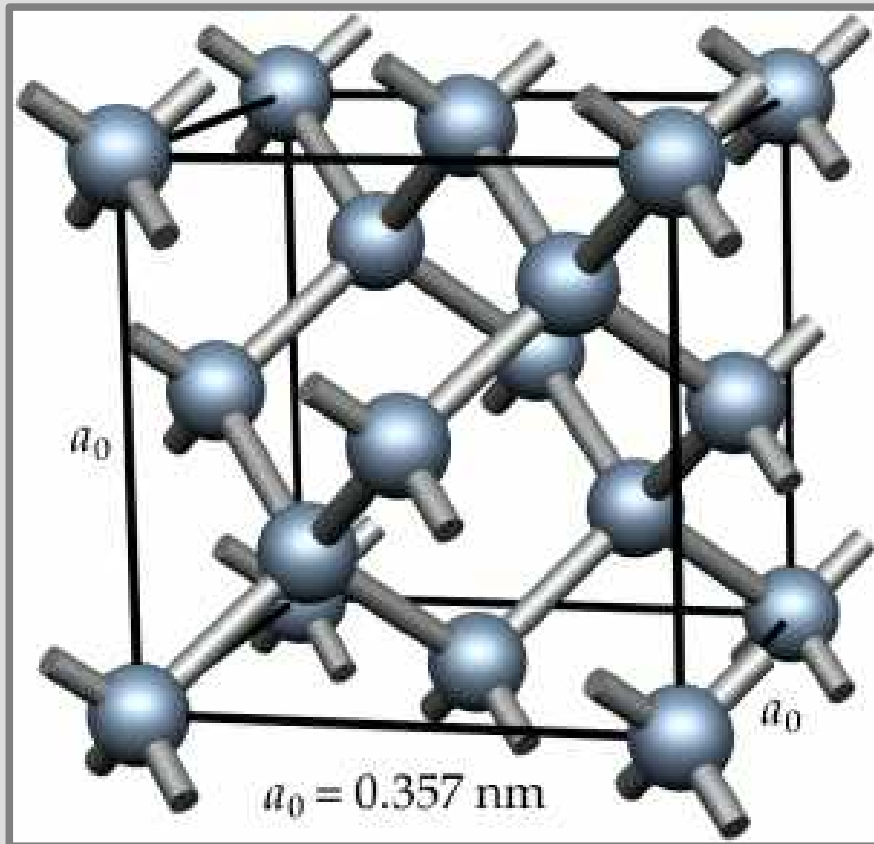
Решётка Браве этой структуры — кубическая гранецентрированная с периодом 5.64 Å.

Базис состоит из двух атомов:

- атомы натрия (0;0;0)
- атомы хлора ($1/2;1/2;1/2$)

Слева: структура NaCl (с сайта <http://chemistry.tutorvista.com/inorganic-chemistry/crystal-structure.html>), атомы хлора отмечены оранжевым, атомы натрия — синим.

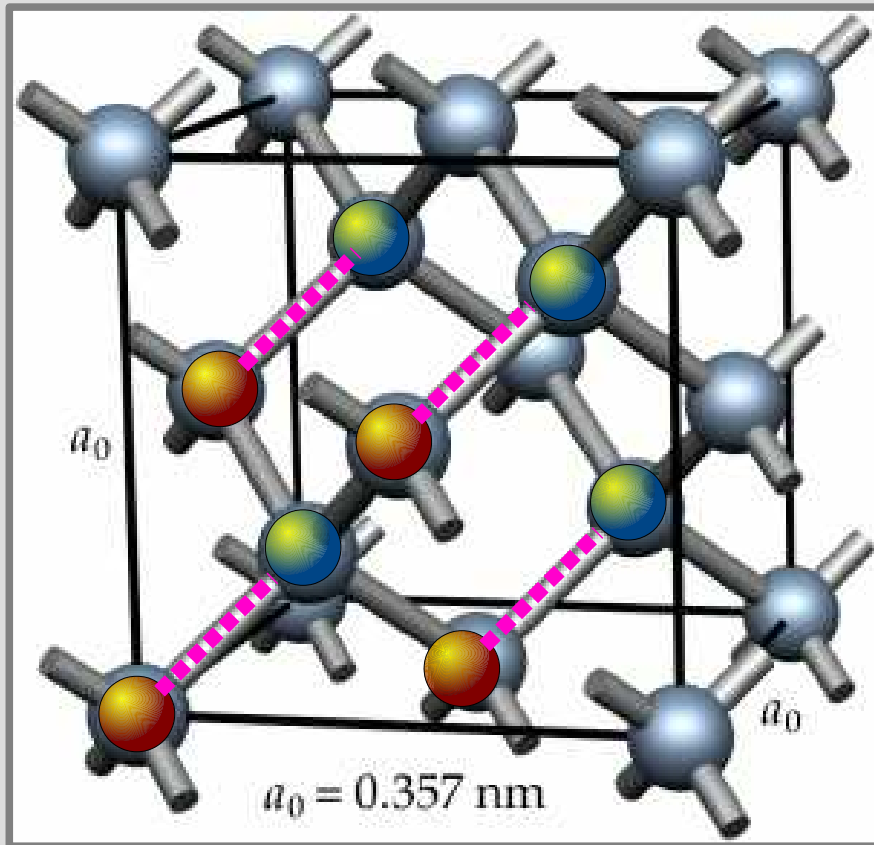
Пример 2: Структура алмаза



Решётка алмаза является кубической гранецентрированной.

Сторона элементарного куба равна 3.57 \AA . Базис состоит из двух атомов углерода в позициях $0;0;0$ и $1/4;1/4;1/4$

Пример 2: Структура алмаза



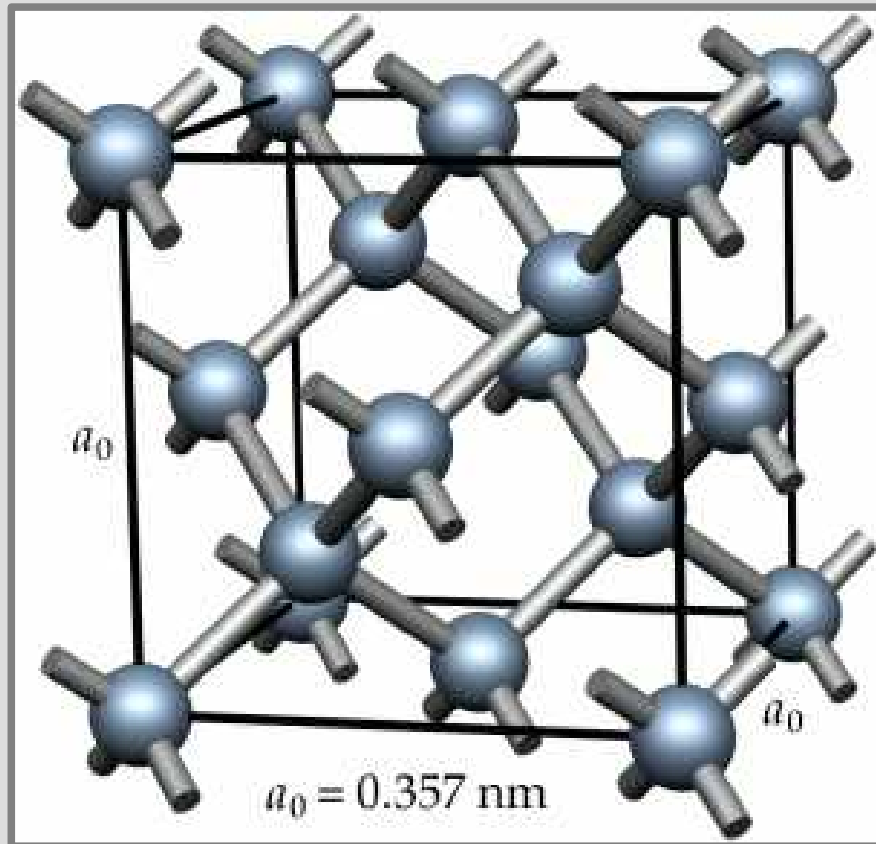
Решётка алмаза является кубической гранецентрированной.

Сторона элементарного куба равна 3.57\AA . Базис состоит из двух атомов углерода в позициях $(0;0;0)$ и $(1/4;1/4;1/4)$

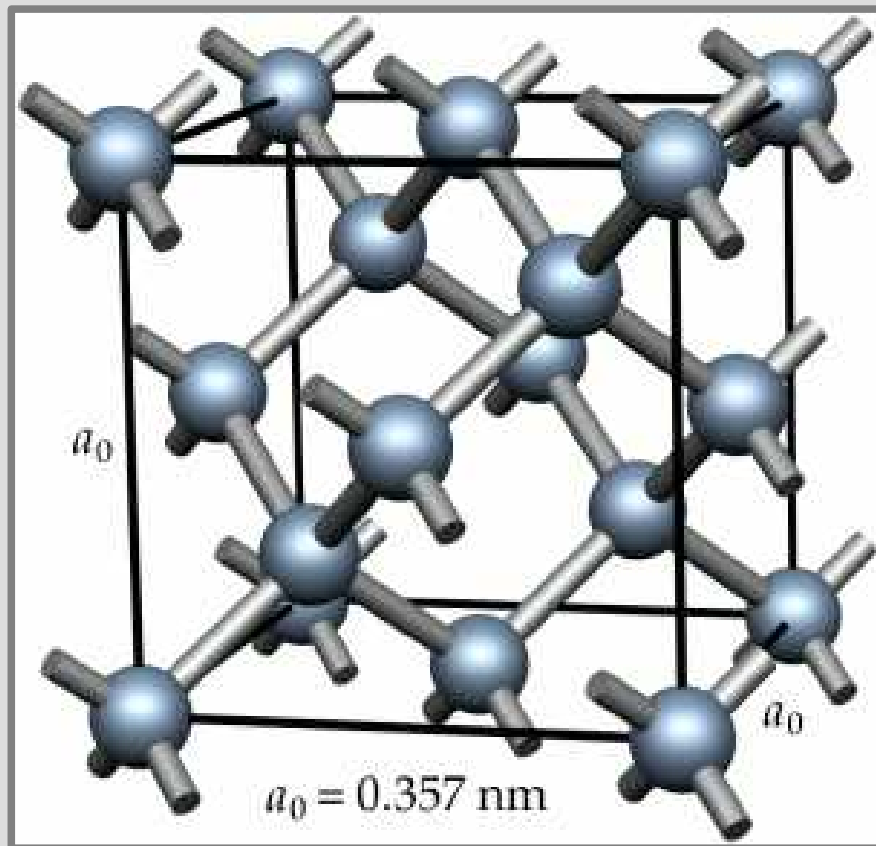
Базис выделен для наглядности. «Красные» атомы: в вершине и центрах граней.



Часть 2. Дифракция на кристалле.



Кристалл как дифракционная решетка



Рентгеновское
излучение, 10 кэВ

$$\lambda = \frac{h c}{E} \simeq 0.12 \text{ нм}$$

Тепловые нейтроны,
25 мэВ

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2 m E}} \simeq 0.18 \text{ нм}$$

Кристалл как дифракционная решетка

Рассеяние на
электронах

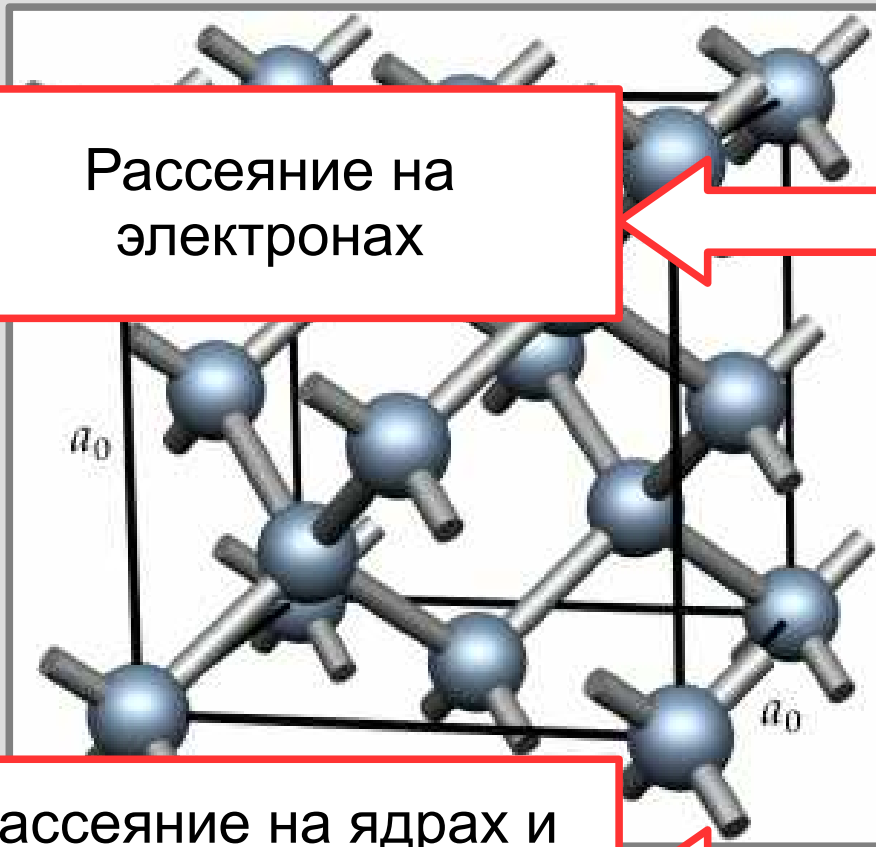
Рентгеновское
излучение, 10 кэВ

$$\lambda = \frac{h c}{E} \simeq 0.12 \text{ нм}$$

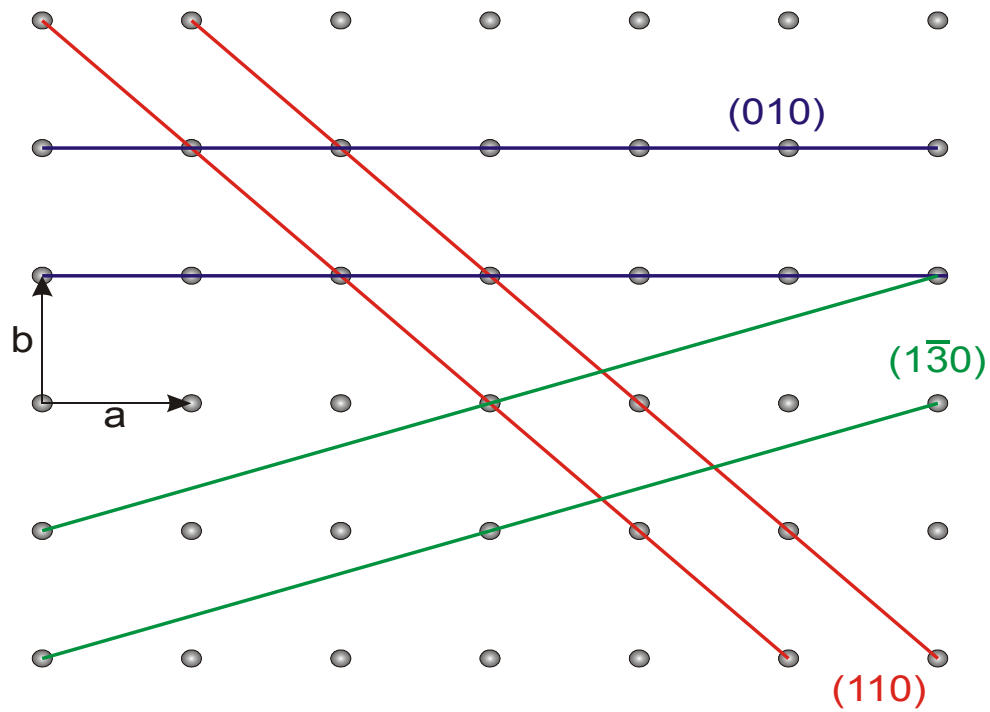
Рассеяние на ядрах и
на магнитных моментах
атомов

