# Квантовая деформация иерархии $B$КП

Драчов Ярослав
Факультет общей и прикладной физики МФТИ

11 мая 2022 г.

## Содержание

# 1 Иерархия КП

*Иерархия КП* — бесконечный набор нелинейных дифференциальных уравнений, первое из которых даётся как

$$\frac{1}{4}\frac{\partial^2 F}{\partial t_2^2} = \frac{1}{3}\frac{\partial^2 F}{\partial t_1 \partial t_3} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial t_1^2}\right)^2 - \frac{1}{12}\frac{\partial^4 F}{\partial t_1^4}. \tag{1.1}$$

Далее будут обсуждаться экспоненциированные решения данной иерархии (*$\tau$-функции*) $\tau(\mathbf{t}) = \exp(F(\mathbf{t}))$. В разделах 1.1 и 1.2 опишем методы получения уравнений данной иерархии.

## 1.1 Пары Лакса

Для псевдодифференциального оператора

$$L = \partial + \sum_{j=1}^{\infty} f_j \partial^{-j}, \qquad \text{где} \qquad \partial = \frac{\partial}{\partial t_1}, \tag{1.2}$$

условия совместности системы линейных уравнений

$$\begin{cases} Lw = kw, \\ \dfrac{\partial w}{\partial t_j} = B_j w, \end{cases} \qquad \text{где } B_j = \left(L^j\right)_+ . \tag{1.3}$$

могут быть записаны в Лаксовой форме

$$\frac{\partial L}{\partial t_j} = [B_j, L]. \tag{1.4}$$

Из второго уравнения данной иерархии получаем

$$\frac{\partial f_1}{\partial t_2} = \frac{\partial^2 f_1}{\partial t_1^2} + 2\frac{\partial f_2}{\partial t_1}, \qquad \frac{\partial f_2}{\partial t_2} = \frac{\partial^2 f_2}{\partial t_1^2} + 2\frac{\partial f_3}{\partial t_1} + 2\frac{\partial f_1}{\partial t_1} f_1, \qquad \dots \tag{1.5}$$

Из третьего —

$$\frac{\partial f_1}{\partial t_3} = \frac{\partial^3 f_1}{\partial t_1^3} + 3\frac{\partial^2 f_2}{\partial t_1^2} + 3\frac{\partial f_3}{\partial t_1} + 6\frac{\partial f_1}{\partial t_1} f_1, \qquad \dots \tag{1.6}$$

Устраняя $f_2$ и $f_3$ из данных уравнений и пользуясь обозначениями $u = -2f_1$, получаем *уравнение КП*

$$3\frac{\partial^2 u}{\partial t_2^2} = \frac{\partial}{\partial t_1}\left(4\frac{\partial u}{\partial t_3} + 6u\frac{\partial u}{\partial t_1} - \frac{\partial^3 u}{\partial t_1^3}\right). \tag{1.7}$$

Требует пояснений введённое обозначение для $u$. Решение первоначальной задачи на собственные значения можно искать в виде

$$w = \mathrm{e}^{\xi(\mathbf{t},\,k)} \left(1 + \frac{w_1}{k} + \frac{w_2}{k^2} + \ldots\right), \qquad \text{где} \qquad \xi\left(\mathbf{t}, k\right) = \sum_{j=1}^{\infty} t_j k^j. \tag{1.8}$$

Тогда связь между $w_i$ и $f_i$ может быть найдена, например, из уравнений

$$\frac{\partial w}{\partial t_j} = B_j w. \tag{1.9}$$

Из уравнения на $t_1$ получаем

$$\frac{\partial w_1}{\partial t_1} = -f_1, \qquad \ldots. \tag{1.10}$$

Оказывается, что все функции $w_1, w_2, \ldots$ могут быть выражены через одну функцию $\tau$ по формуле

$$w = \frac{\tau\left(t_1 - \dfrac{1}{k}, t_2 - \dfrac{1}{2k^2}, t_3 - \dfrac{1}{3k^3}, \ldots\right)}{\tau\left(t_1, t_2, t_3, \ldots\right)} \mathrm{e}^{\xi(\mathbf{t},\,k)}. \tag{1.11}$$

Откуда, например,

$$w_1 = -\frac{\partial \tau}{\partial t_1} \cdot \tau^{-1}. \tag{1.12}$$

Иерархия КдФ получается из иерархии КП условием $L^2 = \partial^2 + u$ и бесконечный набор функций $f_i$ выражается через $u$. Таким же свойством обладает $\tau$-функция, между ними имеется связь

$$u = 2\frac{\partial^2}{\partial t_1^2} \ln \tau. \tag{1.13}$$

Обозначение $u = -2f_1$ теперь поясняется формулами (1.10), (1.12), (1.13). Также, интегрируя два раза по $t_1$ уравнение (1.7) и принимая во внимание обозначение для $F$, получаем в точности уравнение (1.1).

## 1.2 Билинейное тождество Хироты

**Определение.** *Производные хироты* $\mathrm{D}_1^{n_1} \cdots \mathrm{D}_m^{n_m}$ задаются из соотношения

$$\mathrm{e}^{y_1 \mathrm{D}_1 + y_2 \mathrm{D}_2 + \ldots} f \cdot g = f\left(x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots\right) g\left(x_1 - y_1, x_2 - y_2, \ldots\right). \tag{1.14}$$

**Теорема** (билинейное тождество)**.** *Для любых $x$ и $x'$ положим*

$$\xi = \xi\left(\mathbf{t}, k\right), \qquad \xi' = \xi\left(\mathbf{t}', k\right). \tag{1.15}$$

*Тогда справедливо следующее тождество:*

$$0 = \oint \frac{\mathrm{d}k}{2\pi \mathrm{i}} \mathrm{e}^{\xi - \xi'} \tau\left(t_1 - \frac{1}{k}, t_2 - \frac{1}{2k^2}, \ldots\right) \tau\left(t_1' + \frac{1}{k}, t_2' + \frac{1}{2k^2}, \ldots\right). \tag{1.16}$$

Уравнения КП получаются из билинейного тождества после замены $t_j = x_j + y_j$, $t_j' = x_j - y_j$:

$$\begin{aligned}
&\oint \frac{\mathrm{d}k}{2\pi \mathrm{i}} \exp\left(2\sum_{j=1}^{\infty} k^j y_j\right) \tau\left(x_1 + y_1 - \frac{1}{k}, x_2 + y_2 - \frac{1}{2k^2}, \ldots\right) \times \\
&\qquad \times \tau\left(x_1 - y_1 + \frac{1}{k}, x_2 - y_2 + \frac{1}{2k^2}, \ldots\right) = \\
&\qquad = \oint \frac{\mathrm{d}k}{2\pi \mathrm{i}} \exp\left(2\sum_{j=1}^{\infty} k^j y_j\right) \exp\left(\sum_{j=1}^{\infty} \left(y_l - \frac{1}{lk^l}\right) \mathrm{D}_l\right) \tau \cdot \tau.
\end{aligned} \tag{1.17}$$

Раскладывая подынтегральную функцию в ряд по степеням $y_j$ и вычисляя коэффициент при $k^{-1}$, получаем уравнения КП. Например

$$(\mathrm{D}_1^4 + 3\mathrm{D}_2^2 - 4\mathrm{D}_1\mathrm{D}_3)\tau \cdot \tau = 0, \qquad (\mathrm{D}_1^3\mathrm{D}_2 + 2\mathrm{D}_2\mathrm{D}_3 - 3\mathrm{D}_1\mathrm{D}_4)\tau \cdot \tau = 0. \tag{1.18}$$

Первое из них — буквально (1.1) с учётом определения $F$.

## 1.3 Полиномы Шура, соотношения Плюккера, гипергеометрические $\tau$-функции

Решения данной иерархии могут быть разложены по базису полиномов Шура

$$\tau\left(\mathbf{t}\right) = \sum_{\lambda} C_\lambda s_\lambda\left(\mathbf{t}\right). \tag{1.19}$$

Можно показать, что $\tau(\mathbf{t})$ — решение иерархии КП тогда и только тогда, когда коэффициенты $C_\lambda$ удовлетворяют соотношениям Плюкера, первое из которых

$$C_{[2,\,2]}C_{[\varnothing]} - C_{[2,\,1]}C_{[1]} + C_{[2]}C_{[1,\,1]} = 0. \tag{1.20}$$

Имеется важное подмножество решений иерархии КП — *гипергеометрические $\tau$-функции*. Они определяются как

$$\tau\left(\mathbf{t}\right) = \sum_{\lambda} r_{\lambda} s_{\lambda}(\beta) s_{\lambda}\left(\mathbf{t}\right), \tag{1.21}$$

где $s_{\lambda}(\beta)$ — полином Шура от переменных $\beta_k$,

$$r_{\lambda} = \prod_{w \in \lambda} r\left(c\left(w\right)\right), \tag{1.22}$$

$$c(w) = j - i, \qquad 1 \leqslant i \leqslant l(\lambda), \qquad 1 \leqslant j \leqslant \lambda_i. \tag{1.23}$$

## 1.4 $\tau$-функция чисел Гурвица

Производящая функция простых чисел Гурвица

$$\tau_H(\mathbf{t}) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\mu} h^{\circ}_{m;\mu} t_{\mu_1} t_{\mu_2} \cdots t_{\mu_{l(\mu)}} \frac{u^m}{m!}, \tag{1.24}$$

где

$$h^{\circ}_{m;\mu} = \frac{1}{|\mu|!} \left| \left\{ \left(\eta_1, \ldots, \eta_m\right), \eta_i \in C_2\left(S_{|\mu|}\right) : \eta_m \circ \cdots \circ \eta_1 \in C_{\mu}\left(S_{|\mu|}\right) \right\} \right|, \tag{1.25}$$

$S_{|\mu|}$ — симметрическая группа перестановок $\mu$ элементов, $C_2\left(S_{|\mu|}\right)$ — множество всех транспозиций в $S_{|\mu|}$ и $C_{\mu}\left(S_{|\mu|}\right)$ — множество всех перестановок циклического типа $\mu$.

