Введение в функциональное исчисление операторов в гильбертовом пр-ве

Драчов Ярослав
Факультет общей и прикладной физики МФТИ

4 декабря 2020 г.

Рассмотрим сначала конечно-мерное евклидово пространство $\mathcal{E}^n$ размерности $n \in \mathbb{N}$ (оно автоматически полное относительно евклидовой нормы) и рассмотрим линейный оператор $A : \mathcal{E}_n \to \mathcal{E}_n$. Пусть $e = \{e_1, \ldots, e_n\}$ — ОНБ в $\mathcal{E}_n$. Тогда в базисе e оператор A задаётся $n \times n$ матрицей $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, так что $\forall x \in \mathcal{E}_n$ с координатным столбцом $\xi \in \mathbb{C}^n$ в базисе e координаты $A(x)$ образуют столбец $A\xi \in \mathbb{C}^n$. Алгебраически мы можем определить оператор

$$A^* : \mathcal{E}_n \to \mathcal{E}_n,$$

сопряжённый к оператору A, так, чтобы

$$\begin{aligned} &(A(x), y) = (x, A^*(y)) \quad \forall x, y \in \mathcal{E}_n \\ &\quad \parallel \\ &(A\xi)^T \overline{\eta} = \eta^T A^T \overline{\eta} = \xi \overline{\overline{A^T}\eta}, \end{aligned}$$

где $x = e\xi$ и $y = e\eta$, $\xi, \eta \in \mathbb{C}^n$. То есть матрица A^* оператора A^* в базисе e равна

$$\overline{A^T} \in \mathbb{C}^{n\times n}.$$

Определение. Оператор A называется *самосопряжённым*, если

$$A = A^* \Leftrightarrow A = \overline{A^T}.$$

Как хорошо известно из линейной алгебры, все собственные числа самосопряжённого оператора $A : \mathcal{E}_n \to \mathcal{E}_n$ вещественны, а его собственные векторы, отвечающие различным собственным числам — ортогональны в $\mathcal{E}_n$. Обозначим $\Lambda \subset \mathbb{R}$ — все собственные числа ССО A, это конечное множество,

$$\forall \lambda \in \Lambda \implies \underbrace{\mathrm{Ker}(A - \lambda I)}_{\substack{\text{собственное подпр-во,}\\ \text{соответствующее}\\ \lambda\in\Lambda}} \neq 0$$

(здесь $I : \mathcal{E}_n \to \mathcal{E}_n$ — тождественный оператор). Обозначим $A_\lambda \equiv A - \lambda I$. Таким образом $\forall \lambda, \mu \in \Lambda : \lambda \neq \mu$, следовательно

$$\mathrm{Ker}\, A_\lambda \perp \mathrm{Ker}\, A_\mu.$$

Более того, хорошо известно, что

$$\sum_{\lambda\in\Lambda} \dim \operatorname{Ker} A_\lambda = n,$$

т. е. имеет место равенство

$$\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} \operatorname{Ker} A_\lambda = \mathcal{E}_n \ !$$

Этот факт ещё формулируется как существование у ССО в конечно-мерном евкл. $\mathcal{E}_n$ ортогонального базиса из его собственных векторов. Можно это переформулировать на языке ортогональных проекторов в $\mathcal{E}_n$: $\forall\lambda \in \Lambda$ обозначим $P(\lambda) : \mathcal{E}_n \to \operatorname{Ker} A_\lambda$ — ортопроектор из $\mathcal{E}_n$ на $\operatorname{Ker} A_\lambda$, то есть $\forall x \in \mathcal{E}_n \implies P(\lambda)x$ — ортогональная проекция x на собственное подпр-во $\operatorname{Ker} A_\lambda$ оператора A

$$\begin{gathered} \lambda, \mu \in \Lambda : \lambda \neq \mu \implies \operatorname{Ker} A_\lambda \perp \operatorname{Ker} A_\mu \\ \Downarrow \\ \forall x \in \mathcal{E}_n \implies P(\lambda)x \perp P(\mu)x, \end{gathered}$$

то есть образы $P(\lambda)$ и $P(\mu)$ ортогональны. При этом

$$\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} \operatorname{Ker} A_\lambda = \mathcal{E}_n \implies \forall x \in \mathcal{E}_n \implies x = \sum_{\lambda\in\Lambda} P(\lambda)x.$$

