Квантовая деформация иерархии BКП

Драчов Ярослав
Факультет общей и прикладной физики МФТИ

22 апреля 2022 г.

Содержание

1 Иерархия КП

Иерархия КП — бесконечный набор нелинейных дифференциальных уравнений, первое из которых даётся как

$$\frac{1}{4}\frac{\partial^2 F}{\partial t_2^2} = \frac{1}{3}\frac{\partial^2 F}{\partial t_1 \partial t_3} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial t_1^2}\right)^2 - \frac{1}{12}\frac{\partial^4 F}{\partial t_1^4}. \tag{1}$$

Далее будут обсуждаться экспоненциированные решения данной иерархии (τ-*функции*) $\tau(\mathbf{t}) = \exp(F(\mathbf{t}))$. В разделах 1.1 и 1.2 опишем методы получения уравнений данной иерархии.

1.1 Пары Лакса

Для псевдодифференциального оператора

$$L = \partial + \sum_{j=1}^{\infty} f_j \partial^{-j}, \qquad \text{где} \qquad \partial = \frac{\partial}{\partial t_1}, \tag{2}$$

условия совместности системы линейных уравнений

$$\begin{cases} Lw = kw, \\ \dfrac{\partial w}{\partial t_j} = B_j w, \end{cases} \qquad \text{где } B_j = \left(L^j\right)_+ . \tag{3}$$

могут быть записаны в Лаксовой форме

$$\frac{\partial L}{\partial t_j} = [B_j, L]. \tag{4}$$

Из второго уравнения данной иерархии получаем

$$\frac{\partial f_1}{\partial t_2} = \frac{\partial^2 f_1}{\partial t_1^2} + 2\frac{\partial f_2}{\partial t_1}, \qquad \frac{\partial f_2}{\partial t_2} = \frac{\partial^2 f_2}{\partial t_1^2} + 2\frac{\partial f_3}{\partial t_1} + 2\frac{\partial f_1}{\partial t_1} f_1, \qquad \dots \tag{5}$$

Из третьего —

$$\frac{\partial f_1}{\partial t_3} = \frac{\partial^3 f_1}{\partial t_1^3} + 3\frac{\partial^2 f_2}{\partial t_1^2} + 3\frac{\partial f_3}{\partial t_1} + 6\frac{\partial f_1}{\partial t_1} f_1, \qquad \dots \tag{6}$$

Устраняя f_2 и f_3 из данных уравнений и пользуясь обозначениями $u = -2f_1$, получаем *уравнение КП*

$$3\frac{\partial^2 u}{\partial t_2^2} = \frac{\partial}{\partial t_1}\left(4\frac{\partial u}{\partial t_3} + 6u\frac{\partial u}{\partial t_1} - \frac{\partial^3 u}{\partial t_1^3}\right). \tag{7}$$

Требует пояснений введённое обозначение для u. Решение первоначальной задачи на собственные значения можно искать в виде

$$w = \mathrm{e}^{\xi(\mathbf{t},\,k)} \left(1 + \frac{w_1}{k} + \frac{w_2}{k^2} + \ldots\right), \qquad \text{где} \qquad \xi\left(\mathbf{t}, k\right) = \sum_{j=1}^{\infty} t_j k^j. \tag{8}$$

Тогда связь между w_i и f_i может быть найдена, например, из уравнений

$$\frac{\partial w}{\partial t_j} = B_j w. \tag{9}$$

Из уравнения на t_1 получаем

$$\frac{\partial w_1}{\partial t_1} = -f_1, \qquad \ldots. \tag{10}$$

Оказывается, что все функции $w_1, w_2, \ldots$ могут быть выражены через одну функцию τ по формуле

$$w = \frac{\tau\left(t_1 - \dfrac{1}{k}, t_2 - \dfrac{1}{2k^2}, t_3 - \dfrac{1}{3k^3}, \ldots\right)}{\tau\left(t_1, t_2, t_3, \ldots\right)} \mathrm{e}^{\xi(\mathbf{t},\,k)}. \tag{11}$$

Откуда, например,

$$w_1 = -\frac{\partial \tau}{\partial t_1} \cdot \tau^{-1}. \tag{12}$$

Иерархия КдФ получается из иерархии КП условием $L^2 = \partial^2 + u$ и бесконечный набор функций f_i выражается через u. Таким же свойством обладает τ-функция, между ними имеется связь

$$u = 2\frac{\partial^2}{\partial t_1^2} \ln \tau. \tag{13}$$

Обозначение $u = -2f_1$ теперь поясняется формулами (10), (12), (13). Также, интегрируя два раза по t_1 уравнение (7) и принимая во внимание обозначение для F, получаем в точности уравнение (1).

1.2 Билинейное тождество Хироты

Определение. *Производные хироты* $\mathrm{D}_1^{n_1} \cdots \mathrm{D}_m^{n_m}$ задаются из соотношения

$$\mathrm{e}^{y_1 \mathrm{D}_1 + y_2 \mathrm{D}_2 + \ldots} f \cdot g = f\left(x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots\right) g\left(x_1 - y_1, x_2 - y_2, \ldots\right). \tag{14}$$

Теорема (билинейное тождество)**.** *Для любых x и x' положим*

$$\xi = \xi\left(\mathbf{t}, k\right), \qquad \xi' = \xi\left(\mathbf{t}', k\right). \tag{15}$$

Тогда справедливо следующее тождество:

$$0 = \oint \frac{\mathrm{d}k}{2\pi\mathrm{i}} \mathrm{e}^{\xi-\xi'} \tau\left(t_1 - \frac{1}{k}, t_2 - \frac{1}{2k^2}, \dots\right) \tau\left(t'_1 + \frac{1}{k}, t'_2 + \frac{1}{2k^2}, \dots\right). \tag{16}$$

