

Квантовая деформация иерархии BKP

Драчов Ярослав

Факультет общей и прикладной физики МФТИ

8 апреля 2022 г.

Содержание

1	Иерархия КП	2
1.1	Пары Лакса	2
1.2	Билинейное тождество Хироты	3
1.3	Полиномы Шура, соотношения Плюккера, гипергеометрические τ -функции	4
1.4	τ -функция чисел Гурвица	5
1.5	Фермионный формализм и бозонно-фермионное соответствие	6
2	Квантовая деформация иерархии КП	11
2.1	Фермионный формализм	12
2.2	τ -функция чисел Гурвица	12
3	Иерархия BKP	13
3.1	Билинейное тождество BKP	13
3.2	Q -полиномы Шура, соотношения Плюккера BKP , гипергеометрические τ^{BKP} -функции	14
3.3	τ -функция спиновых чисел Гурвица	15
4	Квантовая деформация иерархии BKP	15

1 Иерархия КП

Иерархия КП — бесконечный набор нелинейных дифференциальных уравнений, первое из которых даётся как

$$\frac{1}{4} \frac{\partial^2 F}{\partial t_2^2} = \frac{1}{3} \frac{\partial^2 F}{\partial t_1 \partial t_3} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial t_1^2} \right)^2 - \frac{1}{12} \frac{\partial^4 F}{\partial t_1^4}. \quad (1)$$

Далее будут обсуждаться экспоненцированные решения данной иерархии (τ -функции) $\tau(\mathbf{t}) = \exp(F(\mathbf{t}))$. В разделах 1.1 и 1.2 опишем методы получения уравнений данной иерархии.

1.1 Пары Лакса

Для псевдодифференциального оператора

$$L = \partial + \sum_{j=1}^{\infty} f_j \partial^{-j}, \quad \text{где} \quad \partial = \frac{\partial}{\partial t_1}, \quad (2)$$

условия совместности системы линейных уравнений

$$\begin{cases} Lw = kw, \\ \frac{\partial w}{\partial t_j} = B_j w, \end{cases} \quad \text{где } B_j = (L^j)_+. \quad (3)$$

могут быть записаны в Лаксовой форме

$$\frac{\partial L}{\partial t_j} = [B_j, L]. \quad (4)$$

Из второго уравнения данной иерархии получаем

$$\frac{\partial f_1}{\partial t_2} = \frac{\partial^2 f_1}{\partial t_1^2} + 2 \frac{\partial f_2}{\partial t_1}, \quad \frac{\partial f_2}{\partial t_2} = \frac{\partial^2 f_2}{\partial t_1^2} + 2 \frac{\partial f_3}{\partial t_1} + 2 \frac{\partial f_1}{\partial t_1} f_1, \quad \dots \quad (5)$$

Из третьего —

$$\frac{\partial f_1}{\partial t_3} = \frac{\partial^3 f_1}{\partial t_1^3} + 3 \frac{\partial^2 f_2}{\partial t_1^2} + 3 \frac{\partial f_3}{\partial t_1} + 6 \frac{\partial f_1}{\partial t_1} f_1, \quad \dots \quad (6)$$

Устраняя f_2 и f_3 из данных уравнений и пользуясь обозначениями $u = -2f_1$, получаем *уравнение КП*

$$3 \frac{\partial^2 u}{\partial t_2^2} = \frac{\partial}{\partial t_1} \left(4 \frac{\partial u}{\partial t_3} + 6u \frac{\partial u}{\partial t_1} - \frac{\partial^3 u}{\partial t_1^3} \right). \quad (7)$$

Требуем пояснений введённое обозначение для u . Решение первоначальной задачи на собственные значения можно искать в виде

$$w = e^{\xi(\mathbf{t}, k)} \left(1 + \frac{w_1}{k} + \frac{w_2}{k^2} + \dots \right), \quad \text{где} \quad \xi(\mathbf{t}, k) = \sum_{j=1}^{\infty} t_j k^j. \quad (8)$$

Тогда связь между w_i и f_i может быть найдена, например, из уравнений

$$\frac{\partial w}{\partial t_j} = B_j w. \quad (9)$$

Из уравнения на t_1 получаем

$$\frac{\partial w_1}{\partial t_1} = -f_1, \quad \dots \quad (10)$$

Оказывается, что все функции w_1, w_2, \dots могут быть выражены через одну функцию τ по формуле

$$w = \frac{\tau \left(t_1 - \frac{1}{k}, t_2 - \frac{1}{2k^2}, t_3 - \frac{1}{3k^3}, \dots \right)}{\tau(t_1, t_2, t_3, \dots)} e^{\xi(\mathbf{t}, k)}. \quad (11)$$

Откуда, например,

$$w_1 = -\frac{\partial \tau}{\partial t_1} \cdot \tau^{-1}. \quad (12)$$

Иерархия КдФ получается из иерархии КП условием $L^2 = \partial^2 + u$ и бесконечный набор функций f_i выражается через u . Таким же свойством обладает τ -функция, между ними имеется связь

$$u = 2 \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} \ln \tau. \quad (13)$$

Обозначение $u = -2f_1$ теперь поясняется формулами (10), (12), (13). Также, интегрируя два раза по t_1 уравнение (7) и принимая во внимание обозначение для F , получаем в точности уравнение (1).

