Второе задание по вычислительной математике

Драчов Ярослав
Факультет общей и прикладной физики МФТИ

9 декабря 2020 г.

Тема IV. Нелинейные уравнения

Задача 11.3. Построить метод Ньютона для вычисления числа $1/a$ так, чтобы расчётные формулы не содержали операций деления. Определить область сходимости метода при $a > 0$.

Решение. Пусть
$$F(x) = \frac{1}{x^2} - a^2 = 0.$$
Строим итерационный процесс
$$x^{n+1} = \frac{x_n\left(3 - a^2(x^n)^2\right)}{2}.$$
Т. к. $F'(1/a) = -2a^3 \neq 0$ то $\exists U_\delta$:
$$\forall x \in U_\delta : \left|\frac{FF''(x)}{(F'(x))^2}\right| = \left|\frac{3}{2}(1 - a^2x^2)\right| < 1.$$
Откуда находим область сходимости
$$\left(-\frac{1}{a}\sqrt{\frac{5}{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}a}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{3}a}, \frac{1}{a}\sqrt{\frac{5}{3}}\right).$$

Задача 11.14. Для нахождения положительного корня нелинейного уравнения
$$x\ln(x+2) + x^2 - 1 = 0,$$
предложено несколько вариантов МПИ:

1. $x_{n+1} = (1 - x_n^2)/\ln(x_n + 2)$,
2. $x_{n+1} = \exp(1/x_n - x_n) - 2$,
3. $x_{n+1} = \sqrt{1 - x_n\ln(x_n + 2)}$,
4. $x_{n+1} = 1/x_n - \ln(x_n + 1)$

Исследовать эти методы и сделать выводы о целесообразности использования каждого из них.

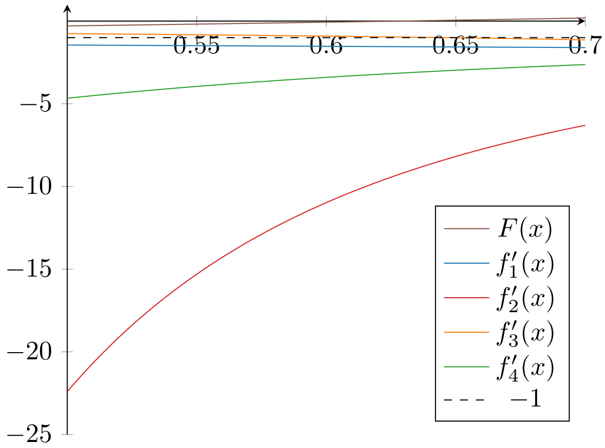

Рис. 1

Решение. График данного нелинейного уравнения, а также графики всех $f'(x)$ задаваемых соотношениями $x_{n+1} = f(x_n)$ представлены на рис. 1. В некоторой окрестности единственного положительного корня лишь одна $f_3'(x)$ может принимать значения меньше единицы. Следовательно лишь третий МПИ будет сходиться в окрестности положительного корня данного нелинейного уравнения.

Задача 11.1а. Определить область изменения параметров a, b и c, при которых метод простой итерации $x^{(n+1)} = \varphi\left(x^{(n)}\right)$ сходится для любого начального приближения $x_0 \in \mathbb{R}$, если

$$\varphi(x) = a \sin x + b \cos x + c.$$

Решение. Найдём

$$\varphi'(x) = a \cos x - b \sin x,$$

$$\varphi''(x) = -a \sin x - b \cos x.$$

Для нахождения экстремумов $\varphi'(x)$ решим уравнение

$$\varphi''(x) = 0 \implies x_{\text{extr}} = -\operatorname{arctg} \frac{b}{a}.$$

Тогда

$$\varphi'(x_{\text{extr}}) = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

И условие сходимости будет выглядеть как

$$\sqrt{a^2 + b^2} < 1.$$

Задача 12.4б. Отделить корни уравнения

$$3x + 4x^3 - 12x^2 - 5 = 0,$$

а затем уточнить один из них с помощью подходящего итерационного процесса.

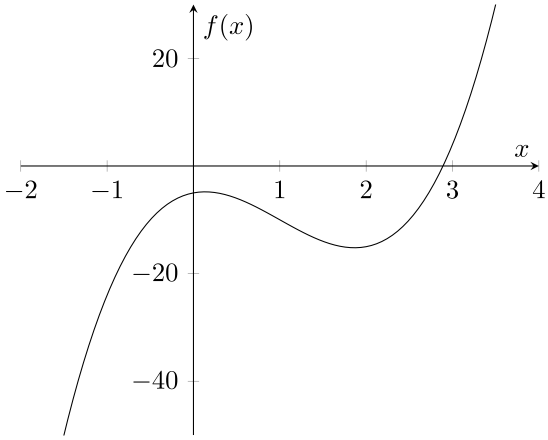

Рис. 2

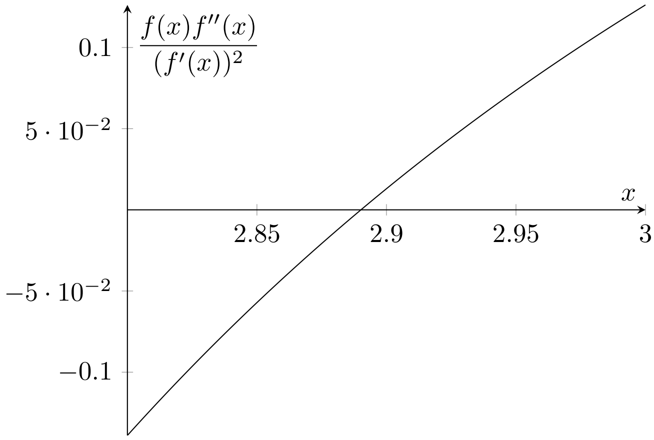

Рис. 3

Решение. Построим график функции

$$f(x) = 3x + 4x^3 - 12x^2 - 5$$

(см. рис. 2). Из рисунка очевидно, что исследуемое уравнение имеет лишь один корень на действительной прямой.

