Домашняя работа по теории поля

Драчов Ярослав
Факультет общей и прикладной физики МФТИ

23 января 2021 г.

Задача 2.5

Решение.

$$
\begin{aligned}
S = \int d^4x \left[a(\partial_\mu\varphi)^2 + b\partial_\mu\partial_\mu\varphi + c\varphi\partial_\mu\partial_\mu\varphi + \frac{m^2}{2}\varphi^2 + d\varphi\right] = \\
= \int d^4x \left[a(\partial_\mu\varphi)^2 + (b + c\varphi)\partial_\mu\partial_\mu\varphi + \frac{m^2}{2}\varphi^2 + d\varphi\right] \overset{\text{по частям}}{=\!=\!=} \\
= \int d^4x \left[a(\partial_\mu\varphi)^2 - c\partial_\mu\varphi\partial_\mu\varphi + \frac{m^2}{2}\varphi^2 + d\varphi\right] \overset{+C}{=\!=} \\
= \int d^4x \left[(a-c)(\partial_\mu\varphi)^2 + \frac{m^2}{2}\left(\varphi + \frac{d}{m^2}\right)^2\right].
\end{aligned}
$$

Здесь видно что b пропадает после интегрирования по частям, а именно, после взятия производной $\partial_\mu(b + c\varphi)$. После интегрирования по частям также появляется член

$$\int d\Sigma^\mu (b + c\varphi)\partial_\mu\varphi,$$

где данный интеграл берётся по границе объёма. Однако, мы ограничиваемся рассмотрением случая $\delta\partial_\mu\varphi = 0$ на границе четырёхмерного объёма, и поэтому данное слагаемое обращается в нуль.

Значит

$$\mathcal{L} = (a-c)(\partial_\mu\varphi)^2 + \frac{m^2}{2}\left(\varphi + \frac{d}{m^2}\right)^2.$$

Аналог функции Лагранжа L в теории скалярного поля

$$
\begin{aligned}
L = \int d^3x \mathcal{L} = \int d^3x \left[(a-c)(\partial_\mu\varphi)^2 + \frac{m^2}{2}\left(\varphi + \frac{d}{m^2}\right)^2\right] = \\
= \int d^3x \left[(a-c)\dot{\varphi}^2 - (a-c)\partial_i\varphi\partial_i\varphi + \frac{m^2}{2}\left(\varphi + \frac{d}{m^2}\right)^2\right].
\end{aligned}
$$

Используя

$$\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\dot{\varphi}(\mathbf{x})} = 2(a-c)\dot{\varphi}(\mathbf{x}),$$

получим для энергии

$$E = \int d^3x \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{\varphi}(\mathbf{x})} \dot{\varphi}(\mathbf{x}) - L$$

выражение вида

$$E = \int d^3x \left[(a-c)\dot{\varphi}^2 + (a-c)\partial_i\varphi\partial_i\varphi - \frac{m^2}{2}\left(\varphi + \frac{d}{m^2}\right)^2 \right].$$

Кажется, что на физические решения в данном случае стоит наложить условие $a < c$ с тем, чтобы в ситуации большого и быстро осциллирующего поля φ энергия не равнялась нулю.

Случай $a = c$ отвечает равенству

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{\varphi}(\mathbf{x})} = 0.$$

По аналогии с классической механикой это можно интерпретировать как равенство нулю пространственной плотности обобщённого импульса. Нетрудно видеть, что в данном случае мы получаем стационарные решения вида

$$\varphi = -\frac{d}{m^2}.$$

Задача 2.6

Решение. Из выражения для энергии получаем

$$[E] = \frac{L^3[\varphi]^2}{T^2},$$

$$[\hbar][\omega] = L[\varphi]^2.$$

Т.к. $[\hbar] = 1$, $[\omega] = 1/T$ и $L = T = 1/M$, то

$$[\varphi] = M.$$

Следовательно

$$[m] = \left(\frac{[E]}{L^3[\varphi]^2}\right)^{\frac{1}{2}} = M.$$

Задача 2.7

Решение.

$$E = \int d^3x \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{\varphi}(\mathbf{x})} \dot{\varphi}(\mathbf{x}) - L.$$