То есть $I = \sum_{\lambda\in\Lambda} P(\lambda)$ — это разложение тождественного в $\mathcal{E}_n$ (то есть единичного) оператора в конечную сумму ортогональных проекторов на собственные подпространства ССО A. Так как $\forall\lambda \in \Lambda$ $\forall x \in \mathcal{E}_n$ имеем $P(\lambda)x \in \operatorname{Ker} A_\lambda$, то

$$\begin{gathered} \underbrace{A_\lambda P(\lambda)x}_{\parallel} = 0 \\ AP(\lambda)x - \lambda P(\lambda)x = 0, \end{gathered}$$

т. е.

$$AP(\lambda)x = \lambda P(\lambda)x.$$

Тогда $\forall x \in \mathcal{E}_n$ имеем

$$x = \sum_{\lambda\in\Lambda} P(\lambda)x \implies Ax = \sum_{\lambda\in\Lambda} AP(\lambda)x = \sum_{\lambda\in\Lambda} \lambda P(\lambda)x,$$

т. е.

$$A = \sum_{\lambda\in\Lambda} \lambda P(\lambda) : \mathcal{E}_n \to \mathcal{E}_n$$

— это разложение A в сумму ортопроекторов на собственные подпространства ССО A с коэфф. из соотв. собственных чисел A.

Определение. Это разложение наз. *спектральным разложением* ССО A.

Итак, если $A : \mathcal{E}_n \to \mathcal{E}_n$ — ССО (самосопряжённый оператор),

$$\Lambda = \left\{ {}^{\text{все собств.}}_{\text{числа} A} \right\} \subset \mathbb{R},$$

$$\forall \lambda \in \Lambda \hookrightarrow P(\lambda) : \mathcal{E}_n \to \operatorname{Ker} A_\lambda \text{ — ортопроектор,}$$

то

$$A = \sum_{\lambda \in \Lambda} \lambda P(\lambda).$$

Заметим, что $\forall \lambda, \mu : \lambda \neq \mu$ имеем $P(\lambda)P(\mu) = 0$ и $P(\mu)P(\lambda) = 0$, так как $\operatorname{Im} P(\lambda) = \operatorname{Ker} A_\lambda$ и $\operatorname{Im} P(\mu) = \operatorname{Ker} A_\mu$ — *ортогональные подпр-ва*!

При этом также по определению ортопроектора очевидно, что $\forall \lambda \in \Lambda$ вып.

$$(P(\lambda))^2 = P(\lambda) \implies (P(\lambda))^k = P(\lambda) \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Следовательно, из разложения

$$A = \sum_{\lambda \in \Lambda} \lambda P(\lambda) : \mathcal{E}_n \to \mathcal{E}_n$$

мы $\forall k \in \mathbb{N}$ находим:

$$A^k = \sum_{\lambda \in \Lambda} \lambda^k P(\lambda) : \mathcal{E}_n \to \mathcal{E}_n.$$

Тогда для любого многочлена

$$T(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_N z^N, \qquad a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}, N \in \mathbb{N}$$

получаем равенство

$$T(A) = \sum_{\lambda \in \Lambda} T(\lambda) P(\lambda) : \mathcal{E}_n \to \mathcal{E}_n.$$

Теперь для любой целой функции $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ вида $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k,\ z \in \mathbb{C}$ с радиусом сходимости ∞ рассмотрим оператор

$$f(A) = \sum_{\lambda \in \Lambda} f(\lambda) P(\lambda) : \mathcal{E}_n \to \mathcal{E}_n.$$

Для частичной суммы $f_N(z) = \sum_{k=0}^{N} a_k z^k$ мы имеем

$$f_N(A) = \sum_{\lambda \in \Lambda} f_N(\lambda) P(\lambda),$$

и тогда получим сходимость $f_N(A)$ и $f(A)$ по операторной норме:

$$\|f(A) - f_N(A)\| = \left\| \sum_{\lambda \in \Lambda} (f(\lambda) - f_N(\lambda))\, P(\lambda) \right\| \leqslant \sum_{\lambda \in \Lambda} |f(\lambda) - f_N(\lambda)| \|P(\lambda)\| \xrightarrow{N \to \infty} 0,$$

т. к. $|f(\lambda) - f_N(\lambda)| \xrightarrow[N \to \infty]{} 0$($\forall \lambda \in \Lambda$ — конечное мн-во), $\|P(\lambda)\| = 1$ (как норма $\forall$ нетривиального ортопроектора). Т. о. $\|f(A) - f_N(A)\| \xrightarrow{N \to \infty} 0$.

