Эволюционная задача в гильбертовом пространстве

Драчов Ярослав
Факультет общей и прикладной физики МФТИ

4 декабря 2020 г.

Пусть H — гильбертово пространство, т. е. это евклидово пространство с нормой $\|f\| = \sqrt{(f, f)}$, $f \in H$, полное относительно этой нормы (т. е. любая фундаментальная последовательность из H сходится в H:

$$\{f_n\} \subset H : \|f_n - f_m\| \to 0 \quad (n \to \infty) \implies \exists f \in H : \|f_n - f\| \to 0.$$

Норма в H порождена скалярным произведением

$$(f, g) \in \mathbb{C} \quad \forall f, g \in H.$$

Типичным примеров гильбертова пространства является $H = \mathbb{L}_2(E)$ для $E \subset \mathbb{R}^m$ — измеримого по Лебегу множества.

$$\mathbb{L}_2(E) = \left\{ f : E \to \mathbb{C} \mid \int\limits_E |f|^2 d\mu < +\infty \right\}.$$

$$(f, g) = \int\limits_E f\overline{g} d\mu, \|f\|^2 = \int\limits_E |f|^2 d\mu.$$

Мы будем рассматривать H-значные функции, определённые на неотрицательных вещественных аргументах $t \geqslant 0$ (t — «время»)

$$\mathcal{U} : [0, +\infty) \to H,$$

т. е. $\forall t \geqslant 0$ определено $\mathcal{U}(t) \in H$.

Функция $\mathcal{U} : [0, +\infty) \to H$ называется непрерывной в точке $t_0 \geqslant 0$, если

$$\lim_{\substack{t \to t_0 \\ t \geqslant 0}} \|\mathcal{U}(t) - \mathcal{U}(t_0)\| = 0$$

Функция $\mathcal{U}(t) \in H$, $t \geqslant 0$ называется дифференцируемой в $t_0 > 0$, если $\exists v_0 \in H$ такое, что

$$\lim_{\Delta t \to 0} \left| \frac{\mathcal{U}(t_0 + \Delta t) - \mathcal{U}(t_0)}{\Delta t} - v_0 \right| = 0.$$

Если $\mathcal{U}(t)$ дифференцируема в $t_0 > 0$, то вектор $v_0 \in H$ обоозначаем

$$\mathcal{U}'(t_0) = v_0,$$

т. е.
$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\mathcal{U}(t_0+\Delta t)-\mathcal{U}(t_0)}{\Delta t}=\mathcal{U}'(t_0),$$
где предел *по норме* пространства H.

Как правило мы будем иметь дело с элементами H, представленными разложением по заданному ортогональному базису $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}\subset H$ (в этом случае H — бесконечномерное ГП)

Пусть $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ — ортогональный базис в H. Тогда $\forall w\in H$ раскладывается по нему в ряд Фурье, сходящийся к w по норме H :
$$w=\sum_{n=1}^{\infty}w_ne_n,\qquad w_n=\frac{(w,e_n)}{(e_n,e_n)}.$$
$$\left\|w-\sum_{n=1}^{N}w_ne_n\right\|\to 0\qquad (n\to\infty).$$
$$\|w\|^2=\sum_{n=1}^{\infty}|w_n|^2\|e_n\|2.$$
Это равенство Парсеваля.

