

Домашняя работа по вычислительной  
математике  
Задание 1

Драчев Ярослав  
Факультет общей и прикладной физики МФТИ  
19 марта 2021 г.

**Тема IX. Построение общего решения**

**7.19.** Найти все решения задачи на собственные значения

$$\frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{h^2} = (2 - \lambda)y_k, \quad y_0 = 0, \quad y_N = y_{N-1}, \quad h = \frac{1}{N}.$$

*Решение.* Рассмотрим эту задачу как разностное уравнение второго порядка

$$y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1} = (2 - \lambda)h^2 y_k$$

или

$$y_{k+1} + (\lambda h^2 - 4)y_k + y_{k-1} = 0.$$

Характеристическое уравнение, соответствующее данному разностному, есть

$$q^2 + (\lambda h^2 - 4)q + 1 = 0.$$

По теореме Виета имеем

$$q_1 = \frac{1}{q_2}.$$

Тогда общее решение разностного уравнения имеет вид

$$\bar{y}_n = \alpha q_1^n + \beta q_1^{-n}.$$

Подстановка в левое граничное условие даёт соотношение  $\alpha + \beta = 0$ , тогда

$$\bar{y} = \alpha (q_1^n - q_1^{-n}).$$

Теперь используем правое граничное условие

$$\alpha (q_1^N - q_1^{-N}) = \alpha (q_1^{N-1} - q_1^{-N+1}).$$

При  $\alpha = 0$  получаем тривиальное решение, которое нас не интересует. Тогда для того, чтобы удовлетворить этому уравнению, должно быть выполнено

$$q_1^N - q_1^{-N} = q_1^{N-1} - q_1^{1-N}.$$

$$\begin{aligned} q_1^{2N} - 1 &= q_1^{2N-1} - q_1. \\ (q_1^{2N-1} + 1)(q_1 - 1) &= 0. \end{aligned}$$

Откуда

$$q_1 = e^{\frac{\pi(1+2k)i}{2N-1}}, \quad k = 0, 1, \dots, N-2; \quad q_1 = 1 \text{ — тривиальное решение.}$$

Подстановка полученного решения позволяет получить решение разностного уравнения

$$\bar{y}_n^{(k)} = \alpha \left( \exp \left( \frac{\pi(1+2k)ni}{2N-1} \right) - \exp \left( -\frac{\pi(1+2k)ni}{2N-1} \right) \right) = \alpha 2i \sin \frac{\pi(2k+1)n}{2N-1}.$$

Выбирая  $\alpha = \frac{1}{2i} \sqrt{\frac{2}{l}}$ , получаем собственные функции

$$\bar{y}_n^{(k)} = \frac{2}{l} \sin \frac{\pi(2k+1)n}{2N-1}.$$

Подстановка собственных функций позволяет после ряда тригонометрических преобразований найти спектр для  $k = 0, \dots, N-2$ :

$$\begin{aligned} \lambda_{(k)} &= 2 - \frac{y_{m+1}^{(k)} - 2y_m^{(k)} + y_{m-1}^{(k)}}{y_m^{(k)} h^2} = \\ &= 2 - \frac{1}{h^2} \left( \frac{\sin \frac{\pi(2k+1)(m+1)}{2N-1} - 2 \sin \frac{\pi(2k+1)m}{2N-1} + \sin \frac{\pi(2k+1)(m-1)}{2N-1}}{\sin \frac{\pi(2k+1)m}{2N-1}} \right) = \\ &= 2 + \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{(2k+1)\pi}{4N-2}. \end{aligned}$$

**7.20.** Найти все решения задачи на собственные значения

$$\frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{h^2} = -\lambda y_k, \quad y_0 = y_1, \quad y_N = y_{N-1}, \quad h = \frac{1}{N}.$$

*Решение.* Рассмотрим эту задачу как разностное уравнение второго порядка

$$y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1} = -\lambda h^2 y_k$$

или

$$y_{k+1} + (\lambda h^2 - 2)y_k + y_{k-1} = 0.$$

Характеристическое уравнение, соответствующее данному разностному, есть

$$q^2 + (\lambda h^2 - 2)q + 1 = 0.$$

По теореме Виета имеем

$$q_1 = \frac{1}{q_2}.$$

Тогда общее решение разностного уравнения имеет вид

$$\bar{y}_n = \alpha q_1^n + \beta q_1^{-n}.$$

Подстановка в граничные условия даёт

$$\begin{cases} \alpha + \beta = \alpha q_1 + \beta q^{-1} \\ \alpha q_1^{N-1} + \beta q_1^{1-N} = \alpha q_1^N + \beta q_1^{-N} \end{cases}.$$

Откуда

$$\begin{aligned} \alpha (q_1^N - q_1^{N-1}) &= \beta (q_1^{1-N} - q_1^{-N}). \\ \beta &= \frac{q_1^N (1 - q_1^{-1})}{q_1^{-N} (q_1 - 1)} \alpha = \alpha q_1^{2N-1}. \\ \alpha (1 + q_1^{2N-1}) &= \alpha (q_1 + q_1^{2N-2}). \\ \alpha (1 + q_1^{2N-1}) &= \alpha (q_1 + q_1^{2N-2}). \\ 1 - q_1 + q_1^{2N-1} - q_1^{2N-2} &= 0. \\ (1 - q_1) (1 - q_1^{2N-2}) &= 0. \end{aligned}$$

Следовательно

$$q_1^{(k)} = e^{\frac{2\pi ki}{2N-2}}, \quad k = 0, 1, \dots, N-2; \quad q_1 = 1 \text{ — тривиальное решение.}$$

Подстановка полученного решения позволяет получить решение разностного уравнения

$$\begin{aligned} \bar{y}_n^{(k)} &= \alpha \left( \exp \left( \frac{\pi ki}{N-1} n \right) + \exp \left( \frac{\pi ki}{N-1} (2N-1-n) \right) \right). \\ \bar{y}_n^{(k)} &= \alpha \left( \exp \left( \frac{\pi ki}{N-1} n \right) + \exp \left( \frac{\pi ki}{N-1} (1-n) \right) \right). \\ \lambda_k &= \frac{1}{h^2} \left( 2 - q_1^{(k)} - \frac{1}{q_1^{(k)}} \right) = \frac{1}{h^2} \left( 2 - e^{\frac{\pi ki}{N-1}} - e^{-\frac{\pi ki}{N-1}} \right) = \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{\pi k}{2N-2}. \end{aligned}$$

**7.10.** Найти все значения параметра  $\alpha$ , при котором все решения разностного уравнения

$$13y_{k+1} + (13 + \alpha)y_k + (\alpha + 7)y_{k-1} + (\alpha + 7)y_{k-2} + (\alpha + 1)y_{k-3} + y_{k-4} = 0$$

будут ограничены при  $k \rightarrow \infty$ .

