Домашняя работа по вычислительной математике
Задание 1

Драчов Ярослав
Факультет общей и прикладной физики МФТИ

17 марта 2021 г.

Тема IX. Построение общего решения

7.19. Найти все решения задачи на собственные значения

$$\frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{h^2} = (2-\lambda) y_k, \quad y_0 = 0, \quad y_N = y_{N-1}, \quad h = \frac{1}{N}.$$

Решение. Рассмотрим эту задачу как разностное уравнение второго порядка

$$y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1} = (2-\lambda)h^2 y_k$$

или

$$y_{k+1} + (\lambda h^2 - 4)y_k + y_{k-1} = 0.$$

Характеристическое уравнение, соответствующее данному разностному, есть

$$q^2 + (\lambda h^2 - 4)q + 1 = 0.$$

По теореме Виета имеем

$$q_1 = \frac{1}{q_2}.$$

Тогда общее решение разностного уравнения имеет вид

$$\overline{y}_n = \alpha q_1^n + \beta q_1^{-n}.$$

Подстановка в левое граничное условие даёт соотношение $\alpha + \beta = 0$, тогда

$$\overline{y} = \alpha \left(q_1^n - q_1^{-n} \right).$$

Теперь используем правое граничное условие

$$\alpha \left(q_1^N - q_1^{-N} \right) = \alpha \left(q_1^{N-1} - q_1^{-N+1} \right).$$

При $\alpha = 0$ получаем тривиальное решение, которое нас не интересует. Тогда для того, чтобы удовлетворить этому уравнению, должно быть выполнено

$$q_1^N - q_1^{-N} = q_1^{N-1} - q_1^{1-N}.$$

$$q_1^{2N} - 1 = q_1^{2N-1} - q_1.$$
$$(q_1^{2N-1} + 1)(q_1 - 1) = 0.$$

Откуда

$$q_1 = e^{\frac{\pi(1+2k)i}{2N-1}},\ k = 0, 1, \ldots, N-2; \quad q_1 = 1 \text{ — тривиальное решение.}$$

Подстановка полученного решения позволяет получить решение разностного уравнения

$$\overline{y}_n^{(k)} = \alpha \left(\exp\left(\frac{\pi(1+2k)ni}{2N-1} \right) - \exp\left(-\frac{\pi(1+2k)ni}{2N-1} \right) \right) = \alpha 2i \sin \frac{\pi(2k+1)n}{2N-1}.$$

Выбирая $\alpha = \frac{1}{2i}\sqrt{\frac{2}{l}}$, получаем собственные функции

$$\overline{y}_n^{(k)} = \frac{2}{l} \sin \frac{\pi(2k+1)n}{2N-1}.$$

Подстановка собственных функций позволяет после ряда тригонометрических преобразований найти спектр для $k = 0, \ldots, N-2$:

$$\lambda_{(k)} = 2 - \frac{y_{m+1}^{(k)} - 2y_m^{(k)} + y_{m-1}^{(k)}}{y_m^{(k)} h^2} =$$
$$= 2 - \frac{1}{h^2} \left(\frac{\sin \frac{\pi(2k+1)(m+1)}{2N-1} - 2\sin \frac{\pi(2k+1)m}{2N-1} + \sin \frac{\pi(2k+1)(m-1)}{2N-1}}{\sin \frac{\pi(2k+1)m}{2N-1}} \right) =$$
$$= 2 + \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{(2k+1)\pi}{4N-2}.$$

7.20. Найти все решения задачи на собственные значения

$$\frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{h^2} = -\lambda y_k, \quad y_0 = y_1, \quad y_N = y_{N-1}, \quad h = \frac{1}{N}.$$

Решение. Рассмотрим эту задачу как разностное уравнение второго порядка

$$y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1} = -\lambda h^2 y_k$$

или

$$y_{k+1} + (\lambda h^2 - 2)y_k + y_{k-1} = 0.$$

Характеристическое уравнение, соответствующее данному разностному, есть

$$q^2 + (\lambda h^2 - 2)q + 1 = 0.$$

По теореме Виета имеем

$$q_1 = \frac{1}{q_2}.$$

Тогда общее решение разностного уравнения имеет вид

$$\overline{y}_n = \alpha q_1^n + \beta q_1^{-n}.$$

Подстановка в граничные условия даёт

$$\begin{cases} \alpha + \beta = \alpha q_1 + \beta q^{-1} \\ \alpha q_1^{N-1} + \beta q_1^{1-N} = \alpha q_1^{N} + \beta q_1^{-N} \end{cases}.$$