Вообще для числовой последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathbb{C}$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_ne_n$ сходится в H если и только если
$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2\|e_n\|^2<+\infty.$$
Действительно,
$$\exists\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}a_ne_n\in H\Leftrightarrow\left\{S_N=\sum_{n=1}^{N}a_ne_n\right\}_{N=1}^{\infty}\text{ фундаментальна в }H\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\|S_N-S_{N+M}\|^2=\left\|\sum_{n=N+1}^{N+M}a_ne_n\right\|^2=\sum_{n=N+1}^{N+M}|a_n|^2\|e_n\|^2\leqslant\varepsilon\quad\forall N\geqslant N(\varepsilon)\forall M.$$
То есть
$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2\|e_n\|^2<+\infty\Leftrightarrow\exists\lim_{N\to\infty}S_N\ \underbrace{\overset{\text{def}}{=}\sum_{n=1}^{\infty}a_ne_n\in H}_{\substack{\text{это обозначение}\\ \text{для предела } S_N \text{ в } H\\ \text{по норме } H}}\ .$$
Таким образом, если $H\ni\mathcal{U}(t)$, $t\geqslant 0$ — H-значная функция, а $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ — ортогональный базис H, то
$$\forall t\geqslant 0\quad \mathcal{U}(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\mathcal{U}_n(t)e_n,$$
где
$$\mathcal{U}_n(t)=\frac{(\mathcal{U}(t),e_n)}{(e_n,e_n)}$$

— коэффициенты Фурье.

При этом в силу равенства Парсеваля, имеем

$$\|\mathcal{U}(t)\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\mathcal{U}_n(t)|^2 \|e_n\|^2.$$

Пусть $\mathcal{U}(t)$ дифференцируема в $t > 0$ (по норме H), т. е.

$$\exists \underbrace{\mathcal{U}'(t)}_{\in H} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathcal{U}(t+\Delta t) - \mathcal{U}(t)}{\Delta t}.$$

Тогда $\forall n \in \mathbb{N}$ имеем

$$\frac{\mathcal{U}_n(t+\Delta t) - \mathcal{U}_n(t)}{\Delta t} = \frac{1}{(e_n, e_n)} \underbrace{\left(\underbrace{\frac{\mathcal{U}(t+\Delta t) - \mathcal{U}(t)}{\Delta t}}_{\xrightarrow{\|\,\|} \mathcal{U}'(t)}, e_n \right)}_{\xrightarrow[(\Delta t \to 0)]{\mathbb{C}} (\mathcal{U}'(t), e_n)}.$$

Это следует из неравенства КБШ:

$$\left| \left(\frac{\mathcal{U}(t+\Delta t) - \mathcal{U}(t)}{\Delta t}, e_n \right) - (\mathcal{U}'(t), e_n) \right| =$$

$$= \left| \left(\frac{\mathcal{U}(t+\Delta t) - \mathcal{U}(t)}{\Delta t} - \mathcal{U}'(t), e_n \right) \right| \overset{\text{КБШ}}{\leqslant}$$

$$\leqslant \underbrace{\left\| \frac{\mathcal{U}(t+\Delta t) - U(t)}{\Delta t} - \mathcal{U}'(t) \right\|}_{\xrightarrow[\Delta t \to 0]{} 0!} \cdot \|e_n\|.$$

Итак, если H-значная функция $\mathcal{U}(t) \in H$, $t \geqslant 0$ разложена в ряд Фурье по ортог. базису $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ в H и дифференцируема при $t > 0$ (по норме H, то её коээфициенты Фурье являются дифференцируемыми скалярными функциями, т. е. $\forall \in \mathbb{N} \quad \exists \mathcal{U}_n'(t) \in \mathbb{C}$, причём

$$\mathcal{U}_n'(t) = \frac{(\mathcal{U}_n'(t), e_n)}{(e_n, e_n)}$$

— коэффициенты Фурье производной $\mathcal{U}'(t) \in H$:

$$\mathcal{U}'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{U}_n'(t) e_n, \quad t > 0.$$

Пусть теперь $L \subset H$ — некоторое линейное подпространство (далее — просто подпространство) и отображение $A : L \to H$ линейно на L, т. е. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C} \quad \forall f, g \in L$ выполнено $\alpha f + \beta g \in L$ и $A(\alpha f + \beta g) = \alpha A(f) + \beta A(g)$. Тогда $A : L \to H$ называется линейным оператором, а подмножество L называется его областью определения и обозначается $D(A) \equiv L$, т. е.