Можно показать (TODO), что

$$\tau_H(\mathbf{t}) = \sum_{\lambda} \mathrm{e}^{uc(\lambda)} s_{\lambda}\left(\beta_k = \delta_{k,1}\right) s_{\lambda}(\mathbf{t}), \tag{1.26}$$

где $c(\lambda) = \sum_{w \in \lambda} c(w)$. То есть данная производящая функция — гипергеометрическая $\tau$-функция с параметрами

$$r(n) = \mathrm{e}^{un}, \qquad \beta_1 = 1, \qquad \beta_k = 0,\, k \geqslant 2. \tag{1.27}$$

## 1.5 Фермионный формализм и бозонно-фермионное соответствие

Будем рассматривать бесконечномерную алгебру Клиффорда с генераторами $\{\psi_n, \psi_m^* \mid n, m \in \mathbb{Z}\}$, обладающими коммутационными соотношениями

$$\{\psi_n, \psi_m\} = 0, \qquad \{\psi_n^*, \psi_m^*\} = 0, \qquad \{\psi_n, \psi_m^*\} = \delta_{n,m}. \tag{1.28}$$

Пространство Фока для фермионов определим дествием алгебры Клиффорда на вакуумный вектор $|0\rangle$ «моря Дирака». Действие генераторов алгебры на вакуумный вектор даётся как

$$\psi_k |0\rangle = 0, \quad k < 0; \qquad \psi^* |0\rangle = 0, \quad k \geqslant 0. \tag{1.29}$$

То есть операторы $\psi_k$ при $k > 0$ и $\psi_k^*$ при $k \leqslant 0$ — это операторы рождения, а $\psi_k$ при $k \leqslant 0$ и $\psi_k^*$ при $k > 0$ — операторы уничтожения.

Далее определим $m$-е вакуумы

$$\psi_k |m\rangle = 0, \quad k < m; \qquad \psi^* |m\rangle = 0, \quad k \geqslant m, \tag{1.30}$$

и состояния

$$|m, \lambda\rangle = \psi_{\lambda_1+m-1}\psi_{\lambda_2+m-2} \cdots \psi_{\lambda_l+m-l} |m - l\rangle \,. \tag{1.31}$$

Диаграммы Юнга можно однозначно задать как набором длин строк $\lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_l\}$, так и с помощью набора переменных $\alpha_i = \lambda_i - i$ и $\beta_i = \lambda_i' - i$, (см. рис. 3), где $\lambda_i'$ — длина $i$-го столбца диаграммы Юнга $\lambda$. Второй способ называют записью Фробениуса и символически обозначают диаграмму Юнга как $(\alpha|\beta) = (\alpha_1, \dots, \alpha_d|\beta_1, \dots, \beta_d)$, где $d = d(\lambda)$ — количество клеток на главной диагонали диаграммы $\lambda$.

В записи Фробениуса имеем

$$\begin{aligned}|m, \lambda\rangle &= \psi_{\lambda_1+m-1}\psi_{\lambda_2+m-2} \cdots \psi_{\lambda_l+m-l} |m - l\rangle = \\ &= \psi_{m+\alpha_1} \cdots \psi_{m+\alpha_d}\psi_{\lambda_{d+1}+m-(d+1)} \cdots \psi_{\lambda_l+m-l}\psi_{m-l}^* \cdots \psi_{m-1}^* |m\rangle \,.\end{aligned} \tag{1.32}$$

Пронумеруем внешние рёбра диаграммы $\lambda$ начиная от нижнего ребра первого столбца и двигаясь против часовой стрелки числами $l, l-1, \dots, 2, 1$ (см. пример на рис. 2). Тогда вертикальные рёбра будут занумерованы числами $i - \lambda_i$, а горизонтальные — числами $\beta_i + 1$. Отсюда следует, что

$$\{i - \lambda_i\}_{i=d+1}^{l} = \{1, 2, \dots, l\} \setminus \{\beta_i + 1\}_{i=1}^{d} \,, \tag{1.33}$$

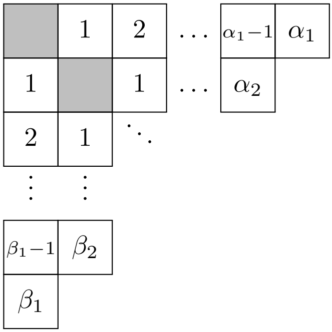



Рис. 1: $\alpha_i$ и $\beta_i$ в записи Фробениуса

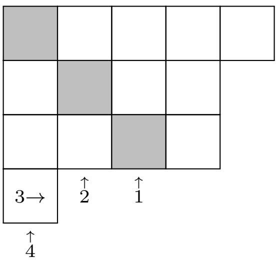



Рис. 2: Нумерация внешних рёбер диаграммы $\lambda = \{5, 4, 4, 1\}$

а также

$$\{\lambda_i + m - i\}_{i=d+1}^{l} = \{m-l, m-l+1, \dots, m-1\} \setminus \{m-\beta_i-1\}_{i=1}^{d}. \quad (1.34)$$

Теперь можем переписать

$$\psi^*_{m-l} \cdots \psi^*_{m-1} = (-1)^b \psi^*_{\lambda_l+m-l} \cdots \psi^*_{\lambda_{d+1}+m-(d+1)} \psi^*_{m-\beta_d-1} \cdots \psi^*_{m-\beta_1-1}, \quad (1.35)$$

где

$$b = \sum_{i=1}^{d} \beta_i, \quad (1.36)$$

и, как итог,

$$|m,\lambda\rangle = (-1)^b \psi_{m+\alpha_1} \cdots \psi_{m+\alpha_d} \psi^*_{m-\beta_d-1} \cdots \psi^*_{m-\beta_1-1} |m\rangle, \quad (1.37)$$

Введём также производящие функции для фермионов

$$\psi(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \psi_k z^k, \qquad \psi^*(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \psi^*_k z^{-k-1}. \quad (1.38)$$

Будем обозначать нормальное упорядочение фермионных операторов как $:(\dots):$. Результатом нормального упорядочения будет перемещение всех операторов уничтожения направо, а операторов рождения — налево, где каждая транспозиция двух фермионов будет производиться в согласии с антикоммутационным соотношением и, следовательно, давать множитель $(-1)$.

Алгебра Ли $gl_\infty$ определяется как пространство

$$gl_\infty = \left\{ (a_{ij})_{i,j\in\mathbb{Z}} \mid \text{все } a_{ij}, \text{ кроме конечного числа, равны } 0 \right\}. \quad (1.39)$$

Базисом данной алгебры можно выбрать матрицы $E_{ij}$, у которых единственный, отличный от нуля, элемент равен 1 и находится на пересечении $i$-й строки и $j$-го столбца.

$$(E_{ij})_{kl} = \delta_{ik}\delta_{jl}. \quad (1.40)$$

$$[E_{ij}, E_{kl}] = E_{ij}E_{kl} - E_{kl}E_{ij} = \delta_{in}\delta_{jm}\delta_{km}\delta_{lp} - \delta_{kn}\delta_{lm}\delta_{im}\delta_{jp} = \\ = \delta_{jk}E_{il} - \delta_{il}E_{kj}. \quad (1.41)$$

Данную алгебру можно рассматривать как алгебру Ли группы $\mathrm{GL}_\infty$, определённой следующим образом

$$\mathrm{GL}_\infty = \left\{ A = (a_{ij})_{i,j\in\mathbb{Z}} \;\middle|\; \begin{matrix} A \text{ обратима и все числа } a_{ij}-\delta_{ij}, \\ \text{кроме конечного числа, равны } 0 \end{matrix} \right\}. \quad (1.42)$$

Представление $R$ группы $\mathrm{GL}_\infty$ и представление $\rho$ алгебры Ли $gl_\infty$ в пространстве $\mathcal{F}$ задаётся формулами

$$R\left(A\right)\left(\psi_{i_1}\wedge\psi_{i_2}\wedge\ldots\right)=A\psi_{i_1}\wedge A\psi_{i_2}\wedge\ldots, \tag{1.43}$$
$$\rho(a)\left(\psi_{i_1}\wedge\psi_{i_2}\wedge\ldots\right)=a\psi_{i_1}\wedge\psi_{i_2}\wedge\ldots+\psi_{i_1}\wedge a\psi_{i_2}\wedge\ldots+\ldots. \tag{1.44}$$