*Решение.* Характеристический многочлен для разностного уравнения в данном случае есть

$$g(q) = 13q^5 + (13 + \alpha)q^4 + (\alpha + 7)q^3 + (\alpha + 7)q^2 + (\alpha + 1)q + 1 = 0.$$

Для ограниченности решения при  $k \rightarrow \infty$  необходимо и достаточно, чтобы корни уравнения были по модулю меньше или равны единице, а на границе единичного круга не было кратных корней. Преобразуем характеристический многочлен:

$$g(q) = (q + 1) (\alpha q^3 + 13q^4 + 7q^2 + \alpha q + 1).$$

Один из корней по модулю равен единице. Теперь применим теорему Шура-Кона для определения действительных значений параметра  $\alpha$ , при которых

полином  $f(q) = 13q^4 + \alpha q^3 + 7q^2 + \alpha q + 1$  будет иметь все корни внутри единичного круга. Первое из условий теоремы выполнено:  $13 > 1$ . Найдём  $f_1(z)$ :

$$f_1(z) = 12(\alpha + \alpha z^2 + 14z^3 + 7z).$$

Для  $f_1(z)$  первое условие теоремы накладывает на исследуемый параметр условие  $14 > |\alpha|$ . Далее

$$f_2(z) = -144(\alpha^2 + (\alpha^2 - 196)z^2 - 7\alpha z - 98),$$

откуда  $196 - \alpha^2 > 98 - \alpha^2$  — всегда верно.

$$f_3(z) = -2032128(2(\alpha^2 - 147)z - 7\alpha) \text{ и } |2(\alpha^2 - 147)| > |7\alpha|.$$

Последнее неравенство верно при

$$|\alpha| < \frac{21}{2} \text{ или } |\alpha| > 14.$$

Собирая полученные условия на  $\alpha$  получаем

$$|\alpha| < \frac{21}{2}.$$

**7.12-2.** Найти общее решение системы разностных уравнений (однородных и неоднородных):

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n - y_n + n, \\ y_{n+1} = -2x_n + 2n \end{cases}.$$

*Решение.* Рассмотрим однородную систему разностных уравнений

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n - y_n, \\ y_{n+1} = -2x_n \end{cases}.$$

Для неё характеристическое уравнение будет иметь вид

$$\begin{vmatrix} 1-q & -1 \\ -2 & -q \end{vmatrix} = q^2 - q - 2 = 0.$$

Корни данного уравнения

$$q_1 = -1, \quad q_2 = 2$$

— действительны и различны, тогда общее решение однородной системы представляется в виде

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} (-1)^n + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} 2^n.$$

Частное решение неоднородного уравнения будем искать в виде

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} n + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}.$$

Подставляя в уравнение, получаем

$$\begin{cases} a(n+1) + c = an + c - bn - d + n \\ b(n+1) + d = -2an - 2c + 2n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + bn + d = n \\ 2an + bn + b + 2c + d = 2n \end{cases}$$

Положим  $b = 1$ , тогда  $a = -d$  и

$$2an + 1 + 2c - a = n.$$

Полагая  $a = 1/2$  получаем  $c = -1/4$ . Откуда частное решение неоднородной системы

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} n - \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/2 \end{pmatrix}.$$

Общее решение исследуемой неоднородной разностной системы уравнений представляется как сумма её частного решения и общего решения, соответствующей ей, однородной разностной системы:

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} (-1)^n + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} 2^n + \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} n - \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/2 \end{pmatrix}.$$

**7.15-2.** Найти общее решение неоднородной системы разностных уравнений

$$\begin{cases} x_{n+1} = -2x_n + 3y_n + 5 \cdot 2^n - 6 \\ y_{n+1} = -3x_n + 8y_n + 30 \cdot 2^n - 2 \end{cases}.$$

*Решение.* Сперва найдём решение однородной системы аналогично предыдущей задаче

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} 7^n + c_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} (-1)^n.$$

Частное решение будем искать в виде

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} 2^n + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}.$$

Подставляя, получаем

$$\begin{cases} a \cdot 2^{n+1} + c = -2a \cdot 2^n - 2c + 3b \cdot 2^n + 3d + 5 \cdot 2^n - 6 \\ b \cdot 2^{n+1} + d = -3a \cdot 2^n - 3c + 8b \cdot 2^n + 8d + 30 \cdot 2^n - 2 \end{cases}.$$

Откуда

$$\begin{cases} 2a = -2a + 3b + 5 \\ 2b = -3a + 8b + 30 \\ c = -2c + 3d - 6 \\ d = -3c + 8d - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -4 \\ b = -7 \\ c = -3 \\ d = -1 \end{cases}.$$

Следовательно, общее решение исследуемой неоднородной системы будет иметь вид

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} 7^n + c_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} (-1)^n - \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix} 2^n - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

## Тема X. Жёсткие системы ОДУ

7.1. Уравнение Ван-дер-Поля записано в виде системы второго порядка

$$\begin{cases} y_1' = 1000 \left( y_1 - \frac{y_1^3}{3} \right) + y_2, \\ y_2' = -y_1 \end{cases}.$$

Определить тип особой точки системы. Найти, в какой части фазового пространства задача является жёсткой. Определить показатель жёсткости системы.

*Решение.* В окрестности нуля:

$$\begin{cases} y_1' = 1000y_1 + y_2 \\ y_2' = -y_1 \end{cases}.$$

Собственными значениями матрицы

$$\begin{pmatrix} 1000 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

будут

$$\lambda_{1,2} = 500 \pm \sqrt{500^2 - 1}.$$

Собственные значения положительны и различны, следовательно особая точка данной системы — неустойчивый узел.

Матрица Якоби данной системы:

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 1000(1 - y_1^2) & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Её спектр:

$$\lambda_{1,2} = 500(1 - y_1^2) \pm \sqrt{500^2(1 - y_1^2)^2 - 1}.$$

Сделаем замену

$$x = 500(1 - y_1^2) \in (-\infty, 500).$$

Тогда

$$\lambda_{1,2} = x \pm \sqrt{x^2 - 1}.$$

При  $|x| \geq 1$  получаем чисто действительные собственные значения, при  $|x| < 1$

$$\lambda_{1,2} = x \pm i\sqrt{1 - x^2}$$

— комплексно-сопряжённые собственные значения, лежащие на единичной окружности на комплексной плоскости. То есть при  $|x| \leq 1$  в полученном наборе собственных значений присутствует лишь мягкий спектр, и, как следствие, система — не жёсткая.

Критерием жёсткости системы для данной задачи будет наличие таких наименьших положительных  $\lambda$  и  $\Lambda$ , что

$$|\lambda_1| \leq \lambda, \quad \operatorname{Re} \lambda_2 \leq -\Lambda, \quad |\operatorname{Im} \lambda_2| \leq \Lambda, \quad \frac{\Lambda}{\lambda} \ll 1.$$

Для случая чисто действительных собственных значений последнее неравенство автоматически выполнено, второе неравенство накладывает обязательное условие наличия хотя бы одного отрицательного собственного значения. Так как для  $|x| \geq 1$  выполняется неравенство

$$|x| \geq \sqrt{x^2 - 1},$$

то выражение

$$x \pm \sqrt{x^2 - 1}$$

имеет шансы быть отрицательным лишь при отрицательных  $x$ . Ну а для  $x \leq -1$  можно уже однозначно сказать, что

$$\left| x + \sqrt{x^2 - 1} \right| \leq \left| x - \sqrt{x^2 - 1} \right|.$$

Согласно данному выше определению можем найти  $\lambda$  и  $\Lambda$  для рассматриваемого случая:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \lambda_+ &= x - \sqrt{x^2 - 1} = -\Lambda, \\ |\lambda_-| &= -x - \sqrt{x^2 - 1} = \lambda. \end{aligned}$$

Тогда критерием жёсткости системы будет оценка

$$\frac{\Lambda}{\lambda} = \frac{x - \sqrt{x^2 - 1}}{x + \sqrt{x^2 - 1}} = 2x \left( x - \sqrt{x^2 - 1} \right) - 1 \gg 1.$$

Она будет выполняться тем лучше, чем  $x$  ближе к  $-\infty$ . Раскладываясь по Тейлору в окрестности  $-\infty$ , упрощаем оценку

$$2x \left( x - \sqrt{x^2 - 1} \right) - 1 \sim 4x^2 \gg 1.$$

Для численной оценки выберем произвольно минимальный коэффициент жёсткости  $\alpha \gg 1$  жёсткой системы. Тогда любая система будет жёсткой, если её коэффициент жёсткости не меньше  $\alpha$ . То есть

$$4x^2 \geq \alpha.$$

Возвращаясь к исходным переменным, получаем условие на жёсткость системы:

$$10^6 (1 - y_1^2)^2 \geq \alpha.$$

Вид решения зависит от параметра  $\alpha$  и представлен на рис. 1. От  $y_2$ , как мы выяснили, жёсткость системы не зависит.