1.2 Билинейное тождество Хироты

Определение. Производные хироты $D_1^{n_1} \dots D_m^{n_m}$ задаются из соотношения

$$e^{y_1 D_1 + y_2 D_2 + \dots} f \cdot g = f(x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots) g(x_1 - y_1, x_2 - y_2, \dots). \quad (14)$$

Теорема (билинейное тождество). Для любых x и x' положим

$$\xi = \xi(\mathbf{t}, k), \quad \xi' = \xi(\mathbf{t}', k). \quad (15)$$

Тогда справедливо следующее тождество:

$$0 = \oint \frac{dk}{2\pi i} e^{\xi - \xi'} \tau \left(t_1 - \frac{1}{k}, t_2 - \frac{1}{2k^2}, \dots \right) \tau \left(t'_1 + \frac{1}{k}, t'_2 + \frac{1}{2k^2}, \dots \right). \quad (16)$$

Уравнения КП получаются из билинейного тождества после замены $t_j = x_j + y_j$, $t'_j = x_j - y_j$:

$$\begin{aligned} & \oint \frac{dk}{2\pi i} \exp \left(2 \sum_{j=1}^{\infty} k^j y_j \right) \tau \left(x_1 + y_1 - \frac{1}{k}, x_2 + y_2 - \frac{1}{2k^2}, \dots \right) \times \\ & \quad \times \tau \left(x_1 - y_1 + \frac{1}{k}, x_2 - y_2 + \frac{1}{2k^2}, \dots \right) = \\ & = \oint \frac{dk}{2\pi i} \exp \left(2 \sum_{j=1}^{\infty} k^j y_j \right) \exp \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left(y_l - \frac{1}{lk^l} \right) D_l \right) \tau \cdot \tau. \end{aligned} \quad (17)$$

Раскладывая подынтегральную функцию в ряд по степеням y_j и вычисляя коэффициент при k^{-1} , получаем уравнения КП. Например

$$(D_1^4 + 3D_2^2 - 4D_1D_3)\tau \cdot \tau = 0, \quad (D_1^3D_2 + 2D_2D_3 - 3D_1D_4)\tau \cdot \tau = 0. \quad (18)$$

Первое из них — буквально (1) с учётом определения F .

1.3 Полиномы Шура, соотношения Плюккера, гипергеометрические τ -функции

Решения данной иерархии могут быть разложены по базису полиномов Шура

$$\tau(\mathbf{t}) = \sum_{\lambda} C_{\lambda} s_{\lambda}(\mathbf{t}). \quad (19)$$

Можно показать, что $\tau(\mathbf{t})$ — решение иерархии КП тогда и только тогда, когда коэффициенты C_{λ} удовлетворяют соотношениям Плюккера, первое из которых

$$C_{[2,2]}C_{[\emptyset]} - C_{[2,1]}C_{[1]} + C_{[2]}C_{[1,1]} = 0. \quad (20)$$

Имеется важное подмножество решений иерархии КП — *гипергеометрические τ -функции*. Они определяются как

$$\tau(\mathbf{t}) = \sum_{\lambda} r_{\lambda} s_{\lambda}(\beta) s_{\lambda}(\mathbf{t}), \quad (21)$$

где $s_{\lambda}(\beta)$ — полином Шура от переменных β_k ,

$$r_{\lambda} = \prod_{w \in \lambda} r(c(w)), \quad (22)$$

$$c(w) = j - i, \quad 1 \leq i \leq l(\lambda), \quad 1 \leq j \leq \lambda_i. \quad (23)$$

1.4 τ -функция чисел Гурвица

Производящая функция простых чисел Гурвица

$$\tau_H(\mathbf{t}) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\mu} h_{m;\mu}^{\circ} t_{\mu_1} t_{\mu_2} \cdots t_{\mu_{l(\mu)}} \frac{u^m}{m!}, \quad (24)$$

где

$$h_{m;\mu}^{\circ} = \frac{1}{|\mu|!} |\{(\eta_1, \dots, \eta_m), \eta_i \in C_2(S_{|\mu|}) : \eta_m \circ \cdots \circ \eta_1 \in C_{\mu}(S_{|\mu|})\}|, \quad (25)$$

$S_{|\mu|}$ — симметрическая группа перестановок μ элементов, $C_2(S_{|\mu|})$ — множество всех транспозиций в $S_{|\mu|}$ и $C_{\mu}(S_{|\mu|})$ — множество всех перестановок циклического типа μ .