Тепловые нейтроны,
25 мэВ

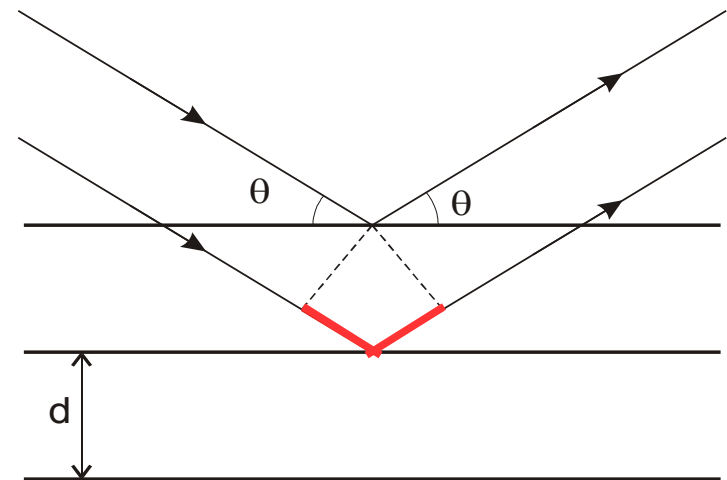
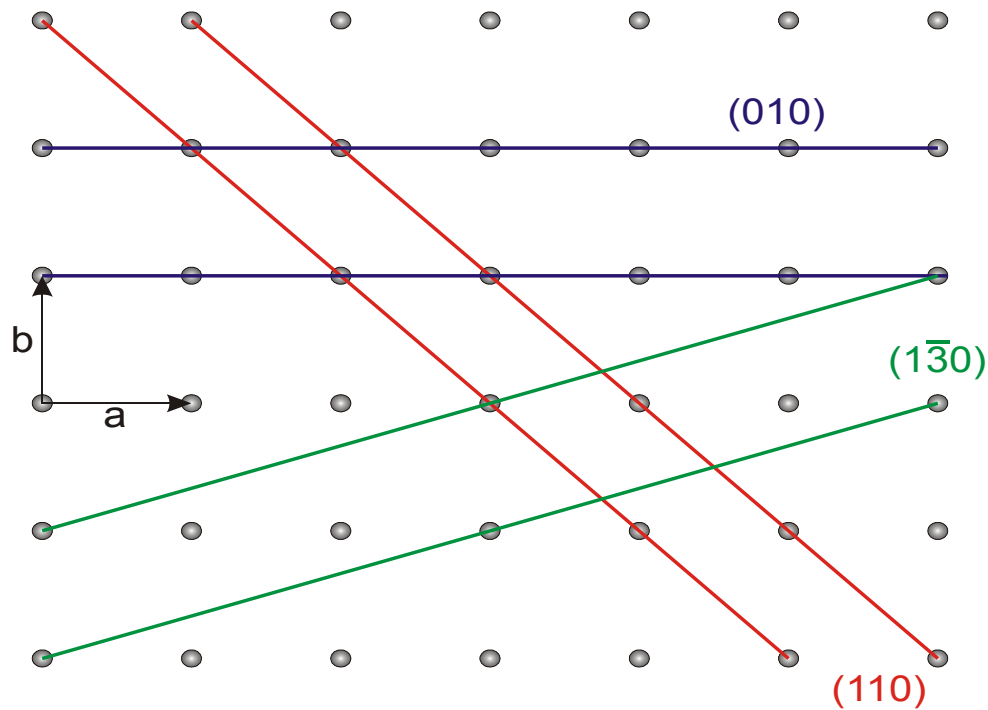
$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2 m E}} \simeq 0.18 \text{ нм}$$



