Квантовая деформация иерархии BКП

Драчов Ярослав
Факультет общей и прикладной физики МФТИ

21 июня 2022 г.

Аннотация

Целью данной работы является изучение интегрируемой иерархии BКП, её $\hbar$-деформации и разложений по родам частных решений данной иерархии. Основная задача работы — проверить, являются ли известные разложения по родам решений иерархии BКП решениями деформированной иерархии $\hbar$-BКП. К результатам можно отнести проверку для статсуммы матричной модели БГВ, выдвижение на основании этого гипотезы относительно вида разложения по родам всех гипергеометрических τ-функций BКП.

Благодарности и библиографическая информация

По желанию, не больше 1 стр.

Содержание

1 Введение

Демонстрирует понимание студентом научного контекста и умение представлять свое исследование широкой аудитории, содержит постановку задачи с обзором научной литературы и с указанием предмета, целей, объектов, инструментов и значения исследования, а также актуальности работы и личного вклада автор, краткий обзор разделов ВКР.

Проще всего определить иерархию BКП как бесконечный набор нелинейных дифференциальных уравнений, первое из которых даётся как

$$-60\left(\frac{\partial^2 F}{\partial t_1^2}\right)^3 - 30\frac{\partial^4 F}{\partial t_1^4}\frac{\partial^2 F}{\partial t_1^2} + 30\frac{\partial^2 F}{\partial t_1\,\partial t_3}\frac{\partial^2 F}{\partial t_1^2} - \frac{\partial^6 F}{\partial t_1^6} + \\ + 5\frac{\partial^2 F}{\partial t_3^2} - 9\frac{\partial^2 F}{\partial t_1\,\partial t_5} + 5\frac{\partial^4 F}{\partial t_1^3\,\partial t_3} = 0, \quad (1.1)$$

где функция F зависит от бесконечного набора времён $\mathbf{t} = \{t_1, t_3, t_5, \ldots\}$. На статсуммы и корреляторы различных квантовых систем можно смотреть как на τ функции ($\tau = \exp F$) некоторых интегрируемых иерархий. Исторически, первой была открыта иерархия Кадомцева-Петвиашвили при описании движения нелинейных волн в двумерной среде. В дальнейшем было найдено соответствие между интегрируемыми иерархиями и бесконечномерными алгебрами Ли. Оказалось, что иерархия КП соответствует бесконечномерной алгебре Ли серии A. В свою очередь бесконечномерной алгебре Ли серии B соответствует своя интегрируемая иерархия, которая в связи с этим получила называние BКП. На данный момент известно, что иерархия BКП связана с многими фундаментальными структурами современной теоретической физики, такими как, собственно, бесконечномерные алгебры Ли, матричные модели 2D гравитации, решёточные калибровочные теории КХД и др.

Было предложено ввести «постоянную Планка» $\hbar$ в иерархию BКП и изучать бездисперсионный предел этой иерархии при $\hbar \to 0$. Этот предел можно понимать как квазиклассический предел в 2D гравитации, т. е. он согласован с разложением по родам, следующем из условий Вирасоро в двумерной квантовой гравитации. Полагая $\hbar = 1$, мы получаем классическую иерархию BКП. После введения $\hbar$ уравнения BКП деформируются. Например, первое уравнение иерархии принимает вид

$$-60\left(\frac{\partial^2 F^\hbar}{\partial t_1^2}\right)^3 - 30\hbar^2\frac{\partial^4 F^\hbar}{\partial t_1^4}\frac{\partial^2 F^\hbar}{\partial t_1^2} + 30\frac{\partial^2 F^\hbar}{\partial t_1\,\partial t_3}\frac{\partial^2 F^\hbar}{\partial t_1^2} - \hbar^4\frac{\partial^6 F^\hbar}{\partial t_1^6} + \\ + 5\frac{\partial^2 F^\hbar}{\partial t_3^2} - 9\frac{\partial^2 F^\hbar}{\partial t_1\,\partial t_5} + 5\hbar^2\frac{\partial^4 F^\hbar}{\partial t_1^3\,\partial t_3} = 0. \quad (1.2)$$

Явное введение $\hbar$ путём масштабирования времён называют $\hbar$-расширением иерархии BКП, или коротко $\hbar$-BКП. Мы также часто будем называть это $\hbar$-деформацией иерархии BКП, несмотря на то, что это не деформация в общепринятом понимании этого слова. $\hbar$-деформация может быть явно проведена для всех элементов теории BКП: оператора Лакса, W-симметрий и элемента группы B_∞.

Формальная $\hbar$-BКП страдает от недостатка явных примеров, поэтому *наша первая цель* — привести набор примеров решений $\hbar$-BКП, которые получаются путём добавления зависимости от $\hbar$ в некоторые хорошо известные решения обычной BКП. Выбор этих примеров неслучаен. Будут рассмотрены решения BКП, представляющие особый интерес как для физики высоких энергий, так и для соответствующей математики: статсумма Брезана-Гросса-Виттена, производящая функция спиновых чисел Гурвица и модель Концевича.

Статсумма БГВ и модель Концевича имеют представление в виде матричных моделей. В определённой области параметров матричные модели имеют пертурбативное разложение, отдельные слагаемые в котором можно связать с фейнмановскими диаграммами. Каждая диаграмма — это ленточный граф, который можно изобразить на определённой римановой поверхности. Это естественно определяет разложение по родам (что соответствует разложению $1/N$ после подходящего масштабирования параметров матричной модели) статсуммы и корреляторов, что и является предметом изучения во многих физических теориях.

Один из подходов к нахождению разложения по родам заключается в использовании так называемых петлевых уравнений, которые являются следствием тождеств Уорда для матричных моделей и могут быть решены рекурсивно. Каждый член разложения, соответствующий поверхности старшего рода может быть явно посчитан из корреляторов поверхностей нулевого, первого и второго родов. Данные начальные условия в определенном приближении, слабо ограничивающим общность, могут быть представлены в виде алгеброгеометрической структуры на определённой римановой поверхности, которую называют спектральной кривой.

Впервые понятие спектральной кривой было введено в теории интегрируемых систем, и, поэтому, разложение по родам матричных моделей тесно связано с интегрируемыми структурами, в частности, с иерархией BКП. Связь эта может заключаться в соответствии $\hbar$-деформации иерархии BКП и разложения по родам матричных моделей. *Нашей второй целью* будет проверить это на конкретных примерах.

Тут можно еще обсудить важность БГВ, спиновых чисел Гурвица и модели Концевича.

Данная работа идейно продолжает ранее исследованное соответствие между $\hbar$ деформацией иерархии КП и разложением по родам соответствующих матричных моделей и поэтому будет организована следующим образом.

2 Бозонно-фермионное соответствие КП

2.1 Полиномы Шура

Введём сперва несколько общепринятых обозначений, которыми будем пользоваться на протяжении всей работы

Определение. Упорядоченный набор целых неотрицательных чисел

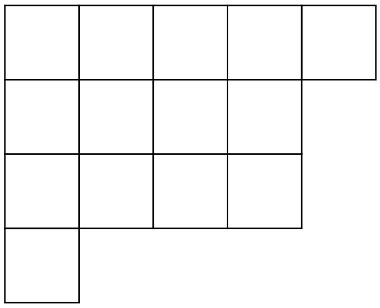
$$\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_l \geqslant 0$$

будем обозначать как $\lambda = [\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_l]$ и называть его *диаграммой Юнга.*

Определение. Каждой диаграмме Юнга поставим в соответствие число

$$|\lambda| = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_l.$$

Сразу отметим, что диаграмма Юнга соответствует разбиению числа $|\lambda|$ на $l(\lambda)$ чисел λ_i. Графическим представлением диаграммы Юнга называется конечный набор клеток, организованных в выровненные по левому краю ряды длин $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_l$. Например, диаграмму $[5, 4, 4, 1]$ графически можно представить как



Определение. Диаграммы Юнга можно однозначно задать как набором длин строк $\lambda = [\lambda_1, \ldots, \lambda_l]$, так и с помощью набора переменных $\alpha_i = \lambda_i - i$ и $\beta_i = \lambda'_i - i$, (см. рис. 1), где λ'_i — длина i-го столбца диаграммы Юнга λ. Второй способ называют *записью Фробениуса* и символически обозначают диаграмму Юнга как $(\alpha|\beta) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d|\beta_1, \ldots, \beta_d)$, где $d = d(\lambda)$ — количество клеток на главной диагонали диаграммы λ.

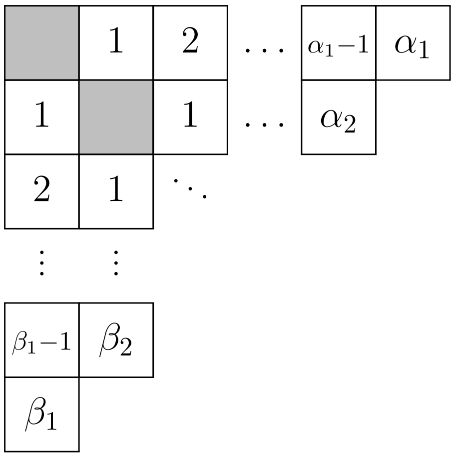


Рис. 1: α_i и β_i в записи Фробениуса (серым цветом выделена *главная диагональ* диаграммы Юнга)

Определение. Понимая зависимость от t как зависимость от переменных $t_1, t_2, \ldots$ *полиномы Шура* $s_k(t)$ для диаграмм вида $\lambda = [k]$ даются как коэффициенты разложения

$$\exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} t_k z^k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} s_k(t) z^k.$$

С их помощью *полиномы Шура* $s_\lambda(t)$ для произвольных диаграмм λ определяются как

$$s_\lambda(t) = \det s_{\lambda_i - i + j}(t),$$

где определитель считается по матрице, строки в которой нумерует индекс i, а столбцы — j, причём оба пробегают значения от 1 до $l(\lambda)$.

Для ясности приведём несколько простейших полиномов Шура

$$s_{\varnothing}(t) = 1,$$

$$s_{[1]}(t) = t_1,$$

$$s_{[2]}(t) = \frac{t_1^2}{2} + t_2, \qquad s_{[1,\,1]}(t) = \frac{t_1^2}{2} - t_2,$$

$$s_{[3]}(t) = \frac{t_1^3}{6} + t_1t_2 + t_3, \qquad s_{[2,1]}(t) = \frac{t_1^3}{3} - t_3, \qquad s_{[1,1,1]}(t) = \frac{t_1^3}{6} - t_1t_2 + t_3.$$

Далее ещё не раз нам пригодится следующее соотношение

Утверждение (тождество Коши-Литлвуда). *Справедливо следующее равенство*

$$\sum_{\lambda} s_\lambda(t)s_\lambda(t') = \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} kt_kt'_k\right),$$

где суммирование в левой части ведётся по всем возможным диаграммам Юнга

В дальнейшем мы будем пользоваться введённым обозначением для суммирования по диаграммам Юнга в случаях, когда это не вызывает неоднозначности.