График функции

$$\frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} = \frac{8(x-1)\left(4x^3 - 12x^2 + 3x - 5\right)}{3\left(4x^2 - 8x + 1\right)^2}$$

в окрестности (2,8; 3,0) ($f(2{,}8) < 0$, $f(3{,}0) > 0$) изображён на рис. 3. Заметим, что

$$\left|\frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}\right| < 1$$

на (2,8; 3,0) поэтому метод Ньютона в данном случае будет сходиться. При-

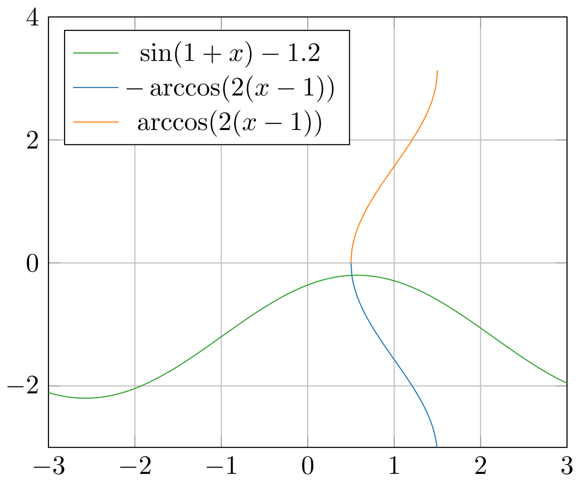

Рис. 4

меним его:

$$x_{n+1} = \frac{8x_n^3 - 12x_n^2 + 5}{12x_n^2 - 24x_n + 3}.$$

На 12-й итерации метода получим значение, не отличающеюся от 11-й с точностью до машинной погрешности

$$x_{12} = 2{,}8901453858415.$$

Задача 12.5а. Вычислить с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$ координаты точек пересечения кривых

$$\sin(x+1) - y = 1.2, \quad 2x + \cos y = 2.$$

Решение. Построение к данной задаче приведено на рис. 4. Видно, что у данной системы есть единственное решение на пересечении $\sin(1+x) - 1.2$ и $-\arccos(2(x-1))$. В нашем случае

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} y + 1.2 - \sin(x+1) \\ 2x + \cos y - 2 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{J} = \frac{d\mathbf{F}}{d\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos(1+x) & 1 \\ 2 & -\sin y \end{pmatrix}.$$

Как начальное приближение выберем

$$\mathbf{u}^0 = \begin{pmatrix} 0.5 \\ -0.2 \end{pmatrix}.$$

Следующее приближение к корню согласно методу Ньютона тогда будет построено как

$$\mathbf{u}^{k+1} \approx \mathbf{u}^k + \mathbf{J}^{-1} \cdot \mathbf{F}\left(\mathbf{u}^k\right).$$

Данную систему можно представить в эквивалентном виде

$$\mathbf{u} = \mathbf{f}(\mathbf{u}),$$

где

$$\mathbf{f}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} 1 - 0.5\cos y \\ \sin(x+1) - 1.2 \end{pmatrix}.$$

Значит для неё можно построить МПИ

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{f}\left(\mathbf{u}^n\right).$$

Ниже приведена программная реализация данного алгоритма на Mathematica.

```
In[1]:=  f[x_,y_]:={1-0.5 Cos[y], Sin[x+1]-1.2}
         u[0] = {0.5, -0.2};
         u[k_]:=u[k]=f[x,y]/.{x→u[k-1][[1]],y→u[k-1][[2]]}
         i=1;
         While[
         RealAbs[u[i][[1]]-u[i-1][[1]]]>10^-3u[i-1][[1]]&&
         RealAbs[u[i][[2]]-u[i-1][[2]]]>10^-3u[i-1][[2]],
         i++
         ]
         i
         u[i]

Out[1]=  16

Out[2]=  {0.5101297456452708`,-0.20183868954136786`}
```

Откуда с точностью до $\varepsilon = 10^{-3}$ находим координаты точки пересечения:

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 0.510 \\ -0.202 \end{pmatrix}.$$

Задача 6.1. Привести пример функции $f(x)$, заданной на множестве $U = R$ и обладающей следующим свойством

а) глобальный минимум $f(x)$ достигается на счётном множестве точек;

б) $f(x)$ имеет бесконечное число точек локального минимума, но глобальный минимум $f(x)$ на U не достигается;

в) $f(x)$ ограничена снизу на U, но не достигает минимума.

Решение. а) $\sin x$;

б) $x \sin x$;

в) $\operatorname{arctg} x$.

Тема V. Задачи нахождения экстремума функции

Задача 7.1а. Используя методы дихотомии и сведения вариационной задачи к задаче алгебраического уравнения, найти точку локального минимума функции

$$f(x) = 2x^2 - \ln x.$$

Решение. График данного уравнения приведён на рис. 5. Из построения

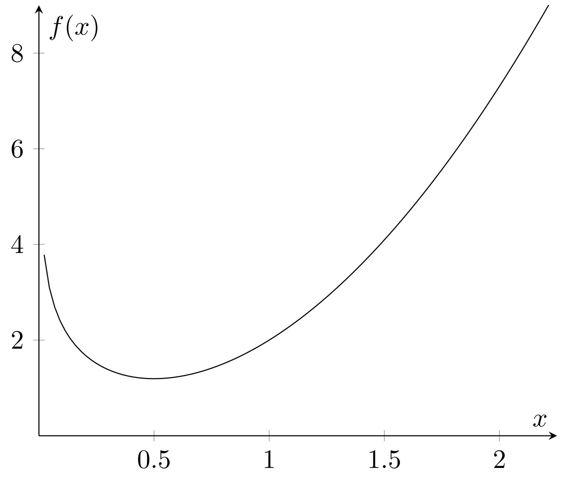

Рис. 5

видно, что минимум локализован на отрезке $[0, 1]$. Далее представлен код в Mathematica для метода дихотомии.

```
In[3]:= f[x_]:=2x^2-Log[x]
        a[0]=0.;
        b[0]=1.;
        Δ[n_]:=(b[n]-a[n])/100
        u1[n_]:=(b[n-1]+a[n-1]-Δ[n-1])/2
        u2[n_]:=(b[n-1]+a[n-1]+Δ[n-1])/2
        a[n_]:=a[n]=Piecewise[{{a[n-1],f[u1[n]]⩽ f[u2[n]]},
        {u1[n],f[u1[n]]⩾f[u2[n]]}}]
        b[n_]:=b[n]=Piecewise[{{u2[n],f[u1[n]]⩽ f[u2[n]]},
        {b[n-1],f[u1[n]]⩾f[u2[n]]}}]
        xmin[n_]:=(a[n]+b[n])/2
        i=1;While[xmin[i]=!=xmin[i-1],i++]
        i
        xmin[i]

Out[3]= 61

Out[4]= 0.49999988529080724`
```

Теперь найдём точку локального минимума методом сведения вариационной задачи к задаче алгебраического уравнения:

$$f'(x) = 4x - \frac{1}{x} = 0 \implies x_{\min} = \frac{1}{2}.$$

Задача 7.5a. Методом покоординатного спуска найти точки локального минимума функции

$$f(x, y) = \left(x^2 + y - 11\right) + (x + y^2 - 7)^2.$$

Решение. График данной функции представлен на рис. 6. Если рассмотреть

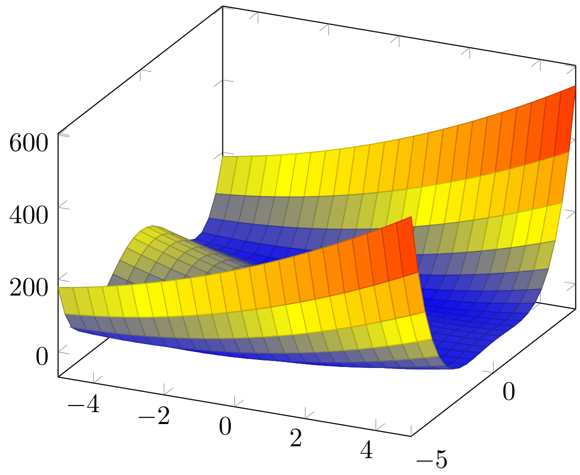

Рис. 6

функцию $f(x, y)$ как функцию одной переменной x при фиксированном y, то минимум для неё можно найти следующим образом