Откуда

$$\alpha \left(q_1^N - q_1^{N-1}\right) = \beta \left(q_1^{1-N} - q_1^{-N}\right).$$

$$\beta = \frac{q_1^N \left(1 - q_1^{-1}\right)}{q_1^{-N} \left(q_1 - 1\right)} \alpha = \alpha q_1^{2N-1}.$$

$$\alpha \left(1 + q_1^{2N-1}\right) = \alpha \left(q_1 + q_1^{2N-2}\right).$$

$$\alpha \left(1 + q_1^{2N-1}\right) = \alpha \left(q_1 + q_1^{2N-2}\right).$$

$$1 - q_1 + q_1^{2N-1} - q_1^{2N-2} = 0.$$

$$\left(1 - q_1\right)\left(1 - q_1^{2N-2}\right) = 0.$$

Следовательно

$$q_1^{(k)} = e^{\frac{2\pi k i}{2N-2}},\ k = 0, 1, \ldots, N-2; \quad q_1 = 1 \text{ — тривиальное решение.}$$

Подстановка полученного решения позволяет получить решение разностного уравнения

$$\overline{y}_n^{(k)} = \alpha \left(\exp\left(\frac{\pi k i}{N-1} n\right) + \exp\left(\frac{\pi k i}{N-1}(2N-1-n)\right) \right).$$

$$\overline{y}_n^{(k)} = \alpha \left(\exp\left(\frac{\pi k i}{N-1} n\right) + \exp\left(\frac{\pi k i}{N-1}(1-n)\right) \right).$$

$$\lambda_k = \frac{1}{h^2}\left(2 - q_1^{(k)} - \frac{1}{q_1^{(k)}}\right) = \frac{1}{h^2}\left(2 - e^{\frac{\pi k i}{N-1}} - e^{-\frac{\pi k i}{N-1}}\right) = \frac{4}{h^2}\sin^2\frac{\pi k}{2N-2}.$$

7.10. Найти все значения параметра α, при котором все решения разностного уравнения

$$13y_{k+1} + (13+\alpha)y_k + (\alpha+7)y_{k-1} + (\alpha+7)\, y_{k-2} + (\alpha+1)y_{k-3} + y_{k-4} = 0$$

будут ограничены при $k \to \infty$.

Решение. Характеристический многочлен для разностного уравнения в данном случае есть

$$g(q) = 13q^5 + (13+\alpha)q^4 + (\alpha+7)q^3 + (\alpha+7)q^2 + (\alpha+1)\, q + 1 = 0.$$

Для ограниченности решения при $k \to \infty$ необходимо и достаточно, чтобы корни уравнения были по модулю меньшее или равны единице, а на границе единичного круга не было кратных корней. Преобразуем характеристический многочлен:

$$g(q) = (q+1)\left(\alpha q^3 + 13q^4 + 7q^2 + \alpha q + 1\right).$$

Один из корней по модулю равен единице. Теперь применим теорему Шура-Кона для определения действительных значений параметра α, при которых

полином $f(q) = 13q^4 + \alpha q^3 + 7q^2 + \alpha q + 1$ будет иметь все корни внутри единичного круга. Первое из условий теоремы выполнено: $13 > 1$. Найдём $f_1(z)$:
$$f_1(z) = 12\left(\alpha + \alpha z^2 + 14z^3 + 7z\right).$$
Для $f_1(z)$ первое условие теоремы накладывает на исследуемый параметр условие $14 > |\alpha|$. Далее
$$f_2(z) = -144\left(\alpha^2 + \left(\alpha^2 - 196\right)z^2 - 7\alpha z - 98\right),$$
откуда $196 - \alpha^2 > 98 - \alpha^2$ — всегда верно.
$$f_3(z) = -2032128\left(2\left(\alpha^2 - 147\right)z - 7\alpha\right) \text{ и } \left|2(\alpha^2 - 147)\right| > |7\alpha|.$$
Последнее неравенство верно при
$$|\alpha| < \frac{21}{2} \text{ или } |\alpha| > 14.$$
Собирая полученные условия на α получаем
$$|\alpha| < \frac{21}{2}.$$

