Фермионный формализм: числа Гурвица

Драчов Ярослав
Факультет общей и прикладной физики МФТИ

19 мая 2021 г.

Простые числа Гурвица вводятся для разветвлённого накрытия Римановой сферы двумерной поверхностью рода g с m простыми точками ветвления и одной точкой с профилем ветвления задаваемым разбиением $\mu = \left[\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{l(\mu)}\right]$ и могут быть выражены в терминах симметрических групп

$$h^{\circ}_{m;\mu} = \frac{1}{|\mu|!} \left| \left\{ \left(\eta_1, \ldots, \eta_m\right), \eta_i \in C_2\left(S_{|\mu|}\right) : \eta_m \circ \cdots \eta_1 \in C_\mu\left(S_{|\mu|}\right) \right\} \right|,$$

где $S_{|\mu|}$ — симметрическая группа перестановок $|\mu|$ элементов, $C_2\left(S_{|\mu|}\right)$ — набор всех транспозиций в $S_{|\mu|}$ и $C_\mu\left(S_{|\mu|}\right)$ — набор всех циклических перестановок типа μ.

В бозонном представлении гипергеометрических τ-функций требуется задать содержание $c(w)$ каждой ячейки w Диаграммы Юнга λ:

$$c(w) = j - i, \quad 1 \leqslant i \leqslant l(\lambda), \quad 1 \leqslant j \leqslant \lambda_i.$$

Гипергеометрические τ-функции в бозонном представлении задаются как

$$\tau(\mathbf{t}) = \sum_{\lambda} r_\lambda s_\lambda(\beta) s_\lambda(\mathbf{t}),$$

где $s_\lambda(\beta)$ — полином Шура по переменным β_k и

$$r_\lambda = \left(\prod_{w \in \lambda} r\left(c(w)\right) \right).$$

Производящая функция для простых чисел Гурвица принадлежит множеству гипергеометрических τ-функций и может быть записана в виде

$$\tau_H\left(\mathbf{t}\right) = \sum_{\lambda} e^{uc(\lambda)} s_\lambda\left(\beta_k = \delta_{k,1}\right) s_\lambda(\mathbf{t}),$$

где $c(\lambda) = \sum_{w \in \lambda} c(w)$. Параметры производящей функции для набора гипергеометрических функций:

$$r(n) = e^{un},$$

$$\beta_1 = 1,$$

$$\beta_k = 0, \quad k \geqslant 2.$$

Для гипергеометрических τ-функций получается

$$G = e^{A(\beta)}.$$

Имеем

$$A(\beta) = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k A_k = \beta_1 A_1 = A_1.$$

$$A_1 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} r(n) : \psi_n \psi_{n-1}^* := \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{un} : \psi_n \psi_{n-1}^* : .$$

И в каком-то смысле

$$A_1 = e^{ui} \delta_{i,j+1}.$$

$$A_1^2 = \left(e^{ui} \delta_{i,k+1}\right) \left(e^{uk} \delta_{k,j+1}\right) = e^{u(2i-1)} \delta_{i,j+2}.$$

$$A_1^3 = \left(e^{u(2i-1)} \delta_{i,k+2}\right) \left(e^{uk} \delta_{k,j+1}\right) = e^{u(3i-3)} \delta_{i,j+3}.$$

$$A_1^n = \exp \left[u \left(ni - \sum_{k=0}^{n-1} k \right) \right] \delta_{i,\, j+n}.$$

$$G = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_1^n}{n!}.$$

$$C_\lambda = \det_{l(\lambda) \times l(\lambda)} \left(G_{i_{-1}, i_{-2}, i_{-3} \ldots}^{-1,-2,-3,\ldots} \right).$$

Где i_{-k} находятся из диаграммы Юнга $\lambda = [i_{-1} + 1, i_{-2} + 2, \ldots]$