Уравнения КП получаются из билинейного тождества после замены $t_j = x_j + y_j$, $t'_j = x_j - y_j$:

$$\oint \frac{\mathrm{d}k}{2\pi\mathrm{i}} \exp\left(2\sum_{j=1}^{\infty} k^j y_j\right) \tau\left(x_1 + y_1 - \frac{1}{k}, x_2 + y_2 - \frac{1}{2k^2}, \dots\right) \times$$
$$\times\, \tau\left(x_1 - y_1 + \frac{1}{k}, x_2 - y_2 + \frac{1}{2k^2}, \dots\right) =$$
$$= \oint \frac{\mathrm{d}k}{2\pi\mathrm{i}} \exp\left(2\sum_{j=1}^{\infty} k^j y_j\right) \exp\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left(y_l - \frac{1}{lk^l}\right)\mathrm{D}_l\right) \tau\cdot\tau. \tag{17}$$

Раскладывая подынтегральную функцию в ряд по степеням y_j и вычисляя коэффициент при k^{-1}, получаем уравнения КП. Например

$$(\mathrm{D}_1^4 + 3\mathrm{D}_2^2 - 4\mathrm{D}_1\mathrm{D}_3)\tau\cdot\tau = 0, \qquad (\mathrm{D}_1^3\mathrm{D}_2 + 2\mathrm{D}_2\mathrm{D}_3 - 3\mathrm{D}_1\mathrm{D}_4)\tau\cdot\tau = 0. \tag{18}$$

Первое из них — буквально (1) с учётом определения F.

1.3 Полиномы Шура, соотношения Плюккера, гипергеометрические τ-функции

Решения данной иерархии могут быть разложены по базису полиномов Шура

$$\tau\left(\mathbf{t}\right) = \sum_{\lambda} C_\lambda s_\lambda\left(\mathbf{t}\right). \tag{19}$$

Можно показать, что $\tau(\mathbf{t})$ — решение иерархии КП тогда и только тогда, когда коэффициенты C_λ удовлетворяют соотношениям Плюкера, первое из которых

$$C_{[2,\,2]}C_{[\varnothing]} - C_{[2,\,1]}C_{[1]} + C_{[2]}C_{[1,\,1]} = 0. \tag{20}$$

Имеется важное подмножество решений иерархии КП — *гипергеометрические τ-функции*. Они определяются как

$$\tau\left(\mathbf{t}\right) = \sum_{\lambda} r_\lambda s_\lambda(\beta) s_\lambda\left(\mathbf{t}\right), \tag{21}$$

где $s_\lambda(\beta)$ — полином Шура от переменных β_k,

$$r_\lambda = \prod_{w \in \lambda} r\left(c\left(w\right)\right), \tag{22}$$

$$c(w) = j - i, \qquad 1 \leqslant i \leqslant l(\lambda), \qquad 1 \leqslant j \leqslant \lambda_i. \tag{23}$$

1.4 τ-функция чисел Гурвица

Производящая функция простых чисел Гурвица

$$\tau_H(\mathbf{t}) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\mu} h^{\circ}_{m;\mu} t_{\mu_1} t_{\mu_2} \cdots t_{\mu_{l(\mu)}} \frac{u^m}{m!}, \tag{24}$$

где

$$h^{\circ}_{m;\mu} = \frac{1}{|\mu|!} \left| \left\{ \left(\eta_1, \ldots, \eta_m\right), \eta_i \in C_2\left(S_{|\mu|}\right) : \eta_m \circ \cdots \circ \eta_1 \in C_\mu\left(S_{|\mu|}\right) \right\} \right|, \tag{25}$$

$S_{|\mu|}$ — симметрическая группа перестановок μ элементов, $C_2\left(S_{|\mu|}\right)$ — множество всех транспозиций в $S_{|\mu|}$ и $C_\mu\left(S_{|\mu|}\right)$ — множество всех перестановок циклического типа μ.

Можно показать (TODO), что

$$\tau_H(\mathbf{t}) = \sum_{\lambda} \mathrm{e}^{uc(\lambda)} s_\lambda\left(\beta_k = \delta_{k,1}\right) s_\lambda(\mathbf{t}), \tag{26}$$

где $c(\lambda) = \sum_{w \in \lambda} c(w)$. То есть данная производящая функция — гипергеометрическая τ-функция с параметрами

$$r(n) = \mathrm{e}^{un}, \qquad \beta_1 = 1, \qquad \beta_k = 0,\, k \geqslant 2. \tag{27}$$

1.5 Фермионный формализм и бозонно-фермионное соответствие

Будем рассматривать бесконечномерную алгебру Клиффорда с генераторами $\{\psi_n, \psi_m^* \mid n, m \in \mathbb{Z}\}$, обладающими коммутационными соотношениями

$$\{\psi_n, \psi_m\} = 0, \qquad \{\psi_n^*, \psi_m^*\} = 0, \qquad \{\psi_n, \psi_m^*\} = \delta_{n,m}. \tag{28}$$

Пространство Фока для фермионов определим дествием алгебры Клиффорда на вакуумный вектор $|0\rangle$ «моря Дирака». Действие генераторов алгебры на вакуумный вектор даётся как

$$\psi_k |0\rangle = 0, \quad k < 0; \qquad \psi^* |0\rangle = 0, \quad k \geqslant 0. \tag{29}$$

То есть операторы ψ_k при $k > 0$ и ψ_k^* при $k \leqslant 0$ — это операторы рождения, а ψ_k при $k \leqslant 0$ и ψ_k^* при $k > 0$ — операторы уничтожения.

Далее определим m-е вакуумы

$$\psi_k |m\rangle = 0, \quad k < m; \qquad \psi^* |m\rangle = 0, \quad k \geqslant m, \tag{30}$$

и состояния

$$|m, \lambda\rangle = \psi_{\lambda_1+m-1}\psi_{\lambda_2+m-2}\cdots\psi_{\lambda_{l(\lambda)}+m-l(\lambda)}\psi^*_{m-l(\lambda)}\cdots\psi^*_{m-2}\psi^*_{m-1}|m\rangle .$$

Введём также производящие функции для фермионов

$$\psi(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \psi_k z^k, \qquad \psi^*(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \psi_k^* z^{-k-1}. \tag{31}$$

Будем обозначать нормальное упорядочение фермионных операторов как :(...):. Результатом нормального упорядочения будет перемещение всех операторов уничтожения направо, а операторов рождения — налево, где каждая транспозиция двух фермионов будет производиться в согласии с антикоммутационным соотношением и, следовательно, давать множитель (-1).