7.12-2. Найти общее решение системы разностных уравнений (однородных и неоднородных):
$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n - y_n + n, \\ y_{n+1} = -2x_n + 2n \end{cases}.$$

Решение. Рассмотрим однородную систему разностных уравнений
$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n - y_n, \\ y_{n+1} = -2x_n \end{cases}.$$
Для неё характеристическое уравнение будет иметь вид
$$\begin{vmatrix} 1-q & -1 \\ -2 & -q \end{vmatrix} = q^2 - q - 2 = 0.$$
Корни данного уравнения
$$q_1 = -1, \quad q_2 = 2$$
— действительны и различны, тогда общее решение однородной системы представляется в виде
$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} (-1)^n + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} 2^n.$$
Частное решение неоднородного уравнения будем искать в виде
$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} n + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}.$$

Подставляя в уравнение, получаем

$$\begin{cases} a(n+1)+c = an + c - bn - d + n \\ b(n+1) + d = -2an - 2c + 2n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + bn + d = n \\ 2an + bn + b + 2c + d = 2n \end{cases}$$

Положим $b = 1$, тогда $a = -d$ и

$$2an + 1 + 2c - a = n.$$

Полагая $a = 1/2$ получаем $c = -1/4$. Откуда частное решение неоднородной системы

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} n - \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/2 \end{pmatrix}.$$

Общее решение исследуемой неоднородной разностной системы уравнений представляется как сумма её частного решения и общего решения, соответствующей ей, однородной разностной системы:

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} (-1)^n + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} 2^n + \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} n - \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/2 \end{pmatrix}.$$

7.15-2. Найти общее решение неоднородной системы разностных уравнений

$$\begin{cases} x_{n+1} = -2x_n + 3y_n + 5 \cdot 2^n - 6 \\ y_{n+1} = -3x_n + 8y_n + 30 \cdot 2^n - 2 \end{cases}.$$

Решение. Сперва найдём решение однородной системы аналогично предыдущей задаче

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} 7^n + c_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} (-1)^n.$$

Частное решение будем искать в виде

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} 2^n + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}.$$

Подставляя, получаем

$$\begin{cases} a \cdot 2^{n+1} + c = -2a \cdot 2^n - 2c + 3b \cdot 2^n + 3d + 5 \cdot 2^n - 6 \\ b \cdot 2^{n+1} + d = -3a \cdot 2^n - 3c + 8b \cdot 2^n + 8d + 30 \cdot 2^n - 2 \end{cases}.$$

Откуда

$$\begin{cases} 2a = -2a + 3b + 5 \\ 2b = -3a + 8b + 30 \\ c = -2c + 3d - 6 \\ d = -3c + 8d - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -4 \\ b = -7 \\ c = -3 \\ d = -1 \end{cases}.$$

Следовательно, общее решение исследуемой неоднородной системы будет иметь вид

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} 7^n + c_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} (-1)^n - \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix} 2^n - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Тема X. Жёсткие системы ОДУ

7.1. Уравнение Ван-дер-Поля записано в виде системы второго порядка

$$\begin{cases} y_1' = 1000\left(y_1 - \dfrac{y_1^3}{3}\right) + y_2, \\ y_2' = -y_1 \end{cases}.$$

Определить тип особой точки системы. Найти, в какой части фазового пространства задача является жёсткой. Определить показатель жёсткости системы.

Решение. В окрестности нуля:

$$\begin{cases} y_1' = 1000y_1 + y_2 \\ y_2' = -y_1 \end{cases}.$$

Собственными значениями матрицы

$$\begin{pmatrix} 1000 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

будут

$$\lambda_{1,2} = 500 \pm \sqrt{500^2 - 1}.$$

Собственные значения положительны и различны, следовательно особая точка данной системы — неустойчивый узел.

