Третье задание по ТФКП

Драчов Ярослав
Факультет общей и прикладной физики МФТИ

11 декабря 2020 г.

I. Принцип максимума модуля

Т.1. Пусть $P(z) = z^n + c_1 z^{n-1} + \ldots + c_n$. Доказать, что если $P(z) \not\equiv z^n$, то найдётся на единичной окружности точка z_0, в которой $|P(z_0)| > 1$.

Доказательство.

$$g(z) = \frac{P(z)}{z^n}; \quad f(\xi) = g\left(\frac{1}{\xi}\right).$$

$$g(z) = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{c_k}{z^k}; \quad f(\xi) = 1 + \sum_{k=1}^{n} c_k \xi^k.$$

Заметим, что $f(0) = 1$. Рассмотрим $D = B_1(0)$ — единичный круг.

$$\max_{\xi \in \overline{B_1(0)}} |f(\xi)| \xlongequal[]{\substack{\text{принцип} \\ \text{max мод.}}} \max_{|\xi|=1} |f(\xi)| > |f(0)| = 1.$$

Следовательно существует ξ_0 такой, что $|\xi_0| = 1$ и $|f(\xi_0)| > 1$. Значит

$$|f(\xi_0)| = \left| g\left(\frac{1}{\xi_0}\right) \right| = \left| \frac{P\left(\frac{1}{\xi_0}\right)}{(1/\xi_0)^n} \right| = |P(z_0)| > 1,$$

где $z_0 = \frac{1}{\xi_0}$, $|z_0| = 1$ $\square$

Т.2. Пусть $P(z)$ — полином степени n и $M(r) = \max\limits_{|z|=r} |P(z)|$. Докажите, что для $0 < r_1 < r_2$ выполняется неравенство

$$\frac{M(r_1)}{r_1^n} \geqslant \frac{M(r_2)}{r_2^n}.$$

Доказательство. Аналогично Т.1 рассмотрим

$$f(\xi) = \xi^n P\left(\frac{1}{\xi}\right).$$

Т. к. $\overline{B_{\rho_1}(0)} \supset \overline{B_{\rho_2}(0)}$ при $0 < \rho_1 < \rho_2$, то

$$\max_{\xi \in \overline{B_{\rho_2(0)}}} |f(\xi)| \geqslant \max_{\xi \in \overline{B_{\rho_1}(0)}} |f(\xi)|.$$

Следовательно по принципу максимума модуля

$$\max_{|\xi|=\rho_2} |f(\xi)| \geqslant \max_{|\xi|=\rho_1} |f(\xi)|.$$

Значит

$$\max_{|z|=1/\rho_2} \left|\frac{P(z)}{z^n}\right| \geqslant \max_{|z|=1/\rho_1} \left|\frac{P(z)}{z^n}\right|.$$

$$r_1 = \frac{1}{\rho_2}, \quad r_2 = \frac{1}{\rho_1}, \quad 0 < r_1 < r_2.$$

Поэтому

$$\frac{M(r_1)}{r_1^n} \geqslant \frac{M(r_2)}{r_2^n}.$$

□

II. Конформные отображения

§27 №4(5). Найти образ полуплоскости $\{z : \operatorname{Re} z < 1\}$ при отображении

$$w = \frac{z-3+i}{z+1+i}.$$

Решение.

$$w(-1-i) = \infty, \quad w(3-i) = 0, \quad w(\infty) = 1.$$

Т. к. $-1-i \notin \{z : \operatorname{Re} z = 1\}$, то данная прямая перейдёт в окружность. Точки $-1-i$ и $3-i$ симметричны относительно прямой $\operatorname{Re} z = 1$, поэтому после отображения ∞ и 0 будут симметричны относительно окружности — образа этой прямой. Следовательно 0 — центр окружности. Также можно заметить что бесконечная точка принадлежит прямой и отображается в единицу, следовательно единица будет принадлежать получившейся окружности, и, поэтому, радиус окружности будет равен единице.