Условие Брэгга-Вульфа

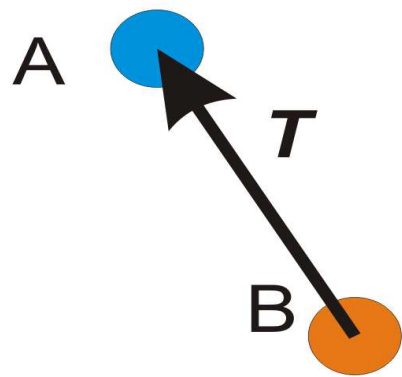


Условие Брэгга-Вульфа

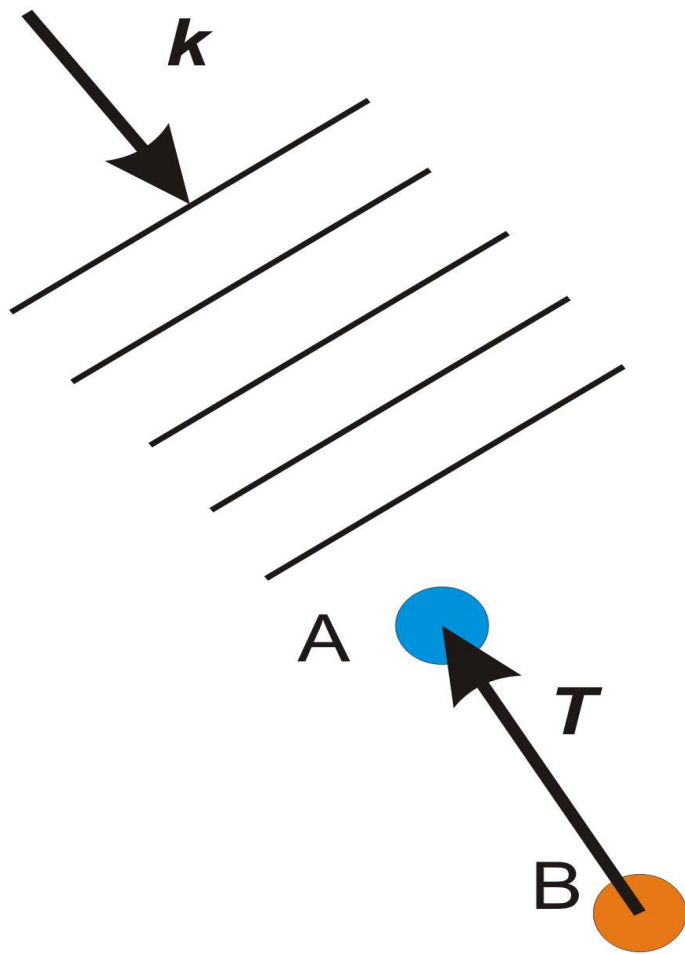


$$2d \sin \Theta = n\lambda$$

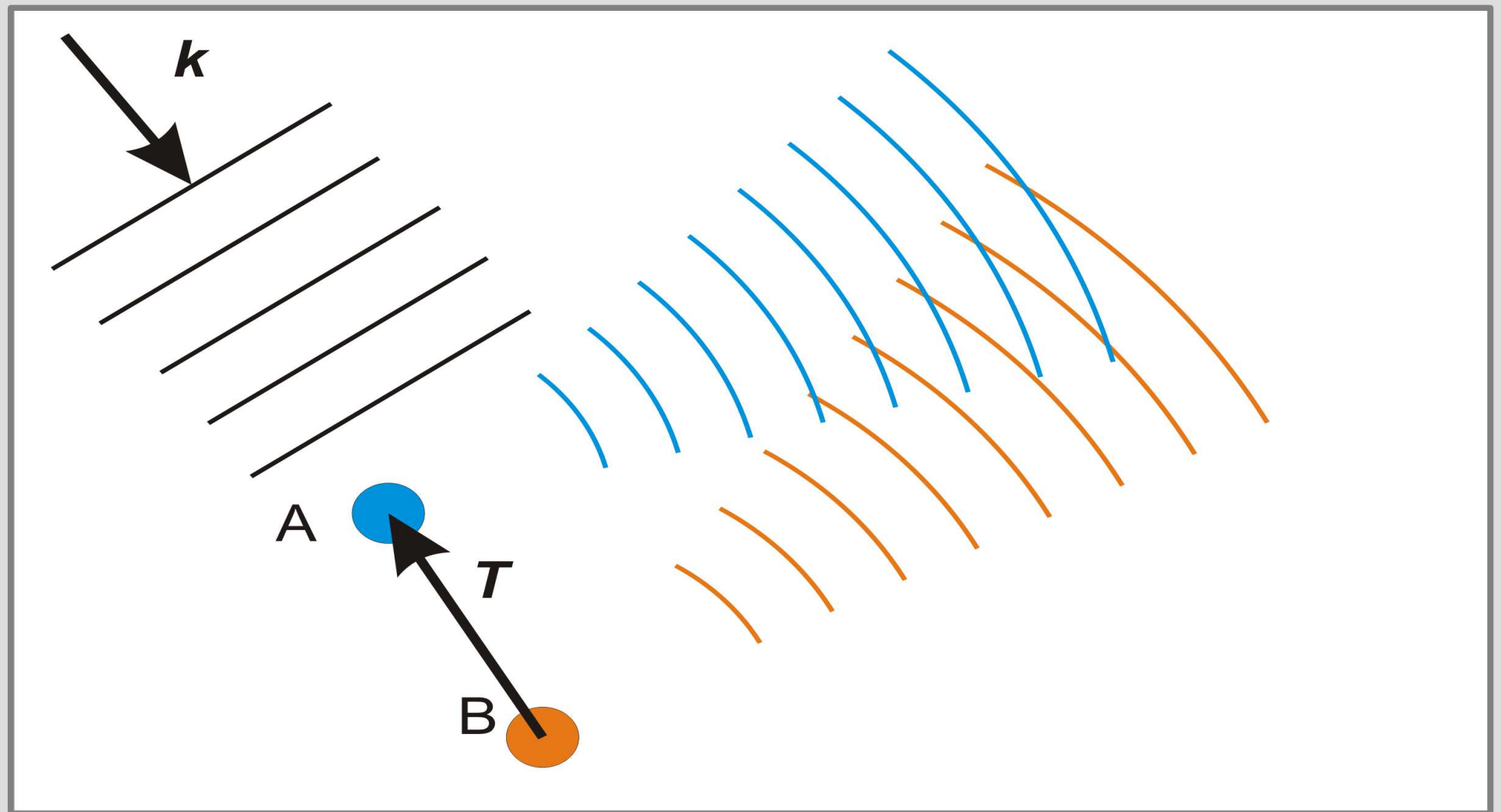
Дифракция на кристалле



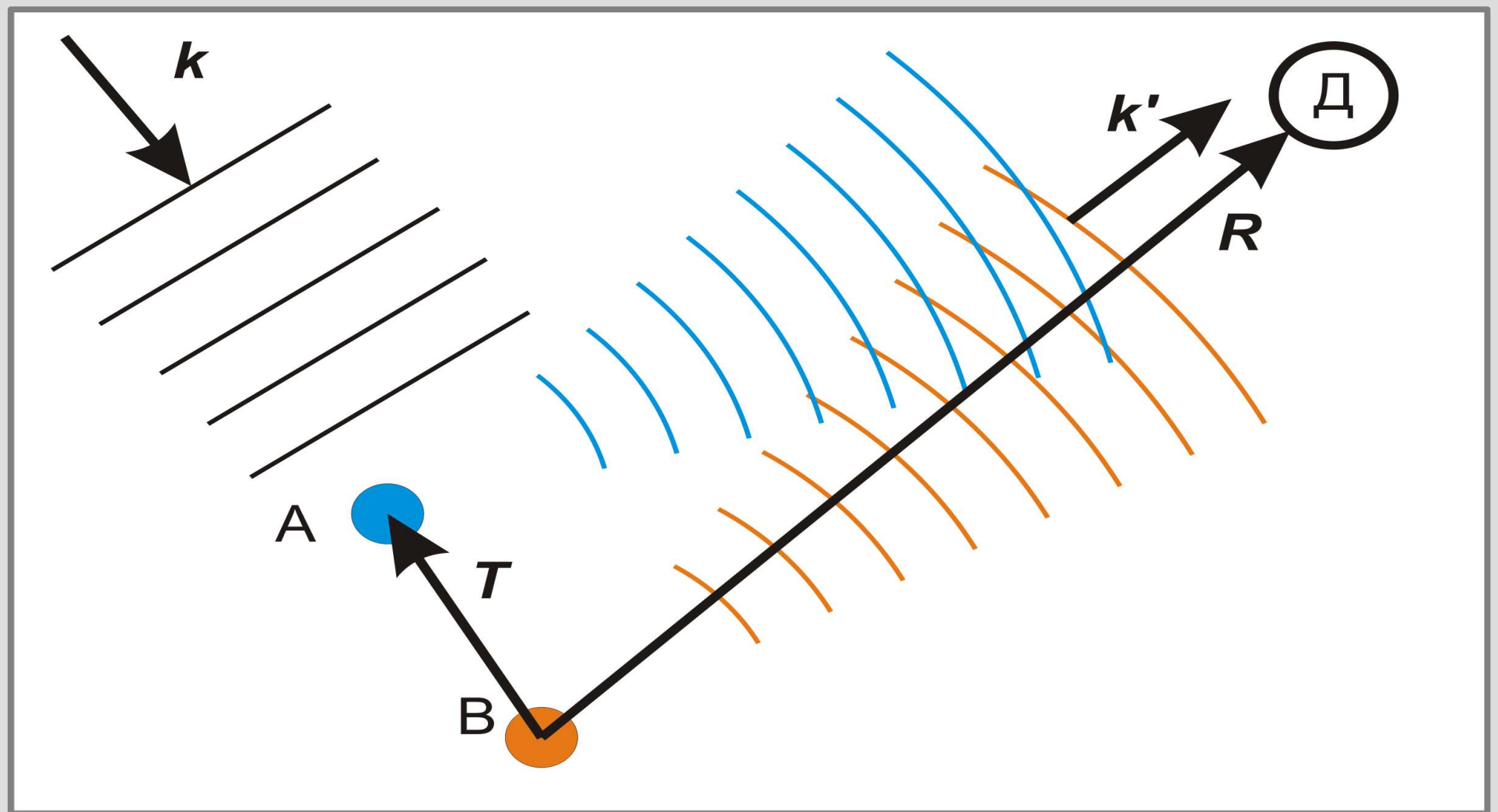
Дифракция на кристалле



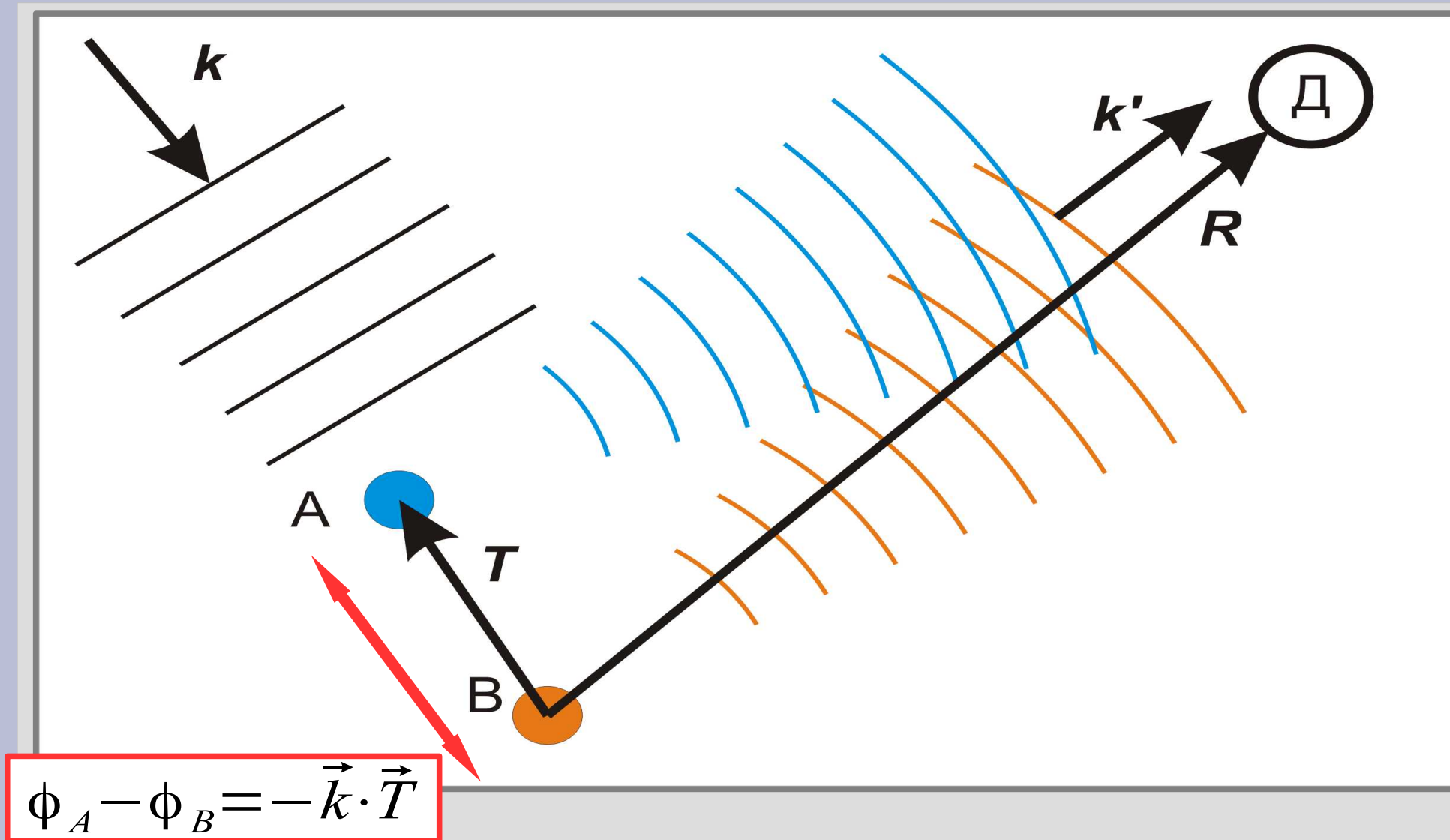
Дифракция на кристалле



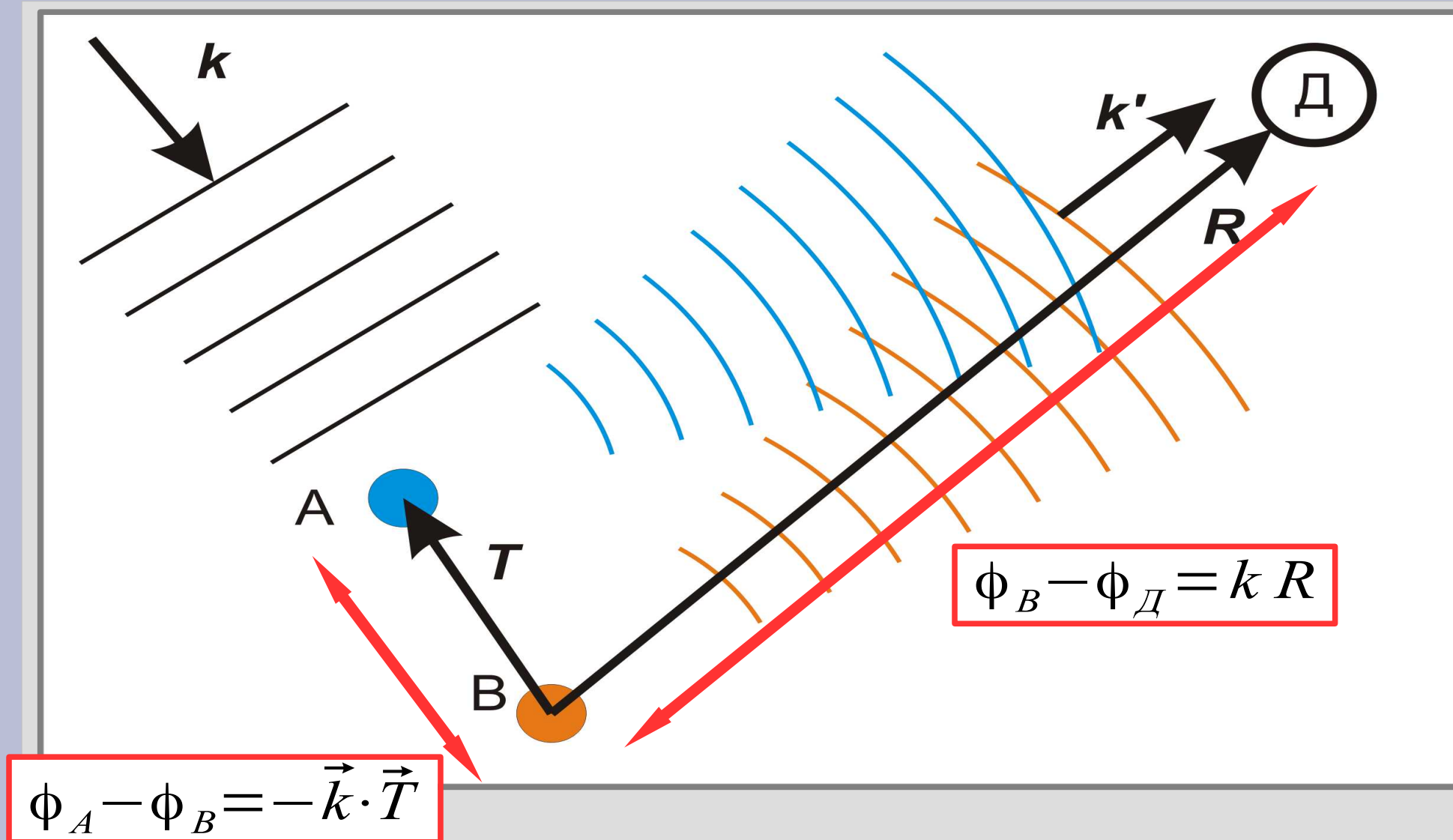
Дифракция на кристалле



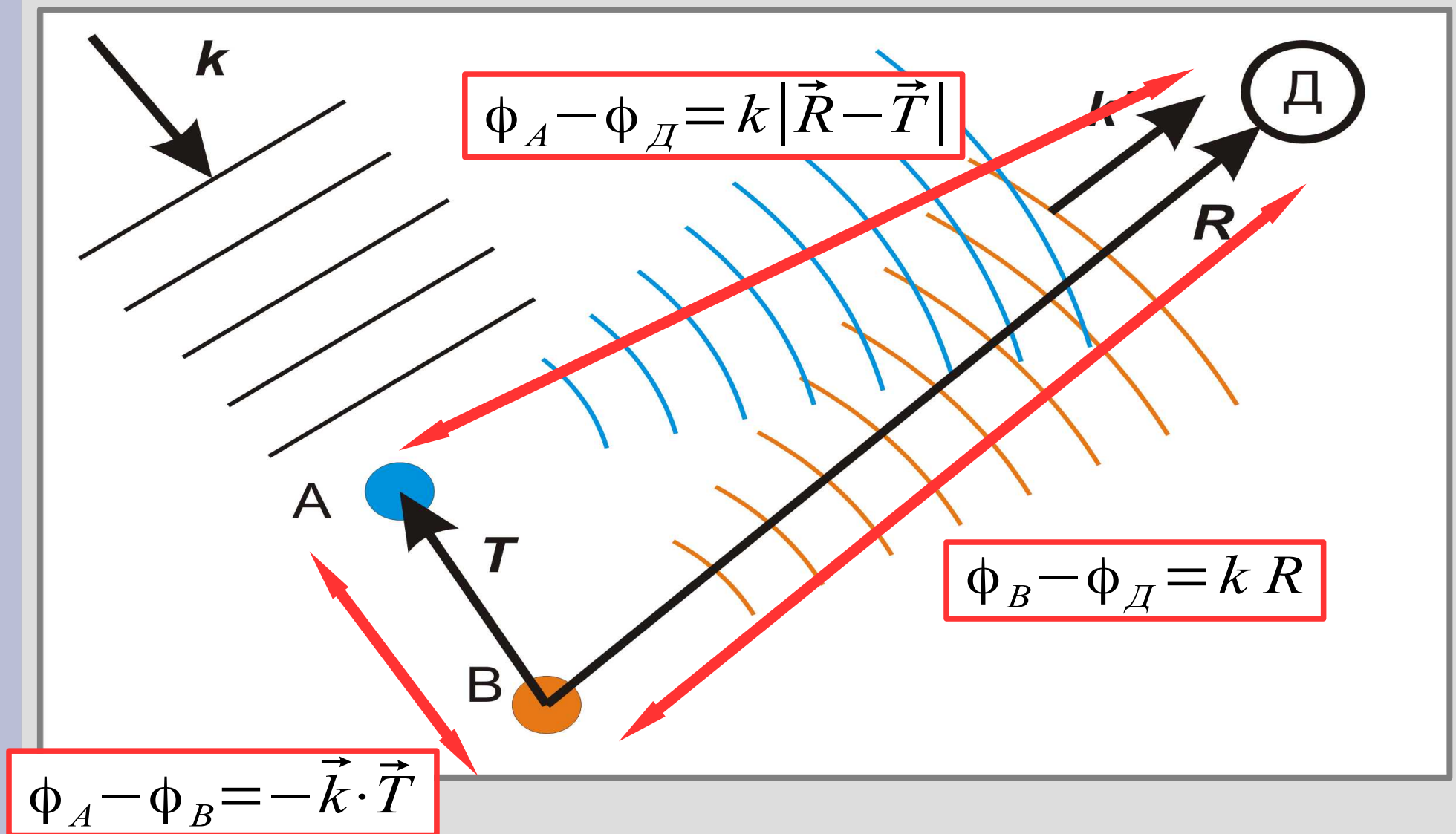
Дифракция на кристалле



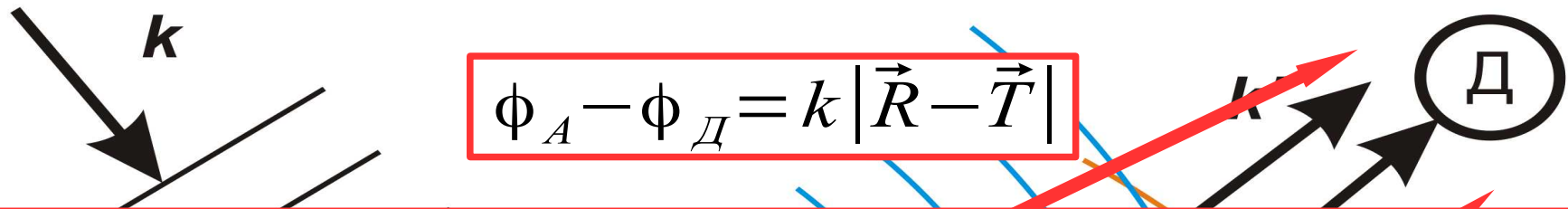
Дифракция на кристалле



Дифракция на кристалле

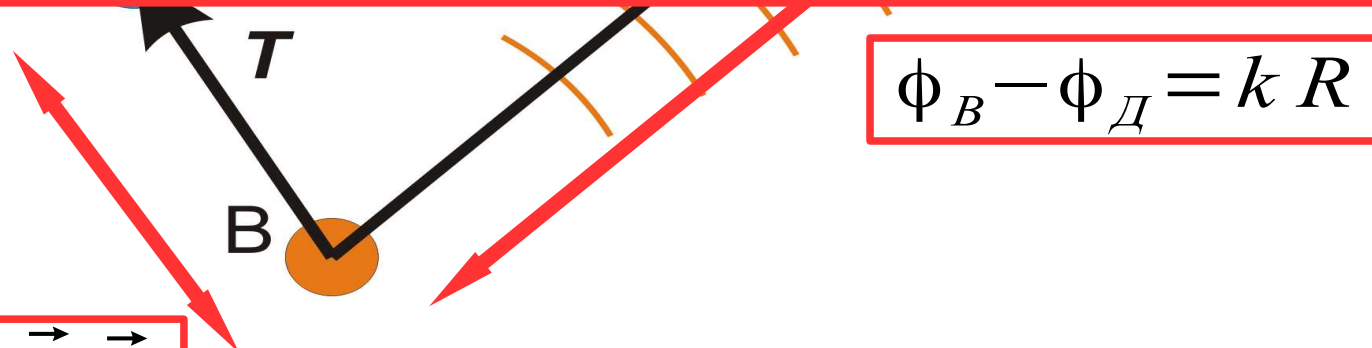


Дифракция на кристалле



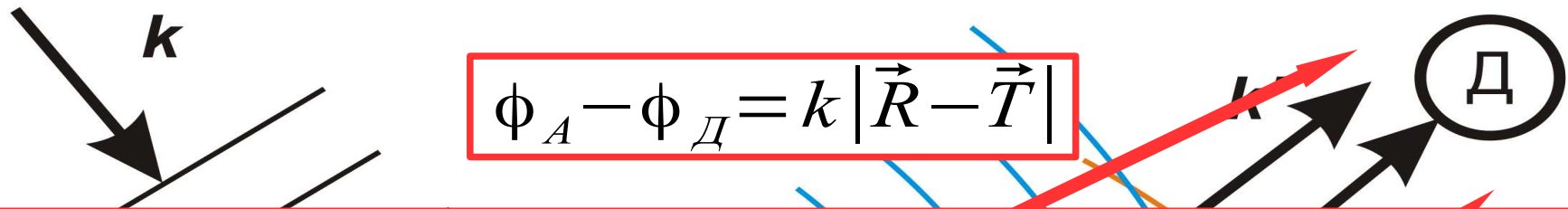
Суммарная разность фаз на детекторе

$$\Delta \phi = k |\vec{R} - \vec{T}| - (k R - \vec{k} \cdot \vec{T}) = k \sqrt{(\vec{R} - \vec{T})^2} - k R + \vec{k} \cdot \vec{T}$$



