Домашняя работа по квантовой механике

Драчов Ярослав
Факультет общей и прикладной физики МФТИ

29 апреля 2021 г.

Первое задание

1. Вычислите интеграл по траекториям:

$$Z[\mathbf{J}(\cdot)] = \int\limits_{\mathbf{z}(0)=\mathbf{y},\ \mathbf{z}(t)=\mathbf{x}} \mathcal{D}\mathbf{z}(\tau) e^{i\int\limits_0^t d\tau \left[\frac{m\dot{\mathbf{z}}^2(\tau)}{2} + \mathbf{J}(\tau)\mathbf{z}(\tau)\right]}.$$

Решение. Разложим переменную интегрирования следующим образом:

$$\mathbf{z}(\tau) = \mathbf{z}_{cl}(\tau) + \mathbf{q}(\tau),$$

где

$$\mathbf{z}_{cl}(0) = \mathbf{y},\, \mathbf{z}_{cl}(t) = \mathbf{x}, \quad \mathbf{q}(0) = 0,\, \mathbf{q}(t) = 0.$$

Т. к.

$$\mathcal{L} = \frac{m\dot{\mathbf{z}}_{cl}^2}{2} + \mathbf{J}(\tau)\mathbf{z}_{cl},$$

то

$$m\ddot{\mathbf{z}}_{cl} = \mathbf{J}(\tau)$$

и

$$S_{cl} = \int\limits_0^t d\tau \left(\frac{m}{2}\dot{\mathbf{z}}_{cl}^2 + \mathbf{J}(\tau)\mathbf{z}_{cl}\right).$$

Тогда

$$S = S_{cl} + \int\limits_0^t d\tau \left[m\dot{\mathbf{z}}_{cl}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{J}(\tau)\mathbf{q}\right] + \int\limits_0^t d\tau \frac{m\dot{\mathbf{q}}^2}{2}.$$

$$\int\limits_0^t d\tau \left[m\dot{\mathbf{z}}_{cl}\dot{\mathbf{q}}\right] = m\dot{\mathbf{z}}_{cl}\mathbf{q}\big|_0^t - \int\limits_0^t d\tau \ddot{\mathbf{z}}_{cl}\mathbf{q}m = -\int\limits_0^t d\tau \ddot{\mathbf{z}}_{cl}\mathbf{q}m.$$

$$\int\limits_0^t d\tau \left[m\dot{\mathbf{z}}_{cl}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{J}\mathbf{q}\right] = \int\limits_0^t d\tau \left[\mathbf{J}(\tau)\mathbf{q} - \ddot{\mathbf{z}}_{cl}\mathbf{q}m\right] = \int\limits_0^t d\tau \mathbf{q}\underbrace{\left[-m\ddot{\mathbf{z}}_{cl} + \mathbf{J}(\tau)\right]}_{=0} = 0.$$

Следовательно

$$S = S_{cl} + \int\limits_0^t d\tau \frac{m\dot{\mathbf{q}}^2}{2}.$$

Значит

$$Z = \exp\left(i\frac{S_{cl}(t,\mathbf{x},\mathbf{y})}{\hbar}\right)\underbrace{\int\limits_{\mathbf{q}(0)=\mathbf{0},\ \mathbf{q}(t)=\mathbf{0}} \mathcal{D}\mathbf{q}(\tau)\exp\left(\frac{i}{\hbar}\int\limits_0^t d\tau\frac{m\dot{\mathbf{q}}^2}{2}\right)}_{K(t|\mathbf{0},\mathbf{0})}.$$

$$K(t|\mathbf{x},\mathbf{y}) = \langle\mathbf{x}|\, e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{\widehat{\mathbf{p}}^2}{2m}t}\,|\mathbf{y}\rangle = \langle\mathbf{x}|\, e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{\widehat{\mathbf{p}}^2}{2m}t}\int\limits_{\mathbb{R}^3} d^3\mathbf{p}\,|\mathbf{p}\rangle\,\langle\mathbf{p}|\mathbf{y}\rangle =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^3} d^3\mathbf{p} e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{\mathbf{p}^2}{2m}t}\frac{1}{(2\pi\hbar)^3}e^{-\frac{i\mathbf{p}(\mathbf{x}-\mathbf{y})}{\hbar}}.$$

$$K(t|\mathbf{0},\mathbf{0}) = \int\limits_{\mathbb{R}^3} d^3\mathbf{p} e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{\mathbf{p}^2}{2m}t}\frac{1}{(2\pi\hbar)^3} = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3}\sqrt{\frac{\pi^3}{i\left(\frac{t}{2m\hbar}\right)^3}} = \left(\sqrt{\frac{m}{2\pi\hbar t i}}\right)^3.$$

Найдём теперь $S_{cl}(\mathbf{z}_{cl})$. $\mathbf{z}_{cl}(\tau)$ ищем в виде:

$$\mathbf{z}(\tau) = \mathbf{a}\tau + \mathbf{b} + \int\limits_{-\infty}^{\infty} G(\tau,\tau')\frac{\mathbf{J}(\tau')}{m}d\tau'.$$

Из уравнения движения $m\ddot{\mathbf{z}}_{cl} = \mathbf{J}(\tau)$ следует:

$$\frac{d^2G(\tau,\tau')}{d\tau^2} = \delta(\tau-\tau').$$

$$G(0,\tau') = G(t,\tau') = 0.$$

Из условий $\mathbf{z}_{cl}(0) = \mathbf{y}$, $\mathbf{z}_{cl}(t) = \mathbf{x}$ следует, что $\mathbf{b} = \mathbf{y}$, $\mathbf{a} = (\mathbf{x}-\mathbf{y})/t$. Тогда решение имеет вид:

$$G(\tau,\tau') = (\tau-\tau')\theta(\tau-\tau') + C_1(\tau')\tau + C_2(\tau').$$

$$G(0,\tau') = \tau'\theta(-\tau') + C_2(\tau') = 0 \implies C_2(\tau') = \tau'\theta(-\tau').$$

$$G(t,\tau') = (t-\tau')\theta(t-\tau') + C_1(\tau')t + \tau'\theta(-\tau') \implies$$

$$\implies C_1(\tau') = \frac{-(t-\tau')\theta(t-\tau') - \tau'\theta(-\tau')}{t}.$$

$$G(\tau,\tau') = (\tau-\tau')\theta(\tau-\tau') + \frac{\tau}{t}\left[-(t-\tau')\theta(t-\tau') - \tau'\theta(-\tau')\right] + \tau'\theta(-\tau').$$

Вычислим S_{cl}:

$$S_{cl} = \int d\tau\left[\frac{m\dot{\mathbf{z}}_{cl}^2}{2} - \mathbf{J}(\tau)\mathbf{z}_{cl}(\tau)\right].$$

$$\int\limits_0^t d\tau\frac{m}{2}\left(\dot{\mathbf{z}}_{cl}\right)^2 = \int\limits_0^t d\tau\frac{d}{d\tau}\left(\frac{m}{2}\dot{\mathbf{z}}_{cl}\mathbf{z}_{cl}\right) - \int\limits_0^t d\tau\frac{m}{2}\mathbf{z}_{cl}\ddot{\mathbf{z}}_{cl}.$$

$$S_{cl}=\underbrace{\frac{m}{2}\mathbf{z}_{cl}\dot{\mathbf{z}}_{cl}\Big|_{\tau=0}^{\tau=t}}_{S_{cl1}}+\underbrace{\frac{1}{2}\int\limits_0^t d\tau\mathbf{J}(\tau)\mathbf{z}_{cl}(\tau)}_{S_{cl2}}.$$

$$S_{cl1}=\frac{m}{2}\mathbf{z}_{cl}(t)\dot{\mathbf{z}}_{cl}(t)-\frac{m}{2}\mathbf{z}_{cl}(0)\dot{\mathbf{z}}_{cl}(0)=\frac{m}{2}\mathbf{x}\left[\frac{\mathbf{x}-\mathbf{y}}{t}+\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dG(\tau,\tau')}{d\tau}\Big|_{\tau=t}\cdot\mathbf{J}(\tau')d\tau\right]-$$
$$-\frac{m}{2}\mathbf{y}\left[\frac{\mathbf{x}-\mathbf{y}}{t}+\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dG(\tau,\tau')}{d\tau}\Big|_{\tau=0}\mathbf{J}(\tau')d\tau'\right].$$

И, т. к. $G(\tau,\tau')\neq 0$ только при $\tau'\in[0,t]$, то

$$S_{cl1}=\frac{m\left|\mathbf{x}-\mathbf{y}\right|^2}{2t}+\frac{1}{2t}\int\limits_0^t\left(\tau'\mathbf{x}\mathbf{J}(\tau')-(t-\tau')\mathbf{y}\mathbf{J}(\tau')\right)d\tau'.$$

$$S_{cl2}=\frac{1}{2}\int\limits_0^t\left(\frac{\mathbf{x}-\mathbf{y}}{t}\tau+\mathbf{y}\right)\mathbf{J}(\tau)d\tau+\frac{1}{2}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{-\infty}^{\infty}d\tau'\mathbf{J}(\tau)G(\tau,\tau')\frac{\mathbf{J}(\tau')}{m}.$$

Подставляя полученное значение S_{cl}, получаем ответ для $Z\left[\mathbf{J}(\cdot)\right]$.

