Неделя №13
Магнитный порядок в кристаллах. Спиновые волны и их квантование

Драчов Ярослав
Факультет общей и прикладной физики МФТИ

9 мая 2021 г.

Т13-5.

Решение. Уровни энергии иона со спином $S = 1$ в магнитном поле расщепляются на три подуровня вследствие эффекта Зеемана, добавка к энергии $\Delta E = g\mu_B B m_S$, где m_S — проекция спина на направление поля. Учитывается только спиновый, а не полный момент из-за явления «замораживания орбитального момента» в кристаллах.

Средняя энергия спина $S = 1$ в магнитном поле вычисляется при помощи распределения Гиббса:

$$E = g\mu_B B \frac{-e^{\frac{h\mu_B B}{k_B T}} + e^{-\frac{g\mu_B B}{k_B T}}}{1 + e^{\frac{g\mu_B B}{k_B T}} + e^{-\frac{g\mu_B B}{k_B T}}} = -g\mu_B B \frac{2 \operatorname{sh} \frac{g\mu_B B}{k_B T}}{1 + 2 \operatorname{ch} \frac{g\mu_B B}{k_B T}}.$$

Дифференцированием находим теплоёмкость (на ион)

$$C = \frac{dE}{dT} = k_B \left(\frac{g\mu_B B}{k_B T}\right)^2 \frac{4 + 2 \operatorname{ch} \frac{g\mu_B B}{k_B T}}{\left(1 + 2 \operatorname{ch} \frac{g\mu_B B}{k_B T}\right)^2}.$$

Для поиска экстремума пользуемся указанием в условии задачи.

$$T_{\max} = \frac{g\mu_B B}{1{,}881 k_B} \approx 2{,}86\ \text{K}, \quad C_{\max} \approx 0{,}637 k_B.$$

Для оценки фононного вклада при этой температуре берём характерную температуру Дебая 300 К

$$\frac{C}{N} = \frac{12}{5}\pi^4 k_B \left(\frac{T}{\Theta}\right)^3 \sim 10^{-4} k_B.$$

Т13-6.

Решение. Преобразуем гамильтониан:

$$\widehat{\mathrm{H}} = J\widehat{\mathbf{S}}_1\widehat{\mathbf{S}}_2 = \frac{1}{2}J\left(\left(\widehat{\mathbf{S}}_1 + \widehat{\mathbf{S}}_2\right)^2 - \widehat{\mathbf{S}}_1^2 - \widehat{\mathbf{S}}_2^2\right).$$

Согласно правилу сложения моментов суммарный спин пары спинов 1/2 (речь идёт о метал-органических комплексах меди с ионом Cu^{2+} равен 0 или 1. При $J > 0$ (антиферромагнитный знак обменного интеграла) состояние с минимальной энергией это $S = 0$ (синглетное состояние), состояние с $S = 1$ (триплетное, т. к. трёхкратно вырождено по проекции спина) оказывается возбуждённым. Энергии этих состояний: $E_0 = -\frac{3J}{4}$, $E_1 = \frac{J}{4}$.

Для вычисления магнитной восприимчивости заметим, что в слабом поле снимается вырождение триплетного уровня по проекции спина

$$E_1(S_z) = \frac{J}{4} + 2\mu_B H S_z,$$

для удобства вычисления удобно отсчитывать энергию от основного состояния. Тогда для среднего магнитного момента

$$\langle m \rangle = 2\mu_B \frac{\exp\left(-\frac{J-2\mu_B H}{T}\right) - \exp\left(-\frac{J+2\mu_B H}{T}\right)}{1 + \exp\left(-\frac{J+2\mu_B H}{T}\right) + \exp\left(-\frac{J}{T}\right) + \exp\left(-\frac{J-2\mu_B H}{T}\right)} \approx$$

$$\approx 2\mu_B \frac{e^{-J/T}}{1+3e^{-J/T}} \frac{4\mu_B H}{T} = \frac{8\mu_B^2 H}{T} \frac{1}{e^{J/T}+3} = H \frac{8\mu_B^2}{J} \frac{J}{T} \frac{1}{e^{J/T}+3},$$

здесь использована малость магнитного поля и оставлены только линейные по полю члены.

Отсюда

$$\chi = \frac{8\mu_B^2}{3J} \frac{J}{T} \frac{1}{1 + \frac{e^{J/T}}{3}},$$

множитель $8\mu_B^2/(3J)$ равен магнитной восприимчивости спина $S = 1$ при температуре $T = J$.

Низкотемпературная($T \ll J$) асимптотика

$$\chi_{T \ll J} \approx \frac{8\mu_B^2}{J} \frac{J}{T} e^{-J/T}.$$

Для сравнения с законом Кюри-Вейса необходима в высокотемпературной асимптотике удержать члены порядка $1/T^2$:

$$\chi_{CW} = \frac{C}{T+\Theta} \approx \frac{C}{T}\left(1 - \frac{\Theta}{T}\right).$$

$$\chi_{T \gg J} \approx \frac{8\mu_B^2}{J} \frac{J}{T} \frac{1}{3+1+J/T} = \frac{2\mu_B^2}{J} \frac{J}{T}\left(1 - \frac{J}{4T}\right).$$

Здесь можно отметить, что множитель перед скобками $2\mu_B^2/T$ в точности равен восприимчивости двух парамагнитных спинов $S = 1/2$. Из сравнения с разложением закона Кюри-Вейса получаем $\Theta = J/4$, знак температуры Кюри антиферромагнитный.