Можно показать (TODO), что

$$\tau_H(\mathbf{t}) = \sum_{\lambda} e^{uc(\lambda)} s_{\lambda}(\beta_k = \delta_{k,1}) s_{\lambda}(\mathbf{t}), \quad (26)$$

где $c(\lambda) = \sum_{w \in \lambda} c(w)$. То есть данная производящая функция — гипергеометрическая τ -функция с параметрами

$$r(n) = e^{un}, \quad \beta_1 = 1, \quad \beta_k = 0, \quad k \geq 2. \quad (27)$$

1.5 Фермионный формализм и бозонно-фермионное соответствие

Будем рассматривать бесконечномерную алгебру Клиффорда с генераторами $\{\psi_n, \psi_m^* \mid n, m \in \mathbb{Z}\}$, обладающими коммутационными соотношениями

$$\{\psi_n, \psi_m\} = 0, \quad \{\psi_n^*, \psi_m^*\} = 0, \quad \{\psi_n, \psi_m^*\} = \delta_{n,m}. \quad (28)$$

Пространство Фока для фермионов определим действием алгебры Клиффорда на вакуумный вектор $|0\rangle$ «моря Дирака». Действие генераторов алгебры на вакуумный вектор даётся как

$$\psi_k |0\rangle = 0, \quad k \leq 0; \quad \psi_k^* |0\rangle = 0, \quad k > 0. \quad (29)$$

То есть операторы ψ_k при $k > 0$ и ψ_k^* при $k \leq 0$ — это операторы рождения, а ψ_k при $k \leq 0$ и ψ_k^* при $k > 0$ — операторы уничтожения.

Далее определим m -е вакуумы

$$\psi_k |m\rangle = 0, \quad k \leq m; \quad \psi_k^* |m\rangle = 0, \quad k > m, \quad (30)$$

и состояния

$$|m, \lambda\rangle = \psi_{\lambda_1+m} \psi_m^* \psi_{\lambda_2+m-1} \psi_{m-1}^* \cdots \psi_{\lambda_{l(\lambda)}+m-l(\lambda)} \psi_{m-l(\lambda)}^* |m\rangle.$$

Введём также производящие функции для фермионов

$$\psi(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \psi_k z^k, \quad \psi^*(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \psi_k^* z^{-k-1}. \quad (31)$$

Будем обозначать нормальное упорядочение фермионных операторов как $:(\dots):$. Результатом нормального упорядочения будет перемещение всех операторов уничтожения направо, а операторов рождения — налево, где каждая транспозиция двух фермионов будет производиться в согласии с антикоммутационным соотношением и, следовательно, давать множитель (-1) .

Алгебра Ли gl_∞ определяется как пространство

$$gl_\infty = \left\{ (a_{ij})_{i,j \in \mathbb{Z}} \mid \text{все } a_{ij}, \text{ кроме конечного числа, равны } 0 \right\}. \quad (32)$$

Базисом данной алгебры можно выбрать матрицы E_{ij} , у которых единственный, отличный от нуля, элемент равен 1 и находится на пересечении i -й строки и j -го столбца.

$$(E_{ij})_{kl} = \delta_{ik} \delta_{jl}. \quad (33)$$

$$[E_{ij}, E_{kl}] = E_{ij}E_{kl} - E_{kl}E_{ij} = \delta_{in}\delta_{jm}\delta_{km}\delta_{lp} - \delta_{kn}\delta_{lm}\delta_{im}\delta_{jp} = \delta_{jk}E_{il} - \delta_{il}E_{kj}. \quad (34)$$

Данную алгебру можно рассматривать как алгебру Ли группы GL_∞ , определённой следующим образом

$$GL_\infty = \left\{ A = (a_{ij})_{i,j \in \mathbb{Z}} \mid \begin{array}{l} A \text{ обратима и все числа } a_{ij} - \delta_{ij}, \\ \text{кроме конечного числа, равны } 0 \end{array} \right\}. \quad (35)$$

Представление R группы GL_∞ и представление ρ алгебры Ли gl_∞ в пространстве \mathcal{F} задаётся формулами

$$R(A)(\psi_{i_1} \wedge \psi_{i_2} \wedge \dots) = A\psi_{i_1} \wedge A\psi_{i_2} \wedge \dots, \quad (36)$$

$$\rho(a)(\psi_{i_1} \wedge \psi_{i_2} \wedge \dots) = a\psi_{i_1} \wedge \psi_{i_2} \wedge \dots + \psi_{i_1} \wedge a\psi_{i_2} \wedge \dots + \dots \quad (37)$$