Можно пойти дальше и вообще для любой функции $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ (не обязательно даже непрерывной), определить

$$\varphi(A) = \sum_{\lambda \in \Lambda} \varphi(\lambda) P(\lambda) : \mathcal{E}_n \to \mathcal{E}_n.$$

При этом $\varphi(\Lambda)$ — это все собств. числа $\varphi(A)$. Итак, для самосопряжённых операторов, действующих в конечномерном евклидовом пространстве, мы в терминах их спектрального разложения в сумму ортопроекторов мы определили суперпозицию $\forall$ комплексной функции с $\forall$ такими оператором.

Чтобы обобщить этот подход и на бесконечномерное гильбертово пространство, требуется для любого оператора $A : D(A) \to H$ определить понятие сопряжённого оператора

$$\underbrace{A^*}_{?} : \underbrace{D(A^*)}_{?} \to H,$$

и далее для самосопр. операторов поолучить их спектр. разложение.

Приступим к определению сопряжённого оператора для произвольного линейного оператора $A : D(A) \to H$.

Хотим прежде всего понять, где должен быть определён сопряжённый оператор, $\underline{D(A^*) =?}$

Желание: $\forall f \in D(A)$ $\forall g \in (A^*) =?$ иметь равенство

$$(Af, g) = \left(f, \underbrace{A^* g}_{?} \right) \in \mathbb{C}.$$

Вопрос: для каких $g \in H$ можно найти вектор $h \in H$ такой, что $\forall f \in D(A)$ выполнено $(Af, g) = (f, h)$. Так как отображение

$$D(A) \ni f \mapsto (f, h) \in \mathbb{C}$$

является непрерывны по $f \in D(A)$ в силу КБШ:

$$|(f, h)| \leqslant \|f\| \|h\| \qquad F \in D(A)$$

— липшицево с конст. $\|h\|$, то естественно определяем подпространство

$$D(A^*) = \left\{ g \in H : \begin{smallmatrix} \text{отображение} \\ D(A) \ni f \mapsto (Af, g) \in \mathbb{C} \\ \text{непрерывно} \\ \text{по } f \in D(A) \end{smallmatrix} \right\} = \left\{ g \in H : \begin{smallmatrix} \exists C_g > 0 \quad \forall f \in D(A) \text{ вып.} \\ |(Af, g)| \leqslant C_g \|f\| \end{smallmatrix} \right\}$$

($C_g > 0$ — это константа Липшица линейного непр. ф-ла $D(A) \ni f \mapsto (Af, g) \in \mathbb{C}$). Итак, $g \in D(A^*) \subset H \Leftrightarrow D(A) \ni f \mapsto (Af, g) \in \mathbb{C}$ непрерывно по $f \in D(A)$. Очевидно, что $0 \in D(A^*)$, и $\forall g_{1,2} \in D(A^*)$ и $\alpha_{1,2} \in \mathbb{C}$ будет $g = \alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2 \in D(A^*)$, т. к. $\forall f \in D(A)$

$$|(Af, g)| \leqslant |\alpha_1| \underbrace{|(Af, g_1)|}_{\leqslant C_{g_1} \|f\|} + |\alpha_2| \underbrace{|(Af, g_2)}_{\leqslant C_{g_2} \|f\|} \leqslant (|\alpha_1| C_{g_1} + |\alpha_2| C_{g_2}) \|f\|.$$

Теперь линейный непрерывный функционал $\varphi : D(A) \to \mathbb{C}$ вида

$$\varphi(f) = (Af, g), \quad f \in D(A)$$

(Здесь $g \in D(A^*)$) можно по непрерывности продолжить на замыкание $D(A)$ — замкнутое подпространство $\overline{D(A)} \subset H$. Действительно, мы имеем $C_g > 0$:

$$|\varphi(f)| = |(Af, g)| \leqslant C_g \|f\| \forall f \in D(A).$$

Теперь берём $\forall f \in \overline{D(A)}$, имеем последовательность

$$\{f_n\} \subset D(A) : f_n \xrightarrow{\|\cdot\|} f,$$

и тогда $|\varphi(f_n) - \varphi(f_m) = |\varphi(f_n - f_m)| \leqslant C_g \|f_n - f_m\| \xrightarrow[(n,\, m\to\infty)]{} 0$. Следовательно $\{\varphi(f_n)\}$ — фундам. числовая посл-ть, т. е. $\exists \lim_{n\to\infty} \varphi(f_n) \stackrel{\text{def}}{=}$ hio$\psi(t) \in \mathbb{C}$ Заметим, что число $\psi(t) \in \mathbb{C}$ не зависит от выбора посл-ти $D(A) \ni f_n \xrightarrow{\|\cdot\|} f$. Если $\tilde{f}_n \in D(A), \tilde{f}_n \xrightarrow{\|\cdot\|}$, то