Обозначим пространственную плотность энергии $\mathcal{H}$ следующим образом

$$E = \int d^3x \mathcal{H}.$$

Тогда

$$\mathcal{H} = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{A}(\mathbf{x}, t)} \dot{A}(\mathbf{x}, t) - \mathcal{L}.$$

$$\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\dot{A}(\mathbf{x},t)} = \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\left(\partial_0 A_\mu\right)} = \frac{1}{2}\left(2\partial_\mu A_0 - 2\partial_0 A_\mu\right) = F_{\mu 0}.$$

$$\begin{aligned}\mathcal{H} = F_{\mu 0}\partial_0 A_\mu - \mathcal{L} = F_{\mu 0}\partial_0 A_\mu + \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} = \\ = F_{\mu 0}\left(F_{0\mu} + \partial_\mu A_0\right) + \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} - F_{0\mu}\left(F_{0\mu} + \partial_\mu A_0\right) = \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} = \\ = -F_{0\mu}F_{0\mu} - F_{0\mu}\partial_\mu A_0 + \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} = \mathbf{E}^2 - F_{0i}\partial_i A_0 + \frac{1}{2}\left(\mathbf{H}^2 - \mathbf{E}^2\right) = \\ = \frac{1}{2}\left(\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2\right) + E_i\partial_i\varphi.\end{aligned}$$

Используя уравнения поля получаем

$$\int d^3x E_i\partial_i\varphi = -\int d^3x\varphi\partial_i E_i = -\int d^3x\varphi\nabla\cdot\mathbf{E} = 0.$$

$$E = \frac{1}{2}\int\left(\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2\right)d^3x.$$

Запишем составляющие 4-вектора плотности тока для покоящейся в $\mathbf{x}_0$ точечной частицы с зарядом e

$$j_0(\mathbf{x}) = e\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0), \quad \mathbf{j} = \mathbf{0}.$$

Добавка в лагранжеву плотность, обусловленная наличием точечного заряда

$$\Delta\mathcal{L} = j_\mu A_\mu.$$

Т. к. данная добавка не содержит $\dot{A}(\mathbf{x},t)$, то

$$\Delta\mathcal{H} = -\Delta\mathcal{L}.$$

$$\Delta E = \int d^3x\Delta\mathcal{H} = -eA_0(\mathbf{x}_0) = -e\varphi(\mathbf{x}_0).$$

Ещё задача

$$\begin{aligned}S = \int d^3x\left[aF_{ij}F^{ij} + b\varepsilon_{ijk}A^i\partial^j A^k\right] = \\ = \int d^3x\left[2a\left(\partial_i A_j\partial^i A^j - \partial_i A_j\partial^j A^i\right) + b\varepsilon_{ijk}A^i\partial^j A^k\right] = \int d^3x\mathcal{L}.\end{aligned}$$

Воспользуемся уравнениями Эйлера-Лагранжа

$$\partial_l\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_l A_m)} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_m}.$$

Найдём сперва

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_m} = b\varepsilon_{ijk}\eta^{in}\delta_n^m\partial^j A^k = b\varepsilon^m_{jk}\partial^j A^k.$$

Далее

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_l A_m)} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial(\partial_l A_m)}\left[a\eta^{ij}\eta^{kn}(\partial_i A_k - \partial_k A_i)(\partial_j A_n - \partial_n A_j) + b\varepsilon_{ijk}A^i\eta^{jn}\eta^{kp}\partial_n A_p\right] =$$

$$= a\eta^{ij}\eta^{kn}[(\delta_i^l\delta_k^m - \delta_k^l\delta_i^m)(\partial_j A_n - \partial_n A_j) + (\partial_i A_k - \partial_k A_i)(\delta_j^l\delta_n^m - \delta_n^l\delta_j^m)] +$$

$$+ b\varepsilon_{ijk}A^i\eta^{jn}\eta^{kp}\delta_n^l\delta_p^m =$$

$$= a\left[(\eta^{lj}\eta^{mn} - \eta^{mj}\eta^{ln})(\partial_j A_n - \partial_n A_j) + (\partial_i A_k - \partial_k A_i)(\eta^{il}\eta^{km} - \eta^{im}\eta^{kl})\right] +$$

$$+ b\varepsilon_{ijk}A^i\eta^{jl}\eta^{km} =$$

$$a\left[\partial^l A^m - \partial^m A^l - \partial^m A^l + \partial^l A^m + \partial^l A^m - \partial^m A^l - \partial^m A^l + \partial^l A^m\right] + b\varepsilon_i^{ml}A^i =$$