2. Волновая функция гармонического осциллятора с массой m и частотой ω в начальный момент времени имеет вид:

$$\Psi(x,t=0)=Ce^{-\frac{m\omega}{2\hbar}(x-x_0)^2},$$

где C и x_0 — некоторые константы. Используя ядро оператора эволюции для осциллятора, найдите вид волновой функции в произвольный момент времени.

Решение.

$$\Psi(t,x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}dyK_\omega(t|x,y)\Psi(y|t=0).$$

Ядро оператора эволюции для осциллятора:

$$K_\omega(t|x,y)=\sqrt{\frac{m\omega}{2\pi i\hbar\sin\omega t}}\exp\left(\frac{i}{\hbar}S_{cl}(t,x,y)\right).$$

$$S_{cl}(t,x,y)=\frac{m\omega}{2\sin\omega t}\left[(x^2+y^2)\cos\omega t-2xy\right].$$

$$\Psi(x,t=0)=Ce^{-\frac{m\omega}{2\hbar}(x-x_0)^2}.$$

$$\Psi(t|x) = C\sqrt{\frac{m\omega}{2\pi i\hbar\sin\omega t}}\times$$

$$\times\int\exp\left[\frac{i}{\hbar}\left(\frac{m\omega}{2\sin\omega t}\left\{(x^2+y^2)\cos\omega t - 2xy\right\}\right) - \frac{m\omega}{2\hbar}(y-x_0)^2\right]dy =$$

$$= C\sqrt{\frac{m\omega}{2\pi i\hbar\sin\omega t}}\times$$

$$\times\int\exp\left[\left(\frac{im\omega\cos\omega t}{2\hbar\sin\omega t} - \frac{m\omega}{2\hbar}\right)y^2 - \frac{im\omega}{\hbar\sin\omega t}xy + \frac{m\omega}{\hbar}x_0 y + \frac{im\omega\cos\omega t}{2\hbar\sin\omega t}x^2 - \frac{m\omega}{2\hbar}x_0^2\right]dy =$$

$$= C\sqrt{\frac{m\omega}{2\pi i\hbar\sin\omega t}}\exp\left[\frac{im\omega}{2\hbar}\operatorname{ctg}\omega t\cdot x^2 - \frac{m\omega}{2\hbar}x_0^2\right]\times$$

$$\times\int\exp\left[\underbrace{\left(\frac{im\omega\cos\omega t}{2\hbar\sin\omega t} - \frac{m\omega}{2\hbar}\right)}_{A}y^2 + 2\underbrace{\left(-\frac{im\omega}{2\hbar\sin\omega t}x + \frac{m\omega}{2\hbar}x_0\right)}_{B}y\right]dy =$$

$$= C_1\sqrt{\frac{\pi}{-A}}\exp\left[-\frac{1}{4}\cdot 2B\cdot\frac{1}{A}\cdot 2B\right] = C_1\sqrt{\frac{\pi}{-A}}\exp\frac{B^2}{-A}.$$

$$B^2 = \left(\frac{m\omega}{2\hbar}\right)^2\left(-\frac{x^2}{\sin^2\omega t} - \frac{2ixx_0}{\sin\omega t} + x_0^2\right).$$

$$\Psi(t|x) = C_1\sqrt{\frac{2\pi\hbar}{-m\omega\left(\frac{i\cos\omega t}{\sin\omega t} - 1\right)}}\exp\left[\frac{-m\omega}{2\hbar}\frac{\left(-\frac{x^2}{\sin\omega t} - 2ixx_0 + x_0^2\sin\omega t\right)}{(i\cos\omega t - \sin\omega t)}\right] =$$

$$= C_1\sqrt{\frac{-2\pi\hbar\sin\omega t}{m\omega i}}e^{-\frac{i\omega t}{2}}\exp\left[\frac{m\omega i e^{-i\omega t}\sin\omega t}{2\hbar}\left(-\frac{ix}{\sin\omega t} + x_0\right)^2\right] =$$

$$= Ce^{-\frac{i\omega t}{2}}\exp\left[\frac{m\omega}{2\hbar}\left(\frac{i\cos\omega t}{\sin\omega t}x^2 - x_0^2 + ie^{-i\omega t}\left(-\frac{x^2}{\sin\omega t} - 2ixx_0 + x_0^2\sin\omega t\right)\right)\right] =$$

$$= Ce^{-\frac{i\omega t}{2}}\exp\left[\frac{m\omega}{2\hbar}\left(-x_0^2 + 2xx_0\cos\omega t + ix_0^2\sin\omega t\cos\omega t - x^2 - 2ixx_0\sin\omega t + x_0^2\sin^2\omega t\right)\right] =$$

$$= Ce^{-\frac{i\omega t}{2}}\exp\left[\frac{m\omega}{2\hbar}\left(-(x - x_0\cos\omega t)^2 + i\left(\frac{x_0^2}{2}\sin\omega t - 2xx_0\sin\omega t\right)\right)\right].$$

4.

Решение.

$$\widehat{\mathrm{U}}(t_2,t_1) \equiv Te^{i\int\limits_{t_1}^{t_2}dt\widehat{\mathrm{V}}_0(t)}.$$

$$\widehat{\mathrm{U}}(t_2,t_0) = \sum_{n=0}^{\infty} i^n\int\limits_{t_0}^{t_2}d\tau_1\int\limits_{t_0}^{\tau_1}d\tau_2\ldots\int\limits_{t_0}^{\tau_{n-1}}d\tau_n\widehat{\mathrm{V}}_0(\tau_1)\ldots\widehat{\mathrm{V}}_0(\tau_n).$$

$$\widehat{\mathrm{U}}(t_2,t_1)\widehat{\mathrm{U}}(t_1,t_0)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}i^{n+m}\int\limits_{t_1}^{t_2}d\tau_1\ldots\int\limits_{t_1}^{\tau_{n-1}}d\tau_n\int\limits_{t_0}^{t_1}d\tilde{\tau}_1\int\limits_{t_0}^{\tilde{\tau}_1}d\tilde{\tau}_2\ldots\int\limits_{t_0}^{\tilde{\tau}_{m-1}}d\tilde{\tau}_m\times$$

$$\times\widehat{\mathrm{V}}_0(\tau_1)\ldots\widehat{\mathrm{V}}_0(\tau_n)\widehat{\mathrm{V}}_0(\tilde{\tau}_1)\ldots\widehat{\mathrm{V}}_0(\tilde{\tau}_m)\overset{N=n+m}{=\!=\!=\!=}$$

$$=\sum_{N=0}^{\infty}i^N\sum_{n=0}^{N}\int\limits_{t_1}^{t_2}d\tau_1\int\limits_{t_1}^{\tau_1}d\tau_2\ldots\int\limits_{t_1}^{\tau_{n-1}}d\tau_n\int\limits_{t_0}^{t_1}d\tau_{n+1}\int\limits_{t_0}^{\tau_{n+1}}d\tau_{n+2}\ldots\int\limits_{t_0}^{\tau_{N-1}}d\tau_N\widehat{\mathrm{V}}_0(\tau_1)\ldots\widehat{\mathrm{V}}_0(\tau_N)=$$

$$=\sum_{N=0}^{\infty}i^N\int\limits_{t_0}^{t_2}d\tau_1\int\limits_{t_0}^{\tau_1}d\tau_2\ldots\int\limits_{t_0}^{\tau_{n-1}}d\tau_n\int\limits_{t_0}^{\tau_n}d\tau_{n+1}\ldots\int\limits_{t_0}^{\tau_{N-1}}d\tau_N\widehat{\mathrm{V}}_0(\tau_1)\ldots\widehat{\mathrm{V}}_0(\tau_N)=\widehat{\mathrm{U}}(t_2,t_0)$$