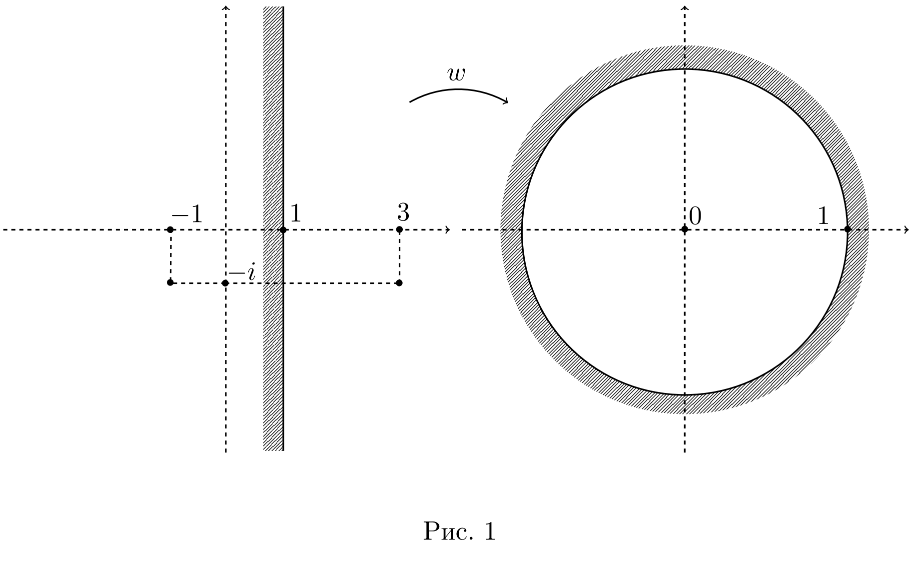


Рис. 1

§27 №7(2). Отыскать дробно-линейную функцию $w(z)$, удовлетворяющие условиям
$$w(i) = 0, \quad w(\infty) = 1, \quad w(-i) = \infty.$$

Решение. Дробно-линейные функции можно представить в виде
$$w(z) = \frac{az+b}{cz+d}.$$

Из второго условия получаем $a = c$, из первого $b = -ia$, из третьего $d = ic$. Тогда
$$w(z) = \frac{az - ia}{az + ia} = \frac{z-i}{z+i}.$$

§27 №8. Найти функцию $w(z)$, конформно отображающую область D на область D_1 и удовлетворяющую указанным условиям:

2) $D = \{z : |z| < 1\}$, $D_1 = \{w : |w| < 1\}$, $w(z_0) = w_0$, $\arg w'(z_0) = \alpha$ ($|z_0| < 1$, $|w_0| < 1$);

4) $D = \{z : |\operatorname{Im} z| > 0\}$, $D_1 = \{w : |w| < 1\}$, $w(z_0) = w_0$, $\arg w'(z_0) = \alpha$ ($\operatorname{Im} z_0 > 0$, $|w_0| < 1$).

Решение. 2) Рассмотрим отображение из диска в диск
$$t(z) = \frac{z - z_0}{1 - z\overline{z}_0} e^{i\alpha},$$
переводящее точку z_0 в нуль. Для него $\arg(t'(z_0)) = \alpha$.

Рассмотрим также еще одно отображение из диска в диск
$$w(t) = \frac{t + w_0}{1 + t\overline{w}_0},$$
переводящее нуль в точку w_0. Для него $\arg(w'(0)) = 0$. Следовательно $w(t(z_0)) = w_0$. А также
$$\arg\left(\left.\frac{dw(t(z))}{dz}\right|_{z=z_0}\right) = \alpha.$$

Этим мы показали, что композиция данных отображений и будет искомой функцией $w(z)$. Упростим её
$$w(z) = w(t(z)) = \frac{\frac{z-z_0}{1-z\overline{z}_0}e^{i\alpha} + w_0}{1 + \frac{z-z_0}{1-z\overline{z}_0}e^{i\alpha}\overline{w}_0} = \frac{\left(e^{i\alpha} - w_0\overline{z}_0\right) z - z_0 e^{i\alpha} + w_0}{\left(e^{i\alpha}\overline{w}_0 - \overline{z}_0\right) z + 1 - z_0\overline{w}_0 e^{i\alpha}}.$$