$$= 4aF^{lm} + b\varepsilon_i^{ml}A^i.$$

Откуда уравнения движения

$$4a\partial_l F^{lm} + b\varepsilon_i^{ml}\partial_l A^i = b\varepsilon_{li}^m\partial^l A^i.$$

$$2a\partial_l F^{lm} = b\varepsilon_{li}^m\partial^l A^i.$$

$$2a\partial^l F_{lm} = b\varepsilon_{mli}\partial^l A^i.$$

$$2a\partial^l F_{li} = b\varepsilon_{ijk}\partial^j A^k.$$

Будем искать решение в виде свободной монохроматической плоской волны

$$A_i = \tilde{A}_i e^{ip_i x^i}.$$

$$\partial^j A_i = ip^j A_i.$$

Зафиксируем калибровку Лоренца

$$\partial_i A^i = 0.$$

$$\partial^l F_{li} = \partial^l\partial_l A_i - \partial^l\partial_i A_l = \partial^l\partial_l A_i = \Box A_i.$$

$$-2ap^l p_l A_i = ib\varepsilon_{ijk}\eta^{kl}p^j A_l.$$

$$2ap^l p_l\tilde{A}_i + ib\varepsilon_{ij}^l p^j\tilde{A}_l = 0.$$

$$\tilde{A}_i = -\frac{ib}{2ap^l p_l}\varepsilon_{ij}^l p^j\tilde{A}_l.$$

$$2ap^l p_l\tilde{A}_i + b\varepsilon_{ij}^l p^j\frac{b}{2ap^l p_l}\varepsilon_{lm}^n p^m\tilde{A}_n = 0.$$

$$4(ap^l p_l)^2\tilde{A}_i + b^2\varepsilon_{ij}^l p^j\varepsilon_{lm}^n p^m\tilde{A}_n = 0.$$

$$4(ap^l p_l)^2\tilde{A}_i + b^2 p^j p^m\tilde{A}_n\left(\delta_i^n\delta_{jm} - \delta_j^n\delta_{im}\right) = 0.$$

$$4(ap^l p_l)^2\tilde{A}_i + b^2\left(p_m p^m\tilde{A}_i - p^n p_i\tilde{A}_n\right) = 0.$$

Вследствие выбранной калибровки последнее слагаемое зануляется, тогда

$$4a^2p^4 + b^2p^2 = 0.$$

Откуда нетривиальное решение

$$p = \pm\frac{b}{2a}.$$

Переходим в СО, где $p_2 = p_3 = 0$. В ней $p_i = p\delta_i^1$. Тогда

$$\partial_i A^i = 0 \implies A^1 = 0.$$

$$2ap^2\tilde{A}_i + ib\varepsilon_{ij}^l p\delta_1^j \tilde{A}_l = 0.$$

$$\operatorname{sign}(p)\tilde{A}_i + i\varepsilon_{i1}^l \tilde{A}_l = 0.$$

Решая данную систему, получаем

$$\tilde{A}_i = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -i\operatorname{sign}(p) \end{pmatrix}.$$

Задача 4.4

Решение.

$$\begin{gathered}[D_\mu, D_\nu] = D_\mu D_\nu - D_\nu D_\mu = \\ = (\partial_\mu - ieA_\mu)(\partial_\nu - ieA_\nu) - (\partial_\nu - ieA_\nu)(\partial_\mu - ieA_\mu) = \\ = \partial_\mu\partial_\nu - ie\partial_\mu A_\nu - ieA_\mu\partial_\nu - \partial_\nu\partial_\mu - eA_\mu A_\nu + ie\partial_\nu A_\mu + ieA_\nu\partial_\mu + eA_\nu A_\mu = \\ = -ie(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) = -ieF_{\mu\nu}.\end{gathered}$$

Задача 4.8

Решение.

