Домашняя работа по фазовым переходам

Драчов Ярослав
Факультет общей и прикладной физики МФТИ

20 декабря 2020 г.

Гауссовы интегралы

1.1 Размерность 1

- $$\langle x^n \rangle Z_1(a) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dx\, x^n \exp\left(-ax^2\right).$$

$$Z_1(a) \frac{b^n}{n!} \langle x^n \rangle = \frac{b^n}{n!} \int\limits_{-\infty}^{\infty} dx\, x^n \exp\left(-ax^2\right).$$

$$Z_1(a) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b^n}{n!} \langle x^n \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b^n}{n!} \int\limits_{-\infty}^{\infty} dx\, x^n \exp\left(-ax^2\right) \overset{\text{инт. сх.}}{=\!=\!=}$$
$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} dx\, \exp\left(-ax^2\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(bx)^n}{n!} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dx \exp\left(-ax^2\right) \exp(bx) =$$
$$= Z_1(a, b).$$

- $$Z_1(a,b) =$$
$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} dx \exp(-ax^2 + bx) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dx \exp\left[-a\left(x - \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{b^2}{4}\right] \overset{y=x-b/2a}{=\!=\!=}$$
$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} dy \exp\left(-ay^2 + \frac{b^2}{4a}\right) = e^{\frac{b^2}{4a}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} dy \exp(-ay^2) = e^{\frac{b^2}{4a}} \sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

- $$Z_1(a,b) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b^n}{n!} \left(e^{\frac{b^2}{4a}}\right)^{(n)}\Bigg|_{b=0}.$$

$$\langle x^n \rangle = \left(e^{\frac{b^2}{4a}}\right)^{(n)}\Bigg|_{b=0}. \qquad (*)$$

- Результаты непосредственного вычисления $\langle x^1 \rangle$, $\langle x^2 \rangle$, $\langle x^3 \rangle$, $\langle x^4 \rangle$, $\langle x^5 \rangle$ по формуле (*) представлены в таблице 1 и совпадают с значениями, полученными с помощью Mathematica.

n	1	2	3	4	5
$\langle x^n \rangle$	0	$1/2a$	0	$3/4a^2$	0

Таблица 1

Размерность N

- Матрица S, которая диагонализует матрицу A_{ij} может иметь, например, следующий вид

$$S = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно заметить, что данная матрица — ортогональна (такое возможно благодаря положительной определённости A).

Диагональный вид матрицы A

$$\mathrm{diag}(\lambda_i) = \begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$A_{ij}x_ix_j = \mathbf{x}^T A\mathbf{x} = \mathbf{x}^T S^{-1}\,\mathrm{diag}(\lambda_i) S\mathbf{x} \overset{S\text{ — орт.}}{=\!=\!=} \mathbf{x}^T S^T\,\mathrm{diag}(\lambda_i) S\mathbf{x} =$$
$$= (S\mathbf{x})^T\,\mathrm{diag}(\lambda_i)(S\mathbf{x}) \overset{\mathbf{y}=S\mathbf{x}}{=\!=\!=} \sum_{i=1}^{3} \lambda_i y_i^2.$$

Удачной заменой координат в данном случае кажется $y_i = S_{ij}x_j$. Тогда выражение для произвольного кореллятора принимает вид

$$\langle x_{a_1}x_{a_2}x_{a_3}\ldots x_{a_n}\rangle =$$
$$= \frac{1}{Z_N(A_{ij})}\int |\det S| \prod_{i=1}^{N} dy_i \prod_{i=1}^{n} y_{a_i} \exp\left(-\sum_{i=1}^{N}\lambda_i y_i^2\right) \overset{S\text{ — орт.}}{=\!=\!=}$$
$$= \frac{1}{Z_N(A_{ij})}\int \prod_{i=1}^{N} dy_i \prod_{i=1}^{n} y_{a_i} \exp\left(-\sum_{i=1}^{N}\lambda_i y_i^2\right),$$

