

Неделя №9

Электродинамика сверхпроводников. Основы микроскопии сверхпроводников

Драчов Ярослав
Факультет общей и прикладной физики МФТИ

8 мая 2021 г.

5.4.

Решение. Поскольку радиус кольца много больше расстояния до сверхпроводника, локально участок кольца можно считать прямым. Тогда возникает задача о взаимодействии прямолинейного тонкого провода со сверхпроводником. Магнитное поле «обтекает» сверхпроводник, поэтому на поверхности оно должно иметь касательное направление. Это означает, что распределение поля можно описать с помощью метода зеркальных изображений, дополнив настоящий прямой провод зеркальным, ток по которому течёт в противоположную сторону. Сила, действующая между двумя параллельными проводами, расположенными на расстоянии R , равна

$$F = \frac{2I_1 I_2 L}{Rc^2}$$

для участков длины L . В нашем случае полная длина проводов есть $L = 2\pi r$, расстояние есть $R = 2h$, токи $I_1 = -I_2 = J$ отталкиваются. Это отталкивание должно превысить силу тяжести. Это происходит при $F = mg$, откуда

$$J = \sqrt{\frac{mghc^2}{2\pi r}} \approx 6,49 \cdot 10^{10} \text{ ед. СГСЭ} \approx 21,6 \text{ А.}$$

5.7.

Решение. Мейснеровские токи текут по поверхности цилиндра, поэтому распределение токов и полей такое же, как в соленоиде (по сравнению с радиусом цилиндра толщиной поверхностного слоя, в котором текут токи, можно пренебречь, т. к. она имеет порядок глубины проникновения λ , которая в обычных сверхпроводниках $\sim 10^{-5} \dots 10^{-6}$ см). Внутри поле \mathbf{B} должно быть равно нулю, поэтому

$$\frac{4\pi}{c} \frac{I}{h} = H$$

где I — ток сверхпроводящих электронов (точнее, куперовских пар). Если N куперовских пар (с зарядом $2e$ и массой $2m$) движутся со скоростью v , то период их обращения вокруг цилиндра $T = 2\pi R/v$, момент импульса

$L = 2RmNv$, ток $I = 2eN/T$. Отсюда L можно выразить через I и затем через H :

$$L = \frac{mcHhR^2}{2e}.$$

Куперовские пары движутся без трения по поверхности цилиндра. Когда цилиндр переводят в нормальное состояние, электроны и решётки начинают двигаться как целое, поэтому запасённый парами момент импульса становится моментом импульса всего цилиндра, и нить закручивается. Момент инерции цилиндра равен $J = MR^2/2$, а энергия $E = L^2/2J$.

Эта энергия пойдёт на совершение работы по закручиванию нити.

Работа, совершаемая моментом силы M при изменении угла на $d\varphi$ есть $dA = Md\varphi$, а по определению модуля кручения $M = \alpha\varphi$. Приравнявая работу при закручивании нити на угол φ исходной энергии вращения, получаем

$$\frac{L^2}{2J} = \frac{\alpha\varphi^2}{2}$$

откуда в результате

$$\varphi = \frac{mcHhR}{e\sqrt{2\alpha M}} \approx 4,5 \cdot 10^{-5} \text{ рад.}$$

Т9-4.

Решение. При $H = H_{c1}$ поле ещё не проникло в сверхпроводник, поэтому $B_1 = H + 4\pi M = 0$, т. е. $4\pi M = -H_{c1}$. При $H = 1,25H_{c1}$ получаем $B_2 = H + \frac{1}{2}4\pi M = 300$ Гс. Плотность вихрей $n = B_2/\Phi_0$, вихри образуют треугольную решётку со стороной a . Площадь равностороннего треугольника со стороной a равна $S = a^2\sqrt{3}/4$, при этом в среднем на треугольник приходится $1/2$ вихря (т. к. треугольник образуют 3 вихря, а каждый вихрь принадлежит 6 треугольникам). Другими словами, примитивной ячейкой треугольной решётки является ромб, построенный на двух сторонах треугольника: его площадь вдвое больше площади треугольника. В таком ромбе содержится один вихрь.

В результате $n = \frac{2}{\sqrt{3}a^2}$, поэтому

$$a = \sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\Phi_0}{B_2}} \approx 2,8 \cdot 10^{-5} \text{ см.}$$

9.5.