**7.2.** Получить функции устойчивости всех явных методов Рунге–Кутты с порядком аппроксимации с первого до седьмого с минимальным числом стадий.

*Решение.* Так как

$$u_{n+1} = e^{\lambda h} u_n, \quad y_{n+1} = R(\lambda h) y_n, \quad |u_{n+1} - y_{n+1}| = O(h^{p+1}) = O(z^{p+1}),$$

где  $\lambda h = z$ , то у  $R(z)$  и  $e^z$  ряды Тейлора совпадают вплоть до порядка аппроксимации  $p$ . Известно, что для  $p \leq 4$  существуют ЯМРК с числом стадий  $s = p$ .

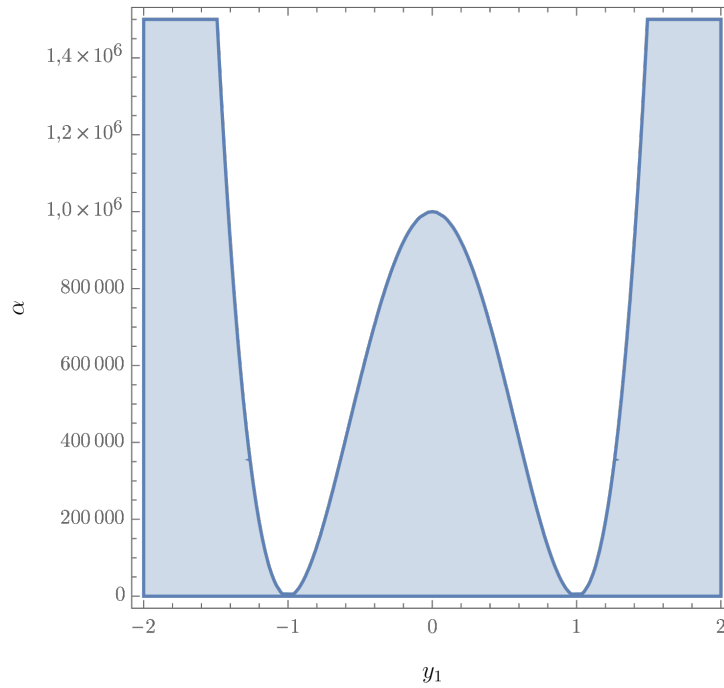


Рис. 1

Для  $p$  от 1 до 4 найдутся  $s$ -стадийные методы с числом стадий равным порядку аппроксимации, значит для таких методов функция устойчивости  $R(z)$  не будет зависеть от конкретного вида таблицы Бутчера и будет равна

$$R(z) = 1 + z + \dots + \frac{z^s}{s!},$$

Далее, после так называемого первого барьера Бутчера, методы с  $p \geq 5$  будут, как минимум  $s + 1$ -стадийные:

$$p = 5 : \quad R(z) = 1 + z + \frac{z^5}{5!} + C_6 z^6,$$

$$p = 6 : \quad R(z) = 1 + z + \dots + \frac{z^6}{6!} + C_7 z^7,$$

где  $C_6$  и  $C_7$  зависят от таблицы Бутчера. После второго барьера Бутчера ( $p \geq 7$ ) методы будут как минимум  $s + 2$ -стадийные:

$$p = 7 : \quad R(z) = 1 + z + \dots + \frac{z^7}{7!} + C_8 z^8 + C_9 z^9,$$

где, как и раньше,  $C_8$  и  $C_9$  зависят от конкретного вида таблицы Бутчера.

**7.3.** Вывести условия порядка для всех двухстадийных НМРК вплоть до четвертого.

*Решение.* Задача решалась при помощи пакета Mathematica:



```

In[1]:= s=2;
F[h_, i_] := f[x_n + c_i h, y_n + h Sum[a_i, j k_j [h]]
list1=CoefficientList[Normal[Series[
y_n + h Sum[b_i f[x_n + c_i h, y_n + h Sum[a_i, j k_j [h]], {h, 0, 4}]]] /. {
Derivative[i_][k_j_][_] -> Derivative[i, 0][F][0, j],
k_i_[0] -> f[x_n, y_n]}, h];
list2=CoefficientList[Normal[Series[
u[x_n + h], {h, 0, 4}]]
//.Derivative[i_][u][_] ->
D[f[x_n, u[x_n]], {x_n, i-1}]/.u[x_n] -> u_n, h];
set=Table[Derivative[m, p][f][x_n, u_n],
{m, 0, 3}, {p, 0, 3-m}]/Flatten;
Map[#==0&, DeleteCases[CoefficientList[
#, set]&/@Flatten[{list1-list2//Thread}/.y_n -> u_n
], 0, infinity]]//Flatten//Simplify

Out[6]= {b1+b2==1, 2 b1 c1+2 b2 c2==1, 2 b1 (a1,1+a1,2)+2
b2 (a2,1+a2,2)==1, 3 b1 c1^2+3 b2 c2^2==1, 6 b1 (c1
a1,1+c2 a1,2)+6 b2 (c1 a2,1+c2 a2,2)==1, 3 b1 c1
(a1,1+a1,2)+3 b2 c2 (a2,1+a2,2)==1, 6 b1 (a1,1^2+a1,1
a1,2+a1,2 (a2,1+a2,2))+6 b2 (a1,1 a2,1+a1,2 a2,1+a2,2
(a2,1+a2,2))=1, 3 b1 (a1,1+a1,2)^2+3 b2 (a2,1+a2,2)^2==1, 4
b1 c1^3+4 b2 c2^3==1, 8 b1 c1 (c1 a1,1+c2
a1,2)+8 b2 c2 (c1 a2,1+c2 a2,2)==1, 12 (b1 (c1^2
a1,1+c2^2 a1,2)+b2 (c1^2 a2,1+c2^2 a2,2))=1, b1
(c1 (a1,1^2+a1,2 a2,1)+c2 a1,2 (a1,1+a2,2))+b2
(c1 a2,1 (a1,1+a2,2)+c2 (a1,2 a2,1+a2,2^2))=1, 4
b1 c1^2 (a1,1+a1,2)+4 b2 c2^2 (a2,1+a2,2)=1, 8 b1
(a1,1+a1,2) (c1 a1,1+c2 a1,2)+8 b2 (a2,1+a2,2)
(c1 a2,1+c2 a2,2)=1, b1 (c2 a1,2 (a2,1+a2,2)+c1
(2 a1,1^2+2 a1,1 a1,2+a1,2 (a2,1+a2,2)))+b2 (c1 (a1,1+a1,2)
a2,1+c2 (a1,1 a2,1+a1,2 a2,1+2 a2,2 (a2,1+a2,2)))=5, b2
(a1,1^2 a2,1+a1,1 a2,1 (a1,2+a2,2)+a2,2^2 (a2,1+a2,2)+a1,2
a2,1 (a2,1+2 a2,2))+b1 (a1,1^3+a1,1^2 a1,2+a1,1 a1,2
(2 a2,1+a2,2)+a1,2 (a1,2 a2,1+a2,2 (a2,1+a2,2)))=1, 4
b1 c1 (a1,1+a1,2)^2+4 b2 c2 (a2,1+a2,2)^2==1, 3
b2 (a1,1 a2,1+a1,2^2 a2,1+2 a1,2 a2,1 (a2,1+a2,2))+3
a2,2 (a2,1+a2,2)^2+2 a1,1 a2,1 (a1,2+a2,1+a2,2))+3
b1 (3 a1,1^3+6 a1,1^2 a1,2+a1,2 (a2,1+a2,2) (2 a1,2+a2,1+a2,2))+a1,1
a1,2 (3 a1,2+2 (a2,1+a2,2)))=1, 4 b1 (a1,1+a1,2)^3+4 b2
(a2,1+a2,2)^3==1}

```

#### 7.4. Для системы ОДУ

$$\dot{x}_1 = 98x_1 + 198x_2, \dot{x}_2 = -99x_1 - 199x_2$$

численное решение задачи Коши с начальными данными

$$x_1(0) = 1, \quad x_2(0) = 1$$

получают явными методами Рунге-Кутты 1,2,3 и 4 порядков аппроксимации с числом стадий, равным порядку аппроксимации. При каких шагах  $\tau$  каждый из методов устойчив? Объяснить, почему для методов с числом стадий 2 и 3 и с числом стадий 2 и 4 развитие неустойчивости носит качественно различный характер.