2.2 Пространство Фока, фермионы и алгебра $\widehat{gl(\infty)}$

Будем рассматривать *бесконечномерную алгебру Клиффорда* с генераторами $\{\psi_n, \psi_m^* \mid n, m \in \mathbb{Z}\}$, обладающими коммутационными соотношениями

$$\{\psi_n, \psi_m\} = 0, \qquad \{\psi_n^*, \psi_m^*\} = 0, \qquad \{\psi_n, \psi_m^*\} = \delta_{n,m}. \tag{2.1}$$

Определение. Действие генераторов алгебры на *вакуумный вектор* даётся как

$$\psi_k \left|0\right\rangle = 0, \quad k < 0; \qquad \psi^* \left|0\right\rangle = 0, \quad k \geqslant 0. \tag{2.2}$$

То есть операторы ψ_k при $k > 0$ и ψ_k^* при $k \leqslant 0$ — это операторы рождения, а ψ_k при $k \leqslant 0$ и ψ_k^* при $k > 0$ — операторы уничтожения.

Далее определим *m-е вакуумы*

$$\psi_k \left|m\right\rangle = 0, \quad k < m; \qquad \psi^* \left|m\right\rangle = 0, \quad k \geqslant m, \tag{2.3}$$

и *состояния*

$$\left|m, \lambda\right\rangle = \psi_{\lambda_1+m-1}\psi_{\lambda_2+m-2}\cdots\psi_{\lambda_l+m-l}\left|m-l\right\rangle. \tag{2.4}$$

Утверждение. *В записи Фробениуса*

$$|m, \lambda\rangle = (-1)^b \psi_{m+\alpha_1} \cdots \psi_{m+\alpha_d} \psi^*_{m-\beta_d-1} \cdots \psi^*_{m-\beta_1-1} |m\rangle \,, \tag{2.5}$$

где

$$b = \sum_{i=1}^{d} \beta_i, \tag{2.6}$$

Доказательство. В записи Фробениуса имеем

$$\begin{aligned}|m, \lambda\rangle &= \psi_{\lambda_1+m-1} \psi_{\lambda_2+m-2} \cdots \psi_{\lambda_l+m-l} |m-l\rangle = \\ &= \psi_{m+\alpha_1} \cdots \psi_{m+\alpha_d} \psi_{\lambda_{d+1}+m-(d+1)} \cdots \psi_{\lambda_l+m-l} \psi^*_{m-l} \cdots \psi^*_{m-1} |m\rangle \,.\end{aligned} \tag{2.7}$$

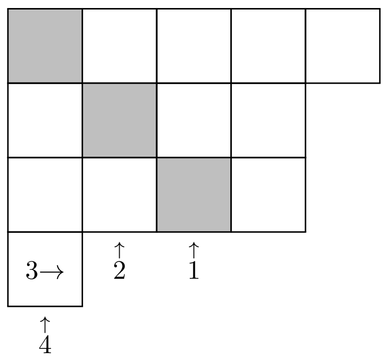


Рис. 2: Нумерация внешних рёбер диаграммы $\lambda = [5, 4, 4, 1]$

Пронумеруем внешние рёбра диаграммы λ начиная от нижнего ребра первого столбца и двигаясь против часовой стрелки числами $l, l-1, \ldots, 2, 1$ (см. пример на рис. 2). Тогда вертикальные рёбра будут занумерованы числами $i - \lambda_i$, а горизонтальные — числами $\beta_i + 1$. Отсюда следует, что

$$\{i - \lambda_i\}_{i=d+1}^{l} = \{1, 2, \ldots, l\} \setminus \{\beta_i + 1\}_{i=1}^{d} \,, \tag{2.8}$$

а также

$$\{\lambda_i + m - i\}_{i=d+1}^{l} = \{m-l, m-l+1, \ldots, m-1\} \setminus \{m - \beta_i - 1\}_{i=1}^{d} \,. \tag{2.9}$$

Теперь можем переписать

$$\psi^*_{m-l} \cdots \psi^*_{m-1} = (-1)^b \psi^*_{\lambda_l+m-l} \cdots \psi^*_{\lambda_{d+1}+m-(d+1)} \psi^*_{m-\beta_d-1} \cdots \psi^*_{m-\beta_1-1}, \tag{2.10}$$

где

$$b = \sum_{i=1}^{d} \beta_i, \tag{2.11}$$

и, как итог,

$$|m, \lambda\rangle = (-1)^b \psi_{m+\alpha_1} \cdots \psi_{m+\alpha_d} \psi^*_{m-\beta_d-1} \cdots \psi^*_{m-\beta_1-1} |m\rangle \,, \tag{2.12}$$

□

Определение. Введём также *производящие функции для фермионов*

$$\psi(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \psi_k z^k, \qquad \psi^*(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \psi_k^* z^{-k-1}. \tag{2.13}$$

Определение. Будем обозначать *нормальное упорядочение* фермионных операторов как :(...):. Результатом нормального упорядочения будет перемещение всех операторов уничтожения направо, а операторов рождения — налево, где каждая транспозиция двух фермионов будет производиться в согласии с антикоммутационным соотношением и, следовательно, давать множитель (-1).

Для строгого определения пространства Фока потребуется ввести несколько дополнительных обозначений. Пусть

$$V = \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} \mathbb{C} v_j$$

— бесконечномерное комплексное векторное пространство с фиксированным базисом $\{v_j \mid j \in \mathbb{Z}\}$. Будем понимать v_j как вектор с единицей на j-м месте и нулями на остальных. Обозначая через $\wedge$ внешнее произведение векторов, можем реализовать на данном пространстве наши физические состояния $|m,\lambda\rangle$ в согласии с (2.4) как

$$|m,\lambda\rangle \equiv v_{\lambda_1+m-1} \wedge v_{\lambda_2+m-2} \wedge \ldots \wedge v_{\lambda_l+m-l} \wedge v_{m-l-1} \wedge v_{m-l-2} \wedge \ldots .$$

Линейное пространство, в котором находится данное состояние тогда будет задаваться как

$$\mathcal{F}^{(m)} = \bigwedge\nolimits_{(m)}^{\infty} V.$$

Определение. *Пространством Фока* будем называть

$$\mathcal{F} = \bigoplus_{m\in\mathbb{Z}} \mathcal{F}^{(m)}.$$

Определение. Элементами алгебры $gl(\infty)$ будут бесконечномерные матрицы, у которых конечное количество диагоналей отличны от нулевых:

$$gl(\infty) = \left\{(a_{ij}) \mid i,j \in \mathbb{Z},\, a_{ij} = 0 \text{ при } |i-j| \gg 0\right\}. \tag{2.14}$$

Базисом данной алгебры можно выбрать матрицы E_{ij}, у которых единственный, отличный от нуля, элемент равен 1 и находится на пересечении i-й строки и j-го столбца.

$$(E_{ij})_{kl} = \delta_{ik}\delta_{jl}. \tag{2.15}$$

Понятно, что

$$E_{ij} v_k = \delta_{jk} v_i.$$

Нетрудно получить коммутационные соотношения для данной алгебры.

Утверждение.
$$[E_{ij}, E_{kl}] = \delta_{jk} E_{il} - \delta_{il} E_{kj}.$$

Доказательство.

$$[E_{ij}, E_{kl}] = E_{ij}E_{kl} - E_{kl}E_{ij} = \delta_{in}\delta_{jm}\delta_{km}\delta_{lp} - \delta_{kn}\delta_{lm}\delta_{im}\delta_{jp} = \\ = \delta_{jk}E_{il} - \delta_{il}E_{kj}. \quad (2.16)$$

□

Представление R группы $\mathrm{GL}(\infty)$ (получаемой экспоненциированием $gl(\infty)$)и представление ρ алгебры Ли $gl(\infty)$ в пространстве $\mathcal{F}$ можно задать формулами

$$R\,(A)\,(v_{i_1} \wedge v_{i_2} \wedge \ldots) = Av_{i_1} \wedge Av_{i_2} \wedge \ldots, \quad (2.17)$$
$$\rho(a)\,(v_{i_1} \wedge v_{i_2} \wedge \ldots) = av_{i_1} \wedge v_{i_2} \wedge \ldots + v_{i_1} \wedge av_{i_2} \wedge \ldots + \ldots. \quad (2.18)$$

Последние две формулы связаны соотношением

$$\mathrm{e}^{\rho(a)} = R\,(\mathrm{e}^a)\,, \qquad a \in gl_\infty. \quad (2.19)$$

Утверждение. *Отображение*

$$\rho(E_{ij}) = \psi_i\psi_j^* \quad (2.20)$$

является представлением алгебры gl_∞ на введённом пространстве Фока.

Доказательство. Т. к.

$$\left[\psi_i\psi_j^*, \psi_k\psi_l^*\right] = \psi_i\psi_j^*\psi_k\psi_l^* - \psi_k\psi_l^*\psi_i\psi_j^* = \\ = \psi_i\left(\delta_{jk} - \psi_k\psi_j^*\right)\psi_l^* - \psi_k\psi_l^*\psi_i\psi_j^* = \\ = \delta_{jk}\psi_i\psi_l^* - \psi_k\psi_i\psi_l^*\psi_j^* - \psi_k\psi_l^*\psi_i\psi_j^* = \\ = \delta_{jk}\psi_i\psi_l^* - \delta_{il}\psi_k\psi_j^*. \quad (2.21)$$

Следовательно скобка Ли при отображении сохраняется. □

Утверждение. *Оператор представления R элемента $A \in \mathrm{GL}(\infty)$ в пространстве $\mathcal{F}$ даётся как*

$$R(A)\,|m,\lambda\rangle = \sum_{\mu\in\mathrm{Par}} \left(\det A^{\lambda_1+m,\lambda_2+m-1,\ldots}_{\mu_1+m,\mu_2+m-1,\ldots}\right)|m,\mu\rangle\,. \quad (2.22)$$

Доказательство. Пользуясь формулой (2.17) и стандартным исчислнием внешних степней найдём

$$R(A)\left(v_{i_m}\wedge v_{i_{m-1}}\wedge\ldots\right)=\sum_{j_m,j_{m-1},\ldots\in\mathbb{Z}}A_{j_m,i_m}v_{j_m}\wedge A_{j_{m-1},i_{m-1}}v_{j_{m-1}}\wedge\ldots=$$
$$=\sum_{j_m>j_{m-1}>\ldots}\left(\det A^{i_m,\,i_{m-1},\ldots}_{j_m,j_{m-1},\ldots}\right)v_{j_m}\wedge v_{j_{m-1}}\wedge\ldots. \quad (2.23)$$

где $A^{i_m,i_{m-1},\ldots}_{j_m,j_{m-1},\ldots}$ означает матрицу, состоящую из элементов, стоящих на пересечении строк $j_m, j_{m-1},\ldots$ и столбцов $i_m, i_{m-1},\ldots$ матрицы A.

□

Определение.

$$\widehat{gl(\infty)}=gl(\infty)\oplus\mathbb{C}c, \quad (2.24)$$

где $\mathbb{C}c$ называют *центром* и скобка Ли задаётся как

$$[a,b]=ab-ba+\alpha\,(a,b)\,c. \quad (2.25)$$

Функцию $\alpha(a,b)$ называют *два-коциклом*, для корректности определения скобки Ли на неё накладываются дополнительные ограничения.