$$A : D(A) \to H.$$

Постановка эволюциоонной задачи (на примере уравнения Шрёдингера): пусть H — гильбертово пространство, $A : D(A) \to H$ — линейный оператор (здесь $D(A) \subset H$ — подпространство-областьопределения оператора A). Пусть $\mathcal{U}_0 \in H$ — заданный вектор. Требуется найти H-значную функцию $\mathcal{U} : (0, +\infty) \to H$, дифференцируемую (по норме H) $\forall t > 0$, удовлетворяющую вложению

$$\mathcal{U}(t) \in D(A) \forall t > 0$$

и равенствам

$$\begin{cases} i\dfrac{d}{dt}\mathcal{U}(t) = A(\mathcal{U}(t) \quad \forall t > 0, \\ \mathcal{U}(t_0) = \mathcal{U}_0, \end{cases}$$

т.е. $\forall t > 0 \Leftrightarrow i\mathcal{U}'(t) = A\mathcal{U}(t)$, $\mathcal{U}(t) \in D(A)$ и выполнено начальное условие $\lim_{t\to+0} \|\mathcal{U}(t) - \mathcal{U}_0\| = 0$. Значение $\mathcal{U}_0 \in H$ естественно считать начальным значение $\mathcal{U}(t)$ при $t = 0$, т. е. $\mathcal{U}(0) = \mathcal{U}_0$, при этом равенство $\mathcal{U}(+0) = \mathcal{U}_0 \equiv \mathcal{U}(0)$ означает непрерывность $\mathcal{U}(t)$ при $t = 0$ (относительно H -нормы)

Замечание. Если бы мы решали задачу Коши для обыкновенного числового дифф. уравнения

$$\begin{cases} iy'(t) = ay(t), \quad t > 0, \text{ где} \\ y(+0) = y_0 \quad y : [0, +\infty) \to \mathbb{C}, y_0 \in \mathbb{C} \end{cases}$$

то мы моментально имеем классическое дифференцируемое при $t > 0$ решение

$$y(t) = e^{-iat}y_0, \quad t \geqslant 0,$$

удовлетворяющее начальному условию

$$y(+0) = y_0 \equiv y(0).$$

Можно ли, действуя по аналогии, определить «оператор эволюции»

$$U(t) = \exp(-itA) : H \to H$$

так, чтобы $\forall \mathcal{U}_0 \in H$ функция $\mathcal{U}(t) = U(t)\mathcal{U}_0 = \exp(-itA)\mathcal{U}_0$ была бы решением эволюционной задачи для уравнения Шрёдингерас заданнным оператором A? Например можно попробовать воспользоваться разложением Тейлора комплексной экспоненты $\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, z \in \mathbb{C}$ представляющее собой абсолютно сходящийся в $\mathbb{C}$ степенной ряд, и записмть нечто такое:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-it)^n}{n!} A^n \mathcal{U}_0$$

для $\mathcal{U}_0 \in H$. Но тогда возникает естественная трудность с областью определения оператора A: даже если $\mathcal{U}_0 \in D(A)$ и определён вектор $A(\mathcal{U}_0) \in H$, то разве $A(\mathcal{U}_0) \in D(A)$, чтобы вычислить $A^2(\mathcal{U}_0) = A(A(\mathcal{U}_0))$? Необходимо $\forall n \in \mathbb{N}$ требовать

$$A^{n-1}(\mathcal{U}_0) \in D(A),$$

где естественно

$$A^0(\mathcal{U}_0) = \mathcal{U}_0 \in D(A)$$

и далее $A^{n-1}(\mathcal{U}_0) \in D(A) \implies \exists A^n(\mathcal{U}_0) = A(A^{n-1})(\mathcal{U}_0)) \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Только в этом случае имеем смысл обсуждать

$$\exists ? \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-it)^n A^n(\mathcal{U}_0)}{n!} \in H?$$

Также требования на $\mathcal{U}_0$ довольно обременительны и неудобны, то есть определение $\exp(-itA)$ через степенной ряд для оператора $A : D(A) \to H$ с областью определения $D(A) \neq H$ *явно неудачное.* Тем не менее, для наших же операторов такое определение $\exp(-itA)$ даёт результат.

