Семинар №2

Драчов Ярослав
Факультет общей и прикладной физики МФТИ

17 февраля 2021 г.

Задача Кеплера

Гамильтониан
$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2} - \frac{\alpha}{|\mathbf{r}|}.$$
Инвариант относительно $SO(3)$, значит $\mathbf{l} = [\mathbf{r}, \mathbf{p}] = \mathrm{const}$. Также $E = \mathrm{const}$. Для системы $\mathbb{R}^{2n} = \{q, p\}$ достаточно n интегралов движения. Ещё один интеграл движения $\mathbf{A} = [\mathbf{l}, \mathbf{p}] + \frac{\alpha}{r}\mathbf{r}$ — вектор Лапласа-Рунге-Ленца. Итого 7 интегралов движения.

Выполняются следующие соотношения

1. $(\mathbf{l}, \mathbf{A}) = 0$
2. $E = -\dfrac{\alpha^2}{2\left(l^2 - \frac{A^2}{2E}\right)}$

Скобки Пуассона
$$\begin{cases} \{l_i, l_j\} = \varepsilon_{ijk} l_k \text{ — алгебра } SO(3) \\ \{l_i, A_j\} = \varepsilon_{ijk} A_k \\ \{A_i, A_j\} = -2E\varepsilon_{ijk} L_k \end{cases}.$$
$$\mathbf{m} = \frac{A}{\sqrt{-2E}}.$$
$$\begin{cases} \{l_i, m_j\} = \varepsilon_{ijk} m_k \\ \{m_i, m_j\} = \varepsilon_{ijk} l_k \end{cases}.$$
$\{l_i, m_i\}$ — генераторы $SO(4)$.

Решение симметрии задачи Кеплера в Переломове.

Существование интегралов движения

$$L = \sum_{i,j} L_{ij} E_{ij}.$$
$$L_1 = L \otimes \mathbb{I}.$$

$$L_2 = \mathbb{I} \otimes L.$$

$$\{L_1, L_2\} = \sum \{L_{ij}, L_{kl}\} E_{ij} \otimes E_{kl}.$$

$$T_{21} = \sum T_{ijkl} E_{kl} \otimes E_{ij}.$$

$$T_{12} = \sum T_{ijkl} E_{ij} \otimes E_{kl}.$$

$$\operatorname{Tr}_1 T_{12} = \sum_{ijkl} T_{ijkl} \operatorname{Tr}(E_{ij}) E_{kl}.$$

Собственные значения L $\{\lambda_k, \lambda_l\} = 0 \Leftrightarrow \{L_1, L_2\} = [r_{12}, L_1] - [r_{21}, L_2]$.

$$H_n = \frac{1}{n} \operatorname{Tr} L^n.$$

$$\{\lambda_k, \lambda_l\} = 0 \Leftrightarrow \{H_k, H_l\} = 0.$$

$$L = U \Lambda U^{-1}.$$

$$\left\{U_1 \Lambda_1 U_1^{-1}, U_2 \Lambda_2 U_2^{-1}\right\}.$$

4 слаг. $\{U_1, U_2\}$

$$k_{12} = \{U_1, U_2\} U_1^{-1} U_2^{-1} = -k_{21}.$$

$$[[k_{12}, L_2], L_1] = [[k_{12}, L_1], L_2] = \frac{1}{2} [[k_{12}, L_2], L_1] - \frac{1}{2} [[k_{21}, L_1], L_2].$$

$$k_{21} = \{U_2, U_1\} U_2^{-1} U_1^{-1} = -k_{12}.$$

$$\{U_2, U_1\} = -\{U_1, U_2\} = \sum \frac{\partial U_1}{\partial p_i} \frac{\partial U_2}{\partial q_i} - \frac{\partial U_1}{\partial q_i} \frac{\partial U_2}{\partial p_i}.$$

4 слаг. $\{U_1, \Lambda_2\}$, $\{U_2, \Lambda_1\}$

$$q_{21} = U_2 \{U_1, \Lambda_2\} U_1^{-1} U_2^{-1}.$$

$$\{L_1, L_2\} = U_1 U_2 \{\Lambda_1, \Lambda_2\} U_1^{-1} U_2^{-1} + [r_{12}, L_1] - [r_{21}, L_2].$$