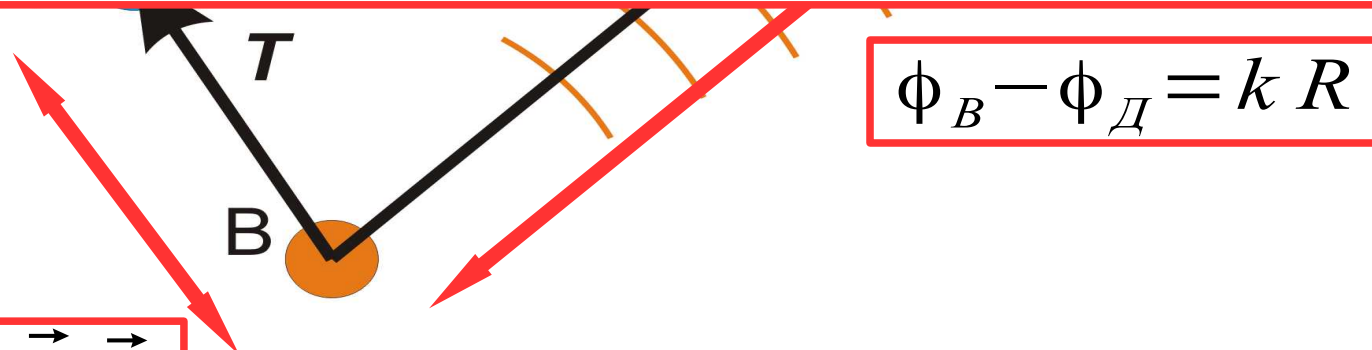
$$\phi_A - \phi_B = -\vec{k} \cdot \vec{T}$$

Дифракция на кристалле



Суммарная разность фаз на детекторе

$$\begin{aligned} \Delta \phi &= k |\vec{R} - \vec{T}| - (k R - \vec{k} \cdot \vec{T}) = k \sqrt{(\vec{R} - \vec{T})^2} - k R + \vec{k} \cdot \vec{T} \approx \\ &\approx \vec{k} \cdot \vec{T} - k \frac{(\vec{R} \cdot \vec{T})}{R} = (\vec{k} - \vec{k}') \cdot \vec{T} \end{aligned}$$



$$\phi_A - \phi_B = -\vec{k} \cdot \vec{T}$$

Обратная решётка

$$\vec{a}^* = 2\pi \frac{[\vec{b} \times \vec{c}]}{(\vec{a} [\vec{b} \times \vec{c}])}$$

$$\vec{b}^* = 2\pi \frac{[\vec{c} \times \vec{a}]}{(\vec{a} [\vec{b} \times \vec{c}])}$$

$$\vec{c}^* = 2\pi \frac{[\vec{a} \times \vec{b}]}{(\vec{a} [\vec{b} \times \vec{c}])}$$

Обратная решётка

$$\vec{a}^* = 2\pi \frac{[\vec{b} \times \vec{c}]}{(\vec{a} [\vec{b} \times \vec{c}])}$$

$$\vec{b}^* = 2\pi \frac{[\vec{c} \times \vec{a}]}{(\vec{a} [\vec{b} \times \vec{c}])}$$

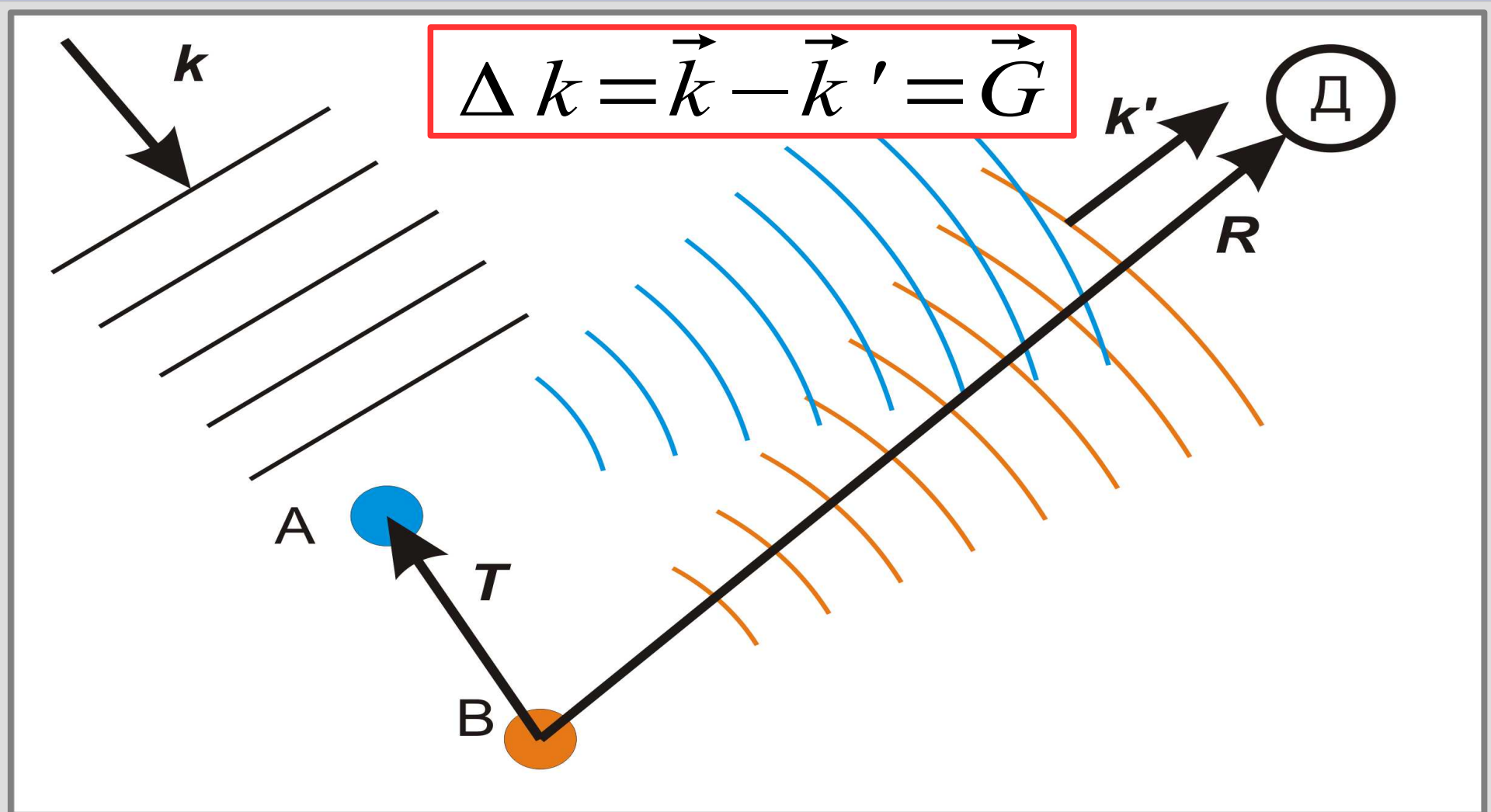
$$\vec{c}^* = 2\pi \frac{[\vec{a} \times \vec{b}]}{(\vec{a} [\vec{b} \times \vec{c}])}$$

Если $\vec{k} - \vec{k}' = p_1 \vec{a}^* + p_2 \vec{b}^* + p_3 \vec{c}^* = \vec{G}$

то условие дифракции выполнено!!!

$$\begin{aligned} (\vec{k} - \vec{k}') (n_1 \vec{a} + n_2 \vec{b} + n_3 \vec{c}) &= \\ &= 2\pi (p_1 n_1 + p_2 n_2 + p_3 n_3) \end{aligned}$$

Необходимое условие дифракции



Зона Бриллюэна

$$\vec{k} - \vec{k}' = \vec{G}$$

$$\vec{k}' = \vec{k} - \vec{G}$$

$$G^2 = 2 \vec{k} \cdot \vec{G}$$

Зона Бриллюэна

$$\vec{k} - \vec{k}' = \vec{G}$$

$$\vec{k}' = \vec{k} - \vec{G}$$

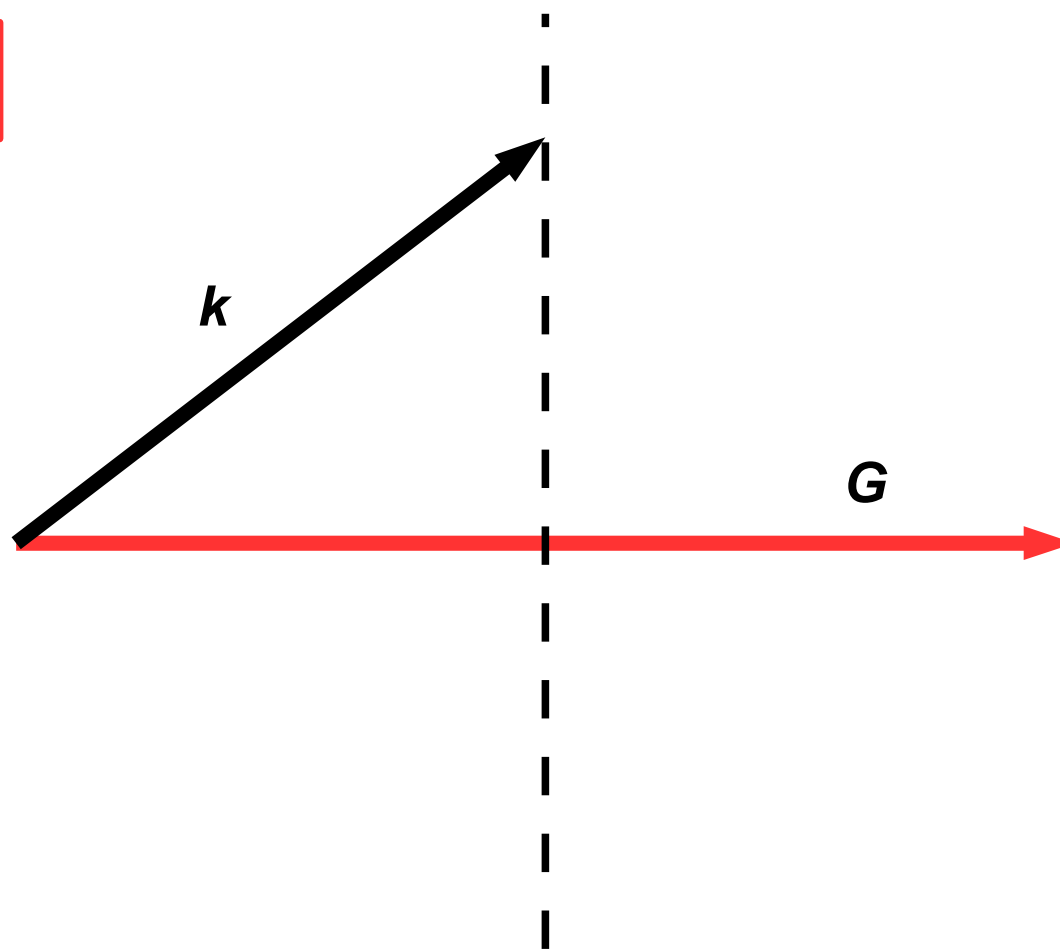
$$G^2 = 2 \vec{k} \cdot \vec{G}$$

Зона Бриллюэна

$$\vec{k} - \vec{k}' = \vec{G}$$

$$\vec{k}' = \vec{k} - \vec{G}$$

$$G^2 = 2 \vec{k} \cdot \vec{G}$$

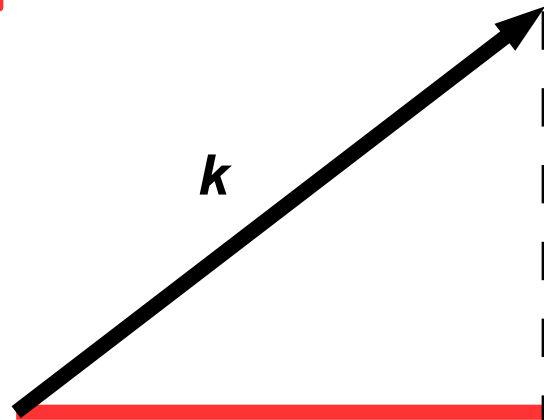


Зона Бриллюэна

$$\vec{k} - \vec{k}' = \vec{G}$$

$$\vec{k}' = \vec{k} - \vec{G}$$

$$G^2 = 2 \vec{k} \cdot \vec{G}$$

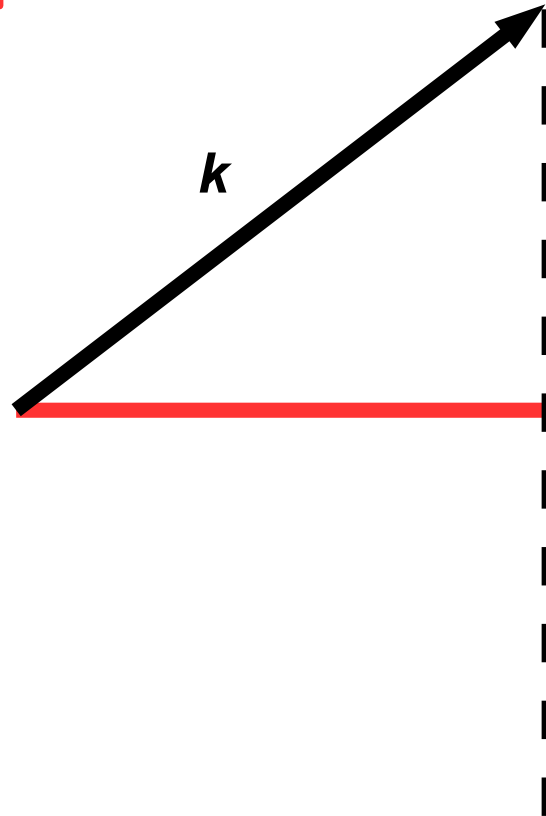


Первая зона Бриллюэна —
ячейка Вигнера-Зейца в
пространстве обратной
решётки.

Зона Бриллюэна

$$\vec{k} - \vec{k}' = \vec{G}$$
$$\vec{k}' = \vec{k} - \vec{G}$$

$$G^2 = 2 \vec{k} \cdot \vec{G}$$



Если конец волнового вектора лежит на границе зоны Бриллюэна — условие дифракции выполнено.

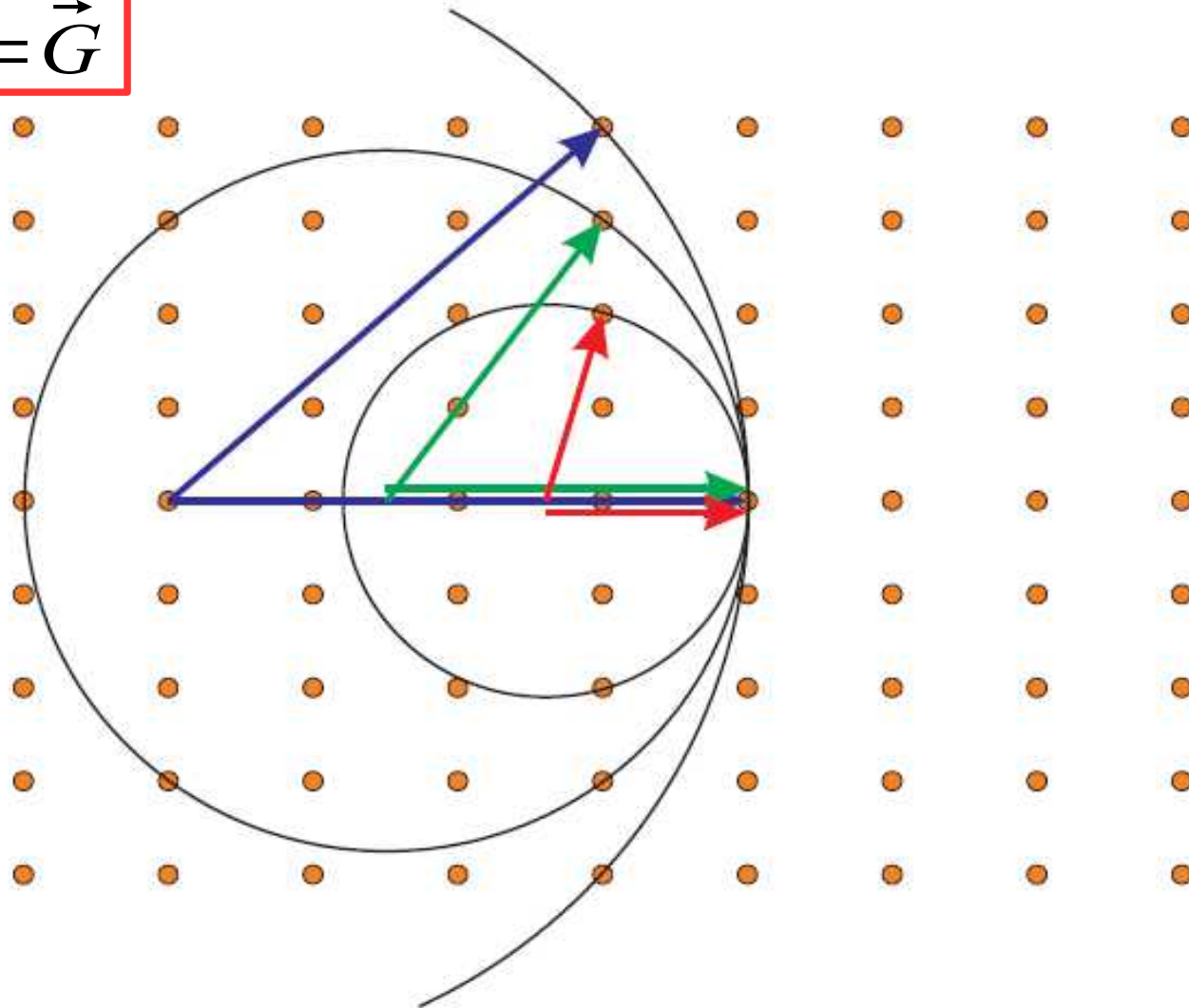
Первая зона Бриллюэна — ячейка Вигнера-Зейца в пространстве обратной решётки.