$$f'_y(x_{\min}) = 0 \implies x_{\min} = \frac{1}{2}\left(7 - y^2\right).$$

Аналогично для y

$$f'_x(y_{\min}) = 0 \implies 4xy_{\min} + 4y^3_{\min} - 28y_{\min} + 1 = 0.$$

Аналитические выражения можно получить для всех трёх вообще говоря комплексных корней данного уравнения. Из них как минимум один будет действительным, в процессе метода будем выбирать именно его (один из пары, если таковых два). За начальное приближение возьмём пару $(x, y) = (0, 0)$. Код в Mathematica для метода покоординатного спуска приведён далее

```
In[5]:=  x[0]=0.;
         y[0]=0.;
         x[n_]:=x[n]=1/2 (7-y[n-1]^2)
         y[n_]:=y[n]=y/.First[
```

```
Solve[1+4 y(-7+x+y^2)==0,y,ℝ]/.x→x[n]]
i=1;While[x[i]=!=x[i-1]&&y[i]=!=y[i-1],i++]
i
x[i]
y[i]
```

Out[5]= 51

Out[6]= -0.09325687922159798`

Out[7]= -2.680767382381992`

Откуда координаты минимума

$$x_{\min} = -0.09325687922159798,$$

$$y_{\min} = -2.680767382381992.$$

Тема VI. Интерполяция

Задача 7.3. Доказать, что если узлы интерполяции расположены симметрично относительно некоторой точки c, а значения интерполируемой функции в симметричных узлах равные, то интерполяционный многочлен в форме Лагранжа — чётная функция аргумента $x - c$

Доказательство. Интерполяционный многочлен в форме Лагранжа имеет следующий вид

$$P_n(x) = P_n(x, f, x_0, \ldots, x_n) = f(x_0)l_0(x) + f(x_1)l_1(x) + \ldots + f(x_n)l_n(x),$$

где

$$l_k = \frac{(x - x_0)\ldots(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})\ldots(x - x_n)}{(x_k - x_0)\ldots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\ldots(x_k - x_n)}.$$

Пусть $y = x - c$. Тогда

$$l_k = \frac{(y + c - x_0)\ldots(y + c - x_{k-1})(y + c - x_{k+1})\ldots(y + c - x_n)}{(x_k - x_0)\ldots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\ldots(x_k - x_n)}.$$

Пронумеруем узлы следующим образом: узел находящийся в точке c (если таковой имеется) будет иметь индекс 0, все остальные узлы будут нумероваться по порядку удаления от c, т. е. $1, 2, 3 \ldots, N$ справа и $-1, -2, -3 \ldots, N$ слева. Также введём обозначение $\Delta_n = x_n - c$. Тогда

$$l_k = \frac{y\ldots(y^2 - \Delta_{k-1}^2)(y + \Delta_k)(y^2 - \Delta_{k+1}^2)\ldots(y^2 - \Delta_N^2)}{(\Delta_k - \Delta_{-N})\ldots(\Delta_k - \Delta_{k-1})(\Delta_k - \Delta_{k+1})\ldots(\Delta_k - \Delta_N)}.$$

Из симметрии задачи следует, что для любых k и n выполняются соотношения

$$\Delta_k = -\Delta_{-k}, \quad \Delta_k - \Delta_n = \Delta_{-n} - \Delta_{-k}.$$

Следовательно

$$l_k(-y) = l_{-k}(y).$$

Для случая отсутствия точки x_0 аналогично доказывается такое же тождество. Окончательно

$$P_n(-y) = f(x_0)l_0(-y) + f(x_1)l_1(-y) + \ldots + f(x_n)l_n(-y) = \\ = f(x_0)l_0(y) + f(x_1)l_1(y) + \ldots + f(x_n)l_n(y) = P_n(y).$$

$\square$

Задача 7.11. Показать, что на равномерной сетке норма многочлена

$$\omega_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n),$$

$$\|\omega_{n+1}(x)\| \approx n!h^{n+1}, \quad h = (x_n - x_0)/n.$$

Решение. Очевидно, что для $x \in [x_{i-1}, x_i]$

$$|x - x_{i-1}||x - x_i| \leqslant \frac{h^2}{4}.$$

Для $j < i - 1$ очевидна оценка $|x - x_j| \leqslant (i - j)h$, а для $j > i$ — $|x - x_i| \leqslant (j + i - i)h$. Учитывая все эти оценки, получим для $x \in [x_{i-1}, x_i]$

$$|\omega_{n+1}(x)| = \prod_{j=0}^{n} |x - x_j| \leqslant \frac{h^2}{4} i!h^{i-1}(n + 1 - i)!h^{n-i} \leqslant \frac{i!(n + 1 - i)!}{4} h^{n+1}.$$

Пусть $n \geqslant 2$ и $i \in \{1, 2, \ldots, n - 1\}$ обозначает номер внутреннего интервала. Для произвольной точки $x \in (x_{i-1}, x_i)$ построим симметричную относительно середины отрезка $[x_0, x_i]$ точку $y \in (x_0, x_1)$, т. е. возьмём $y = x_0 + x_i - x$. Тогда $|x - x_j| = |y - x_{i-j}|$ для всех $j = \overline{0, i}$, так что $|\omega_{i+1}(y)| = |\omega_{i+1}(x)|$. Но $|y - x_j| > |x - x_j|$ для $j = i + \overline{1, n}$. Поэтому $|\omega_{n+1}(y)| > \omega_{n+1}(x)$. В силу произвольности $x \in (x_{i-1}, x_i)$ это означает, что максимальное по модулю значение ω_{n+1} на первом отрезке строго больше максимального значения $|\omega_{n+1}|$ на любом внутреннем. Наконец, осталось заметить, что в силу симметричного относительно середины отрезка $[x_0, x_n] = [a, b]$ расположения узлов, этом максимум достигается также на отрезке $[x_{n-1}, x_n]$. Тогда, применяя предыдущую оценку для $i = 1$, получаем

$$\|\omega_{n+1}(x)\| \leqslant \frac{n!}{4} h^{n+1} \approx n!h^{n+1}.$$

Задача 8.7. С какой точностью можно извлечь кубический корень из 1200, интерполируя функцию $f(x) = \sqrt[3]{x}$ между узлами $x_0 = 10^3$, $x_1 = 11^3 = 1331$, $x_2 = 12^3 = 1728$?