а также

$$Z_N(A_{ij}, B_i) = \int |\det S| \prod_{i=1}^{N} dy_i \exp\left(-\sum_{i=1}^{N}\lambda_i y_i^2 + B_i y_i\right) \overset{S\text{ — орт.}}{=\!=\!=}$$
$$= \int \prod_{i=1}^{N} dy_i \exp\left(-\sum_{i=1}^{N}\lambda_i y_i^2 + B_i y_i\right).$$

- Последовательно интегрируя по каждой переменной, пользуясь расчётами для одномерного случая, получаем

$$Z_N(A_{ij}, B_i) = \int \prod_{i=1}^{N} dy_i \exp\left(-\sum_{i=1}^{N} \lambda_i y_i^2 + B_i y_i\right) =$$
$$= \sqrt{\frac{\pi^N}{\prod_{i=1}^{N} \lambda_i}} \exp\left(\sum_{i=1}^{N} \frac{B_i^2}{4\lambda_i}\right) = \sqrt{\frac{\pi^N}{\det A}} \exp\left(\frac{1}{4} B_i \left(A^{-1}\right)_{ij} B_j\right).$$

- $$\langle x_{a_1} x_{a_2} x_{a_3} \dots x_{a_n} \rangle Z_N(A_{ij}) = \int \prod_{i=1}^{N} dx_i \prod_{i=1}^{n} x_{a_i} \exp\left(-A_{ij} x_i x_j\right).$$

$$Z_N(A_{ij}) \frac{\prod_{i=1}^{n} B_{a_i}}{n!} \langle x_{a_1} x_{a_2} x_{a_3} \dots x_{a_n} \rangle =$$
$$= \frac{\prod_{i=1}^{n} B_{a_i}}{n!} \int \prod_{i=1}^{N} dx_i \prod_{i=1}^{n} x_{a_i} \exp\left(-A_{ij} x_i x_j\right).$$

$$Z_N(A_{ij}) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\prod_{i=1}^{n} B_{a_i}}{n!} \langle x_{a_1} x_{a_2} x_{a_3} \dots x_{a_n} \rangle =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\prod_{i=1}^{n} B_{a_i}}{n!} \int \prod_{i=1}^{N} dx_i \prod_{i=1}^{n} x_{a_i} \exp(-A_{ij} x_i x_j) \overset{\text{инт. сх}}{=\!=\!=}$$
$$= \int \prod_{i=1}^{N} dx_i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\prod_{i=1}^{n} B_{a_i} x_{a_i}}{n!} \exp\left(-A_{ij} x_i x_j\right) =$$
$$= \int \prod_{i=1}^{N} dx_i \exp(B_i x_i) \exp\left(-A_{ij} x_i x_j\right) =$$
$$= \int \prod_{i=1}^{N} dx_i \exp\left(-A_{ij} x_i x_j + B_i x_i\right).$$

Следовательно

$$Z_N(A_{ij}, B_i) = Z_N(A_{ij}) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\prod_{i=1}^{n} B_{a_i}}{n!} \langle x_{a_1} x_{a_2} x_{a_3} \dots x_{a_n} \rangle.$$

- $$Z_N(A_{ij}, B_i) = \sqrt{\frac{\pi^N}{\det A}} \exp\left(\frac{1}{4} B_i \left(A^{-1}\right)_{ij} B_i\right) =$$
$$= Z_N(A_{ij}) \exp\left(\frac{1}{4} B_i \left(A^{-1}\right)_{ij} B_j\right) =$$
$$= Z_N(A_{ij}) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\prod_{i=1}^{n} B_{a_i}}{n!} \frac{\partial^n}{\partial B_{a_1} \partial B_{a_2} \dots \partial B_{a_n}} \exp\left(B_i \left(A^{-1}\right)_{ij} B_j\right)\Big|_{B_i = \mathbf{0}}.$$

Значит

$$\langle x_{a_1} x_{a_2} x_{a_3} \dots x_{a_n} \rangle = \frac{\partial^n}{\partial B_{a_1} \partial B_{a_2} \dots \partial B_{a_n}} \exp\left(B_i \left(A^{-1}\right)_{ij} B_j \right)\Big|_{B_i = \mathbf{0}}.$$

