Д/з по суперсимметрии

Драчов Ярослав
Факультет общей и прикладной физики МФТИ

21 февраля 2022 г.

Задание 1.1

Задача 1.

Решение. Найдём вариацию действия

$$\begin{aligned}\delta S = \int \mathrm{d}t \Big[\dot{x}\delta\dot{x} + \mathrm{i}\delta\psi^\dagger\dot{\psi} + \mathrm{i}\psi^\dagger\delta\dot{\psi} - h'h''\delta x + \\ + h'''\delta x\psi^\dagger\psi + h''\left(\delta\psi^\dagger\psi + \psi^\dagger\delta\psi\right)\Big] = \\ = \int \mathrm{d}t \Big[\left(-\ddot{x} - h'h'' + h'''\psi^\dagger\psi\right)\delta x + \\ + \left(-\mathrm{i}\dot{\psi}^\dagger + h''\psi^\dagger\right)\delta\psi + \left(-\mathrm{i}\dot{\psi} - h''\psi\right)\delta\psi^\dagger\Big].\end{aligned}$$

Откуда

$$\ddot{x} = h'''\psi^\dagger\psi - h'h'', \qquad \dot{\psi} = \mathrm{i}h''\psi, \qquad \dot{\psi}^\dagger = -\mathrm{i}h''\psi^\dagger.$$

Далее

$$h'' = \frac{h'''\psi^\dagger\psi - \ddot{x}}{h'}.$$

$$\dot{\psi} = -\mathrm{i}\frac{\ddot{x}}{h'}\psi, \qquad \dot{\psi}^\dagger = \mathrm{i}\frac{\ddot{x}}{h'}\psi^\dagger.$$

Дифференцируя суперзаряды по времени, получаем

$$\begin{aligned}0 = \dot{Q} = \ddot{x}\psi + \dot{x}\dot{\psi} - \mathrm{i}\left(h''\dot{x}\psi + h'\dot{\psi}\right) = \\ = \left(\ddot{x}\psi - \mathrm{i}h'\dot{\psi}\right) + \dot{x}\left(\dot{\psi} - \mathrm{i}h''\psi\right) = 0.\end{aligned}$$

$$0=\dot{Q}^\dagger=\ddot{x}\psi^\dagger+\dot{x}\dot{\psi}^\dagger+\mathrm{i}\left(h''\dot{x}\psi^\dagger+h'\dot{\psi}^\dagger\right)=$$
$$=\left(\ddot{x}\psi^\dagger+\mathrm{i}h'\dot{\psi}^\dagger\right)+\dot{x}\left(\dot{\psi}^\dagger+\mathrm{i}h''\psi^\dagger\right)=0.$$

Квантовомеханическое следствие теоремы Нётер

$$\delta\,(\text{бозонное поле})=\mathrm{i}\epsilon\,[\text{заряд},\text{поле}]\,,$$

$$\delta\,(\text{фермионное поле})=\mathrm{i}\epsilon\,\{\text{заряд},\text{поле}\}\,.$$

В нашем случае из сохранения заряда Q следует симметрия

$$\delta x=\epsilon\psi,\qquad \delta\psi=0,\qquad \delta\psi^\dagger=\epsilon\,(\mathrm{i}\dot{x}+h')\,.$$

Проверим, что вариация действия на данной симметрии действительно равна нулю

$$\delta S=\int\mathrm{d}t\;\epsilon\left[\dot{x}\dot{\psi}^\dagger+\mathrm{i}\,(\mathrm{i}\dot{x}+h')\,\dot{\psi}-h'h''\psi^\dagger+\right.$$
$$\left.+\,h'''\psi^\dagger\psi^\dagger\psi+h''\,(\mathrm{i}\dot{x}+h')\,\psi\right]=$$
$$=\int\mathrm{d}t\;\epsilon\left[\mathrm{i}h'\dot{\psi}-h'h''\psi+h''\,(\mathrm{i}\dot{x}+h')\,\psi\right]=$$
$$=\int\mathrm{d}t\;\mathrm{i}\epsilon\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,(h'\psi)=0.$$