*Решение.* Матрица данной системы ОДУ

$$A = \begin{pmatrix} 98 & 198 \\ -99 & -199 \end{pmatrix}$$

имеет собственные значения

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = -100.$$

Так как оба собственных значения — вещественные, то функция устойчивости  $R(z)$  также вещественная. Для исследуемых методов Рунге-Кутты

$$R(z) = \sum_{n=0}^p \frac{z^n}{n!}, \quad z = \lambda\tau.$$

1.  $p = 1$ :

$$|R(z)| = |1 + z| \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq z \leq 0.$$
$$\begin{cases} \tau \leq 2/\lambda_1 \\ \tau \leq 2/\lambda_2 \end{cases} \Rightarrow \tau \leq 0,02.$$

2.  $p = 2$ :

$$|R(z)| = \left| 1 + z + \frac{z^2}{2} \right| \leq 1.$$
$$-2 \leq z \leq 0 \Rightarrow \tau \leq 0.$$

3.  $p = 3$ :

$$|R(z)| = \left| 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} \right| \leq 1 \Rightarrow -2,513 \leq z \leq 0.$$
$$\tau \leq 0,025.$$

4.  $p = 4$ :

$$|R(z)| = \left| 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \frac{z^4}{24} \right| \leq 1 \Rightarrow -2,785 \leq z \leq 0.$$
$$\tau \leq 0,027.$$

Характер неустойчивости:

1. Для 1 и 3 порядка  $R(z) < -1$  при  $\tau > \tau_{\text{гр}}$ ,  $y_{n+1} = R(z)y_n$ ;  $y_0 = 1 \Rightarrow$  будут происходить осцилляции с увеличивающейся амплитудой до бесконечности

$\gamma$	$\gamma$
$1 - \gamma$	$1 - 2\gamma$
	$\frac{1}{2}$
	$\frac{1}{2}$

Таблица 1

2. Для 2 и 4 порядка  $R(z) > 1 \implies$  нет осцилляций, поэтому монотонный неограниченный рост.

**7.5.** Рассматривается следующее параметрическое семейство однократно диагонально-неявных методов Рунге-Кутты (табл. 1). Найти все значения параметра, при которых

- метод имеет третий порядок аппроксимации;
- метод является асимптотически устойчивым;
- метод является  $A$ -устойчивым.

*Решение.* 1.  $\bullet \sum_{i=1}^2 b_i = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$  — первый порядок;

$$\bullet \sum_{i=1}^2 b_i c_i = \frac{\gamma}{2} + \frac{1}{2} - \frac{\gamma}{2} = \frac{1}{2} \text{ — второй порядок;}$$

$$\bullet \sum_{i=1}^2 b_i c_i^2 = \frac{\gamma^2}{2} + \frac{\gamma^2 - 2\gamma + 1}{2} = \gamma^2 - \gamma + \frac{1}{2} = \frac{1}{3};$$

$$\sum_{i=1}^2 b_i \sum_{j=1}^2 a_{ij} c_j = \gamma - \gamma^2 = \frac{1}{6};$$

$$\begin{cases} \gamma^2 - \gamma + \frac{1}{6} = 0 \\ \gamma^2 - \gamma + \frac{1}{6} = 0 \end{cases} \implies \gamma_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - \frac{2}{3}}}{2} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

— третий порядок при  $\gamma = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2\sqrt{3}}$ .

$$2. R(z) = \frac{\det(\mathbf{E} - z\mathbf{A} + z\mathbf{e}\mathbf{b}^T)}{\det(\mathbf{E} - z\mathbf{A})} = \frac{z(-4\gamma + 2(\gamma - 2)\gamma z + z + 2) + 2}{2(\gamma z - 1)^2}$$

$$\lim_{\operatorname{Re} z \rightarrow -\infty} = 1 - \frac{1}{2\gamma^2} - \frac{2}{\gamma} = 0 \implies 2\gamma^2 - 4\gamma + 1 = 0.$$

$$\gamma_{1,2} = 1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

3.

$$\begin{cases} |R(z)| \leq 1 \\ \operatorname{Re} z \leq 0 \end{cases} \implies \gamma \geq \frac{1}{4}.$$

**7.12.** Исследовать на  $A(\alpha)$ -устойчивость схему:

$$4 \frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2h} - 3 \frac{y_{n+1} - y_n}{h} = f_n.$$

Решение.

$$4 \frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2h} - 3 \frac{y_{n+1} - y_n}{h} = f_n = \lambda y_n.$$

$$2y_{n+1} - 2y_{n-1} - 3y_{n+1} + 3y_n = zy_n.$$

$$y_{n+1} - (3 - z)y_n + 2y_{n-1} = 0.$$

$$y_{n+1} = R(z)y_n = R^2(z)y_{n-1}.$$

$$R^2(z) - (3 - z)R(z) + 2 = 0 \implies R_{1,2}(z) = \frac{3 - z \pm \sqrt{z^2 - 6z + 1}}{2}.$$

Области

$$|R_1(z)| \leq 1 \text{ и } |R_2(z)| \leq 1$$

представлены на рис. 2. Они не пересекаются, следовательно исследуемая

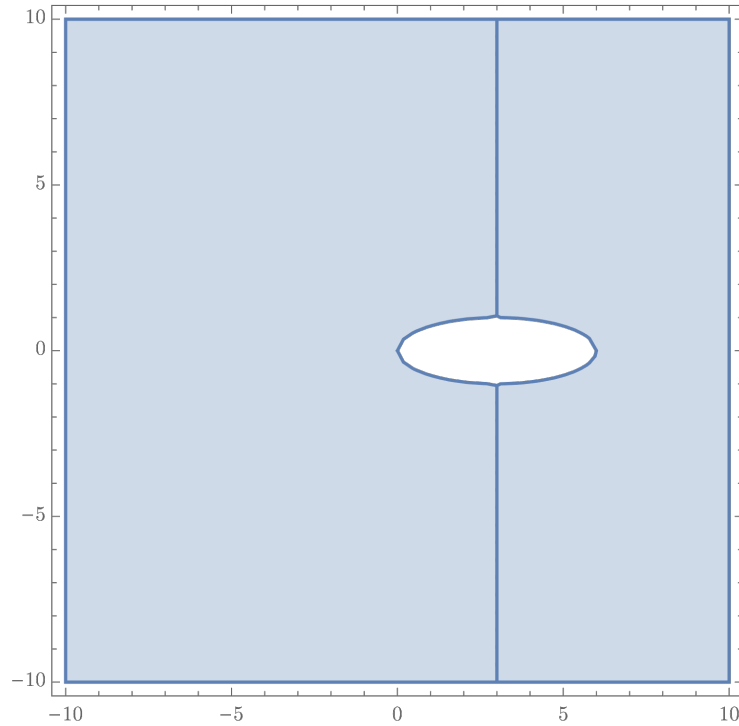


Рис. 2

схема не  $A(\alpha)$ -устойчива.

**7.16.** Исследовать на аппроксимацию метод решения задачи Коши для ЖС ОДУ (табл. 2). При необходимости внести изменения в таблицу Бутчера для повышения порядка аппроксимации метода. Определить тип устойчивости на действительной оси модифицированной схемы.