Решение. Выпишем вспомогательные многочлены

$$l_0 = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)},$$

$$l_1 = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)},$$

$$l_2 = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}.$$

Интерполяционный многочлен в форме Лагранжа тогда будет иметь вид

$$P_2(x) = f(x_0)l_0 + f(x_1)l_1 + f(x_2)l_2.$$

Погрешность алгебраической интерполяции можно оценить как

$$\|R_2(x)\| \leqslant \frac{\left\|\left(\sqrt[3]{x}\right)'''\right\|}{3!}\|(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\|.$$

$$\|R_2(1200)\| \approx 0{,}005.$$

Задача 8.13. Задана табличная функция. С какой точностью можно вос-

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$
$\sin(x)$	0	0.5	0.71	0.87

становить значение в точке $x = 7\pi/24$, если известно, что функция в узлах задана с абсолютной погрешностью, не превосходящей 10^{-2}?

Решение.

$$l_0 = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)}.$$

$$l_1 = \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)}.$$

$$l_2 = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)}.$$

$$l_3 = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}.$$

$$P_3(x) = f(x_0)l_0 + f(x_1)l_1 + f(x_2)l_2 + f(x_3)l_3.$$

$$L_3(x) = \sum_{k=0}^{3} |l_k(x)|.$$

Возмущение интерполяционного многочлена при возмущении задания функции в узлах на 10^{-2} можно оценить как

$$\left\|P_3\left(\frac{7\pi}{24}, \delta f\right)\right\| \leqslant \left\|\delta f\left(\frac{7\pi}{24}\right)\right\| L_3\left(\frac{7\pi}{24}\right) = 10^{-2}\cdot 1.44.$$

Погрешность интерполяции

$$\left\|R_3\left(\frac{7\pi}{24}\right)\right\| \leqslant \frac{\left\|\sin x^{(4)}\big|_{x=\frac{7\pi}{24}}\right\|}{4!}\left\|\omega_4\left(\frac{7\pi}{24}\right)\right\| \approx 2\cdot 10^{-4}.$$

Задача 8.18в. Выбрать вид аппроксимации Паде и найти коэффициенты аппроксимации для функции

$$f(x) = x^2 \exp\left(-x^2\right).$$

Решение.

$$f(x) = x^2 - x^4 - \ldots .$$

Вычислим аппроксимацию Паде [5/1] этой функции

$$\frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3}{1 + b_1 x} = x^2 - x^4 + O(x^6),$$

или, умножая на знаменатель,

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 = (1 + b_1 x)\left(x^2 - x^4 + O(x^6)\right).$$

Откуда

$$[5/1] = \frac{x^2 + x^3 - x^4 - x^5}{1 + x}.$$

Задача 9.1в. Методом обратной интерполяции найти корень нелинейного уравнения

$$4x - \cos x = 0,$$

используя приведённую таблицу. Оценить точность полученного решения.

x	$x_1 = 0$	$x_2 = 0.1$	$x_3 = 0.3$	$x_4 = 0.5$
$f(x)$	-1	-0.595	0.245	1.122

Решение.

$$f'(x) = 4 + \sin x \neq 0 \ \forall x \implies \exists f^{-1}(x) = x(f).$$

$$l_0 = \frac{(f - f_1)(f - f_2)(f - f_3)}{(f_0 - f_1)(f_0 - f_2)(f_0 - f_3)}.$$

$$l_1 = \frac{(f - f_0)(f - f_2)(f - f_3)}{(f_1 - f_0)(f_1 - f_2)(f_1 - f_3)}.$$

$$l_2 = \frac{(f - f_0)(f - f_1)(f - f_3)}{(f_2 - f_0)(f_2 - f_1)(f_2 - f_3)}.$$

$$l_3 = \frac{(f - f_0)(f - f_1)(f - f_2)}{(f_3 - f_0)(f_3 - f_1)(f_3 - f_2)}.$$

$$P_3(f) = x(f_0)l_0 + x(f_1)l_1 + x(f_2)l_2 + x(f_3)l_3.$$

$$P_3(0) \approx 0.243.$$

$$L_3(x) = \sum_{k=0}^{3} |l_k(x)|.$$

Входные данные даны с точностью 10^{-3}. Погрешность, обусловленная возмущением такого порядка можно оценить следующим образом

$$\|P_3(0, \delta f)\| \leqslant \|\delta f\| L_3(0) = 10^{-3} \cdot 1.40.$$

Погрешность интерполяции

$$\|R_3\,(0)\,\| \leqslant \frac{\|-\cos 0\|}{4!}\|\omega_4(0)\| \approx 6.81 \cdot 10^{-3}.$$

x	$x_0 = 0$	$x_1 = 1$	$x_2 = 2$	$x_3 = 3$	$x_4 = 4$
$f(x)$	4	2.5	1	-1	-2

Задача 9.2с. Для функции, заданной таблично, найти значение $f'(3.)$ с максимально возможной точностью

1. с помощью интерполяции
2. методом неопределённых коэффициентов

Решение. 1.

$$l_0 = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)(x_0-x_4)},$$
$$l_1 = \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)},$$
$$l_2 = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)},$$
$$l_3 = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)},$$
$$l_4 = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_4-x_0)(x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3)}.$$
$$P_4(x) = f(x_0)l_0 + f(x_1)x_1 + f(x_2)x_2 + f(x_3)x_3 + f(x_4)x_4.$$
$$P_4'(3) \approx -1.9.$$

2.

$$f'(x) = a_0 f(x_0) + a_1 f(x_1) + a_2 f(x_2) + a_3 f(x_3) + a_4 f(x_4).$$
$$f(x_0) = f(x) + f'(x)(x_0-x) + \frac{1}{2}f''(x)(x_0-x)^2 + \frac{1}{6}f'''(x)(x_0-x)^3 + \dots.$$
$$f(x_1) = f(x) + f'(x)(x_1-x) + \frac{1}{2}f''(x)(x_1-x)^2 + \frac{1}{6}f'''(x)(x_1-x)^3 + \dots.$$
$$f(x_2) = f(x) + f'(x)(x_2-x) + \frac{1}{2}f''(x)(x_2-x)^2 + \frac{1}{6}f'''(x)(x_2-x)^3 + \dots.$$
$$f(x_3) = f(x) + f'(x)(x_3-x) + \frac{1}{2}f''(x)(x_3-x)^2 + \frac{1}{6}f'''(x)(x_3-x)^3 + \dots.$$
$$f(x_4) = f(x) + f'(x)(x_4-x) + \frac{1}{2}f''(x)(x_4-x)^2 + \frac{1}{6}f'''(x)(x_4-x)^3 + \dots.$$
$$\begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 0 \\ a_0(x_0-x) + a_1(x_1-x) + a_2(x_2-x) + a_3(x_3-x) + a_4(x_4-x) = 1 \\ a_0(x_0-x)^2 + a_1(x_1-x)^2 + a_2(x_2-x)^2 + a_3(x_3-x)^2 + a_4(x_4-x)^2 = 0 \\ a_0(x_0-x)^3 + a_1(x_1-x)^3 + a_2(x_2-x)^3 + a_3(x_3-x)^3 + a_4(x_4-x)^3 = 0 \\ a_0(x_0-x)^4 + a_1(x_1-x)^4 + a_2(x_2-x)^4 + a_3(x_3-x)^4 + a_4(x_4-x)^4 = 0 \end{cases}.$$

Решая данную систему, находим

$$a_0 = -\frac{1}{12}, \quad a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_2 = -\frac{3}{2}, \quad a_3 = \frac{5}{6}, \quad a_4 = \frac{1}{4}.$$

Откуда

$$f'(x) = 4a_0 + 2.5a_1 + a_2 - a_3 - 2a_4 = -\frac{23}{12} \approx -1.9.$$

Тема VII. Численное интегрирование

Задача 6.1. Доказать, что вычисление интеграла от строго выпуклой функции $f'' > 0$ по формулам прямоугольников со средней точкой даёт заниженное значение интеграла.