$$\left|\varphi(f_n) - \varphi\left(\tilde{f}_n\right)\right| \leqslant C_g \left\|f_n - \tilde{f}_n\right\| \leqslant \underbrace{\|f_n - f\|}_{\to 0} + \underbrace{\left\|\tilde{f}_n - f\right\|}_{\to 0} \to 0 \implies$$

$$\implies \lim_{n\to\infty} \varphi\left(\tilde{f}_n\right) = \lim_{n\to\infty} \varphi(f_n) = \psi(t) \qquad (n \to \infty).$$

Итак, мы определили функционал $\psi : \overline{D(A)} \to \mathbb{C}$, и $\forall f \in \overline{D(A)} \implies |\psi(f)| \leqslant C_g \|f\|$, так как для $f_n \in D(A) \quad f_n \xrightarrow{\|\cdot\|} f$ имеем

$$|\psi(f)| = \lim_{n\to\infty} \underbrace{|\varphi(f_n)}_{\leqslant C_g \|f_n\|} \leqslant C_g \underbrace{\lim_{n\to\infty} \|f_n\|}_{= \|f\|} = C_g \|f\|.$$

Также $\psi : \overline{D(A)} \to \mathbb{C}$ очевидно линеен на $\overline{D(A)}$, т. к. для $\tilde{f}$ и $\hat{f} \in \overline{D(A)}$ строим $\tilde{f}_n \in D(A)$ и $\hat{f}_n \in D(A)$ вида $\tilde{f}_n \xrightarrow{\|\cdot\|} \tilde{f}$ и $\hat{f}_n \xrightarrow{\|\cdot\|} \hat{f}$, и тогда $\forall \tilde{\alpha}$ и $\hat{\alpha} \in \mathbb{C}$ имеем

$$\psi\left(\tilde{\alpha}\tilde{f} + \hat{\alpha}\hat{f}\right) = \lim_{n\to\infty} \varphi\left(\tilde{\alpha}\tilde{f}_n + \hat{\alpha}\hat{f}_n\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\tilde{\alpha}\underbrace{\varphi\left(\tilde{f}_n\right)}_{\to\psi(\tilde{f})} + \hat{\alpha}\underbrace{\varphi\left(\tilde{f}_n\right)}_{\to\psi(\tilde{f})}\right) =$$

$$= \tilde{\alpha}\psi\left(\tilde{f}\right) + \hat{\alpha}\psi\left(\hat{f}\right).$$

Итак, $\psi : \overline{D(A)} \to \mathbb{C}$ линейный непрерывный функционал, $\psi\,|_{D(A)} \equiv \varphi$. При этом $\overline{D(A)}$ как замкнутое подпространство в H само является Гильбертом пространством.

Вопрос: каков общий вид линейного непрерывного функционала в гильб. пр-ве?

Ответ даёт теорема *Рисса-Фреше.*

Теорема (Рисса-Фреше)**.** *Пусть H — гильб. пр-во, $\varphi : H \to \mathbb{C}$ линейный непрерывный функционал. Тогда $\exists! h_\varphi \in H : \varphi(f) = (f, h_\varphi)\ \forall f \in H$*

Доказательство. Если $\varphi \equiv 0$, то очевидно $h_\varphi = 0 \in H$ подойдёт.

Пусть $\varphi \not\equiv \Rightarrow \operatorname{Ker}\varphi \neq H$ и $\operatorname{Ker}\varphi$ — замкнутое подпространство в H в силу непрерывности φ. Тогда по теореме Рисса об ортогональности дополнения замкнутого подпространств в гильбертово пр-ве, имеем равенство

$$\operatorname{Ker}\varphi \oplus (\operatorname{Ker}\varphi)^{\perp} = H.$$

Т. к. $\operatorname{Ker}\varphi \neq H$, то $(\operatorname{Ker}\varphi)^{\perp} \neq \{0\}$, т. е. $\exists g \in (\operatorname{Ker}\varphi)^{\perp} \setminus \{0\}$. Далее, $\forall f \in H$ рассмотрим вектор

$$f - \frac{\varphi(f)}{\varphi(g)} g \in H.$$

Имеем

$$\varphi\left(f - \frac{\varphi(f)}{\varphi(g)} g\right) = \varphi(f) - \frac{\varphi(f)\varphi(g)}{\varphi(g)} = \varphi(f) - \varphi(f) = 0,$$