Утверждение. *Два-коцикл должен удовлетворять соотношению*

$$\alpha\,(xy-yx,z)+\alpha\,(yz-zy,x)+\alpha\,(zx-xz,y)=0, \quad (2.26)$$

а также должен быть линеен по обоим аргументам и антисимметричен.

Доказательство.

- Антисимметричность скобки влечёт антисимметричность $\alpha(a,b)$.
- Линейность скобки по обоим аргументам влечёт аналогичную линейность $\alpha(a,b)$.
- Из тождества Якоби скобки

  $$[[x,y]\,,z]+[[y,z]\,,x]+[[z,x]\,,y]=0 \quad (2.27)$$

  следует, что

  $$[xy-yx+\alpha\,(x,y)\,c,z]+[yz-zy+\alpha\,(y,z)\,c,x]+$$
  $$+[zx-xz+\alpha\,(z,x)\,c,y]=0 \quad (2.28)$$

  и, как итог,

  $$\alpha\,(xy-yx,z)+\alpha\,(yz-zy,x)+\alpha\,(zx-xz,y)=0. \quad (2.29)$$

□

Центрально расширенная алгебра $\widehat{gl(\infty)}$ пригодится нам для изучения нормально упорядоченных пар операторов $:\psi_i\psi_j^*:$.

Покажем, что представлением данной алгебры на пространстве Фока будет

$$\hat{\rho}(E_{ij}) = :\psi_i\psi_j^*:. \tag{2.30}$$

Определение. *Свёрткой* будем называть разность произведения операторов и их нормального упорядочения

$$\overbracket{\psi_i\psi_j^*} = \psi_i\psi_j^* - :\psi_i\psi_j^*:. \tag{2.31}$$

Утверждение. *Свёртка буквально равна вакуумному среднему двух операторов*

$$\overbracket{\psi_i\psi_j^*} = \langle 0|\psi_i\psi_j^*|0\rangle\,. \tag{2.32}$$

Доказательство.

$$\overbracket{\psi_i\psi_j^*} = \overbracket{\psi_i\psi_j^*}\,\langle 0|0\rangle = \langle 0|\overbracket{\psi_i\psi_j^*}|0\rangle\; = \langle 0|\psi_i\psi_j^* - :\psi_i\psi_j^*:|0\rangle = \langle 0|\psi_i\psi_j^*|0\rangle\,. \tag{2.33}$$

□

Явное вычисление вакуумных средних даёт

$$\overbracket{\psi_i\psi_i^*} = 1 \qquad \text{при } i < 0, \tag{2.34}$$

$$\overbracket{\psi_i\psi_j^*} = 0 \qquad \text{во всех остальных случаях.} \tag{2.35}$$

Утверждение. *Коммутатор нормально упорядоченных пар операторов равен*

$$\left[:\psi_i\psi_j^*:, :\psi_k\psi_l^*:\right] = \delta_{jk}:\psi_i\psi_l^*: - \delta_{il}:\psi_k\psi_j^*: + \alpha\left(E_{ij}, E_{kl}\right), \tag{2.36}$$

где

$$\alpha\left(E_{ij}, E_{kl}\right) = \delta_{jk}\overbracket{\psi_i\psi_l^*} - \delta_{il}\overbracket{\psi_k\psi_j^*}, \tag{2.37}$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}
\left[:\psi_i\psi_j^*:, :\psi_k\psi_l^*:\right] &= \left[\psi_i\psi_j^* - \overbracket{\psi_i\psi_j^*}, \psi_k\psi_l^* - \overbracket{\psi_k\psi_l^*}\right] = \\
&= \left[\psi_i\psi_j^*, \psi_k\psi_l^*\right] = \delta_{jk}\psi_i\psi_l^* - \delta_{il}\psi_k\psi_j^* = \\
&= \delta_{jk}\left(:\psi_i\psi_l^*: + \overbracket{\psi_i\psi_l^*}\right) - \delta_{il}\left(:\psi_k\psi_j^*: + \overbracket{\psi_k\psi_j^*}\right) = \\
&= \delta_{jk}:\psi_i\psi_l^*: - \delta_{il}:\psi_k\psi_j^*: + \delta_{jk}\overbracket{\psi_i\psi_l^*} - \delta_{il}\overbracket{\psi_k\psi_j^*} = \\
&= \delta_{jk}:\psi_i\psi_l^*: - \delta_{il}:\psi_k\psi_j^*: + \alpha\left(E_{ij}, E_{kl}\right).
\end{aligned} \tag{2.38}$$

□

Непосредственным вычислением из (2.37), (2.34) и (2.35) получаем, что

$$\begin{aligned} &\alpha\left(E_{ij}, E_{ji}\right) = -\alpha\left(E_{ji}, E_{ij}\right) = 1 \quad \text{при } i < 0,\ j \geqslant 0, \\ &\alpha\left(E_{ij}, E_{kl}\right) = 0 \quad \text{во всех остальных случаях.} \end{aligned} \tag{2.39}$$

Утверждение. $\alpha\left(E_{ij}, E_{kl}\right)$ *действительно является два-коциклом.*

Доказательство. Линейность по каждому аргументу и антисимметричность $\alpha\left(E_{ij}, E_{kl}\right)$ очевидны. Далее проверим условие, следующее из тождества Якоби

$$\begin{gathered} \alpha\left(E_{ij}E_{kl} - E_{kl}E_{ij}, E_{mn}\right) + \alpha\left(E_{kl}E_{mn} - E_{mn}E_{kl}, E_{ij}\right) + \\ + \alpha\left(E_{mn}E_{ij} - E_{ij}E_{mn}, E_{kl}\right) = 0, \end{gathered} \tag{2.40}$$

$$\begin{gathered} \alpha\left(\delta_{jk}E_{il} - \delta_{il}E_{kj}, E_{mn}\right) + \alpha\left(\delta_{lm}E_{kn} - \delta_{kn}E_{ml}, E_{ij}\right) + \\ + \alpha\left(\delta_{ni}E_{mj} - \delta_{mj}E_{in}, E_{kl}\right) = 0, \end{gathered} \tag{2.41}$$

$$\begin{gathered} \delta_{jk}\alpha\left(E_{il}, E_{mn}\right) - \delta_{il}\alpha\left(E_{kj}, E_{mn}\right) + \\ + \delta_{lm}\alpha\left(E_{kn}, E_{ij}\right) - \delta_{kn}\alpha\left(E_{ml}, E_{ij}\right) + \\ + \delta_{ni}\alpha\left(E_{mj}, E_{kl}\right) - \delta_{mj}\alpha\left(E_{in}, E_{kl}\right) = 0, \end{gathered} \tag{2.42}$$

$$\begin{gathered} \delta_{jk}\left(\delta_{lm}\overbracket{\psi_i\psi^*_n} - \delta_{in}\overbracket{\psi_m\psi^*_l}\right) - \delta_{il}\left(\delta_{jm}\overbracket{\psi_k\psi^*_n} - \delta_{kn}\overbracket{\psi_m\psi^*_j}\right) + \\ + \delta_{lm}\left(\delta_{in}\overbracket{\psi_k\psi^*_j} - \delta_{kj}\overbracket{\psi_i\psi^*_n}\right) - \delta_{kn}\left(\delta_{il}\overbracket{\psi_m\psi^*_j} - \delta_{mj}\overbracket{\psi_i\psi^*_l}\right) + \\ + \delta_{ni}\left(\delta_{jk}\overbracket{\psi_m\psi^*_l} - \delta_{lm}\overbracket{\psi_k\psi^*_j}\right) - \delta_{mj}\left(\delta_{kn}\overbracket{\psi_i\psi^*_l} - \delta_{il}\overbracket{\psi_k\psi^*_n}\right) = 0, \end{gathered} \tag{2.43}$$

$$0 = 0. \tag{2.44}$$

□

Определение. *Операторами сдвигов* будем называть

$$H_n = \sum_{k\in\mathbb{Z}} {:}\psi_k\psi^*_{k+n}{:}. \tag{2.45}$$

Производящая функция операторов сдвига тогда даётся как

$$H(t) = \sum_{k=1}^{\infty} t_k H_k. \tag{2.46}$$

Определение. *Алгеброй Гейзенберга* (осцилляторной алгеброй) $\mathcal{A}$ будем называть комплексную алгебру Ли с базисом $\{a_n, n \in \mathbb{Z};\ \hbar\}$ и коммутационными соотношениями

$$[\hbar, a_n] = 0, \qquad [a_m, a_n] = m\delta_{m,-n}\hbar.$$

Утверждение. *В фермионном пространстве Фока $\mathcal{F}$ подалгебра Гейзенберга будет реализовываться операторами $\hat{\rho}\left(\delta_{i,j-n}\right) = H_n$.*

Утверждение. *В бозонном пространстве Фока $\mathcal{B} = \mathbb{C}\left[t_1, t_2, \ldots\right]$ для $\mu \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ реализацией алгебры Гейзенберга будет*

$$a_n = \frac{\partial}{\partial t_n}, \qquad a_{-n} = n t_n, \qquad a_0 = \mu.$$

Следовательно, можно предположить, что существует некоторое *«бозонное»* представление $\hat{\rho}^B$ алгебры $\widehat{gl(\infty)}$ на пространстве $\mathcal{B}$, для которого выполняется ($n \in \mathbb{N}$)

$$\hat{\rho}^B\left(\delta_{i,j-n}\right) = \frac{\partial}{\partial t_n}, \qquad \hat{\rho}^B\left(\delta_{i,j+n}\right) = n t_n, \qquad \hat{\rho}^B\left(\delta_{i,j}\right) = \mu.$$

В рамках этого предположения связь данного представления с $\hat{\rho}$ может быть явно задана с помощью следующего определения.

Определение. Изоморфизм между описанным фермионным пространством Фока $\mathcal{F}$ и бозонным пространством $\mathcal{B}$ полиномов от $t_1, t_3, \ldots$

$$\Phi : \mathcal{F} \to \mathcal{B} = \mathbb{C}\left[t_1, t_2, \ldots\right] \tag{2.47}$$

задаёт *бозонно-фермионное соответствие.*

Как следствие, можно построить бозонные представления $\rho^B = \Phi \rho \Phi^{-1}$ и $\hat{\rho}^B = \Phi \hat{\rho} \Phi^{-1}$ на данном пространстве.

Для непосредственных вычислений полезным будет следующее свойство.

Утверждение.

$$H(t) = \sum_{k=1}^{\infty} t_k \sum_{n \in \mathbb{Z}} \psi_n \psi_{k+n}.$$

Доказательство. Имеем

$$H_n = \sum_{k \in \mathbb{Z}} :\psi_k \psi^*_{k+n}: = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(\psi_k \psi^*_{k+n} - \overline{\psi_k \psi^*_{k+n}}\right) =$$

$$= \begin{cases} \sum\limits_{k \in \mathbb{Z}} \psi_k \psi^*_{k+n}, & n \neq 0, \\ \sum\limits_{i > 0} \psi_k \psi^*_k - \sum\limits_{i \leqslant 0} \psi^*_k \psi_k, & n = 0. \end{cases} \tag{2.48}$$

Откуда получаем, что

$$H(t) = \sum_{k=1}^{\infty} t_k \sum_{n \in \mathbb{Z}} \psi_n \psi_{k+n}.$$

□

Утверждение. *Для $n \in \mathbb{N}$*

$$H_n \left|0\right\rangle = 0, \qquad H_0 \left|0\right\rangle \sim \left|0\right\rangle,$$

а состояния вида

$$H_{-1}^{k_1} \cdots H_{-n}^{k_n} \left|0\right\rangle$$

линейно независимы.