так как

$$\sum_{n=0}^{N}\int\limits_{t_1}^{t_2}d\tau_1\int\limits_{t_1}^{\tau_1}d\tau_2\ldots\int\limits_{t_1}^{t_{n-1}}d\tau_n\int\limits_{t_0}^{\tau_n}d\tau_{n+1}\ldots\int\limits_{t_0}^{\tau_{N-1}}d\tau_N=$$

$$=\int\limits_{t_0}^{t_2}d\tau_1\int\limits_{t_0}^{t_1}d\tau_2\ldots\int\limits_{t_0}^{\tau_{n-1}}d\tau_n\int\limits_{t_0}^{t_1}d\tau_{n+1}\int\limits_{t_0}^{\tau_{n+1}}d\tau_{n+2}\ldots\int\limits_{t_0}^{\tau_{N-1}}d\tau_N.$$

Покажем это:

$$N=1:\quad\int\limits_{t_0}^{t_1}d\tau_1+\int\limits_{t_1}^{t_2}d\tau_1=\int\limits_{t_0}^{t_2}d\tau_1.$$

$$N=2:\quad\int\limits_{t_0}^{t_1}d\tau_1\int\limits_{t_0}^{\tau_1}d\tau_2+\int\limits_{t_1}^{t_2}d\tau_1\int\limits_{t_0}^{t_1}d\tau_2+\int\limits_{t_1}^{t_2}d\tau_1\int\limits_{t_1}^{\tau_1}d\tau_2=$$

$$=\int\limits_{t_0}^{t_1}d\tau_1\int\limits_{t_0}^{\tau_1}d\tau_2+\int\limits_{t_1}^{t_2}d\tau_1\int\limits_{t_0}^{\tau_1}d\tau_2=\int\limits_{t_0}^{t_2}d\tau_1\int\limits_{t_0}^{\tau_1}d\tau_2.$$

Далее аналогично.

5.

Решение. Гамильтониан Дирака:

$$\widehat{\mathrm{H}}_D=c\,(\widehat{\alpha}_i\widehat{\mathrm{p}}_i)+\beta mc^2,$$

где

$$\alpha_i=\begin{pmatrix}0&\sigma_i\\\sigma_i&0\end{pmatrix},\quad\beta=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}.$$

1.
$$\left[\widehat{\mathrm{L}}_i,\widehat{\mathrm{H}}_D\right]=\hbar\left[\widehat{\mathrm{l}}_i,\widehat{\mathrm{H}}_D\right]=c\hbar\widehat{\alpha}_k\left[\widehat{\mathrm{l}}_i,\widehat{\mathrm{p}}_k\right].$$

Т. к. $\left[\widehat{\mathrm{l}}_i,\widehat{\mathrm{p}}_k\right]=i\varepsilon_{ikl}\widehat{\mathrm{p}}_l$, то

$$\left[\widehat{\mathrm{L}}_i,\widehat{\mathrm{H}}_D\right]=i\hbar\varepsilon_{ikl}\alpha_k\widehat{\mathrm{p}}_lc.$$

2.
$$\widehat{\mathrm{S}}_i = \hbar/2 \begin{pmatrix} \sigma_i & 0 \\ 0 & \sigma_i \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}\Sigma_i'.$$
$$\left[\widehat{\mathrm{S}}_i, \widehat{\mathrm{H}}_D\right] = \frac{\hbar}{2}\left[\widehat{\Sigma}_i', \widehat{\mathrm{H}}_D\right] = \frac{\hbar}{2}c\widehat{\mathrm{p}}_k\left[\Sigma_i', \widehat{\alpha}_k\right] + \frac{\hbar}{2}mc^2\left[\Sigma_i', \beta\right].$$
$$[\Sigma_i', \beta] = \begin{pmatrix} \sigma_i & 0 \\ 0 & \sigma_i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \widehat{1} & 0 \\ 0 & -\widehat{1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \widehat{1} & 0 \\ 0 & -\widehat{1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sigma_i & 0 \\ 0 & \sigma_i \end{pmatrix} = 0.$$

$$[\Sigma_i', \alpha_k] = \begin{pmatrix} \sigma_i & 0 \\ 0 & \sigma_i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ \sigma_k & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ \sigma_k & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sigma_i & 0 \\ 0 & \sigma_i \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i\sigma_k \\ \sigma_i\sigma_k & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \sigma_k\sigma_i \\ \sigma_k\sigma_i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & [\sigma_i, \sigma_k] \\ [\sigma_i, \sigma_k] & 0 \end{pmatrix} =$$
$$= 2i\varepsilon_{ikl}\begin{pmatrix} 0 & \sigma_l \\ \sigma_l & 0 \end{pmatrix} = 2i\varepsilon_{ikl}\widehat{\alpha}_l.$$

Следовательно
$$\left[\widehat{\mathrm{S}}_i, \widehat{\mathrm{H}}_D\right] = \frac{\hbar}{2}c\widehat{\mathrm{p}}_k \cdot i \cdot 2 \cdot \varepsilon_{ikl}\widehat{\alpha}_l = -\hbar c\varepsilon_{ikl}\widehat{\alpha}_k\widehat{\mathrm{p}}_l \cdot i.$$

Значит
$$\left[\widehat{\mathrm{J}}_i, \widehat{\mathrm{H}}_D\right] = \left[\widehat{\mathrm{L}}_i, \widehat{\mathrm{H}}_D\right] + \left[\widehat{\mathrm{S}}_i, \widehat{\mathrm{H}}_D\right] = 0.$$

6.

Решение.
$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & p \end{pmatrix}.$$

Уравнение Дирака:
$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi = \widehat{\mathrm{H}}_D\Psi.$$
$$\widehat{\mathrm{H}}_D = c\widehat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \widehat{\mathbf{p}} + \beta mc^2.$$
$$\alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} \widehat{1} & 0 \\ 0 & -\widehat{1} \end{pmatrix}.$$

Ищем решение в виде
$$\Psi_\alpha = U_\alpha(p)e^{\frac{i}{\hbar}(\mathbf{pr} - \varepsilon t)}, \quad (\alpha = 1, 2, 3, 4).$$
$$\varepsilon U = \begin{pmatrix} mc^2 & c\,(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\sigma}) \\ c\,(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\sigma}) & -mc^2 \end{pmatrix} U.$$
$$U = N\begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}, \quad U^\dagger U = 1, \quad \varphi^\dagger\varphi = 1,$$

где φ, χ — биспиноры.
$$\begin{pmatrix} mc^2 - \varepsilon & c\boldsymbol{\rho\sigma} \\ c\boldsymbol{\rho\sigma} & -mc^2 - \varepsilon \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = 0,$$

откуда

$$\begin{cases}(mc^2-\varepsilon)\varphi + c\boldsymbol{\rho\sigma}\chi = 0,\\ c\boldsymbol{\rho\sigma}\varphi - (mc^2+\varepsilon)\chi = 0.\end{cases}$$

Откуда

$$\chi = \frac{c\boldsymbol{\rho\sigma}}{\varepsilon + mc^2}\varphi.$$

$$(mc^2-\varepsilon)\varphi + \frac{c^2(\boldsymbol{\rho\sigma})^2}{\varepsilon+mc^2} = 0.$$

Следовательно

$$\varepsilon^2 = p^2c^2 + m^2c^4.$$

$$1 = U^\dagger U = |N|^2(\varphi^\dagger\varphi + \chi^\dagger\chi) = |N|^2\left(\varphi^\dagger\varphi + \varphi^\dagger\frac{c\boldsymbol{\rho\sigma}c\boldsymbol{\rho\sigma}}{(\varepsilon+mc^2)^2}\varphi\right) \overset{*}{=} .$$

Т. к.

$$\sigma_i\sigma_k = i\varepsilon_{ikl}\sigma_l + \delta_{ik}, \quad (\boldsymbol{\sigma\rho})^2 = \sigma_i p_i \sigma_k p_k = |\mathbf{p}|^2,$$

то

$$\overset{*}{=} |N|^2\left(\varphi^\dagger\varphi + \frac{c^2|\mathbf{p}|^2}{(\varepsilon+mc^2)^2}\varphi^\dagger\varphi\right) = |N|^2\left(1+\frac{\varepsilon-mc^2}{\varepsilon+mc^2}\right) \implies N = \sqrt{\frac{\varepsilon+mc^2}{2\varepsilon}}.$$

Пусть $\hbar = 1$, тогда

$$\Sigma_i = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\sigma_i & 0\\ 0 & \sigma_i\end{pmatrix}.$$

$$\langle\Sigma_i\rangle = \frac{U^\dagger\Sigma_i U}{U^\dagger U} = \frac{|N|^2}{2}\begin{pmatrix}\varphi^\dagger & \chi^\dagger\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sigma_i & 0\\ 0 & \sigma_i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi & \chi\end{pmatrix} = \frac{|N|^2}{2}\left(\varphi^\dagger\sigma_i\varphi + \chi^\dagger\sigma_i\chi\right).$$