следовательно

$$f - \frac{\varphi(f)}{\varphi(g)} g \in \operatorname{Ker}\varphi \Rightarrow f - \frac{\varphi(f)}{\varphi(g)} \perp g \Rightarrow (f, g) - \left(\frac{\varphi(f)}{\varphi(g)} g, g\right) = 0,$$

значит

$$(f, g) = \frac{\varphi(f)}{\varphi(g)} \|g\|^2,$$

т. е.

$$\varphi(f) = \left(f, \frac{\overline{\varphi(g)}}{\|g\|^2} g\right) \quad \forall f \in H.$$

Итак,

$$h_{\varphi} = \frac{\overline{\varphi(g)}}{\|g\|^2} g, \quad g \in (\operatorname{Ker}\varphi)^{\perp} \setminus \{0\},$$
$$\varphi(f) = (f, h_{\varphi}) \quad f \in H.$$

Единственность вектора h_{φ}

Если $\tilde{h}$ и $\hat{h} \in H$ таковы, что

$$\varphi(t) = \left(f, \tilde{h}\right) = \left(f, \hat{h}\right) \quad \forall f \in H,$$

то получаем $\left(f, \tilde{h} - \hat{h}\right) = 0 \ \forall f \in H$. В частности, для $f = \tilde{h} - \hat{h} \Rightarrow \left(\tilde{h} - \hat{h}, \tilde{h} - \hat{h}\right) = 0 \Leftrightarrow \left\|\tilde{h} - \hat{h}\right\|^2 = 0$, т. е. $\tilde{h} = \hat{h}$. $\square$

Возвращаемся к определению сопряжённого оператора. Итак, в нашем распоряжении линейный непрерывный функционал

$$\psi : \overline{D(A)} \to \mathbb{C}, \quad \psi\,|_{D(A)} = (Af, g) \quad \forall f \in D(A).$$

Т. к. $\overline{D(A)}$ — замкнутое под-во в H, то само $\overline{D(A)}$ явл. гильбертовым пр-вом. $\Rightarrow$ по Т. Рисса-Фреше $\exists! h_{\psi} \in \overline{D(A)}$ такой. что

$$\psi(f) = (f, h_{\psi}) \quad \forall f \in \overline{D(A)}.$$

В частнсти, для любогоо $f \in D(A)$ имеем равенство

$$(Af, g) = (f, h_{\psi}), \quad f \in D(A).$$

По определению полагаем, что

$$A^* g = h_{\psi}, \quad g \in D(A^*).$$

Определение. Таким образом определён *сопряжённый оператор* $A^* : D(A^*) \to H$, при этом $\operatorname{Im} A^* \subset \overline{D(A)}$.

Заметим, что $A^* : D(A^*) \to H$ является линейным оператором. Действительно, $\forall g_{1,\,2} \in D(A^*)$ $\forall \alpha_{1,\,2} \in \mathbb{C}$ имеем

$$\begin{cases} (Af, g_1) = (f, A^* g_1) \\ (Af, g_2) = (f, A^* g_2) \end{cases} \quad \forall f \in D(A).$$

Т. к. $\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2 \in D(A^*)$ — под-во в H, то $\exists! A^*(\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2) \in \overline{D(A)}$ такой, что

$$(Af, \alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2) = (f, A^*(\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2)) \quad \forall f \in D(A).$$

Но мы также имеем

$$\overline{\alpha_1}(Af, g_1) + \overline{\alpha_2}(Af, g_2) = (Af, \alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2),$$

а также

$$\overline{\alpha_1}(Af, g_1) + \overline{\alpha_2}(Af, g_2) = \overline{\alpha_1}(f, A^* g_1) + \overline{\alpha_2}(f, A^* g_2) = (f, \alpha_1 A^* g_1 + \alpha_2 A^* g_2).$$

Следовательно, получаем:

$$\left(f, \underbrace{\alpha_1 A^* g_1 + \alpha_2 A^* g_2}_{\in \overline{D(A)}}\right) = (Af, \alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2) = \left(f, \underbrace{A^*(\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2)}_{\in \overline{D(A)}}\right),$$

значит в силу единственности вектора из $\overline{D(A)}$, реализующего это равенство $\forall f \in D(A)$

$$A^*(\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2) = \alpha_1 A^* g_1 + \alpha_2 A^* g_2!$$

Определение. Линейный оператор $A : D(A) \to H$ называется *самосопряжённым*, если

$$D(A^*) = D(A) \text{ и } A^* = A$$

на их общей области определения $D(A) = D(A^*)$.