- Для непосредственного вычисления корелляторов $\langle x_{a_1} \rangle$, $\langle x_{a_1} x_{a_2} \rangle$, $\langle x_{a_1} x_{a_2} x_{a_3} \rangle$, $\langle x_{a_1} x_{a_2} x_{a_3} x_{a_4} \rangle$, $\langle x_{a_1} x_{a_2} x_{a_3} x_{a_4} x_{a_5} \rangle$ найдём

$$\frac{\partial}{\partial B_k} \exp\left(\frac{1}{4} B_i \left(A^{-1}\right)_{ij} B_j \right) =$$
$$= \frac{1}{4} \exp\left(\frac{1}{4} B_i \left(A^{-1}\right)_{ij} B_j \right) \left(2 B_k \left(A^{-1}\right)_{kk} + B_{i \neq k} \left(A^{-1}\right)_{ik} + B_{j \neq k} \left(A^{-1}\right)_{kj} \right) =$$
$$= \frac{1}{4} \exp\left(\frac{1}{4} B_i \left(A\right)_{ij} B_j \right) \left(B_i \left(A^{-1}\right)_{ik} + B_j \left(A^{-1}\right)_{kj} \right) \overset{A\text{ — сим.}}{=\!=\!=}$$
$$= \frac{B_i \left(A^{-1}\right)_{ik}}{2} \exp\left(\frac{1}{4} B_i \left(A^{-1}\right)_{ij} B_j \right),$$

$$\frac{\partial}{\partial B_k} \prod_{i=1}^{n} B_{a_i} = \sum_{j=1}^{n} \prod_{i=1}^{n} \delta_{a_j k} B_{a_i}.$$

$$\frac{\partial}{\partial B_{a_1}} \exp\left(B_i \left(A^{-1}\right)_{ij} B_j \right) = \frac{B_i \left(A^{-1}\right)_{i a_1}}{2} \exp\left(\frac{1}{4} B_i \left(A^{-1}\right)_{ij} B_j \right).$$

$$\frac{\partial^2}{\partial B_{a_1} \partial B_{a_2}} \exp\left(B_i \left(A^{-1}\right)_{ij} B_j \right) = \frac{\left(A^{-1}\right)_{a_2 a_1}}{2} \exp\left(\frac{1}{4} B_i \left(A^{-1}\right)_{ij} B_j \right) +$$
$$+ \frac{B_{i_1} \left(A^{-1}\right)_{i_1 a_1} B_{i_2} \left(A^{-1}\right)_{i_2 a_2}}{4} \exp\left(\frac{1}{4} B_i \left(A^{-1}\right)_{ij} B_j \right).$$

