Домашняя работа по квантовым группам

Драчов Ярослав
Факультет общей и прикладной физики МФТИ

21 мая 2021 г.

$\mathcal{U}_q\left(\mathfrak{su}_2\right)$

Возьмём в алгебре другой базис (а именно $\mathfrak{sl}_2$) и будем решать в нём.

О представлении $\square$ знаем следующее. Действует на пространстве из векторов

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

V_1 — старший.

$$EV_1 = 0, \quad EV_2 = V_1, \quad FV_1 = V_2, \quad FV_2 = 0,$$

$$KV_1 = qV_1, \quad KV_2 = q^{-1}V_2, \quad K^{-1}V_1 = q^{-1}V_1,.$$

Простые Алгебры Ли

Группа $SO(4)$ задаётся соотношениями

$$QQ^T = I, \quad \det Q = 1.$$

$$I = \left(I + tA + O\left(t^2\right)\right)\left(I + tA^T + O\left(t^2\right)\right) = I + t\left(A + A^T\right) + O\left(t^2\right).$$

Откуда следует, что элементами алгебры $so(4)$ являются антисимметричные матрицы A, т. е. такие, что

$$A^T = -A.$$

Элемент этой алгебры имеет следующий вид

$$\begin{pmatrix} 0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ -a_1 & 0 & a_4 & a_5 \\ -a_2 & -a_4 & 0 & a_6 \\ -a_3 & -a_5 & -a_6 & 0 \end{pmatrix}$$

и может быть разложен как

$$A = \sum_{i=1}^{6} a_i e_i,$$

где e_i — базисные матрицы данной алгебры Ли.

Найдём коммутационные соотношения с помощью Mathematica:

$$[e_1, e_2] = -e_4, \quad [e_1, e_3] = -e_5, \quad [e_1, e_4] = e_2, \quad [e_1, e_5] = e_3, \quad [e_1, e_6] = 0,$$
$$[e_2, e_3] = -e_6, \quad [e_2, e_4] = -e_1, \quad [e_2, e_5] = 0, \quad [e_2, e_6] = e_3,$$
$$[e_3, e_4] = 0, \quad [e_3, e_5] = -e_1, \quad [e_3, e_6] = -e_2,$$
$$[e_4, e_5] = -e_6, \quad [e_4, e_6] = -e_5,$$
$$[e_5, e_6] = -e_4.$$

Видим, что максимальное количество коммутирующих элементов в алгебре — 2. Поэтому для построения базиса Картана-Вейля обозначим, без ограничения общности, $H_1 = e_1$, $H_2 = e_6$. Далее, обозначим E

$$\mathrm{ad}_{H_1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{ad}_{H_2} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

действие данными матрицами осуществляется на вектора в базисе (e_2, e_3, e_4, e_5) Эти матрицы коммутируют и могут быть одновременно диагонализированы

$$\mathrm{ad}_{H_1} = \begin{pmatrix} -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \end{pmatrix}, \quad \mathrm{ad}_{H_2} = \begin{pmatrix} -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \end{pmatrix}.$$

Они, в свою очередь действуют на пространстве с базисом

$$E_1 = \frac{1}{4}\left(e_5 + i(e_3 + e_4) - e_2\right), \quad E_2 = \frac{1}{4}\left(e_2 + e_5 + i(e_3 - e_4)\right),$$
$$E_3 = \frac{1}{4}\left(e_2 + e_5 + i(e_4 - e_3)\right), \quad E_4 = \frac{1}{4}\left(e_5 - e_2 - i(e_3 + e_4)\right).$$

Теперь мы вроде как имеем соотношения

$$[H_i, H_j] = 0, \quad [H_i, E_\alpha] = \alpha_i E_\alpha,$$

и

$$\alpha = \begin{pmatrix} i \\ -i \end{pmatrix} \text{ или } \begin{pmatrix} i \\ i \end{pmatrix}$$

на пространстве с базисом (h_1, h_2). Дуальные корни тогда

$$a^\vee = \frac{2\alpha}{(\alpha, \alpha)} = -\alpha.$$

Базис Шевалле

$$H_{\alpha_i} = (\alpha_i^\vee, H), \quad H\left(\begin{pmatrix} i \\ -i \end{pmatrix}\right) = -ih_1 + ih_2, \quad H\left(\begin{pmatrix} i \\ i \end{pmatrix}\right) = -ih_1 - ih_2.$$

Матрица Картана

$$A_{ij} = (\alpha_i, \alpha_j^\vee) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Система корней представлена на рис. 1. Диаграмма Дынкина изображена на рис. 2.

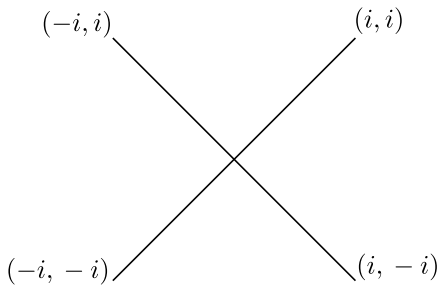

Рис. 1

Рис. 2

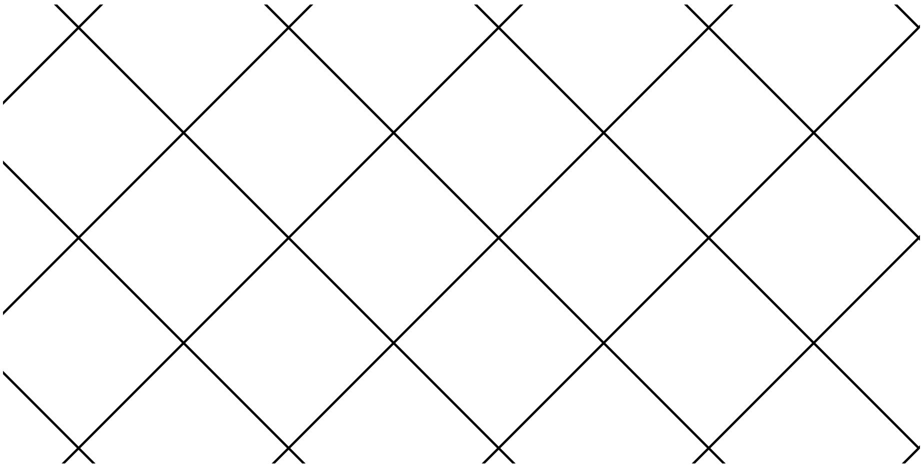

Рис. 3: 3

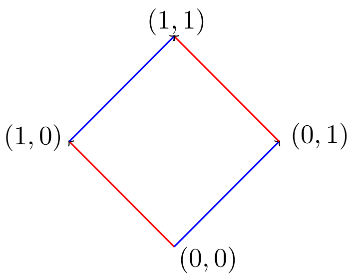

Рис. 4: 4