Последние две формулы связаны соотношением

$$e^{\rho(a)} = R(e^a), \quad a \in gl_\infty. \quad (38)$$

Представлением данной алгебры на введённом пространстве Фока будет

$$\rho(E_{ij}) = \psi_i \psi_j^* \quad (39)$$

т. к.

$$\begin{aligned} [\psi_i \psi_j^*, \psi_k \psi_l^*] &= \psi_i \psi_j^* \psi_k \psi_l^* - \psi_k \psi_l^* \psi_i \psi_j^* = \\ &= \psi_i (\delta_{jk} - \psi_k \psi_j^*) \psi_l^* - \psi_k \psi_l^* \psi_i \psi_j^* = \\ &= \delta_{jk} \psi_i \psi_l^* - \psi_k \psi_i \psi_l^* \psi_j^* - \psi_k \psi_l^* \psi_i \psi_j^* = \\ &= \delta_{jk} \psi_i \psi_l^* - \delta_{il} \psi_k \psi_j^*. \end{aligned} \quad (40)$$

Пользуясь формулой (36) и стандартным исчислением внешних степеней найдём оператор представления R элемента $A \in GL_\infty$ в пространстве \mathcal{F}

$$\begin{aligned} R(A)(\psi_{i_m} \wedge \psi_{i_{m-1}} \wedge \dots) &= \sum_{j_m, j_{m-1}, \dots \in \mathbb{Z}} A_{j_m, i_m} \psi_{j_m} \wedge A_{j_{m-1}, i_{m-1}} \psi_{j_{m-1}} \wedge \dots = \\ &= \sum_{j_m > j_{m-1} > \dots} \left(\det A_{j_m, j_{m-1}, \dots}^{i_m, i_{m-1}, \dots} \right) \psi_{j_m} \wedge \psi_{j_{m-1}} \wedge \dots \end{aligned} \quad (41)$$

где $A_{j_m, j_{m-1}, \dots}^{i_m, i_{m-1}, \dots}$ означает матрицу, состоящую из элементов, стоящих на пересечении строк j_m, j_{m-1}, \dots и столбцов i_m, i_{m-1}, \dots матрицы A .

В альтернативных обозначениях

$$R(A) |m, \lambda\rangle = \sum_{\mu \in \text{Par}} \left(\det A_{\mu_1+m, \mu_2+m-1, \dots}^{\lambda_1+m, \lambda_2+m-1, \dots} \right) |m, \mu\rangle. \quad (42)$$

Определим также бóльшую алгебру Ли $\bar{\mathfrak{a}}_\infty$. Элементами данной алгебры будут бесконечномерные матрицы, у которых конечное количество диагоналей отличны от нулевых:

$$\bar{\mathfrak{a}}_\infty = \{(a_{ij}) \mid i, j \in \mathbb{Z}, a_{ij} = 0 \text{ при } |i - j| \gg 0\}. \quad (43)$$

$\bar{\mathfrak{a}}_\infty$ является алгеброй Ли с матричным коммутатором в качестве операции, содержащей алгебру Ли gl_∞ как подалгебру.

Далее рассмотрим центральное расширение алгебры Ли $\bar{\mathfrak{a}}_\infty$, а именно алгебру Ли \mathfrak{a}_∞ , определённую как

$$\mathfrak{a}_\infty = \bar{\mathfrak{a}}_\infty \oplus \mathbb{C}c \quad (44)$$

с центром $\mathbb{C}c$ и скобкой

$$[a, b] = ab - ba + \alpha(a, b)c. \quad (45)$$

Функцию $\alpha(a, b)$ называют *два-коциклом*, для корректности определения скобки Ли на неё накладываются дополнительные ограничения:

- Антисимметричность скобки влечёт антисимметричность $\alpha(a, b)$.
- Линейность скобки по обоим аргументам влечёт аналогичную линейность $\alpha(a, b)$.
- Из тождества Якоби скобки

$$[[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = 0 \quad (46)$$

следует, что

$$[xy - yx + \alpha(x, y)c, z] + [yz - zy + \alpha(y, z)c, x] + [zx - xz + \alpha(z, x)c, y] = 0 \quad (47)$$

и, как итог,

$$\alpha(xy - yx, z) + \alpha(yz - zy, x) + \alpha(zx - xz, y) = 0. \quad (48)$$

Центр c в алгебре бесконечномерных матриц — бесконечномерная единичная матрица I . Два-коцикл $\alpha(a, b)$ определим на матрицах E_{ij} как

$$\begin{aligned}\alpha(E_{ij}, E_{ji}) &= -\alpha(E_{ji}, E_{ij}) = 1 \quad \text{при } i \leq 0, j \geq 1, \\ \alpha(E_{ij}, E_{kl}) &= 0 \quad \text{во всех остальных случаях.}\end{aligned}\tag{49}$$

Антисимметричность, линейность по каждому аргументу данного два-коцикла очевидны.