Т. о. для исследования св-ва ССО требуется прежде всего иметь равенство $\underline{D(A) = D(A^*)}$, и $\forall f \in D(A)$ иметь $Af = A^* f$.

Определение. Линейный оператор $A : D(A) \to H$ называется *симметричным*, если

$$\underbrace{(Af, g) = (f, Ag) \quad f, g \in D(A)}_{\Downarrow}$$

$$\forall g \in D(A) \Rightarrow g \in D(A^*),$$

при этом $A^* g = P_{\overline{D(A)}} Ag$, где $P_{\overline{D(A)}} : H \to \overline{D(A)}$ — ортопроектор на $\overline{D(A)}$.

Таким образом, $A : D(A) \to H$ симметричен, если и только если

$$\begin{cases} D(A) \subset D(A^*) \\ , A^* \mid_{D(A)} = P_{\overline{D(A)}} A. \end{cases}$$

Если $\overline{D(A)} = H$, т. е. A — плотно определённый оператор, тогда $P_{\overline{D(A)}} = I$ — тождественный оператор в H, и в случае $\overline{D(A)} = H$ свойство симметрии оператора $A : D(A) \to H$ равносильно условиям

$$\begin{cases} D(A) \subset D(A^*), \\ \quad A^* \mid_{D(A)} = A, \end{cases}$$

эти условия часто пишут коротко $\underline{A \subset A^*}$.

Пример симметричного несамосопряжённого оператора

Пусть $H = \mathbb{L}_2[0,1]$,

$$A = i\frac{d}{dx} : D(A) \to \mathbb{L}_2[0,1],$$

где

$$D(A) = \left\{ f \in W^{1,2}[0,2] \mid f(0) = f(1) = 0 \right\}.$$

Тогда $\forall f, g \in D(A)$ имеем

$$(Af, g) = \int\limits_0^1 if'(x)\overline{g(x)}dx == \underbrace{if(x)\overline{g(x)} \mid_0^1}_{=0} - \int\limits_0^1 if(x)\overline{g'(x)}dx =$$

$$= \int\limits_0^1 f(x)\overline{ig'(x)}dx = (f, Ag),$$

т. е. A — симметричный оператор. Но очевидно, что $W^{1,2}[0,1] \subset D(A^*)$, так как $\forall g \in W^{1,2}[0,1]$ имеем

$$\forall f \in D(A) \hookrightarrow (Af, g) = \int\limits_0^1 if'(x)\overline{g(x)}dx =$$

$$= \underbrace{if(x)\overline{g(x)} \mid_0^1}_{\substack{=0 \\ \text{т. к. } f(0)=f(1)=0}} + \int\limits_0^1 f(x)\overline{ig'(x)}dx = (f, ig'),$$

значит $\forall f \in D(A)$ получаем $(Af, g) = (f, ig')$ — непрерывно по $f \in D(A)$, для любой $g \in W^{1,2}[0,2]$

$$W^{1,2}[0,1] \subset D(A^*) \text{ и } \forall g \in W^{1,2}[0,1]$$

выполнено

$$A^*g = ig' = i\frac{d}{dx}g.$$

Полагаем, что на самом деле имеет место и обратное вложение

$$D(A^*) \subset W^{1,2}[0,1].$$

Берём $\forall g \in D(A^*)$, тогда для $h = A^* g$ имеем

$$(Af, g) = (f, h) \quad \forall f \in D(A)$$
$$\|$$
$$\int\limits_0^1 i f' \overline{g} dx = \int\limits_0^1 f \overline{h} dx.$$

Определим функцию

$$\psi(x) = \int\limits_0^x h(t) dt, \quad x \in [0,1].$$

Тогда $\psi \in W^{1,2}[0,1]$ и $\psi(0) = 0$, при этом $\psi' = h$ для п. в. $x \in [0,1]$, следовательно

$$\int\limits_0^1 f \overline{h} dx = \int\limits_0^1 f \overline{\psi'} dx = \underbrace{f(x)\overline{\psi(x)}\,|_0^1}_{=0 \text{ т. к. } f(0)=f(1)=0} - \int\limits_0^1 f'(x)\overline{\psi(x)} dx.$$

Следовательно $\forall f \in D(A)$ имеем

$$\int\limits_0^1 i f' \overline{g} = - \int\limits_0^1 f' \overline{\psi},$$

т. е.