Доказательство. По определению строго выпуклой функции на промежутке $[a, b]$

$$\forall u, v \in [a, b], u \leqslant v, \forall t \in [0, 1] : f(tu + (1-t)v) \leqslant tf(u) + (1-t)f(v).$$

Тогда для $t = \frac{1}{2}$

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leqslant \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}.$$

$$\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)dx = \frac{1}{b-a}\left(\int\limits_a^{(a+b)/2} f(x)dx + \int\limits_{(a+b)/2}^b f(x)dx\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \left[f\left(\frac{a+b-t(b-a)}{2}\right) + f\left(\frac{a+b+t(b-a)}{2}\right)\right]dt \geqslant f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

Откуда тривиально следует доказываемое утверждение. □

Задача 8.3. Пусть $\triangle ABC$ — треугольник в плоскости (x, y), точки M, N, K — середины его сторон. Показать, что квадратурная формула

$$\iint\limits_{\triangle ABC} f(x, y)dxdy = \frac{1}{3}S_{\triangle ABC}\left(f(M) + f(N) + f(K)\right)$$

точна для всех многочленов второй степени

$$f(x, y) = a_{11}x^2 + a_{12}xy + a_{22}y^2 + b_1x + b_2y + c.$$

Решение. Для упрощения интеграла в левой части данного равенства сначала отобразим первую вершину в начало координат, вторую вершину в точку $(1, 0)$ и третью вершину в точку $(0, 1)$. Т. е.

$$x(s, t) = x_1 + (x_2 - x_1)s + (x_3 - x_1)t,$$

$$y(s, t) = y_1 + (y_2 - y_1)s + (y_3 - y_1)t.$$

Откуда

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(s, t)} = (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1) = 2S_{\triangle ABC}.$$

Обозначим $\varphi(s, t) = f(x(s, t), y(s, t))$ и

$$\varphi(s, t) = \xi_{11}s^2 + \xi_{12}st + \xi_{22}t^2 + \eta_1 s + \eta_2 t + \zeta.$$

Тогда

$$f(M) = \varphi\left(0, \frac{1}{2}\right) = \zeta + \frac{\eta_2}{2} + \frac{\xi_{22}}{4}, \quad ,$$

$$f(N) = \varphi\left(\frac{1}{2}, 0\right) = \zeta + \frac{\eta_1}{2} + \frac{\xi_{11}}{4}.$$

$$f(K) = \varphi\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \zeta + \frac{\eta_1}{2} + \frac{\eta_2}{2} + \frac{\xi_{11}}{4} + \frac{\xi_{12}}{4} + \frac{\xi_{22}}{4}.$$

Следовательно

$$\iint\limits_{\triangle ABC} f(x,y)dxdy = 2S_{\triangle ABC} \int\limits_0^1 \int\limits_0^{1-s} \varphi(s,t)dtds =$$

$$= 2S_{\triangle ABC}\left(\frac{\zeta}{2} + \frac{\eta_1}{6} + \frac{\eta_2}{6} + \frac{\xi_{11}}{12} + \frac{\xi_{12}}{24} + \frac{\xi_{22}}{12}\right) =$$

$$= \frac{1}{3}S_{\triangle ABC}(f(M) + f(N) + f(K)).$$

Задача 8.12з. Построить квадратуру Гаусса-Кристоффеля с двумя узлами для вычисления интеграла:

$$\int\limits_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2} f(x)dx.$$

Решение. Весовая функция

$$p(x) = \sqrt{1-x^2}.$$

Найдём c_1, c_2, x_1, x_2:

$$\begin{cases} \int\limits_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\, dx = c_1 + c_2, \\ \int\limits_{-1}^{1} x\sqrt{1-x^2}\, dx = c_1x_1 + c_2x_2, \\ \int\limits_{-1}^{1} x^2\sqrt{1-x^2}\, dx = c_1x_1^2 + c_2x_2^2, \\ \int\limits_{-1}^{1} x^3\sqrt{1-x^2}\, dx = c_1x_1^3 + c_2x_2^3. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = \dfrac{\pi}{2}, \\ c_1x_1 + c_2x_2 = 0, \\ c_1x_1^2 + c_2x_2^2 = \dfrac{\pi}{8}, \\ c_1x_1^3 + c_2x_2^3 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_{1,\,2} = \dfrac{\pi}{4}, \\ x_{1,\,2} = \pm\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Следовательно квадратурная формула Гаусса-Кристоффеля будет иметь следующий вид

$$\int\limits_{-1}^{1} f(x)\sqrt{1-x^2}\, dx = \frac{\pi}{4}\left(f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(-\frac{1}{2}\right)\right).$$

Задача 8.25б. Предложить алгоритм вычисления интеграла

$$\int\limits_0^3 \frac{\sin\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{3x^2 - x^3}}dx$$

с заданной точностью ε, используя метод регуляризации подынтегральной функции.

Решение. У данного интеграла две особенности: $x = 0$ и $x = 3$. В рассматриваемом случае представим его в виде суммы трёх интегралов:

$$I = I_1 + I_2 + I_3,$$

$$I_1 = \int\limits_0^{\delta_1} \frac{\sin\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{3x^2 - x^3}}dx, \quad I_2 = \int\limits_{\delta_1}^{3-\delta_2} \frac{\sin\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{3x^2 - x^3}}dx, \quad I_3 = \int\limits_{3-\delta_2}^{3} \frac{\sin\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{3x^2 - x^3}}dx.$$

Второй интеграл особенности не содержит и вычисляется по любой квадратурной формуле. Вопрос о выборе величин δ_1 и δ_2 обсуждается ниже.

