

# Семинар №7

Драчев Ярослав

Факультет общей и прикладной физики МФТИ

17 марта 2021 г.

## 1 Эрмитова матричная модель

$$Z = \int [dX] \exp \left( -\frac{1}{2} \text{Tr} X^2 + \sum_{k=1}^{\infty} t_k \text{Tr} X^k \right).$$

$X$  — эрмитовы матрицы  $X = x^\dagger$ . У эрмитовых матриц

$$N + \frac{2N(N-1)}{2} = N^2$$

степеней свободы.

$$[dX] = \prod_{i=1}^N dX_{ii} \prod_{i>j} d\text{Re} X_{ij} d\text{Im} X_{ij}.$$

Все уравнения иерархии записаны через переменные

$$t_k \quad (= x_k \text{ из книжки Д-М}).$$

$$\begin{aligned} Z(t) &= \int [dX] e^{-\frac{1}{2} \text{Tr} X^2} \exp(t_1 \text{Tr} X + t_2 \text{Tr} X^2 + \dots) = \\ &= \int [dX] e^{-\frac{1}{2} \text{Tr} X^2} \left( 1 + t_1 \text{Tr} X + t_2 \text{Tr} X^2 + \frac{1}{2} t_1^2 (\text{Tr} X)^2 + \dots \right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z(t) &= \int [dX] e^{-\frac{1}{2} \text{Tr} X^2} + t_1 \int [dX] e^{-\frac{1}{2} \text{Tr} X^2} \text{Tr} X + \\ &+ \frac{t_1^2}{2} \int [dX] e^{-\frac{1}{2} \text{Tr} X^2} (\text{Tr} X)^2 + t_2 \int [dX] e^{-\frac{1}{2} \text{Tr} X^2} + \dots \end{aligned}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mathbf{x}^T A \mathbf{x}} d^N x = \frac{\sqrt{\pi}^N}{\sqrt{\det A}}.$$

$$\int [dX] e^{-\frac{1}{2} \text{Tr} X^2} = \int e^{-\mathbf{x}^T A \mathbf{x}} = \frac{\sqrt{\pi}^{N^2}}{2^{N^2-N}}.$$

$$\int [dX] X_{ij} X_{kl} e^{-\frac{1}{2} \text{Tr} X^2} \stackrel{*}{=} .$$

Индекс у вектора

$$\mathbf{x} = (X_{11} \quad \dots \quad X_{NN} \quad \text{Re} X_{12} \quad \dots \quad \text{Re} X_{N-1 N} \quad \text{Im} X_{12} \quad \dots \quad \text{Im} X_{N-1 N})^T$$

$$p = \frac{N + (N - i + 1)}{2} i + (j - i).$$

$$q = \frac{(N + N - k + 1)}{2} k + (l - k).$$

$$X_{ij}X_{kl} = \text{Re} X_{ij} \text{Re} X_{kl} + \text{Re} X_{kl} i \text{Im} X_{jj} + i \text{Im} X_{kl} \text{Re} X_{ij} - \text{Im} X_{ij} \text{Im} X_{kl} = A \delta_{ik} \delta_{jl} \frac{1}{2} + ?.$$

$$\text{Значит } \stackrel{*}{=} \delta_{il} \delta_{jk}.$$

$$\int [dX] e^{-\frac{1}{2} \text{Tr} X^2} \sum_{i,j} X_{ij} X_{ji} = \sum_{i,j} \delta_{ii} \delta_{jj} = N^2 \cdot \#.$$

$$\int [dX] e^{-\frac{1}{2} \text{Tr} X^2} \left( \sum_i X_{ii} \right) \left( \sum_j X_{jj} \right) = \sum_{i,j} \delta_{ij} \delta_{ji} = \sum_i \delta_{ii} = N \cdot \#.$$

Д/з: числа Гурвица.