$$\int\limits_0^1 f' \left(i\overline{g} + \overline{\psi} \right) dx = 0.$$

Рассмотрим подпространство

$$\{ f' \mid f \in D(A) \} = M.$$

$$\forall f \in D(A) \Rightarrow \int\limits_0^1 f' dx = \underbrace{f(1)}_{=0} - \underbrace{f(0)}_{=0} = 0,$$

т. е. имеем вложение

$$M = \{ f' \mid f \in D(A) \} \subset (\operatorname{Lin} 1)^{\perp}.$$

Наоборот, если $\varphi \in (\operatorname{Lin} 1)^{\perp}$, т. е.

$$\int\limits_0^1 \varphi(x) dx = 0,$$

то определив

$$f(x) = \int\limits_0^x \varphi(x) dt, \quad x \in [0,1] \Rightarrow f \in W^{1,2}[0,1], \quad f(0) = f(1) = 0,$$

т. е. $f \in D(A)$ и $f' = \varphi \Rightarrow \varphi \in M$, т. е. получаем равенство

$$M = \{f' \mid f \in D(A)\} = (\mathrm{Lin}\,1)^{\perp} \implies \int\limits_0^1 f'\overline{(\psi - ig)}dx = 0 \quad f \in D(A) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (f', \psi - ig) = 0 \forall f \in D(A) \Leftrightarrow \psi - ig \in \Big((\mathrm{Lin}\,1)^{\perp}\Big)^{\perp} = \mathrm{Lin}\,1,$$

то есть выполнено

$$\psi - ig \equiv \mathrm{const} \text{ п. в. на } [0,1].$$

Но

$$\psi(x) = \int\limits_0^x h(t)dt \text{ для } h = A^* g,$$

т. е.

$$\int\limits_0^x h dt = ig(x) + \mathrm{const} \implies g \in W^{1,2}[0,1] \implies$$

$$\implies h(x) = i\frac{d}{dx}g(x) = (A^*g)(x) \text{ для п. в. } x \in [0,1].$$

Итак, мы доказали

$$D(A^*) = W^{1,2}[0,1]$$

и

$$A^*g = i\frac{d}{dx}g \quad \forall g \in W^{1,2}[0,1].$$

Видим, что $A \neq A^*$, хотя A — симметричный. При этом A^* уже не явл. симметричным.

Семинар

A – сим. $+\{e_n\}$ — ортог. базис из с.в. A т. е. $Ae_n = \lambda_n e_n$

1. $D(A) \in \left\{f \in M : \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 \frac{|(f,e_n)|^2}{\|e_n\|^2} < \infty\right\} = B$

$$Af = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \frac{(f,e_n)}{(e_n,e_n)} e_n \text{ — спектр разложение } A.$$

2. было $D(A^*) \subset B$

3. $D(A^*) \supset B$

$$\forall f \in B \implies f \subset D(A^*).$$

$$\forall y \in D(A) \qquad |(Ag, f)| \leqslant C_f \|g\| ?.$$

$$|(Ag,f)| = \text{спектр. разл. } A = \left|\left(\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n\frac{(g,e_n)}{(e_n,e_n)}e_n,f\right)\right| =$$

$$= \text{непрерывность скалярного произведения} =$$

$$= \left|\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n\frac{(g,e_n)}{(e_n,e_n)}\,(e_n,f)\right| = \left|\sum_{n=1}^{\infty}\left(g,\lambda_n\frac{(f,e_n)}{(e_n,e_n)}e_n\right)\right|$$

$$=$$

$$\text{непрерывность скалярного произведения} =$$

$$= \left|\left(g,\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n\frac{(f,e_n)}{(e_n,e_n)}e_n\right)\right| \leqslant \text{неравенство К-Б} \leqslant$$

$$\leqslant \|g\|\cdot\|\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n\frac{(f,e_n)}{(e_n,e_n)}e_n\| = \|g\|\cdot\underbrace{\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^2\frac{|(f,e_n)|^2}{\|e_n\|^2}}}_{C_f} < \infty \implies D(A^*) = B.$$

$$A^*f = \sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n\frac{(f,e_n)}{(e_n,e_n)} \text{ — спектральное разложение } A^*.$$