$\mathbf{p}$ направлен вдоль оси Z, поэтому

$$\chi = \frac{c|\mathbf{p}|\sigma_z\varphi}{\varepsilon+mc^2} \implies \langle\Sigma_i\rangle = \frac{|N|^2}{2}\left(\varphi^\dagger\sigma_i\varphi + \varphi^\dagger\frac{\sigma_z\sigma_i\sigma_z}{(\varepsilon+mc^2)^2}\varphi|\mathbf{p}|^2c^2\right).$$

Т. к. $\sigma_z\sigma_x\sigma_z = -\sigma_x$, $\sigma_z\sigma_y\sigma_z = -\sigma_y$, то

$$\begin{aligned}\langle\Sigma_{1,2}\rangle = \frac{|N|^2}{2}&\left(\varphi^\dagger\sigma_{1,2}\varphi - \varphi^\dagger\sigma_{1,2}\varphi\frac{|p|^2c^2}{(\varepsilon+mc^2)^2}\right) = \\ &= \frac{\varepsilon+mc^2}{4\varepsilon}\left(1-\frac{\varepsilon^2-m^2c^4}{(\varepsilon+mc^2)^2}\right)(\varphi^\dagger\sigma_{1,2}\varphi) = \\ &= \frac{\varepsilon+mc^2}{4\varepsilon}\left(1-\frac{\varepsilon-mc^2}{\varepsilon+mc^2}\right)(\varphi^\dagger\sigma_{1,2}\varphi) = \frac{mc^2}{2\varepsilon}(\varphi^\dagger\sigma_{1,2}\varphi).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle\Sigma_3\rangle = \frac{|N|^2}{2}&\left(\varphi^\dagger\sigma_z\varphi + \varphi^\dagger\sigma_z\varphi\frac{|\mathbf{p}|^2c^2}{(\varepsilon+mc^2)^2}\right) = \\ &= \frac{(\varepsilon+mc^2)}{4\varepsilon}(\varphi^\dagger\sigma_z\varphi)\left(1+\frac{\varepsilon^2-m^2c^4}{(\varepsilon+mc^2)^2}\right) = \\ &= \frac{\varepsilon+mc^2}{4\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon+mc^2+\varepsilon-mc^2}{\varepsilon+mc^2}\right)(\varphi^\dagger\sigma_z\varphi) = \frac{1}{2}(\varphi^\dagger\sigma_z\varphi).\end{aligned}$$

Таким образом

$$\langle\Sigma_{1,2}\rangle = \frac{mc^2}{2\varepsilon}(\varphi^\dagger\sigma_{1,2}\varphi), \quad \langle\Sigma_3\rangle = \frac{1}{2}(\varphi^\dagger\sigma_z\varphi).$$

7.

Решение. а)

$$\widehat{\mathrm{S}}_i = \widehat{\mathrm{S}}_{1i} + \widehat{\mathrm{S}}_{2i} = \frac{1}{2}(\sigma_1)_i + \frac{1}{2}(\sigma_2)_i.$$

$$\widehat{\mathbf{S}}^2 = \widehat{\mathbf{S}}_1^2 + \widehat{\mathbf{S}}_2^2 + 2\widehat{\mathbf{S}}_1\widehat{\mathbf{S}}_2.$$

Так как $\left[\widehat{\mathbf{S}}^2, \widehat{\mathrm{S}}_z\right] = 0$, $\left[\widehat{\mathbf{S}}^2, \widehat{\mathbf{S}}_1^2\right] = 0$, $\left[\widehat{\mathbf{S}}^2, \widehat{\mathbf{S}}_2^2\right] = 0$, $\left[\widehat{\mathbf{S}_1^2}, \widehat{\mathrm{S}}_{1i}\right] = 0$, $\left[\widehat{\mathbf{S}_1^2}, \widehat{\mathbf{S}_2^2}\right] = 0$, то будем искать волновые функции, которые являются собственными для следующего набора операторов: $\widehat{\mathbf{S}^2}$, $\widehat{\mathrm{S}}_z$, $\widehat{\mathbf{S}_1^2}$, $\widehat{\mathbf{S}_2^2}$.

Такие функции составляются из:

$$\widehat{\mathbf{S}_1^2}\chi_{\pm\frac{1}{2}}(1) = \frac{3}{4}\chi_{\pm\frac{1}{2}}(1).$$

$$\widehat{\mathbf{S}_2^2}\chi_{\pm\frac{1}{2}}(2) = \frac{3}{4}\chi_{\pm\frac{1}{2}}(2).$$

$$\widehat{\mathrm{S}}_{1z}\chi_{\pm\frac{1}{2}}(1) = \pm\frac{1}{2}\chi_{\pm\frac{1}{2}}(1).$$

$$\widehat{\mathrm{S}}_{2z}\chi_{\pm\frac{1}{2}}(2) = \pm\frac{1}{2}\chi_{\pm\frac{1}{2}}(2).$$

Пусть Ψ_{SM} — собственные функции. Тогда

$$\begin{cases} \widehat{\mathbf{S}^2}\Psi_{SM} = S(S+1)\Psi_{SM} \\ \widehat{\mathrm{S}}_z\Psi_{SM} = M\Psi_{SM} \end{cases}.$$

При $S = 1$, $M = \pm 1$:

$$\Psi_{1,1} = \chi_{\frac{1}{2}}(1)\chi_{\frac{1}{2}}(2), \quad \Psi_{1,-1} = \chi_{-\frac{1}{2}}(1)\chi_{-\frac{1}{2}}(2).$$

Понижающий оператор: $\widehat{\mathrm{S}}_- = \widehat{\mathrm{S}}_{1-} + \widehat{\mathrm{S}}_{2-}$.

$$\widehat{\mathrm{S}}_- \left|1,1\right\rangle = \sqrt{2}\left|1{,}0\right\rangle,$$

т. к. $\widehat{\mathrm{j}}_\pm \left|j,m\right\rangle = \sqrt{j(j+1) - m(m\pm 1)}\left|j, m\pm 1\right\rangle$. Значит

$$\Psi_{1,0} = \frac{1}{\sqrt{2}}\widehat{\mathrm{S}}_-\Psi_{1,1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\widehat{\mathrm{S}}_{1-} + \widehat{\mathrm{S}}_{2-}\right)\chi_{\frac{1}{2}}(1)\chi_{\frac{1}{2}}(2) = \\ = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\chi_{\frac{1}{2}}(1)\chi_{-\frac{1}{2}}(2) + \chi_{-\frac{1}{2}}(1)\chi_{\frac{1}{2}}(2)\right).$$

Следовательно, спиновые функции для $S = 1$ *симметричны* по отношению к перестановкам спиновых переменных.

$\Psi_{1,0}$ и $\Psi_{0,0}$ должны быть ортогональны. Будем искать $\Psi_{0,0}$ в виде:

$$\Psi_{0,0} = A\chi_{\frac{1}{2}}(1)\chi_{-\frac{1}{2}}(2) + B\chi_{-\frac{1}{2}}(1)\chi_{\frac{1}{2}}(2).$$

Из ортогональности $\Psi_{1,0}$, $\Psi_{0,0}$ следует, что $A + B = 0$, значит

$$\Psi_{0,0} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\chi_{\frac{1}{2}}(1)\chi_{-\frac{1}{2}}(2) - \chi_{-\frac{1}{2}}(1)\chi_{\frac{1}{2}}(2)\right).$$

Волновые функции, отвечающие значению суммарного спина $S = 0$, *антисимметричны* по отношению к перестановкам спиновых переменных.