$$\begin{gathered}\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}\operatorname{tr}(F_{\mu\nu}F_{\lambda\rho}) = \varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}F^a_{\mu\nu}F^a_{\lambda\rho} = \varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}\left(\partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu\right)\left(\partial_\lambda A^a_\rho - \partial_\rho A^a_\lambda\right) = \\ = \varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}\left(\partial_\mu A^a_\nu \partial_\lambda A^a_\rho - \partial_\mu A^a_\nu \partial_\rho A^a_\lambda - \partial_\nu A^a_\mu \partial_\lambda A^a_\rho + \partial_\nu A^a_\mu \partial_\rho A^a_\lambda\right) = \\ = \partial_\mu A^a_\nu \partial_\lambda A^a_\rho \varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho} - \partial_\mu A^a_\nu \partial_\rho A^a_\lambda \varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho} - \partial_\nu A^a_\mu \partial_\lambda A^a_\rho \varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho} + \partial_\nu A^a_\mu \partial_\rho A^a_\lambda \varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho} = \\ = \partial_\mu A^a_\nu \partial_\lambda A^a_\rho \varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho} - \partial_\mu A^a_\nu \partial_\rho A^a_\lambda \varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho} - \partial_\mu A^a_\nu \partial_\lambda A^a_\rho \varepsilon_{\nu\mu\lambda\rho} + \partial_\mu A^a_\nu \partial_\rho A^a_\lambda \varepsilon_{\nu\mu\lambda\rho} = \\ = \partial_\mu A^a_\nu \partial_\lambda A^a_\rho \varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho} - \partial_\mu A^a_\nu \partial_\rho A^a_\lambda \varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho} + \partial_\mu A^a_\nu \partial_\lambda A^a_\rho \varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho} - \partial_\mu A^a_\nu \partial_\rho A^a_\lambda \varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho} = \\ = \partial_\mu\left(A^a_\nu \partial_\lambda A^a_\rho \varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho} - A^a_\nu \partial_\rho A^a_\lambda \varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho} + A^a_\nu \partial_\lambda A^a_\rho \varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho} - A^a_\nu \partial_\rho A^a_\lambda \varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}\right).\end{gathered}$$

Откуда

$$\begin{gathered}K_\mu = A^a_\nu \partial_\lambda A^a_\rho \varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho} - A^a_\nu \partial_\rho A^a_\lambda \varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho} + A^a_\nu \partial_\lambda A^a_\rho \varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho} - A^a_\nu \partial_\rho A^a_\lambda \varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho} = \\ = 2\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}\left(A^a_\nu \partial_\lambda A^a_\rho - A^a_\nu \partial_\rho A^a_\lambda\right) = 2\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}A^a_\nu\left(\partial_\lambda A^a_\rho - \partial_\rho A^a_\lambda\right) = \\ = 2\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}A^a_\nu F^a_{\lambda\rho}.\end{gathered}$$

Покажем, что добавление в лагранжиан полной дивергенции от любого вектора, зависящего от полей, не изменяет уравнения поля. Для $K_\mu(A_\mu, \partial_\mu A_\nu)$ и $G = \left\{\mathbb{R}^3 \times [t_1, t_2]\right\}$запишем его вклад в действие.

$$\int\limits_G d^4x\partial_\mu K_\mu = \int\limits_{\partial G} d^3x K_\mu n_\mu \xlongequal[A_\mu|_{\partial G}=0]{\partial_\mu A_\nu|_{\partial G}=0} 0.$$

Что и требовалось доказать.

И ещё задача

Поле A_μ принимает значения в алгебре Ли группы G, т. е.

$$A_\mu(x) = g t^a A_\mu^a(x),$$

где g — некоторое число, t^a — генераторы группы G. Требуется доказать, что

$$A'_\mu = \omega A_\mu \omega^{-1} + \omega \partial_\mu \omega^{-1}, \quad \omega \in G,$$

также лежит в алгебре Ли группы G, т. е.

$$A'_\mu(x) = g t^a A'^a_\mu(x).$$

Задача 5.5

Решение. В задаче рассматривается теория трёх комплексных скалярных полей $f_i(x)$, $i = 1, 2, 3$, с лагранжианом

$$\mathcal{L} = \partial_\mu f_i^* \partial_\mu f_i + \mu^2 f_i^* f_i - \lambda (f_i^* f_i)^2.$$

Пусть

$$f_i = \frac{1}{\sqrt{2}}(f_{i1} + i f_{i2}).$$

Также введём константу c для удобства в дальнейшем

$$\mathcal{L} = \partial_\mu f_i^* \partial_\mu f_i + \mu^2 f_i^* f_i - \lambda (f_i^* f_i)^2 - c.$$