Утверждение. *Вакуумным вектором в пространстве $\mathcal{B}$ может быть выбрана единица.*

Доказательство. Т. к. для $n \in \mathbb{N}$ $a_n(1) = 0$, состояния вида $a_{-1}^{k_1} \cdots a_{-n}^{k_n} \cdot 1$ линейно независимы, а $a_0(1) = \mu$. □

Утверждение. *Бозонно-фермионное соответствие явно задаётся как*

$$\Phi\left(\left|\lambda\right\rangle\right) = s_\lambda(t).$$

Доказательство. Линейность представления позволяет записать

$$H_n = \sum_{k\in\mathbb{Z}} :\psi_k \psi_{k+n}^*: = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{\rho}\left(E_{k,k+n}\right) = \hat{\rho}\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta_{ik}\delta_{j,k+n}\right) = \hat{\rho}\left(\delta_{i,j-n}\right). \tag{2.49}$$

Откуда

$$H(t) = \sum_{k=1}^{\infty} t_k H_k = \sum_{k=1}^{\infty} t_k \hat{\rho}\left(\delta_{i,j-k}\right) = \hat{\rho}\left(\sum_{k=1}^{\infty} t_k \delta_{i,j-k}\right). \tag{2.50}$$

Необходимо, чтобы отображение бозонно-фермионного соответствия удовлетворяло тождеству

$$\Phi\left[\exp\left(\sum_{k\geqslant 1} \eta_k H_k\right)\left|\lambda\right\rangle\right] = \hat{R}^B\left[\exp\left(\sum_{k\geqslant 1} \eta_k \delta_{i,j-k}\right)\right]\Phi\left(\left|\lambda\right\rangle\right),$$

где подразумевается, что $\Phi\left(\left|\lambda\right\rangle\right) = \Phi\left(\left|\lambda\right\rangle\right)(t)$. Имеем

$$\hat{R}^B\left[\exp\left(\sum_{k\geqslant 1} \eta_k \delta_{i,j-k}\right)\right] = \exp\left[\sum_{k\geqslant 1} \eta_k \hat{\rho}^B\left(\delta_{i,j-k}\right)\right] = \exp\left(\sum_{k\geqslant 1} \eta_k \frac{\partial}{\partial t_k}\right).$$

Правая часть тождества тогда

$$\hat{R}^B\left[\exp\left(\sum_{k\geqslant 1} \eta_k \delta_{i,j-k}\right)\right]\Phi\left(\left|\lambda\right\rangle\right) = \Phi\left(\left|\lambda\right\rangle\right)(t+\eta).$$

В левой же части

$$\exp\left(\sum_{k\geqslant 1}\eta_k H_k\right) = \exp\left[\hat{\rho}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\eta_k\delta_{i,j-k}\right)\right] = \hat{R}\left[\exp\left(\sum_{k=1}^{\infty}\eta_k\delta_{i,j-k}\right)\right] =$$

$$= \hat{R}\left[\exp\left(\sum_{k=1}^{\infty}\eta_k\delta_{i,j-1}^k\right)\right] = \hat{R}\left[\sum_{k=1}^{\infty}s_k(\eta)\delta_{i,j-k}\right] \equiv \hat{R}\left(A\right). \quad (2.51)$$

Элемент введённой матрицы A, находящийся на пересечении i-й строки и j-го столбца тем самым принимает вид

$$A_{ij} = s_{j-i}(\eta).$$

Имеем

$$\Phi\left[\exp\left(\sum_{k\geqslant 1}\eta_k H_k\right)|\lambda\rangle\right] = \Phi\left[\sum_{\mu\in\mathrm{Par}}\det\left(A^{\lambda_1+m,\lambda_2+m-1,\ldots}_{\mu_1+m,\mu_2+m-1,\ldots}\right)|\mu\rangle\right] =$$

$$= \sum_{\mu\in\mathrm{Par}}\det\left(A^{\lambda_1+m,\lambda_2+m-1,\ldots}_{\mu_1+m,\mu_2+m-1,\ldots}\right)\Phi\left(|\mu\rangle\right). \quad (2.52)$$

Теперь можем рассмотреть случай $t=0$, тогда, используя то, что $\Phi\left(|\mu\rangle\right)|_{t=0} = 0$ для всех состояний, отличных от вакуумного, получаем

$$\det\left(A^{\lambda_1+m,\lambda_2+m-1,\ldots}_{m,m-1,\ldots}\right) = \Phi\left(|\lambda\rangle\right)(\eta).$$

$$\det s_{\lambda_i-i+j}(\eta) = \Phi\left(|\lambda\rangle\right)(\eta).$$

$$s_\lambda(\eta) = \Phi\left(|\lambda\rangle\right)(\eta).$$

$$\Phi\left(|\lambda\rangle\right) = s_\lambda(t).$$

Также в ходе доказательства было получено соотношение

$$\Phi\left(|\lambda\rangle\right) = \langle 0|e^{H(t)}|\lambda\rangle\,.$$

□

3 Иерархия КП

Иерархия КП — бесконечный набор нелинейных дифференциальных уравнений, первое из которых даётся как

$$\frac{1}{4}\frac{\partial^2 F}{\partial t_2^2} = \frac{1}{3}\frac{\partial^2 F}{\partial t_1\partial t_3} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial t_1^2}\right)^2 - \frac{1}{12}\frac{\partial^4 F}{\partial t_1^4}. \quad (3.1)$$

Далее будут обсуждаться экспоненциированные решения данной иерархии (*τ-функции*) $\tau\left(t\right) = \exp\left(F(t)\right)$. В разделах 3.1 и 3.2 опишем методы получения уравнений данной иерархии.

3.1 Пары Лакса

Для псевдодифференциального оператора

$$L = \partial + \sum_{j=1}^{\infty} f_j \partial^{-j}, \qquad \text{где} \qquad \partial = \frac{\partial}{\partial t_1}, \tag{3.2}$$

условия совместности системы линейных уравнений

$$\begin{cases} Lw = kw, \\ \dfrac{\partial w}{\partial t_j} = B_j w, \end{cases} \qquad \text{где } B_j = \left(L^j\right)_+. \tag{3.3}$$

могут быть записаны в Лаксовой форме

$$\frac{\partial L}{\partial t_j} = \left[B_j, L\right]. \tag{3.4}$$

Из второго уравнения данной иерархии получаем

$$\frac{\partial f_1}{\partial t_2} = \frac{\partial^2 f_1}{\partial t_1^2} + 2\frac{\partial f_2}{\partial t_1}, \qquad \frac{\partial f_2}{\partial t_2} = \frac{\partial^2 f_2}{\partial t_1^2} + 2\frac{\partial f_3}{\partial t_1} + 2\frac{\partial f_1}{\partial t_1} f_1, \qquad \ldots \tag{3.5}$$

Из третьего —

$$\frac{\partial f_1}{\partial t_3} = \frac{\partial^3 f_1}{\partial t_1^3} + 3\frac{\partial^2 f_2}{\partial t_1^2} + 3\frac{\partial f_3}{\partial t_1} + 6\frac{\partial f_1}{\partial t_1} f_1, \qquad \ldots \tag{3.6}$$

Устраняя f_2 и f_3 из данных уравнений и пользуясь обозначениями $u = -2f_1$, получаем *уравнение КП*

$$3\frac{\partial^2 u}{\partial t_2^2} = \frac{\partial}{\partial t_1}\left(4\frac{\partial u}{\partial t_3} + 6u\frac{\partial u}{\partial t_1} - \frac{\partial^3 u}{\partial t_1^3}\right). \tag{3.7}$$

Требует пояснений введённое обозначение для u. Решение первоначальной задачи на собственные значения можно искать в виде

$$w = \mathrm{e}^{\xi(\mathbf{t},\, k)}\left(1 + \frac{w_1}{k} + \frac{w_2}{k^2} + \ldots\right), \qquad \text{где} \qquad \xi\left(\mathbf{t}, k\right) = \sum_{j=1}^{\infty} t_j k^j. \tag{3.8}$$

Тогда связь между w_i и f_i может быть найдена, например, из уравнений

$$\frac{\partial w}{\partial t_j} = B_j w. \tag{3.9}$$

Из уравнения на t_1 получаем

$$\frac{\partial w_1}{\partial t_1} = -f_1, \qquad \ldots. \tag{3.10}$$

Оказывается, что все функции $w_1, w_2, \ldots$ могут быть выражены через одну функцию τ по формуле

$$w = \frac{\tau\left(t_1 - \dfrac{1}{k}, t_2 - \dfrac{1}{2k^2}, t_3 - \dfrac{1}{3k^3}, \ldots\right)}{\tau\left(t_1, t_2, t_3, \ldots\right)} \mathrm{e}^{\xi(\mathbf{t},\, k)}. \qquad (3.11)$$

Откуда, например,

$$w_1 = -\frac{\partial \tau}{\partial t_1} \cdot \tau^{-1}. \qquad (3.12)$$

Иерархия КдФ получается из иерархии КП условием $L^2 = \partial^2 + u$ и бесконечный набор функций f_i выражается через u. Таким же свойством обладает τ-функция, между ними имеется связь

$$u = 2\frac{\partial^2}{\partial t_1^2} \ln \tau. \qquad (3.13)$$

Обозначение $u = -2f_1$ теперь поясняется формулами (3.10), (3.12), (3.13). Также, интегрируя два раза по t_1 уравнение (3.7) и принимая во внимание обозначение для F, получаем в точности уравнение (3.1).