Естественно, потребуем $D(A) = H$, то есть оператор A определён на *всём* H. Далее потребуем непрерывность оператора $A : H \to H$ в нуле:

$$\begin{gathered} H \ni f_n \xrightarrow{\|\|} 0 \implies A(f_n) \xrightarrow{\|\|} 0 \\ \Updownarrow \\ \forall \varepsilon > 0 \quad \forall \delta_\varepsilon > 0 \quad \forall f \in H : \|f\| \leqslant \delta_\varepsilon \hookrightarrow \|A(f)\| \leqslant \varepsilon. \end{gathered}$$

Тогда, в силу линейнойсти A, этот оператор будет непрерывен на всём H, более того, он даже будет липшицевым на H:

$$\forall f \in H \setminus \{0\} \implies \|A\left(\delta_\varepsilon \frac{f}{\|f\|}\right)\| \leqslant \varepsilon \implies \|A(f)\| \leqslant \frac{\varepsilon}{\delta_\varepsilon} \|f\|.$$

В частности для $\varepsilon = 1$ получаем $\|A(f)\| \leqslant \frac{1}{\delta_1} \|f\| \quad \forall f \in H$ Следовательно

$$\|A(f) - A(g)\| = \|A(f-g)\| \leqslant \frac{1}{\delta_1} \|f-g\| \quad \forall f, g \in H.$$

Следовательно A — липшицев на H с коонстантой $\frac{1}{\delta_1}$.

Определение. Пусть $A : D(A) \to H$ — ЛО

$$\|A\| \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\substack{\|f\|=1 \\ f \in D(A)}} \|A(f)\| = \sup_{\substack{f \in D(A) \\ f \neq 0}} \frac{\|A(f)\|}{\|f\|}.$$

$\|A\| < +\infty \Leftrightarrow A$ — непрерывен в $0 \in D(A) \Leftrightarrow A$ — непрерывен на $D(A)$.

$\|A\| < +\infty \implies \|A\|$ — это наименьшая константа Липшица непрерывного на $D(A)$ линейного оператора A,

$$\|A(f)\| \leqslant \|A\| \cdot \|F\| \quad \forall f \in D(A)$$

(если $\|A\| < +\infty$!). Вернёмся к непрерывному оператору $A : H \to H$. $\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall f \in H$ имеем:

$$\|A^n(f)\| = \|A(A^{n-1}(f))\| \leqslant \|A\| \cdot \|A^{n-1}(f)\| \leqslant \ldots \leqslant \|A\|^n \|f\|,$$

т. е.

$$\|A^n(f)\| \leqslant \|A\|^n \|f\| \quad f \in H.$$

Следовательно,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|\frac{(-it)^n A^n(f)}{n!}\| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n \|A\|^n}{n!} \|f\| = \underbrace{\exp(t\|A\|) \cdot \|f\|}_{<+\infty} \implies \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-it)^n A^n(f)}{n!}$$

сходится абсолютно $\forall f \in H$! Тогда для частичной суммы

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} \frac{(-it)^n A^n(f)}{n!}$$

получаем

$$\|S_N - S_{N+M}\| = \|\sum_{n=N+1}^{N+M} \frac{(-it)^n A^n(f)}{n!}\| \leqslant \sum_{n=N+1}^{N+M} \frac{t^n \|A\|^n}{n!} \|f\| \leqslant \varepsilon \quad N \geqslant N(\varepsilon) \forall M.$$

Таким образом, последовательность

$$S_N = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-it)^n A^n(f)}{n!}$$

фундаментальна в полном пространстве H, т. е.