Решение. Направление тока выберем за ось y , тогда поле направлено по z , $\mathbf{h} = (0, 0, h(x))$. Важно понимать, что ток не может быть однородно распределён по толщине плёнки — его плотность должна зависеть от x , т. е. $\mathbf{j}_s = (0, j_s(x), 0)$. В то же время из симметрии ясно, что $j_s(x)$ — чётная функция, а $h(x)$ — нечётная.

Возьмём прямоугольное сечение плёнки плоскостью xz (т. е. перпендикулярно току), имеющее единичную длину вдоль z . Применяя уравнения Максвелла и формулу Стокса, находим

$$-h \frac{d}{2} + h \frac{d}{2} = \frac{4\pi}{c} I \implies h \frac{d}{2} = -\frac{2\pi I}{c}.$$

С учётом этого граничного условия общее решение уравнения Лондонов даёт

$$h(x) = -\frac{2\pi I}{c} \frac{\operatorname{sh}(x/\lambda)}{\operatorname{sh}(d/(2\lambda))},$$

а из уравнений Максвелла получаем

$$j_s(x) = -\frac{c}{4\pi} \frac{dh}{dx} = \frac{I}{2\lambda} \frac{\operatorname{ch}(x/\lambda)}{\operatorname{sh}(d/(2\lambda))}.$$

Т9-6.

Решение. Введём обозначение

$$\lambda^2 = \frac{mc^2}{4\pi nc^2}.$$

Полный ток:

$$I = \iint j(z) dy dz = d \cdot j_0 \int e^{-\frac{z}{\lambda}} dz = \lambda d j_0.$$

$$L^K = \frac{2c^2}{J^2} \int n \frac{mu^2}{2} dV = \frac{2c^2}{I^2} \frac{m}{ne^2} \frac{4\pi}{4\pi} \int j^2 dV = \frac{4\pi\lambda^2}{\lambda^2 d^2 j_0^2} d^2 j_0^2 \int_0^\infty e^{-\frac{2z}{\lambda}} dz = 2\pi\lambda.$$

$$L_{\text{внутр}}^M = \frac{2c^2}{I^2} \frac{1}{8\pi} \left(\frac{4\pi I}{c d} \right)^2 d^2 \int_0^\infty e^{-\frac{2z}{\lambda}} dz = 2\pi\lambda.$$

$$L^K = L_{\text{внутр}}^M = 2\pi\lambda.$$

Т9-7.

Решение. а) Поскольку $d \ll \lambda$, ток распределён по плёнке однородно. Обобщённое второе уравнение Лондонов:

$$\mathbf{j}_s = \frac{1}{c\Lambda} \left(\frac{\Phi_0}{2\pi} \nabla\theta - \mathbf{A} \right).$$

Интегрируем по замкнутому круговому контуру радиуса R , получаем

$$\Phi = \Phi_0 n - \frac{2\pi mc R}{n_s e^2} j_s.$$

С другой стороны, из уравнений Максвелла следует, что магнитное поле внутри цилиндра связано с поверхностным током формулой

$$H = \frac{4\pi}{c} j_s d,$$

поэтому поток внутри цилиндра

$$\Phi = \frac{4\pi^2}{c} j_s d R^2.$$

Выражая отсюда j_s и подставляя, получаем

$$\Phi = \Phi_0 n \left(1 + \frac{2\lambda^2}{Rd} \right)^{-1}.$$

- б) Важно, что ток распределён по плёнке однородно. Тогда интегрируя уравнение Максвелла по прямоугольному контуру, одна сторона которого идёт вдоль внешней поверхности плёнки, а другая — внутри плёнки, мы получим линейный закон нарастания магнитного поля при удалении от внешней поверхности плёнки (рис. 1).

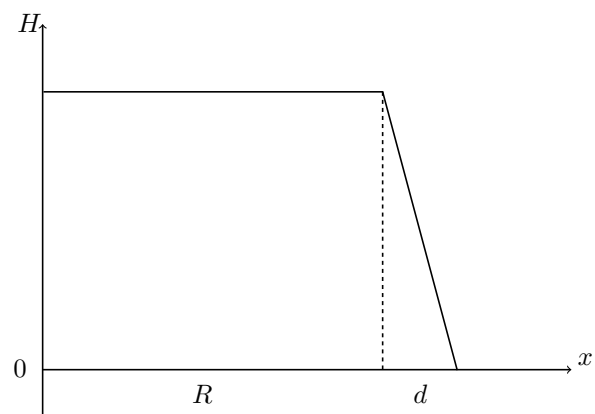


Рис. 1