Дифракция Лауэ: монокристалл в «белом» свете

$$\Delta \vec{k} = \vec{G}$$

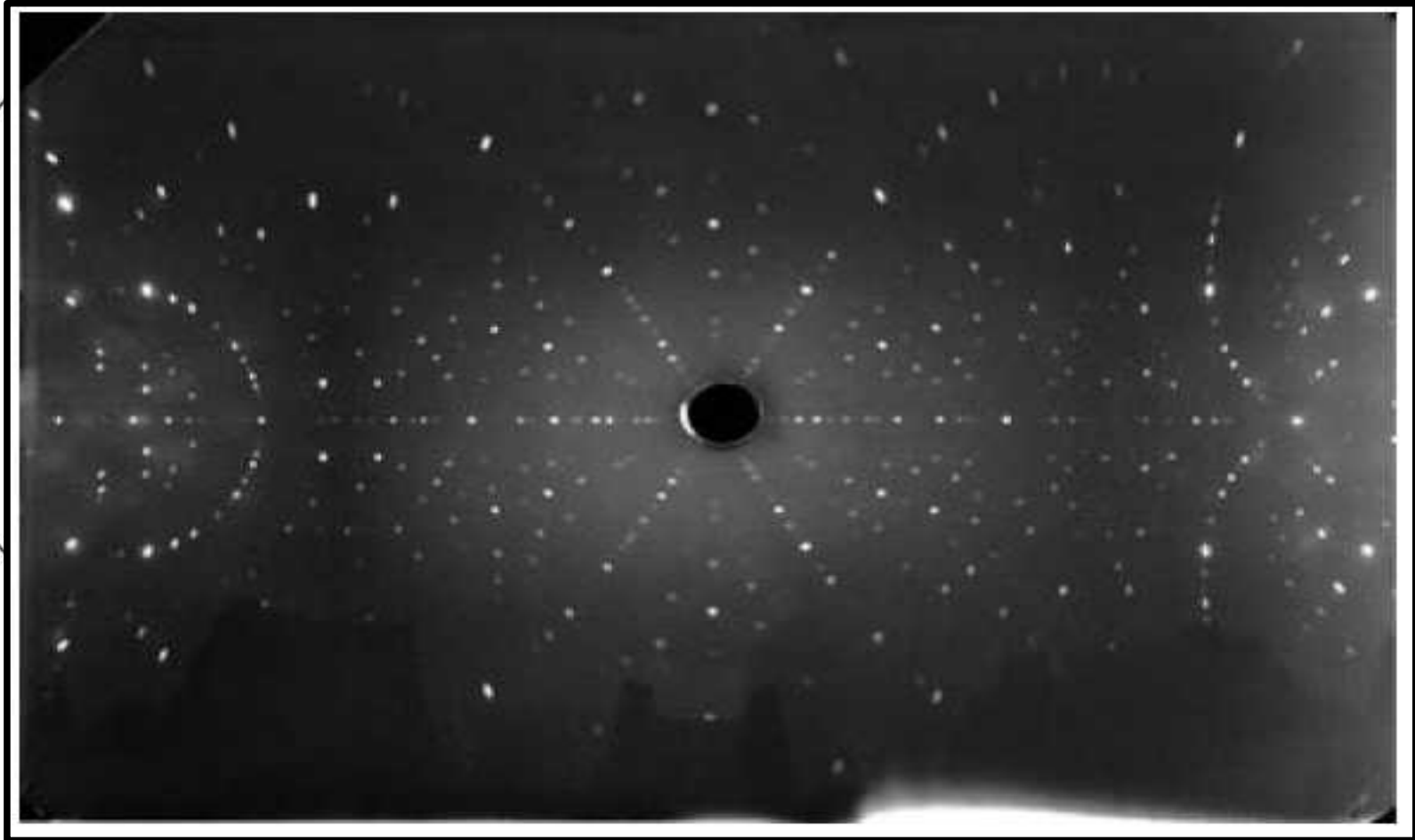
Дифракция Лауэ: монокристалл в «белом» свете

$$\Delta \vec{k} = \vec{G}$$



Дифракция Лауэ: монокристалл в «белом» свете

$$\Delta \vec{k} = \vec{G}$$

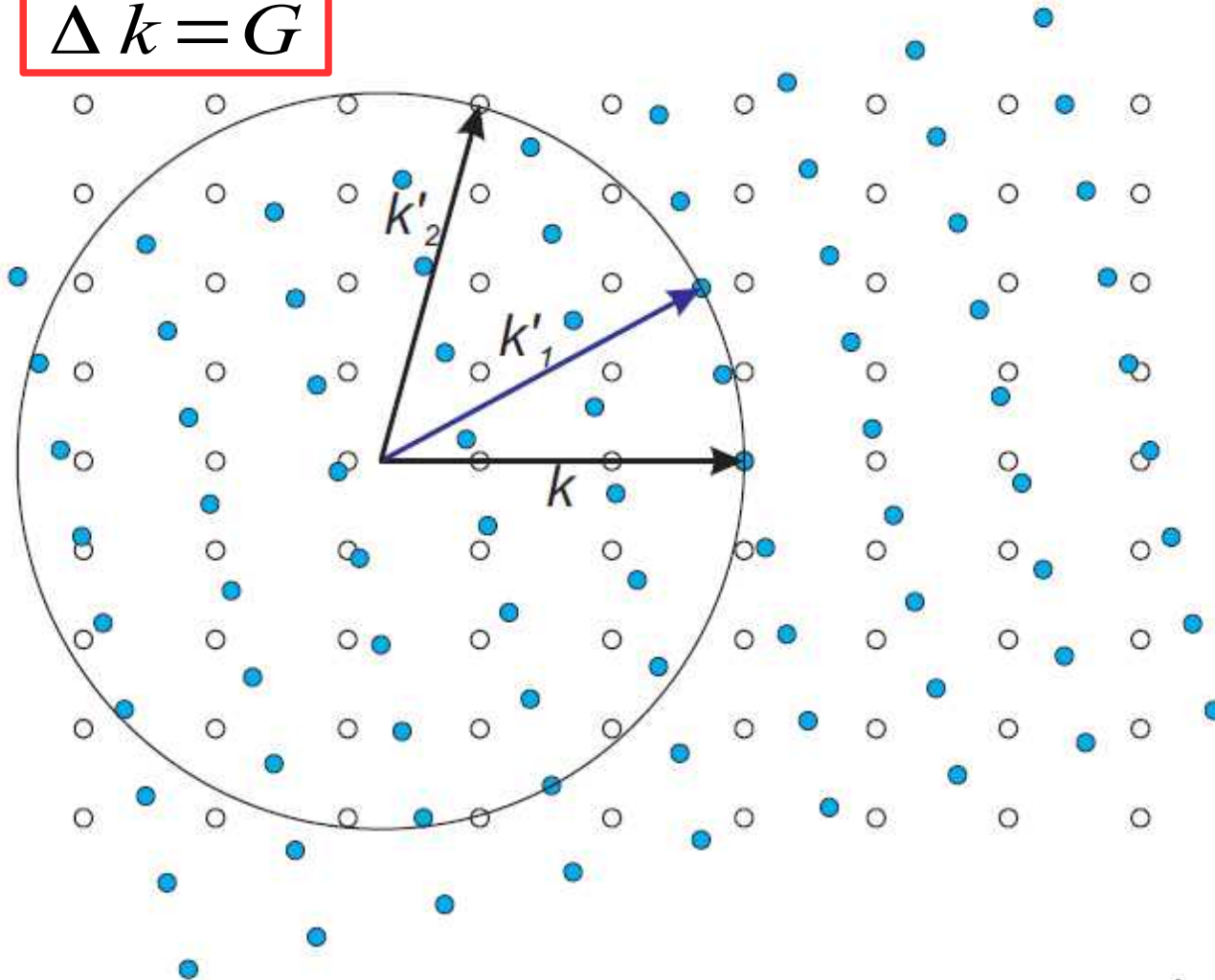


Дифракция Дебая-Шерера: поликристалл в монохроматическом свете

$$\Delta \vec{k} = \vec{G}$$

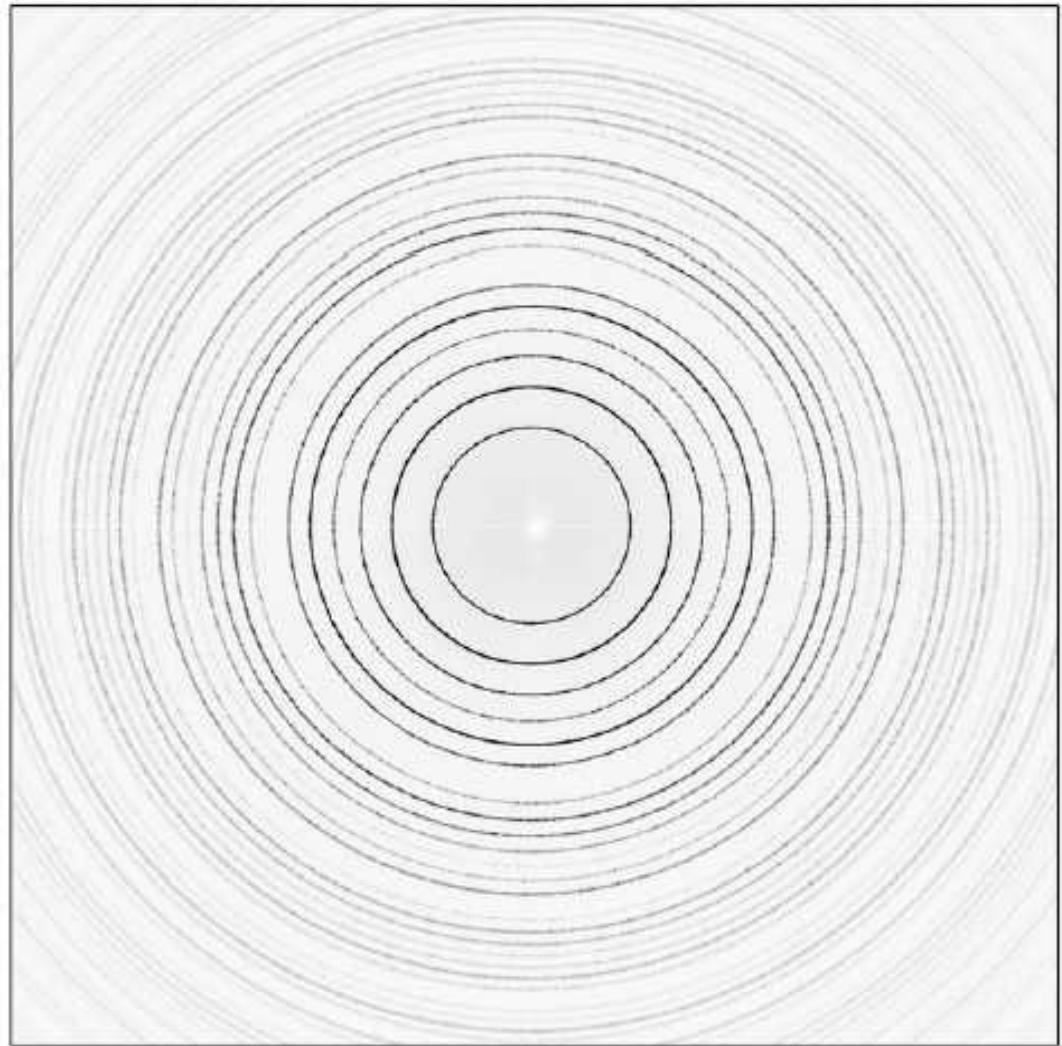
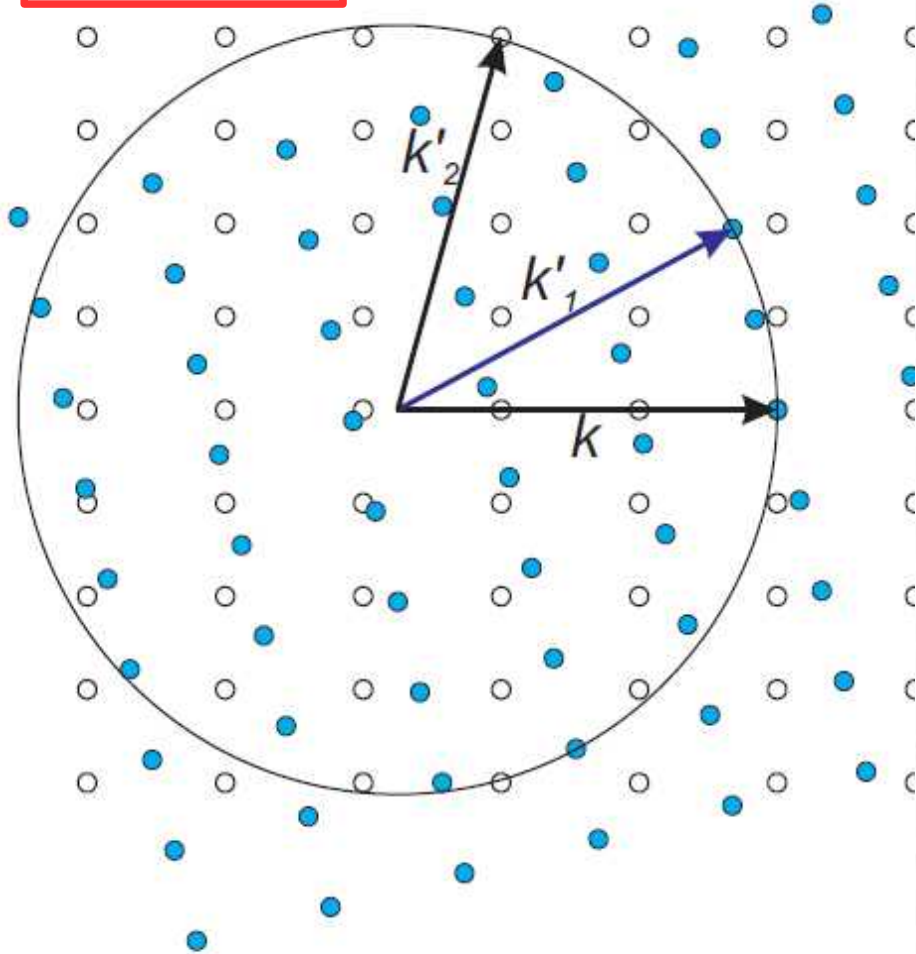
Дифракция Дебая-Шерера: поликристалл в монохроматическом свете