Первый интеграл с требуемой точностью вычисляем аналитически, используя представление подынтегральной функции в окрестности особой точки ($x = 0$) в виде отрезка ряда по степеням x

$$I_1 = \int\limits_0^{\delta_1} dx \frac{\dfrac{x^{1/2}}{1!} - \dfrac{x^{3/2}}{3!} + \ldots + (-1)^m \dfrac{x^{(2m+1)/2}}{(2m+1)!}}{\sqrt{3}x} \times$$

$$\times \left(1 + \frac{-1/2}{1!}\left(-\frac{x}{3}\right) + \frac{(-1/2)(-3/2)}{2!}\left(-\frac{x}{3}\right)^2 + \ldots + \frac{C^n_{-1/2}}{n!}\left(-\frac{x}{3}\right)^n\right) =$$

$$= \int\limits_0^{\delta_1} dx \left(\frac{1}{\sqrt{3x}} + O\left(x^{3/2}\right)\right) = \frac{2\sqrt{\delta_1}}{\sqrt{3}} + O\left(\delta_1^{5/2}\right).$$

Для выбора параметра δ_1 имеем следующий критерий

$$\frac{2\sqrt{\delta_1}}{\sqrt{3}} \leqslant \frac{\varepsilon}{3}.$$

Третий интеграл также с требуемой точностью вычислим аналогично аналитически

$$I_3 = \int\limits_{3-\delta_2}^{3} \frac{\sin\left(\sqrt{x}\right)}{x\sqrt{3-x}}dx \overset{t=3-x}{=\!=\!=} \int\limits_0^{\delta_2} \frac{\sin\left(\sqrt{3-t}\right)}{(3-t)\sqrt{t}}dt = \int\limits_0^{\delta_2} dt \left(\frac{\sin\sqrt{3}}{3\sqrt{t}} + O\left(t^{1/2}\right)\right) =$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{\delta_2}\sin\sqrt{3}.$$

Критерий для δ_2:

$$\frac{2}{3}\sqrt{\delta_2}\sin\sqrt{3} \leqslant \frac{\varepsilon}{3}.$$

Оставшуюся $\varepsilon/3$ отведём в качестве допустимого уровня погрешности при вычислении I_2.

Задача 9.5б. Для функции, заданной таблично, вычислить значение определённого интеграла методом трапеций, сделать уточнение результата экстраполяцией Ричардсона. Сравнить уточнённый результат с вычислениями по методу Симпсона.

x	0	0.125	0.25	0.375	0.5
$f(x)$	0.000000	0.021470	0.293050	0.494105	0.541341
x	0.625	0.75	0.875	1	
$f(x)$	0.516855	0.468617	0.416531	0.367879	

Решение. Метод трапеций:

```
In[8]:=  x_i_ :=0.125 i
         f_i_ :={0.,0.021470,0.293050,0.494105,0.541341,
         0.516855,0.468617,0.416531,0.367879}[[i+1]]
         h_k_ :=x_(k+1)-x_k
```

$$\mathtt{Ih}=\sum_{k=0}^{7}\frac{h_k}{2}(f_{k+1}+f_k)$$

```
Out[8]=  0.3669885625`
```

Уточнение результата экстраполяцией Ричардсона:

$$\text{In[9]:=}\quad \mathtt{I2h}=\sum_{k=0}^{3}\frac{h_{2k}+h_{2k+1}}{2}(f_{2k+2}+f_{2k});$$

$$\mathtt{IR}=\mathtt{Ih}+\frac{\mathtt{Ih}-\mathtt{I2h}}{2^2-1}$$

```
Out[9]=  0.3654057916666667`
```

Вычисления по методу Симпсона:

$$\text{In[10]:=}\quad \mathtt{IS}=\sum_{k=0}^{3}\frac{h_{2k}+h_{2k+1}}{6}(f_{2k+2}+4f_{2k+1}+f_{2k})$$

```
Out[10]=  0.36540579166666665`
```

Уточнённый экстраполяцией Ричардсона результат совпадает со значением, полученным методом Симпсона, чего и следовало ожидать.

Задача 9.10г. Вычислить несобственный интеграл

$$\int_0^1 \frac{\ln\left(x^2+1\right)}{\sqrt{x}}dx$$

с точностью 10^{-4}. Укажите и сравните различные приёмы для решения данной задачи.

Решение. Сделаем замену $x = t^2$:

$$I = 2\int\limits_0^1 \ln\left(t^4+1\right) dt = \int\limits_{-1}^1 \ln(t^4+1)dt = 2\ln(t^4+1)t\big|_0^1 - 2\int\limits_0^1 \frac{4t^3dt}{t^4+1}t =$$

$$= 2\ln(2) - 8 + 8\int\limits_0^1 \frac{dt}{t^4+1} = \dots$$

$$= 2\ln 2 - 8 + \sqrt{2}\left(\ln\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} + 2\operatorname{arctg}\left(1+\sqrt{2}\right) - 2\operatorname{arctg}\left(1-\sqrt{2}\right)\right) \approx 0.322078.$$

Для достижения требуемой точности методом Гаусса проведём оценку остаточного члена интегрирования:

$$r_2^\Gamma = \frac{1}{135}\max_{\xi\in[-1,\,1]}\left|f^{(4)}(\xi)\right| \approx 0.18, \quad r_3^\Gamma = \frac{1}{15750}\max_{\xi\in[-1,\,1]}\left|f^{(6)}(\xi)\right| \approx 0.12$$

$$r_4^\Gamma = \frac{2}{3472875}\max_{\xi\in[-1,\,1]}\left|f^{(8)}(\xi)\right| \approx 0.053, \quad r_5^\Gamma = \frac{13}{1237732650}\max_{\xi\in[-1,\,1]}\left|f^{(10)}(\xi)\right| \approx 0.24\dots$$

$$r_{10}^\Gamma = \frac{2^{21}(10!)^4}{21(20!)^3}\max_{\xi\in[-1,\,1]}\left|f^{(20)}(\xi)\right| \approx 6.2\cdot 10^{-5}.$$

Возможно, искать нули и веса для полиномов Лежандра 10-й степени не лучшая идея, так что перейдём к другим методам...

На первый взгляд особой точки в данном интеграле нет, т. к. в окрестности нуля $\ln\left(x^2+1\right) \sim x^2$. Однако $f''(0) \to \infty$, поэтому воспользуемся методом замены переменных, т. е. будем искать интеграл в виде

$$I = 2\int\limits_0^1 \ln(t^4+1)dt.$$

Как было показано выше, методами замены переменных и интегрирования по частям интеграл вычислился точно.

Будем вычислять данный интеграл по формуле трапеций. Сперва найдём шаг сетки для заданной точности

$$10^{-4} = \varepsilon \leqslant \frac{1}{12}\max_{0\leqslant x\leqslant 1}|f''(x)|h^2 \implies h < 0.007.$$

Шаг $h = 0.005$ удовлетворит нашу потребность в точности. Далее приведён код в Mathematica для формулы трапеций.

```
In[11]:=  x_i_ :=0.005 i
          f_i_ :=2Log[x_i^4+1]
          h_k_ :=x_(k+1)-x_k
          Ih=Sum[h_k/2 (f_(k+1)+f_k), {k,0,199}]

Out[11]=  0.3220865931864013`
```

Результат с нужной точностью согласуется с аналитическим, чего и следовало ожидать.