Покажем, что представлением данной алгебры на пространстве Фока будет

$$\hat{\rho}(E_{ij}) = :\psi_i \psi_j^* :. \tag{50}$$

По определению свёртки

$$:\psi_i \psi_j^* : = \psi_i \psi_j^* - \overline{\psi_i \psi_j^*}. \tag{51}$$

Для неё выполняется

$$\overline{\psi_i \psi_j^*} = \overline{\psi_i} \overline{\psi_j^*} \langle 0|0 \rangle = \langle 0|\overline{\psi_i \psi_j^*}|0 \rangle = \langle 0|\psi_i \psi_j^* - :\psi_i \psi_j^* :|0 \rangle = \langle 0|\psi_i \psi_j^*|0 \rangle. \tag{52}$$

Откуда

$$\overline{\psi_i \psi_i^*} = 1 \quad \text{при } i \leq 0, \tag{53}$$

$$\overline{\psi_i \psi_j^*} = 0 \quad \text{во всех остальных случаях.} \tag{54}$$

Тогда

$$\begin{aligned}[:\psi_i \psi_j^* :, :\psi_k \psi_l^* :] &= [\psi_i \psi_j^* - \overline{\psi_i \psi_j^*}, \psi_k \psi_l^* - \overline{\psi_k \psi_l^*}] = \\ &= [\psi_i \psi_j^*, \psi_k \psi_l^*] = \delta_{jk} \psi_i \psi_l^* - \delta_{il} \psi_k \psi_j^* = \\ &= \delta_{jk} (: \psi_i \psi_l^* : + \overline{\psi_i \psi_l^*}) - \delta_{il} (: \psi_k \psi_j^* : + \overline{\psi_k \psi_j^*}) = \\ &= \delta_{jk} : \psi_i \psi_l^* : - \delta_{il} : \psi_k \psi_j^* : + \delta_{jk} \overline{\psi_i \psi_l^*} - \delta_{il} \overline{\psi_k \psi_j^*} = \\ &= \delta_{jk} : \psi_i \psi_l^* : - \delta_{il} : \psi_k \psi_j^* : + \alpha(E_{ij}, E_{kl}). \end{aligned} \tag{55}$$

В последнем переходе мы воспользовались соотношением

$$\alpha(E_{ij}, E_{kl}) = \delta_{jk} \overline{\psi_i \psi_l^*} - \delta_{il} \overline{\psi_k \psi_j^*}, \tag{56}$$

верность которого следует из (49), (53) и (54). Далее проверим, что скобка с определённым выше два-коциклом удовлетворяет тождеству Якоби

$$\begin{aligned}\alpha(E_{ij} E_{kl} - E_{kl} E_{ij}, E_{mn}) + \alpha(E_{kl} E_{mn} - E_{mn} E_{kl}, E_{ij}) + \\ + \alpha(E_{mn} E_{ij} - E_{ij} E_{mn}, E_{kl}) = 0, \end{aligned} \tag{57}$$

$$\alpha(\delta_{jk}E_{il} - \delta_{il}E_{kj}, E_{mn}) + \alpha(\delta_{lm}E_{kn} - \delta_{kn}E_{ml}, E_{ij}) + \alpha(\delta_{ni}E_{mj} - \delta_{mj}E_{in}, E_{kl}) = 0, \quad (58)$$

$$\begin{aligned} & \delta_{jk}\alpha(E_{il}, E_{mn}) - \delta_{il}\alpha(E_{kj}, E_{mn}) + \\ & + \delta_{lm}\alpha(E_{kn}, E_{ij}) - \delta_{kn}\alpha(E_{ml}, E_{ij}) + \\ & + \delta_{ni}\alpha(E_{mj}, E_{kl}) - \delta_{mj}\alpha(E_{in}, E_{kl}) = 0, \end{aligned} \quad (59)$$

$$\begin{aligned} & \delta_{jk}(\delta_{lm}\overline{\psi_i\psi_n^*} - \delta_{in}\overline{\psi_m\psi_l^*}) - \delta_{il}(\delta_{jm}\overline{\psi_k\psi_n^*} - \delta_{kn}\overline{\psi_m\psi_j^*}) + \\ & + \delta_{lm}(\delta_{in}\overline{\psi_k\psi_j^*} - \delta_{kj}\overline{\psi_i\psi_n^*}) - \delta_{kn}(\delta_{il}\overline{\psi_m\psi_j^*} - \delta_{mj}\overline{\psi_i\psi_l^*}) + \\ & + \delta_{ni}(\delta_{jk}\overline{\psi_m\psi_l^*} - \delta_{lm}\overline{\psi_k\psi_j^*}) - \delta_{mj}(\delta_{kn}\overline{\psi_i\psi_l^*} - \delta_{il}\overline{\psi_k\psi_n^*}) = 0, \end{aligned} \quad (60)$$

$$0 = 0. \quad (61)$$

Оказывается, можно построить изоморфизм между описанным фермионным пространством Фока \mathcal{F} и бозонным пространством \mathcal{B} полиномов от x_1, x_3, \dots, z и z^{-1} :

$$\Phi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{B} = \mathbb{C}[x_1, x_2, \dots; z, z^{-1}]. \quad (62)$$

Отображение Φ буквально задаёт бозонно-фермионное соответствие. Как следствие, можно построить бозонные представления $\rho^B = \Phi\rho\Phi^{-1}$ и $\hat{\rho}^B = \Phi\hat{\rho}\Phi^{-1}$ на данном пространстве.

