

Билеты по курсу «Теория функций комплексного переменного»

Драчов Ярослав
Факультет общей и прикладной физики МФТИ

7 января 2021 г.

Содержание

1	Комплексная дифференцируемость. Условия Коши-Римана.	3
2	Связность. Теорема о голоморфной в области функции с обращающейся в нуль производной.	3
3	Степенный ряды и элементарные функции.	3
4	Переообразная и полный дифференциал в области. Условия независимости интеграла от формы пути.	4
5	Лемма Гурса и теорема Коши для выпуклой области.	4
6	Интеграл Коши и его свойства.	4
7	Интегральная формула Коши для круга. Бесконечная дифференцируемость голоморфных функций. Теорема Морера.	4
8	Целые функции и теорема Лиувилля.	4
9	Ряд Тейлора и теорема единственности для голоморфных функций.	4
10	Приращение аргумента вдоль кривой. Индекс и его свойства.	4
11	Общая форма теоремы Коши и интегральной формулы Коши. Следствия для односвязной и многосвязной областей.	4
12	Разложение голоморфной функции в ряд Лорана. Теорема единственности ряда Лорана.	5
13	Изолированные особые точки. Связь классификации с видом ряда Лорана. Теорема Сохоцкого.	5
14	Вычеты и формулы для их вычисления. Теорема Коши о вычетах.	5

15	Вычисление несобственных интегралов с помощью вычетов. Лемма Жордана.	5
16	Регулярные ветви логарифма и корней.	5
17	Принцип аргумента. Теорема Руше. Основная теорема алгебры.	5
18	Теорема о локальной структуре отображения. Принцип сохранения области. Однолиственность и локальная однолиственность.	5
19	Принцип максимума модуля и лемма Шварца.	5
20	Локально равномерная сходимость и теорема Вейерштрасса. Теорема Гурвица и её следствие для однолистных функций.	6
21	Локально равномерная ограниченность и принцип компактности.	6
22	Конформность и групповое свойство дробно-линейных преобразований. Ангармоническое отношение четырёх точек.	6
23	Круговое свойство и принцип симметрии для дробно-линейных преобразований.	6
24	Элементарные конформные отображения с использованием степенной и экспоненциальной функций. Функция Жуковского. Общий вид конформных отображений единичного круга на себя.	6
25	Теорема Римана об отображении.	6
26	Аналитическое продолжение. Теорема о монодромии.	6
27	Теорема о стирании разреза. Принцип симметрии Римана-Шварца.	7
28	Мероморфные функции. Теорема Миттаг-Леффлера.	7
29	Гармонические функции и их связь с голоморфными функциями. Бесконечная дифференцируемость.	7
30	Принцип экстремума и теорема единственности для гармонических функций. Конформная инвариантность.	7
31	Теорема о среднем и интегральная формула Пуассона.	7
32	Интеграл Пуассона и решение задачи Дирихле в круге.	7
33	Бесконечные произведения голоморфных функций и их нули.	7

34 Гамма-функция и её представления Гаусса и Эйлера.	7
35 Метод стационарной фазы и асимптотика функции Эйри в отрицательном направлении вещественной оси.	8
36 Метод перевала и асимптотика функции Эйри в положительном направлении вещественной оси.	8

1 Комплексная дифференцируемость. Условия Коши-Римана.

Под функцией комплексного переменного $w = f(z)$ будем понимать отображение множества $D \subset \overline{\mathbb{C}}$ в комплексной z -плоскости в множество $f(D) = G \subset \overline{\mathbb{C}}$ комплексной w -плоскости. Если представить $z = x + iy$, $w = u + iv$, то задание функции f эквивалентно определению двух вещественных функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$ вещественных переменных x и y , т. е. $w = f(z) = (x, y) + iv(x, y)$.

Определение. Будем говорить, что функция $f(z)$ имеет предел A при $z \rightarrow a$ и писать

$$\lim_{z \rightarrow a} f(z) = A,$$

если для каждого $\varepsilon > 0$ найдётся такое $\delta > 0$, что $|f(z) - A| < \varepsilon$ при всех $z \in \dot{O}_\delta(a)$, т. е. при $0 < |z - a| < \delta$.