T13-7.

Решение. Для случая ферромагнетика намагниченность (на атом) ниже температуры Кюри описывается трансцендентным уравнением

$$\frac{\langle m \rangle}{\mu_B} = \mathrm{tg}\left(\frac{\langle m \rangle}{\mu_B} \frac{\Theta}{T}\right).$$

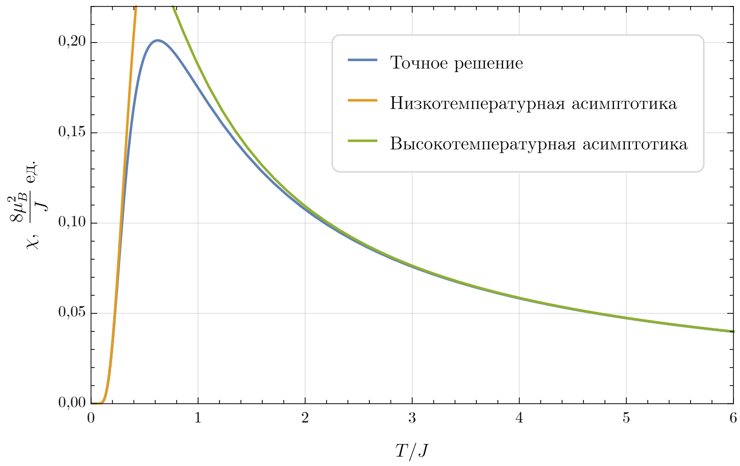

Рис. 1: Температурная зависимость магнитной восприимчивости антиферромагнитного димера, к задаче Т13-6

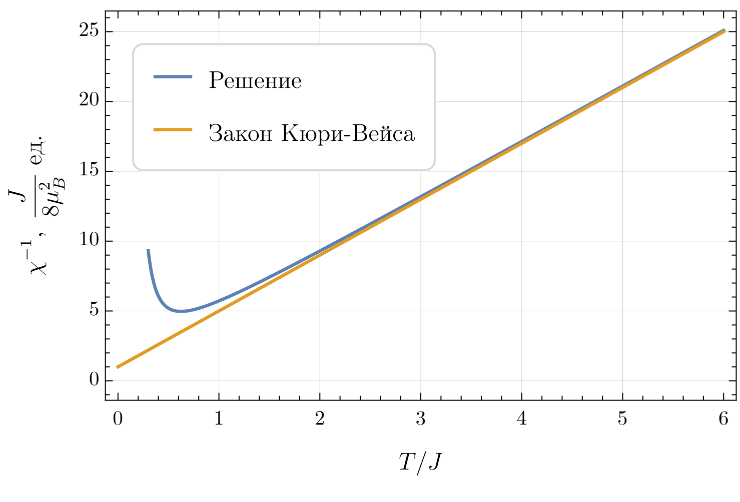

Рис. 2: График обратной восприимчивости, иллюстрирующий соответствие закону Кюри-Вейса при высоких температурах, к задаче Т13-6

Для условий задачи оно имеет вид

$$\frac{1}{2} = \operatorname{tg}\frac{\Theta}{2T}.$$

Численное решение этого уравнения $T = 0{,}91\Theta$. Тогда с использованием указания о близости к Θ можно воспользоваться разложением для величины параметра порядка вблизи температуры Кюри

$$\frac{\langle m\rangle}{\mu_B} = \sqrt{3}\sqrt{1-\frac{T}{\Theta}}.$$

Тогда

$$\left(1-\frac{T}{\Theta}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}$$

и $T \approx 0{,}92\Theta$.

T13-8.

Решение. Спектр спиновых волн в ферромагнитной цепочке

$$\omega = 2|J|\frac{S}{\hbar}(1-\cos ka) = 4|J|\frac{S}{\hbar}\sin^2\frac{ka}{2} \approx \frac{|J|Sa^2}{\hbar}k^2.$$

Нам будет нужна длинноволновая часть, поэтому разлагаем по k.

Каждый магнон соответствует изменению полного спина системы на единицу и несёт магнитный момент $g\mu_B$. Полное изменение намагниченности из-за того, что в системе есть тепловые магноны находится интегрированием

$$\Delta M = \int\limits_{1\text{ з.Бр.}} n(k)\frac{Ldk}{2\pi}.$$

Вычисление проводим в низкотемпературном пределе, когда заселён только квадратичный минимум спектра: если порядок будет разрушаться даже при низкой температуре, это докажет требуемое утверждение. Тогда при переходе к частоте можно как обычно распространить верхний предел интегрирования до бесконечности.

$$\Delta M \propto \int\limits_0^\infty \frac{1}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{k_BT}\right)-1}d\sqrt{\omega} \propto \sqrt{T}\int\limits_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}\frac{1}{e^x-1}dx.$$

Интеграл расходится в нуле как $\int x^{-3/2}dx$, то есть спин-волновая поправка оказывается бесконечной за счёт длинноволновых флуктуаций. Это верно при любой конечной температуре, входящей как корневой множитель перед этим расходящимся интегралом.