Определим

$$H(\mathbf{t}) = \sum_{k=1}^{\infty} t_k H_k, \quad H_n = \sum_{k \in \mathbb{Z}} :\psi_k \psi_{k+n}^*:. \quad (63)$$

Тогда

$$\begin{aligned} H_n &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} :\psi_k \psi_{k+n}^* = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (\psi_k \psi_{k+n}^* - \overline{\psi_k} \psi_{k+n}^*) = \\ &= \begin{cases} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \psi_k \psi_{k+n}^*, & n \neq 0, \\ \sum_{i>0} \psi_k \psi_k^* - \sum_{i \leq 0} \psi_k^* \psi_k, & n = 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (64)$$

$$e^{H(\mathbf{t})} = \exp\left(\sum_{k \geq 1} t_k H_k\right) = \exp\left(\sum_{k \geq 1} t_k H_1^k\right) = \sum_{k \geq 0} s_k(\mathbf{t}) H_k. \quad (65)$$

$$\left(e^{H(\mathbf{t})}\right)_{mn} = s_{n-m}(\mathbf{t}). \quad (66)$$

Получаем явный вид бозонно-фермионного соответствия (TODO привести мотивацию)

$$\begin{aligned} \Phi(|m, \lambda\rangle) &= z^m \langle m | e^{H(\mathbf{t})} | m, \lambda \rangle = \\ &= z^m \langle m | \sum_{\mu \in \text{Par}} \det \left[\left(e^{H(\mathbf{t})}\right)_{\mu_1+m, \mu_2+m-1, \dots}^{\lambda_1+m, \lambda_2+m-1, \dots} \right] | m, \mu \rangle = \\ &= z^m \det \left[\left(e^{H(\mathbf{t})}\right)_{m, m-1, \dots}^{\lambda_1+m, \lambda_2+m-1, \dots} \right] = z^m \det \left[\left(e^{H(\mathbf{t})}\right)_{m, m-1, \dots}^{\lambda_1+m, \lambda_2+m-1, \dots} \right] = \\ &= z^m \det_{i,j} s_{\lambda_i-i+j}(\mathbf{t}) = z^m s_{\lambda}(\mathbf{t}). \end{aligned} \quad (67)$$

Рассмотрим выражение

$$\begin{aligned} \langle 0 | e^{H(\mathbf{t})} G | 0 \rangle &= \langle 0 | e^{H(\mathbf{t})} \sum_{\lambda \in \text{Par}} \det \left(G_{\lambda_1, \lambda_2-1, \dots}^{0, -1, \dots} \right) | 0, \mu \rangle = \\ &= \sum_{\lambda \in \text{Par}} \det \left(G_{\lambda_1, \lambda_2-1, \dots}^{0, -1, \dots} \right) \langle 0 | e^{H(\mathbf{t})} | 0, \lambda \rangle = \sum_{\lambda \in \text{Par}} \det \left(G_{\lambda_1, \lambda_2-1, \dots}^{0, -1, \dots} \right) s_{\lambda}(\mathbf{t}). \end{aligned} \quad (68)$$

Сравнивая с τ -функцией в бозонном представлении (19) можно получить, что

$$\tau(\mathbf{t}) = \langle 0 | e^{H(\mathbf{t})} G | 0 \rangle \quad \text{при} \quad C_{\lambda} = \det \left(G_{\lambda_1, \lambda_2-1, \dots}^{0, -1, \dots} \right). \quad (69)$$

Для гипергеометрических τ -функций выполняется

$$G = e^{A(\beta)}, \quad A(\beta) = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k A_k. \quad (70)$$

$$A_k = \oint \frac{dz}{2\pi i} \cdot \left[\left(\frac{1}{z} r(D) \right)^k \psi(z) \right] \cdot \psi^*(z), \quad (71)$$

где $D = z \frac{d}{dz}$.