Из сохранения заряда $Q^\dagger$ следует симметрия

$$\delta x=\epsilon\psi^\dagger,\qquad \delta\psi=\epsilon\,(\mathrm{i}\dot{x}-h')\,,\qquad \delta\psi^\dagger=0.$$

Аналогично

$$\delta S=\int\mathrm{d}t\;\epsilon\left[\dot{x}\dot{\psi}^\dagger-\mathrm{i}\psi^\dagger\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,(\mathrm{i}\dot{x}-h')-h'h''\psi^\dagger+\right.$$
$$\left.+\,h'''\psi^\dagger\psi^\dagger\psi-h''\psi^\dagger\,(\mathrm{i}\dot{x}-h')\right]=$$
$$=\int\mathrm{d}t\;\epsilon\left[-\mathrm{i}\dot{\psi}^\dagger h'-h'h''\psi^\dagger-h''\psi^\dagger\,(\mathrm{i}\dot{x}-h')\right]=$$
$$=-\int\mathrm{d}t\;\mathrm{i}\epsilon\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(h'\psi^\dagger\right)=0.$$

Найдём канонические сопряжённые импульсы

$$p(t)=\frac{\delta S}{\delta\dot{x}(t)}=\dot{x}(t),\qquad \pi(t)=\frac{\delta S}{\delta\dot{\psi}(t)}=\mathrm{i}\psi^\dagger(t).$$

Гамильтониан

$$H = p\dot{x} + \pi\dot{\psi} - L.$$

Его «суперсимметризация»

$$H = \frac{1}{2}\left(p^2 + h'^2\right) - \frac{1}{2}h''\left(\psi^\dagger\psi - \psi\psi^\dagger\right).$$

Задача 2.

Решение. Можем сконструировать гамильтониан вида

$$H = \frac{1}{2}\left\{c^\dagger, c\right\} = \frac{1}{2}\mathbb{1},$$

однако, кажется, что система с одним энергетическим уровнем плохо подходит под определение фермионного осциллятора. Системой с двумя энергетическими уровнями будет, например,

$$H = \frac{1}{2}\left[c^\dagger, c\right] = F - \frac{1}{2}\mathbb{1}.$$

Откуда

$$H\left|0\right\rangle = -\frac{1}{2}\left|0\right\rangle, \qquad H\left|1\right\rangle = \frac{1}{2}\left|1\right\rangle.$$

Это уже похоже на то, что должно называться фермионным осциллятором и совпадает с последним членом в гамильтониане суперсимметричной частицы при $h'' = 1$.

Рассмотрим нестационарное равнение Шрёдингера

$$\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}\left|\psi\right\rangle = H\left|\psi\right\rangle$$

с начальным условием

$$\left|\psi\right\rangle = a\left|0\right\rangle + b\left|1\right\rangle.$$

Его решением будет

$$\left|\psi\right\rangle = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht}\left(a\left|0\right\rangle + b\left|1\right\rangle\right) = a\mathrm{e}^{\mathrm{i}t/2}\left|0\right\rangle + b\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t/2}\left|1\right\rangle.$$

Задача 3.