Последние две формулы связаны соотношением

$$\mathrm{e}^{\rho(a)}=R\left(\mathrm{e}^{a}\right),\qquad a\in gl_\infty. \tag{1.45}$$

Представлением данной алгебры на введённом пространстве Фока будет

$$\rho(E_{ij})=\psi_i\psi_j^* \tag{1.46}$$

т. к.

$$\begin{aligned}\left[\psi_i\psi_j^*,\psi_k\psi_l^*\right]=\psi_i\psi_j^*\psi_k\psi_l^*-\psi_k\psi_l^*\psi_i\psi_j^*=\\ =\psi_i\left(\delta_{jk}-\psi_k\psi_j^*\right)\psi_l^*-\psi_k\psi_l^*\psi_i\psi_j^*=\\ =\delta_{jk}\psi_i\psi_l^*-\psi_k\psi_i\psi_l^*\psi_j^*-\psi_k\psi_l^*\psi_i\psi_j^*=\\ =\delta_{jk}\psi_i\psi_l^*-\delta_{il}\psi_k\psi_j^*.\end{aligned} \tag{1.47}$$

Пользуясь формулой (1.43) и стандартным исчислнием внешних степней найдём оператор представления $R$ элемента $A\in\mathrm{GL}_\infty$ в пространстве $\mathcal{F}$

$$\begin{aligned}R(A)\left(\psi_{i_m}\wedge\psi_{i_{m-1}}\wedge\ldots\right)=\sum_{j_m,j_{m-1},\ldots\in\mathbb{Z}}A_{j_m,i_m}\psi_{j_m}\wedge A_{j_{m-1},i_{m-1}}\psi_{j_{m-1}}\wedge\ldots=\\ =\sum_{j_m>j_{m-1}>\ldots}\left(\det A^{i_m,\,i_{m-1},\ldots}_{j_m,j_{m-1},\ldots}\right)\psi_{j_m}\wedge\psi_{j_{m-1}}\wedge\ldots.\end{aligned} \tag{1.48}$$

где $A^{i_m,i_{m-1},\ldots}_{j_m,j_{m-1},\ldots}$ означает матрицу, состоящую из элементов, стоящих на пересечении строк $j_m,j_{m-1},\ldots$ и столбцов $i_m,i_{m-1},\ldots$ матрицы $A$.

В альтернативных обозначениях

$$R(A)\left|m,\lambda\right\rangle=\sum_{\mu\in\mathrm{Par}}\left(\det A^{\lambda_1+m,\lambda_2+m-1,\ldots}_{\mu_1+m,\mu_2+m-1,\ldots}\right)\left|m,\mu\right\rangle. \tag{1.49}$$

Определим также бо́льшую алгебру Ли $\bar{\mathfrak{a}}_\infty$. Элементами данной алгебры будут бесконечномерные матрицы, у которых конечное количество диагоналей отличны от нулевых:

$$\bar{\mathfrak{a}}_\infty=\left\{(a_{ij})\mid i,j\in\mathbb{Z},\,a_{ij}=0\text{ при }\ |i-j|\gg0\right\}. \tag{1.50}$$

$\bar{\mathfrak{a}}_\infty$ является алгеброй Ли с матричным коммутатором в качестве операции, содержащей алгебру Ли $gl_\infty$ как подалгебру.

Далее рассмотрим центральное расширение алгебры Ли $\bar{\mathfrak{a}}_\infty$, а именно алгебру Ли $\mathfrak{a}_\infty$, определённую как

$$\mathfrak{a}_\infty = \bar{\mathfrak{a}}_\infty \oplus \mathbb{C}c \tag{1.51}$$

с центром $\mathbb{C}c$ и скобкой

$$[a, b] = ab - ba + \alpha\,(a, b)\,c. \tag{1.52}$$

Функцию $\alpha(a, b)$ называют *два-коциклом*, для корректности определения скобки Ли на неё накладываются дополнительные ограничения:

- Антисимметричность скобки влечёт антисимметричность $\alpha(a, b)$.
- Линейность скобки по обоим аргументам влечёт аналогичную линейность $\alpha(a, b)$.
- Из тождества Якоби скобки

  $$[[x, y]\,, z] + [[y, z]\,, x] + [[z, x]\,, y] = 0 \tag{1.53}$$

  следует, что

  $$\begin{split}[xy - yx + \alpha\,(x, y)\,c, z] + [yz - zy + \alpha\,(y, z)\,c, x] +\\ + [zx - xz + \alpha\,(z, x)\,c, y] = 0\end{split} \tag{1.54}$$

  и, как итог,

  $$\alpha\,(xy - yx, z) + \alpha\,(yz - zy, x) + \alpha\,(zx - xz, y) = 0. \tag{1.55}$$

Два-коцикл $\alpha(a, b)$ определим на матрицах $E_{ij}$ как

$$\begin{aligned}&\alpha\,(E_{ij}, E_{ji}) = -\alpha\,(E_{ji}, E_{ij}) = 1 \quad \text{при } i < 0,\ j \geqslant 0,\\ &\alpha\,(E_{ij}, E_{kl}) = 0 \quad \text{во всех остальных случаях.}\end{aligned} \tag{1.56}$$

Антисимметричность, линейность по каждому аргументу данного два-коцикла очевидны.

Покажем, что представлением данной алгебры на пространстве Фока будет

$$\hat{\rho}(E_{ij}) = {:}\psi_i \psi_j^*{:}. \tag{1.57}$$

По определению свёртки

$$:\psi_i\psi_j^*: = \psi_i\psi_j^* - \overbracket{\psi_i\psi_j^*}. \tag{1.58}$$

Для неё выполняется

$$\overbracket{\psi_i\psi_j^*} = \overbracket{\psi_i\psi_j^*}\left\langle 0|0\right\rangle = \left\langle 0|\overbracket{\psi_i\psi_j^*}|0\right\rangle = \left\langle 0|\psi_i\psi_j^* - :\psi_i\psi_j^*:|0\right\rangle = \left\langle 0|\psi_i\psi_j^*|0\right\rangle. \tag{1.59}$$

Откуда

$$\overbracket{\psi_i\psi_i^*} = 1 \qquad \text{при } i < 0, \tag{1.60}$$

$$\overbracket{\psi_i\psi_j^*} = 0 \qquad \text{во всех остальных случаях.} \tag{1.61}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
\left[:\psi_i\psi_j^*:, :\psi_k\psi_l^*:\right] &= \left[\psi_i\psi_j^* - \overbracket{\psi_i\psi_j^*}, \psi_k\psi_l^* - \overbracket{\psi_k\psi_l^*}\right] = \\
&= \left[\psi_i\psi_j^*, \psi_k\psi_l^*\right] = \delta_{jk}\psi_i\psi_l^* - \delta_{il}\psi_k\psi_j^* = \\
&= \delta_{jk}\left(:\psi_i\psi_l^*: + \overbracket{\psi_i\psi_l^*}\right) - \delta_{il}\left(:\psi_k\psi_j^*: + \overbracket{\psi_k\psi_j^*}\right) = \\
&= \delta_{jk}:\psi_i\psi_l^*: - \delta_{il}:\psi_k\psi_j^*: + \delta_{jk}\overbracket{\psi_i\psi_l^*} - \delta_{il}\overbracket{\psi_k\psi_j^*} = \\
&= \delta_{jk}:\psi_i\psi_l^*: - \delta_{il}:\psi_k\psi_j^*: + \alpha\left(E_{ij}, E_{kl}\right).
\end{aligned} \tag{1.62}$$

В последнем переходе мы воспользовались соотношением

$$\alpha\left(E_{ij}, E_{kl}\right) = \delta_{jk}\overbracket{\psi_i\psi_l^*} - \delta_{il}\overbracket{\psi_k\psi_j^*}, \tag{1.63}$$