4) Рассмотрим отображение из верхней полуплоскости на единичный круг
$$t(z) = \frac{z - z_0}{z - \overline{z}_0} e^{i\alpha},$$
переводящее z_0 в нуль, и отображение из единичного круга в единичный круг
$$w(t) = \frac{t + w_0}{1 + t\overline{w}_0},$$

переводящее нуль в w_0. Заметим, что

$$\arg w'(t(z_0)) = \underbrace{w'(0)}_{=0} + \arg(t'(z_0)) = \alpha.$$

Тем самым мы показали, что искомое отображение $w(z)$ будет композицией $w(t(z))$ рассмотренных отображений, и

$$w(z) = \frac{(z - z_0)e^{i\alpha} + w_0(z - \overline{z}_0}{(z - \overline{z}_0) + (z - z_0)e^{i\alpha}\overline{w}_0} = \frac{(w_0 + e^{i\alpha})z - z_0 e^{\alpha} - w_0\overline{z}_0}{(1 + \overline{w}_0 e^{i\alpha})z - \overline{z}_0 - z_0\overline{w}_0 e^{i\alpha}}.$$

§28 №5. Найти какие-либо функции $w(z)$, осуществляющие конформные отображения областей, изображённых на рис. 2 на полуплоскость $\{w\colon \operatorname{Im} w > 0\}$.

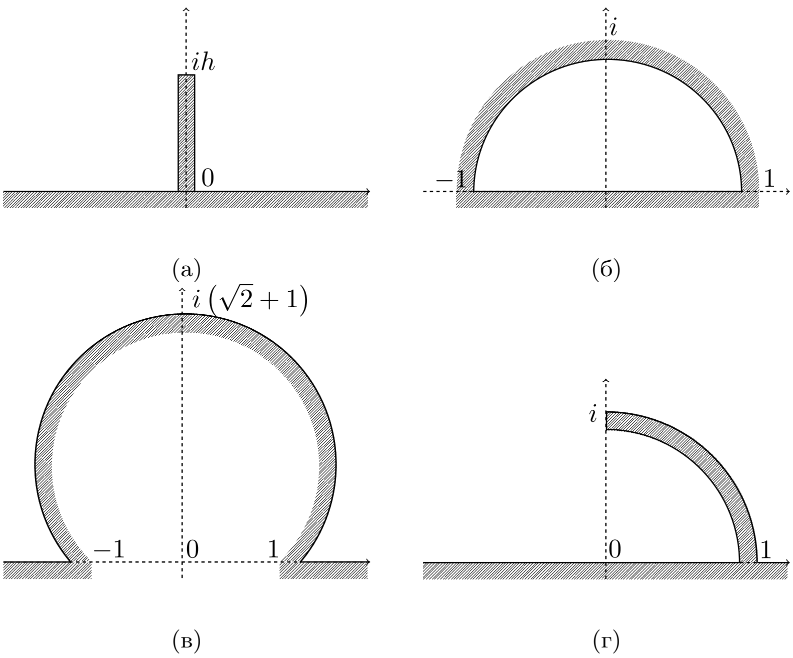


Рис. 2

Решение. а) См. рис. 3, 4, 5.

б) См. рис. 6, 7.

в) См. рис. 8, 9, 10.

г) См. рис. 11, далее как в первом пункте данной задачи.

§28 №10. Найти какие-либо функции $w(z)$, осуществляющие конформные отображения областей, изображённых на рис. ?? на полуплоскость $\{w\colon \operatorname{Im} w > 0\}$.

Решение. а) См. рис. 13.

б) См. рис. 14.

