Домашняя работа по интегрируемым иерархиям

Драчов Ярослав
Факультет общей и прикладной физики МФТИ

19 мая 2021 г.

2.3.

Решение. Пусть

$$(\partial + x)^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_{n-1} \partial^{-n}.$$

Перемножая, получим

$$(\partial + x)\left(a_0 \partial^{-1} - a_1 \partial^{-2} + a_2 \partial^{-3} - \ldots\right) = 1,$$

а приравнивая коэффициенты при ∂^{-n}, получим $a_0 = 1$, $a_n - x a_{n-1} + \partial a_{n-1} = 0$ для $n \geqslant 1$. Таким образом, $a_0 = 1$, $a_1 = x$, $a_2 = x^2 + 1$, $a_3 = x^3 + 3x$, $a_4 = x^4 + 6x^2 + 3$, а общее решение имеет вид

$$a_n = \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-2k+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2k} x^{n-2k}.$$

2.5.

Решение. Если l чётно, то $\left(P^{l/2}\right)_+ = P^{l/2}$ и, следовательно, $\left[P, \left(P^{l/2}\right)_+\right] = 0$.

2.10.

Решение.

$$L = \partial + \sum_{j=1}^{\infty} f_j \partial^{-j}.$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \partial + \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \partial^{-i} + f_i \frac{\partial}{\partial x_j} \partial^{-i} \right).$$

$$B_j = \left(L^j\right)_+, \quad B_1 = \partial, \quad B_2 = \partial^2 + 2 f_1,$$

$$B_3 = \partial^3 + 3 f_1 \partial + 3\left(\partial f_1\right) + 3 f_2.$$

$$[B_2, L] = -2(\partial f_1) + \sum_{j=1}^{\infty} \left((\partial^2 f_j) \partial^{-j} + 2\left(\partial f_j\right) \partial^{1-j} + 2 f_1 f_j \partial^{-j} - 2 f_j \partial^{-j} \circ f_1 \right),$$

где

$$\partial^{-j} \circ f_1 = \sum_{k \geqslant 0} \binom{-j}{k} \left(\partial^k f_1\right) \partial^{-j-k}, \quad \binom{-j}{k} = \frac{-j(-j-1)\ldots(-j-k+1)}{k!}.$$

$$
\begin{aligned}
[B_3, L] = -3(\partial f_1)\partial - 3(\partial^2 f_1) - 3(\partial f_2) + \sum_{j=1}^{\infty} \Big(\left(\partial^3 f_j\right) \partial^{-j} + 3 \left(\partial^2 f_j\right) \partial^{1-j} + \\
+ 3 \left(\partial f_j\right) \partial^{2-j} + 3 f_1 (\partial f_j) \partial^{-j} + 3 f_1 f_j \partial^{1-j} - 3 f_j (\partial^{-j} \circ f_1) \partial + \\
+ 3(\partial f_1) f_j \partial^{-j} - 3 f_j \partial^{-j} \circ (\partial f_1) + 3 f_2 f_j \partial^{-j} - 3 f_j \partial^{-j} \circ f_2 \Big) .
\end{aligned}
$$

Из уравнения

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = [B_2, L] \, ,$$

приравнивая коэффициенты при ∂^{-1} и ∂^{-2} , получаем

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = \partial^2 f_1 + 2\partial^2 f_2,$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_2} = \partial^2 f_2 + 2\partial f_3 + 2 f_1 \partial f_1.$$

Из уравнения

$$\frac{\partial L}{\partial x_3} = [B_3, L]$$

аналогично получаем при ∂^{-1}

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_3} = \partial^3 f_1 + 3\partial^2 f_2 + 3\partial f_3 + 6 f_1 \partial f_1.$$

Выражая f_2 и f_2 через f_1 и обозначая $u = -2 f_1$, получаем

$$\frac{3}{4} \frac{\partial^2 u}{\partial x_2} = \partial \left(\frac{\partial u}{\partial x_3} + \frac{3}{2} u \partial u - \partial^3 u \right) .$$