$-\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$	
$1/2 - \sqrt{2}/2$	$-1/2$	$1 - \sqrt{2}/2$
	$\sqrt{2}$	$1 - \sqrt{2}$

Таблица 2

*Решение.* Условие порядка не ниже первого

$$\sum_{i=1}^2 b_i = 1$$

выполнено. Условие по крайней мере второго порядка аппроксимации:

$$\sum_{i=1}^2 b_i c_i = \frac{1}{2} - \sqrt{2} \neq \frac{1}{2}$$

не выполнено, следовательно порядок аппроксимации метода  $p = 1$ . Для повышения порядка аппроксимации метода до второго, необходимо заметить

$$c_{22} \rightarrow -\frac{3}{2} (1 + \sqrt{2}).$$

Тогда последнее условие будет также выполнено.

$$R(z) = \frac{\det(\mathbf{E} - z\mathbf{A} + z\mathbf{e}\mathbf{b}^T)}{\det(\mathbf{E} - z\mathbf{A})} = -\frac{(\sqrt{2} - 2)z^2 + 2(1 + \sqrt{2})z + 2}{(\sqrt{2} - 1)(z - 2)z - 2}.$$

Условие

$$|R(z)| \leq 1$$

будет выполнено при

$$2\sqrt{2} - 2\sqrt{3} \leq z \leq 0 \text{ или } 2\sqrt{2} + 2\sqrt{3} \leq z \leq -\frac{4}{2\sqrt{2} - 3}.$$

Значит на этих промежутках метод абсолютно устойчив.

**7.19.** Исследовать свойства монотонности следующих схем:

- а) формулы трапеций,
- б) явной и неявной схем Эйлера,
- в) схемы Розенброка с комплексными коэффициентами.

*Решение.* а) Формула метода трапеции:

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{h} = \frac{1}{2} (f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})).$$

С учётом уравнения Далквиста

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + \frac{h\lambda}{2} y_n + \frac{h\lambda}{2} y_{n+1} \implies y_{n+1} \left(1 - \frac{z}{2}\right) = \\ &= y_n \left(1 + \frac{z}{2}\right) \implies y_{n+1} = y_n \left(\frac{2+z}{2-z}\right) \implies R(z) = \frac{2+z}{2-z}. \end{aligned}$$

Видим, что на отрицательной части действительной оси  $R(z)$  не всегда положительна, значит схема трапеции не является монотонной.

б) Для явной и неявной схем Эйлера известно, что

$$R(z) = 1 + z, \quad R(z) = \frac{1}{1 - z}$$

соответственно. Легко видеть, что первая не будет монотонной, а вторая будет.

в) Для CROS

$$R(z) = \frac{1}{1 - z + \frac{z^2}{2}}.$$

Схема будет монотонной, поскольку на отрицательной части действительной оси знаменатель  $R(z)$  положительный.

**8.8.** Выберите значение  $y_1$  таким образом, чтобы соответствующее решение разностного уравнения

$$y_{n+1} = y_{n-1} + 2h(-2y_n + 1)$$

с  $y_0 = 1$  стремилось к нулю при  $n \rightarrow \infty$ . Составьте программу, реализующую численное решение уравнения как с найденным значением  $y_1$ , так и со значением  $y_1$ , задаваемым формулой  $y_1 = 0.5e^{-2h} + 0.5$ . Проанализируйте получающиеся результаты.

*Решение.* Для однородной задачи можем записать

$$y_{n+1} - 4hy_n - y_{n-1} = 0.$$

$$q^2 + 4hq - 1 = 0.$$

$$q_{1,2} = -2h \pm \sqrt{4h^2 + 1}.$$

$$|q_1| < 1, \quad q_1 > 0, \quad |q_2| > 1, \quad q_2 < 0.$$

Общее решение разностной задачи можем записать как

$$y_n = \alpha q_1^n + \beta q_2^n + \frac{1}{2}.$$

$$y_0 = \alpha + \beta + \frac{1}{2} = 1 \implies \alpha + \beta = \frac{1}{2}.$$

Чтобы решение сходилось к  $\frac{1}{2}$  нужно положить  $\beta = 0$ ,  $\alpha = \frac{1}{2}$ , тогда

$$y_n = \frac{1}{2} (q_1^n + 1).$$

$$y_1 = \frac{1}{2} (1 - 2h + \sqrt{4h^2 + 1}).$$

Если же исходить из заданного изначально  $y_1 = 0.5e^{-2h} + 0.5$ , получим

$$y_1 = \left(\frac{1}{2} - \beta\right) q_1 + \beta q_2 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} (e^{-2h} + 1).$$

Откуда

$$\beta = \frac{e^{-2h} (e^{2h} q_1 - 1)}{2(q_1 - q_2)} = \frac{\sqrt{4h^2 + 1} - 2h - e^{-2h}}{4\sqrt{4h^2 + 1}} = \frac{h^3}{3} + O(h^4) \neq 0.$$

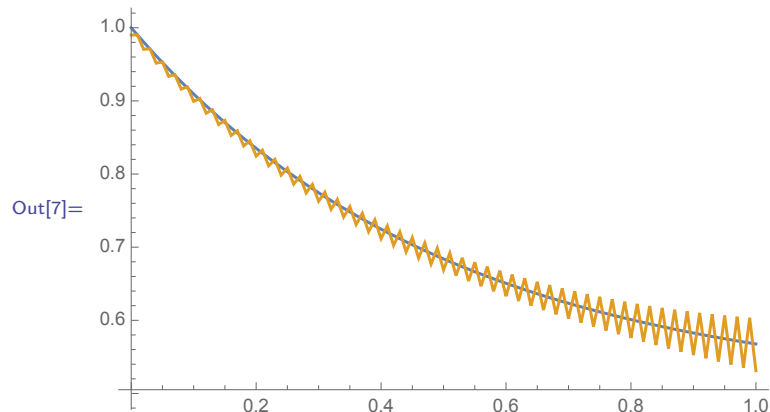
Следовательно, решение, построенное данным методом будет расходиться.

Реализация обоих методов в пакете Mathematica:

```

In[7]:= y1,0=1.;
h=.01;
y1,1=1/2(1-2 h+sqrt(1+4 h^2));
y2,1=0.5+0.5e^-2h;
y_{i,n}:=y_{i,n}=y_{i,n-2}+2.h(-2.y_{i,n-1}+1.)
ListLinePlot[Table[{h n,y_{i,n}},{i,2},{n,0,100}]]

```



## Тема XI. Численное решение ОДУ: краевые задачи

**7.2.** Для численного отыскания периодического с периодом единица решения уравнения

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x),$$

где  $f, q, p$  — заданные функции, используется разностная схема второго порядка аппроксимации с центральной разностью

$$\frac{y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}}{h^2} + p_n \frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2h} + q_n y_n = f_n.$$

Предложить модификацию метода прогонки (периодическая прогонка) для решения данной задачи.

*Решение.* Рассмотрим следующую краевую задачу для уравнения:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$$

с условиями периодичности

$$y^{(p)}(0) = y^{(p)}(1),$$

где  $p$  принимает значения 0 и 1.

Краевая задача с условиями периодичности решается методом циклической прогонки. Запишем дискретный аналог уравнения:

$$\frac{y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}}{h^2} + p_n \frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2h} + q_n y_n = f_n.$$

Очевидно, что оно аппроксимирует дифференциальную задачу со вторым порядком на равномерной сетке. На случай неравномерной сетки рассматриваемый метод легко обобщается.

В силу периодичности дискретное уравнение должно выполняться во всех точках сетки, включая граничные. Кроме того, в силу граничного условия при  $p = 0$   $y_0 = y_{N+1}$ . Система сеточных соотношений примет вид

$$\begin{aligned} a_0 y_N - b_0 y_0 + c_0 y_1 &= \varphi_0, \\ &\dots \\ a_n y_{n-1} - b_n y_n + c_n y_{n+1} &= \varphi_n \\ &\dots \\ a_N y_{N-1} - b_N y_N + c_N y_0 &= \varphi_N, \end{aligned}$$

где  $a_k = 1 - 0.5p_k h$ ,  $b_k = 2 - q_k h^2$ ,  $c_k = 1 + 0.5p_k h$ ,  $\varphi_k = f_k h^2$ . Матрица системы линейных уравнений получается «почти трёхдиагональной» — от трёхдиагональной её отличают всего два элемента в углах матрицы.