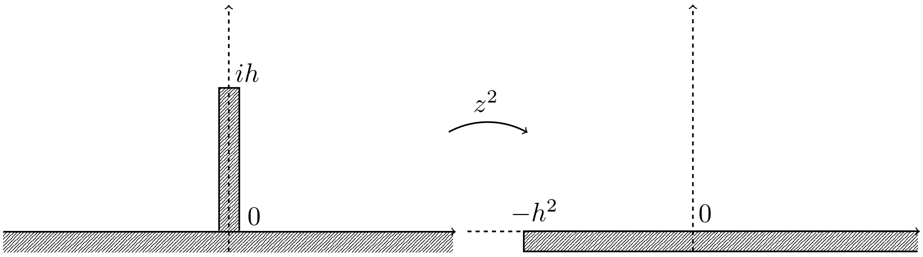


Рис. 3

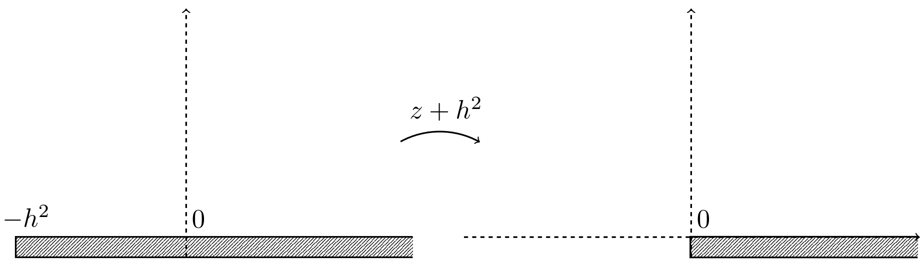


Рис. 4

в) См. рис. 15.

§28 №11. Найти какие либо функции $w(z)$, осуществляющие конформные отображения области, изображённой на рис. 16, на круг $\{w \colon |w| < 1\}$.