$$\exists \underbrace{\lim_{N\to\infty} S_N}_{\text{по норме } H} \overset{\text{def}}{=\!=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-it)^n A^n(f)}{n!} \forall f \in H.$$

Итак, $\forall f \in H$ мы определили

$$U(t)f = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-it)^n A^n(f)}{n!} \in H.$$

$$\|U(t)f\| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n \|A\|^n}{n!} \|f\| = \exp(t\|A\|) \cdot \|f\| \implies \|U(t)\| \leqslant \exp(t\|A\|) \quad \forall t \geqslant 0,$$

$U(t) : H \to H$ — линейный непрерывный оператор! Рассмотрим $\forall \mathcal{U}_0 \in H$ функцию

$$\mathcal{U}(t) = U(t)\mathcal{U}_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-it)^n A^n \mathcal{U}_0}{n!}.$$

$$\|\mathcal{U}(t) - \mathcal{U}_0\| = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-it)^n A^n \mathcal{U}_0}{n!} \right\| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n \|A\|^n \mathcal{U}_0}{n!} = \underbrace{\left(e^{t\|A\|} - 1\right)}_{\xrightarrow{(t\to 0)} 0} \|\mathcal{U}_0\| \implies$$

$$\implies \mathcal{U}(+0) = \mathcal{U}_0 \text{ в } H.$$

Рассмотрим функцию

$$\theta(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-it)^{n-1}(-in)A^n(\mathcal{U}_0)}{n!},$$

это также абсолютно сходящийся ряд в H, т. к.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\| \frac{(-it)^{n-1}(-in)A^n(\mathcal{U}_0)}{n!} \right\| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \|A\|^n \|\mathcal{U}_0\| = e^{t\|A\|} \|A\| \|\mathcal{U}_0\|.$$

Следовательно, $\theta(t) \in H \quad \forall t > 0$, причём

$$\theta(t) = -i\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-it)^n}{n!} A(A^n \mathcal{U}_0) = -i \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} A\left(\frac{(-it)^n A^n(\mathcal{U}_0)}{n!}\right) =$$

$$= -i \lim_{N\to\infty} \underbrace{A}_{\text{непрерывен на } H} \left(\underbrace{\sum_{n=0}^{N} \frac{(-it)^n A^n(\mathcal{U}_0)}{n!}}_{\xrightarrow[\| \|]{(N\to\infty)} \mathcal{U}(t)}\right) = -iA\mathcal{U}(t).$$

Таким образом, $i\theta(t) = A\mathcal{U}(t) \quad t > 0$. Осталось показать, что $\exists \mathcal{U}'(t) = \theta(t) \quad \forall t > 0$. Имеем: $0 < |\Delta t| < t$, тогда

$$\left\|\frac{\mathcal{U}(t+\Delta t) - \mathcal{U}(t)}{\Delta t} - \theta(t)\right\| = \left\|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} A^n(\mathcal{U}_0)\left(\frac{(t+\Delta t)^n - t^n}{\Delta t} - nt^{n-1}\right)\right\| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\|A\|^n}{n!} \|\mathcal{U}_0\| \underbrace{\left|\frac{(t+\Delta t)^n - t^n}{\Delta t} - nt^{n-1}\right|}_{\xrightarrow{(\Delta t\to 0)} 0}, \quad (*)$$

т. к. по Т. Лагранжа

$$(t+\Delta t)^n - t^n = n\xi_n^{n-1} \cdot \Delta t,$$

где ξ_n между t и $t + \Delta t$, следовательно

$$\left|\frac{(t+\Delta t)^n - t^n}{\Delta t} - nt^{n-1}\right| \leqslant n\left|\xi_n^{n-1} - t^{n-1}\right| \leqslant nt^{n-1}(2^{n-1}+1) \leqslant n2^n t^{n-1}.$$