Решение. Представлением алгебры нескольких фермионных осцилляторов может быть, например,

$$c^i = \underbrace{\sigma_3 \otimes \sigma_3 \otimes \cdots \otimes \sigma_3}_{i-1\text{ раз}} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \mathbb{1} \otimes \cdots \otimes \mathbb{1}.$$

$$c^{i\dagger} = \underbrace{\sigma_3 \otimes \sigma_3 \otimes \cdots \otimes \sigma_3}_{i-1 \text{ раз}} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes \mathbb{1} \otimes \cdots \otimes \mathbb{1}.$$

Т. к.

$$\left\{\sigma_3, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\} = 0, \qquad \left\{\sigma_3, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\} = 0,$$

(остальные коммутационные соотношения известны), то выполнено

$$\left\{c^i, c^j\right\} = \left\{c^{i\dagger}, c^{j\dagger}\right\} = 0, \qquad \left\{c^{i\dagger}, c^j\right\} = \delta^{ij}.$$

Гамильтониан системы фермионных осцилляторов может иметь вид

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \left[c^{i\dagger}, c^i\right] + \sum_{i,j,k,l} c^{i\dagger} c^{j\dagger} c^k c^l.$$

Задача 4.

Решение. Пусть

$$Q = (p_i - \mathrm{i}\partial_i h)\, \psi^i, \qquad Q^\dagger = (p_i + \mathrm{i}\partial_i h)\, \psi^{\dagger i}.$$

Тогда

$$\begin{gathered} \left\{Q, Q^\dagger\right\} = (p_i p_j + \partial_i h \partial_j h) \left\{\psi^i, \psi^{\dagger j}\right\} + (\mathrm{i} p_i \partial_j h - \mathrm{i}\partial_i h p_j)\, \psi^i \psi^{\dagger j} + \\ + (\mathrm{i}\partial_j h p_i - \mathrm{i} p_j \partial_i h)\, \psi^{\dagger j} \psi^i = \sum_{i=1}^{n} \left(p_i^2 + (\partial_i h)^2\right) + \\ + (-\partial_i \partial_j h + \mathrm{i}\partial_j h p_i - \mathrm{i}\partial_i h p_j)\, \psi^i \psi^{\dagger j} + (\mathrm{i}\partial_j h p_i + \partial_j \partial_i h - \mathrm{i}\partial_i h p_j)\, \psi^{\dagger j} \psi^i = \\ = \sum_{i=1}^{n} \left(p_i^2 + (\partial_i h)^2\right) + \partial_j \partial_i h \left[\psi^{\dagger j}, \psi^i\right] + \mathrm{i}\,(\partial_j h p_i - \partial_i h p_j) \left\{\psi^i, \psi^{\dagger j}\right\} = \\ = \sum_{i=1}^{n} \left(p_i^2 + (\partial_i h)^2\right) + \partial_i \partial_j h \left[\psi^{\dagger i}, \psi^j\right]. \end{gathered}$$

И

$$H = \frac{1}{2} \left\{Q, Q^\dagger\right\}.$$

Будем работать в представлении

$$Q = (p_1 - \mathrm{i}\partial_1 h) \otimes \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \mathbb{1} + (p_2 - \mathrm{i}\partial_2 h) \otimes \sigma_3 \otimes \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$Q^\dagger = (p_1 + \mathrm{i}\partial_1 h) \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes \mathbb{1} + (p_2 + \mathrm{i}\partial_2 h) \otimes \sigma_3 \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В котором

$$\Psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \\ \psi_3(x) \\ \psi_4(x) \end{pmatrix}.$$

Из условия $Q\Psi = 0$ получаем уравнения

$$-\psi_1 \partial_2 h + \partial_2 \psi_1 = 0, \qquad -\psi_1 \partial_1 h + \partial_1 \psi_1 = 0,$$

$$\psi_3 \partial_2 h - \partial_2 \psi_3 - \psi_2 \partial_1 h + \partial_1 \psi_2 = 0.$$