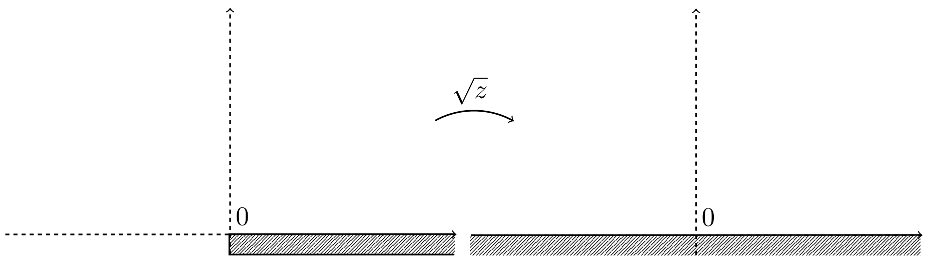


Рис. 5

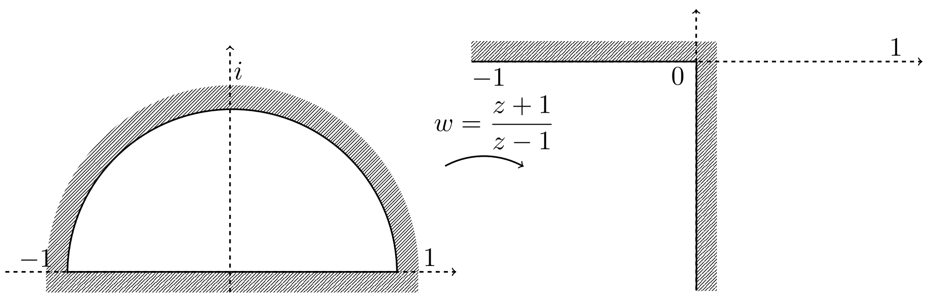


Рис. 6

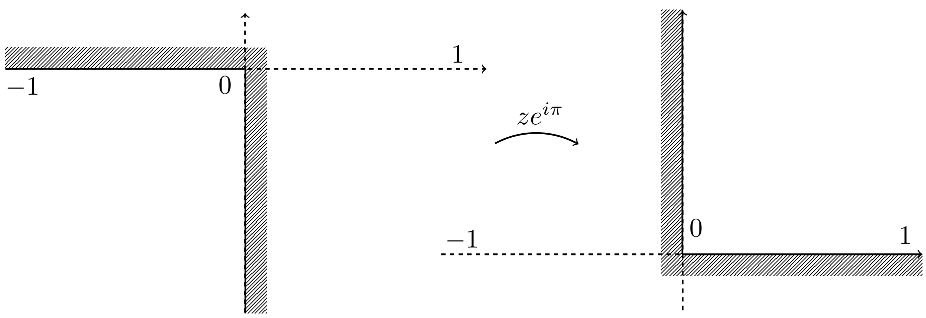


Рис. 7

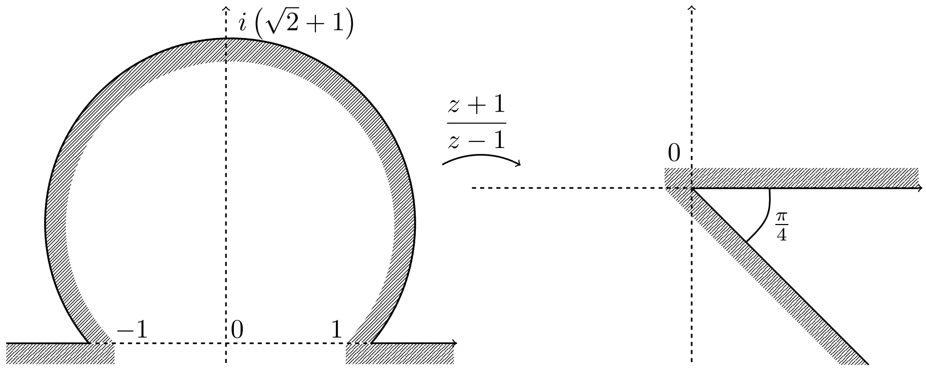


Рис. 8

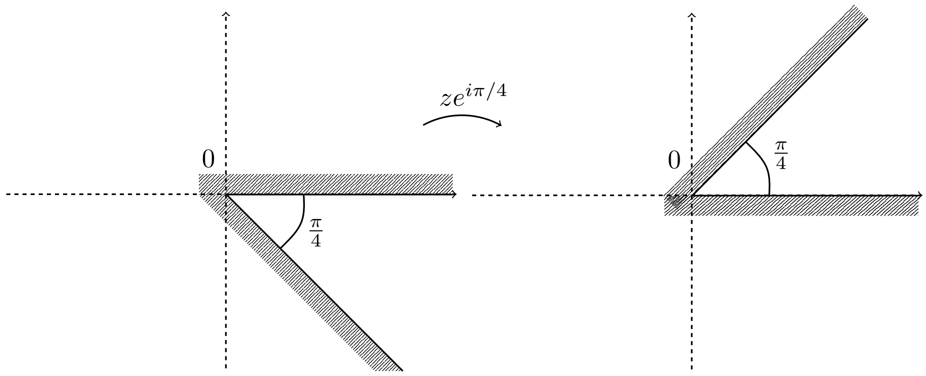


Рис. 9