Матрица Якоби данной системы:

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 1000\left(1 - y_1^2\right) & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Её спектр:

$$\lambda_{1,2} = 500(1 - y_1^2) \pm \sqrt{500^2(1 - y_1^2)^2 - 1}.$$

Сделаем замену

$$x = 500(1 - y_1^2) \in (-\infty, 500).$$

Тогда

$$\lambda_{1,2} = x \pm \sqrt{x^2 - 1}.$$

При $|x| \geqslant 1$ получаем чисто действительные собственные значения, при $|x| < 1$

$$\lambda_{1,2} = x \pm i\sqrt{1 - x^2}$$

— комплексно-сопряжённые собственные значения, лежащие на единичной окружности на комплексной плоскости. То есть при $|x| \leqslant 1$ в полученном наборе собственных значений присутствует лишь мягкий спектр, и, как следствие, система — не жёсткая.

Критерием жёсткости системы для данной задачи будет наличие таких-наименьших положительных λ и Λ, что

$$|\lambda_1| \leqslant \lambda, \quad \operatorname{Re}\lambda_2 \leqslant -\Lambda, \quad |\operatorname{Im}\lambda_2| \leqslant \Lambda, \quad \frac{\Lambda}{\lambda} \ll 1.$$

Для случая чисто действительных собственных значений последнее неравенство автоматически выполнено, второе неравенство накладывает обязательное условие наличия хотя бы одного отрицательного собственного значения. Так как для $|x| \geqslant 1$ выполняется неравенство

$$|x| \geqslant \sqrt{x^2 - 1},$$

то выражение

$$x \pm \sqrt{x^2 - 1}$$

имеет шансы быть отрицательным лишь при отрицательных x. Ну а для $x \leqslant -1$ можно уже однозначно сказать, что

$$\left| x + \sqrt{x^2 - 1} \right| \leqslant \left| x - \sqrt{x^2 - 1} \right|.$$

Согласно данному выше определению можем найти λ и Λ для рассматриваемого случая:

$$\operatorname{Re} \lambda_+ = x - \sqrt{x^2 - 1} = -\Lambda,$$

$$|\lambda_-| = -x - \sqrt{x^2 - 1} = \lambda.$$

Тогда критерием жёсткости системы будет оценка

$$\frac{\Lambda}{\lambda} = \frac{x - \sqrt{x^2 - 1}}{x + \sqrt{x^2 - 1}} = 2x \left(x - \sqrt{x^2 - 1} \right) - 1 \gg 1.$$

Она будет выполняться тем лучше, чем x ближе к $-\infty$. Раскладываясь по Тейлору в окрестности $-\infty$, упрощаем оценку

$$2x \left(x - \sqrt{x^2 - 1} \right) - 1 \sim 4x^2 \gg 1.$$

Для численной оценки выберем произвольно минимальный коэффициент жёсткости $\alpha \gg 1$ жёсткой системы. Тогда любая система будет жёсткой, если её коэффициент жёсткости не меньше α. То есть

$$4x^2 \geqslant \alpha.$$

Возвращаясь к исходным переменным, получаем условие на жёсткость системы:

$$10^6 \left(1 - y_1^2 \right)^2 \geqslant \alpha.$$

Вид решения зависит от параметра α и представлен на рис. 1. От y_2, как мы выяснили, жёсткость системы не зависит.

7.2. Получить функции устойчивости всех явных методов Рунге–Кутты с порядком аппроксимации с первого до седьмого с минимальным числом стадий.

Решение. Так как

$$u_{n+1} = e^{\lambda h} u_n, \quad y_{n+1} = R(\lambda h) y_n, \quad |u_{n+1} - y_{n+1}| = O\left(h^{p+1}\right) = O\left(z^{p+1}\right),$$

где $\lambda h = z$, то у $R(z)$ и e^z ряды Тейлора совпадают вплоть до порядка аппроксимации p. Известно, что для $p \leqslant 4$ существуют ЯМРК с числом стадий $s = p$.