Следовательно,

$$\frac{\|A\|^n}{n!}\|\mathcal{U}_0\| \left|\frac{(t+\Delta t)^n - t^n}{\Delta t} - nt^{n-1}\right| \leqslant \frac{n2^n\|A\|^n}{n!} t^{n-1}$$

— член сходящегося ряда, не зависящий от Δt. Следовательно ряд (*) сходится равномерно по $0 < |\Delta t| < t$. Значит

$$\lim_{\Delta t\to o} \left\|\frac{\mathcal{U}(t+\Delta t) - U(t)}{\Delta t} - \theta(t)\right\| \leqslant \lim_{\Delta t\to 0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\|A\|^n\|\mathcal{U}_0\|}{n!}\left|\frac{(t+\Delta t)^n - t^n}{\Delta t} - nt^{n-1}\right| =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\|A\|^n\|\mathcal{U}_0\|}{n!} \underbrace{\lim_{\Delta t\to 0}\left|\frac{(t+\Delta t)^n - t^n}{\Delta t} - nt^{n-1}\right|}_{=0} = 0,$$

Следовательно, $\forall t > 0 \quad \exists \mathcal{U}'(t) = \theta(t)$. Итак, если линейный оператор $A : H \to H$ с областью определения $D(A) = H$ непрерывен, т есть $\|A\| < +\infty$, то определён оператор эволюции $U(t) : H \to H$, действующий по формуле

$U(t)f = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-it)^n A^n(f)}{n!} \quad \forall f \in H, \|U(t)\| \leqslant \exp(t\|A\|) \quad \forall t > 0$ При этом $\forall \mathcal{U}_0 \in H$ выполненоо

$$\forall t > 0 \quad \exists \frac{d}{dt} U(t)\mathcal{U}_0 = -iAU(t)\mathcal{U}_0$$

и

$$\exists U(+0)\mathcal{U}_0 = \mathcal{U}_0,$$

значит $\mathcal{U}(t) = U(t)\mathcal{U}_0$, $t \geqslant 0$, является решением эволюционной задачи

$$\begin{cases} i\dfrac{d}{dt}\mathcal{U}(t) = A\mathcal{U}(t), \quad t > 0 \\ \mathcal{U}(+0) = \mathcal{U}_0 \in H. \end{cases}$$

Заметим, что решение единственно. Действительно, пусть $\mathcal{U}_1(t)$ и $\mathcal{U}_2(t)$ — два решения рассматриваемой эволюционной задачи. Тогда

$$w(t) = \mathcal{U}_1(t) - \mathcal{U}_2(t), \quad t > 0,$$

удовлетворяет

$$\begin{cases} i\dfrac{d}{dt}w(t) = Aw(t), \quad t > 0 \\ w(+0) = 0. \end{cases}$$

Так как $w(t + \Delta t) = w(t) + \dot{w}(t)\Delta t + o(\Delta t)$, то

$$\|w(t+\Delta t)\|^2 = (w(t+\Delta t, w(t+\Delta t)) = \\ = (w(t), w(t)) + (w(t), \dot{w}(t))\,\Delta t + (\dot{w}(t), w(t))\,\Delta t + o(\Delta t),$$

следовательно

$$\exists \frac{d}{dt}\|w(t)\|^2 = (\dot{w}(t), w(t)) + (w(t), \dot{w}(t)) = \\ = 2\,\mathrm{Re}\,(w(t), \dot{w}(t)) \leqslant 2\|w(t)\|\,\|\dot{w}(t)\| \leqslant 2\|A\|\|w(t)\|^2.$$

Получаем, что

$$\frac{d}{dt}\|w(t)\|^2 \leqslant 2\|A\|\|w(t)\|^2 \quad \forall t > 0,$$

значит $\forall 0 < \tau \leqslant t$ имеем

$$\|w(t)\|^2 - \|w(\tau)\|^2 = \int_{\tau}^{t} \frac{d}{d\xi}\|w(\xi)\|^2 d\xi \leqslant 2\|A\| \int_{\tau}^{t} \|w(\xi)\|^2 d\xi,$$