3.2 Билинейное тождество Хироты

Определение. *Производные хироты* $\mathrm{D}_1^{n_1} \cdots \mathrm{D}_m^{n_m}$ *задаются из соотношения*

$$\mathrm{e}^{y_1 \mathrm{D}_1 + y_2 \mathrm{D}_2 + \ldots} f \cdot g = f\left(x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots\right) g\left(x_1 - y_1, x_2 - y_2, \ldots\right). \qquad (3.14)$$

Утверждение (билинейное тождество)**.** *Для любых x и x' положим*

$$\xi = \xi\left(\mathbf{t}, k\right), \qquad \xi' = \xi\left(\mathbf{t}', k\right). \qquad (3.15)$$

Тогда справедливо следующее тождество:

$$0 = \oint \frac{\mathrm{d}k}{2\pi \mathrm{i}} \mathrm{e}^{\xi - \xi'} \tau\left(t_1 - \frac{1}{k}, t_2 - \frac{1}{2k^2}, \ldots\right) \tau\left(t_1' + \frac{1}{k}, t_2' + \frac{1}{2k^2}, \ldots\right). \qquad (3.16)$$

Уравнения КП получаются из билинейного тождества после замены $t_j = x_j + y_j$, $t_j' = x_j - y_j$:

$$\oint \frac{\mathrm{d}k}{2\pi \mathrm{i}} \exp\left(2\sum_{j=1}^{\infty} k^j y_j\right) \tau\left(x_1 + y_1 - \frac{1}{k}, x_2 + y_2 - \frac{1}{2k^2}, \ldots\right) \times$$
$$\times\, \tau\left(x_1 - y_1 + \frac{1}{k}, x_2 - y_2 + \frac{1}{2k^2}, \ldots\right) =$$
$$= \oint \frac{\mathrm{d}k}{2\pi \mathrm{i}} \exp\left(2\sum_{j=1}^{\infty} k^j y_j\right) \exp\left(\sum_{j=1}^{\infty} \left(y_l - \frac{1}{lk^l}\right) \mathrm{D}_l\right) \tau \cdot \tau. \qquad (3.17)$$

Раскладывая подынтегральную функцию в ряд по степеням y_j и вычисляя коэффициент при k^{-1}, получаем уравнения КП. Например

$$(\mathrm{D}_1^4+3\mathrm{D}_2^2-4\mathrm{D}_1\mathrm{D}_3)\tau\cdot\tau=0, \qquad (\mathrm{D}_1^3\mathrm{D}_2+2\mathrm{D}_2\mathrm{D}_3-3\mathrm{D}_1\mathrm{D}_4)\tau\cdot\tau=0. \tag{3.18}$$

Первое из них — буквально (3.1) с учётом определения F.

3.3 Соотношения Плюккера, фермионное представление

Решения данной иерархии могут быть разложены по базису полиномов Шура

$$\tau\left(t\right)=\sum_{\lambda}C_{\lambda}s_{\lambda}\left(t\right). \tag{3.19}$$

Можно показать, что $\tau(t)$ — решение иерархии КП тогда и только тогда, когда коэффициенты C_λ удовлетворяют соотношениям Плюкера, первое из которых

$$C_{[2,\,2]}C_{[\varnothing]}-C_{[2,\,1]}C_{[1]}+C_{[2]}C_{[1,\,1]}=0. \tag{3.20}$$

Пусть $\hat{R}(G)$ — оператор на пространстве Фока, являющийся представлением элемента G группы $\widehat{GL(\infty)}$. Рассмотрим выражение

$$\begin{aligned}\langle 0|\mathrm{e}^{H(t)}\hat{R}(G)|0\rangle &= \langle 0|\mathrm{e}^{H(t)}\sum_{\lambda\in\mathrm{Par}}\det\left(G^{0,-1,\dots}_{\lambda_1,\lambda_2-1,\dots}\right)|\mu\rangle = \\ &= \sum_{\lambda\in\mathrm{Par}}\det\left(G^{0,-1,\dots}_{\lambda_1,\lambda_2-1,\dots}\right)\langle 0|\mathrm{e}^{H(t)}|\lambda\rangle = \sum_{\lambda\in\mathrm{Par}}\det\left(G^{0,-1,\dots}_{\lambda_1,\lambda_2-1,\dots}\right)s_\lambda(t).\end{aligned} \tag{3.21}$$

Сравнивая с τ-функцией в бозонном представлении (3.19) можно получить, что

$$\tau(t)=\langle 0|\mathrm{e}^{H(t)}\hat{R}(G)|0\rangle \quad \text{при} \quad C_\lambda=\det\left(G^{0,-1,\dots}_{\lambda_1,\lambda_2-1,\dots}\right). \tag{3.22}$$

Такой способ записи τ-функций будем называть *фермионным представлением.*

3.4 Гипергеометрические τ-функции

Имеется очень важный подкласс решений иерархии КП, который включает множество физический примеров — гипергеометрические τ-функции. Они ограничены особым видом элемента G группы $\widehat{GL(\infty)}$, а именно в фермионном представлении задаются как

$$\tau(t)=\langle 0|e^{H(t)}e^{A(\beta)}|0\rangle\,.$$

$$A(\beta) = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k A_k, \qquad A_k = \oint \frac{dz}{2\pi \mathrm{i}} \colon\!\left[\left(\frac{1}{z} r(D) \right)^k \psi(z) \right] \cdot \psi^*(z)\colon, \tag{3.23}$$

где $D = z\frac{\partial}{\partial z}$. Данный оператор действует на степени z следующим образом

$$D^n z^k = D^{n-1} z \frac{\partial}{\partial z} z^k = k D^{n-1} z^k = k^n z^k. \tag{3.24}$$

Функция от дифференциального оператора D понимается в смысле ряда Тейлора этой функции в окрестности нуля

$$\frac{1}{z} r(D) \psi(z) = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^{(n)}(0)}{n!} D^n \sum_{k \in \mathbb{Z}} \psi_k z^k = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{r^{(n)}(0)}{n!} \psi_k k^n z^{k-1} = \\ = \sum_{k \in \mathbb{Z}} r(k) \psi_k z^{k-1}. \tag{3.25}$$

При $k = 2$ получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{z} r(D) \frac{1}{z} r(D) &= \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^{(n)}(0)}{n!} D^n \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r^{(k)}(0)}{k!} D^k = \\ &= \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^{(n)}(0)}{n!} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \left(D^{n-i} \frac{1}{z} \right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r^{(k)}(0)}{k!} D^{k+i} = \\ &= \frac{1}{z^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^{(n)}(0)}{n!} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-1)^{n-i} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r^{(k)}(0)}{k!} D^{k+i} = \\ &= \frac{1}{z^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^{(n)}(0)}{n!} (D-1)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r^{(k)}(0)}{k!} D^k = \frac{1}{z^2} r(D-1) r(D). \end{aligned} \tag{3.26}$$

Для любой степени k нетрудно получить по индукции общий результат и тогда

$$\left[\left(\frac{1}{z} r(D) \right)^k \psi(z) \right] \cdot \psi^*(z) = \\ = \sum_{n \in \mathbb{Z}} r(n) r(n-1) \cdots r\left(n-k+1\right) \psi_n z^{n-k} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \psi_j^* z^{-j-1}. \tag{3.27}$$

После чего можем получить альтернативный, более простой для непосредственных вычислений, способ записи A_k

$$A_k = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \colon\!\psi_n \psi_{n-k}\colon \prod_{i=0}^{k-1} r(n-i). \tag{3.28}$$

В бозонном представлении оказывается, что гипергеометрические τ-функции КП имеют вид

$$\tau\left(t\right) = \sum_{\lambda} r_\lambda s_\lambda(\beta) s_\lambda\left(t\right), \tag{3.29}$$

где $s_\lambda(\beta)$ — полином Шура от переменных β_k,

$$r_\lambda = \prod_{w\in\lambda} r\left(c\left(w\right)\right), \tag{3.30}$$

$$c(w) = j - i, \qquad 1 \leqslant i \leqslant l(\lambda), \qquad 1 \leqslant j \leqslant \lambda_i. \tag{3.31}$$

Визуализация функции $c(w)$ на диаграмме Юнга:

0	1	2	3
-1	0	1	
-2	-1		

3.5 τ-функция чисел Гурвица

Производящая функция простых чисел Гурвица

$$\tau_H(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\mu} h^{\circ}_{m;\mu} t_{\mu_1} t_{\mu_2} \cdots t_{\mu_{l(\mu)}} \frac{u^m}{m!}, \tag{3.32}$$

где

$$h^{\circ}_{m;\mu} = \frac{1}{|\mu|!} \left| \left\{ \left(\eta_1, \ldots, \eta_m\right), \eta_i \in C_2\left(S_{|\mu|}\right) : \eta_m \circ \cdots \circ \eta_1 \in C_\mu\left(S_{|\mu|}\right) \right\} \right|, \tag{3.33}$$

$S_{|\mu|}$ — симметрическая группа перестановок μ элементов, $C_2\left(S_{|\mu|}\right)$ — множество всех транспозиций в $S_{|\mu|}$ и $C_\mu\left(S_{|\mu|}\right)$ — множество всех перестановок циклического типа μ.

Можно показать, что

$$\tau_H(t) = \sum_{\lambda} \mathrm{e}^{uc(\lambda)} s_\lambda\left(\beta_k = \delta_{k,1}\right) s_\lambda(t), \tag{3.34}$$

где $c(\lambda) = \sum_{w\in\lambda} c(w)$. То есть данная производящая функция — гипергеометрическая τ-функция с параметрами

$$r(n) = \mathrm{e}^{un}, \qquad \beta_1 = 1, \qquad \beta_k = 0,\, k \geqslant 2. \tag{3.35}$$

4 Квантовая деформация иерархии КП

4.1 Деформация Такасаки-Такебе

$\hbar$-формулировка иерархии КП была введена Такасаки и Такебе путём добавления формального параметра $\hbar$ в уравнения иерархии. Главной целью было исследовать бездисперсионную иерархию КП в пределе $\hbar \to 0$. Существование такого предела влечёт дополнительные ограничения на свободную энергию F: параметр $\hbar$ должен быть добавлен в логарифм τ-функции «правильно» — F не должна содержать отрицательных степеней $\hbar$. Связь между свободной энергией и τ-функцией в деформированной иерархии даётся как

$$F(t) = \hbar^2 \ln \tau(t).$$

Уравнения $\hbar$-деформированной иерархии КП получаются из иерархии КП заменой $t_k \to t_k/\hbar$. Первое уравнение деформированной иерархии

$$\frac{1}{4}\frac{\partial^2 F}{\partial t_2^2} = \frac{1}{3}\frac{\partial^2 F}{\partial t_1 \partial t_3} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial t_1^2}\right)^2 - \frac{\hbar^2}{12}\frac{\partial^4 F}{\partial t_1^4}. \tag{4.1}$$

τ-функции иерархии $\hbar$-КП

$$\tau\left(t\right) = \sum_{\lambda} C_\lambda s_\lambda \left(\frac{t}{\hbar}\right), \tag{4.2}$$

где C_λ удовлетворяют соотношениям Плюкера.

Первое уравнение бездисперсионной ($\hbar \to 0$) иерархии принимает вид

$$\frac{1}{4}\frac{\partial^2 F}{\partial t_2^2} = \frac{1}{3}\frac{\partial^2 F}{\partial t_1 \partial t_3} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial t_1^2}\right)^2.$$

Согласно Такасаки и Такебе τ-функции с «хорошим» квазиклассическим поведением имеют вид

$$\tau(t) = \langle 0| e^{H(t)} e^{A(\beta)} |0\rangle .$$

$$A(\beta) = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k A_k, \qquad A_k = \frac{1}{\hbar}\oint \frac{dz}{2\pi i} {:}\left(\frac{1}{z} r_k(\hbar D)\psi(z)\right)\cdot \psi^*(z){:}, \tag{4.3}$$

где, как и прежде, $D = z\frac{\partial}{\partial z}$.