верность которого следует из (1.56), (1.60) и (1.61). Далее проверим, что скобка с определённым выше два-коциклом удовлетворяет тождеству Якоби

$$\begin{aligned}
&\alpha\left(E_{ij}E_{kl} - E_{kl}E_{ij}, E_{mn}\right) + \alpha\left(E_{kl}E_{mn} - E_{mn}E_{kl}, E_{ij}\right) + \\
&\qquad + \alpha\left(E_{mn}E_{ij} - E_{ij}E_{mn}, E_{kl}\right) = 0,
\end{aligned} \tag{1.64}$$

$$\begin{aligned}
&\alpha\left(\delta_{jk}E_{il} - \delta_{il}E_{kj}, E_{mn}\right) + \alpha\left(\delta_{lm}E_{kn} - \delta_{kn}E_{ml}, E_{ij}\right) + \\
&\qquad + \alpha\left(\delta_{ni}E_{mj} - \delta_{mj}E_{in}, E_{kl}\right) = 0,
\end{aligned} \tag{1.65}$$

$$\begin{aligned}
&\delta_{jk}\alpha\left(E_{il}, E_{mn}\right) - \delta_{il}\alpha\left(E_{kj}, E_{mn}\right) + \\
&\qquad + \delta_{lm}\alpha\left(E_{kn}, E_{ij}\right) - \delta_{kn}\alpha\left(E_{ml}, E_{ij}\right) + \\
&\qquad\qquad + \delta_{ni}\alpha\left(E_{mj}, E_{kl}\right) - \delta_{mj}\alpha\left(E_{in}, E_{kl}\right) = 0,
\end{aligned} \tag{1.66}$$

$$\begin{aligned}\delta_{jk}\left(\delta_{lm}\overbracket{\psi_i\psi_n^*} - \delta_{in}\overbracket{\psi_m\psi_l^*}\right) - \delta_{il}\left(\delta_{jm}\overbracket{\psi_k\psi_n^*} - \delta_{kn}\overbracket{\psi_m\psi_j^*}\right) + \\ + \delta_{lm}\left(\delta_{in}\overbracket{\psi_k\psi_j^*} - \delta_{kj}\overbracket{\psi_i\psi_n^*}\right) - \delta_{kn}\left(\delta_{il}\overbracket{\psi_m\psi_j^*} - \delta_{mj}\overbracket{\psi_i\psi_l^*}\right) + \\ + \delta_{ni}\left(\delta_{jk}\overbracket{\psi_m\psi_l^*} - \delta_{lm}\overbracket{\psi_k\psi_j^*}\right) - \delta_{mj}\left(\delta_{kn}\overbracket{\psi_i\psi_l^*} - \delta_{il}\overbracket{\psi_k\psi_n^*}\right) = 0,\end{aligned} \tag{1.67}$$

$$0 = 0. \tag{1.68}$$

Оказывается, можно построить изоморфизм между описанным фермионным пространством Фока $\mathcal{F}$ и бозонным пространством $\mathcal{B}$ полиномов от $x_1, x_3, \ldots, z$ и $z^{-1}$:

$$\Phi : \mathcal{F} \to \mathcal{B} = \mathbb{C}\left[x_1, x_2, \ldots;\, z, z^{-1}\right]. \tag{1.69}$$

Отображение $\Phi$ буквально задаёт бозонно-фермионное соответствие. Как следствие, можно построить бозонные представления $\rho^B = \Phi\rho\Phi^{-1}$ и $\hat{\rho}^B = \Phi\hat{\rho}\Phi^{-1}$ на данном пространстве.

Определим

$$H(\mathbf{t}) = \sum_{k=1}^{\infty} t_k H_k, \qquad H_n = \sum_{k\in\mathbb{Z}} {:}\psi_k\psi_{k+n}^*{:}. \tag{1.70}$$

Тогда

$$\begin{aligned}H_n = \sum_{k\in\mathbb{Z}} {:}\psi_k\psi_{k+n}^*{:} = \sum_{k\in\mathbb{Z}}\left(\psi_k\psi_{k+n}^* - \overbracket{\psi_k\psi_{k+n}^*}\right) = \\ = \begin{cases}\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{Z}}\psi_k\psi_{k+n}^*, & n\neq 0,\\ \displaystyle\sum_{i>0}\psi_k\psi_k^* - \sum_{i\leqslant 0}\psi_k^*\psi_k, & n = 0.\end{cases}\end{aligned} \tag{1.71}$$

$$\mathrm{e}^{H(\mathbf{t})} = \exp\left(\sum_{k\geqslant 1} t_k H_k\right) = \exp\left(\sum_{k\geqslant 1} t_k H_1^k\right) = \sum_{k\geqslant 0} s_k(\mathbf{t}) H_k. \tag{1.72}$$

$$\left(\mathrm{e}^{H(\mathbf{t})}\right)_{mn} = s_{n-m}(\mathbf{t}). \tag{1.73}$$

Получаем явный вид бозонно-фермионного соответствия (TODO привести мотивацию)

$$\Phi\left(|m,\lambda\rangle\right) = z^m \langle m|\mathrm{e}^{H(\mathbf{t})}|m,\lambda\rangle =$$
$$= z^m \langle m| \sum_{\mu\in\mathrm{Par}} \det\left[\left(\mathrm{e}^{H(\mathbf{t})}\right)^{\lambda_1+m,\lambda_2+m-1,\dots}_{\mu_1+m,\mu_2+m-1,\dots}\right]|m,\mu\rangle =$$
$$= z^m \det\left[\left(\mathrm{e}^{H(\mathbf{t})}\right)^{\lambda_1+m,\lambda_2+m-1,\dots}_{m,m-1,\dots}\right] = z^m \det\left[\left(\mathrm{e}^{H(\mathbf{t})}\right)^{\lambda_1+m,\,\lambda_2+m-1,\dots}_{m,\,m-1,\dots}\right] =$$
$$= z^m \det_{i,\,j} s_{\lambda_i-i+j}(\mathbf{t}) = z^m s_\lambda(\mathbf{t}). \quad (1.74)$$

Рассмотрим выражение

$$\langle 0|\mathrm{e}^{H(\mathbf{t})}G|0\rangle = \langle 0|\mathrm{e}^{H(\mathbf{t})} \sum_{\lambda\in\mathrm{Par}} \det\left(G^{0,-1,\dots}_{\lambda_1,\lambda_2-1,\dots}\right)|0,\mu\rangle =$$
$$= \sum_{\lambda\in\mathrm{Par}} \det\left(G^{0,-1,\dots}_{\lambda_1,\lambda_2-1,\dots}\right)\langle 0|\mathrm{e}^{H(\mathbf{t})}|0,\lambda\rangle = \sum_{\lambda\in\mathrm{Par}} \det\left(G^{0,-1,\dots}_{\lambda_1,\lambda_2-1,\dots}\right) s_\lambda(\mathbf{t}). \quad (1.75)$$

Сравнивая с $\tau$-функцией в бозонном представлении (1.19) можно получить, что

$$\tau(\mathbf{t}) = \langle 0|\mathrm{e}^{H(\mathbf{t})}G|0\rangle \quad \text{при} \quad C_\lambda = \det\left(G^{0,-1,\dots}_{\lambda_1,\lambda_2-1,\dots}\right). \quad (1.76)$$

Для гипергеометрических $\tau$-функций выполняется

$$G = \mathrm{e}^{A(\beta)}, \qquad A(\beta) = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k A_k. \quad (1.77)$$

$$A_k = \oint \frac{dz}{2\pi\mathrm{i}} {:}\left[\left(\frac{1}{z} r(D)\right)^k \psi(z)\right]\cdot\psi^*(z){:}, \quad (1.78)$$

где $D = z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}$.

$$D^n z^k = D^{n-1} z \frac{\partial}{\partial z} z^k = k D^{n-1} z^k = k^n z^k. \quad (1.79)$$

$$\left(\hbar D - j\right)^n z^k = \left(\hbar D - j\right)^{n-1}\left(\hbar k - j\right) z^k = \left(\hbar k - j\right)^n z^k. \quad (1.80)$$

$$\frac{1}{z} r(D)\psi(z) = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^{(n)}(0)}{n!} D^n \sum_{k\in\mathbb{Z}} \psi_k z^k = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{r^{(n)}(0)}{n!}\psi_k k^n z^{k-1} =$$
$$= \sum_{k\in\mathbb{Z}} r(k)\psi_k z^{k-1}. \quad (1.81)$$

$$\frac{1}{z}r(\hbar D)\psi(z) = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{r^{(n)}(0)}{n!}(\hbar D)^n\sum_{k\in\mathbb{Z}}\psi_k z^k =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{r^{(n)}(0)}{n!}\psi_k(\hbar k)^n z^{k-1} = \sum_{k\in\mathbb{Z}}r(\hbar k)\psi_k z^{k-1}. \quad (1.82)$$

$$\frac{1}{z}r(\hbar D)\sum_{k\in\mathbb{Z}}r(\hbar k)\psi_k z^{k-1} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{r^{(n)}(0)}{n!}(\hbar D)^n\sum_{k\in\mathbb{Z}}r(\hbar k)\psi_k z^{k-1} =$$
$$= \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{r^{(n)}(0)}{n!}\hbar^n r(\hbar k)\psi_k (k-1)^n z^{k-1} =$$
$$= \sum_{k\in\mathbb{Z}}r(\hbar(k-1))\, r(\hbar k)\psi_k z^{k-2}. \quad (1.83)$$

$$\frac{1}{z}r(D)\frac{1}{z}r(D) = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{r^{(n)}(0)}{n!}D^n\frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{r^{(k)}(0)}{k!}D^k =$$
$$= \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{r^{(n)}(0)}{n!}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\left(D^{n-i}\frac{1}{z}\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{r^{(k)}(0)}{k!}D^{k+i} =$$
$$= \frac{1}{z^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{r^{(n)}(0)}{n!}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(-1)^{n-i}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{r^{(k)}(0)}{k!}D^{k+i} =$$
$$= \frac{1}{z^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{r^{(n)}(0)}{n!}(D-1)^n\sum_{k=0}^{\infty}\frac{r^{(k)}(0)}{k!}D^k = \frac{1}{z^2}r(D-1)r(D). \quad (1.84)$$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{z}r(\hbar D)\frac{1}{z}r(\hbar D) &= \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{r^{(n)}(0)}{n!}(\hbar D)^n\frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{r^{(k)}(0)}{k!}(\hbar D)^k = \\
&= \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{r^{(n)}(0)}{n!}\hbar^n\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\left(D^{n-i}\frac{1}{z}\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{r^{(k)}(0)}{k!}\hbar^k D^{k+i} = \\
&= \frac{1}{z^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{r^{(n)}(0)}{n!}\hbar^n\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(-1)^{n-i}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{r^{(k)}(0)}{k!}\hbar^k D^{k+i} = \\
&= \frac{1}{z^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{r^{(n)}(0)}{n!}\left(\hbar(D-1)\right)^n\sum_{k=0}^{\infty}\frac{r^{(k)}(0)}{k!}(\hbar D)^k = \\
&= \frac{1}{z^2}r\left(\hbar(D-1)\right)r(\hbar D).
\end{aligned} \tag{1.85}
$$

$$
\begin{aligned}
&\left[\left(\frac{1}{z}r(D)\right)^k\psi(z)\right]\cdot\psi^*(z) = \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}}r(n)r(n-1)\cdots r\left(n-k+1\right)\psi_n z^{n-k}\sum_{j\in\mathbb{Z}}\psi_j^* z^{-j-1}.
\end{aligned} \tag{1.86}
$$

$$
A_k = \sum_{n\in\mathbb{Z}}{:}\psi_n\psi_{n-k}{:}\prod_{i=0}^{k-1}r(n-i). \tag{1.87}
$$