Задача 9.13б. Функция $f(x)$ задана своими сеточными значениями. Найти $\int\limits_a^b f(x)\sin 80x\,dx$ построением сплайна для аппроксимации $f(x)$.

i	0	1	2	3	4
x_i	0.1	0.5	0.9	1.3	1.7
f_i	−2.3026	−0.69315	−0.10536	0.26236	0.53063

Решение. Код для построения свободного кубического сплайна и его последующего интегрирования в Mathematica:

```
In[12]:= p_i_[x_]:=a_i x^3+b_i x^2+c_i x+d_i
x_i_:={0.1,0.5,0.9,1.3,1.7}[[i+1]]
f_i_:={-2.3026,-0.69315,-0.10536,0.26236,0.53063}[[i+1]]
sol=Solve[{p_1[x_0]==f_0,p_4[x_4]==f_4, p_1''[x_0]==0,p_4''[x_4]==0,
Table[p_i[x_i]==p_i+1[x_i]==f_i,{i,3}],
Table[Derivative[j][p_i][x_i]==
Derivative[j][p_i+1][x_i],{i,3},{j,2}]}//Flatten,
Table[{a_i,b_i,c_i,d_i},{i,4}]//Flatten]
f[x_]:=Piecewise[{{p_1[x],x_0<x<x_1},{p_2[x],x_1<x<x_2},
{p_3[x],x_2<x<x_3},{p_4[x],x_3<x<x_4}}]/.sol
∫_{x_0}^{x_4} f[x]Sin[80x]dx

Out[12]= {{a_1->-4.0580552455357095`,b_1->1.217416573660713`,
c_1->4.551172181919641`,d_1->-2.7658333286830357`,
a_2->4.3268387276785525`,b_2->-11.35992438616068`,
c_2->10.839842661830337`,d_2->-3.8139450753348183`,
a_3->-0.7244559151785411`,b_3->2.27857114955348`,
c_3->-1.4348033203124082`,d_3->-0.13155128069199595`,
a_4->0.45567243303569954`,b_4->-2.3239294084820488`,
c_4->4.5484474051338415`,d_4->-2.724293261718706`}}

Out[13]= {0.007454746884931084`}
```

Т. е.

$$\int\limits_a^b f(x)\sin 80x\,dx \approx 0.007455.$$

Тема VIII. Решение ОДУ

Задача 7.6. Нелинейное автономное дифференциальное уравнение решается с помощью явного метода Рунге-Кутты второго порядка аппроксимации с числом стадий, равным двум. Указать коэффициенты метода, имеющего минимальную погрешность аппроксимации для данного класса задач.

Решение. В указанном методе разностная схема имеет вид

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} = b_1 f(y_n) + b_2 f\left(y_n + \tau a_{21} f(y_n)\right).$$

В таком случае невязка в точке x вычисляется как

$$\varphi(x) = \frac{y(x+\tau) - y(x)}{\tau} - b_1 f\left(y(x)\right) - b_2 f\left(y(x) + \tau a_{21} f\left(y(x)\right)\right),$$

где $y(\cdot)$ есть точное решение дифференциального уравнения.

Найдём условия на коэффициенты b_1, b_2, a_{21} необходимые для условий $\varphi(0)$, $\varphi'(0) = 0$. Это и будет означать, что разностная схема имеет второй порядок аппроксимации.

Имеем, что

$$\varphi(0) = y''(x) - 2a_{12} b_2 f(y(x)) f'(y(x)).$$

Так как

$$y''(x) = f'(y(x)) y'(x) = f'(y(x)) f(y(x)),$$

то верно, что $\varphi'(0) = 0$ при $1 = 2a_{12}b_2$.

Проверим, что в общем случае вторую производную φ невозможно занулить. Имеем, что

$$\begin{aligned}\varphi''(0) = y'''(x) - 3a_{21}^2 b_2 f(y(x))^2 f''(y(x)) = \\ = f(y(x))^2 f''(y(x))(1 - 3a_{21}^2 b_2) + f'(y(x))^2 f(y(x)).\end{aligned}$$

Видим, что засчёт выбора коэффициентов невозможно для всякой функции f занулить величину $\varphi''(0)$.

Введём параметр λ. Тогда можно выразить все коэффициенты через данный параметр:

$$b_1 = \lambda, \quad b_2 = 1 - \lambda, \quad a_{12} = \frac{1}{2(1-\lambda)}.$$

Видим, что параметр λ может пробегать множество $\mathbb{R} \setminus 1$.

Таким образом получаем однопараметрическое семейство коэффициентов, которые дают требуемый порядок аппроксимации:

$$b_1 = \lambda, \quad b_2 = 1 - \lambda, \quad a_{12} = \frac{1}{2(1-\lambda)},$$

где λ пробегает множество $\mathbb{R} \setminus 1$.

Задача 9.7-2. Приближенное решение задачи Коши

$$\frac{dx}{dt} = ax; \quad x(0) = X_0; \quad 0 \leqslant t \leqslant T$$

вычисляется по разностной схеме

$$\frac{x_{n+1} - \frac{4}{3}x_n + \frac{1}{3}x_{n-1}}{2\tau} = \frac{1}{3} a x_{n+1}; \quad x_0 = X_0.$$

Способ задания дополнительного краевого условия x_1 предложить самостоятельно.

Найти порядок аппроксимации разностной схемы. Исследовать влияние способа задания x_1 на порядок аппроксимации. Исследовать на устойчивость разностную схему. Найти точное решение разностной задачи. Исследовать его сходимость к точному решению дифференциальной задачи.

Решение. Найдём порядок аппроксимации разностной схемы.

$$r_\tau = \frac{3u_{m+1} - 4u_m + u_{m-1}}{2\tau} - f_{m+1} =$$
$$= \frac{3u_{m+1} - 4\left(u_{m+1} - u'_{m+1}\tau + u''_{m+1}\frac{\tau^2}{2} + u'''_{m+1}\frac{\tau^3}{6} + O\left(\tau^4\right)\right)}{2\tau} +$$
$$+ \frac{u_{m+1} - 2u'_{m+1}\tau + 2u''_{m+1}\tau^2 - \frac{4}{3}u'''_{m+1}\tau^3 + O\left(\tau^4\right)}{2\tau} - f_{m+1} = -u'''_{m+1}\tau^2,$$

— второй порядок.

Если мы зададим x_1 с точностью до второго порядка или выше, то и у всей схемы будет второй порядок, если же точность будет первого порядка, то и вся схема будет такой же точности. Поэтому для нахождения x_1 решим на первом шаге уравнение (метод трапеций)

$$\frac{x_1 - x_0}{\tau} = \frac{a}{2}\left(x_0 + x_1\right) \implies x_1 = -\frac{x_0(a\tau + 2)}{a\tau - 2}.$$

Предположим, что для собственных значений оператора перехода λ последовательные значения x связаны соотношением

$$x_{n+1} = \lambda x_n, \quad x_n = \lambda x_{n-1}.$$

Перепишем разностную схему следующим образом

$$x_{n+1}\left(1 - \frac{2}{3}a\tau\right) - \frac{4}{3}x_n + \frac{1}{3}x_{n-1} = 0.$$

Составим характеристическое уравнение

$$\lambda\left(1 - \frac{2}{3}a\tau\right) - \frac{4}{3} + \frac{1}{3\lambda} = 0.$$

Его корнями являются числа

$$\lambda_{1,\,2} = \frac{2 \pm \sqrt{1 + 2a\tau}}{3 - 2a\tau}.$$

Таким образом получаем общее решение разностного уравнения

$$x_n = C_1\left(\frac{2 - \sqrt{1 + 2a\tau}}{3 - 2a\tau}\right)^n + C_2\left(\frac{2 + \sqrt{1 + 2a\tau}}{3 - 2a\tau}\right)^n,$$

где C_1 и C_2 — произвольные константы.