Алгебра Ли gl_∞ определяется как пространство

$$gl_\infty = \left\{(a_{ij})_{i,j\in\mathbb{Z}} \mid \text{все } a_{ij}, \text{ кроме конечного числа, равны } 0\right\}. \tag{32}$$

Базисом данной алгебры можно выбрать матрицы E_{ij}, у которых единственный, отличный от нуля, элемент равен 1 и находится на пересечении i-й строки и j-го столбца.

$$(E_{ij})_{kl} = \delta_{ik}\delta_{jl}. \tag{33}$$

$$[E_{ij}, E_{kl}] = E_{ij}E_{kl} - E_{kl}E_{ij} = \delta_{in}\delta_{jm}\delta_{km}\delta_{lp} - \delta_{kn}\delta_{lm}\delta_{im}\delta_{jp} = \\ = \delta_{jk}E_{il} - \delta_{il}E_{kj}. \quad (34)$$

Данную алгебру можно рассматривать как алгебру Ли группы GL_∞, определённой следующим образом

$$\mathrm{GL}_\infty = \left\{ A = (a_{ij})_{i,j\in\mathbb{Z}} \mid \begin{smallmatrix} A \text{ обратима и все числа } a_{ij}-\delta_{ij}, \\ \text{кроме конечного числа, равны } 0 \end{smallmatrix} \right\}. \quad (35)$$

Представление R группы GL_∞ и представление ρ алгебры Ли gl_∞ в пространстве $\mathcal{F}$ задаётся формулами

$$R\,(A)\,(\psi_{i_1} \wedge \psi_{i_2} \wedge \ldots) = A\psi_{i_1} \wedge A\psi_{i_2} \wedge \ldots, \quad (36)$$

$$\rho(a)\,(\psi_{i_1} \wedge \psi_{i_2} \wedge \ldots) = a\psi_{i_1} \wedge \psi_{i_2} \wedge \ldots + \psi_{i_1} \wedge a\psi_{i_2} \wedge \ldots + \ldots. \quad (37)$$

Последние две формулы связаны соотношением

$$\mathrm{e}^{\rho(a)} = R\,(\mathrm{e}^a)\,, \qquad a \in gl_\infty. \quad (38)$$

Представлением данной алгебры на введённом пространстве Фока будет

$$\rho(E_{ij}) = \psi_i\psi_j^* \quad (39)$$

т. к.

$$\left[\psi_i\psi_j^*, \psi_k\psi_l^*\right] = \psi_i\psi_j^*\psi_k\psi_l^* - \psi_k\psi_l^*\psi_i\psi_j^* = \\ = \psi_i\left(\delta_{jk} - \psi_k\psi_j^*\right)\psi_l^* - \psi_k\psi_l^*\psi_i\psi_j^* = \\ = \delta_{jk}\psi_i\psi_l^* - \psi_k\psi_i\psi_l^*\psi_j^* - \psi_k\psi_l^*\psi_i\psi_j^* = \\ = \delta_{jk}\psi_i\psi_l^* - \delta_{il}\psi_k\psi_j^*. \quad (40)$$

Пользуясь формулой (36) и стандартным исчислнием внешних степней найдём оператор представления R элемента $A \in \mathrm{GL}_\infty$ в пространстве $\mathcal{F}$

$$R(A)\left(\psi_{i_m} \wedge \psi_{i_{m-1}} \wedge \ldots\right) = \sum_{j_m, j_{m-1}, \ldots \in \mathbb{Z}} A_{j_m, i_m}\psi_{j_m} \wedge A_{j_{m-1}, i_{m-1}}\psi_{j_{m-1}} \wedge \ldots = \\ = \sum_{j_m > j_{m-1} > \ldots} \left(\det A^{i_m, i_{m-1}, \ldots}_{j_m, j_{m-1}, \ldots}\right)\psi_{j_m} \wedge \psi_{j_{m-1}} \wedge \ldots. \quad (41)$$

где $A^{i_m, i_{m-1}, \ldots}_{j_m, j_{m-1}, \ldots}$ означает матрицу, состоящую из элементов, стоящих на пересечении строк $j_m, j_{m-1}, \ldots$ и столбцов $i_m, i_{m-1}, \ldots$ матрицы A.

В альтернативных обозначениях

$$R(A)\,|m,\lambda\rangle = \sum_{\mu\in\mathrm{Par}} \left(\det A^{\lambda_1+m,\lambda_2+m-1,\dots}_{\mu_1+m,\mu_2+m-1,\dots}\right)|m,\mu\rangle\,. \tag{42}$$

Определим также бо́льшую алгебру Ли $\bar{\mathfrak{a}}_\infty$. Элементами данной алгебры будут бесконечномерные матрицы, у которых конечное количество диагоналей отличны от нулевых:

$$\bar{\mathfrak{a}}_\infty = \{(a_{ij}) \mid i,j\in\mathbb{Z},\, a_{ij}=0 \text{ при } |i-j|\gg 0\}\,. \tag{43}$$

$\bar{\mathfrak{a}}_\infty$ является алгеброй Ли с матричным коммутатором в качестве операции, содержащей алгебру Ли gl_∞ как подалгебру.

Далее рассмотрим центральное расширение алгебры Ли $\bar{\mathfrak{a}}_\infty$, а именно алгебру Ли $\mathfrak{a}_\infty$, определённую как

$$\mathfrak{a}_\infty = \bar{\mathfrak{a}}_\infty \oplus \mathbb{C}c \tag{44}$$

с центром $\mathbb{C}c$ и скобкой

$$[a,b] = ab - ba + \alpha\,(a,b)\,c. \tag{45}$$

Функцию $\alpha(a,b)$ называют *два-коциклом*, для корректности определения скобки Ли на неё накладываются дополнительные ограничения:

- Антисимметричность скобки влечёт антисимметричность $\alpha(a,b)$.
- Линейность скобки по обоим аргументам влечёт аналогичную линейность $\alpha(a,b)$.
- Из тождества Якоби скобки

  $$[[x,y]\,,z] + [[y,z]\,,x] + [[z,x]\,,y] = 0 \tag{46}$$

  следует, что

  $$[xy - yx + \alpha\,(x,y)\,c, z] + [yz - zy + \alpha\,(y,z)\,c, x] + \\ + [zx - xz + \alpha\,(z,x)\,c, y] = 0 \tag{47}$$

  и, как итог,

  $$\alpha\,(xy-yx,z) + \alpha\,(yz-zy,x) + \alpha\,(zx-xz,y) = 0. \tag{48}$$

Два-коцикл $\alpha(a,b)$ определим на матрицах E_{ij} как

$$\begin{aligned} &\alpha\left(E_{ij},E_{ji}\right)=-\alpha\left(E_{ji},E_{ij}\right)=1 \quad \text{при } i<0,\, j\geqslant 0,\\ &\alpha\left(E_{ij},E_{kl}\right)=0 \quad \text{во всех остальных случаях.}\end{aligned} \tag{49}$$

Антисимметричность, линейность по каждому аргументу данного два-коцикла очевидны.