# 2 Квантовая деформация иерархии КП

В *$\hbar$-деформированной иерархии КП* связь между $F$ и $\tau$ будет следующей

$$
F^{\hbar}\left(\mathbf{t}\right) = \hbar^2\ln\left(\tau^{\hbar}\left(\mathbf{t}\right)\right). \tag{2.1}
$$

Уравнения иерархии $\hbar$-КП получаются из иерархии КП заменой $\mathbf{t}\to\mathbf{t}/\hbar$. Первое уравнение деформированной иерархии

$$
\frac{1}{4}\frac{\partial^2 F}{\partial t_2^2} = \frac{1}{3}\frac{\partial^2 F}{\partial t_1\partial t_3} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial t_1^2}\right)^2 - \frac{\hbar^2}{12}\frac{\partial^4 F}{\partial t_1^4}. \tag{2.2}
$$

$\tau$-функции иерархии $\hbar$-КП

$$
\tau^{\hbar}\left(\mathbf{t}\right) = \sum_{\lambda}C_{\lambda}^{\hbar}s_{\lambda}\left(\frac{\mathbf{t}}{\hbar}\right), \tag{2.3}
$$

где $C_\lambda^\hbar$ удовлетворяют соотношениям Плюкера. В разделах далее будем добавлять $\hbar$ в $\tau$-функции так, чтобы полученные $\tau^\hbar$-функции удовлетворяли $\hbar$-деформированной иерархии, а также имели «хорошее» разложение по степеням $\hbar$.

## 2.1 Фермионный формализм

Рецепт деформации $\tau$-функций в фермионном формализме

$$\tau^\hbar(\mathbf{t}) = \langle 0| \mathrm{e}^{H(\mathbf{t}/\hbar)} \exp\left(\frac{1}{\hbar} A^\hbar\right) |0\rangle \,, \tag{2.4}$$

где

$$A^\hbar = \oint \frac{dz}{2\pi \mathrm{i}} \colon\!\left[\hat{A}\left(z, \hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)\psi(z)\right] \cdot \psi^*(z)\colon \tag{2.5}$$

и

$$\hat{A}\left(z, \hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right) = \sum_{i\in\mathbb{Z}, j\geqslant 0} a_{ij} z^i \left(\hbar\partial_z\right)^j . \tag{2.6}$$

## 2.2 $\tau$-функция чисел Гурвица

Формула Римана-Гурвица

$$2g - 2 = m - |\mu| - l(\mu), \tag{2.7}$$

позволяет нам разделить вклады различных родов $g$ в производящую функцию. Каждая точка простого ветвления даёт вклад $+1$ к степени $\hbar$, каждый цикл длины $\mu_i$ даёт вклад $-\mu_i - 1$ к степени $\hbar$. Получаем замену переменных

$$t_{\mu_i} \to \hbar^{-\mu_i - 1} t_{\mu_i}, \qquad u \to \hbar u. \tag{2.8}$$

Умножая производящую функцию на $\hbar^2$, чтобы избавиться от отрицательных степеней $\hbar$ в разложении, получаем

$$F_H^\hbar(\mathbf{t}) = \sum_{g=0}^{\infty} \hbar^{2g} F_H^g(\mathbf{t}). \tag{2.9}$$

Покажем, что топологической деформацией (2.8) из $\tau$-функции иерархии КП (1.26) действительно можно получить $\tau$-функцию иерархии $\hbar$-КП (2.3). Имеем

$$\tau_H^\hbar(\mathbf{t}) = \sum_\lambda \mathrm{e}^{u\hbar c(\lambda)} s_\lambda\left(\beta_k = \delta_{k,1}\right) s_\lambda\left(\frac{t_1}{\hbar^2}, \frac{t_2}{\hbar^3}, \dots\right). \tag{2.10}$$

Можно показать (это вопросов не вызывает), что

$$\tau_H^\hbar(\mathbf{t}) = \sum_\lambda \mathrm{e}^{u\hbar c(\lambda)} s_\lambda\left(\frac{1}{\hbar}, 0, 0, \dots\right) s_\lambda\left(\frac{\mathbf{t}}{\hbar}\right) \tag{2.11}$$

и что коэффициенты

$$C_\lambda^\hbar = \mathrm{e}^{u\hbar c(\lambda)} s_\lambda\left(\beta_k = \frac{\delta_{k,1}}{\hbar}\right) \tag{2.12}$$

удовлетворяют соотношениям Плюкера. Это показывает, что $\hbar$-деформацией мы получаем $\tau$-функцию иерархии $\hbar$-КП. Для найденной функции было явно посчитано разложение по $\mathbf{t}$ для первых порядков и проверено, что в неё действительно входят только чётные степени $\hbar$.

# 3 Иерархия $B$КП

## 3.1 Билинейное тождество $B$КП

*Билинейное тождество иерархии ВКП*

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint \mathrm{e}^{\xi^{\text{н}}\left(\mathbf{t}-\mathbf{t}',\, k\right)} \tau_{B\text{КП}}\left(\mathbf{t} - 2\left[k^{-1}\right]\right) \tau_{B\text{КП}}\left(\mathbf{t}' + 2\left[k^{-1}\right]\right) \frac{\mathrm{d}k}{k} = \\ = \tau_{B\text{КП}}\left(\mathbf{t}\right) \tau_{B\text{КП}}(\mathbf{t}'), \tag{3.1}$$

где

$$\mathbf{t} \pm \left[k^{-1}\right] \xlongequal{\text{опр}} \left\{t_1 \pm k^{-1}, t_2 \pm \frac{1}{2}k^{-2}, t_3 \pm \frac{1}{3}k^{-3}, \dots\right\} \tag{3.2}$$

и

$$\xi^{\text{н}}\left(\mathbf{t}, k\right) = \sum_{j \in \mathbb{Z}^+_{\text{неч}}} t_j k^j. \tag{3.3}$$

Первое уравнение иерархии $B$КП в терминах производных Хироты

$$\left(\mathrm{D}_1^6 - 5\mathrm{D}_1^3\mathrm{D}_3 - 5\mathrm{D}_3^2 + 9\mathrm{D}_1\mathrm{D}_5\right) \tau_{B\text{КП}} \cdot \tau_{B\text{КП}}. \tag{3.4}$$

Что можно переписать как

$$-60\left(\frac{\partial^2 F}{\partial t_1^2}\right)^3 - 30\frac{\partial^4 F}{\partial t_1^4}\frac{\partial^2 F}{\partial t_1^2} + 30\frac{\partial^2 F}{\partial t_1\,\partial t_3}\frac{\partial^2 F}{\partial t_1^2} - \frac{\partial^6 F}{\partial t_1^6} + \\ + 5\frac{\partial^2 F}{\partial t_3^2} - 9\frac{\partial^2 F}{\partial t_1\,\partial t_5} + 5\frac{\partial^4 F}{\partial t_1^3\,\partial t_3} = 0. \tag{3.5}$$

## 3.2 $Q$-полиномы Шура, соотношения Плюккера $B$КП, гипергеометрические $\tau^{B\textbf{КП}}$-функции

*Соотношения Плюккера* для $B$КП

$$
\begin{aligned}
&c_{[\alpha_1,\ldots,\alpha_k]}c_{[\alpha_1,\ldots,\alpha_k,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4]} - c_{[\alpha_1,\ldots,\alpha_k,\beta_1,\beta_2]}c_{[\alpha_1,\ldots,\alpha_k,\beta_3,\beta_4]} + \\
&\quad + c_{[\alpha_1,\ldots,\alpha_k,\beta_1,\beta_3]}c_{[\alpha_1,\ldots,\alpha_k,\beta_2,\beta_4]} - c_{[\alpha_1,\ldots,\alpha_k,\beta_1,\beta_4]}c_{[\alpha_1,\ldots,\alpha_k,\beta_2,\beta_3]} = 0.
\end{aligned} \tag{3.6}
$$

Простейшее соотношение Плюккера

$$
c_{\varnothing}c_{\ydiagram{3,2,1}} - c_{\ydiagram{1}}c_{\ydiagram{3,2}} + c_{\ydiagram{2}}c_{\ydiagram{3,1}} - c_{\ydiagram{3}}c_{\ydiagram{2,1}} = 0. \tag{3.7}
$$

Проверено, что *$Q$-полиномы Шура* действительно удовлетворяют простейшему соотношению Плюккера.