Обобщение стандартных прогоночных соотношений (для трёхточечной прогонки) на периодический случай будет иметь вид

$$y_{n-1} = \alpha_n y_n + \beta_n \gamma_n y_N.$$

Из приведённого выше соотношения для  $y_0$  сразу получаем, что

$$\alpha_1 = \frac{c_0}{b_0}, \quad \beta_1 = -\frac{\varphi_0}{b_0}, \quad \gamma_1 = \frac{a_0}{b_0}.$$

Теперь несложно получить рекуррентную зависимость для прогоночных коэффициентов:

$$a_{k+1} = \frac{c_k}{b_k - \alpha_k a_k}, \quad \beta_{k+1} = \frac{a_k \beta_k - \varphi_k}{b_k - \alpha_k a_k}, \quad \gamma_{k+1} = \frac{a_k \gamma_k}{b_k - \alpha_k a_k}.$$

По приведённым выше формулам получаются значения коэффициентов для всех уравнений с номерами меньше, чем  $N$ . Это уже известный прямой ход прогонки слева направо.

Подставим теперь прогоночные соотношения в последнее уравнение линейной системы. В итоге с учётом введённых выше обозначений получаем

$$a_N (\alpha_N y_N + \beta_N + \gamma_N y_N) - b_N y_N + c_N y_0 = \varphi_N,$$

а это соотношение, сгруппировав члены, можно переписать как

$$y_N = \mu_N y_0 + \nu_N,$$

где введены обозначения

$$\mu_N = \frac{-c_N}{a_N (\alpha_N + \gamma_N) - b_N}, \quad \nu_N = \frac{\varphi_N - a_N \beta_N}{a_N (\alpha_N + \gamma_N) - b_N}.$$

Теперь выражение для значения сеточной функции  $y_{n-1}$  подставляем в прогоночные соотношения. Получается выражение, связывающее  $y_{n-1}$  с  $y_0$ :

$$y_{n-1} = \alpha_n (\mu_N y_0 + \nu_N) + \beta_n + \gamma_n (\mu_N y_0 + \nu_N).$$



Отсюда получаем следующие рекуррентные соотношения:

$$\mu_{n-1} = \alpha_n \mu_n + \gamma_n \mu_N, \quad \nu_{n-1} = \beta_n + \alpha_n \nu_n + \gamma_n \nu_N.$$

Отметим, что эти коэффициенты вычисляются в обратном порядке справа налево — аналог обратного хода прогонки. Последнее соотношение приводит к явному выражению для  $y_0$ . В результате получаем

$$y_0 = \frac{\nu_0}{1 - \mu_0}.$$

Теперь информации для определения значений искомой функции во всех точках сетки (ещё один ход прогонки) достаточно.

**8.1.** Описать алгоритм численного построения общего решения для следующих дифференциальных уравнений:

а)  $y'' - (10 + x)y = ze^{-x}, 0 < x < 10;$

б)  $y'' + (10 + x)y = xe^{-x}, 0 < x < 10.$

*Решение.* Имеем уравнение:

$$y'' \mp (10 + x)y = xe^{-x}, \quad 0 < x < 10.$$

Представим решение в виде:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + y_3.$$

Где  $y_1, y_2$  — решения задачи Коши для однородного уравнения:

$$\begin{aligned} y_1'' \mp (10 + x)y_1 &= 0 \\ y_1(0) &= 1, \\ y_1(10) &= 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_2'' \mp (10 + x)y_2 &= 0 \\ y_2(0) &= 0, \\ y_2(10) &= 1. \end{aligned}$$

А  $y_3$  — частное решение:

$$\begin{aligned} y_3'' \mp (10 + x)y_3 &= xe^{-x}, \\ y_3(0) = y_3(10) &= 0. \end{aligned}$$

Найдем общие решения:

Первое решение:

$$\begin{aligned} \frac{y_2 - 2y_1 + 1}{h^2} \mp (10 + h)y_1 &= 0 \\ \frac{y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}}{h^2} \mp (10 + x_n)y_n &= 0 \\ \frac{-2y_{N-1} + y_{N-2}}{h^2} \mp (10 + x_{N-1})y_{N-1} &= 0. \end{aligned}$$

Тогда имеется матрица:

$$\frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} -2 \mp (10+h)h^2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & -2 \mp (10+x_2)h^2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -2 \mp (10+x_{N-2})h^2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -2 \mp (10+x_{N-1})h^2 \end{pmatrix}$$

С вектором правой части

$$f_1 = \frac{1}{h^2}(-1, 0, \dots, 0)^T.$$

И мы решаем систему

$$Ay = f_1.$$

Здесь за  $A$  обозначена матрица, выписанная выше. Если мы решаем задачу для  $y_2$ , то поменяется только вектор правой части на

$$f_2 = \frac{1}{h^2}(0, \dots, 0, -1)^T.$$

А если решать для  $y_3$ , то, конечно тоже меняется только правая часть:

$$f_3 = (x_1 e^{-x_1}, x_2 e^{-x_2}, \dots, x_{N-1} e^{-x_{N-1}})^T.$$

Как же решать эти системы? Матрицы являются трехдиагональными, поэтому достаточно использовать метод прогонки. Заметим, что в системе имеется строгое диагональное преобладание:

$$|2 + (10+h)h^2| > 2.$$

Для знака "минус". К тому же

$$P_1 = \frac{c_0}{b_0} = \frac{1}{2 + (10+h)h^2} < 1.$$

Поэтому метод устойчив.

В другом случае получается, что метод прогонки неустойчив, поэтому будем строить наши решения, решая не краевую задачу, а задачу Коши:

$$\begin{aligned} y_1'' + (10-x)y_1 &= 0, \\ y_1(0) &= 0, \\ y_1'(0) &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_2'' + y_2(10-x) &= 0, \\ y_2(0) &= 1, \\ y_2'(0) &= 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y_3'' + y_3(10 - x) &= xe^{-x}, \\ y_3(0) &= y_3'(0) = 0.\end{aligned}$$

Теперь можно перейти к форме системы:

$$\begin{aligned}u' &= v, \\ v' &= -(t + 10)u + te^{-t}.\end{aligned}$$

Якобиан этой системы:

$$Df = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -(t + 10) & 0 \end{pmatrix}$$

Отсюда собственные числа:

$$\lambda_{\pm} = \pm i\sqrt{t + 10}.$$

То есть траектории ограничены. Поэтому имеет смысл искать какой-то метод для решения этих задач. Чтобы решить каждую из систем можно воспользоваться, например, методами из прошлой темы.

**8.2в.** Используя метод Ньютона, найти следующее приближение к решению краевой задачи:

$$y'' + (y')^2 - 8 \exp(y - x) + 23 = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1.$$

В качестве начального приближения взять  $y^0(x) = x$ .

*Решение.* Необходимо сделать подстановку

$$y = y^0(x) + v(x).$$

Тогда получается

$$(v' + 1)^2 + v'' - 8e^v + 23 = 0.$$

После линеаризации:

$$2v' + v'' - 8v + 16 = 0.$$

Так как нулевое приближение уже выполняет граничные условия, то граничные условия на поправку имеют вид

$$v(0) = v(1) = 0.$$

Собственно, само приближение:

$$y^1(x) = x + \frac{2(-e^{4-4x} - (1 + e^2)e^{2x} + 1 + e^2 + e^4)}{1 + e^2 + e^4}.$$

**8.3\*.** Найти наименьшее число  $\lambda$ , при котором следующая задача имеет нетривиальное решение:

$$\begin{cases} y'' + (\lambda - x^2)y = 0, & x \in [0, 1] \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases}.$$

Найти начальное приближение для наименьшего собственного значения и указать алгоритм его дальнейшего нахождения с заданной точностью.