2 Квантовая деформация иерархии КП

В \hbar -деформированной иерархии КП связь между F и τ будет следующей

$$F^{\hbar}(\mathbf{t}) = \hbar^2 \ln(\tau^{\hbar}(\mathbf{t})). \quad (72)$$

Уравнения иерархии \hbar -КП получаются из иерархии КП заменой $\mathbf{t} \rightarrow \mathbf{t}/\hbar$. Первое уравнение деформированной иерархии

$$\frac{1}{4} \frac{\partial^2 F}{\partial t_2^2} = \frac{1}{3} \frac{\partial^2 F}{\partial t_1 \partial t_3} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial t_1^2} \right)^2 - \frac{\hbar^2}{12} \frac{\partial^4 F}{\partial t_1^4}. \quad (73)$$

τ -функции иерархии \hbar -КП

$$\tau^{\hbar}(\mathbf{t}) = \sum_{\lambda} C_{\lambda}^{\hbar} s_{\lambda} \left(\frac{\mathbf{t}}{\hbar} \right), \quad (74)$$

где C_{λ}^{\hbar} удовлетворяют соотношениям Плюкера. В разделах далее будем добавлять \hbar в τ -функции так, чтобы полученные τ^{\hbar} -функции удовлетворяли \hbar -деформированной иерархии, а также имели «хорошее» разложение по степеням \hbar .

2.1 Фермионный формализм

Рецепт деформации τ -функций в фермионном формализме

$$\tau^{\hbar}(\mathbf{t}) = \langle 0 | e^{H(\mathbf{t}/\hbar)} \exp \left(\frac{1}{\hbar} A^{\hbar} \right) | 0 \rangle, \quad (75)$$

где

$$A^{\hbar} = \oint \frac{dz}{2\pi i} : \hat{A} \left(z, \hbar \frac{d}{dz} \right) \psi(z) : \cdot \psi^*(z) : \quad (76)$$

и

$$\hat{A} \left(z, \hbar \frac{d}{dz} \right) = \sum_{i \in \mathbb{Z}, j \geq 0} a_{ij} z^i (\hbar \partial_z)^j. \quad (77)$$

2.2 τ -функция чисел Гурвица

Формула Римана-Гурвица

$$2g - 2 = m - |\mu| - l(\mu), \quad (78)$$

позволяет нам разделить вклады различных родов g в производящую функцию. Каждая точка простого ветвления даёт вклад $+1$ к степени \hbar , каждый цикл длины μ_i даёт вклад $-\mu_i - 1$ к степени \hbar . Получаем замену переменных

$$t_{\mu_i} \rightarrow \hbar^{-\mu_i-1} t_{\mu_i}, \quad u \rightarrow \hbar u. \quad (79)$$

Умножая производящую функцию на \hbar^2 , чтобы избавиться от отрицательных степеней \hbar в разложении, получаем

$$F_H^{\hbar}(\mathbf{t}) = \sum_{g=0}^{\infty} \hbar^{2g} F_H^g(\mathbf{t}). \quad (80)$$

Покажем, что топологической деформацией (79) из τ -функции иерархии КП (26) действительно можно получить τ -функцию иерархии \hbar -КП (74). Имеем

$$\tau_H^{\hbar}(\mathbf{t}) = \sum_{\lambda} e^{u\hbar c(\lambda)} s_{\lambda}(\beta_k = \delta_{k,1}) s_{\lambda}\left(\frac{t_1}{\hbar^2}, \frac{t_2}{\hbar^3}, \dots\right). \quad (81)$$

Можно показать (это вопросов не вызывает), что

$$\tau_H^{\hbar}(\mathbf{t}) = \sum_{\lambda} e^{u\hbar c(\lambda)} s_{\lambda}\left(\frac{1}{\hbar}, 0, 0, \dots\right) s_{\lambda}\left(\frac{\mathbf{t}}{\hbar}\right) \quad (82)$$

и что коэффициенты

$$C_{\lambda}^{\hbar} = e^{u\hbar c(\lambda)} s_{\lambda}\left(\beta_k = \frac{\delta_{k,1}}{\hbar}\right) \quad (83)$$

удовлетворяют соотношениям Плюкера. Это показывает, что \hbar -деформацией мы получаем τ -функцию иерархии \hbar -КП. Для найденной функции было явно посчитано разложение по \mathbf{t} для первых порядков и проверено, что в неё действительно входят только чётные степени \hbar .

