Семинар №5

Драчов Ярослав
Факультет общей и прикладной физики МФТИ

13 марта 2021 г.

Производная Хироты

$$f(x-y)g(x-y) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \left(D_x^j f \cdot g\right) y^j.$$

$$D_x f \cdot g = f(x)g(x) + \frac{\partial f}{\partial x} y g(x) - f(x) y \frac{\partial g}{\partial x} + \ldots.$$

Уравнение КдФ в производных Хироты

$$(4D_t D_x - D_x^4)\tau\tau = 0.$$

Обобщаем

$$P(D_1, D_2, \ldots)\tau\tau = 0.$$

Тривиальное решение: $\tau \equiv 1$. Ищем решение

$$\tau = 1 + \varepsilon f_1 + o(\varepsilon^2).$$

В первом порядке по ε уравнение преобразуется к виду

$$P(\partial_1, \partial_2, \ldots) f_1 = 0.$$

$$k_i P(k_1, k_2, \ldots) = 0.$$

$$f_1 = e^{k_1 x_1 + k_2 x_2 + \ldots}.$$

Для нескольких наборов(=солитонов?)

$$k_1^{(1)}, k_2^{(2)}, \ldots \quad k_1^{(2)}, k_2^{(2)} \ldots$$

$$f_1 = \sum_{j=1}^{n} c_j e^{k_1^{(j)} x_1 + k_2^{(j)} x_2}.$$

$$\varepsilon: \quad 2P(\partial_1, \partial_2, \ldots) 1 \cdot f_1 = 0.$$

$$\tau = 1 + Ce^{2kx + 2k^3 t} \text{ (КдФ)}.$$

Рассмотрим двухсолитонное решение

$$n = 2: \quad k_i^{(1)}, k_i^{(2)}.$$

$$\tau = 1 + \varepsilon \sum_{j=1}^{2} c_j e^{k_1^{(j)} x_1 + k_2^{(j)} x_2 + \dots} + \varepsilon^2 f_2 + o(\varepsilon^2).$$

$$\varepsilon^2: \quad P(\partial_1, \partial_2, \dots) f_2 + c_1 c_2 P(k_1^{(1)} - k_1^{(2)}, k_2^{(1)} - k_2^{(2)}, \dots) e^{\left(k_1^{(1)} + k_1^{(2)}\right) x_1 + \dots} = 0.$$

$$P\left(D_1, D_2, \dots\right)\left(1 + \varepsilon A + \varepsilon^2 f_2\right)\left(1 + \varepsilon A + \varepsilon^2 f_2\right) = 0 \dots$$

$$f_2 = -\frac{P\left(k_1^{(1)} - k_1^{(2)}\right)}{P\left(k_1^{(1)} + k_1^{(2)}\right)} c_1 c_2 e^{\left(\left(k_1^{(1)} k_1^{(2)}\right) x_1 + \dots\right)}.$$

КдФ:

$$k^{(i)} = \left(2k_i, 2k_i^3\right) \implies f_2 = \frac{\left(k_1 - k_2\right)^2}{(k_1 + k_2)^2} c_1 c_2 e^{2(k_1 + k_2)x + 2\left(k_1^3 + k_2^3\right)t}.$$

Расширяем набор переменных по правилу

$$x_1 = , \quad x_3 = t, \quad x_5, x_5 \dots.$$

Для n-солитонной системы

$$c_1, \dots, c_n \quad k_1, \dots, k_n.$$

$$\xi(x, k) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j k^j.$$

$$\xi_i = 2 \sum_{j=1}^{\infty} k_i^{2j+1} x_{2j+1} = \xi(x, k_i) - \xi(x, -k_i).$$

$$a_{ii'} = \frac{\left(k_i - k_{i'}\right)^2}{(k_i + k_{i'})^2}.$$

$$I = \{1, \dots, n\}.$$

n-солитонное решение иерархии КдФ:

$$\tau(x_1, x_3, \dots) = \sum_{J \subset I}^{\infty} \left(\prod_{i \in J} c_i\right) \left(\prod_{\substack{i, i' \in J \\ i < i'}} a_{ii'}\right) \exp\left(\sum_{i \in J} \xi_i\right).$$

$$n = 3: \quad \tau = 1 + c_1 e^{\xi_1} + c_2 e^{\xi_2} + c_3 e^{\xi_3} + c_1 c_2 a_{12} e^{\xi_1 + \xi_2} + c_1 c_3 a_{13} e^{\xi_1 + \xi_3} + \\ + c_2 c_3 a_{23} e^{\xi_2 + \xi_3} + c_1 c_2 c_3 a_{12} a_{13} a_{23} e^{\xi_1 + \xi_2 + \xi_3}.$$

Уравнение КдФ:

$$\tau = 1 + c e^{2k_1 x_1 + 2k_1^3 x_3}.$$

Иерарх. КдФ:

$$\tau = 1 + c_1 e^{2 \sum_{j=1}^{\infty} k_1^{2j+1} x_{2j+1}}.$$

$$u = 2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln \tau = \frac{8 c k_1^2 e^{2k_1\left(k_1^2 t + x\right)}}{\left(c e^{2k_1\left(k_1^2 t + x\right)} + 1\right)^2} = \frac{2 e^{\frac{A}{2}} k_1^2}{\mathrm{ch}^2\left(k_1 x + k_1^3 t + \frac{A}{2}\right)}.$$

Вершинные операторы

X — не диф. оператор.

