Неделя №10
Энергетические диаграммы для квазичастичного тока в контактах сверхпроводников. Эффект Джозефсона

Драчов Ярослав
Факультет общей и прикладной физики МФТИ

9 мая 2021 г.

T10-4.

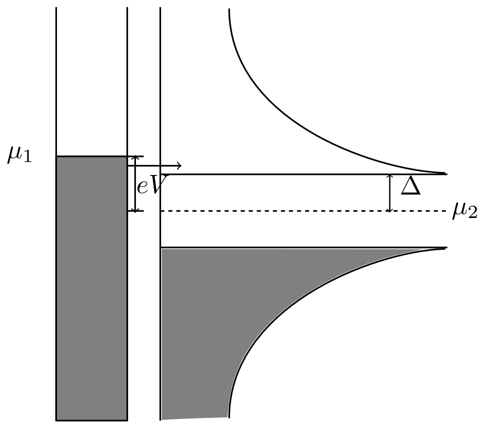

Рис. 1

Решение. Ток возникнет при $eV = \Delta_0 = 1{,}76 k_B T_c$, поэтому

$$V = \frac{1.76 k_B T_c}{e} = 0{,}18 \text{ мВ}.$$

T10-5.

Решение. Предположим сначала, что $I_{c1} < I_{c2}$. Тогда первый контакт — это «узкое место» и бездиссипативный ток через систему во всяком случае не может быть больше, чем I_{c1}. Докажем, что он может быть равен I_{c1}. Чтобы это было так, требуется $\varphi_1 = \pi/2$, и условие равенства токов через два контакта даёт $I_{c1} = I_{c2} \sin\varphi_2$, поэтому такая ситуация имеет место при

$$\cos\varphi_c = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \varphi_2\right) = -\sin\varphi_2 = -\frac{I_{c1}}{I_{c2}}, \quad |\cos\varphi_c| < 1.$$

Итак, при такой разности фаз достигается критический ток I_{c1} через систему.

Учитывая произвольное соотношение между I_{c1} и I_{c2}, записываем ответ следующим образом:

$$I_c = \min\left(I_{c1}, I_{c2}\right), \quad \cos\varphi_c = -\frac{\min\left(I_{c1}, I_{c2}\right)}{\max\left(I_{c1}, I_{c2}\right)}.$$

T10-6.

Решение. Напряжение на джозефсоновском контакте при токе, большем критического, связано со скоростью изменения фазы $\dfrac{d\varphi}{dt} = 2\dfrac{eV}{\hbar}$, при этом часть тока течёт по резистивному каналу, и в режиме постоянного заданного тока $I = I_c \sin\varphi + V/R = I_c \sin\varphi + \frac{\hbar}{2eR}\frac{d\varphi}{dt}$. Решением данного дифференциального уравнения будет

$$\varphi(t) = 2\,\mathrm{arctg}\left[\frac{I_c}{I} - \frac{\sqrt{I^2 - I_c^2}}{I}\,\mathrm{tg}\left(\frac{C_1 - t}{2}\sqrt{\left(\frac{2eR}{\hbar}\right)^2 (I^2 - I_c^2)}\right)\right].$$

Выбор константы произволен — это начало отсчёта времени, полагаем $C_1 = 0$. Далее, для интересующего нас напряжения

$$V = \frac{\hbar}{2e}\varphi' = \frac{\hbar}{2e}\frac{2}{1 + \left[\frac{I_c}{I} + \frac{\sqrt{I^2 - I_c^2}}{I}\,\mathrm{tg}\left(\frac{\omega t}{2}\right)\right]^2}\frac{\sqrt{I^2 - I_c^2}}{I}\frac{1}{\cos^2\left(\frac{\omega t}{2}\right)}\frac{\omega}{2},$$

где

$$\omega = \frac{2eR}{\hbar} I\sqrt{I^2 - I_c^2}.$$

Раскрывая квадрат в знаменателе и пользуясь формулами двойных углов и основным тригонометрическим тождеством:

$$V = \frac{R(I^2 - I_c^2)}{I\cos^2\frac{\omega t}{2} + \frac{I_c^2}{I}\cos^2\frac{\omega t}{2} + \frac{I_c\sqrt{I^2 - I_c^2}}{I}\sin\omega t + \frac{I^2 - I_c^2}{I}\sin^2\frac{\omega t}{2}} =$$

$$= \frac{R(I^2 - I_c^2)}{I + \frac{I_c^2}{I}\cos\omega t + \frac{I_c\sqrt{I^2 - I_c^2}}{I}\sin\omega t}.$$