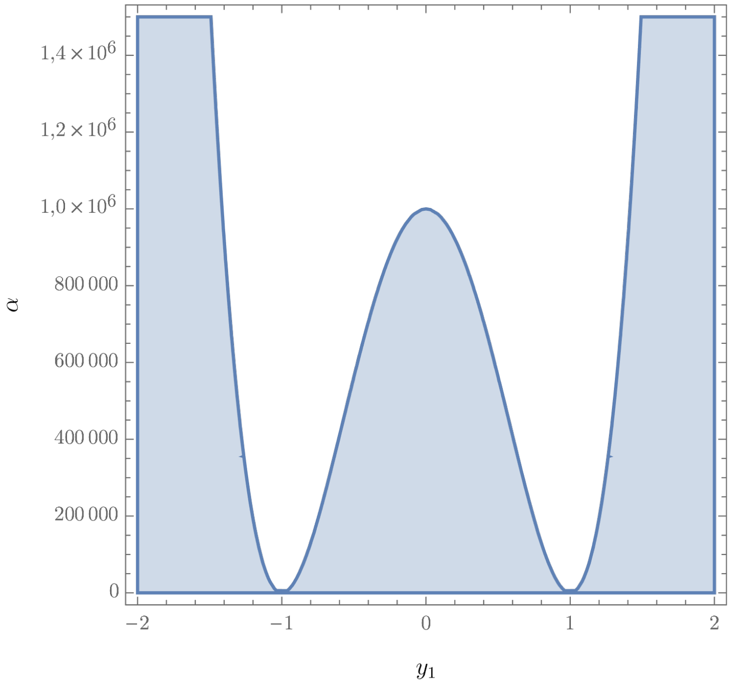

Рис. 1

Для p от 1 до 4 найдутся s-стадийные методы с числом стадий равным порядку аппроксимации, значит для таких методов функция устойчивости $R(z)$ не будет зависеть от конкретного вида таблицы Бутчера и будет равна

$$R(z) = 1 + z + \ldots + \frac{z^s}{s!},$$

Далее, после так называемого первого барьера Бутчера, методы с $p \geqslant 5$ будут, как минимум $s+1$-стадийные:

$$p = 5: \quad R(z) = 1 + z + \frac{z^5}{5!} + C_6 z^6,$$

$$p = 6: \quad R(z) = 1 + z + \ldots + \frac{z^6}{6!} + C_7 z^7,$$

где C_6 и C_7 зависят от таблицы Бутчера. После второго барьера Бутчера ($p \geqslant 7$) методы будут как минимум $s+2$-стадийные:

$$p = 7: \quad R(z) = 1 + z + \ldots + \ldots + \frac{z^7}{z!} + C_8 z^8 + C_9 z^9,$$

где, как и раньше, C_8 и C_9 зависят от конкретного вида таблицы Бутчера.

7.3. Вывести условия порядка для всех двухстадийных НМРК вплоть до четвертого.

Решение. Задача решалась при помощи пакета Mathematica:

In[1]:=

```
s=2;
F[h_,i_]:=f[x_n+c_i h,y_n+h Σ_{j=1}^{s} a_{i,j} k_j[h]]
list1=CoefficientList[Normal[Series[
y_n+h Σ_{i=1}^{s} b_i f[x_n+c_i h,y_n+h Σ_{j=1}^{s} a_{i,j} k_j[h]],{h,0,4}]]//.{
Derivative[i_][k_{j_}][_] →Derivative[i,0][F][0,j],
k_{i_}[0]→f[x_n,y_n]},h];
list2=CoefficientList[Normal[Series[
u[x_n+h],{h,0,4}]]
//.Derivative[i_][u][_] →
D[f[x_n,u[x_n]],{x_n,i-1}]/.u[x_n]→u_n,h];
set=Table[Derivative[m,p][f][x_n,u_n],
{m,0,3},{p,0,3-m}]//Flatten;
Map[#==0&,DeleteCases[CoefficientList[
#,set]&/@Flatten[{list1-list2//Thread}/.y_n→u_n
],0,∞]//Flatten]//Simplify
```