а) Группой глобальной симметрии этого лагранжиана будет являться $U(3)$, т. е. он инвариантен относительно преобразований

$$f_i(x) \to f'_i(x) = \omega_{ij} f_j(x),$$

где ω — произвольная матрица из $U(3)$. Свойство инвариантности лагранжиана относительно данных преобразований очевидно из тождества

$$f'^*_i f'_i = f_k^* \omega_{ik}^* \omega_{ij} f_j = f_k^* \left(\omega^\dagger \omega\right)_{kj} f_j = f_k^* f_k.$$

б) Рассмотрим энергию поля

$$E = \int d^3x \left(\partial_0 f_i^* \partial_0 f_i + \partial_j f_i^* \partial_j f_i + V(f_i^*, f_i)\right),$$

где

$$V(f_i^*, f_i) = -\mu^2 f_i^* f_i + \lambda (f_i^* f_i)^2 + c.$$

Основное состояние однородно в пространстве-времени, $f_i = \mathrm{const}$, и представляет собой минимум потенциала. Потенциал $V(f_i^*, f_i)$ имеет минимум при

$$f_i^* f_i = f_0^2, \quad \text{где} \quad f_0 = \frac{\mu}{\sqrt{\lambda}}.$$

Рассмотрим основное состояние

$$f_i = \delta_{i1} \frac{f_0}{\sqrt{2}},$$

и возмущения около него, описываемые полями

$$f_{i1}(x) = \delta_{i1} f_0 + \chi_i(x), \quad f_{i2}(x) = \theta_i(x).$$

Вакуумный вектор $\mathbf{f}^{(0)} = (f_0, 0, 0)$ не полностью нарушает симметрию: имеется нетривиальная подгруппа группы $U(3)$, относительно которой вакуумный вектор инвариантен:

$$\omega \mathbf{f}^{(0)} = \mathbf{f}^{(0)}.$$

Эта подгруппа представляет собой группу $U(2)$,

$$f_1 \to \omega_{1j} f_j, \quad f_2 \to \omega_{2j} f_j, \quad f_3 \to f_3.$$

в) Ограничимся малыми возмущениями, для чего выделим слагаемые в лагранжиане, квадратичные относительно возмущений χ_i и θ_i. Имеем $\partial_\mu f_{i1} = \partial_\mu \chi_i$, $\partial_\mu f_{i2} = \partial_\mu \theta_i$ и

$$V = -\frac{\mu^2}{2}\left[(f_0 + \chi_1)^2 + \chi_2^2 + \chi_3^2 + \theta_i\theta_i\right] + \\ + \frac{\lambda}{4}\left[(f_0 + \chi_1)^2 + \chi_2^2 + \chi_3^2 + \theta_i\theta_i\right]^2 + \frac{\mu^4}{4\lambda},$$

где константа c подобрана так, что энергия основного состояния равна нулю.

В квадратичном порядке по полям χ_i и θ_i получим

$$V = \mu^2 \chi_1^2.$$

Итак, квадратичный лагранжиан равен

$$\mathcal{L}^{(2)}_{\chi_i,\,\theta_i} = \frac{1}{2}\partial_\mu \chi_i \partial_\mu \chi_i + \frac{1}{2}\partial_\mu \theta_i \partial_\mu \theta_i - \mu^2 \chi_1^2.$$

Поле χ_1 имеет массу $m_{\chi_1} = \sqrt{2}\mu$, остальные же поля остаются безмассовыми, т. е. являются намбу-голдстоуновскими модами.

г) Из всего вышесказанного получается, что безмассовые моды преобразуются по тривиальному представлению $U(2)$, а намбу-голдстоуновские по фундаментальному.

Задача 7.1

Решение. Движущиеся кинки описываются семейством решений

$$\varphi_{\text{k}}(x - x_0;\, t;\, u) = \frac{\mu}{\sqrt{\lambda}} \operatorname{th}\left(\frac{\mu}{\sqrt{2}} \frac{(x - x_0) - ut}{\sqrt{1 - u^2}}\right),$$

где u — это скорость солитона, x_0 — это положение центра кинка в момент $t = 0$.

Классическую энергию кинка можно определить как

$$E_{\text{k}} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varepsilon(x) dx, \quad \varepsilon(x) = \frac{1}{2}(\partial_\nu \varphi_{\text{k}})^2 + V(\varphi_{\text{k}}),$$

где
$$V(\varphi) = \frac{\lambda}{4}(\varphi^2 - v^2)^2, \quad v = \frac{\mu}{\sqrt{\lambda}}.$$
Непосредственными расчётами получаем
$$\varepsilon(x) = \frac{1}{1-u^2} v^4 \frac{\lambda}{2} \operatorname{ch}^{-4}\left(\frac{\mu}{\sqrt{2}} \frac{(x-x_0)-ut}{\sqrt{1-u^2}}\right),$$
и
$$E_{\mathrm{k}} = \frac{2mv^2}{3\sqrt{1-u^2}},$$
где $m = \sqrt{2}\mu$ — масса элементарного возбуждения.