С использованием формулы для синуса суммы это преобразуется в компактный вид

$$V = \frac{R\left(I^2 - I_c^2\right)}{I + I_c\sin\left(\omega t + \xi\right)},$$

фаза ξ зависит от токов, но постоянна в условиях этого опыта и опять равносильна выбору момента нуля отсчёта времени. Это приводит к ответу:

$$V(t) = R\frac{I^2 - I_c^2}{I + I_c\cos\omega t}.$$

При вычислении среднего

$$\overline{V} = RI_c\overline{\frac{(I/I_c)^2 - 1}{(I/I_c) + \cos\omega t}} = RI_c\int\limits_0^{2\pi}\frac{(I/I_c)^2 - 1}{I/I_c + \cos x}dx = RI_c\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\frac{(I/I_c)^2 - 1}{I/I_c + \cos x}dx.$$

Интеграл табличный, получаем

$$\overline{V} = RI_c \frac{1}{2\pi} \frac{2\left((I/I_c)^2 - 1\right)}{\sqrt{(I/I_c)^2 - 1}} \pi = \frac{\hbar\omega}{2e}.$$

T10-7.

Решение. Через «рукава » СКВИДа текут токи $I_a = I_c \sin\varphi_a$, $I_b = I_c \sin\varphi_b$. Это можно представить, как сумму текущего симметрично по «рукавам» транспортного тока $I_{tr} = (I_a + I_b)/2$ и кольцевого тока $I_{loop} = (I_a + I_b)/2$. Этот кольцевой ток приводит к частичному экранированию внешнего магнитного потока. Скачки фаз на джозефсоновских контактах будут определяться полным потоком.

Система уравнений СКВИДа при заданном полном токе I принимает вид

$$\begin{cases} \varphi_a - \varphi_b = 2\pi \dfrac{\Phi}{\Phi_0}, \\ \qquad \Phi = \Phi_{ext} - LI_{loop} = \Phi_{ext} - L(I_a - I_b)/2, \\ \qquad I = 2I_{tr} = I_a + I_b. \end{cases}$$

Здесь может возникнуть вопрос о выборе знака во втором уравнении, как мы увидим далее знак в ответ не входит, поэтому этот вопрос не важен. Вводим переменные $\Delta\varphi = \varphi_a - \varphi_b$, $\varphi_0 = (\varphi_a + \varphi_b)/2$ и подставляем в первое уравнение выражение для полного потока:

$$\Delta\varphi = 2\pi \frac{\Phi_{ext}}{\Phi_0} - \pi \frac{LI}{\Phi_0} (\sin\varphi_a - \sin\varphi_b) = 2\pi \frac{\Phi_{ext}}{\Phi_0} - \pi\beta \cos\varphi_0 \sin\frac{\Delta\varphi}{2}.$$

$$I = I_c(\sin\varphi_a + \sin\varphi_b) 2I_c \sin\varphi_0 \cos\frac{\Delta\varphi}{2}.$$

Первое из уравнений определяет разность скачков фаз в зависимости от внешнего потока. Максимизируя второе по φ_0, получим максимальный бездиссипативный ток.

Для указанных в условии потоков:

1. $\Phi_{ext} = 0$ задаёт $\Delta\varphi = 0$, откуда максимальный бездиссипативный ток $I_{\max} = 2I_c$

2. $\Phi_{ext} = \frac{\Phi_0}{2}$ в отсутствие индуктивности давало бы $\Delta\varphi = \pi$, первая малая поправка по β очевидно будет $\Delta\varphi = \pi\beta\cos\varphi_0$. Тогда в выражении для полного бездиссипативноого тока

$$\cos\frac{\Delta\varphi}{2} \approx \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi\beta}{2}\cos\varphi_0\right) = \sin\left(\frac{\pi\beta}{2}\cos\varphi_0\right) \approx \frac{\pi\beta}{2}\cos\varphi_0$$

   и для полного тока имеем $I = I_c \sin 2\varphi_0 \frac{\pi\beta}{2}$. Соответственно, $I_{\max}(\Phi_0/2) = \frac{\pi\beta}{2} I_c$. Ответ бы не изменился при другом выборе знака в поправке к полному потоку, так как знак можно изменить подбором фазы φ_0.

Для отношения максимальных бездиссипативных токов получаем

$$\frac{I_{\max}(\Phi_0/2)}{I_{\max}(0)} = \frac{\pi\beta}{2} \approx 0{,}15.$$