б) Оператор углового момента:

$$\widehat{\mathrm{J}}_i = \widehat{\mathrm{L}}_i + \widehat{\mathrm{S}}_i \implies \widehat{\mathbf{J}}^2 = \widehat{\mathbf{L}}^2 + \widehat{\mathbf{S}}^2 + 2\widehat{\mathbf{L}}\widehat{\mathbf{S}}.$$

Так как $\left[\widehat{\mathbf{J}}^2, J_z\right] = 0$, $\left[\widehat{\mathbf{J}\mathrm{J}}^2, \widehat{\mathbf{L}}^2\right] = 0$, $\left[\widehat{\mathbf{J}}^2, \widehat{\mathbf{S}}^2\right] = 0$, то будем искать волновую функцию, яввляющуюся собственной для $\widehat{\mathbf{J}}^2$, $\widehat{\mathrm{J}}_z$, $\widehat{\mathbf{L}}^2$, $\widehat{\mathbf{S}}^2$. Пусть $\hbar = 1$. Тогда $\widehat{\mathrm{j}}_z = \widehat{\mathrm{l}}_z + \widehat{\mathrm{s}}_z = -i\frac{\partial}{\partial\varphi} + \frac{1}{2}\sigma_z$. Следовательно

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial\varphi}\Psi_1 = i\left(m - \dfrac{1}{2}\right)\Psi_1, \\ \dfrac{\partial}{\partial\varphi}\Psi_2 = i\left(m - \dfrac{1}{2}\right)\Psi_2, \end{cases}$$

где

$$\Psi = \begin{pmatrix}\Psi_1 \\ \Psi_2\end{pmatrix}, \quad J_z\Psi = m\Psi.$$

Откуда

$$\Psi_1 = f(\theta)e^{i\left(m-\frac{1}{2}\right)\varphi}, \quad \Psi_2 = f(\theta)e^{i\left(m+\frac{1}{2}\right)\varphi}.$$

$$\widehat{\mathbf{L}}^2\Psi = l(l+1)\Psi.$$

Значит

$$\Psi_1 = C_1 Y_l^{\left(m-\frac{1}{2}\right)}, \quad \Psi_2 = C_2 Y_l^{\left(m+\frac{1}{2}\right)},$$

где $Y_l^{(m)}(\theta,\varphi)$ — сферические функции.

По условию Ψ_1 и Ψ_2 должны удовлетворять уравнению:

$$\widehat{\mathbf{J}}^2\Psi = j(j+1)\Psi.$$

Матрицы Паули:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix}0 & 1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}, \quad \sigma_2\begin{pmatrix}0 & -i \\ i & 0\end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & -1\end{pmatrix}.$$

$$\widehat{\mathbf{J}}^2 = \widehat{\mathbf{L}}^2 + \widehat{\mathbf{S}}^2 + 2\widehat{\mathbf{L}}\widehat{\mathbf{S}} = \widehat{\mathbf{L}}^2 + \widehat{\mathbf{S}}^2 + l_i\sigma_i = \begin{pmatrix}\widehat{\mathbf{l}}^2 + \frac{3}{4} + \widehat{\mathrm{l}}_z & \widehat{\mathrm{l}}_- \\ \widehat{\mathrm{l}}_+ & \widehat{\mathbf{l}}^2 + \frac{3}{4} - \widehat{\mathrm{l}}_z\end{pmatrix}.$$

$$\widehat{\mathrm{j}}_\pm\left|j,m\right\rangle = \sqrt{j(j+1) - m(m\pm1)}\left|j,m\pm1\right\rangle.$$

$$\widehat{\mathbf{J}}^2\begin{pmatrix}\Psi_1 \\ \Psi_2\end{pmatrix} = \widehat{\mathbf{J}}^2\begin{pmatrix}C_1 Y_l^{\left(m-\frac{1}{2}\right)} \\ C_2 Y_l^{\left(m+\frac{1}{2}\right)}\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}\left(l(l+1) + \frac{3}{4} + m - \frac{1}{2}\right)C_1 Y_l^{\left(m-\frac{1}{2}\right)} + \sqrt{l(l+1) - m^2 + \frac{1}{4}}C_2 Y_l^{\left(m-\frac{1}{2}\right)} \\ \sqrt{l(l+1) - m^2 + \frac{1}{4}}C_1 Y_l^{\left(m+\frac{1}{2}\right)} + \left((l+1)l - m + \frac{1}{4}\right)C_2 Y_l^{\left(m+\frac{1}{2}\right)}\end{pmatrix} =$$

$$= j(j+1)\begin{pmatrix}C_1 Y_l^{\left(m-\frac{1}{2}\right)} \\ C_2 Y_l^{\left(m+\frac{1}{2}\right)}\end{pmatrix}.$$

Следовательно

$$\begin{cases} \left(l(l+1)+m+\dfrac{1}{4}-j(j+1)\right)C_1+\sqrt{l(l+1)-m^2+\dfrac{1}{4}}C_2=0, \\ \sqrt{l(l+1)-m^2+\dfrac{1}{4}}C_1+\left(l(l+1)-m+\dfrac{1}{4}-j(j+1)\right)C_2=0. \end{cases}$$

Чтобы система имела нетривиальное решение:

$$\left(\left(l+\frac{1}{2}\right)^2-j(j+1)\right)^2-m^2-\left(\left(l+\frac{1}{2}\right)^2-m^2\right)=0.$$

$$j(j+1)=\left(l+\frac{1}{2}\right)^2\pm\left(l+\frac{1}{2}\right)=A.$$

$$j^2\pm j-A=0.$$

Откуда

$$j=\frac{-1+\sqrt{1+4A}}{2}$$

(т. к. $j>0$). Значит

$$j_1=-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+\left(l+\frac{1}{2}\right)\left(l+\frac{1}{2}+1\right)}=l+1-\frac{1}{2}=l+\frac{1}{2},$$

$$j_2=-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+\left(l+\frac{1}{2}\right)\left(l-\frac{1}{2}\right)}=l-\frac{1}{2}$$

.

Нормировка:

$$\int\left(|\Psi_1|^2+|\Psi_2|^2\right)d\Omega=|C_1|^2+|C_2|^2=1.$$

1)

$$j=l+\frac{1}{2}\implies l=j-\frac{1}{2}.$$

$$\left(j^2-\frac{1}{4}+m+\frac{1}{4}-j^2-j\right)C_1+\sqrt{jj^2-\frac{1}{4}-m^2+\frac{1}{4}}C_2=0.$$

$$C_2=\frac{(j-m)C_1}{\sqrt{j^2-m^2}}=\sqrt{\frac{j-m}{j+m}}C_1.$$

$$C_1^2+\frac{j-m}{j+m}C_1^2=\frac{2j}{j+m}C_1^2=1\implies\begin{cases} C_1=\sqrt{\dfrac{j+m}{2j}}, \\ C_2=\sqrt{\dfrac{j-m}{2j}}. \end{cases}$$

Следовательно

$$\Psi = Y_{lm}^{\left(l+\frac{1}{2}\right)} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{j+1}{2j}} Y_l^{\left(m-\frac{1}{2}\right)}(\theta,\varphi) \\ \sqrt{\frac{j-1}{2j}} Y_l^{\left(m+\frac{1}{2}\right)}(\theta,\varphi) \end{pmatrix}.$$

2)

$$j = l - \frac{1}{2} \implies l = j + \frac{1}{2}.$$

$$\left(j^2 + 2j + \frac{3}{4} + m + \frac{1}{4} - j^2 - j\right) C_1 + \sqrt{j^2 + 2j + \frac{3}{4} - m^2 + \frac{1}{4}} C_2 = 0.$$

$$C_2 = -\frac{(j+m+1)C_1}{\sqrt{j^2+2j+1-m^2}} = -\frac{(j+m+1)C_1}{\sqrt{(j+1)^2-m^2}} = -\sqrt{\frac{j+m+1}{j+1-m}} C_1.$$

$$C_1^2 + \frac{j+m+1}{j+1-m} C_1^2 = \frac{2(j+1)}{j+1-m} C_1^2 = 1 \implies \begin{cases} C_1 = \sqrt{\dfrac{j+1-m}{2(j+1)}}, \\ C_2 = -\sqrt{\dfrac{j+1+m}{2(j+1)}}. \end{cases}$$

Откуда

$$\Psi = Y_{lm}^{\left(l-\frac{1}{2}\right)} = \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{j+1-m}{2(j+1)}} Y_l^{\left(m-\frac{1}{2}\right)}(\theta,\varphi) \\ -\sqrt{\frac{j+1+m}{2(j+1)}} Y_l^{\left(m+\frac{1}{2}\right)}(\theta,\varphi) \end{pmatrix}.$$

в)

$$\widehat{\mathrm{L}}_i = \widehat{\mathrm{L}}_{1i} + \widehat{\mathrm{L}}_{2i}.$$

$$\widehat{\mathrm{L}}^2 = \widehat{\mathrm{L}}_1^2 + \widehat{\mathrm{L}}_2^2 + 2\widehat{\mathbf{L}}_1\widehat{\mathbf{L}}_2.$$