Для определения гипергеометрических $\tau$-функций зададим функцию

$$
r_\lambda = \prod_{w\in\lambda} r\left(c(w)\right), \tag{3.8}
$$

где

$$
c(w) = j, \qquad 1 \leqslant i \leqslant l(\lambda), \qquad 1 \leqslant j \leqslant \lambda_i. \tag{3.9}
$$

Визуализация функции $c(w)$ на диаграмме Юнга:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| 1 | 2 | 3 | |
| 1 | 2 | | |

Также данную функцию можно проще записать как

$$
r_\lambda = \prod_{i=1}^{l} r(1)r(2)\cdots r(\lambda_i). \tag{3.10}
$$

Для $k \in \mathbb{Z}^+_{\text{неч}}$ и функции $r$, удовлетворяющей условию

$$
r(n) = r(1-n), \tag{3.11}
$$

можно ввести операторы

$$
B_k = \oint \frac{\mathrm{d}z}{4\pi\mathrm{i}} {:}\left[\left(\frac{1}{z}r(D)\right)^k \phi(z)\right]\cdot\phi(-z){:} = \frac{1}{2}\sum_{n\in\mathbb{Z}}(-1)^n {:}\phi_n\phi_{k-n}{:} \prod_{i=0}^{k-1} r(n-i), \tag{3.12}
$$

$$B(\boldsymbol{\beta}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^+_{\text{неч}}} \beta_n B_n. \tag{3.13}$$

*Гипергеометрические $\tau$-функции BКП* задаются как

$$\tau(\mathbf{t}) = \langle 0 | \mathrm{e}^{H(\mathbf{t})} \mathrm{e}^{-B(\boldsymbol{\beta})} | 0 \rangle, \tag{3.14}$$

и могут быть представлены в виде сумм по строгим разбиениям SP.

$$\tau(\mathbf{t}) = \sum_{\lambda \in \mathrm{SP}} r_\lambda Q_\lambda \left( \frac{\boldsymbol{\beta}}{2} \right) Q_\lambda \left( \frac{\mathbf{t}}{2} \right). \tag{3.15}$$

Данные функции действительно решают иерархию $B$КП, т. к. $Q$-полиномы Шура удовлетворяют соотношениям Плюккера $B$КП, а множители $r(c(w))$ выносятся как общие. Например, для простейшего соотношения Плюккера общим множителем будет

$$r(1)^3 r(2)^2 r(3). \tag{3.16}$$

## 3.3 $\tau$-функция модели БГВ

Статсумма данной матричной модели даётся как

$$Z_{\text{БГВ}}\left(J, J^\dagger\right) = \frac{1}{V_N} \int\limits_{N \times N} DU\, \mathrm{e}^{\mathrm{Tr}\left(J^\dagger U + J U^\dagger\right)}, \tag{3.17}$$

где интеграл берётся по пространству унитарных матриц $N \times N$ с мерой Хаара $DU$ и

$$V_N = \int\limits_{N \times N} DU \tag{3.18}$$

— объём унитарной группы. Нас будет интересовать так называемая фаза Концевича данной модели, где времена $t_k$ определены как

$$t_k = -\frac{1}{2k-1} \mathrm{Tr} \left( J J^\dagger \right)^{-k+1/2}. \tag{3.19}$$

Известно, что статсумма модели БГВ в временах, нормализованных подобающим образом, $\tau_{\text{БГВ}}(\mathbf{t}/2)$, является гипергеометрической с параметрами

$$r(n) = \frac{(2n-1)^2}{16}, \qquad \beta_k = 2\delta_{k,1}. \tag{3.20}$$

## 3.4 $\tau$-функция спиновых чисел Гурвица

Следующая $\tau$-функция является решением иерархии $B$КП:

$$\tau(\mathbf{p}, \bar{\mathbf{p}}) = \sum_{R \in \mathrm{SP}} \left( \mathrm{e}^{u\left[\Phi_R([3]) + \frac{1}{2}\Phi_R([1,1])\right]} \right) Q_R\left(\frac{\mathbf{p}}{2}\right) Q_R\left(\frac{\bar{\mathbf{p}}}{2}\right). \tag{3.21}$$

## 3.5 Фермионный формализм и бозонно-фермионное соответствие

Нейтральные фермионы определяются как

$$\phi_m = \frac{\psi_m + (-1)^m \psi^*_{-m}}{\sqrt{2}}, \tag{3.22}$$

$$\phi^*_m = \frac{\psi^*_m + (-1)^m \psi_{-m}}{\sqrt{2}}. \tag{3.23}$$

Откуда сразу можно заметить что

$$\phi^*_m = (-1)^m \phi_{-m}. \tag{3.24}$$

Благодаря этому свойству далее мы можем ограничиться рассмотрением лишь фермионов $\phi_m$. Прямой подстановкой можно получить каноническое коммутационное соотношение нейтральных фермионов

$$\{\phi_k, \phi_m\} = (-1)^k \delta_{k+m,0}, \tag{3.25}$$

а также их действие на вакуум «моря Дирака»

$$\phi_m |0\rangle = 0, \quad \langle 0| \phi_{-m} = 0, \quad m < 0. \tag{3.26}$$

Множеством строгих разбиений $\mathrm{SP} \subset \mathrm{Par}$ будем называть множество таких $\lambda \in \mathrm{Par}$, для которых выполнено $\lambda_1 > \lambda_2 \ldots > \lambda_l$.

Для разбиений $\lambda \in \mathrm{SP}$ определим состояния

$$|\lambda\rangle = \begin{cases} \phi_{\lambda_1}\phi_{\lambda_2}\cdots\phi_{\lambda_l}|0\rangle, & l = 0 \mod 2, \\ \sqrt{2}\phi_{\lambda_1}\phi_{\lambda_2}\cdots\phi_{\lambda_l}\phi_0|0\rangle, & l = 1 \mod 2. \end{cases} \tag{3.27}$$

Такое же определение для $\lambda \notin \mathrm{SP}$ очевидно влечёт $|\lambda\rangle = 0$ и любое суммирование по разбиениям $\lambda \in \mathrm{Par}$ сводится к суммированию по $\lambda \in \mathrm{SP}$.

Введём также производящую функцию нейтральных фермионов

$$\phi(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \phi_k z^k. \tag{3.28}$$

Коммутационные соотношениям билинейных комбинаций нейтральных фермионов $\phi_k\phi_m$

$$\begin{gathered}
[\phi_a\phi_b, \phi_c\phi_d] = \phi_a\phi_b\phi_c\phi_d - \phi_c\phi_d\phi_a\phi_b = \phi_a \left((-1)^b \delta_{b+c,0} - \phi_c\phi_b\right)\phi_d - \\
- \phi_c \left((-1)^a \delta_{a+d,0} - \phi_a\phi_d\right)\phi_b = (-1)^b \delta_{b+c,0}\phi_a\phi_d - ((-1)^a \delta_{a+c,0} - \phi_c\phi_a)\phi_b\phi_d - \\
- (-1)^a \delta_{a+d,0}\phi_c\phi_b + \phi_c\phi_a \left((-1)^b \delta_{b+d,0} - \phi_b\phi_d\right) = (-1)^b \delta_{b+c,0}\phi_a\phi_d - \\
- (-1)^a \delta_{a+c,0}\phi_b\phi_d + (-1)^b \delta_{b+d,0}\phi_c\phi_a - (-1)^a \delta_{a+d,0}\phi_c\phi_b.
\end{gathered} \tag{3.29}$$

Элементами матричной алгебры Ли $\mathfrak{go}(\infty)$ являются матрицы

$$F_{k,m} = (-1)^m E_{k,-m} - (-1)^k E_{m,-k}. \tag{3.30}$$

Их коммутационные соотношения

$$\begin{gathered}
[F_{a,b}, F_{c,d}] = (-1)^{b+d} [E_{a,-b}, E_{c,-d}] - (-1)^{b+c} [E_{a,-b}, E_{d,-c}] - \\
- (-1)^{a+d} [E_{b,-a}, E_{c,-d}] + (-1)^{a+c} [E_{b,-a}, E_{d,-c}] = \\
= (-1)^{b+d} (\delta_{b+c,0}E_{a,-d} - \delta_{a+d,0}E_{c,-b}) - (-1)^{b+c} (\delta_{b+d,0}E_{a,-c} - \delta_{a+c,0}E_{d,-b}) - \\
- (-1)^{a+d} (\delta_{a+c,0}E_{b,-d} - \delta_{b+d,0}E_{c,-a}) + (-1)^{a+c} (\delta_{a+d,0}E_{b,-c} - \delta_{b+c,0}E_{d,-a}) = \\
= (-1)^b\delta_{b+c,0}F_{a,d} - (-1)^a\delta_{a+c}F_{b,d} + (-1)^b \delta_{b+d,0}F_{c,a} - (-1)^a \delta_{a+d,0}F_{c,b}
\end{gathered} \tag{3.31}$$

совпадают с коммутационными соотношениями билинейных комбинаций нейтральных фермионов. Значит представление алгебры $\mathfrak{go}(\infty)$ может быть реализовано на введённом пространстве Фока элементами $\phi_k\phi_m$.