$$\Delta \vec{k} = \vec{G}$$



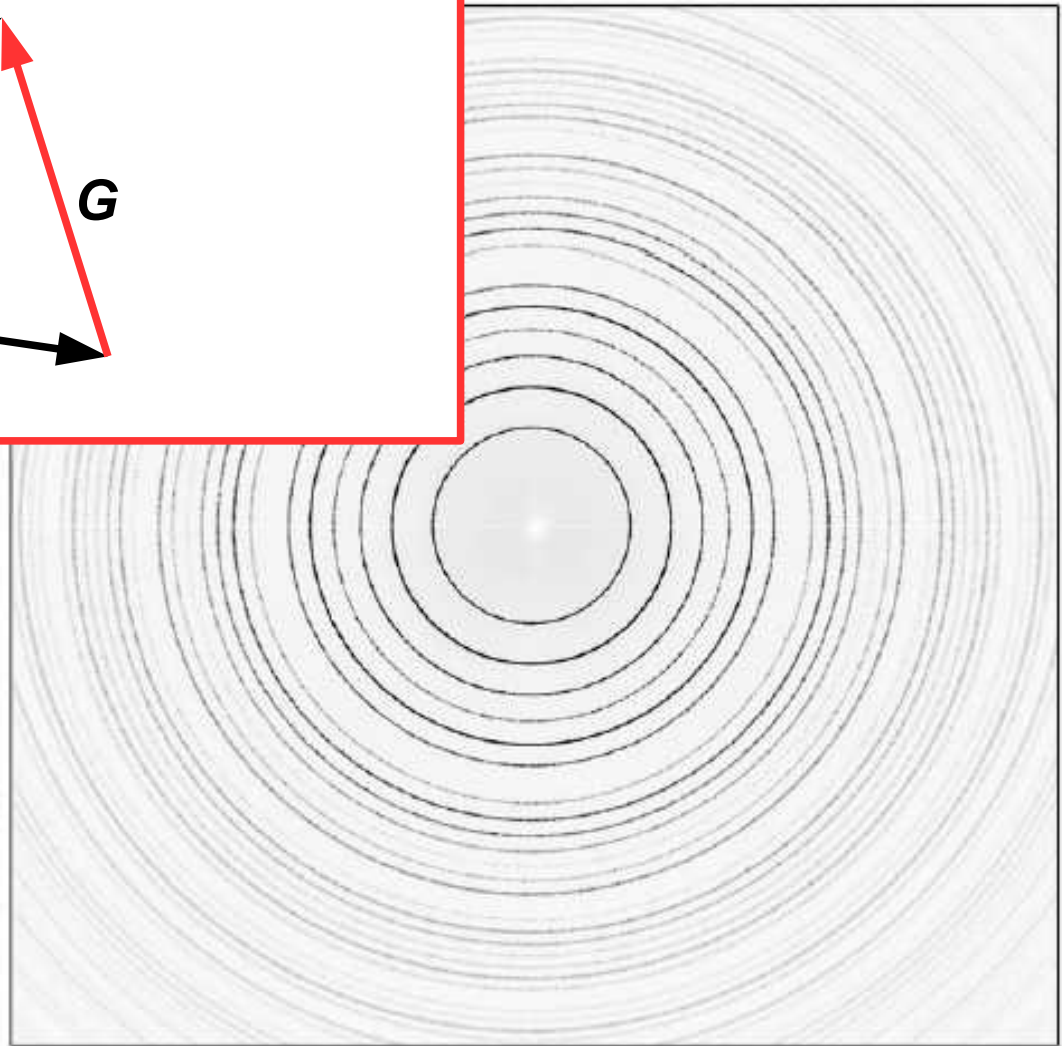
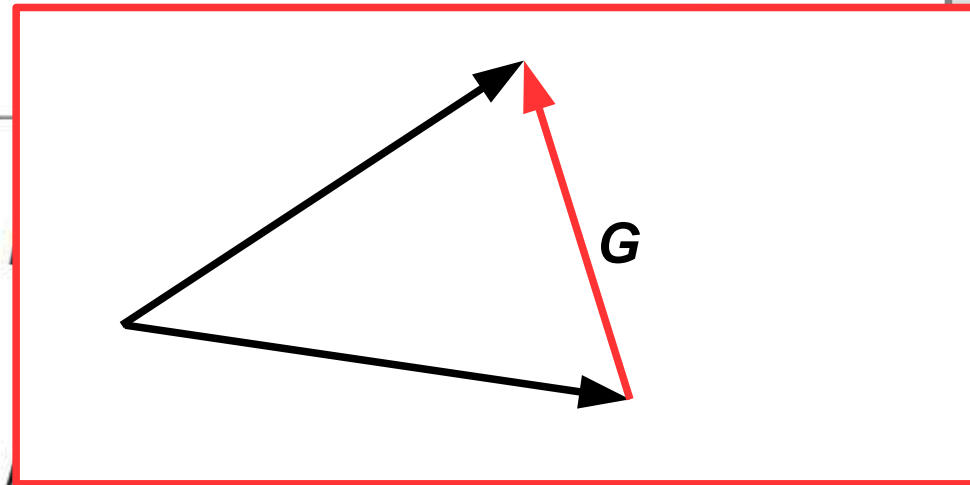
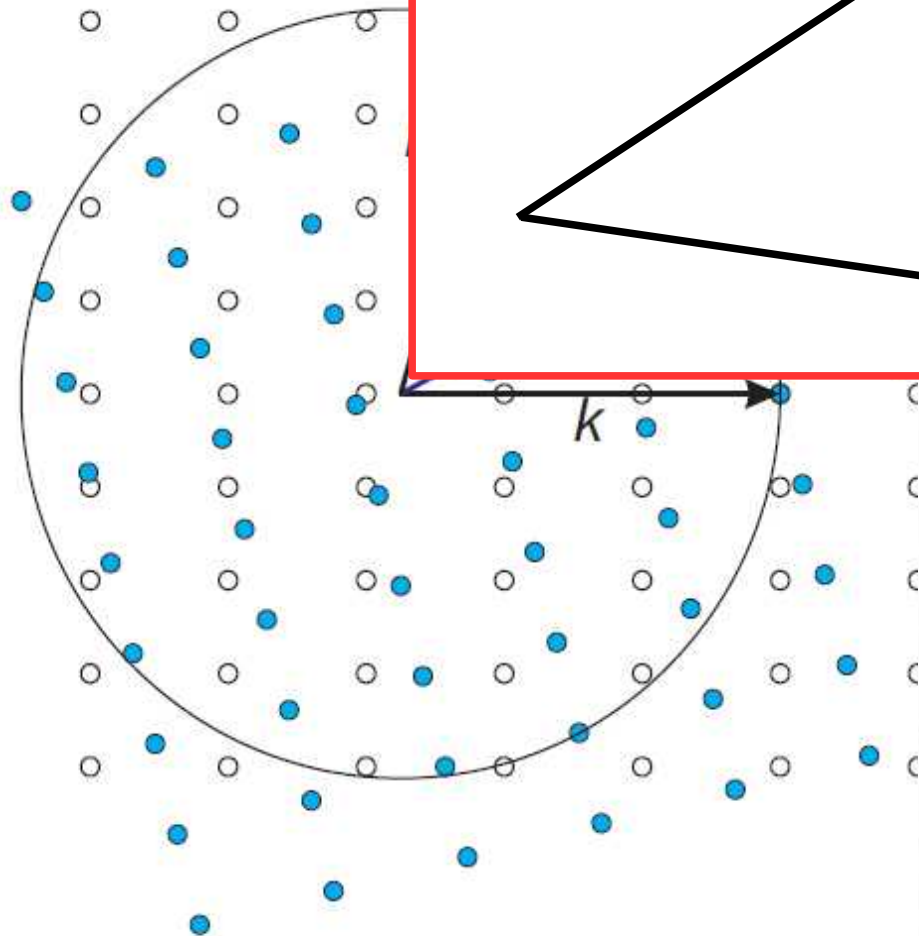
Дифракция Дебая-Шерера: поликристалл в монохроматическом свете

