Сечение рассеяния бильярдных шаров

Драчов Ярослав
Факультет общей и прикладной физики МФТИ

25 марта 2022 г.

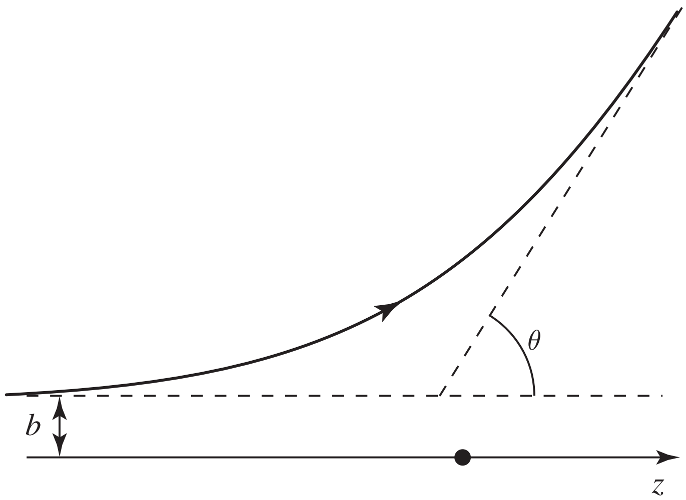

Рис. 1: Рассеяние с прицельным расстоянием b и углом рассеяния θ

Рассматриваем задачу упругого соударения бильярдного шара радиусом R с таким же бильярдным шаром (рис. 2). В терминах угла α прицельный параметр $b = R\sin\alpha$, а угол рассеяния $\theta = \pi - 2\alpha$, поэтому

$$b = R\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right) = R\cos\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

Очевидно, что

$$\theta = \begin{cases} 2\arccos\left(b/R\right), & b \leqslant R, \\ 0, & b > R. \end{cases}$$

Дифференциальное сечение рассеяния определяется как $D(\theta) \equiv \mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}\Omega$ (рис. 3). В терминах прицельного параметра и азимутального угла ϕ,

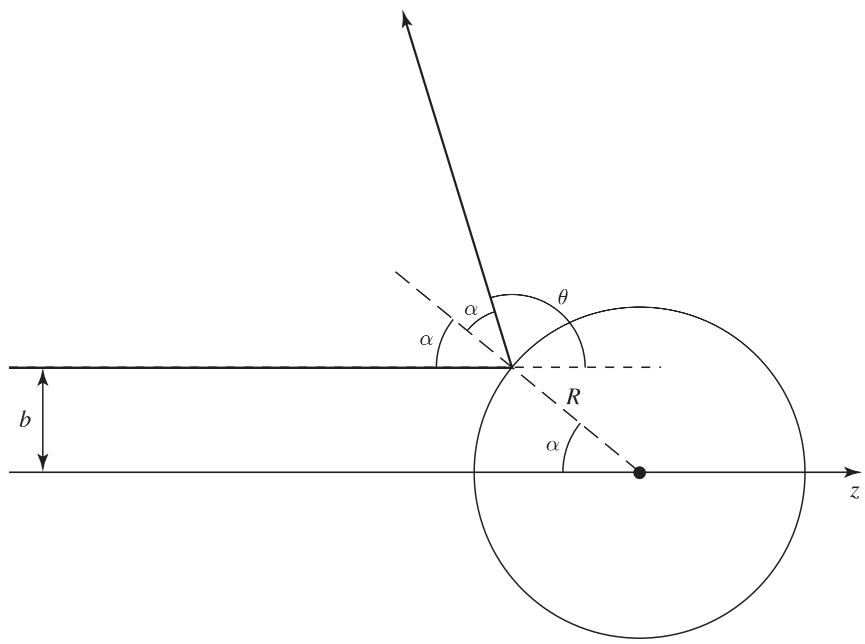

Рис. 2: Упругое рассеяние твёрдых шаров

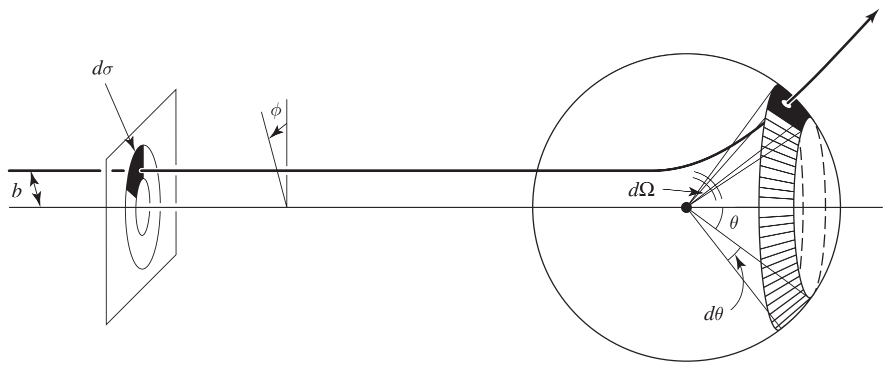

Рис. 3: Влетающие в $d\sigma$ частицы рассеиваются в телесный угол $d\Omega$

$\mathrm{d}\sigma = b\,\mathrm{d}b\,\mathrm{d}\phi$ и $\mathrm{d}\Omega = \sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi$, поэтому

$$D(\theta) = \frac{b}{\sin\theta}\left|\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}\theta}\right|.$$

(Т. к. θ — обычно убывающая функция от b, следовательно производная — отрицательна, отсюда знак модуля.)

В нашем конкретном случае

$$\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}\theta} = -\frac{1}{2}R\sin\left(\frac{\theta}{2}\right),$$

поэтому

$$D(\theta) = \frac{R\cos(\theta/2)}{\sin\theta}\left(\frac{R\sin(\theta/2)}{2}\right) = \frac{R^2}{4}.$$

Полное сечение рассеяния — это интеграл от $D(\theta)$ по всем телесным углам:

$$\sigma \equiv \int D(\theta)\,\mathrm{d}\Omega.$$

Для рассеяния бильярдных шаров имеем

$$\sigma = \left(R^2/4\right)\int \mathrm{d}\Omega = \pi R^2.$$