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\tau(x_1, x_3, \ldots) = X\tau\left(x_1, x_3, \ldots\right).$$

$$\tau_{n+1} = e^{\varepsilon X}\tau_n.$$

Для параметра k определим

$$X(k) = \exp\left(2\sum_{j=0}^{\infty} k^{2j+1}x_{2j+1}\right) \cdot \exp\left(-2\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{(2j+1)k^{2j+1}}\frac{\partial}{\partial_{2j+1}}\right).$$

$$X(k)f\left(x_1, x_3, \ldots\right) = \exp\left(2\sum_{j=0}^{\infty} k^{2j+1}x_{2j+1}\right) f\left(x_1 - \frac{2}{k}, x_3 - \frac{2}{3k^3}, \ldots\right).$$

Понадобится следующая лемма:

$$X(k_1)X(k_2) = \frac{(k_1-k_2)^2}{(k_1+k_2)^2}\exp\left(2\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=0}^{\infty} k_i^{2j+1}x_{2j+1}\right)\exp\left(-2\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{(2j+1)k_1^{2j+1}}\frac{\partial}{\partial x_{2j+1}}\right).$$

$$e^{cX(k)} = 1 + cX(k).$$

$$\tau_1 = e^{cX(k)} \cdot 1 \text{ — 1-солит. реш..}$$

$$\tau = e^{c_1X(k_1)} \ldots e^{c_nX(k_n)} \cdot 1 \text{ — } n \text{ -солит. реш..}$$

$$\left(D_1^4 + 3D_2^2 - 4D_1D_3\right)\tau\tau = 0.$$

$$P\left(k_1, k_2, k_3\right) = k_1^4 + 3k_2^2 - 4k_1k_3.$$

$$(k_1, k_2, k_3) = \left(p - q, p^2 - q^2, p^3 - q^3\right).$$

Для наборов

$$k_i^{(1)},\ k_i^{(2)}.$$

Получим

$$-\frac{D\left(k_1^{(1)} - k_1^{(2)}, \ldots\right)}{P\left(k_1^{(1)} + k_1^{(2)}, \ldots\right)} = \frac{(p_1-p_2)(q_1-q_2)}{(p_1-q_2)(q_1-p_2)}.$$

$$\xi_i = \sum_{j=1}^{\infty}\left(p_i^j q_i^j\right)x_j = \xi(x, p_i) - \xi(x, q_i).$$

$$a_{ii'} = \frac{(p_i - p_{i'})(q_i - q_{i'})}{(p_i - q_{i'})(q_i - p_{i'})}.$$

$$X(p,q) = \exp\left(\sum_{j=1}^{\infty}(p^j - q^j)x_j\right) \cdot \exp\left(-\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j}\left(p^{-j} - q^{-j}\right)\frac{\partial}{\partial x_j}\right).$$

$$\tau = e^{c_1X(p_1,q_1)} \cdots e^{c_nX(p_n,q_n)} \cdots 1.$$

$$p^i = -q^i \implies \text{КдФ}.$$

Билинейное тождество

Теорема. *Для любых* x, x', $\xi := \xi(x,k)$, $\xi' := \xi(x',k)$:

$$\oint \frac{dk}{2\pi i} e^{\xi-\xi'} \tau\left(x_1 - \frac{1}{k}, x_2 - \frac{1}{2k^2}, \dots\right) \tau\left(x_1' + \frac{1}{k}, x_2' + \frac{1}{2k^2}, \dots\right) = 0.$$

Доказательство.

$$\exp\left(\xi\left(x_1 - \frac{1}{k}, \dots\right)\right) = \exp\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left(p_i^j - q_i^j\right)\left(x_j - \frac{1}{jk^j}\right)\right) = \frac{k-p_i}{k-q_i} e^{\xi_i}.$$

□

Введём вспомогательные функции

$$w(x,k) = e^{\xi(x,\,k)}\left(1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{w_i}{k^i}\right).$$

$$w^*(x,k) = e^{-\xi(x,\,k)}\left(1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{w_i^*}{k^i}\right).$$

По теореме получаем

$$\oint \frac{dk}{2\pi i} w(x,k) w^*(x',k).$$

$$\frac{\partial w}{\partial x_j} = B_j w, \quad B_j = \left(L^j\right)_+.$$

1. $\forall Q \hookrightarrow \oint \frac{dk}{2\pi i} Q(w) w^*(x',k) = 0$

2. $\tilde{w}(x,k) = e^{\xi(x,\,k)} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\tilde{w}_i}{k^i}$

$$\oint \frac{dk}{2\pi i} \tilde{w}(x,k) w^*(x',k) = 0 \implies \tilde{w}_i \equiv 0.$$

$$Q = \frac{\partial}{\partial x_j} - (L^j)_+.$$

$$Qw = \frac{\partial w}{\partial x_j} - L^j w + (L^j)_- w \text{ — имеет вид 2} \implies Qw = 0 \text{ и т.д..}$$

$$0 = \oint \frac{dk}{2\pi i} \exp\left(2\sum_{j=1}^{\infty} k^j y_j\right) \tau\left(x_1 + y_1 - \frac{1}{k}, \dots\right) \tau\left(x_1 - y_1 + \frac{1}{k}, \dots\right) =$$

$$= \oint \frac{dk}{2\pi i} \exp\left(2\sum_{i=1}^{\infty} k^i y_i\right) \exp\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left(y_j - \frac{1}{jk_j}\right) D_j\right) \tau\tau.$$