Т. к. $\left[\widehat{\mathrm{L}}^2, \widehat{\mathrm{L}}_z\right]$, $\left[\widehat{\mathrm{L}}^2, \widehat{\mathrm{L}}_1^2\right] = 0$, $\left[\widehat{\mathrm{L}}^2, \widehat{\mathrm{L}}_2^2\right] = 0$, то будем искать волновые функции, являющиеся собственными для $\widehat{\mathrm{L}}^2$, $\widehat{\mathrm{L}}_z$, $\widehat{\mathrm{L}}_1^2$, $\widehat{\mathrm{L}}_2^2$. Они составляются из:

$$\widehat{\mathrm{L}}_1^2 \varphi_{l_1 m_1}(1) = l_1(l_1+1)\varphi_{l_1 m_1}(1).$$

$$\widehat{\mathrm{L}}_{1z} \varphi_{l_1 m_1}(1) = m_1 \varphi_{l_1 m_1}(1).$$

$$\widehat{\mathrm{L}}_2^2 \varphi_{l_2 m_2}(2) = l_2(l_2+1)\varphi_{l_2 m_2}(2).$$

$$\widehat{\mathrm{L}}_{2z} \varphi_{l_2 m_2}(2) = m_2 \varphi_{l_2 m_2}(2).$$

Пусть Ψ_{LM} — искомые функции, тогда

$$\widehat{\mathrm{L}}^2 \Psi_{LM} = L(L+1)\Psi_{LM}.$$

$$\widehat{\mathrm{L}}_z \Psi_{LM} = M \Psi_{LM}.$$

$$\Psi_{LM} = \sum C_{l_1 m_1 l_2 m_2}^{LM} \varphi_{l_1 m_1} \varphi_{l_2 m_2}.$$

При $L = 2$, $M = \pm 2$:

$$\Psi_{2,2} = \varphi_{1,1}(1)\varphi_{1,1}(2).$$

$$\Psi_{2,-2} = \varphi_{1,-1}(1)\varphi_{1,-1}(2).$$

Понижающий оператор: $\widehat{\mathrm{L}}_{-} = \widehat{\mathrm{L}}_{1-} + \widehat{\mathrm{L}}_{2-}$,

$$\widehat{\mathrm{L}}_{-}\Psi_{2,2} = \sqrt{2\cdot 3 - 2}\Psi_{2,1} = 2\Psi_{2,1}.$$

$$\begin{aligned}\Psi_{2,1} = \frac{1}{2}\widehat{\mathrm{L}}_{-}\Psi_{2,2} = \frac{1}{2}\left(\widehat{\mathrm{L}}_{1-} + \widehat{\mathrm{L}}_{2-}\right)\varphi_{1,1}(1)\varphi_{1,1}(2) = \\ = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2}\varphi_{1,0}(1)\varphi_{1,1}(2) + \sqrt{2}\varphi_{1,1}(1)\varphi_{1,0}(2)\right) = \\ = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\varphi_{1,0}(1)\varphi_{1,1}(2) + \varphi_{1,1}(1)\varphi_{1,0}(2)\right).\end{aligned}$$

$$\widehat{\mathrm{L}}_{+}\Psi_{2,2} = \sqrt{6 + 2\cdot(-1)}\Psi_{2,-1} = 2\cdot\Psi_{2,-1}.$$

$$\Psi_{2,-1} = \frac{1}{2}\widehat{\mathrm{L}}_{+}\Psi_{2,-2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\varphi_{1,0}(1)\varphi_{1,-1}(2) + \varphi_{1,-1}(1)\varphi_{1,0}(2)\right).$$

$$\widehat{\mathrm{L}}_{-}\Psi_{2,1} = \sqrt{6}\Psi_{2,0}.$$

$$\begin{aligned}\Psi_{2,0} = \frac{1}{\sqrt{6\cdot 2}}\left(\widehat{\mathrm{L}}_{1-} + \widehat{\mathrm{L}}_{2-}\right)\left(\varphi_{1,0}(1)\varphi_{1,1}(2) + \varphi_{1,1}(1)\varphi_{1,0}(2)\right) = \\ = \frac{1}{\sqrt{12}}\left(\sqrt{2}\varphi_{1,-1}(1)\varphi_{1,1}(2) + \sqrt{2}\varphi_{1,1}(1)\varphi_{1,-1}(2) + 2\sqrt{2}\varphi_{1,0}(1)\varphi_{1,0}(2)\right) = \\ = \frac{1}{\sqrt{6}}\left(\varphi_{1,-1}(1)\varphi_{1,1}(2) + \varphi_{1,1}(1)\varphi_{1,-1}(2) + 2\varphi_{1,0}(1)\varphi_{1,0}(2)\right).\end{aligned}$$

Коэффициенты Клебша-Гордана:

$$C^{2,\pm 2}_{1,\pm 1,1,\pm 1} = 1, \quad C^{2,\pm 1}_{1,\pm 1,1,0} = C^{2,\pm 1}_{1,0,1,\pm 1} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$C^{2,0}_{1,\pm 1,1,\mp 1} = \frac{1}{\sqrt{6}}, \quad C^{2,0}_{1,0,1,0} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Соотношение ортогональности:

$$\sum_{m_1,m_2} C^{JM}_{j_1m_1j_2m_2} C^{J'M'}_{j_1m_1j_2m_2} = \delta_{JJ'}\delta_{MM'}.$$

$$\sum_{J,M} C^{JM}_{j_1m_1j_2m_2} C^{JM}_{j_1m_1'j_2m_2'} = \delta_{m_1m_1'}\delta_{m_2m_2'}.$$

Значит

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(C^{1,1}_{1,1,1,0} + C^{1,1}_{1,0,1,1}\right) = 0.$$

Из условия нормировки:

$$\Psi_{1,1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\varphi_{1,0}(1)\varphi_{1,1}(2) - \varphi_{1,1}(1)\varphi_{1,0}(2) \right).$$

Аналогично:

$$\Psi_{1,-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\varphi_{1,0}(1)\varphi_{1,1}(2) - \varphi_{1,1}(1)\varphi_{1,-1}(2) \right).$$

$$\widehat{\mathrm{L}}_{-} \Psi_{1,1} = \sqrt{2}\Psi_{1,0}.$$

Следовательно

$$\Psi_{1,0} = \frac{1}{2} \left(\widehat{\mathrm{L}}_{1-} + \widehat{\mathrm{L}}_{2-} \right) \left(\varphi_{1,0}(1)\varphi_{1,1}(2) - \varphi_{1,1}(1)\varphi_{1,0}(2) \right) = \\ = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\varphi_{1,-1}(1)\varphi_{1,1}(2) - \varphi_{1,1}(1)\varphi_{1,-1}(2) \right).$$

Из соотношения ортогональности при $M' = M = 0$, $L' = 2$, $L = 0$:

$$\frac{1}{\sqrt{6}} \left(C^{0,0}_{1,1,1,-1} + C^{0,0}_{1,-1,1,1} \right) + \frac{2}{\sqrt{6}} C^{0,0}_{1,0,1,0}.$$

И при $L' = 1$, $L = 0$:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left(C^{0,-}_{1,1,1,-1} - C^{0,0}_{1,-1,1,1} \right) = 0.$$

Поэтому

$$C^{0,0}_{1,1,1,-1} = C^{0,0}_{1,-1,1,1}.$$

$$C^{0,0}_{1,0,1,0} = -C^{0,0}_{1,1,1,-1}.$$

Используя условие нормировки получаем:

$$\Psi_{0,0} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\varphi_{1,-1}(1)\varphi_{1,1}(2) + \varphi_{1,1}(1)\varphi_{1,-1}(2) - \varphi_{1,0}(1)\varphi_{1,0}(2) \right).$$

Функции Ψ_{LM} при $L = 0, 2$ *симметричны* по отношению к перестановке частиц, а при $L = 1$ — *антисимметричны.*

8.