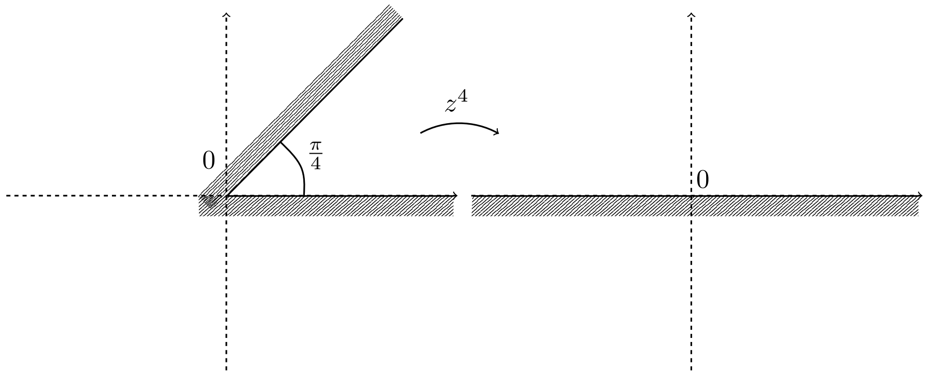


Рис. 10

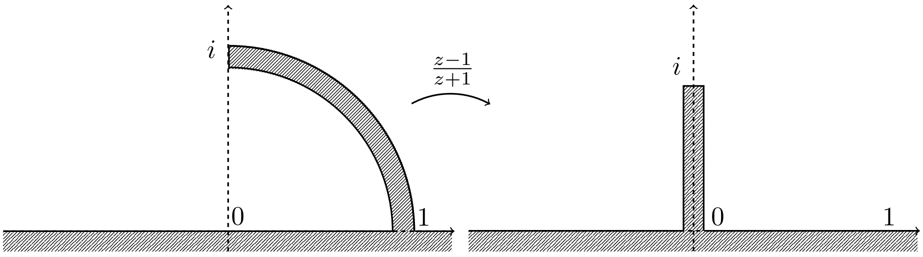
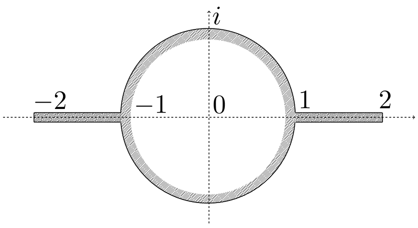
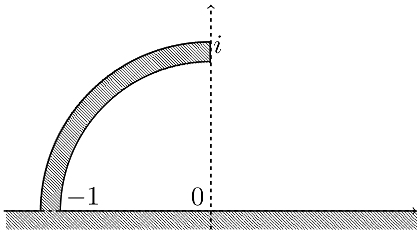


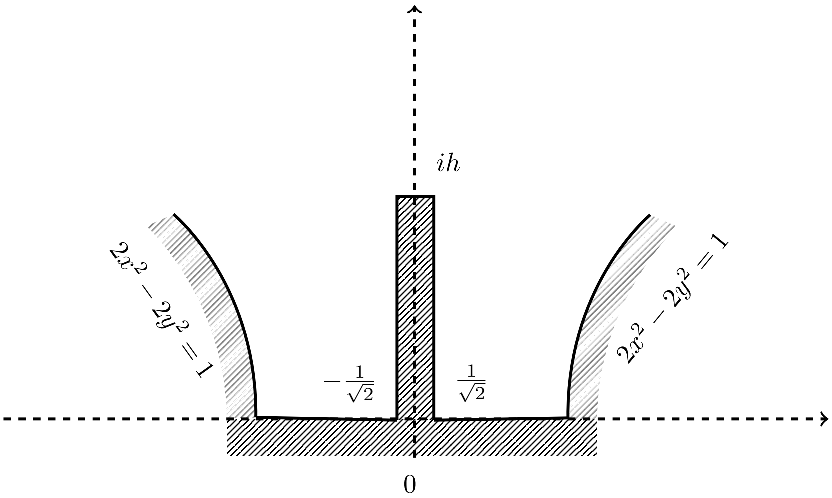
Рис. 11



(а)

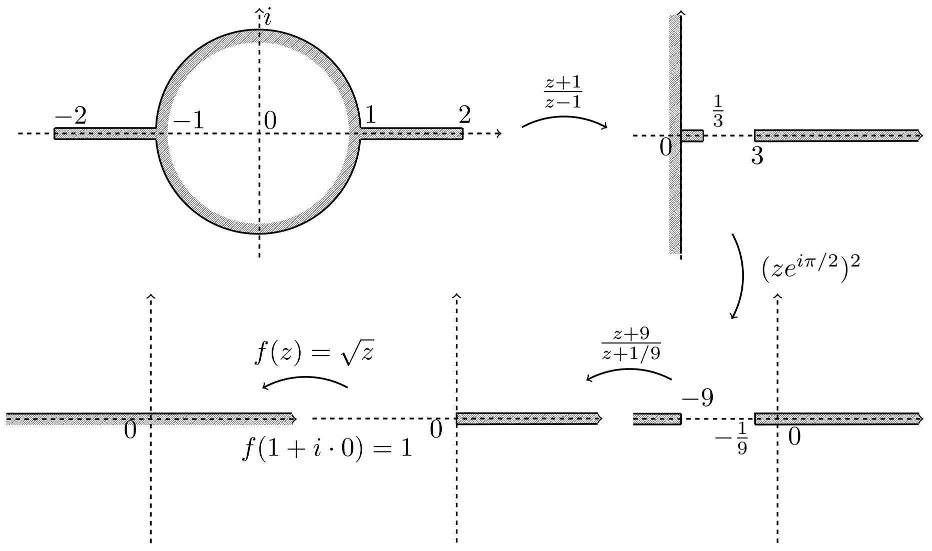


(б)