Заметим, что масштабированием времён $t_k \to \frac{t_k}{\hbar}$ любой τ-функции КП можно получить решение $\hbar$-КП. Однако такой простой деформацией можно получить функцию F, которая не будет удовлетворять требуемым свойствам. Нетривиальная деформация может быть получена, когда параметр $\hbar$ также присутствует в деформированных коэффициентах Плюкера C_λ. В фермионном представлении мы знаем как деформировать τ-функции так, чтобы функции $F(t)$ могли иметь корректный квазиклассический предел. Более того, полученные функции могут иметь явную геометрическую структуру, например, разложение по родам. Тем не менее, описанная деформация не даёт рецепта, как деформировать произвольную τ-функцию, чтобы получить хорошее квазиклассическое поведение.

4.2 τ-функция чисел Гурвица

Формула Римана-Гурвица

$$2g - 2 = m - |\mu| - l(\mu), \tag{4.4}$$

позволяет нам разделить вклады различных родов g в производящую функцию. Каждая точка простого ветвления даёт вклад $+1$ к степени $\hbar$, каждый цикл длины μ_i даёт вклад $-\mu_i - 1$ к степени $\hbar$. Получаем замену переменных

$$t_{\mu_i} \to \hbar^{-\mu_i - 1} t_{\mu_i}, \qquad u \to \hbar u. \tag{4.5}$$

Умножая производящую функцию на $\hbar^2$, чтобы избавиться от отрицательных степеней $\hbar$ в разложении, получаем

$$F_H^{\hbar}(t) = \sum_{g=0}^{\infty} \hbar^{2g} F_H^g(t). \tag{4.6}$$

Покажем, что разложением по родам (4.5) τ-функции иерархии КП (3.34) действительно можно получить τ-функцию иерархии $\hbar$-КП (4.2). Имеем

$$\tau_H^{\hbar}(t) = \sum_{\lambda} e^{u\hbar c(\lambda)} s_\lambda \left(\beta_k = \delta_{k,1}\right) s_\lambda \left(\frac{t_1}{\hbar^2}, \frac{t_2}{\hbar^3}, \dots\right). \tag{4.7}$$

Можно показать, что

$$\tau_H^{\hbar}(t) = \sum_{\lambda} e^{u\hbar c(\lambda)} s_\lambda \left(\frac{1}{\hbar}, 0, 0, \dots\right) s_\lambda \left(\frac{t}{\hbar}\right) \tag{4.8}$$

и что коэффициенты

$$C_\lambda^{\hbar} = e^{u\hbar c(\lambda)} s_\lambda \left(\beta_k = \frac{\delta_{k,1}}{\hbar}\right) \tag{4.9}$$

удовлетворяют соотношениям Плюкера. Это показывает, что $\hbar$-деформацией мы получаем τ-функцию иерархии $\hbar$-КП.

4.3 Гипергеометрические τ-функции

Числа Гурвица — это один из примеров гипергеометрических τ-функций КП. Также к ним относятся статсуммы эрмитовой матричной модели и модели БГВ в фазе характеров. Оказывается, что для всех них правильной деформацией, согласующейся с разложением по родам и «хорошим» квазиклассическим поведением будет

$$\begin{cases} r(n) \to r\left(\hbar n\right), \\ \beta_n \to \dfrac{\beta_n}{\hbar}, \\ t_n \to \dfrac{t_n}{\hbar}. \end{cases}$$

5 Бозонно-фермионное соответствие BКП

5.1 q-полиномы Шура

Обычным полиномам Шура в BКП соответствуют *q-полиномы Шура*. Для их определения потребуется ввести производящую функцию полиномов $P_{n,m}$:

$$\sum_{n,m=0}^{\infty} P_{n,m} z_1^n z_2^m = \left[\exp\left(2\sum_{k=0}^{\infty} t_{2k+1}\left(z_1^{2k+1}+z_2^{2k+1}\right)\right)-1\right]\frac{z_1-z_2}{z_1+z_2}.$$

Из этого определения очевидно, что $P_{n,m}$ — антисимметричны. Определим антисимметричную матрицу

$$\left(M_\lambda(t)\right)_{i,j} = P_{\lambda_i,\lambda_j}(t)$$

для случая, когда $l(\lambda)$ — нечётное. Если же $l(\lambda)$ — чётное, то будем добавлять к этой матрице одну строку $P_{0,\lambda_j}(t)$ (как будто мы добавили к диаграмме Юнга ещё одну строку длины 0). Окончательно, q-полиномы Шура определяются как

$$q_\lambda(t) = 2^{-l/2}\,\mathrm{Pf}\, M_\lambda(t) \equiv 2^{-l/2}\sqrt{\det M_\lambda(t)}.$$

5.2 Нейтральные фермионы и алгебра $\widehat{go(\infty)}$

Нейтральные фермионы определяются как

$$\phi_m = \frac{\psi_m + (-1)^m \psi^*_{-m}}{\sqrt{2}}, \tag{5.1}$$

$$\phi^*_m = \frac{\psi^*_m + (-1)^m \psi_{-m}}{\sqrt{2}}. \tag{5.2}$$

Откуда сразу можно заметить что

$$\phi_m^* = (-1)^m \phi_{-m}. \tag{5.3}$$

Благодаря этому свойству далее мы можем ограничиться рассмотрением лишь фермионов ϕ_m. Прямой подстановкой можно получить каноническое коммутационное соотношение нейтральных фермионов

$$\{\phi_k, \phi_m\} = (-1)^k \delta_{k+m,0}, \tag{5.4}$$

а также их действие на вакуум «моря Дирака»

$$\phi_m |0\rangle = 0, \quad \langle 0| \phi_{-m} = 0, \quad m < 0. \tag{5.5}$$

Множеством строгих разбиений $\mathrm{SP} \subset \mathrm{Par}$ будем называть множество таких $\lambda \in \mathrm{Par}$, для которых выполнено $\lambda_1 > \lambda_2 \ldots > \lambda_l$.

Для разбиений $\lambda \in \mathrm{SP}$ определим состояния

$$|\lambda\rangle = \begin{cases} \phi_{\lambda_1}\phi_{\lambda_2}\cdots\phi_{\lambda_l}|0\rangle, & l = 0 \mod 2, \\ \sqrt{2}\phi_{\lambda_1}\phi_{\lambda_2}\cdots\phi_{\lambda_l}\phi_0|0\rangle, & l = 1 \mod 2. \end{cases} \tag{5.6}$$

Такое же определение для $\lambda \notin \mathrm{SP}$ очевидно влечёт $|\lambda\rangle = 0$ и любое суммирование по разбиениям $\lambda \in \mathrm{Par}$ сводится к суммированию по $\lambda \in \mathrm{SP}$.

Введём также производящую функцию нейтральных фермионов

$$\phi(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \phi_k z^k. \tag{5.7}$$

Коммутационные соотношениям билинейных комбинаций нейтральных фермионов $\phi_k\phi_m$

$$\begin{aligned}[][\phi_a\phi_b, \phi_c\phi_d] &= \phi_a\phi_b\phi_c\phi_d - \phi_c\phi_d\phi_a\phi_b = \phi_a\left((-1)^b\delta_{b+c,0} - \phi_c\phi_b\right)\phi_d - \\ &- \phi_c\left((-1)^a\delta_{a+d,0} - \phi_a\phi_d\right)\phi_b = (-1)^b\delta_{b+c,0}\phi_a\phi_d - ((-1)^a\delta_{a+c,0} - \phi_c\phi_a)\phi_b\phi_d - \\ &- (-1)^a\delta_{a+d,0}\phi_c\phi_b + \phi_c\phi_a\left((-1)^b\delta_{b+d,0} - \phi_b\phi_d\right) = (-1)^b\delta_{b+c,0}\phi_a\phi_d - \\ &- (-1)^a\delta_{a+c,0}\phi_b\phi_d + (-1)^b\delta_{b+d,0}\phi_c\phi_a - (-1)^a\delta_{a+d,0}\phi_c\phi_b. \end{aligned} \tag{5.8}$$

Элементами матричной алгебры Ли $go(\infty)$ являются матрицы

$$F_{k,m} = (-1)^m E_{k,-m} - (-1)^k E_{m,-k}. \tag{5.9}$$

Их коммутационные соотношения

$$\begin{aligned}[][F_{a,b}, F_{c,d}] &= (-1)^{b+d}[E_{a,-b}, E_{c,-d}] - (-1)^{b+c}[E_{a,-b}, E_{d,-c}] - \\ &- (-1)^{a+d}[E_{b,-a}, E_{c,-d}] + (-1)^{a+c}[E_{b,-a}, E_{d,-c}] = \\ &= (-1)^{b+d}(\delta_{b+c,0}E_{a,-d} - \delta_{a+d,0}E_{c,-b}) - (-1)^{b+c}(\delta_{b+d,0}E_{a,-c} - \delta_{a+c,0}E_{d,-b}) - \\ &- (-1)^{a+d}(\delta_{a+c,0}E_{b,-d} - \delta_{b+d,0}E_{c,-a}) + (-1)^{a+c}(\delta_{a+d,0}E_{b,-c} - \delta_{b+c,0}E_{d,-a}) = \\ &= (-1)^b\delta_{b+c,0}F_{a,d} - (-1)^a\delta_{a+c}F_{b,d} + (-1)^b\delta_{b+d,0}F_{c,a} - (-1)^a\delta_{a+d,0}F_{c,b} \end{aligned} \tag{5.10}$$

совпадают с коммутационными соотношениями билинейных комбинаций нейтральных фермионов. Значит представление алгебры $go(\infty)$ может быть реализовано на введённом пространстве Фока элементами $\phi_k\phi_m$.

Нормальное упорядочение на этот раз определим как

$$:\phi_k\phi_m: = \phi_k\phi_m - \langle 0|\phi_k\phi_m|0\rangle\,. \tag{5.11}$$

Легко видеть, что

$$\langle 0|\phi_k\phi_m|0\rangle = \delta_{k+m,0}\eta[m], \tag{5.12}$$

где

$$\eta[m] = \begin{cases} 0, & m<0, \\ \frac{1}{2}, & m=0, \\ (-1)^m, & m>0. \end{cases} \tag{5.13}$$

Коммутационное соотношение алгебры нормально упорядоченных пар нейтральных фермионов

$$\begin{aligned}[][:\phi_a\phi_b:, :\phi_c\phi_d:] = (-1)^b\,\delta_{b+c,0}:\phi_a\phi_d: - (-1)^a\,\delta_{a+c,0}:\phi_b\phi_d: + (-1)^b\,\delta_{b+d,0}:\phi_c\phi_a: - \\ - (-1)^a\,\delta_{a+d,0}:\phi_c\phi_b: + (\delta_{c,b}\delta_{a,d} - \delta_{a-c,0}\delta_{b-d,0})\Big((-1)^a\,\eta[b] - (-1)^b\,\eta[a]\Big)\,.\end{aligned} \tag{5.14}$$

Введём операторы

$$J_k = \frac{1}{2}\sum_{m\in\mathbb{Z}}(-1)^{m+1}:\phi_m\phi_{-m-k}:. \tag{5.15}$$

Заметим, что

$$J_0 = \frac{1}{2}\left(\sum_{m<0}\left(\phi_m\phi_{-m} - (-1)^m\right) + \phi_0^2 - \frac{1}{2} + \sum_{m>0}\phi_m\phi_{-m}\right) = 0. \tag{5.16}$$