Лагранжиан кинка
$$L_{\mathrm{k}} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathcal{L}\, dx, \quad \mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\nu \varphi_{\mathrm{k}})^2 - V(\varphi_{\mathrm{k}}).$$
Непосредственными вычислениями получаем
$$\mathcal{L}(x) = \frac{3u^2}{4(1-u^2)} \lambda v^4 \operatorname{ch}^{-4}\left(\frac{\mu}{\sqrt{2}} \frac{(x-x_0)-ut}{\sqrt{1-u^2}}\right).$$
Плотность импульса кинка
$$\rho(x) = T^{01} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} \varphi'.$$
Непосредственными вычислениями получаем
$$\rho(x) = \frac{u}{1-u^2} v^4 \frac{\lambda}{2} \operatorname{ch}^{-4}\left(\frac{\mu}{\sqrt{2}} \frac{(x-x_0)-ut}{\sqrt{1-u^2}}\right),$$
и
$$p_{\mathrm{k}} = \frac{2umv^2}{3\sqrt{1-u^2}}.$$
Заметим, что для найденных E_{k}, p_{k} и $M_{\mathrm{k}} = \frac{2}{3}mv^2$ выполняется релятивистское соотношение
$$M_{\mathrm{k}}^2 = E_{\mathrm{k}}^2 - p_{\mathrm{k}}^2.$$

Задача 12.7

Решение. На сферически-симметричных конфигурациях
$$E_{\mathrm{stat}} = 4\pi \int\limits_0^\infty r^2 dr \left[\frac{1}{2}(\varphi')^2 + V_0(\varphi) - \varepsilon V_1(\varphi)\right].$$
Внешняя область пузыря не даёт вклада в E_{stat}, а внутренняя область даёт вклад
$$E_{\mathrm{stat}}^{\mathrm{in}} = -\frac{4}{3}\pi R^3 \varepsilon.$$

Вклад стенки пропорционален R^2 и в главном порядке не зависит от ε; для его вычисления положим $r = R$ в мере E_{stat} и пренебрежём εV_1. Получим

$$E_{\text{stat}}^{\text{wall}} = 4\pi R^2 \mu,$$

где

$$\mu = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2}(\varphi_k'(r))^2 + V_0(\varphi_k(r))\right].$$

Итак, в главном порядке по ε и R статическая энергия пузыря размера R равна

$$E_{\text{stat}}(R) = 4\pi R^2 \mu - \frac{4}{3}\pi R^3 \varepsilon.$$

Экстремум этого выражения достигается при

$$R = R_{\text{sph}} = \frac{2\mu}{\varepsilon}.$$

Для статической энергии сфалерона получим окончательно

$$E_{\text{stat}} = \frac{16\pi\mu^3}{3\varepsilon^2}.$$

Т. к. $\mu > 0$ и $\varepsilon > 0$, то статическая энергия пузыря будет иметь вид, качественно изображённый на рис. 1. Откуда можно заключить, что состояние

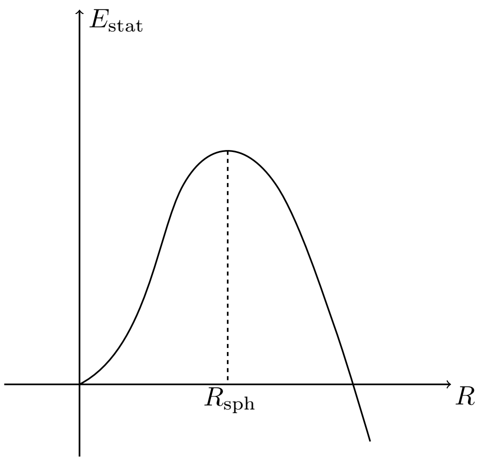

Рис. 1

пузыря с радиусом R_{sph} — неустойчиво.