Исследуем на устойчивость данную разностную схему. Имеют место следующие разложения

$$\frac{2 - \sqrt{1 + 2a\tau}}{3 - 2a\tau} = \frac{1}{3} + O(\tau), \quad \frac{2 + \sqrt{1 + 2a\tau}}{3 - 2a\tau} = 1 + a\tau + O\left(\tau^2\right).$$

Видим, что при всех достаточно малых положительных значениях τ верно, что

$$|\lambda_1| \leqslant 1 + (|a| + 1)\,\tau, \quad |\lambda_2| \leqslant 1 + (|a| + 1)\,\tau.$$

Т. е. данная разностная схема нестого устойчива.

Если $a \leqslant 0$, то при всех достаточно малых τ верно, что $|\lambda_1| \leqslant 1$ и $|\lambda_2| \leqslant 1$, поэтому в таком случае имеет место строгая устойчивость. Если $a > 0$, то $\lambda_2 > 1$ при всех достаточно малых положительных значения τ, поэтому в таком случае строгая устойчивость отсутствует. Таким образом имеет место нестрогая устойчивость разностной схемы во всех случаях, а строгая устойчивость имеет место только при $a \leqslant 0$.

Задача 9.9а. Для решения задачи Коши на отрезке $[0, T]$ введена равномерная сетка с шагом τ. Рассматривается дифференциальное уравнение, которому в соответствие ставится численный метод

$$y' - y = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \quad y(0) = 1,$$

$$(y_{n+1} - y_n)/h - (3y_{n+1} - y_n)/2 = 0, \quad y_0 = 1.$$

Выписать общее решении разностного уравнения и исследовать сходимость численного решения к решению дифференциальной задачи на основе определения сходимости.

Пусть по данной схеме проводятся вычисления на компьютере, где для хранения мантиссы отводится 10 бит. Оценить максимальную ошибку округления для данной задачи.

Решение. Запишем характеристическое уравнение

$$y_{n+1} = \lambda y_n, \quad \frac{\lambda - 1}{h} = \frac{3\lambda - 1}{2} \implies \lambda = \frac{h-2}{3h-2}.$$

Разностное уравнение с учётом начального условия имеет общее решение

$$y_n = \left(\frac{h-2}{3h-2}\right)^n.$$

Исследуем сходимость решения разностного уравнения к решению дифференциального уравнения. Общее решение дифференциального уравнения имеет вид $y(x) = e^x$. Обозначим через N_h число узлов сетки, в которых вычисляется искомое решение, при данном значении h.

Сходимость решения разностного уравнения к решению дифференциального уравнения означает, что

$$\lim_{h \to +0} \max_{k \in \overline{0,\, N_h}} |y_k - y(kh)| = 0.$$

Имеем следующие разложения по формуле Тейлора:

$$e^h = 1 + \tau + \frac{h^2}{2} + O\left(h^3\right), \quad \frac{h-2}{3h-2} = 1 + h + \frac{3h^2}{2} + O\left(h^3\right).$$

Видим, что при всех достаточно малых положительных значениях h верно, что $e^h < \frac{h-2}{3h-2}$. Отсюда следует, что

$$\max_{k \in \overline{0,\, N_h}} |y_k - y(kh)| = \left|\frac{h-2}{3h-2} - e^h\right|.$$

Можно считать, что при малых h верно, что $N_h h = 1$, поэтому $e^{N_h h} = e$ и $\left(\frac{h-2}{3h-2}\right)^{N_h} = \left(\frac{h-2}{3h-2}\right)^{2/h}$.

Имеем следующее разложение

$$\left(\frac{h-2}{3h-2}\right)^{1/h} = e + O(h).$$

Таким образом получаем, что

$$\lim_{h\to+0} \max_{k\in\overline{0,\,N_h}} |y_k - y(kt)) = 0.$$

Получаем, что решение разностного уравнения сходится к решению дифференциального уравнения.

Пусть y_n есть точное решение разностного уравнения, пусть $\tilde{y}_n$ есть соответствующие записанные на компьютере значения.

Имеет место следующая оценка для ошибки округления

$$R = \max_{k\in\overline{0,\,N_h}} |y_k - \tilde{y}_k| \simeq e^L|y_0 - \tilde{y}_0| + 2\varepsilon\frac{e^L}{L},$$

где L — это константа Липшица правой части исходного дифференциального уравнения, ε есть максимальная ошибка округления на компьютере.

В нашем случае правая часть дифференциального уравнения имеет вид y, поэтому $L = 1$. Т. к. в нашем случае под мантиссу отведено 10 бит, то $\varepsilon = 2^{-10}$. Т. к. $y_0 = y(0) = 1$, то $|y_0 - \tilde{y}_0| \leqslant \varepsilon|y_0| = \varepsilon$. Получаем, что

$$R \simeq \varepsilon e^L\left(1 + \frac{2}{L}\right) = \frac{1}{2^10}e(1+2) \simeq 10^{-2}.$$

Таким образом получаем оценку для максимальной погрешности округления: $R \approx 10^{-2}$.

Задача 10.3. Приближённо решить задачу Коши:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = y\sin x, \quad y(0) = 0;\ y'(0) = 1;\ 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

а) Описать алгоритм, основанный на переходе к системе двух уравнений первого порядка с последующим решением этой системы.

б) Описать алгоритм, основанный на замене уравнения $y'' = y\sin x$ разностным уравнением второго порядка.

в) Решить задачу любым из этих методов

Решение. а) Обозначим $y' = z$, тогда получаем систему из двух уравнений

$$\begin{cases} y' = z \\ z' = y\sin x \end{cases}.$$

Явная схема Эйлера для данной системы ($x_n = \tau n$)

$$\begin{cases} \dfrac{y_{n+1} - y_n}{\tau} = z_n \\ \dfrac{z_{n+1} - z_n}{\tau} = y_n \sin x_n \end{cases}.$$

б) Вторая производная вычисляется по приближённой формуле

$$y''(x) = \frac{y(x+\tau) - 2f(x) + f(x-\tau)}{\tau^2}.$$

Значит явная схема Эйлера для данного уравнения будет иметь вид

$$\frac{y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}}{\tau^2} = y_n \sin x_n.$$

в) Алгоритм в Mathematica для первого метода:

In[14]:=

```
y_0=0;
z_0=1;
τ=0.01;
x_n_:=x_n=τ n
y_n_:=y_n=z_{n-1}τ+y_{n-1}
z_n_:=z_n=y_{n-1}Sin[x_{n-1}]τ+z_{n-1}
sol=Table[{x_i,y_i},{i,0,100}];
ListLinePlot[sol]
```

Out[14]=