Нормальное упорядочение на этот раз определим как

$$:\phi_k\phi_m: = \phi_k\phi_m - \langle 0|\phi_k\phi_m|0\rangle\,. \tag{3.32}$$

Легко видеть, что

$$\langle 0|\phi_k\phi_m|0\rangle = \delta_{k+m,0}\eta[m], \tag{3.33}$$

где

$$\eta[m] = \begin{cases} 0, & m < 0, \\ \frac{1}{2}, & m = 0, \\ (-1)^m, & m > 0. \end{cases} \tag{3.34}$$

Коммутационное соотношение алгебры нормально упорядоченных пар нейтральных фермионов

$$[{:}\phi_a\phi_b{:}, {:}\phi_c\phi_d{:}] = (-1)^b\,\delta_{b+c,0}{:}\phi_a\phi_d{:} - (-1)^a\,\delta_{a+c,0}{:}\phi_b\phi_d{:} + (-1)^b\,\delta_{b+d,0}{:}\phi_c\phi_a{:} - \\ - (-1)^a\,\delta_{a+d,0}{:}\phi_c\phi_b{:} + (\delta_{c,b}\delta_{a,d} - \delta_{a-c,0}\delta_{b-d,0})\Big((-1)^a\,\eta[b] - (-1)^b\,\eta[a]\Big). \tag{3.35}$$

Введём операторы

$$J_k = \frac{1}{2}\sum_{m\in\mathbb{Z}}(-1)^{m+1}{:}\phi_m\phi_{-m-k}{:}. \tag{3.36}$$

Заметим, что

$$J_0 = \frac{1}{2}\left(\sum_{m<0}(\phi_m\phi_{-m} - (-1)^m) + \phi_0^2 - \frac{1}{2} + \sum_{m>0}\phi_m\phi_{-m}\right) = 0. \tag{3.37}$$

И тогда

$$J_k = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{m\in\mathbb{Z}}(-1)^{m+1}\phi_m\phi_{-m-k}, & k\neq 0, \\ 0, & k = 0, \end{cases} \tag{3.38}$$

Пусть $k\neq 0$ — чётное число, тогда

$$J_k = \frac{1}{2}\left(\sum_{m\geqslant -k/2}(-1)^{m+1}\phi_m\phi_{-m-k} + \sum_{m<-k/2}(-1)^{m+1}\phi_m\phi_{-m-k}\right) = \\ = \frac{1}{2}\left(\sum_{m\geqslant 0}(-1)^{m-k/2+1}\,\phi_{m-k/2}\phi_{-m-k/2} + \right. \\ \left. + \sum_{m>0}(-1)^{m+k/2+1}\,\phi_{-m-k/2}\phi_{m-k/2}\right) = \\ = \frac{1}{2}\left(\phi_{-k/2}^2 + \sum_{m>0}(-1)^{m+k/2+1}\,(-1)^{-m-k/2}\,\delta_{-k,0}\right) = 0. \tag{3.39}$$

Для нечётных же $k$

$$J_k = \frac{1}{2}\left(\sum_{m\geqslant -(k-1)/2}(-1)^{m+1}\phi_m\phi_{-m-k} + \sum_{m\leqslant -(k+1)/2}(-1)^{m+1}\phi_m\phi_{-m-k}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{m\geqslant 0}(-1)^{m+(k+1)/2}\,\phi_{m-(k-1)/2}\phi_{-m-(k+1)/2} + \right.$$

$$\left. + \sum_{m\geqslant 0}(-1)^{m+(k-1)/2}\,\phi_{-m-(k+1)/2}\phi_{m-(k-1)/2}\right) =$$

$$= \sum_{m\geqslant 0}(-1)^{m+(k+1)/2}\,\phi_{m-(k-1)/2}\phi_{-m-(k+1)/2}. \tag{3.40}$$

Поэтому далее будет подразумеваться что $J_k$ имеют лишь нечётные индексы. Коммутатор данных операторов

$$[J_k, J_m] = \frac{1}{4}\sum_{i,j\in\mathbb{Z}}(-1)^{i+j+2}\,[:\phi_i\phi_{-i-k}:, :\phi_j\phi_{-j-k}:] \xlongequal{\text{TODO}} \frac{k}{2}\delta_{k+m,0}. \tag{3.41}$$

Для них выполнено

$$J_m\,|0\rangle = 0, \qquad \langle 0|\,J_{-m} = 0, \quad m > 0. \tag{3.42}$$

Определим также производящую функцию данных операторов

$$J(\mathbf{t}) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^+_{\text{неч}}} t_k J_k. \tag{3.43}$$

Как и в случае иерархии КП определим бозонно-фермионное соответствие как

$$\Phi\left(|\lambda\rangle\right) = \langle 0|\mathrm{e}^{J(\mathbf{t})}|\lambda\rangle\,.$$

Оказывается, что (TODO?)

$$\Phi(|\lambda\rangle) = 2^{-l/2}Q_\lambda\left(\frac{\mathbf{t}}{2}\right).$$

$\tau$-функции иерархии $B$КП можно получить как (TODO)

$$\tau_G(\mathbf{t}) = \langle 0|\mathrm{e}^{J(\mathbf{t})}G|0\rangle\,. \tag{3.44}$$

# 4 Квантовая деформация иерархии $B$КП

Аналогично деформации иерархии КП получаем первое уравнение $\hbar$-$B$КП

$$-60\left(\frac{\partial^2 F}{\partial t_1^2}\right)^3-30\hbar^2\frac{\partial^4 F}{\partial t_1^4}\frac{\partial^2 F}{\partial t_1^2}+30\frac{\partial^2 F}{\partial t_1\,\partial t_3}\frac{\partial^2 F}{\partial t_1^2}-\hbar^4\frac{\partial^6 F}{\partial t_1^6}+ \\ +5\frac{\partial^2 F}{\partial t_3^2}-9\frac{\partial^2 F}{\partial t_1\,\partial t_5}+5\hbar^2\frac{\partial^4 F}{\partial t_1^3\,\partial t_3}=0. \quad (4.1)$$

## 4.1 Разложение по родам $\tau$-функции модели БГВ в фазе Концевича

Добавление $1/\hbar$ в экспоненту матричного интеграла модели БГВ

$$Z_{\hbar\text{БГВ}}=\frac{1}{V_N}\int_{N\times N} DU\,\exp\left(\frac{1}{\hbar}\,\mathrm{Tr}\left(J^\dagger U+JU^\dagger\right)\right) \quad (4.2)$$

даёт разложение по родам для фазы Концевича. Деформация в данной фазе принимает вид

$$t_k\to t_k\hbar^{k-1}. \quad (4.3)$$

Имеем соотношение

$$\tau_{\text{БГВ}}\left(\frac{\mathbf{t}}{2}\right)=\sum_{\lambda\in\mathrm{SP}} r_\lambda Q_\lambda\left(\delta_{k,1}\right)Q_\lambda\left(\frac{\mathbf{t}}{2}\right). \quad (4.4)$$

Откуда

$$\tau^{\hbar}_{\text{БГВ}}\left(\frac{\mathbf{t}}{2}\right)=\sum_{\lambda\in\mathrm{SP}} r_\lambda Q_\lambda\left(\delta_{k,1}\right)Q_\lambda\left(\frac{t_k\hbar^{k-1}}{2}\right). \quad (4.5)$$

**Утверждение.** *Выполнено равенство*

$$Q_\lambda\left(\frac{t_k\hbar^{k-1}}{2}\right)=\hbar^{|\lambda|}Q_\lambda\left(\frac{\mathbf{t}}{2\hbar}\right). \quad (4.6)$$

*Доказательство.* Известно, что

$$Q_R(\mathbf{p})=\sum_{\substack{\Delta\in\mathrm{OP}\\ \Delta\vdash|R|}}\frac{\Psi_R(\Delta)}{z_\Delta}p_\Delta, \quad (4.7)$$

где

- OP — множество нечётных разбиений, то есть разбиений, где все элементы разбиения — нечётные.
- $\Psi_R(\Delta)$ — характеры группы Сергеева
- $z_\Delta$ — порядок автоморфизма разбиения $\Delta$
- $p_\Delta = \prod_{i=1}^{l} p_{\Delta_i}$
- $p_k = kt_k$

Тогда

$$\prod_{i=1}^{l} p_{\lambda_i} \hbar^{\lambda_i} = \hbar^{|\lambda|} p_\lambda. \tag{4.8}$$

Значит

$$Q_\lambda\left(\frac{t_k \hbar^{k-1}}{2}\right) = \hbar^{|\lambda|} Q_\lambda\left(\frac{\mathbf{t}}{2\hbar}\right). \tag{4.9}$$