Заметим, что условие

$$\lim_{z \rightarrow a} f(z) = A$$

эквивалентно

$$\lim_{z \rightarrow a} \overline{f(z)} = \overline{A}.$$

Откуда

$$u(z) \rightarrow \operatorname{Re} A, \quad v(z) \rightarrow \operatorname{Im} A.$$

Обратное утверждение также верно (модуль комплексного числа не превышает суммы модулей вещественной и мнимой части).

Определение. Будем говорить, что функция $f(z)$ непрерывна в т. a , если

$$\lim_{z \rightarrow a} f(z) = f(a).$$

2 Связность. Теорема о голоморфной в области функции с обращающейся в нуль производной.

hi

3 Степенный ряды и элементарные функции.

hi

- 4 **Перообразная и полный дифференциал в области. Условия независимости интеграла от формы пути.**

hi

- 5 **Лемма Гурса и теорема Коши для выпуклой области.**

hi

- 6 **Интеграл Коши и его свойства.**

hi

- 7 **Интегральная формула Коши для круга. Бесконечная дифференцируемость голоморфных функций. Теорема Морера.**

hi

- 8 **Целые функции и теорема Лиувилля.**

hi

- 9 **Ряд Тейлора и теорема единственности для голоморфных функций.**

hi

- 10 **Приращение аргумента вдоль кривой. Индекс и его свойства.**

hi

- 11 **Общая форма теоремы Коши и интегральной формулы Коши. Следствия для односвязной и многосвязной областей.**

hi

12 Разложение голоморфной функции в ряд Лорана. Теорема единственности ряда Лорана.

hi

13 Изолированные особые точки. Связь классификации с видом ряда Лорана. Теорема Сохоцкого.

hi

14 Вычеты и формулы для их вычисления. Теорема Коши о вычетах.

hi

15 Вычисление несобственных интегралов с помощью вычетов. Лемма Жордана.

hi

16 Регулярные ветви логарифма и корней.

hi

17 Принцип аргумента. Теорема Руше. Основная теорема алгебры.

hi

18 Теорема о локальной структуре отображения. Принцип сохранения области. Однолистность и локальная однолистность.

hi

19 Принцип максимума модуля и лемма Шварца.

hi

- 20 Локально равномерная сходимость и теорема Вейерштрасса. Теорема Гурвица и её следствие для однолистных функций.
hi
- 21 Локально равномерная ограниченность и принцип компактности.
hi
- 22 Конформность и групповое свойство дробно-линейных преобразований. Анггармоническое отношение четырёх точек.
hi
- 23 Круговое свойство и принцип симметрии для дробно-линейных преобразований.
hi
- 24 Элементарные конформные отображения с использованием степенной и экспоненциальной функций. Функция Жуковского. Общий вид конформных отображений единичного круга на себя.
hi
- 25 Теорема Римана об отображении.
hi
- 26 Аналитическое продолжение. Теорема о монодромии.
hi

27 Теорема о стирании разреза. Принцип симметрии Римана-Шварца.

hi

28 Мероморфные функции. Теорема Миттаг-Леффлера.

hi

29 Гармонические функции и их связь с голоморфными функциями. Бесконечная дифференцируемость.

hi

30 Принцип экстремума и теорема единственности для гармонических функций. Конформная инвариантность.

hi

31 Теорема о среднем и интегральная формула Пуассона.

hi

32 Интеграл Пуассона и решение задачи Дирихле в круге.

hi

33 Бесконечные произведения голоморфных функций и их нули.

hi

34 Гамма-функция и её представления Гаусса и Эйлера.

hi

- 35 Метод стационарной фазы и асимптотика функции Эйри в отрицательном направлении вещественной оси.

hi

- 36 Метод перевала и асимптотика функции Эйри в положительном направлении вещественной оси.