Решение. Имеем задачу Коши:

$$\begin{cases} y'' + (a - x^2)y = 0, & x \in [0, 1] \\ y(0) = y(1) = 0. \end{cases}$$

Хотим найти наименьшее  $a$ , при котором задача имеет решение. Давайте возьмем сетку с шагом  $h$  и используем разностную схему второго порядка:

$$\frac{y_2 - 2y_1}{h^2} + (a - x_1^2)y_1 = 0 \frac{y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}}{h^2} + (a - x_n^2)y_n = 0 \frac{-2y_{N-1} + y_{N-2}}{h^2} + (a - x_{N-1}^2)y_{N-1} = 0.$$

Эта система задается матрицей:

$$\frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} -2 + (a - x_1^2)h^2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & -2 + (a - x_2^2)h^2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -2 + (a - x_{N-2}^2)h^2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -2 + (a - x_{N-1}^2)h^2 \end{pmatrix}$$

С нулевой правой частью. Поэтому условие совместности выражается в виде условия

$$\det A = 0.$$

Таким образом, мы имеем уравнение, которое для произвольного  $h$  в принципе можно выписать, но, казалось бы, лучше оставить эту идею, и работать с определителем, как с какой-то функцией, заданной таблицей — мы умеем ее вычислять через методы линейной алгебры, например. Если же метод окажется слишком дорогим, то матрицу можно в целом сначала диагонализировать методом прогонки, а потом просто перемножить диагональные элементы — скорее всего при очень больших шагах это будет существенно быстрее (предполагается, что нам понадобится большое число шагов, ведь арифметика конечна, поэтому ошибка округления может стать слишком большой).

Итак, на каждом фиксированном  $h_i$  мы умеем считать  $\det A(a)$ . С помощью какого-нибудь метода Ньютона, где производные аппроксимируются значениями функции  $\det A(a)$  или же, с помощью формулы производной определителя посчитаны напрямую, мы можем решать уравнение  $\det A(a) = 0$ , беря в качестве начального приближения  $a$  с прошлого шага разбиения  $h_{i-1}$ . Так как определитель это просто многочлен все условия сходимости выполнены.

Теперь у нас имеется функция  $a(h)$  на сетке по  $h$ . Ее можно интерполировать какими-то полиномами, например  $x^i$ , а шаг брать  $h_k = 1/(k + 1)$ . Ожидаем регулярную функцию  $a(h)$ , поэтому в самом худшем случае должен сходиться ряд Тейлора от этой функции. В таком случае, грубой оценкой можно ожидать, что

$$\frac{\max |f^{(n+1)}(0)|}{(n + 1)!} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Что следует из необходимого условия сходимости. Понятно, что производная в нуле существенно определяет оценку по всему отрезку, так как если что-то пойдет не так на конце около  $h = 1$ , то мы просто отдалимся от этого конца. В итоге ошибка для интерполяции будет равна

$$E(h) = \frac{\max_h |a^{(n+1)}(h)|}{(n+1)!} \prod |h - h_k| \sim \prod |h - h_k|.$$

В нуле же получается

$$E(h) \sim \frac{1}{N!}.$$

Подобный выбор многочленов  $x^i$  автоматически зануляет функцию Лебега в нуле, поэтому можно считать, что погрешность задается  $E(h)$ .

Найдем первую итерацию, то есть решение при  $k = 1$ :

$$h = 1/2, \left\{ -2y_1 + (a - (1/2)^2)(1/2)^2 y_1 = 0 \right.$$

**8.4в,д.**

*Решение.* Работаем на отрезке  $z \in [0, 100]$  и решаем системы

$$\begin{cases} x' = 8x + 8y + 6z, \\ y' = 2x - 2y + 2z, \\ z' = -11x - 8y - 9z. \end{cases}$$

И

$$\begin{cases} x' = 5x + 3y - 2z, \\ y' = 6x - 2y - 6z, \\ z' = 6x + 3y - 3z. \end{cases}$$

С матрицами соответственно

$$A_1 = \begin{pmatrix} 8 & 8 & 6 \\ 2 & -2 & 2 \\ -11 & -8 & -9 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -2 \\ 6 & -2 & -6 \\ 6 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

Диагонализуем первую. Видно, что имеются значения

$$\lambda = \pm 1, \quad \lambda = 2.$$

На масштабе  $x \in [0, 100]$  у нас получается 1 быстрозатухающее решение и два быстрорастущих, поэтому надо задать 1 условие на левом конце и два на правом для наилучшей обусловленности системы.

Диагонализуем вторую матрицу. Результат не поменялся, поэтому не поменяется и ответ:

Два условия справа и одно слева.

**8.5.**

*Решение.* Имеем задачу Коши:

$$\frac{d}{dx} \left( k(x) \frac{d}{dx} u \right) - q(x)u = -f(x)k(0)u'(0) = 0, \quad -k(1)u'(1) = u(1).$$

Тут введены обозначения:

$$k(x) = e^x, \quad q(x) = e^x, \quad f(x) = \sin x.$$

С учетом этих обозначений у нас получится задача Коши:

$$\frac{d}{dx} (e^x u') - e^x u = -\sin x u'(0) = 0, \quad -e u'(1) = u(1).$$

Упростим уравнения, меняя правую часть:

$$u'' + u' - u = -e^{-x} \sin x u'(0) = 0, \quad u(1) + e u'(1) = 0.$$

Теперь нам остается подставить какие-то разностные схемы второго порядка вместо всех производных:

$$u' = \frac{u_{n+1} - u_{n-1}}{2h} u'' = \frac{u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}}{h^2}$$

Такой подход создает некоторые проблемы с фиктивными узлами  $y_{-1}$  и  $y_{N+1}$ , которые мы сейчас обработаем.

Сначала посмотрим на левый конец:

$$\frac{y_{-1} - y_1}{h^2} = 0.$$

$$\frac{y_1 - 2y_0 + y_{-1}}{h^2} + \frac{y_1 - y_{-1}}{2h} - y_0 = 0.$$

Система позволяет выразить  $y_{-1}$ , поэтому расширение схемы на этот фиктивный узел не испортит совместности. Теперь правый конец:

$$y_N + e \frac{y_{N+1} - y_{N-1}}{2h} = 0.$$

$$\frac{y_{N+1} - 2y_N + y_{N-1}}{h^2} + \frac{y_{N+1} - y_{N-1}}{2h} - y_N = -e^{-1} \sin(1).$$

Внутренние точки получаются равны:

$$\frac{y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}}{h^2} + \frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2h} + y_n = -e^{x_n} \sin x_n.$$

### 9.1a.

*Решение.* Имеем дифференциальное уравнение:

$$y'' - (10 + x^2)y = x e^{-x}.$$

Хотим построить общее решение данного уравнения. У нас уже имеется метод, полученный в задаче 8.1 (переходит в ту задачу заменой  $x \rightarrow x^2$ ). То есть мы решаем три системы уравнений:

$$Ay_i = f_i.$$

$$A = \begin{pmatrix} -2 - (10 + x_1^2)h^2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & -2 - (10 + x_2^2)h^2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -2 - (10 + x_{N-2}^2)h^2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -2 - (10 + x_{N-1}^2)h^2 \end{pmatrix}$$

$$f_1 = (1, 0 \dots 0)^\tau f_2 = (0, 0 \dots 0, 1)^\tau f_3 = h^2(x_1 e^{-x_1}, \dots, x_{N-1} e^{-x_{N-1}})^\tau$$

Легко видеть, что здесь выполняется условие строгого диагонального преобладания:

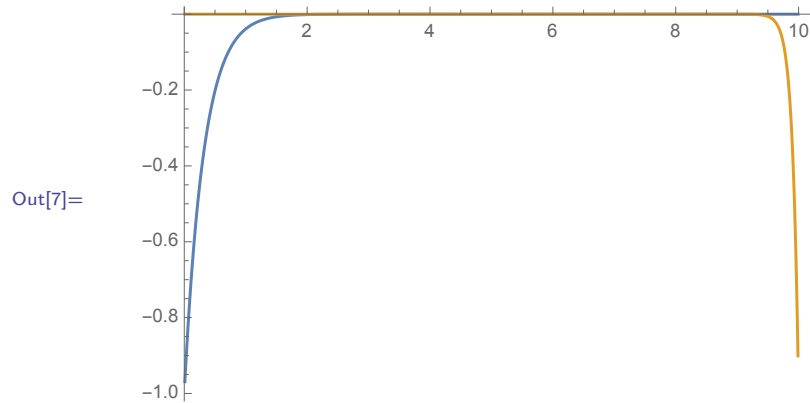
$$|-2 - (10 + x_n^2)h^2| > 2$$

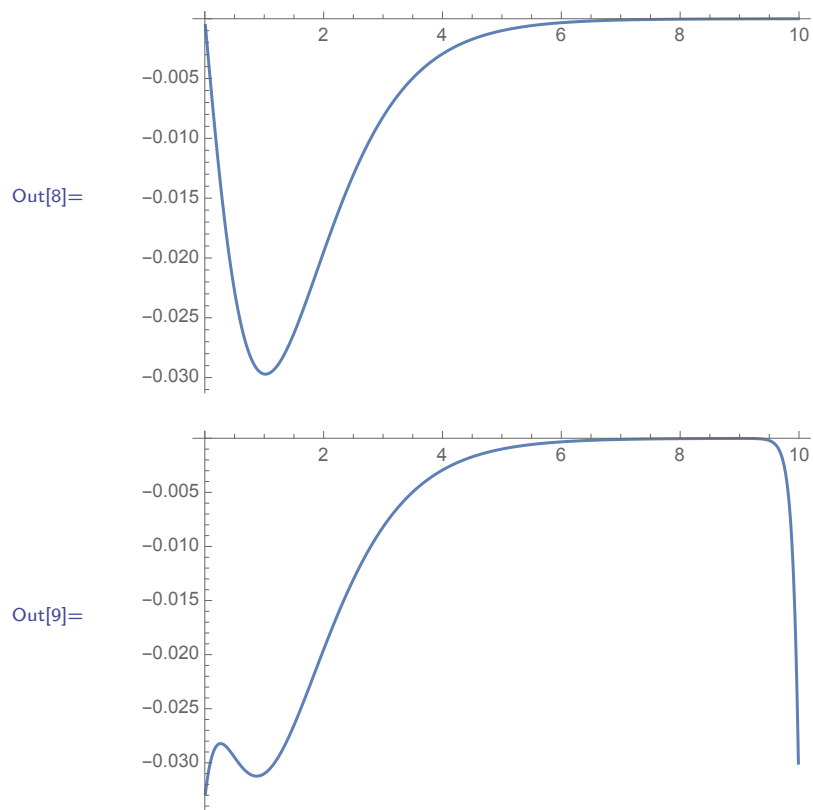
Поэтому метод прогонки будет устойчив.

```

In[7]:= h=0.01;
        N=10/h;
        x_i_:=x_i=i h
        A_i_j_:=A_i_j=Piecewise[{{-2-h^2 (10+ x_i^2), i==j},{1, i==1+j || 1+i==j}},0]
        f1_i_:=f1_i=Piecewise[{{1, i==1}},0]
        f2_i_:=f2_i=Piecewise[{{1, i==N-1}},0]
        f3_i_:=f3_i=h^2 x_i e^{-x_i}
        sol=Solve[Table[Sum[A_i_j y_kj]==f_ki,{i,N-1},{k,3}]]//Flatten,
        Table[y_kj,{j,N-1},{k,3}]]//Flatten];
        ListLinePlot[Table[{x_i,y_ki}/.sol//Flatten,
        {k,2},{i,N-1}],PlotRange->All]
        ListLinePlot[Table[{x_i,y_3i}/.sol//Flatten,
        {i,N-1}],PlotRange->All]
        ListLinePlot[Table[{x_i,(y1i+y2i)/30+y3i}/.sol//Flatten,
        {i,N-1}],PlotRange->All]

```





### 9.36.

*Решение.* Имеем задачу:

$$\begin{cases} y'' - x\sqrt{y} = 0, & 0 \leq x \leq 1, \\ y(0) = 0, & \int_0^1 y(x) dx = 1. \end{cases}$$

Нужно решить ее методом пристрелки. Первым шагом будет научиться решать задачу коши:

$$\begin{aligned} y'' - x\sqrt{y} &= 0, \\ y(0) &= 0, y'(0) = \alpha. \end{aligned}$$

Будем работать схемой первого порядка. А именно, заменим производную на

$$y' = \frac{y_n - y_{n-1}}{h}.$$

и вторую производную на

$$y'' = \frac{y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}}{h^2}.$$

Тогда получаем граничные условия:



$$y_0 = 0, \quad y_1 = h\alpha.$$

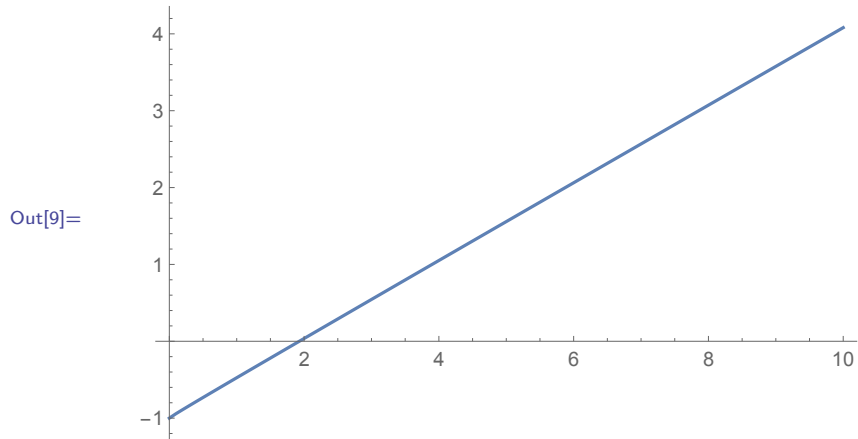
И рекуррентное соотношение:

$$\frac{y_n - 2y_{n-1} + y_{n-2}}{h^2} - t_{n-1}\sqrt{y_{n-1}} = 0, \quad n = 2, \dots, N.$$

Отсюда сразу выражается  $y_n$ :

$$y_n = 2y_{n-1} - y_{n-2} + h^2 t_{n-1} \sqrt{y_{n-1}}.$$

```
In[9]:= y0,α_:=y0,α=0;
h=.001;
N=1/h;
y1,α_:=y1,α=h α
xn_:=xn=h n
yn,α_:=yn,α=2yn-1,α-yn-2,α+h^2xn-1√yn-1,α
F[α_]:=∫01 Interpolation[Table[{xn,yn,α},{n,0,N}],InterpolationOrder→1][x]dx-1
τ=.1;
range=10;
ListLinePlot[Table[{τ n,F[τ n]},{n,0,range/τ}]]
```



```
In[10]:= Φ[α]=Interpolation[Table[{τ n,F[τ n]},{n,0,range/τ}],InterpolationOrder→1][α];
sol2=NSolve[Φ[α]==0,α][[1,1]]
```

Out[11]=  $\alpha \rightarrow 1.9289171994367615$

```
In[12]:= y0=0;
y1=h α/.sol2;
yn_:=yn=2yn-1-yn-2+h^2xn-1√yn-1
ListLinePlot[Table[{xn,yn}/Flatten,{n,0,N}],PlotRange→All]
```