Аналогично для $Q^\dagger \Psi = 0$

$$\psi_2 \partial_2 h + \partial_2 \psi_2 + \psi_3 \partial_1 h + \partial_1 \psi_3 = 0.$$

$$\psi_4 \partial_1 h + \partial_1 \psi_4 = 0, \qquad \psi_4 \partial_2 h + \partial_2 \psi_4 = 0.$$

$$\begin{cases} \psi_3 \dfrac{\partial h}{\partial x_2} - \dfrac{\partial \psi_3}{\partial x_2} - \psi_2 \dfrac{\partial h}{\partial x_1} + \dfrac{\partial \psi_2}{\partial x_1} = 0, \\ \psi_2 \dfrac{\partial h}{\partial x_2} + \dfrac{\partial \psi_2}{\partial x_2} + \psi_3 \dfrac{\partial h}{\partial x_1} + \dfrac{\partial \psi_3}{\partial x_1} = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial h}{\partial x_2} - \dfrac{\partial}{\partial x_2} \right) \psi_3 + \left(\dfrac{\partial}{\partial x_1} - \dfrac{\partial h}{\partial x_1} \right) \psi_2 = 0, \\ \left(\dfrac{\partial h}{\partial x_2} + \dfrac{\partial}{\partial x_2} \right) \psi_2 + \left(\dfrac{\partial h}{\partial x_1} + \dfrac{\partial}{\partial x_1} \right) \psi_3 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{\partial h}{\partial x_1} & \frac{\partial h}{\partial x_2} - \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial h}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial h}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Доп. задача.

Решение.

$$Q_+ = p_i \Psi^i - \frac{\mathrm{i}}{2} \bar{\partial}_{\bar{i}} \bar{W} \bar{\tilde{\Psi}}^{\bar{i}}, \qquad Q_+^\dagger = \bar{p}_{\bar{i}} \bar{\Psi}^{\bar{i}} + \frac{\mathrm{i}}{2} \partial_i W \tilde{\Psi}^i.$$

$$Q_- = \bar{p}_{\bar{i}} \bar{\tilde{\Psi}}^{\bar{i}} - \frac{\mathrm{i}}{2} \partial_i W \Psi^i, \qquad Q_-^\dagger = p_i \tilde{\Psi}^i + \frac{\mathrm{i}}{2} \partial_{\bar{i}} \bar{W} \bar{\Psi}^{\bar{i}}.$$

$$
\left\{Q_+, Q_+^\dagger\right\} = \left\{p_i\Psi^i - \frac{\mathrm{i}}{2}\bar{\partial}_{\bar{i}}\bar{W}\bar{\tilde{\Psi}}^{\bar{i}}, \bar{p}_{\bar{j}}\bar{\Psi}^{\bar{j}} + \frac{\mathrm{i}}{2}\partial_j W\tilde{\Psi}^j\right\} = p_i\bar{p}_{\bar{j}}\left\{\Psi^i, \bar{\Psi}^{\bar{j}}\right\} +
$$

$$
+ \frac{1}{4}\bar{\partial}_{\bar{i}}\bar{W}\partial_j W\left\{\bar{\tilde{\Psi}}^{\bar{i}}, \tilde{\Psi}^i\right\} - \frac{\mathrm{i}}{2}\left(\bar{\partial}_{\bar{i}}\bar{W}\bar{p}_{\bar{j}} - \bar{\partial}_{\bar{i}}\bar{W}\bar{p}_{\bar{j}} + \mathrm{i}\bar{\partial}_{\bar{i}}\bar{\partial}_{\bar{j}}\bar{W}\right)\bar{\tilde{\Psi}}^{\bar{i}}\bar{\Psi}^{\bar{j}} +
$$

$$
+ \frac{\mathrm{i}}{2}\left(\partial_j W p_i - \partial_j W p_i - \mathrm{i}\partial_i\partial_j W\right)\Psi^i\tilde{\Psi}^j = \sum_{i=1}^{n}\left(|p_i|^2 + \frac{1}{4}|\partial_i W|^2\right) +
$$

$$
+ \frac{1}{2}\sum_{i,j}\left(\partial_i\partial_j W\Psi^i\tilde{\Psi}^j + \bar{\partial}_{\bar{i}}\bar{\partial}_{\bar{j}}\bar{W}\bar{\tilde{\Psi}}^{\bar{i}}\bar{\Psi}^{\bar{j}}\right) = H.
$$

Задание 1.2

Задача 1.