И тогда

$$J_k = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{m\in\mathbb{Z}}(-1)^{m+1}\phi_m\phi_{-m-k}, & k\neq 0, \\ 0, & k=0, \end{cases} \tag{5.17}$$

Пусть $k \neq 0$ — чётное число, тогда

$$J_k = \frac{1}{2}\left(\sum_{m\geqslant -k/2}(-1)^{m+1}\phi_m\phi_{-m-k} + \sum_{m<-k/2}(-1)^{m+1}\phi_m\phi_{-m-k}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{m\geqslant 0}(-1)^{m-k/2+1}\,\phi_{m-k/2}\phi_{-m-k/2} + \right.$$

$$\left. + \sum_{m>0}(-1)^{m+k/2+1}\,\phi_{-m-k/2}\phi_{m-k/2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\phi_{-k/2}^2 + \sum_{m>0}(-1)^{m+k/2+1}\,(-1)^{-m-k/2}\,\delta_{-k,0}\right) = 0. \quad (5.18)$$

Для нечётных же k

$$J_k = \frac{1}{2}\left(\sum_{m\geqslant -(k-1)/2}(-1)^{m+1}\phi_m\phi_{-m-k} + \sum_{m\leqslant -(k+1)/2}(-1)^{m+1}\phi_m\phi_{-m-k}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{m\geqslant 0}(-1)^{m+(k+1)/2}\,\phi_{m-(k-1)/2}\phi_{-m-(k+1)/2} + \right.$$

$$\left. + \sum_{m\geqslant 0}(-1)^{m+(k-1)/2}\,\phi_{-m-(k+1)/2}\phi_{m-(k-1)/2}\right) =$$

$$= \sum_{m\geqslant 0}(-1)^{m+(k+1)/2}\,\phi_{m-(k-1)/2}\phi_{-m-(k+1)/2}. \quad (5.19)$$

Поэтому далее будет подразумеваться что J_k имеют лишь нечётные индексы. Коммутатор данных операторов

$$[J_k, J_m] = \frac{1}{4}\sum_{i,j\in\mathbb{Z}}(-1)^{i+j+2}\,[:\phi_i\phi_{-i-k}:, :\phi_j\phi_{-j-k}:] \overset{\text{TODO}}{=\!=\!=} \frac{k}{2}\delta_{k+m,0}. \quad (5.20)$$

Для них выполнено

$$J_m\,|0\rangle = 0, \qquad \langle 0|\,J_{-m} = 0, \quad m > 0. \quad (5.21)$$

Определим также производящую функцию данных операторов

$$J(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^+_{\text{неч}}} t_k J_k. \quad (5.22)$$

Как и в случае иерархии КП бозонно-фермионное соответствие BКП задаётся как

$$\Phi\left(|\lambda\rangle\right) = \langle 0|\mathrm{e}^{J(t)}|\lambda\rangle\,.$$

Оказывается, что

$$\Phi(|\lambda\rangle) = 2^{-l/2} q_\lambda \left(\frac{t}{2}\right).$$

6 Иерархия BКП

6.1 Билинейное тождество BКП

Иерархию BКП проще всего задать через её *билинейное тождество*

$$\frac{1}{2\pi i} \oint e^{\xi^{\text{н}}(t-t',\, k)} \tau_{B\text{КП}} \left(t - 2\left[k^{-1}\right]\right) \tau_{B\text{КП}} \left(t' + 2\left[k^{-1}\right]\right) \frac{dk}{k} = \\ = \tau_{B\text{КП}}\left(t\right) \tau_{B\text{КП}}(t'), \quad (6.1)$$

где

$$t \pm \left[k^{-1}\right] \xlongequal{\text{опр}} \left\{t_1 \pm k^{-1}, t_2 \pm \frac{1}{2}k^{-2}, t_3 \pm \frac{1}{3}k^{-3}, \ldots\right\} \quad (6.2)$$

и

$$\xi^{\text{н}}\left(t, k\right) = \sum_{j \in \mathbb{Z}^+_{\text{неч}}} t_j k^j. \quad (6.3)$$

Нетрудно получить из билинейного тождества первое уравнение иерархии BКП в терминах производных Хироты

$$\left(\mathrm{D}_1^6 - 5\mathrm{D}_1^3\mathrm{D}_3 - 5\mathrm{D}_3^2 + 9\mathrm{D}_1\mathrm{D}_5\right) \tau_{B\text{КП}} \cdot \tau_{B\text{КП}}. \quad (6.4)$$

Что можно переписать в обычных производных как

$$-60\left(\frac{\partial^2 F}{\partial t_1^2}\right)^3 - 30\frac{\partial^4 F}{\partial t_1^4}\frac{\partial^2 F}{\partial t_1^2} + 30\frac{\partial^2 F}{\partial t_1\, \partial t_3}\frac{\partial^2 F}{\partial t_1^2} - \frac{\partial^6 F}{\partial t_1^6} + \\ + 5\frac{\partial^2 F}{\partial t_3^2} - 9\frac{\partial^2 F}{\partial t_1\, \partial t_5} + 5\frac{\partial^4 F}{\partial t_1^3\, \partial t_3} = 0. \quad (6.5)$$

В фермионном представлении τ-функции BКП задаются как

$$\tau(t) = \langle 0|\mathrm{e}^{J(t)}G|0\rangle. \quad (6.6)$$

6.2 Соотношения Плюккера BКП, гипергеометрические τ-функции

Соотношения Плюккера для BКП

$$c_{[\alpha_1,\ldots,\alpha_k]}c_{[\alpha_1,\ldots,\alpha_k,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4]} - c_{[\alpha_1,\ldots,\alpha_k,\beta_1,\beta_2]}c_{[\alpha_1,\ldots,\alpha_k,\beta_3,\beta_4]} + \\ + c_{[\alpha_1,\ldots,\alpha_k,\beta_1,\beta_3]}c_{[\alpha_1,\ldots,\alpha_k,\beta_2,\beta_4]} - c_{[\alpha_1,\ldots,\alpha_k,\beta_1,\beta_4]}c_{[\alpha_1,\ldots,\alpha_k,\beta_2,\beta_3]} = 0. \quad (6.7)$$

Простейшее соотношение Плюккера

$$c_{\varnothing}c_{(3,2,1)} - c_{(1)}c_{(3,2)} + c_{(2)}c_{(3,1)} - c_{(3)}c_{(2,1)} = 0. \tag{6.8}$$

Для определения гипергеометрических τ-функций зададим функцию

$$r_\lambda = \prod_{w\in\lambda} r\left(c(w)\right), \tag{6.9}$$

где

$$c(w) = j, \qquad 1 \leqslant i \leqslant l(\lambda), \qquad 1 \leqslant j \leqslant \lambda_i. \tag{6.10}$$

Визуализация функции $c(w)$ на диаграмме Юнга:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 2 & 3 \\ \cline{1-3} 1 & 2 \\ \cline{1-2}\end{array}$$

Также данную функцию можно проще записать как

$$r_\lambda = \prod_{i=1}^{l} r(1)r(2)\cdots r(\lambda_i). \tag{6.11}$$

Для $k \in \mathbb{Z}^+_{\text{неч}}$ и функции r, удовлетворяющей условию

$$r(n) = r(1-n), \tag{6.12}$$

можно ввести операторы

$$B_k = \oint \frac{dz}{4\pi i} {:}\left[\left(\frac{1}{z}r(D)\right)^k \phi(z)\right]\cdot\phi(-z){:} = \frac{1}{2}\sum_{n\in\mathbb{Z}}(-1)^n{:}\phi_n\phi_{k-n}{:}\prod_{i=0}^{k-1} r(n-i), \tag{6.13}$$

$$B(\beta) = \sum_{n\in\mathbb{Z}^+_{\text{неч}}} \beta_n B_n. \tag{6.14}$$

Гипергеометрические τ-функции BКП задаются как

$$\tau\left(t\right) = \langle 0|\mathrm{e}^{H(t)}\mathrm{e}^{-B(\beta)}|0\rangle, \tag{6.15}$$

и могут быть представлены в виде сумм по строгим разбиениям SP.

$$\tau(t) = \sum_{\lambda\in\mathrm{SP}} r_\lambda q_\lambda\left(\frac{\beta}{2}\right) q_\lambda\left(\frac{t}{2}\right). \tag{6.16}$$

Данные функции действительно решают иерархию BКП, т. к. q-полиномы Шура удовлетворяют соотношениям Плюккера BКП, а множители $r(c(w))$ выносятся как общие. Например, для простейшего соотношения Плюккера общим множителем будет

$$r(1)^3 r(2)^2 r(3). \tag{6.17}$$

6.3 τ-функция модели БГВ

Статсумма данной матричной модели даётся как

$$Z_{\text{БГВ}}\left(J, J^{\dagger}\right) = \frac{1}{V_N} \int\limits_{N\times N} DU\, \mathrm{e}^{\mathrm{Tr}\left(J^{\dagger}U + JU^{\dagger}\right)}, \tag{6.18}$$

где интеграл берётся по пространству унитарных матриц $N \times N$ с мерой Хаара DU и

$$V_N = \int\limits_{N\times N} DU \tag{6.19}$$

— объём унитарной группы. Нас будет интересовать так называемая фаза Концевича данной модели, где времена t_k определены как

$$t_k = -\frac{1}{2k-1}\, \mathrm{Tr}\left(JJ^{\dagger}\right)^{-k+1/2}. \tag{6.20}$$

Известно, что статсумма модели БГВ в временах, нормализованных подобающим образом, $\tau_{\text{БГВ}}\,(t/2)$, является гипергеометрической с параметрами

$$r(n) = \frac{(2n-1)^2}{16}, \qquad \beta_k = 2\delta_{k,1}. \tag{6.21}$$

6.4 τ-функция спиновых чисел Гурвица

Следующая τ-функция является решением иерархии BКП:

$$\tau\left(p, \bar{p}\right) = \sum_{\lambda \in \mathrm{SP}} \left(\mathrm{e}^{u\left[\Phi_\lambda([3]) + \frac{1}{2}\Phi_\lambda([1,1])\right]}\right) q_\lambda\left(\frac{p}{2}\right) q_\lambda\left(\frac{\bar{p}}{2}\right). \tag{6.22}$$

7 Квантовая деформация иерархии BКП

Аналогично деформации иерархии КП получаем первое уравнение $\hbar$-BКП

$$\begin{aligned} -60\left(\frac{\partial^2 F}{\partial t_1^2}\right)^3 - 30\hbar^2 \frac{\partial^4 F}{\partial t_1^4}\frac{\partial^2 F}{\partial t_1^2} + 30\frac{\partial^2 F}{\partial t_1\,\partial t_3}\frac{\partial^2 F}{\partial t_1^2} - \hbar^4\frac{\partial^6 F}{\partial t_1^6} + \\ + 5\frac{\partial^2 F}{\partial t_3^2} - 9\frac{\partial^2 F}{\partial t_1\,\partial t_5} + 5\hbar^2\frac{\partial^4 F}{\partial t_1^3\,\partial t_3} = 0. \end{aligned} \tag{7.1}$$