□

Теперь имеем

$$\tau^{\hbar}_{\text{БГВ}}\left(\frac{\mathbf{t}}{2}\right) = \sum_{\lambda \in \text{SP}} r_\lambda \hbar^{|\lambda|} Q_\lambda\left(\delta_{k,1}\right) Q_\lambda\left(\frac{\mathbf{t}}{2\hbar}\right). \tag{4.10}$$

**Утверждение.** *Выполнено равенство*

$$\frac{Q_\lambda\left(\delta_{k,1}\right)}{\hbar^{|\lambda|}} = Q_\lambda\left(\frac{\delta_{k,1}}{\hbar}\right). \tag{4.11}$$

*Доказательство.* Напрямую следует из

$$Q_R\left(\delta_{k,1}\right) = \frac{\Psi_R\left(\{1,\ldots,1\}\right)}{z_{\{1,\ldots,1\}}} p_1^{|R|}.$$

□

Это позволяет нам написать

$$\tau^{\hbar}_{\text{БГВ}}\left(\frac{\mathbf{t}}{2}\right) = \sum_{\lambda \in \text{SP}} r_\lambda \hbar^{2|\lambda|} Q_\lambda\left(\frac{\delta_{k,1}}{\hbar}\right) Q_\lambda\left(\frac{\mathbf{t}}{2\hbar}\right). \tag{4.12}$$

Вспоминая определение $r_\lambda$ (3.8) и функцию $r(n)$ для модели БГВ (3.20), можем записать для модели БГВ

$$r_\lambda = \prod_{w\in\lambda} \frac{(2c(w)-1)^2}{16}. \tag{4.13}$$

Это позволяет записать

$$r_\lambda^\hbar = \hbar^{2|\lambda|} r_\lambda = \prod_{w\in\lambda} \frac{\hbar^2\left(2c(w)-1\right)^2}{16}, \tag{4.14}$$

и мотивирует ввести

$$r^\hbar(n) = \frac{\hbar^2(2n-1)^2}{16} = \left(\frac{\hbar}{2}\left(n-\frac{1}{2}\right)\right)^2. \tag{4.15}$$

Замена

$$n \to \frac{1}{2} + \hbar\left(n-\frac{1}{2}\right) \tag{4.16}$$

позволяет перейти от

$$r(n) = \left(\frac{1}{2}\left(n-\frac{1}{2}\right)\right)^2 \tag{4.17}$$

к $r^\hbar(n)$. Таким образом, мы представили $\hbar$-деформацию $\tau$-функции модели БГВ в виде

$$\tau^\hbar_{\text{БГВ}}\left(\frac{\mathbf{t}}{2}\right) = \sum_{\lambda\in\mathrm{SP}} r^\hbar_\lambda Q_\lambda\left(\frac{\delta_{k,1}}{\hbar}\right) Q_\lambda\left(\frac{\mathbf{t}}{2\hbar}\right), \tag{4.18}$$

имеющем следующую интерпретацию в терминах фермионного формализма

$$\tau^\hbar_{\text{БГВ}} = \langle 0|\mathrm{e}^{H(\mathbf{t}/\hbar)} \exp\left(-\frac{1}{\hbar}B^\hbar\right)|0\rangle, \tag{4.19}$$

$$B^\hbar = \sum_{n\in\mathbb{Z}^+_{\text{неч}}} \beta_n B^\hbar_n, \tag{4.20}$$

$$B^\hbar_k = \oint \frac{\mathrm{d}z}{4\pi\mathrm{i}} {:}\left[\left(\frac{1}{z} r\left[\frac{1}{2}+\hbar\left(D-\frac{1}{2}\right)\right]\right)^k \phi(z)\right]\cdot\phi(-z){:} \tag{4.21}$$

Получается интригующая замена для оператора $D$

$$D \to \frac{1}{2} + \hbar\left(D-\frac{1}{2}\right). \tag{4.22}$$

## 4.2 Разложение по родам спиновых чисел Гурвица

Формула Римана-Гурвица (простые точки ветвления имеют профиль $(r+1,1,\ldots,1)$, где $r$ — чётное)

$$2g-2=-2|\mu|+(|\mu|-\ell(\mu))+(|\nu|-\ell(\nu))+mr.$$

Т. к. $|\mu|=|\nu|$, то

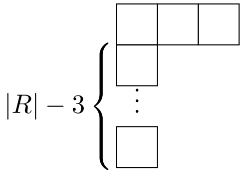
$$2g-2=mr-\ell(\mu)-\ell(\nu).$$

$$\Phi_R(\{3\})=\frac{(|R|-3)!}{(|R|-3)!}\Phi_R\left(\left\{3,1^{|R|-3}\right\}\right)=\Phi_R\left(\left\{3,1^{|R|-3}\right\}\right).$$

$$\Phi_R(\{1,1\})=\frac{(|R|-2+2)!}{2!\,(|R|-2)!}\Phi_R\left(\left\{1^{|R|}\right\}\right)=\frac{|R|!}{(|R|-2)!}=|R|\,(|R|-1)\,.$$

Значит

$$\begin{aligned}
Z^{(\mathrm{spin})}(\mathbf{p},\bar{\mathbf{p}}) &= \sum_{R\in\mathrm{SP}}\exp\left(u\left[\Phi_R(\{3\})+\frac{1}{2}\Phi_R(\{1,1\})\right]\right)Q_R(\mathbf{p})Q_R(\bar{\mathbf{p}})= \\
&= \sum_{R\in\mathrm{SP}}\exp\left(u\left[\Phi\left(\left\{3,1^{|R|-3}\right\}\right)+\frac{|R|\,(|R|-1)}{2}\right]\right)Q_R(\mathbf{p})\,Q_R(\bar{\mathbf{p}})= \\
&= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{R\in\mathrm{SP}}\exp\left(\frac{u|R|\,(|R|-1)}{2}\right)\frac{\left(\Phi\left(\left\{3,1^{|R|-3}\right\}\right)u\right)^m}{m!}Q_R(\mathbf{p})\,Q_R(\bar{\mathbf{p}})= \\
&= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{R\in\mathrm{SP}}\sum_{\substack{\Delta_1,\Delta_2\in\mathrm{OP}\\|\Delta_1|=|\Delta_2|=|R|}}\exp\left(\frac{u|R|\,(|R|-1)}{2}\right)\left(\Phi\left(\left\{3,1^{|R|-3}\right\}\right)\right)^m\times \\
&\qquad\times\mathfrak{d}_R^2\Phi_R(\Delta_1)\,\Phi_R(\Delta_2)\,p_{\Delta_1}p_{\Delta_2}\frac{u^m}{m!}= \\
&= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\exp\left(\frac{un(n-1)}{2}\right)\sum_{\substack{R\vdash n\\R\in\mathrm{SP}}}\sum_{\substack{\Delta_1,\Delta_2\in\mathrm{OP}\\|\Delta_1|=|\Delta_2|=|n|}}\mathfrak{d}_R^2\left(\Phi\left(\left\{3,1^{|R|-3}\right\}\right)\right)^m\times \\
&\qquad\times\Phi_R(\Delta_1)\,\Phi_R(\Delta_2)\,p_{\Delta_1}p_{\Delta_2}\frac{u^m}{m!}= \\
&= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\substack{\Delta_1,\Delta_2\in\mathrm{OP}\\|\Delta_1|=|\Delta_2|=|n|}}\exp\left(\frac{un(n-1)}{2}\right)\times \\
&\qquad\times\mathrm{Hur}_{0,n}^{(\mathrm{spin})}(\Delta_1,\Delta_2,\underbrace{\left\{3,1^{n-3}\right\},\ldots,\left\{3,1^{n-3}\right\}}_{m})p_{\Delta_1}p_{\Delta_2}\frac{u^m}{m!}.
\end{aligned}$$



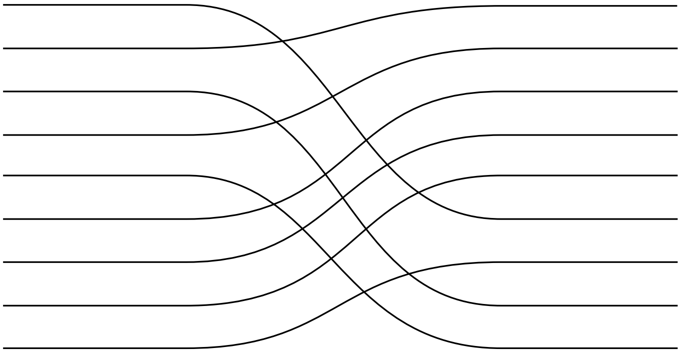



Рис. 3: 1

## 4.3 $\hbar$-деформация гипергеометрических $\tau$-функций иерархии $B$КП

Гипотеза состоит в том, что деформация

$$\begin{cases} t_k \to \dfrac{t_k}{\hbar}, \\ \beta_k \to \dfrac{\beta_k}{\hbar}, \\ r(n) \to r\left(\dfrac{1}{2} + \hbar\left(n - \dfrac{1}{2}\right)\right) \end{cases} \tag{4.23}$$

даёт для гипергеометрических $\tau$-функций иерархии $B$КП разложение по родам…