$$\Delta \vec{k} = \vec{G}$$

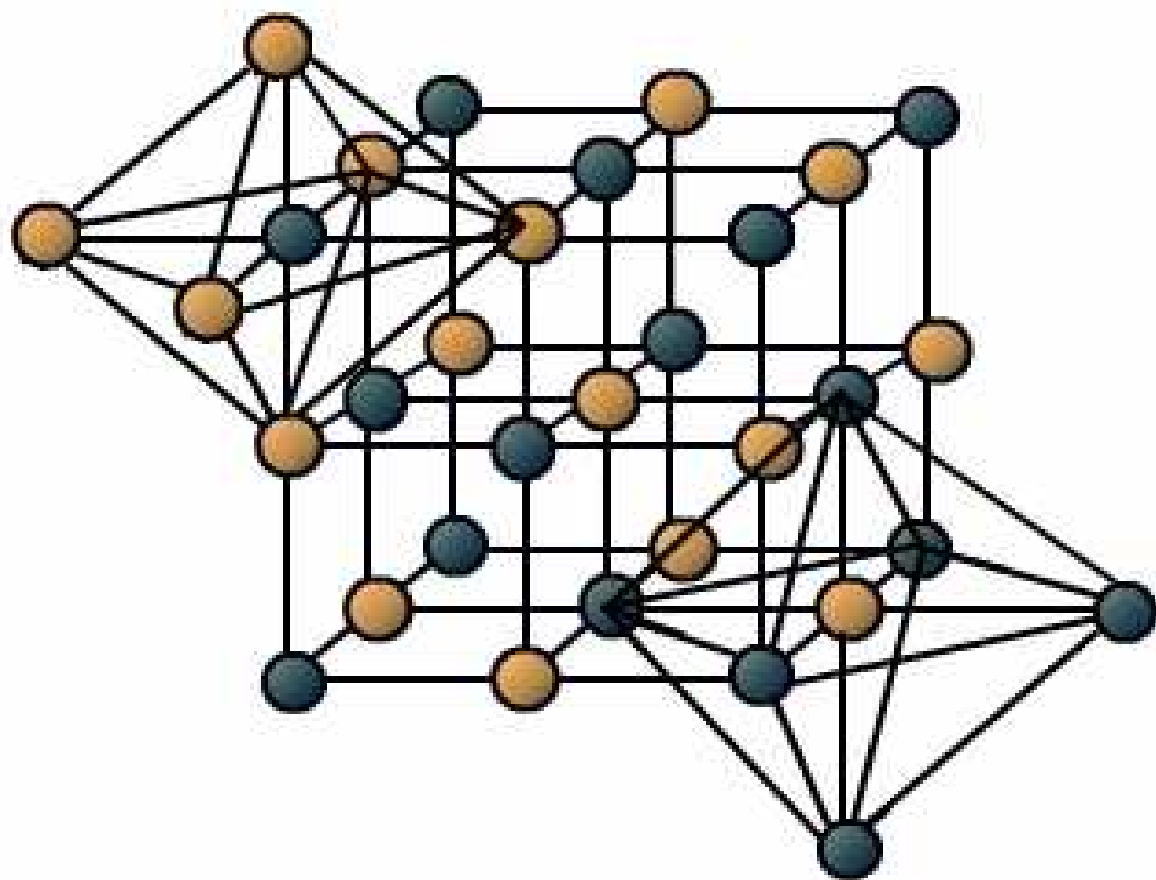


Дифракция Дебая-Шерера: поликристалл в монохроматическом свете

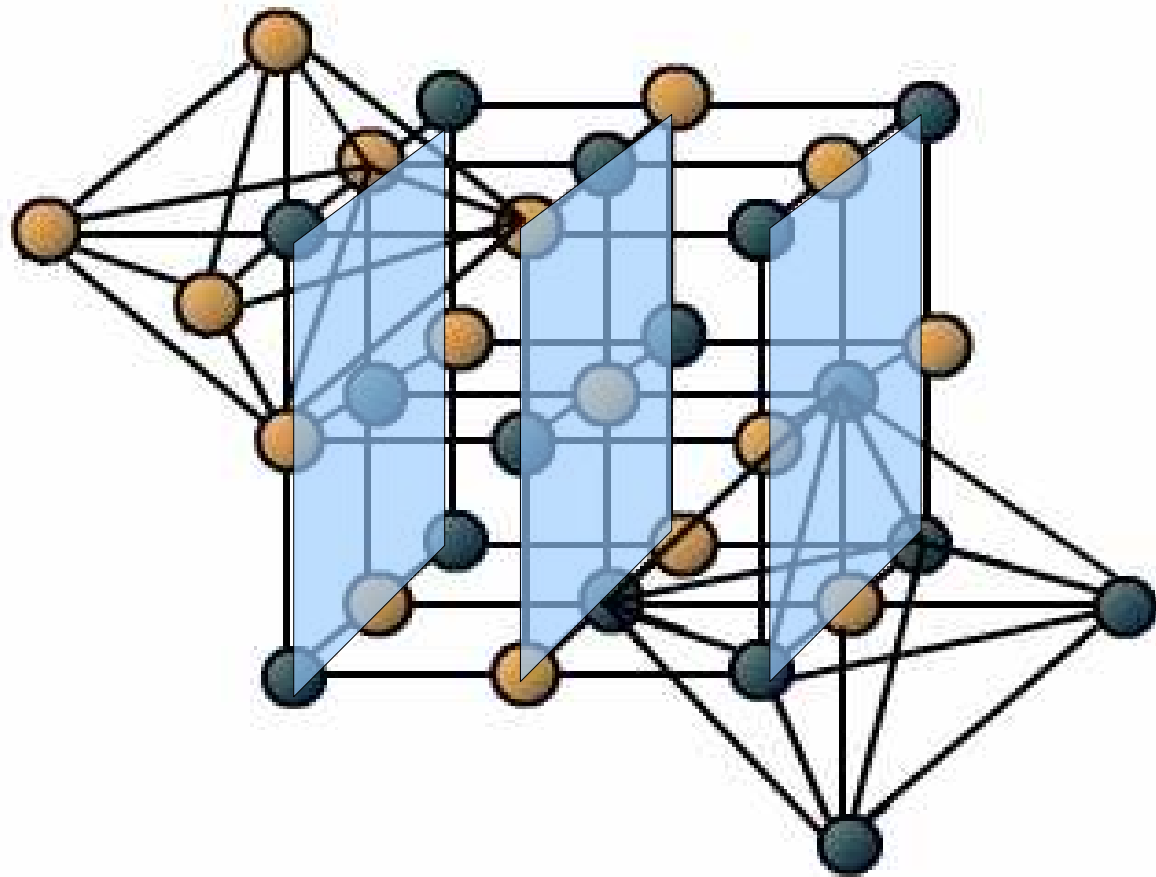
$$\Delta \vec{k} = \vec{G}$$



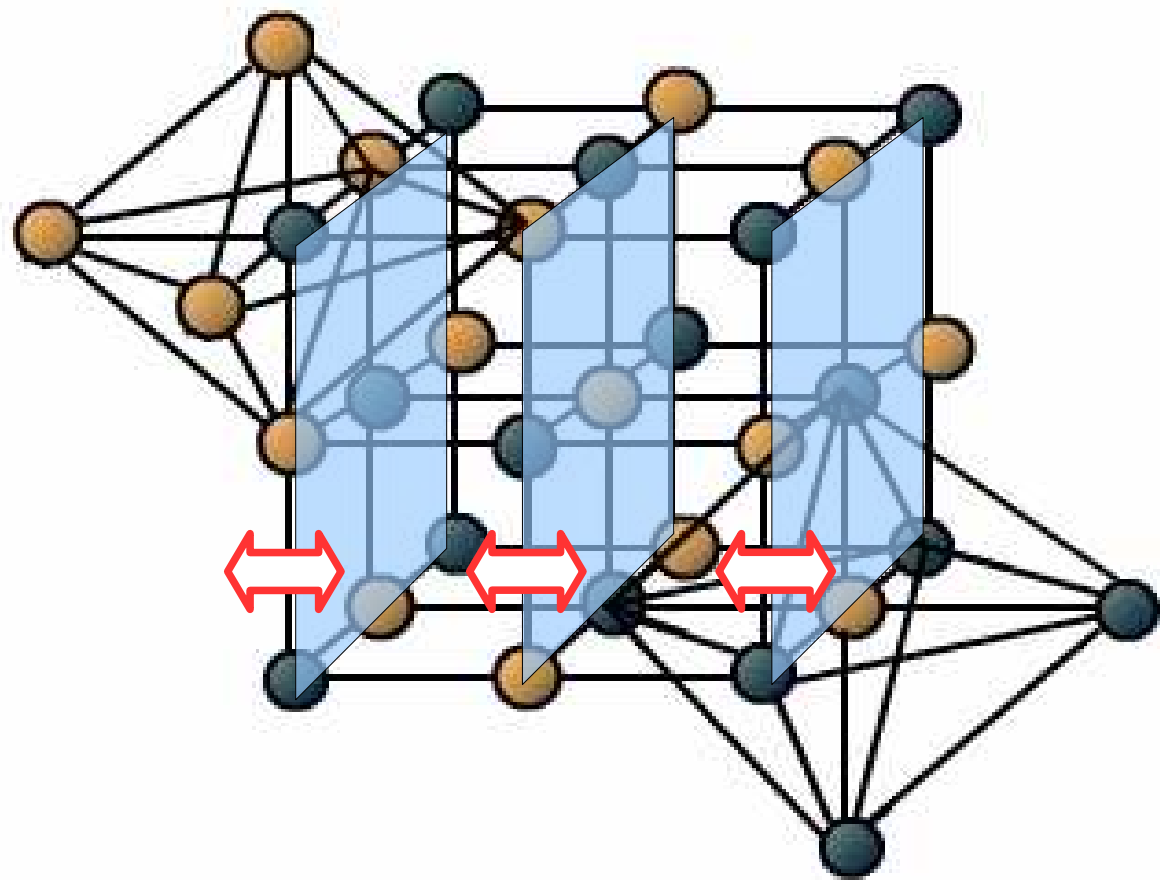
Часть 3. Колебания атомов в кристалле



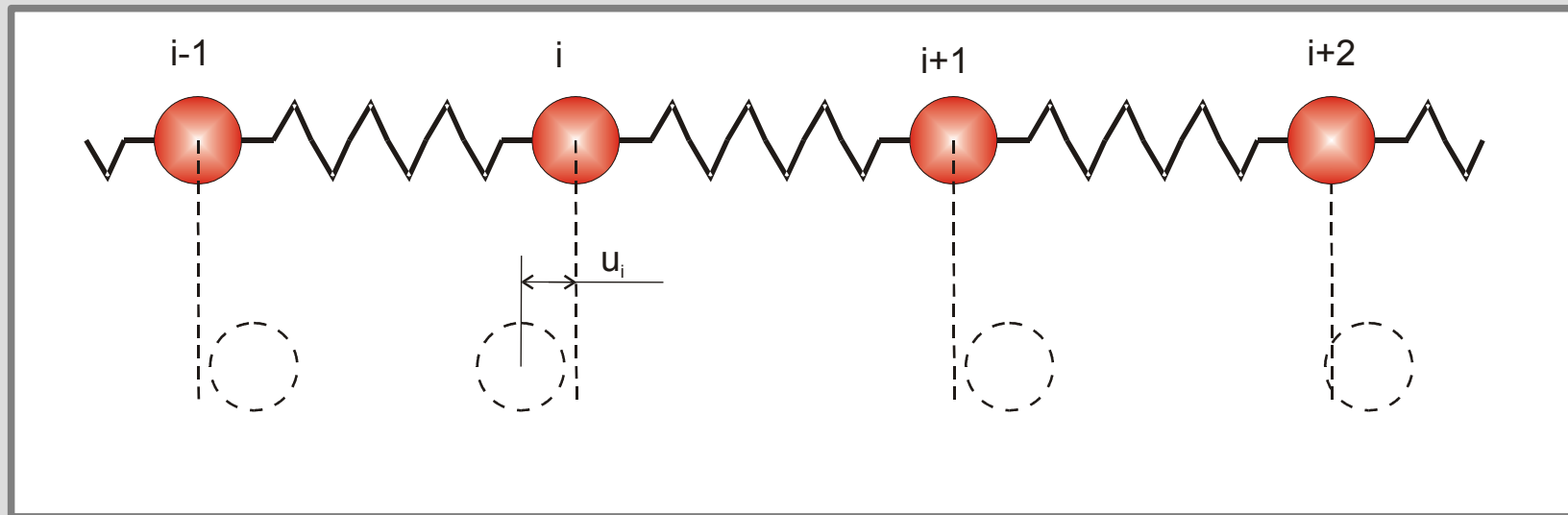
Часть 3. Колебания атомов в кристалле



Часть 3. Колебания атомов в кристалле



«Модель шариков и пружинок»



$$M \frac{d^2 u_j}{dt^2} = C (u_{j+1} + u_{j-1} - 2u_j)$$

Колебания однородной цепочки.

$$M \frac{d^2 u_j}{dt^2} = C (u_{j+1} + u_{j-1} - 2u_j)$$

Колебания однородной цепочки.

$$M \frac{d^2 u_j}{dt^2} = C (u_{j+1} + u_{j-1} - 2u_j)$$

$$u_j = u_0 e^{i(kx_j - \omega t)}$$

$$x_j = j \cdot a$$

решение в форме бегущей
волны с произвольной
амплитудой

Колебания однородной цепочки.

$$M \frac{d^2 u_j}{dt^2} = C (u_{j+1} + u_{j-1} - 2u_j)$$

$$u_j = u_0 e^{i(kx_j - \omega t)}$$

$$x_j = j \cdot a$$

решение в форме бегущей
волны с произвольной
амплитудой

$$-M \omega^2 = C (e^{i k a} + e^{-i k a} - 2) = -2C (1 - \cos(k a)) = -4C \sin^2 \left(\frac{k a}{2} \right)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{4C}{M}} \left| \sin \left(\frac{k a}{2} \right) \right|$$

Колебания однородной цепочки.

$$M \frac{d^2 u_j}{dt^2} = C (u_{j+1} + u_{j-1} - 2u_j)$$

$$u_j = u_0 e^{i(kx_j - \omega t)}$$

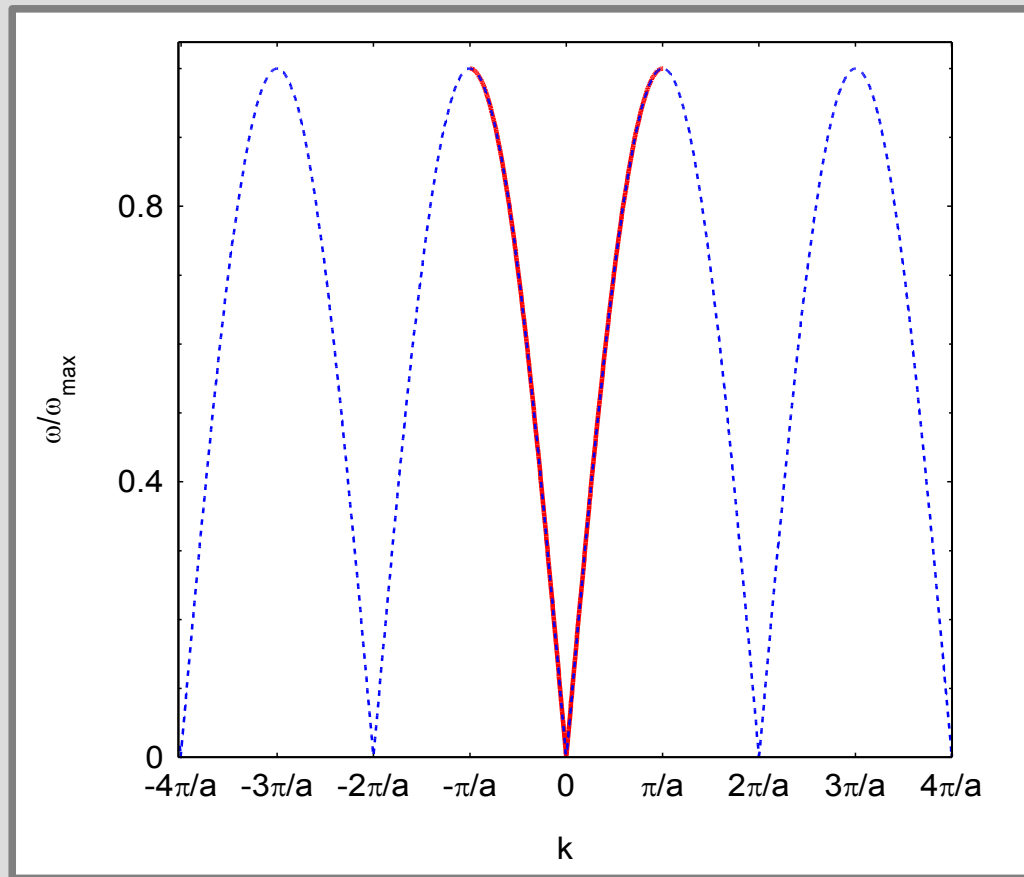
решение в форме бегущей волны с произвольной амплитудой

$$x_j = j \cdot a$$

$$-M \omega^2 = C (e^{i k a} + e^{-i k a} - 2) = -2C (1 - \cos(k a)) = -4C \sin^2 \left(\frac{k a}{2} \right)$$
$$\omega = \sqrt{\frac{4C}{M}} \left| \sin \left(\frac{k a}{2} \right) \right|$$

Только при такой связи частоты и волнового вектора (при таком *законе дисперсии*) волна распространяется по кристаллу без затухания.

Звуковые волны, порядки величины...



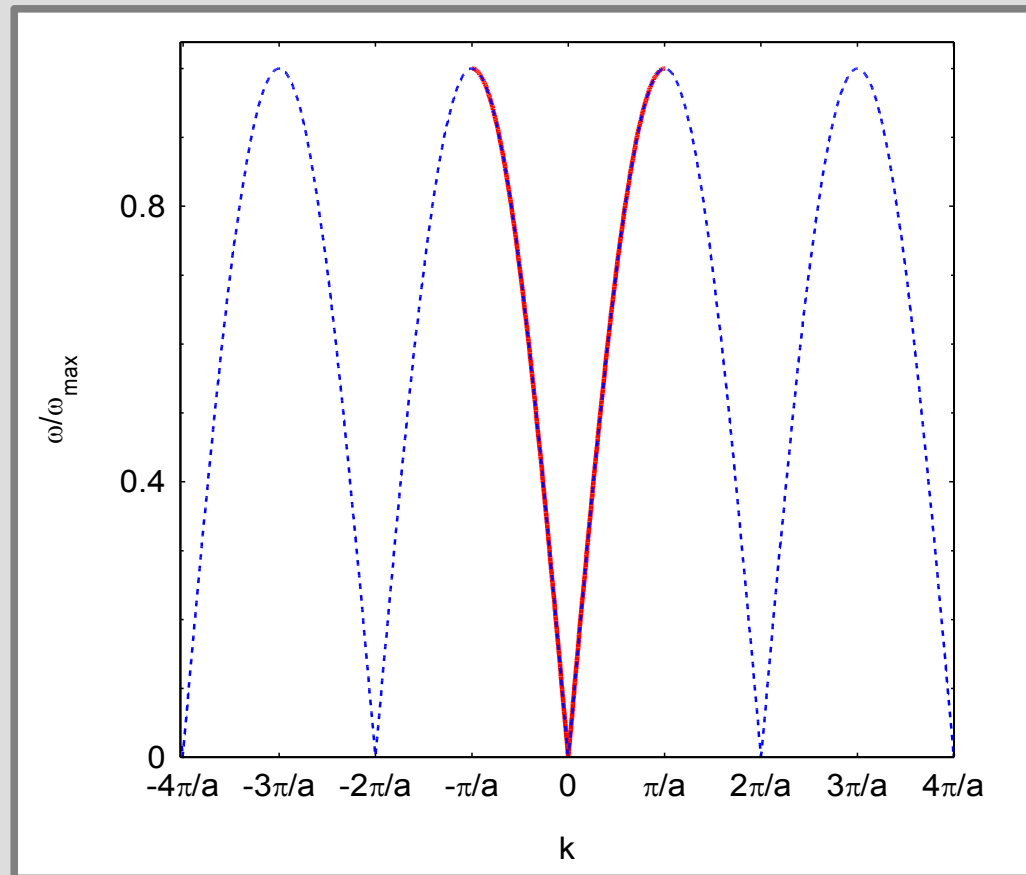
$$\omega = \sqrt{\frac{4C}{M}} \left| \sin\left(\frac{ka}{2}\right) \right|$$

$$k \rightarrow 0 \quad \omega = a \sqrt{\frac{C}{M}} k = sk$$

звуковые
колебания

$$\omega = \frac{2s}{a} \left| \sin\left(\frac{ka}{2}\right) \right|$$

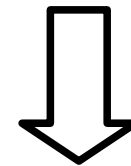
Звуковые волны, порядки величины...



