ПКР по вычислительной математике

Драчов Ярослав
Факультет общей и прикладной физики МФТИ

8 декабря 2020 г.

Разделённой разностью нулевого порядка $f(x_k)$ функции $f(x)$ в точке x_k называют значение функции в этой точке

$$f(x_k) = f(x_k).$$

Разделённой разностью первого порядка $f(x_k, x_t)$ функции $f(x)$ для произвольной пары точек x_k, и x_t определяют через разделённые разности нулевого порядка:

$$f(x_k, x_t) = \frac{f(x_t) - f(x_k)}{x_t - x_k}.$$

Разделённую разность $f(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ порядка n определяют через разделённую разность порядка $n-1$, положив

$$f(x_0, x_1, \ldots, x_n) = \frac{f(x_1, \ldots, x_n) - f(x_0, \ldots, x_{n-1})}{x_n - x_0}.$$

Интерполяционный многочлен в форме Ньютона $P_n(x, x_0, x_1, \ldots, x_n)$ может быть записан через разделённые разности следующим образом:

$$P_n(x, f, x_0, x_1, \ldots, x_n) = f(x_0) + f(x_0, x_1)(x - x_0) + f(x_0, x_1, x_2)(x - x_0)(x - x_1) + \ldots \\ + f(x_0, x_1, \ldots, x_n)(x - x_0)\ldots(x - x_{n-1}).$$

Пусть мы строим интерпол. мн-ны Лагранжа

$$P_n(x) = P_0(x) + [P_1(x) - P_0(x)] + [P_2(x) - P_1(x)] + \ldots + [P_n(x) - P_{n-1}(x)].$$

$P_m(x)$ — мн-н степ. m по точкам $x_0, x_1, \ldots, x_m$.

$$P_m(x) - P_{m-1}(x) = A_m \cdot \omega_m(x).$$

$P_m(x)$ обр. в 0 в $(\cdot)$ $x_0, x_1, \ldots, x_{m-1}$ (m точек).

$$\omega_n(x) = (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{m-1}).$$

$$P_m(x_k) = f_k, \quad k = 0, 1, .., m.$$

$$f(x_m) - P_{m-1}(x_m) = A_m \omega_m(x_m).$$

$$f(x)-P_n(x) = f(x)-\sum_{k=0}^{n} f(x_k) l_k(x) = f(x)-\sum_{k=0}^{n} f(x_k) \frac{\omega_{n+1}(x)}{(x-x_k)\prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{m} x_k - x_j} =$$

$$= \omega_{n+1}(x) \cdot \left\{ \frac{f(x)}{\omega_{n+1}(x)} + \sum_{k=0}^{n} \frac{f(x_k)}{(x-x_k)\prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{m} x_k - x_j} \right\} = \omega_{n+1}(x) \cdot f(x, x_0, x_1, \ldots, x_n).$$

$$f(x_m) - P_{m-1}(x) = \omega_{n+1}(x_m) \cdot f(x_m, x_0, x_1, \ldots, x_{m+1}).$$

$$A_m = f(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_m).$$

Что и требовалось доказать.