Покажем, что представлением данной алгебры на пространстве Фока будет

$$\hat{\rho}(E_{ij}) = {:}\psi_i\psi_j^*{:}. \tag{50}$$

По определению свёртки

$${:}\psi_i\psi_j^*{:} = \psi_i\psi_j^* - \overbrace{\psi_i\psi_j^*}. \tag{51}$$

Для неё выполняется

$$\overbrace{\psi_i\psi_j^*} = \overbrace{\psi_i\psi_j^*}\left\langle 0|0\right\rangle = \left\langle 0|\overbrace{\psi_i\psi_j^*}|0\right\rangle = \left\langle 0|\psi_i\psi_j^* - {:}\psi_i\psi_j^*{:}|0\right\rangle = \left\langle 0|\psi_i\psi_j^*|0\right\rangle. \tag{52}$$

Откуда

$$\overbrace{\psi_i\psi_i^*} = 1 \qquad \text{при } i<0, \tag{53}$$

$$\overbrace{\psi_i\psi_j^*} = 0 \qquad \text{во всех остальных случаях.} \tag{54}$$

Тогда

$$\begin{aligned}\left[{:}\psi_i\psi_j^*{:},{:}\psi_k\psi_l^*{:}\right] &= \left[\psi_i\psi_j^* - \overbrace{\psi_i\psi_j^*}, \psi_k\psi_l^* - \overbrace{\psi_k\psi_l^*}\right] =\\ &= \left[\psi_i\psi_j^*, \psi_k\psi_l^*\right] = \delta_{jk}\psi_i\psi_l^* - \delta_{il}\psi_k\psi_j^* =\\ &= \delta_{jk}\left({:}\psi_i\psi_l^*{:} + \overbrace{\psi_i\psi_l^*}\right) - \delta_{il}\left({:}\psi_k\psi_j^*{:} + \overbrace{\psi_k\psi_j^*}\right) =\\ &= \delta_{jk}{:}\psi_i\psi_l^*{:} - \delta_{il}{:}\psi_k\psi_j^*{:} + \delta_{jk}\overbrace{\psi_i\psi_l^*} - \delta_{il}\overbrace{\psi_k\psi_j^*} =\\ &= \delta_{jk}{:}\psi_i\psi_l^*{:} - \delta_{il}{:}\psi_k\psi_j^*{:} + \alpha\left(E_{ij},E_{kl}\right).\end{aligned} \tag{55}$$

В последнем переходе мы воспользовались соотношением

$$\alpha\left(E_{ij},E_{kl}\right) = \delta_{jk}\overbrace{\psi_i\psi_l^*} - \delta_{il}\overbrace{\psi_k\psi_j^*}, \tag{56}$$

верность которого следует из (49), (53) и (54). Далее проверим, что скобка с определённым выше два-коциклом удовлетворяет тождеству Якоби

$$\begin{aligned}&\alpha\left(E_{ij}E_{kl} - E_{kl}E_{ij}, E_{mn}\right) + \alpha\left(E_{kl}E_{mn} - E_{mn}E_{kl}, E_{ij}\right) +\\ &\qquad + \alpha\left(E_{mn}E_{ij} - E_{ij}E_{mn}, E_{kl}\right) = 0,\end{aligned} \tag{57}$$

$$\begin{multline}\alpha\left(\delta_{jk}E_{il}-\delta_{il}E_{kj},E_{mn}\right)+\alpha\left(\delta_{lm}E_{kn}-\delta_{kn}E_{ml},E_{ij}\right)+\\+\alpha\left(\delta_{ni}E_{mj}-\delta_{mj}E_{in},E_{kl}\right)=0,\tag{58}\end{multline}$$

$$\begin{multline}\delta_{jk}\alpha\left(E_{il},E_{mn}\right)-\delta_{il}\alpha\left(E_{kj},E_{mn}\right)+\\+\delta_{lm}\alpha\left(E_{kn},E_{ij}\right)-\delta_{kn}\alpha\left(E_{ml},E_{ij}\right)+\\+\delta_{ni}\alpha\left(E_{mj},E_{kl}\right)-\delta_{mj}\alpha\left(E_{in},E_{kl}\right)=0,\tag{59}\end{multline}$$

$$\begin{multline}\delta_{jk}\left(\delta_{lm}\overbracket{\psi_i\psi_n^*}-\delta_{in}\overbracket{\psi_m\psi_l^*}\right)-\delta_{il}\left(\delta_{jm}\overbracket{\psi_k\psi_n^*}-\delta_{kn}\overbracket{\psi_m\psi_j^*}\right)+\\+\delta_{lm}\left(\delta_{in}\overbracket{\psi_k\psi_j^*}-\delta_{kj}\overbracket{\psi_i\psi_n^*}\right)-\delta_{kn}\left(\delta_{il}\overbracket{\psi_m\psi_j^*}-\delta_{mj}\overbracket{\psi_i\psi_l^*}\right)+\\+\delta_{ni}\left(\delta_{jk}\overbracket{\psi_m\psi_l^*}-\delta_{lm}\overbracket{\psi_k\psi_j^*}\right)-\delta_{mj}\left(\delta_{kn}\overbracket{\psi_i\psi_l^*}-\delta_{il}\overbracket{\psi_k\psi_n^*}\right)=0,\tag{60}\end{multline}$$

$$0=0.\tag{61}$$

Оказывается, можно построить изоморфизм между описанным фермионным пространством Фока $\mathcal{F}$ и бозонным пространством $\mathcal{B}$ полиномов от $x_1, x_3, \ldots, z$ и z^{-1}:

$$\Phi:\mathcal{F}\to\mathcal{B}=\mathbb{C}\left[x_1,x_2,\ldots;\,z,z^{-1}\right].\tag{62}$$

Отображение Φ буквально задаёт бозонно-фермионное соответствие. Как следствие, можно построить бозонные представления $\rho^B=\Phi\rho\Phi^{-1}$ и $\hat{\rho}^B=\Phi\hat{\rho}\Phi^{-1}$ на данном пространстве.