Запишем возмущение энергии из-за возмущения поля сфалерона

$$\delta E = E(\varphi + \delta\varphi) - E(\varphi).$$

$$\delta E = 4\pi \int\limits_0^{\infty} r^2 dr \left[\varphi' \delta\varphi' + \frac{\partial V}{\partial \varphi}\delta\varphi\right].$$

$$\varphi'\delta\varphi' + \frac{\partial V}{\partial\varphi}\delta\varphi = \varphi'\delta\varphi' + \left(\varphi'' + \frac{2}{r}\varphi'\right)\delta\varphi = \varphi'\delta\varphi' - \varphi'\delta\varphi' + \frac{2}{r}\varphi'\delta\varphi =$$
$$= \frac{2}{r}\varphi'\delta\varphi.$$

Для того, чтобы возмущение δE оказалось отрицательным можем взять, например, $\delta\varphi = -\varepsilon\varphi'$, тогда

$$\delta E = -4\pi\int\limits_0^\infty 2r\varepsilon(\varphi')^2 dr < 0.$$

Уравнения движения поля

$$\varphi'' + \frac{2}{r}\varphi' = \frac{\partial V}{\partial\varphi}.$$

Уравнения движения возмущённого поля

$$\varphi'' + \delta\varphi'' + \frac{2}{r}(\varphi' + \delta\varphi') = \frac{\partial V}{\partial(\varphi + \delta\varphi)}.$$

Произведем замену $\delta\varphi = g(r)e^{i\omega t}$.

$$\varphi'' + g''e^{i\omega t} + \frac{2}{r}(\varphi' + g'e^{i\omega t}) = \frac{\partial V(\varphi + ge^{i\omega t})}{\partial(\varphi + ge^{i\omega t})}.$$

Сделаем замену $\varphi + g^{i\omega t} = \xi$

$$\varphi'' + g''e^{i\omega t} + \frac{2}{r}(\varphi' + g'e^{i\omega t}) = \frac{\partial V(\xi)}{\partial\xi}.$$

Уравнение на кинк

$$\varphi'' - \frac{\partial V(\varphi)}{\partial\varphi} = 0.$$

$$V(\varphi) = \frac{\lambda}{4}(\varphi^2 - v^2)^2.$$

Статическое уравнение поля в d-мерном пространстве-времени имеет вид

$$-\partial_i\partial_i\varphi + \frac{\partial V}{\partial\varphi} = 0,$$

где индекс i — пространственный и пробегает значения $i = 1, 2, 3$. Его решения имеют сферическую симметрию $\varphi = \varphi\left(\sqrt{x_i x_i}\right)$ и уравнение для φ имеет вид

$$\varphi'' + \frac{2}{r}\varphi' = \frac{\partial V}{\partial\varphi}.$$

Пусть $\varphi_{\mathrm{k}}(r)$ — статическое решение уравнений поля. Рассмотрим малые возмущения $f(\tau,\mathbf{x})$ около статического решения, так что исходное поле имеет вид

$$\varphi(\tau, \mathbf{x}) = \varphi_{\mathrm{k}}(r) + f(\tau, \mathbf{x}).$$

Поле $\varphi(\tau, \mathbf{x})$ должно удовлетворять уравнениям

$$-\partial_\mu \partial^\mu \varphi + \frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0$$

или

$$-\partial_\mu \partial^\mu (\varphi_{\mathrm{k}} + f) + \frac{\partial V}{\partial \varphi}(\varphi_{\mathrm{k}}) + \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}(\varphi_{\mathrm{k}}) f + \ldots = 0.$$

Поле φ_{k} уравнениям выше, поэтому в линейном порядке по f получим

$$-\partial_\mu \partial^\mu f + \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}(\varphi_{\mathrm{k}}) f = 0.$$

Т. к. $\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}(\varphi_{\mathrm{k}})$ зависит только от r, переменные разделяются и решение можно искать в виде

$$f(\tau, r) = e^{i\omega t} g_\omega(r),$$

где g_ω удовлетворяет уравнению

$$\omega^2 g_\omega + g_\omega'' + \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}(\varphi_{\mathrm{k}}) g_\omega = 0,$$

или

$$-g_\omega'' + U(r) g_\omega = \omega^2 g_\omega,$$

где

$$U(r) = \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}(\varphi_{\mathrm{k}}).$$

Нулевая мода имеет вид

$$g_0(r) = \frac{\partial \varphi_{\mathrm{k}}(r)}{\partial r}.$$

Действительно, φ_{k} удовлетворяет уравнению

$$-\varphi.$$