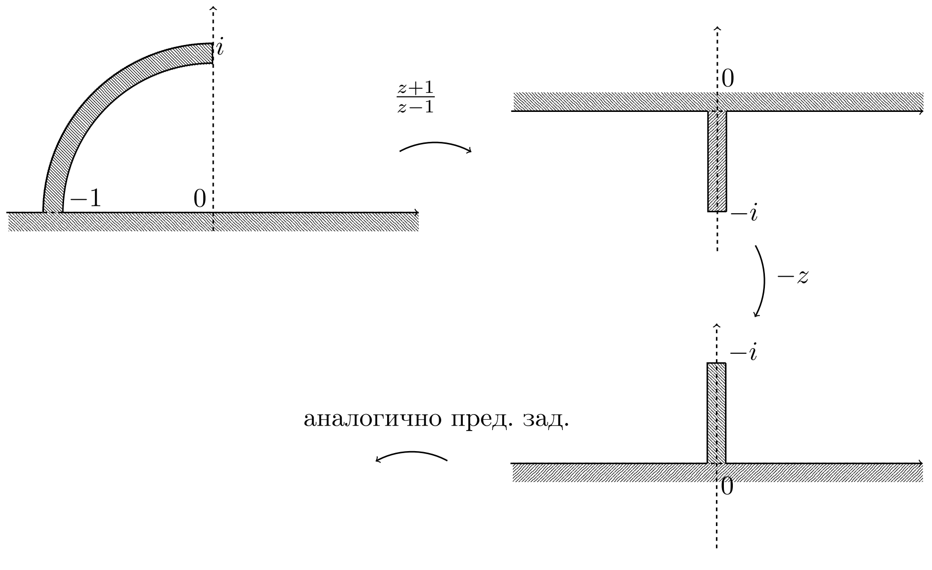
(в)

Рис. 12



i
-2
-1
0
1
2
$\frac{z+1}{z-1}$
$\frac{1}{3}$
0
3
$(ze^{i\pi/2})^2$
$\frac{z+9}{z+1/9}$
-9
$-\frac{1}{9}$
0
$f(z) = \sqrt{z}$
0
0
$f(1 + i \cdot 0) = 1$

Рис. 13



i
-1
0
$\frac{z+1}{z-1}$
0
$-i$
$-z$
$-i$
аналогично пред. зад.
0

Рис. 14

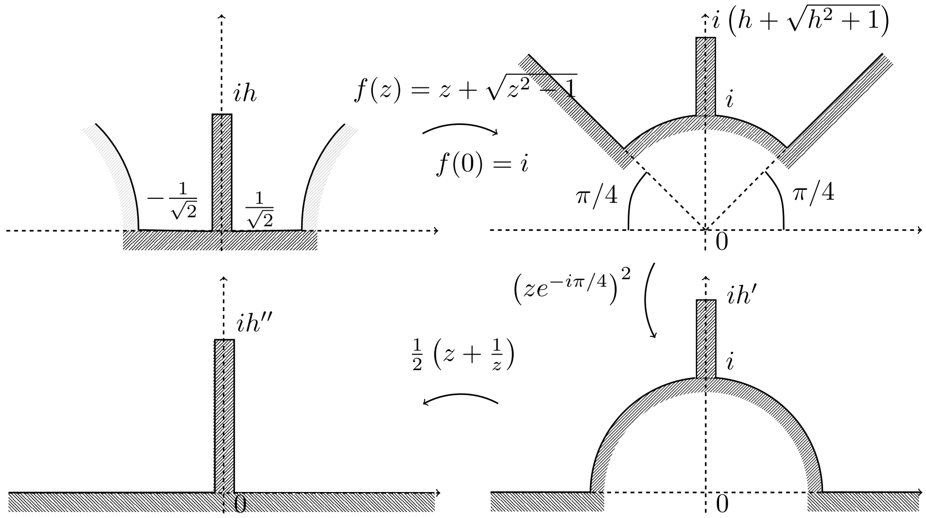


Рис. 15

Рис. 16: 23