Определим

$$H(\mathbf{t})=\sum_{k=1}^{\infty}t_kH_k,\qquad H_n=\sum_{k\in\mathbb{Z}}{:}\psi_k\psi_{k+n}^*{:}.\tag{63}$$

Тогда

$$\begin{multline}H_n=\sum_{k\in\mathbb{Z}}{:}\psi_k\psi_{k+n}^*{:}=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left(\psi_k\psi_{k+n}^*-\overbracket{\psi_k\psi_{k+n}^*}\right)=\\=\begin{cases}\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}}\psi_k\psi_{k+n}^*, & n\neq 0,\\ \sum\limits_{i>0}\psi_k\psi_k^*-\sum\limits_{i\leqslant 0}\psi_k^*\psi_k, & n=0.\end{cases}\tag{64}\end{multline}$$

$$\mathrm{e}^{H(\mathbf{t})} = \exp\left(\sum_{k\geqslant 1} t_k H_k\right) = \exp\left(\sum_{k\geqslant 1} t_k H_1^k\right) = \sum_{k\geqslant 0} s_k(\mathbf{t}) H_k. \tag{65}$$

$$\left(\mathrm{e}^{H(\mathbf{t})}\right)_{mn} = s_{n-m}(\mathbf{t}). \tag{66}$$

Получаем явный вид бозонно-фермионного соответствия (TODO привести мотивацию)

$$\begin{gathered}\Phi\left(|m,\lambda\rangle\right) = z^m \langle m|\mathrm{e}^{H(\mathbf{t})}|m,\lambda\rangle = \\ = z^m \langle m| \sum_{\mu\in\mathrm{Par}} \det\left[\left(\mathrm{e}^{H(\mathbf{t})}\right)^{\lambda_1+m,\lambda_2+m-1,\ldots}_{\mu_1+m,\mu_2+m-1,\ldots}\right]|m,\mu\rangle = \\ = z^m \det\left[\left(\mathrm{e}^{H(\mathbf{t})}\right)^{\lambda_1+m,\lambda_2+m-1,\ldots}_{m,m-1,\ldots}\right] = z^m \det\left[\left(\mathrm{e}^{H(\mathbf{t})}\right)^{\lambda_1+m,\,\lambda_2+m-1,\ldots}_{m,\,m-1,\ldots}\right] = \\ = z^m \det_{i,\,j} s_{\lambda_i-i+j}(\mathbf{t}) = z^m s_\lambda(\mathbf{t}).\end{gathered} \tag{67}$$

Рассмотрим выражение

$$\begin{gathered}\langle 0|\mathrm{e}^{H(\mathbf{t})}G|0\rangle = \langle 0|\mathrm{e}^{H(\mathbf{t})} \sum_{\lambda\in\mathrm{Par}} \det\left(G^{0,-1,\ldots}_{\lambda_1,\lambda_2-1,\ldots}\right)|0,\mu\rangle = \\ = \sum_{\lambda\in\mathrm{Par}} \det\left(G^{0,-1,\ldots}_{\lambda_1,\lambda_2-1,\ldots}\right)\langle 0|\mathrm{e}^{H(\mathbf{t})}|0,\lambda\rangle = \sum_{\lambda\in\mathrm{Par}} \det\left(G^{0,-1,\ldots}_{\lambda_1,\lambda_2-1,\ldots}\right) s_\lambda(\mathbf{t}).\end{gathered} \tag{68}$$

Сравнивая с τ-функцией в бозонном представлении (19) можно получить, что

$$\tau(\mathbf{t}) = \langle 0|\mathrm{e}^{H(\mathbf{t})}G|0\rangle \quad \text{при} \quad C_\lambda = \det\left(G^{0,-1,\ldots}_{\lambda_1,\lambda_2-1,\ldots}\right). \tag{69}$$

Для гипергеометрических τ-функций выполняется

$$G = \mathrm{e}^{A(\beta)}, \qquad A(\beta) = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k A_k. \tag{70}$$

$$A_k = \oint \frac{dz}{2\pi\mathrm{i}} {:}\left[\left(\frac{1}{z} r(D)\right)^k \psi(z)\right]\cdot\psi^*(z){:}, \tag{71}$$

где $D = z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}$.

$$D^n z^k = D^{n-1} z\frac{\partial}{\partial z} z^k = kD^{n-1}z^k = k^n z^k.$$

$$(\hbar D - j)^n z^k = (\hbar D - j)^{n-1} (\hbar k - j) z^k = (\hbar k - j)^n z^k.$$

$$\frac{1}{z} r(D)\psi(z) = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^{(n)}(0)}{n!} D^n \sum_{k\in\mathbb{Z}} \psi_k z^k = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{r^{(n)}(0)}{n!} \psi_k k^n z^{k-1} = \\ = \sum_{k\in\mathbb{Z}} r(k)\psi_k z^{k-1}.$$

$$\frac{1}{z} r(\hbar D)\psi(z) = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^{(n)}(0)}{n!} (\hbar D)^n \sum_{k\in\mathbb{Z}} \psi_k z^k = \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{r^{(n)}(0)}{n!} \psi_k (\hbar k)^n z^{k-1} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} r(\hbar k)\psi_k z^{k-1}.$$