Out[6]=

$$\{b_1+b_2==1,\ 2\ b_1\ c_1+2\ b_2\ c_2==1,\ 2\ b_1\ (a_{1,1}+a_{1,2})+2\ b_2\ (a_{2,1}+a_{2,2})==1,\ 3\ b_1\ c_1^2+3\ b_2\ c_2^2==1,\ 6\ b_1\ (c_1\ a_{1,1}+c_2\ a_{1,2})+6\ b_2\ (c_1\ a_{2,1}+c_2\ a_{2,2})==1,\ 3\ b_1\ c_1\ (a_{1,1}+a_{1,2})+3\ b_2\ c_2\ (a_{2,1}+a_{2,2})==1,\ 6\ b_1\ (a_{1,1}^2+a_{1,1}\ a_{1,2}+a_{1,2}\ (a_{2,1}+a_{2,2}))+6\ b_2\ (a_{1,1}\ a_{2,1}+a_{1,2}\ a_{2,1}+a_{2,2}\ (a_{2,1}+a_{2,2}))==1,\ 3\ b_1\ (a_{1,1}+a_{1,2})^2+3\ b_2\ (a_{2,1}+a_{2,2})^2==1,\ 4\ b_1\ c_1^3+4\ b_2\ c_2^3==1,\ 8\ b_1\ c_1\ (c_1\ a_{1,1}+c_2\ a_{1,2})+8\ b_2\ c_2\ (c_1\ a_{2,1}+c_2\ a_{2,2})==1,\ 12\ (b_1\ (c_1^2\ a_{1,1}+c_2^2\ a_{1,2})+b_2\ (c_1^2\ a_{2,1}+c_2^2\ a_{2,2}))==1,\ b_1\ (c_1\ (a_{1,1}^2+a_{1,2}\ a_{2,1})+c_2\ a_{1,2}\ (a_{1,1}+a_{2,2}))+b_2\ (c_1\ a_{2,1}\ (a_{1,1}+a_{2,2})+c_2\ (a_{1,2}\ a_{2,1}+a_{2,2}^2))==\frac{1}{24},\ 4\ b_1\ c_1^2\ (a_{1,1}+a_{1,2})+4\ b_2\ c_2^2\ (a_{2,1}+a_{2,2})==1,\ 8\ b_1\ (a_{1,1}+a_{1,2})\ (c_1\ a_{1,1}+c_2\ a_{1,2})+8\ b_2\ (a_{2,1}+a_{2,2})\ (c_1\ a_{2,1}+c_2\ a_{2,2})==1,\ b_1\ (c_2\ a_{1,2}\ (a_{2,1}+a_{2,2})+c_1\ (2\ a_{1,1}^2+2\ a_{1,1}\ a_{1,2}+a_{1,2}\ (a_{2,1}+a_{2,2})))+b_2\ (c_1\ (a_{1,1}+a_{1,2})\ a_{2,1}+c_2\ (a_{1,1}\ a_{2,1}+a_{1,2}\ a_{2,1}+2\ a_{2,2}\ (a_{2,1}+a_{2,2})))==\frac{5}{24},\ b_2\ (a_{1,1}^2\ a_{2,1}+a_{1,1}\ a_{2,1}\ (a_{1,2}+a_{2,2})+a_{2,2}^2\ (a_{2,1}+a_{2,2})+a_{1,2}\ a_{2,1}\ (a_{2,1}+2\ a_{2,2}))+b_1\ (a_{1,1}^3+a_{1,1}^2\ a_{1,2}+a_{1,1}\ a_{1,2}\ (2\ a_{2,1}+a_{2,2})+a_{1,2}\ (a_{1,2}\ a_{2,1}+a_{2,2}\ (a_{2,1}+a_{2,2})))==\frac{1}{24},\ 4\ b_1\ c_1\ (a_{1,1}+a_{1,2})^2+4\ b_2\ c_2\ (a_{2,1}+a_{2,2})^2==1,\ 3\ b_2\ (a_{1,1}^2\ a_{2,1}+a_{1,2}^2\ a_{2,1}+2\ a_{1,2}\ a_{2,1}\ (a_{2,1}+a_{2,2})+3\ a_{2,2}\ (a_{2,1}+a_{2,2})^2+2\ a_{1,1}\ a_{2,1}\ (a_{1,2}+a_{2,1}+a_{2,2}))+3\ b_1\ (3\ a_{1,1}^3+6\ a_{1,1}^2\ a_{1,2}+a_{1,2}\ (a_{2,1}+a_{2,2})\ (2\ a_{1,2}+a_{2,1}+a_{2,2})+a_{1,1}\ a_{1,2}\ (3\ a_{1,2}+2\ (a_{2,1}+a_{2,2})))==1,\ 4\ b_1\ (a_{1,1}+a_{1,2})^3+4\ b_2\ (a_{2,1}+a_{2,2})^3==1\}$$