Решение. Псевдовектор Паули-Любанского:

$$W^{\mu} = -\frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho} p_{\nu} S_{\lambda\rho},$$

где $S_{oa} = K^a$, $S_{ab} = \varepsilon_{abc} J^c$, $a, b = 1, 2, 3$, $S_{\mu\nu} = -S_{\nu\mu}$. J^a и K^a — генераторы вращений и бустов.

$$W^2 = W_{\mu} W^{\mu} = \frac{1}{4} \varepsilon_{\mu\nu'\lambda'\rho'} p^{\nu'} S^{\lambda'\rho'} \varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho} p_{\nu} S_{\lambda\rho}.$$

$$\varepsilon_{\mu\nu'\lambda'\rho'}\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho} = -\begin{vmatrix} \delta^{\nu}_{\nu'} & \delta^{\nu}_{\lambda'} & \delta^{\nu}_{\rho'} \\ \delta^{\lambda}_{\nu'} & \delta^{\lambda}_{\lambda'} & \delta^{\lambda}_{\rho'} \\ \delta^{\rho}_{\nu'} & \delta^{\rho}_{\lambda'} & \delta^{\rho}_{\rho'} \end{vmatrix} =$$

$$= -\Big(\delta^{\nu}_{\nu'}\delta^{\lambda}_{\lambda'}\delta^{\rho}_{\rho'} + \delta^{\nu}_{\lambda'}\delta^{\lambda}_{\rho'}\delta^{\rho}_{\nu'} + \delta^{\nu}_{\rho'}\delta^{\lambda}_{\nu'}\delta^{\rho}_{\lambda'} -$$

$$- \delta^{\nu}_{\nu'}\delta^{\nu}_{\nu'}\delta^{\lambda}_{\rho'}\delta^{\rho}_{\lambda'} - \delta^{\nu}_{\lambda'}\delta^{\lambda}_{\nu'}\delta^{\rho}_{\rho'} - \delta^{\nu}_{\rho'}\delta^{\lambda}_{\nu'}\delta^{\rho}_{\lambda'}\Big).$$

Значит

$$W_\mu W^\mu = -\frac{1}{4}\left(p^2S^2 + p^\rho p_\nu S^{\nu\lambda}_{\lambda\rho} + p^\lambda p_\nu S_{\lambda\rho}S^{\rho\nu} -\right.$$

$$\left. - p^2 S_{\lambda\rho}S^{\rho\lambda} - p^\lambda p_\nu S_{\lambda\rho}S^{\nu\rho} - p^\lambda p_\nu S_{\lambda\rho}S^{\rho\nu}\right).$$

Следовательно

$$W^2 = -\frac{1}{2}\left(p^2S^2 - 2p_\nu p^\lambda S_{\lambda\rho}S^{\nu\rho}\right).$$

9.

Решение. 1. Декартовы координаты.

$$\mathbf{H} = \operatorname{rot}\mathbf{A}, \quad A_x = A_z = 0, \quad A_y = \mathbf{Hx} \implies H_z = H, \quad H_y = H_x = 0.$$

Гамильтониан системы:

$$\widehat{\mathcal{H}} = \frac{1}{2m}\left[\widehat{\mathrm{p}}_x + \left(\widehat{\mathrm{p}}_y - \frac{e}{c}\mathbf{Hx}\right)^2 + \widehat{\mathrm{p}}_z^2\right].$$

Будем искать стационарные состояния:

$$\widehat{\mathcal{H}}\Psi = E\Psi.$$

Заметим, что:

$$\left[\widehat{\mathrm{p}}_z, \widehat{\mathcal{H}}\right] = 0, \quad \left[\widehat{\mathrm{p}}_z, \widehat{\mathcal{H}}\right] = 0.$$

Значит, будем искать волновые функции в виде

$$\Psi_{E,p_y,p_z} = \frac{1}{2\pi\hbar}\exp\left[\frac{i}{\hbar}\left(p_y y + p_z z\right)\right]\tilde{\Psi}(x),$$

где коэффициент перед экспонент подобран из условия нормировки. Поэтому

$$\tilde{\Psi}''(x) + \frac{2m}{\hbar^2}\left[\left(E - \frac{p_z^2}{2m} - \right) - \frac{m}{2}\omega_H^2\left(x - x_0\right)^2\right]\tilde{\Psi}(x) = 0,$$

где $\omega_H = \frac{eH}{mc}$, $x_0 = \frac{cp_y}{eH}$.

Решение данного уравнения выражается через решение уравнения Шрёдингера для гармонического осциллятора с частотой ω_H:

$$\Psi_{n,p_y,p_z} = \frac{1}{2\pi\hbar}\exp\left(\frac{i}{\hbar}\left(p_y y + p_z z\right)\right)\Psi_n^{\text{осц}}(x - x_0).$$

$$E_n = \hbar\omega_H\left(n + \frac{1}{2}\right) + \frac{p_z^2}{2m}$$

— уровни Ландау. Уровни энергии не зависят от p_y, следовательно — вырождены. Ограничим область движения ящиком в виде параллелепипеда со сторонами L_x, L_y, L_z ($V = L_xL_yL_z$).

$$\Psi(x_i + L) = \Psi_{x_i} \implies \exp\left(\frac{i}{\hbar}p_ix_i\right) = \exp\left(\frac{i}{\hbar}p_i(x_i + L_i)\right) \implies$$
$$\implies p_i = \frac{2\pi\hbar}{L}k_i, \quad k_i = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$$

Следовательно число квантовых состояний в объёме V в расчёте на интервал Δp_z и один дискретный уровень:

$$\Delta N = \frac{L_yL_z}{(2\pi\hbar)^2}\Delta p_y\Delta p_z.$$

$$0 < x_0 < L_x \implies \frac{\Delta p_y c}{eH} = Lx \implies \Delta p_y = \frac{eHL_x}{c} \implies$$
$$\implies \Delta N = \frac{\Delta p_z}{(2\pi\hbar)^2}\frac{eH}{c}L_xL_yL_z \implies \Delta N = \frac{eH}{c}\frac{V}{(2\pi\hbar)^2}\Delta p_z$$

— кратность вырождения.

2. В цилиндрических координатах.

$$\widehat{\mathbf{A}} = \frac{1}{2}\mathbf{H}\times\mathbf{r}, \quad \mathbf{H} \parallel z \implies A_z = A_\rho = 0,\ A_\varphi = \frac{1}{2}H\rho.$$

$$A_x = -\frac{1}{2}Hy, \quad A_y = \frac{1}{2}Hx.$$

$$\widehat{\mathcal{H}} = \frac{1}{2m}\left(\left(\widehat{\mathrm{p}}_x - \frac{e}{c}\widehat{\mathrm{A}}_x\right)^2 + \left(\widehat{\mathrm{p}}_y - \frac{e}{c}\widehat{\mathrm{A}}_y\right) + \widehat{\mathrm{p}}_z^2\right).$$

$$\widehat{\mathcal{H}} = \frac{1}{2m}\left(\widehat{\mathrm{p}}_x^2 + \widehat{\mathrm{p}}_y^2 + \widehat{\mathrm{p}}_z^2 + \frac{e^2}{c^2}\left(A_x^2 + A_y^2\right) - \frac{2e}{c}\left(A_xp_x + A_yp_y\right)\right).$$

$$\frac{e}{c}H\left(y\widehat{\mathrm{p}}_x - x\widehat{\mathrm{p}}_y\right) = -\frac{e}{c}H\widehat{\mathrm{L}}_z = i\hbar\frac{e}{c}H\frac{\partial}{\partial\varphi}.$$

$$\widehat{\mathcal{H}} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + \frac{e^2}{c^2}\frac{H^2}{8m}\left(x^2 + y^2\right) + i\frac{e\hbar}{2mc}H\frac{\partial}{\partial\varphi}.$$

$$\widehat{\mathcal{H}} = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\rho\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right) + \frac{i}{2}\hbar\omega_H\frac{\partial}{\partial\varphi} + \frac{1}{8}m\omega_H^2\rho^2.$$

Т. к.

$$\left[\widehat{\mathcal{H}}, \widehat{\mathrm{p}}_z\right] = 0, \quad \left[\widehat{\mathcal{H}}, \widehat{\mathrm{L}}_z\right] = 0,$$

то будем искать волновые функции, удовлетворяющие следующим условиям:

$$\widehat{\mathrm{p}}_z\Psi = p_z\Psi; \quad \widehat{\mathcal{H}}\Psi = E\Psi; \quad \widehat{\mathrm{L}}_z\Psi = \hbar M\Psi.$$

$$\Psi(\rho, z, \varphi) = \Psi_z(z)\Phi(\varphi)R(\rho).$$

$$\Psi_z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{\frac{ip_z z}{\hbar}}; \quad \Phi(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{iM\varphi}.$$

Значит при нормировке

$$\int\limits_0^\infty |R(\rho)|^2 \rho d\rho = 1$$

получаем

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\rho\frac{dR}{d\rho} - \frac{M^2}{\rho^2}R\right) - \frac{1}{2}\hbar\omega_H MR + \frac{1}{8}M\omega_H^2\rho^2 R = \underbrace{\left(E - \frac{p_z^2}{2M}\right)}_{=E_H} R$$

Пусть

$$\varepsilon = \frac{E_H}{\hbar\omega_H}, \quad \xi = \sqrt{\frac{2m\omega_H}{\hbar}}\rho = \frac{\sqrt{2}\rho}{\rho_H}.$$

Тогда

$$R'' + \frac{1}{\xi}R' + \left(\varepsilon - \frac{M^2}{\xi^2} + \frac{M}{2} - \frac{\xi^2}{16}\right)R = 0.$$