$$\frac{1}{z} r(\hbar D) \sum_{k\in\mathbb{Z}} r(\hbar k)\psi_k z^{k-1} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^{(n)}(0)}{n!} (\hbar D)^n \sum_{k\in\mathbb{Z}} r(\hbar k) \psi_k z^{k-1} = \\ = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{r^{(n)}(0)}{n!} \hbar^n r(\hbar k) \psi_k (k-1)^n z^{k-1} = \\ = \sum_{k\in\mathbb{Z}} r(\hbar(k-1)) r(\hbar k)\psi_k z^{k-2}. \quad (72)$$

$$\frac{1}{z} r(D) \frac{1}{z} r(D) = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^{(n)}(0)}{n!} D^n \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r^{(k)}(0)}{k!} D^k = \\ = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^{(n)}(0)}{n!} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \left(D^{n-i} \frac{1}{z} \right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r^{(k)}(0)}{k!} D^{k+i} = \\ = \frac{1}{z^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^{(n)}(0)}{n!} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-1)^{n-i} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r^{(k)}(0)}{k!} D^{k+i} = \\ = \frac{1}{z^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^{(n)}(0)}{n!} (D-1)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r^{(k)}(0)}{k!} D^k = \frac{1}{z^2} r(D-1) r(D).$$

$$\frac{1}{z}r(\hbar D)\frac{1}{z}r(\hbar D) = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{r^{(n)}(0)}{n!}(\hbar D)^n\frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{r^{(k)}(0)}{k!}(\hbar D)^k =$$

$$= \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{r^{(n)}(0)}{n!}\hbar^n\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\left(D^{n-i}\frac{1}{z}\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{r^{(k)}(0)}{k!}\hbar^k D^{k+i} =$$

$$= \frac{1}{z^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{r^{(n)}(0)}{n!}\hbar^n\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(-1)^{n-i}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{r^{(k)}(0)}{k!}\hbar^k D^{k+i} =$$

$$= \frac{1}{z^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{r^{(n)}(0)}{n!}\left(\hbar(D-1)\right)^n\sum_{k=0}^{\infty}\frac{r^{(k)}(0)}{k!}(\hbar D)^k =$$

$$= \frac{1}{z^2}r\left(\hbar(D-1)\right)r(\hbar D).$$

$$\left[\left(\frac{1}{z}r(D)\right)^k\psi(z)\right]\cdot\psi^*(z) =$$

$$= \sum_{n\in\mathbb{Z}} r(n)r(n-1)\cdots r\left(n-k+1\right)\psi_n z^{n-k}\sum_{j\in\mathbb{Z}}\psi_j^* z^{-j-1}.$$

$$A_k = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\prod_{i=n-k+1}^{n} r(i){:}\psi_n\psi_{n-k}{:}. \qquad (73)$$

2 Квантовая деформация иерархии КП

В *$\hbar$-деформированной иерархии КП* связь между F и τ будет следующей

$$F^{\hbar}\left(\mathbf{t}\right) = \hbar^2\ln\left(\tau^{\hbar}\left(\mathbf{t}\right)\right). \qquad (74)$$

Уравнения иерархии $\hbar$-КП получаются из иерархии КП заменой $\mathbf{t}\to\mathbf{t}/\hbar$. Первое уравнение деформированной иерархии

$$\frac{1}{4}\frac{\partial^2 F}{\partial t_2^2} = \frac{1}{3}\frac{\partial^2 F}{\partial t_1\partial t_3} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial t_1^2}\right)^2 - \frac{\hbar^2}{12}\frac{\partial^4 F}{\partial t_1^4}. \qquad (75)$$

τ-функции иерархии $\hbar$-КП

$$\tau^{\hbar}\left(\mathbf{t}\right) = \sum_{\lambda} C_{\lambda}^{\hbar}s_{\lambda}\left(\frac{\mathbf{t}}{\hbar}\right), \qquad (76)$$

где $C_\lambda^\hbar$ удовлетворяют соотношениям Плюкера. В разделах далее будем добавлять $\hbar$ в τ-функции так, чтобы полученные $\tau^\hbar$-функции удовлетворяли $\hbar$-деформированной иерархии, а также имели «хорошее» разложение по степеням $\hbar$.

2.1 Фермионный формализм

Рецепт деформации τ-функций в фермионном формализме

$$\tau^\hbar(\mathbf{t}) = \langle 0|\mathrm{e}^{H(\mathbf{t}/\hbar)} \exp\left(\frac{1}{\hbar}A^\hbar\right)|0\rangle\,, \tag{77}$$

где

$$A^\hbar = \oint \frac{dz}{2\pi\mathrm{i}} {:}\left[\hat{A}\left(z, \hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)\psi(z)\right]\cdot\psi^*(z){:} \tag{78}$$

и

$$\hat{A}\left(z, \hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right) = \sum_{i\in\mathbb{Z}, j\geqslant 0} a_{ij} z^i \left(\hbar\partial_z\right)^j. \tag{79}$$

2.2 τ-функция чисел Гурвица

Формула Римана-Гурвица

$$2g-2 = m - |\mu| - l(\mu), \tag{80}$$

позволяет нам разделить вклады различных родов g в производящую функцию. Каждая точка простого ветвления даёт вклад $+1$ к степени $\hbar$, каждый цикл длины μ_i даёт вклад $-\mu_i - 1$ к степени $\hbar$. Получаем замену переменных

$$t_{\mu_i} \to \hbar^{-\mu_i-1} t_{\mu_i}, \qquad u \to \hbar u. \tag{81}$$

Умножая производящую функцию на $\hbar^2$, чтобы избавиться от отрицательных степеней $\hbar$ в разложении, получаем

$$F_H^\hbar(\mathbf{t}) = \sum_{g=0}^\infty \hbar^{2g} F_H^g(\mathbf{t}). \tag{82}$$

Покажем, что топологической деформацией (81) из τ-функции иерархии КП (26) действительно можно получить τ-функцию иерархии $\hbar$-КП (76). Имеем

$$\tau_H^\hbar(\mathbf{t}) = \sum_\lambda \mathrm{e}^{u\hbar c(\lambda)} s_\lambda\left(\beta_k = \delta_{k,1}\right) s_\lambda\left(\frac{t_1}{\hbar^2}, \frac{t_2}{\hbar^3}, \ldots\right). \tag{83}$$

Можно показать (это вопросов не вызывает), что

$$\tau_H^{\hbar}(\mathbf{t}) = \sum_{\lambda} \mathrm{e}^{u\hbar c(\lambda)} s_\lambda \left(\frac{1}{\hbar}, 0, 0, \dots\right) s_\lambda \left(\frac{\mathbf{t}}{\hbar}\right) \tag{84}$$

и что коэффициенты

$$C_\lambda^{\hbar} = \mathrm{e}^{u\hbar c(\lambda)} s_\lambda \left(\beta_k = \frac{\delta_{k,1}}{\hbar}\right) \tag{85}$$

удовлетворяют соотношениям Плюкера. Это показывает, что $\hbar$-деформацией мы получаем τ-функцию иерархии $\hbar$-КП. Для найденной функции было явно посчитано разложение по $\mathbf{t}$ для первых порядков и проверено, что в неё действительно входят только чётные степени $\hbar$.