$$\frac{\partial^3}{\partial B_{a_1} \partial B_{a_2} \partial B_{a_3}} \exp\left(B_i \left(A^{-1}\right)_{ij} B_j \right) =$$
$$= \frac{\left(A^{-1}\right)_{a_2 a_1} B_i (A^{-1})_{i a_3}}{4} \exp\left(\frac{1}{4} B_i \left(A^{-1}\right)_{ij} B_j \right) +$$
$$+ \frac{\left(A^{-1}\right)_{a_3 a_1} B_i \left(A^{-1}\right)_{i a_2}}{4} \exp\left(\frac{1}{4} B_i \left(A^{-1}\right)_{ij} B_j \right) +$$
$$+ \frac{B_i \left(A^{-1}\right)_{i a_1} \left(A^{-1}\right)_{a_3 a_2}}{4} \exp\left(\frac{1}{4} B_i \left(A^{-1}\right)_{ij} B_j \right) +$$
$$+ \frac{B_{i_1} \left(A^{-1}\right)_{i_1 a_1} B_{i_2} \left(A^{-1}\right)_{i a_2} B_{i_3} \left(A^{-1}\right)_{i_3 a_2}}{6} \exp\left(\frac{1}{4} B_i \left(A^{-1}\right)_{ij} B_j \right).$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^4}{\partial B_{a_1}\partial B_{a_2}\partial B_{a_3}\partial B_{a_4}}\exp\Big(B_i\left(A^{-1}\right)_{ij}B_j\Big)=\\
&\qquad=\frac{\left(A^{-1}\right)_{a_2a_1}(A^{-1})_{a_4a_3}}{4}\exp\left(\frac{1}{4}B_i\left(A^{-1}\right)_{ij}B_j\right)+\\
&\qquad+\frac{\left(A^{-1}\right)_{a_3a_1}\left(A^{-1}\right)_{a_4a_2}}{4}\exp\left(\frac{1}{4}B_i\left(A^{-1}\right)_{ij}B_j\right)+\\
&\qquad+\frac{\left(A^{-1}\right)_{a_4a_1}\left(A^{-1}\right)_{a_3a_2}}{4}\exp\left(\frac{1}{4}B_i\left(A^{-1}\right)_{ij}B_j\right)+\\
&+\frac{B_{i_1}\left(A^{-1}\right)_{i_1a_1}B_{i_2}\left(A^{-1}\right)_{ia_2}B_{i_3}\left(A^{-1}\right)_{i_3a_2}B_{i_4}\left(A^{-1}\right)_{i_4a_4}}{8}\exp\left(\frac{1}{4}B_i\left(A^{-1}\right)_{ij}B_j\right).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^5}{\partial B_{a_1}\partial B_{a_2}\partial B_{a_3}\partial B_{a_4}\partial B_{a_5}}\exp\Big(B_i\left(A^{-1}\right)_{ij}B_j\Big)=\\
&\qquad=\frac{\left(A^{-1}\right)_{a_2a_1}(A^{-1})_{a_4a_3}B_i(A^{-1})_{ia_5}}{6}\exp\left(\frac{1}{4}B_i\left(A^{-1}\right)_{ij}B_j\right)+\\
&\qquad+\frac{\left(A^{-1}\right)_{a_3a_1}\left(A^{-1}\right)_{a_4a_2}B_i(A^{-1})_{ia_5}}{6}\exp\left(\frac{1}{4}B_i\left(A^{-1}\right)_{ij}B_j\right)+\\
&\qquad+\frac{\left(A^{-1}\right)_{a_4a_1}\left(A^{-1}\right)_{a_3a_2}B_i(A^{-1})_{ia_5}}{6}\exp\left(\frac{1}{4}B_i\left(A^{-1}\right)_{ij}B_j\right)+\\
&+\frac{\left(A^{-1}\right)_{a_5a_1}B_{i_2}\left(A^{-1}\right)_{ia_2}B_{i_3}\left(A^{-1}\right)_{i_3a_2}B_{i_4}\left(A^{-1}\right)_{i_4a_4}}{8}\exp\left(\frac{1}{4}B_i\left(A^{-1}\right)_{ij}B_j\right)+\\
&+\frac{B_{i_1}\left(A^{-1}\right)_{i_1a_1}\left(A^{-1}\right)_{a_5a_2}B_{i_3}\left(A^{-1}\right)_{i_3a_2}B_{i_4}\left(A^{-1}\right)_{i_4a_4}}{8}\exp\left(\frac{1}{4}B_i\left(A^{-1}\right)_{ij}B_j\right)+\\
&+\frac{B_{i_1}\left(A^{-1}\right)_{i_1a_1}B_{i_2}\left(A^{-1}\right)_{ia_2}\left(A^{-1}\right)_{a_5a_2}B_{i_4}\left(A^{-1}\right)_{i_4a_4}}{8}\exp\left(\frac{1}{4}B_i\left(A^{-1}\right)_{ij}B_j\right)+\\
&+\frac{B_{i_1}\left(A^{-1}\right)_{i_1a_1}B_{i_2}\left(A^{-1}\right)_{ia_2}B_{i_3}\left(A^{-1}\right)_{i_3a_2}\left(A^{-1}\right)_{a_5a_4}}{8}\exp\left(\frac{1}{4}B_i\left(A^{-1}\right)_{ij}B_j\right).
\end{aligned}
$$