При $\xi \to 0$ получаем:

$$R'' + \frac{1}{\xi}R' - \frac{M^2}{\xi^2}R = 0, \quad R \sim \xi^s \implies s(s-1) + s - M^2 = 0 \implies s = \pm M.$$

$$R|_{\xi\to 0} \sim \xi^{|M|}.$$

При $\xi \to \infty$:

$$R'' - \frac{1}{16}\xi^2 R = 0, \quad R \sim \exp\left(-\alpha\xi^2\right).$$

Значит

$$\left(-2\alpha\xi e^{-\alpha\xi^2}\right)' - \frac{1}{16}\xi^2 e^{-\alpha\xi^2} = 0.$$

$$-2\alpha e^{-\alpha\xi^2} + 4\alpha^2\xi^2 e^{-\alpha\xi^2} - \frac{1}{16}\xi^2 e^{-\alpha\xi^2} = 0.$$

$$-\frac{2\alpha}{\xi^2} + 4\alpha^2 - \frac{1}{16} = 0.$$

Поэтому

$$\alpha = \frac{1}{8},$$

т. к. $\xi \to \infty$. Значит

$$R(\xi) = e^{-\frac{\xi^2}{8}}\xi^{|M|}W(\xi).$$

Для $u = \xi^2/4$ получим

$$u\frac{d^2W}{du^2} + (|M| + 1 - u)\frac{dW}{du} + \left(\varepsilon - \frac{|M| - M + 1}{2}\right)W = 0.$$

Раскладывая $W = \sum_{k=0}^{\infty} a_k u^k$, получаем

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[\left(k(k+1)+(|M|+1)(k+1)\right)a_{k+1}+\left(\varepsilon-k-\frac{|M|-M+1}{2}\right)a_k\right]=0.$$

Откуда

$$a_{k+1}=a_k\frac{2k-2\varepsilon+|M|-M+1}{2(k+1)(k+|M|+1)}\sim\frac{a_k}{k}\ \text{при}\ k\gg 1,$$

т. е. если ряд не обрывается, то $W \sim e^u$ — ненормируемое решение. Значит

$$\varepsilon=n_\rho+\frac{|M|-M+1}{2},\quad n_\rho=0,1,2,\ldots\ \text{— радиальное кв. число.}$$

Энергетический спектр:

$$E_{n\rho_z}=\hbar\omega_H\left(n+\frac{1}{2}\right)+\frac{p_z^2}{2m},\quad n=n_\rho+\frac{|M|-M}{2}=0,1,2$$

(n — главное квантовое число).

Уровни энергии вырождены по значениям проекции момента на направление магнитного поля: каждому фиксированному значению n соответствуют состояния с $M=-n,-n+1,\ldots,0,1,\ldots,\infty$.

$$R_{n_\rho M}(\rho)=\frac{1}{\rho_H\sqrt{n_\rho r!\,(|M|+n_\rho)!}}\exp\left(-\frac{\rho^2}{4\rho_H^2}\right)\left(\frac{\rho}{\sqrt{2}\rho_H}\right)^{|M|}\underbrace{L_{n_\rho}^{|M|}\left(\frac{\rho^2}{2\rho_H^2}\right)}_{\substack{\text{присоед. полин.}\\ \text{Лагерра}}}.$$

12.

Решение. Обобщая уравнения Клейна-Фока-Гордона на случай присутствия ЭМ полей и учитывая $\mathbf{A}=\mathbf{0}$ (поле — электрическое) получаем

$$\left[\left(i\frac{\hbar}{c}\frac{\partial}{\partial t}-e\varphi\right)^2+\left(\hbar\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^2-(mc)^2\right]\Phi=0.$$

Ищем решение в виде:

$$\Phi=\Psi(x)e^{-\frac{iEt}{\hbar}}.$$

$$\left[(E-e\varphi)^2-c^2\widehat{\mathrm{p}}^2-m^2c^4\right]\Psi=0.$$

$$\left(E^2-m^2c^4\right)\Psi=\left[c^2\widehat{\mathrm{p}}^2+2Ee\varphi-e^2\varphi^2\right]\Psi.$$

$$\frac{E^2-m^2c^4}{2mc^2}\Psi=\left(\frac{\widehat{\mathrm{p}}^2}{2m}+\underbrace{\frac{E}{mc^2}e\varphi-\frac{e^2\varphi^2}{2mc^2}}_{U_{\text{eff}}}\right)\Psi.$$

$$U_{\text{eff}}=\frac{E}{mc^2}e\varphi-\frac{e^2\varphi^2}{2mc^2}.$$

При энергии частицы $E\simeq mc^2$, если поле достаточно сильное (т. е. $e\varphi>2mc^2$), то эффективный потенциал $U_{\text{eff}}<0$ и частица испытывает притяжение.

Второе задание

13.

Решение. Для расчётов используем выражение оператора координаты $\widehat{\mathrm{x}}$ для гармонического осциллятора через операторы рождения и уничтожения (x_0 — осцилляторная единица длины)

$$\widehat{\mathrm{x}} = \frac{x_0}{\sqrt{2}}\left(\widehat{\mathrm{a}}^+ + \widehat{\mathrm{a}}\right), \quad x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}.$$

а) Поправка первого приближения

$$E_n^{(1)} = \langle n|\,\widehat{\mathrm{V}}\,|n\rangle = \alpha\,\langle n|\,\widehat{\mathrm{x}}\,|n\rangle = \frac{\alpha x_0}{\sqrt{2}}\,\langle n|\,\widehat{\mathrm{a}}^+ + \widehat{\mathrm{a}}\,|n\rangle = 0.$$

Поправка второго приближения

$$E_n^{(2)} = \sum_{k\neq n}\frac{|V_{nk}|^2}{E_n^{(0)} - E_k^{(0)}} = \frac{\alpha^2 x_0^2}{2}\left(\frac{n}{\hbar\omega} - \frac{n+1}{\hbar\omega}\right) = -\frac{\alpha^2}{2m\omega^2},$$

где $V_{nk} = \langle n|\,\widehat{\mathrm{V}}\,|k\rangle$, $E_n^{(0)} = \hbar\omega(n+1/2)$.

б) Можно показать, что

$$\langle\widehat{\mathrm{x}}^4\rangle = \langle n|\,\widehat{\mathrm{x}}^4\,|n\rangle = \frac{x_0^4}{4}\left(6n^2+6n+3\right),$$

$$\langle\widehat{\mathrm{x}}^{2k+1}\rangle = \langle n|\,\widehat{\mathrm{x}}^{2k+1}\,|n\rangle = 0, \quad k = 0, 1, \ldots$$

Тогда знаем поправку первого приближения для слагаемого Bx^4, для Ax^3 необходимо вычислять поправку второго приближения. Суммарная поправка равна

$$\Delta E_n = \frac{3}{2}B\left(\frac{\hbar}{m\omega}\right)^2\left[n^2+n+\frac{1}{2}\right] - \frac{15}{4}\frac{A^2}{\hbar\omega}\left(\frac{\hbar}{m\omega}\right)^3\left[n^2+n+\frac{11}{30}\right].$$

14.

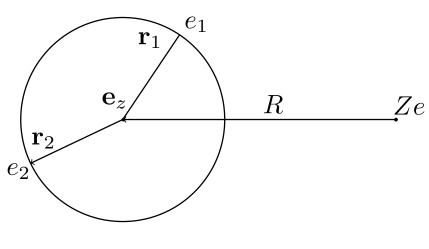

Рис. 1

Решение. а)

$$\boldsymbol{\mathcal{E}} = \frac{Ze}{R^2}\mathbf{e}_z.$$

$$\mathbf{d} = \sum_i e_i \mathbf{r}_i = e \sum_i \mathbf{r}_i.$$

$$\widehat{\mathrm{V}} = -\boldsymbol{\mathcal{E}}\widehat{\mathbf{d}} = -\sum_i \frac{Ze^2}{R^2}\widehat{\mathrm{z}}_i.$$

$$E^{(1)} = \langle e_1 e_2 \ldots e_n | \, \widehat{\mathrm{V}} \, | e_i \ldots e_n \rangle = 0.$$

$$E^{(2)} = \sum_{k \neq n} \frac{\left| \langle \mathbf{e}_k | \, \widehat{\mathrm{V}} \, | \mathbf{e}_n \rangle \right|^2}{E_n^{(0)} - E_k^{(0)}} = \frac{Z^2 e^4}{R^4} \sum_{k \neq n} \frac{|\langle \mathbf{e}_k | \sum_i \widehat{\mathrm{z}}_i | \mathbf{e}_n \rangle|}{}.$$