3 Иерархия BКП

3.1 Билинейное тождество BКП

Билинейное тождество иерархии BКП

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint \mathrm{e}^{\xi^{\text{н}}\left(\mathbf{t}-\mathbf{t}',\, k\right)} \tau_{B\text{КП}}\left(\mathbf{t} - 2\left[k^{-1}\right]\right) \tau_{B\text{КП}}\left(\mathbf{t}' + 2\left[k^{-1}\right]\right) \frac{\mathrm{d}k}{k} = \\ = \tau_{B\text{КП}}\left(\mathbf{t}\right) \tau_{B\text{КП}}(\mathbf{t}'), \tag{86}$$

где

$$\mathbf{t} \pm \left[k^{-1}\right] \overset{\text{опр}}{=\!=\!=} \left\{t_1 \pm k^{-1}, t_2 \pm \frac{1}{2}k^{-2}, t_3 \pm \frac{1}{3}k^{-3}, \dots\right\} \tag{87}$$

и

$$\xi^{\text{н}}\left(\mathbf{t}, k\right) = \sum_{j \in \mathbb{Z}^{+}_{\text{неч}}} t_j k^j. \tag{88}$$

Первое уравнение иерархии BКП в терминах производных Хироты

$$\left(\mathrm{D}_1^6 - 5\mathrm{D}_1^3\mathrm{D}_3 - 5\mathrm{D}_3^2 + 9\mathrm{D}_1\mathrm{D}_5\right) \tau_{B\text{КП}} \cdot \tau_{B\text{КП}}. \tag{89}$$

Что можно переписать как

$$-60\left(\frac{\partial^2 F}{\partial t_1^2}\right)^3 - 30\frac{\partial^4 F}{\partial t_1^4}\frac{\partial^2 F}{\partial t_1^2} + 30\frac{\partial^2 F}{\partial t_1\, \partial t_3}\frac{\partial^2 F}{\partial t_1^2} - \frac{\partial^6 F}{\partial t_1^6} + \\ + 5\frac{\partial^2 F}{\partial t_3^2} - 9\frac{\partial^2 F}{\partial t_1\, \partial t_5} + 5\frac{\partial^4 F}{\partial t_1^3\, \partial t_3} = 0. \tag{90}$$

3.2 Q-полиномы Шура, соотношения Плюккера BКП, гипергеометрические $\tau^{B\text{КП}}$-функции

Соотношения Плюккера для BКП

$$c_{[\alpha_1,\dots,\alpha_k]}c_{[\alpha_1,\dots,\alpha_k,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4]} - c_{[\alpha_1,\dots,\alpha_k,\beta_1,\beta_2]}c_{[\alpha_1,\dots,\alpha_k,\beta_3,\beta_4]} + \\ + c_{[\alpha_1,\dots,\alpha_k,\beta_1,\beta_3]}c_{[\alpha_1,\dots,\alpha_k,\beta_2,\beta_4]} - c_{[\alpha_1,\dots,\alpha_k,\beta_1,\beta_4]}c_{[\alpha_1,\dots,\alpha_k,\beta_2,\beta_3]} = 0. \quad (91)$$

Простейшее соотношение Плюккера

$$c_{\varnothing}c_{[3,2,1]} - c_{[1]}c_{[3,2]} + c_{[2]}c_{[3,1]} - c_{[3]}c_{[2,1]} = 0. \quad (92)$$

Проверено, что *Q-полиномы Шура* действительно удовлетворяют простейшему соотношению Плюккера.

Для определения гипергеометрических τ-функций зададим функцию

$$r_\lambda = \prod_{w\in\lambda} r\left(c(w)\right), \quad (93)$$

где

$$c(w) = j, \qquad 1 \leqslant i \leqslant l(\lambda), \qquad 1 \leqslant j \leqslant \lambda_i. \quad (94)$$

Визуализация функции $c(w)$ на таблице Юнга:

1	2	3	4
1	2	3	
1	2		

Гипергеометрическими τ-функциями BКП будем называть функции вида

$$\tau(\mathbf{t}) = \sum_\lambda r_\lambda Q_\lambda(\boldsymbol{\beta})Q_\lambda(\mathbf{t}). \quad (95)$$

Данные функции действительно решают иерархию BКП, т. к. Q-полиномы Шура удовлетворяют соотношениям Плюккера BКП, а множители $r(c(w))$ выносятся как общие. Например, для простейшего соотношения Плюккера общим множителем будет

$$r(1)^3 r(2)^2 r(3). \quad (96)$$

3.3 τ-функция спиновых чисел Гурвица

Следующая τ-функция является решением иерархии BКП:

$$\tau\left(\mathbf{p},\bar{\mathbf{p}}\right) = \sum_{R\in\mathrm{SP}} \left(\mathrm{e}^{u\left[\Phi_R([3]) + \frac{1}{2}\Phi_R([1,1])\right]}\right) Q_R\left(\frac{\mathbf{p}}{2}\right) Q_R\left(\frac{\bar{\mathbf{p}}}{2}\right). \quad (97)$$