4. $A^{**} = A^*$ и $D\left(A^{**}\right)$

5. $\overline{A}$ — замыкание

$$D(A^*) \subset D\left(\overline{A}\right) \text{ т. е. } \forall f \in D(A^*) = B \to ? \to f \in D\left(\overline{A}\right).$$

$$f = \text{р. Ф.} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(f,e_n)}{(e_n,e_n)}e_n \qquad \text{и} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n\frac{(f,e_n)}{(e_n,e_n)} = A^*f$$

$$\text{т. к.} f \in D\left(A^*\right).$$

$$f_N = \sum_{n=1}^{N}\frac{(f,e_n)}{(e_n,e_n)}e_n \in D(A).$$

$$Af_N = \sum_{n=1}^{N}\lambda_N\frac{(f,e_n)}{(e_n,e_n)}e_n.$$

$$\mathrm{Gr} \ni \begin{pmatrix} f_N \\ Af_n \end{pmatrix} \to (N\to\infty) \to \begin{pmatrix} f \\ \sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n\frac{(f,e_n)}{(e_n,e_n)}e_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ A^*f \end{pmatrix} \ni \mathrm{Gr}\,\overline{A} \implies f \in D\left(\overline{A}\right), A^*f = \overline{A}f.$$

6. $D(A^*) \supset D\left(\overline{A}\right)$

$$\forall f \in D\left(\overline{A}\right), \text{ т. е. } \begin{pmatrix} f_N \\ Af_N \end{pmatrix} \to (N\to\infty) \to \begin{pmatrix} f \\ \overline{A}f \end{pmatrix} (f_N \in D(A)).$$

$(Af_n, e_k) =$ сим., $f \in D(A), e_k \in D(A) = (f_N, Ae_k) =$ с.в. $= (f_N, \lambda_k e_k) = \lambda_k\left(f_N, e_k\right) \to (N\to\infty,$ не

$(Af_N, e_k) \to (N\to\infty,$ непр. ск. произв.$) \to \left(\overline{A}f, e_k\right) \implies (\overline{A}f, e_k) = \lambda_k(f, e_k)$.

$$\overline{A}f = \text{р. Ф.} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\overline{A}f,e_k)}{(e_k,e_k)}e_k = \sum_{n=1}^{\infty}\lambda\frac{(f,e_k)}{(e_k,e_k)}e_k \implies \|\overline{A}f\|^2 = \text{Парс.} = \sum_{n=1}^{\infty}\lambda_k^2\frac{|(f,e_k)|^2}{\|e_k\|^2} < \infty.$$

$\mathbb{R}^1$

Определение. *Обобщенная производная*

$f \in L_2\,[a,b]$ и $h \in L_2\,[a,b]$ называется *обобщённой производной* f если

$$\forall \alpha \in C^1[a,b] \text{ и } \alpha(a) = \alpha(b) = 0 \text{ выполнено}$$

$$\int\limits_a^b f\alpha' dx = -\int\limits_a^b h\alpha dx.$$

Если $f \in C^1[a,b]$

$$\int\limits_a^b f\alpha dx = \underbrace{f\alpha\,|_a^b}_{=0} - \int\limits_a^b f'\alpha dx \implies f' = h.$$

Определение. $f \in L_2[a,b]$ и $h \in L_2[a,b]$, тогда h — 2-я об. производная, если

$$\forall \alpha \in C^2[a,b] \text{ и } \alpha(a) = \alpha(b) = 0$$

$$\int\limits_a^b f\alpha'' dx = (-1)^2 \int\limits_a^b h \cdot \alpha dx.$$

Св-во: Если у f $\exists$ об. произв. F и $\exists$ об. произв. у F G, тогда G — вторая об. произв. для f.

Определение. *Пространство Соболева* $W^{k,\,2}[a,b]$

$$f \in W^{k,\,2}[a,b], \text{ если } f \in L_2[a,b] \text{ и } \exists \text{ об. произв. } f$$

$$f^{(5)} \in L_2[a,b] \text{ для } s = 1, 2, \ldots, k.$$

Св-ва

1. Теорема вложения Соболева
   Если $k > \frac{1}{2} + l$, то $W^{k,\,2}[a,b] \subset C^l[a,b]$

$$k = 1 \qquad W^{1,\,2}[a,b] \subset C[a,b].$$
$$k = 2 \qquad W^{2,\,2}[a,b] \subset C^1[a,b].$$

2. Ф-ла интегр. по частям

$$f \in W^{1,\,2}[a,b] \text{ и } g \in W^{1,\,2}[a,b], \text{ то } \int\limits_a^b = f'g dx = f \cdot g\,|_a^b - \int\limits_a^b g'f dx$$

   g' и f' - об. произв.