3 Иерархия ВКП

3.1 Билинейное тождество ВКП

Билинейное тождество иерархии ВКП

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \oint e^{\xi^{\mathbf{n}}(\mathbf{t}-\mathbf{t}', k)} \tau_{ВКП}(\mathbf{t} - 2[k^{-1}]) \tau_{ВКП}(\mathbf{t}' + 2[k^{-1}]) \frac{dk}{k} = \\ = \tau_{ВКП}(\mathbf{t}) \tau_{ВКП}(\mathbf{t}'), \end{aligned} \quad (84)$$

где

$$\mathbf{t} \pm [k^{-1}] \stackrel{\text{онп}}{=} \left\{ t_1 \pm k^{-1}, t_2 \pm \frac{1}{2}k^{-2}, t_3 \pm \frac{1}{3}k^{-3}, \dots \right\} \quad (85)$$

и

$$\xi^{\mathbb{H}}(\mathbf{t}, k) = \sum_{j \in \mathbb{Z}_{\text{неч}}^+} t_j k^j. \quad (86)$$

Первое уравнение иерархии ВКП в терминах производных Хироты

$$(D_1^6 - 5D_1^3 D_3 - 5D_3^2 + 9D_1 D_5) \tau_{\text{ВКП}} \cdot \tau_{\text{ВКП}}. \quad (87)$$

Что можно переписать как

$$\begin{aligned} -60 \left(\frac{\partial^2 F}{\partial t_1^2} \right)^3 - 30 \frac{\partial^4 F}{\partial t_1^4} \frac{\partial^2 F}{\partial t_1^2} + 30 \frac{\partial^2 F}{\partial t_1 \partial t_3} \frac{\partial^2 F}{\partial t_1^2} - \frac{\partial^6 F}{\partial t_1^6} + \\ + 5 \frac{\partial^2 F}{\partial t_3^2} - 9 \frac{\partial^2 F}{\partial t_1 \partial t_5} + 5 \frac{\partial^4 F}{\partial t_1^3 \partial t_3} = 0. \end{aligned} \quad (88)$$

3.2 Q -полиномы Шура, соотношения Плюккера ВКП, гипергеометрические $\tau^{\text{ВКП}}$ -функции

Соотношения Плюккера для ВКП

$$\begin{aligned} c_{[\alpha_1, \dots, \alpha_k]} c_{[\alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4]} - c_{[\alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta_1, \beta_2]} c_{[\alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta_3, \beta_4]} + \\ + c_{[\alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta_1, \beta_3]} c_{[\alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta_2, \beta_4]} - c_{[\alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta_1, \beta_4]} c_{[\alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta_2, \beta_3]} = 0. \end{aligned} \quad (89)$$

Простейшее соотношение Плюккера

$$c_{\emptyset} c_{\boxplus\boxplus} - c_{\square} c_{\boxplus\boxminus} + c_{\boxminus} c_{\boxplus\boxplus} - c_{\boxminus\boxminus} c_{\boxplus} = 0. \quad (90)$$

Проверено, что Q -полиномы Шура действительно удовлетворяют простейшему соотношению Плюккера.

Для определения гипергеометрических τ -функций зададим функцию

$$r_{\lambda} = \prod_{w \in \lambda} r(c(w)), \quad (91)$$

где

$$c(w) = j, \quad 1 \leq i \leq l(\lambda), \quad 1 \leq j \leq \lambda_i. \quad (92)$$

Визуализация функции $c(w)$ на таблице Юнга:

1	2	3	4
1	2	3	
1	2		

Гипергеометрическими τ -функциями ВКП будем называть функции вида

$$\tau(\mathbf{t}) = \sum_{\lambda} r_{\lambda} Q_{\lambda}(\beta) Q_{\lambda}(\mathbf{t}). \quad (93)$$

Данные функции действительно решают иерархию ВКП, т. к. Q -полиномы Шура удовлетворяют соотношениям Плюккера ВКП, а множители $r(c(w))$ выносятся как общие. Например, для простейшего соотношения Плюккера общим множителем будет

$$r(1)^3 r(2)^2 r(3). \quad (94)$$

3.3 τ -функция спиновых чисел Гурвица

Следующая τ -функция является решением иерархии ВКП:

$$\tau(\mathbf{p}, \bar{\mathbf{p}}) = \sum_{R \in \text{SP}} \left(e^{u[\Phi_R([3]) + \frac{1}{2}\Phi_R([1, 1])]} \right) Q_R\left(\frac{\mathbf{p}}{2}\right) Q_R\left(\frac{\bar{\mathbf{p}}}{2}\right). \quad (95)$$

4 Квантовая деформация иерархии ВКП

Аналогично деформации иерархии КП получаем первое уравнение \hbar -ВКП

$$\begin{aligned} -60 \left(\frac{\partial^2 F}{\partial t_1^2} \right)^3 - 30\hbar^2 \frac{\partial^4 F}{\partial t_1^4} \frac{\partial^2 F}{\partial t_1^2} + 30 \frac{\partial^2 F}{\partial t_1 \partial t_3} \frac{\partial^2 F}{\partial t_1^2} - \hbar^4 \frac{\partial^6 F}{\partial t_1^6} + \\ + 5 \frac{\partial^2 F}{\partial t_3^2} - 9 \frac{\partial^2 F}{\partial t_1 \partial t_5} + 5\hbar^2 \frac{\partial^4 F}{\partial t_1^3 \partial t_3} = 0. \end{aligned} \quad (96)$$