Решение. Найдём канонически сопряжённые импульсы

$$
\pi_M = \frac{\delta S_M}{\delta\dot{\psi}} = \frac{\mathrm{i}}{2}\psi, \qquad \pi_F = \frac{\delta S}{\delta\dot{\psi}} = \frac{\mathrm{i}}{2}\psi^\dagger.
$$

Канонические коммутационные соотношения

$$
\{\psi, \pi_M\} = 0, \qquad \{\psi, \pi_F\} = \frac{\mathrm{i}}{2}.
$$

Найдём гамильтонианы

$$
H_M = \pi_M\dot{\psi} - L_M = 0, \qquad H_F = \pi_F\dot{\psi} - L_F = 0.
$$

Спектром будет $\lambda = 0 \ \forall\psi$. Статсумма

$$
Z = \operatorname{Tr}\mathrm{e}^{-\beta H} = \int \mathrm{d}\psi\,\langle\psi|\psi\rangle = \int \mathrm{d}\psi = 0.
$$

Задача 2.

Решение. Пусть D обозначает дифференцирование по грассмановой переменной, а I — интегрирование по грассмановой переменной, где интегрирование понимается как определённый интеграл. Пусть они удовлетворяют соотношениям

(1) $ID = 0$,

(2) $DI = 0$,

(3) $D(A) = 0 \implies I(BA) = I(B)A$,

где A и B — произвольные функции грассмановых переменных. Первое соотношение говорит о том, что интеграл от производной любой функции является разностью значений функции на границе, которую мы полагаем равной нулю. Второе соотношение говорит о том, что производная определённого интеграла равна нулю. Третье соотношение говорит о том, что из выражения $D(A) = 0$ следует, что A — константа и поэтому её можно выносить за знак интеграла. Эти соотношения будут выполнены, если взять $I \propto D$. Используя нормировку $I = D$ и, полагая

$$\int \mathrm{d}\theta \ f(\theta) = \frac{\partial f(\theta)}{\partial(\theta)},$$

находим из определений производной функции грассмановых переменных, что

$$\int \mathrm{d}\theta = \frac{\partial\, 1}{\partial\theta} = 0, \qquad \int d\theta \ \theta = \frac{\partial\theta}{\partial\theta} = 1.$$

Задача 3.

Решение. Можно показать, что для грассмановых векторов $\boldsymbol{\theta}$ и $\boldsymbol{\theta}^\dagger$ выполняется

$$\int \mathrm{d}\theta_1^\dagger \mathrm{d}\theta_1 \cdots \mathrm{d}\theta_n^\dagger \mathrm{d}\theta_n \exp\left(\boldsymbol{\theta}^\dagger \boldsymbol{M} \boldsymbol{\theta}\right) = \det \boldsymbol{M}.$$

Тогда

$$\int D\psi^\dagger D\psi \exp\left(-\int \mathrm{d}\tau \left[\psi^\dagger \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}\tau} + \omega\psi^\dagger\psi\right]\right) =$$
$$= \int D\psi^\dagger D\psi \exp\left(-\int \mathrm{d}\tau \left[\psi^\dagger \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} + \omega\right)\psi\right]\right) \sim$$
$$\sim \lim_{\Delta\tau\to 0} \int \prod_i \mathrm{d}\psi_i^\dagger \mathrm{d}\psi_i \exp\left(-\Delta\tau \sum_j \left[\psi_j^\dagger \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} + \omega\right)_j \psi_j\right]\right) \sim$$
$$\sim \det\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} + \omega\right].$$

Для антипериодических граничных условий собственные функции будут иметь вид

$$\psi(\tau) = \eta_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\tau} \implies \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} + \omega\right)\psi = (\mathrm{i}k + \omega)\,\psi$$