3.4 Фермионный формализм и бозонно-фермионное соответствие

Нейтральные фермионы определяются как

$$\phi_m = \frac{\psi_m + (-1)^m \psi^*_{-m}}{\sqrt{2}}, \tag{98}$$

$$\phi^*_m = \frac{\psi^*_m + (-1)^m \psi_{-m}}{\sqrt{2}}. \tag{99}$$

Откуда сразу можно заметить что

$$\phi^*_m = (-1)^m \phi_{-m}. \tag{100}$$

Благодаря этому свойству далее мы можем ограничиться рассмотрением лишь фермионов ϕ_m. Прямой подстановкой можно получить каноническое коммутационное соотношение нейтральных фермионов

$$\{\phi_k, \phi_m\} = (-1)^k \delta_{k+m,0}, \tag{101}$$

а также их действие на вакуум «моря Дирака»

$$\phi_m |0\rangle = 0, \quad \langle 0| \phi_{-m} = 0, \quad m < 0. \tag{102}$$

Коммутационные соотношениям билинейных комбинаций нейтральных фермионов $\phi_k \phi_m$

$$\begin{gathered}
[\phi_a\phi_b, \phi_c\phi_d] = \phi_a\phi_b\phi_c\phi_d - \phi_c\phi_d\phi_a\phi_b = \phi_a \Big((-1)^b \delta_{b+c,0} - \phi_c\phi_b \Big) \phi_d - \\
- \phi_c \left((-1)^a \delta_{a+d,0} - \phi_a\phi_d \right) \phi_b = (-1)^b \delta_{b+c,0}\phi_a\phi_d - ((-1)^a \delta_{a+c,0} - \phi_c\phi_a)\phi_b\phi_d - \\
- (-1)^a \delta_{a+d,0}\phi_c\phi_b + \phi_c\phi_a \Big((-1)^b \delta_{b+d,0} - \phi_b\phi_d \Big) = (-1)^b \delta_{b+c,0}\phi_a\phi_d - \\
- (-1)^a \delta_{a+c,0}\phi_b\phi_d + (-1)^b \delta_{b+d,0}\phi_c\phi_a - (-1)^a \delta_{a+d,0}\phi_c\phi_b.
\end{gathered} \tag{103}$$

Элементами матричной алгебры Ли $\mathfrak{go}(\infty)$ являются матрицы

$$F_{k,m} = (-1)^m E_{k,-m} - (-1)^k E_{m,-k}. \tag{104}$$

Их коммутационные соотношения

$$\begin{aligned}
[F_{a,b}, F_{c,d}] = (-1)^{b+d}\,[E_{a,-b}, E_{c,-d}] - (-1)^{b+c}\,[E_{a,-b}, E_{d,-c}] -\\
- (-1)^{a+d}\,[E_{b,-a}, E_{c,-d}] + (-1)^{a+c}\,[E_{b,-a}, E_{d,-c}] =\\
= (-1)^{b+d}\,(\delta_{b+c,0}E_{a,-d} - \delta_{a+d,0}E_{c,-b}) - (-1)^{b+c}\,(\delta_{b+d,0}E_{a,-c} - \delta_{a+c,0}E_{d,-b}) -\\
- (-1)^{a+d}\,(\delta_{a+c,0}E_{b,-d} - \delta_{b+d,0}E_{c,-a}) + (-1)^{a+c}\,(\delta_{a+d,0}E_{b,-c} - \delta_{b+c,0}E_{d,-a}) =\\
= (-1)^{b}\delta_{b+c,0}F_{a,d} - (-1)^{a}\delta_{a+c}F_{b,d} + (-1)^{b}\,\delta_{b+d,0}F_{c,a} - (-1)^{a}\,\delta_{a+d,0}F_{c,b}
\end{aligned} \tag{105}$$

совпадают с коммутационными соотношениями билинейных комбинаций нейтральных фермионов. Значит представление алгебры $\mathfrak{go}(\infty)$ может быть реализовано на введённом пространстве Фока элементами $\phi_k\phi_m$.

$$\phi_k\phi_m = \frac{1}{2}\left(\psi_k + (-1)^k\,\psi^*_{-k}\right)\left(\psi_m + (-1)^m\,\psi^*_{-m}\right) =???. \tag{106}$$

Нормальное упорядочение на этот раз определим как

$$:\!\phi_k\phi_m\!: = \phi_k\phi_m - \langle 0|\phi_k\phi_m|0\rangle\,. \tag{107}$$

Легко видеть, что

$$\langle 0|\phi_k\phi_m|0\rangle = \delta_{k+m,0}H[m], \tag{108}$$

где

$$H[m] = \begin{cases} 0, & m < 0,\\ \frac{1}{2}, & m = 0,\\ (-1)^m, & m > 0. \end{cases} \tag{109}$$

Коммутационное соотношение алгебры нормально упорядоченных пар нейтральных фермионов

$$\begin{aligned}
[:\!\phi_a\phi_b\!:, :\!\phi_c\phi_d\!:] = (-1)^{b}\,\delta_{b+c,0}:\!\phi_a\phi_d\!: - (-1)^{a}\,\delta_{a+c,0}:\!\phi_b\phi_d\!: + (-1)^{b}\,\delta_{b+d,0}:\!\phi_c\phi_a\!: -\\
- (-1)^{a}\,\delta_{a+d,0}:\!\phi_c\phi_b\!: + (\delta_{c,b}\delta_{a,d} - \delta_{a-c,0}\delta_{b-d,0})\left((-1)^{a}\,H[b] - (-1)^{b}\,H[a]\right).
\end{aligned} \tag{110}$$

4 Квантовая деформация иерархии BКП

Аналогично деформации иерархии КП получаем первое уравнение $\hbar$-BКП

$$-60\left(\frac{\partial^2 F}{\partial t_1^2}\right)^3-30\hbar^2\frac{\partial^4 F}{\partial t_1^4}\frac{\partial^2 F}{\partial t_1^2}+30\frac{\partial^2 F}{\partial t_1\,\partial t_3}\frac{\partial^2 F}{\partial t_1^2}-\hbar^4\frac{\partial^6 F}{\partial t_1^6}+ \\ +5\frac{\partial^2 F}{\partial t_3^2}-9\frac{\partial^2 F}{\partial t_1\,\partial t_5}+5\hbar^2\frac{\partial^4 F}{\partial t_1^3\,\partial t_3}=0. \quad (111)$$