7.1 τ-функция модели БГВ в фазе Концевича

Добавление $1/\hbar$ в экспоненту матричного интеграла модели БГВ

$$Z_{\hbar\text{БГВ}} = \frac{1}{V_N}\int_{N\times N} DU\, \exp\left(\frac{1}{\hbar}\,\mathrm{Tr}\left(J^{\dagger}U + JU^{\dagger}\right)\right) \tag{7.2}$$

даёт разложение по родам для фазы Концевича. Деформация в данной фазе принимает вид

$$t_k \to t_k \hbar^{k-1}. \tag{7.3}$$

Имеем соотношение

$$\tau_{\text{БГВ}}\left(\frac{t}{2}\right) = \sum_{\lambda \in \text{SP}} r_\lambda q_\lambda\left(\delta_{k,1}\right) q_\lambda\left(\frac{t}{2}\right). \tag{7.4}$$

Откуда

$$\tau^{\hbar}_{\text{БГВ}}\left(\frac{t}{2}\right) = \sum_{\lambda \in \text{SP}} r_\lambda q_\lambda\left(\delta_{k,1}\right) q_\lambda\left(\frac{t_k \hbar^{k-1}}{2}\right). \tag{7.5}$$

Утверждение. *Выполнено равенство*

$$q_\lambda\left(\frac{t_k \hbar^{k-1}}{2}\right) = \hbar^{|\lambda|} q_\lambda\left(\frac{t}{2\hbar}\right). \tag{7.6}$$

Доказательство. Известно, что

$$q_R(p) = \sum_{\substack{\Delta \in \text{OP} \\ \Delta \vdash |R|}} \frac{\Psi_R(\Delta)}{z_\Delta} p_\Delta, \tag{7.7}$$

где

- OP — множество нечётных разбиений, то есть разбиений, где все элементы разбиения — нечётные.
- $\Psi_R(\Delta)$ — характеры группы Сергеева
- z_Δ — порядок автоморфизма разбиения Δ
- $p_\Delta = \prod_{i=1}^{l} p_{\Delta_i}$
- $p_k = k t_k$

Тогда

$$\prod_{i=1}^{l} p_{\lambda_i} \hbar^{\lambda_i} = \hbar^{|\lambda|} p_\lambda. \tag{7.8}$$

Значит

$$q_\lambda\left(\frac{t_k \hbar^{k-1}}{2}\right) = \hbar^{|\lambda|} q_\lambda\left(\frac{t}{2\hbar}\right). \tag{7.9}$$

□

Теперь имеем

$$\tau^{\hbar}_{\text{БГВ}}\left(\frac{t}{2}\right)=\sum_{\lambda\in\text{SP}}r_\lambda\hbar^{|\lambda|}q_\lambda\left(\delta_{k,1}\right)q_\lambda\left(\frac{t}{2\hbar}\right). \tag{7.10}$$

Утверждение. *Выполнено равенство*

$$\frac{q_\lambda\left(\delta_{k,1}\right)}{\hbar^{|\lambda|}}=q_\lambda\left(\frac{\delta_{k,1}}{\hbar}\right). \tag{7.11}$$

Доказательство. Напрямую следует из

$$q_R\left(\delta_{k,1}\right)=\frac{\Psi_R\left(\{1,\ldots,1\}\right)}{z_{\{1,\ldots,1\}}}p_1^{|R|}.$$

□

Это позволяет нам написать

$$\tau^{\hbar}_{\text{БГВ}}\left(\frac{t}{2}\right)=\sum_{\lambda\in\text{SP}}r_\lambda\hbar^{2|\lambda|}q_\lambda\left(\frac{\delta_{k,1}}{\hbar}\right)q_\lambda\left(\frac{t}{2\hbar}\right). \tag{7.12}$$

Вспоминая определение r_λ (6.9) и функцию $r(n)$ для модели БГВ (6.21), можем записать для модели БГВ

$$r_\lambda=\prod_{w\in\lambda}\frac{(2c(w)-1)^2}{16}. \tag{7.13}$$

Это позволяет записать

$$r^{\hbar}_\lambda=\hbar^{2|\lambda|}r_\lambda=\prod_{w\in\lambda}\frac{\hbar^2\left(2c(w)-1\right)^2}{16}, \tag{7.14}$$

и мотивирует ввести

$$r^{\hbar}(n)=\frac{\hbar^2(2n-1)^2}{16}=\left(\frac{\hbar}{2}\left(n-\frac{1}{2}\right)\right)^2. \tag{7.15}$$

Замена

$$n\to\frac{1}{2}+\hbar\left(n-\frac{1}{2}\right) \tag{7.16}$$

позволяет перейти от

$$r(n)=\left(\frac{1}{2}\left(n-\frac{1}{2}\right)\right)^2 \tag{7.17}$$

к $r^\hbar(n)$. Таким образом, мы представили $\hbar$-деформацию τ-функции модели БГВ в виде

$$\tau^\hbar_{\text{БГВ}}\left(\frac{t}{2}\right)=\sum_{\lambda\in\mathrm{SP}} r^\hbar_\lambda q_\lambda\left(\frac{\delta_{k,1}}{\hbar}\right)q_\lambda\left(\frac{t}{2\hbar}\right), \tag{7.18}$$

имеющем следующую интерпретацию в терминах фермионного формализма

$$\tau^\hbar_{\text{БГВ}}=\langle 0|e^{H(t/\hbar)}\exp\left(-\frac{1}{\hbar}B^\hbar\right)|0\rangle, \tag{7.19}$$

$$B^\hbar=\sum_{n\in\mathbb{Z}^+_{\text{неч}}}\beta_n B^\hbar_n, \tag{7.20}$$

$$B^\hbar_k=\oint\frac{dz}{4\pi i}{:}\left[\left(\frac{1}{z}r\left[\frac{1}{2}+\hbar\left(D-\frac{1}{2}\right)\right]\right)^k\phi(z)\right]\cdot\phi(-z){:} \tag{7.21}$$

Получается интригующая замена для оператора D

$$D\to\frac{1}{2}+\hbar\left(D-\frac{1}{2}\right). \tag{7.22}$$

7.2 Спиновые числа Гурвица

Формула Римана-Гурвица (простые точки ветвления имеют профиль $(r+1,1,\ldots,1)$, где r — чётное)

$$2g-2=-2|\mu|+(|\mu|-\ell(\mu))+(|\nu|-\ell(\nu))+mr.$$

Т. к. $|\mu|=|\nu|$, то

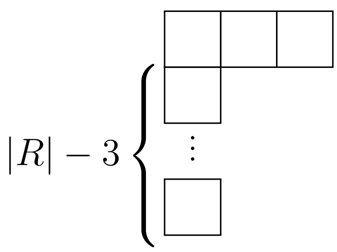
$$2g-2=mr-\ell(\mu)-\ell(\nu).$$

$$\Phi_R(\{3\})=\frac{(|R|-3)!}{(|R|-3)!}\Phi_R\left(\left\{3,1^{|R|-3}\right\}\right)=\Phi_R\left(\left\{3,1^{|R|-3}\right\}\right).$$

$$\Phi_R(\{1,1\})=\frac{(|R|-2+2)!}{2!\,(|R|-2)!}\Phi_R\left(\left\{1^{|R|}\right\}\right)=\frac{|R|!}{(|R|-2)!}=|R|\,(|R|-1)\,.$$

Значит

$$
\begin{aligned}
Z^{(\mathrm{spin})}\left(\mathbf{p},\bar{\mathbf{p}}\right) &= \sum_{R\in \mathrm{SP}} \exp\left(u\left[\Phi_R\left(\{3\}\right)+\frac{1}{2}\Phi_R\left(\{1,1\}\right)\right]\right) Q_R(\mathbf{p})Q_R\left(\bar{\mathbf{p}}\right) = \\
&= \sum_{R\in \mathrm{SP}} \exp\left(u\left[\Phi\left(\left\{3,1^{|R|-3}\right\}\right)+\frac{|R|\left(|R|-1\right)}{2}\right]\right) Q_R\left(\mathbf{p}\right) Q_R\left(\bar{\mathbf{p}}\right) = \\
&= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{R\in \mathrm{SP}} \exp\left(\frac{u|R|\left(|R|-1\right)}{2}\right) \frac{\left(\Phi\left(\left\{3,1^{|R|-3}\right\}\right)u\right)^m}{m!} Q_R\left(\mathbf{p}\right) Q_R\left(\bar{\mathbf{p}}\right) = \\
&= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{R\in \mathrm{SP}} \sum_{\substack{\Delta_1,\Delta_2\in \mathrm{OP}\\ |\Delta_1|=|\Delta_2|=|R|}} \exp\left(\frac{u|R|\left(|R|-1\right)}{2}\right)\left(\Phi\left(\left\{3,1^{|R|-3}\right\}\right)\right)^m \times \\
&\qquad \times \mathfrak{d}_R^2 \Phi_R\left(\Delta_1\right)\Phi_R\left(\Delta_2\right) p_{\Delta_1}p_{\Delta_2}\frac{u^m}{m!} = \\
&= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \exp\left(\frac{un(n-1)}{2}\right) \sum_{\substack{R\vdash n\\ R\in \mathrm{SP}}} \sum_{\substack{\Delta_1,\Delta_2\in \mathrm{OP}\\ |\Delta_1|=|\Delta_2|=|n|}} \mathfrak{d}_R^2 \left(\Phi\left(\left\{3,1^{|R|-3}\right\}\right)\right)^m \times \\
&\qquad \times \Phi_R\left(\Delta_1\right)\Phi_R\left(\Delta_2\right) p_{\Delta_1}p_{\Delta_2}\frac{u^m}{m!} = \\
&= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\substack{\Delta_1,\Delta_2\in \mathrm{OP}\\ |\Delta_1|=|\Delta_2|=|n|}} \exp\left(\frac{un(n-1)}{2}\right) \times \\
&\qquad \times \mathrm{Hur}_{0,n}^{(\mathrm{spin})}\Big(\Delta_1,\Delta_2,\underbrace{\left\{3,1^{n-3}\right\},\ldots,\left\{3,1^{n-3}\right\}}_{m}\Big) p_{\Delta_1}p_{\Delta_2}\frac{u^m}{m!}.
\end{aligned}
$$



7.3 Гипергеометрические τ-функции

Гипотеза состоит в том, что деформация

$$
\begin{cases}
t_k \to \dfrac{t_k}{\hbar},\\
\beta_k \to \dfrac{\beta_k}{\hbar},\\
r(n) \to r\left(\dfrac{1}{2}+\hbar\left(n-\dfrac{1}{2}\right)\right)
\end{cases}
\tag{7.23}
$$

даёт для гипергеометрических τ-функций иерархии BКП разложение по родам. Для первых порядков непосредственные вычисления показывают, что свободная энергия имеет разложение по чётным положительным степеням $\hbar$.

8 Заключение

Выводы и предложения автора касательно последующей работы.

Список литературы

Andreev, A и др. (2020). «Genus expansion of matrix models and ħ expansion of KP hierarchy». В: *Journal of High Energy Physics* 2020.12, с. 1—32.