$$\omega = \frac{2s}{a} \left| \sin\left(\frac{ka}{2}\right) \right|$$

$$s = 10^3 \text{ м/сек}$$

$$a = 2 \cdot 10^{-10} \text{ м}$$



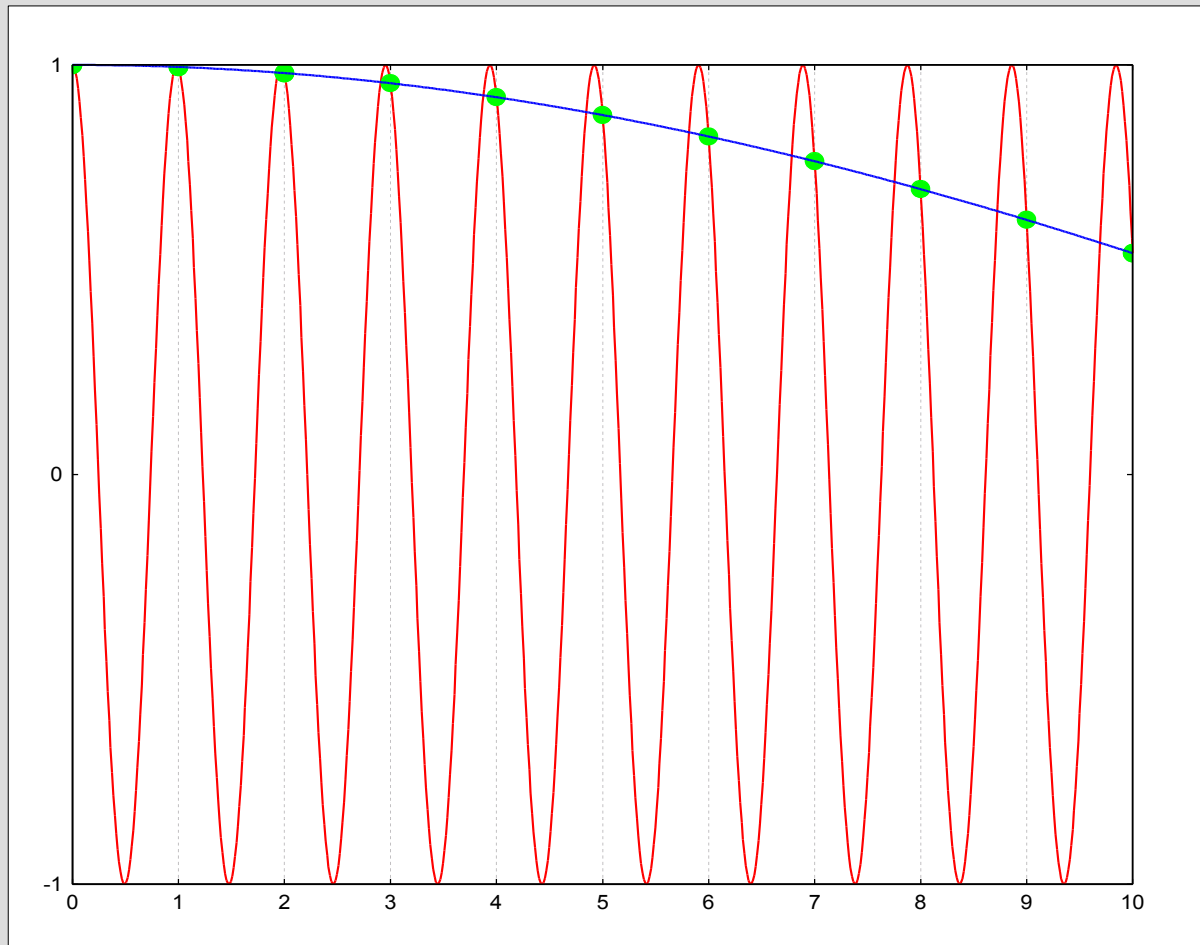
$$\omega_{\max} \simeq 10^{13} \text{ 1/сек}$$

(ИК спектр, соответствует энергии ~ 7 мэВ или температуре около 80К)

Роль первой зоны Бриллюэна.

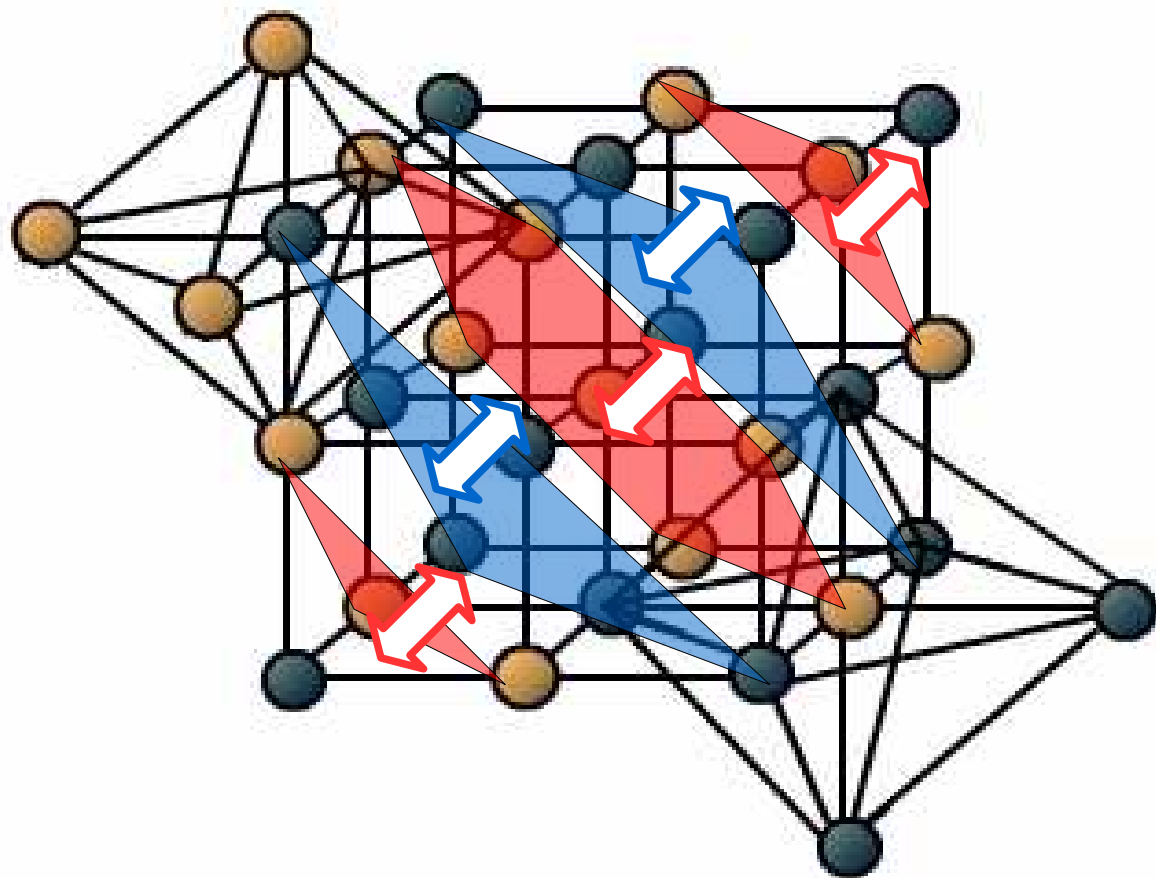
$$u(k + 2\pi/a, ja) = u_0 e^{i((k + 2\pi/a)ja - \omega t)} = u_0 e^{i(k \cdot ja - \omega t)} e^{i2\pi j} = u(k, ja)$$

Волновые вектора
всех физически
различимых
колебаний могут
быть собраны в
первой зоне
Бриллюэна.

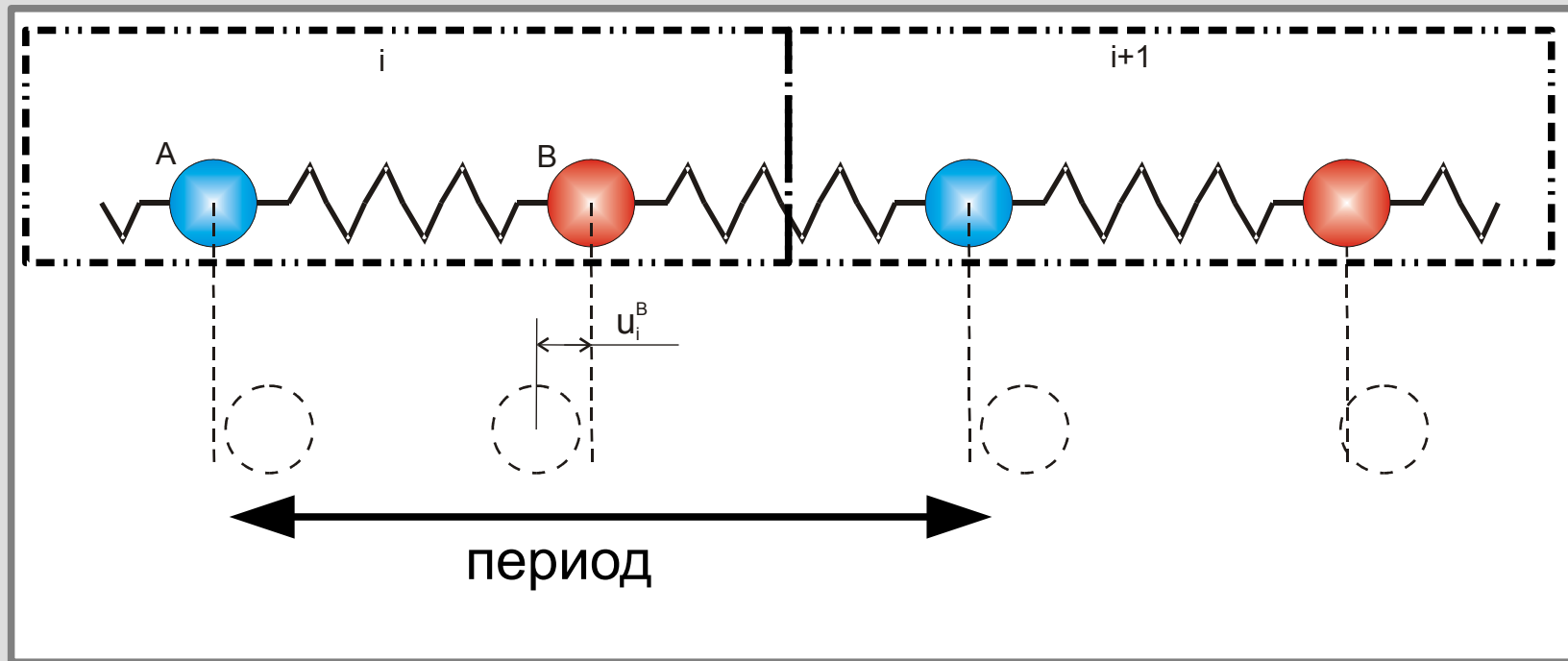


Сравнение "мгновенных фотографий" волн с различными волновыми векторами: $k=0.1$ (синяя линия) и $k=0.1+2\pi$ (красная линия). Символами показаны смещения в точках дискретной решётки с единичным периодом.

Цепочка с атомами двух сортов



Цепочка с атомами двух сортов



$$M_A \frac{d^2 u_j^A}{dt^2} = C (u_{j-1}^B + u_j^B - 2 u_j^A)$$
$$M_B \frac{d^2 u_j^B}{dt^2} = C (u_j^A + u_{j+1}^A - 2 u_j^B)$$

Колебания неоднородной цепочки 1.

$$M_A \frac{d^2 u_j^A}{dt^2} = C(u_{j-1}^B + u_j^B - 2u_j^A)$$
$$M_B \frac{d^2 u_j^B}{dt^2} = C(u_j^A + u_{j+1}^A - 2u_j^B)$$

$$u^A = u_0^A e^{i(kx - \omega t)}$$
$$u^B = u_0^B e^{i(kx - \omega t)}$$

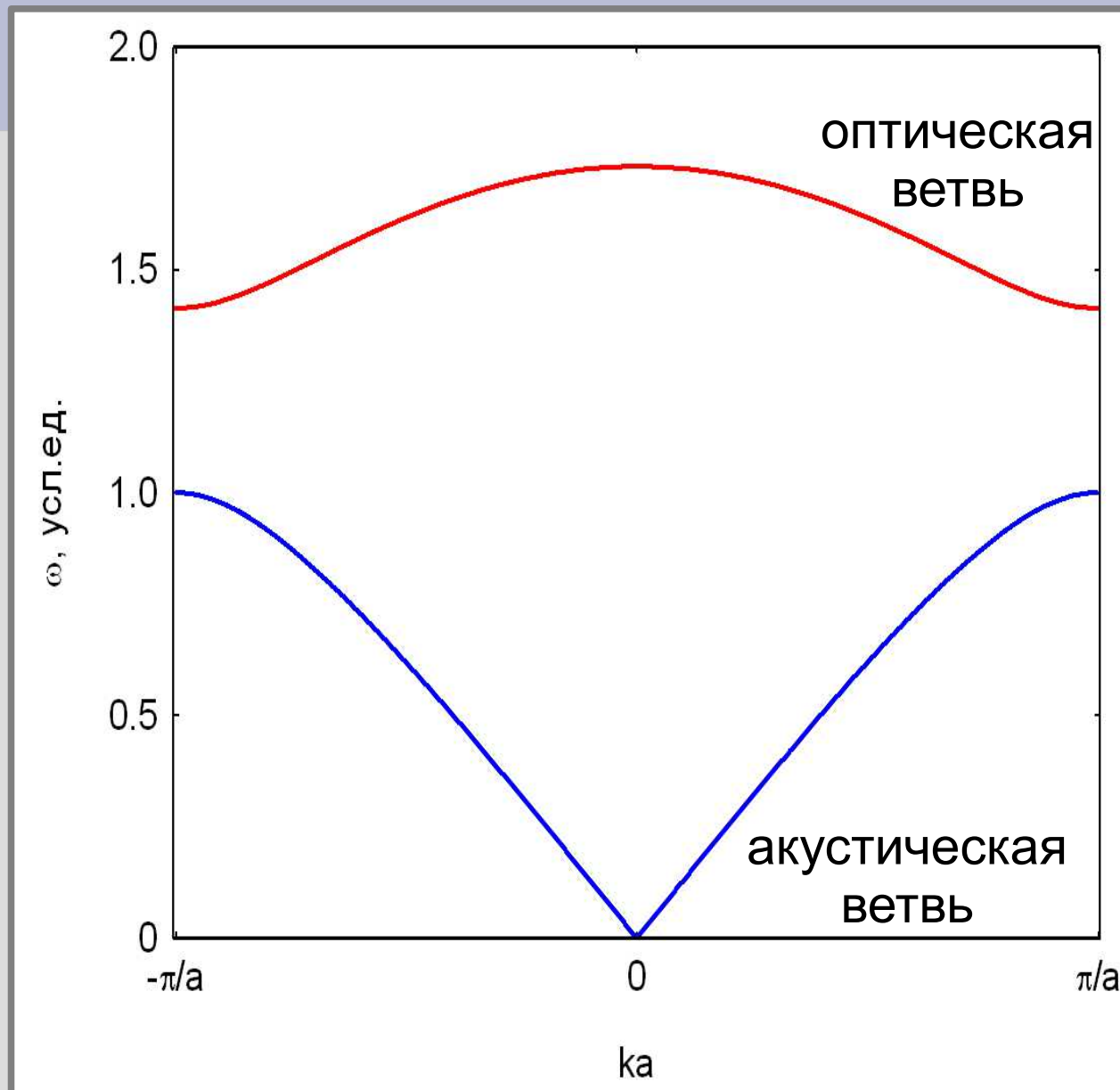
решение в
форме бегущей
волны

$$-\frac{M_A}{C} \omega^2 u_0^A = u_0^B (e^{-ika} + 1) - 2u_0^A$$
$$-\frac{M_B}{C} \omega^2 u_0^B = u_0^A (1 + e^{ika}) - 2u_0^B$$

!!!здесь a —
период цепочки,
расстояние между
атомами одного
сорта!!!

$$\begin{vmatrix} 2 - \frac{M_A \omega^2}{C} & -(1 + e^{-ika}) \\ -(1 + e^{ika}) & 2 - \frac{M_B \omega^2}{C} \end{vmatrix} = 0$$

Колебания неоднородной цепочки 2.



Главное на лекции.

- Прямая и обратная решётка.
- Связь вектора обратной решётки с условием дифракции на кристалле.
- Построение первой зоны Бриллюэна.
- Модельные задачи о колебаниях в цепочках атомов.
- Первая зона Бриллюэна как место физических различных колебаний.

$$\vec{k}' = \vec{k} + \vec{G}$$