то есть $\forall 0 < \tau \leqslant t$ выполнено

$$\|w(t)\|^2 \leqslant \|w(\tau)\|^2 + 2\|A\| \int_{\tau}^{t} \|w(\xi)\|^2 d\xi.$$

По лемме Гроноулла получаем

$$\|w(t)\|^2 \leqslant \|w(\tau)\|^2 \exp(2\|A\|(t-\tau)) \quad \forall 0 < \tau \leqslant t.$$

Так как $w(+0) = 0$, то $\|w(\tau)\| \xrightarrow[\tau\to+0]{} 0$ Переходя к пределу при $\tau \to +0$, поолучаем $\forall t > 0$ неравенство

$$\|w(t)\|^2 \leqslant \lim_{\tau\to 0} \underbrace{\|w(\tau)\|^2}_{\to 0} \underbrace{\exp\left(2\|A\|(t-\tau)\right)}_{\to 1} = 0 \implies \|w(t)\|^2 = 0 \Leftrightarrow w(t) = 0.$$

Например, рассмоотрим в $H = L_2(\mathbb{R})$ оператор трансляции:

$$T_a : L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R}).$$

Здесь $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

$(T_a f)(x) = f(x+a) \quad \forall f \in L_2(\mathbb{R}) \quad \forall x \in \mathbb{R} \implies \|T_a f\|_2 = \|f\|_2 \quad \forall f \in L_2(\mathbb{R})$,

т. е. $\|T_a\| = 1$. Очевидно, что $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\left((T_a)^n f\right)(x) = f(x+na) \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall f \in \mathbb{L}_2(\mathbb{R}),$$

т. е. $(T_a)^n = T_{na}$. Тогда

$$\exp(-itT_a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-it)^n}{n!} T_{na} = U(t).$$

Для эволюционной задачи

$$\begin{cases} i\dfrac{d}{dt}\mathcal{U}(t) = T_a\mathcal{U}(t), \quad t > 0 \\ \mathcal{U}(+0) = \mathcal{U}_0 \in H \end{cases}$$

решением является

$$\mathcal{U}(t) = \exp\left(-itT_a\right)\mathcal{U}_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-it)^n T_{na}\mathcal{U}_0}{n!}, \quad t \geqslant 0,$$

или $\forall t \geqslant 0, x \in \mathbb{R}$ имеем

$$\mathcal{U}(t,x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-it)^n \mathcal{U}_0(x+na)}{n!}.$$

$\forall t > 0$ ряд сходится в $L_2(\mathbb{R})$ (относительно переменной $x \in \mathbb{R}$)

$$\|\mathcal{U}(t)\|_{L_2(\mathbb{R})} \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \|\mathcal{U}_0\|_{L_2(\mathbb{R})} = e^t \|\mathcal{U}_0\|_2 \quad \forall t > 0.$$

Задача. Пусть $H = L_2[0,1]$, оператор $A : L_2[0,1] \to L_2[0,1]$ имеет вид

$$(Af)(x) = \int_0^x f(t)dt, \quad x \in [0,1], \quad f \in L_2[0,1]$$

(это оператор Вольтерра). Доказать, что $\|A\| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$ (и даже $\|A\| = \frac{2}{\pi} < \frac{1}{\sqrt{2}}$). $\forall n \in \mathbb{N}$ вычислить

$$A^n : L_2[0,1] \to L_2[0,1],$$

указав $(A^n f)(x) = ? \quad \forall f \in L_2[0,1], x \in [0,1]$ и найти оператор эволюции

$$U(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-it)^n A^n}{n!} = e^{-itA} \quad \forall t > 0.$$

$$U(t) : L_2[0,1] \to L_2[0,1].$$