для некого грассманного параметра η_0. Из условия антипериодичности $\psi(\tau+\beta) = -\psi(\tau)$ следует

$$k = \frac{2\pi(n-1/2)}{\beta}, \qquad n \in \mathbb{Z},$$

далее имеем

$$\begin{aligned}
\det\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} + \omega\right) = \prod_{n\in\mathbb{Z}} \left(\frac{2\pi \mathrm{i}\,(n-1/2)}{\beta} + \omega\right) = \\
= \prod_{n=1}^{\infty}\left(\left(\frac{2\pi\,(n-1/2)}{\beta}\right)^2 + \omega^2\right) = \\
= \prod_{n'=1}^{\infty}\left(\frac{2\pi\,(n'-1/2)}{\beta}\right)^2 \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 + \left(\frac{\beta\omega}{2\pi\,(n-1/2)}\right)^2\right) = \\
= \prod_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2\pi\,(n+1/2)}{\beta}\right)^2 \operatorname{ch}\left(\frac{\beta\omega}{2}\right).
\end{aligned}$$

$$\zeta_1(s) = \left(\frac{\beta}{2\pi}\right)^{2s} \zeta\,(2s, 1/2) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2\pi\,(n+1/2)}{\beta}\right)^{-2s}.$$

$$\begin{aligned}
\zeta_1'(s) = 2\left(\frac{\beta}{2\pi}\right)^{2s}\left(\ln\left(\frac{\beta}{2\pi}\right)\zeta\,(2s,1/2) + \zeta'(2s,1/2)\right) = \\
= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2\pi\,(n+1/2)}{\beta}\right)^{-2s} \ln\left(\frac{2\pi\,(n+1/2)}{\beta}\right)^{-2}.
\end{aligned}$$

Вычисляя при $s=0$, получаем

$$\zeta_1(0) = 2\ln\left(\frac{\beta}{2\pi}\right)\zeta\,(0,1/2) + 2\zeta'(0,1/2) = \sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(\frac{2\pi(n+1/2)}{\beta}\right)^{-2}.$$

Экспоненциируя с двух сторон

$$\prod_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2\pi(n+1/2)}{\beta}\right)^{-2} = \left(\frac{\beta}{2\pi}\right)^{2\zeta(0,\,1/2)} \mathrm{e}^{2\zeta'(0,\,1/2)}.$$

Используя табличные данные $\zeta(0,1/2) = 0$, $\zeta'(0,1/2) = -\frac{1}{2}\ln 2$, заключаем, что

$$\prod_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2\pi(n+1/2)}{\beta}\right)^{-2} = \frac{1}{2}.$$

И

$$\det\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}+\omega\right)\bigg|_{\text{анти-пер.}} = 2\,\mathrm{ch}\left(\frac{\beta\omega}{2}\right).$$

Задача 4.

Решение. Статсумма будет даваться выражением

$$Z = \mathrm{Tr}\,\mathrm{e}^{-\beta H} = \int \mathcal{D}x\mathcal{D}\psi\mathcal{D}\psi^\dagger\ \mathrm{e}^{-S_E} = \sum_X \frac{\det\left(\mathrm{d}/\mathrm{d}\tau + h''(X)\right)}{\det^{1/2}\left(-\mathrm{d}^2/\mathrm{d}\tau^2 + h''(X)\right)},$$

где, в отличие от индекса Виттена, граничные условия для фермионов антипериодичны. Бозонный вклад

$$\det{}^{1/2}\left(-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau^2}+\omega^2\right) = 2\,\mathrm{sh}\left(\frac{\beta|\omega|}{2}\right).$$

Фермионный вклад

$$\det\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}+\omega\right) = 2\,\mathrm{ch}\left(\frac{\beta\omega}{2}\right).$$

Итого

$$Z = \sum_X \left|\mathrm{cth}\,\frac{\beta h''(X)}{2}\right|.$$

Задача 5.

Решение.