Домашняя работа по ТФКП,
2 задание

Драчов Ярослав
Факультет общей и прикладной физики МФТИ

13 января 2021 г.

§13 №2(5)

Решение. Особыми точками функции

$$\frac{1}{(z^2+1)(z-1)^2}$$

будут нули функций z^2+1 и $(z-1)^2$, т. е. точки $z_1 = 1$, $z_2 = i$, $z_3 = -i$. Причём z_1 — полюс второго порядка, а z_2 и z_3 — полюса первого порядка, т. к. данные точки не являются нулями числителя, z_1 — нуль кратности 2 функции $(z-1)^2$, а z_2 и z_3 — нули кратности 1 функции z^2+1.

Точка $z = \infty$ — точка регулярности функции $f(z)$, так как

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = 0.$$

$$\operatorname*{res}_{z=z_1} f(z) = \frac{g(z)}{(z-1)^2} = \frac{1}{(2-1)!}\left(\frac{1}{z^2+1}\right)'\Bigg|_{z=1} = -\frac{2\cdot 1}{(1^2+1)^2} = -\frac{1}{2}.$$

$$\operatorname*{res}_{z=z_2} f(z) = \frac{g(z)}{(z-i)} = g(i) = \frac{1}{(i+i)(i-1)^2} = \frac{1}{2i\cdot(-2i)} = \frac{1}{4}.$$

$$\operatorname*{res}_{z=z_3} f(z) = \frac{g(z)}{(z+i)} = g(-i) = \frac{1}{(-i-i)\cdot(2i)} = \frac{1}{4}.$$

§13 №3(5)

Решение.

$$f(z) = z^2\sin\left(1+\frac{1}{z-1}\right) = z^2\left(\sin 1\cos\frac{1}{z-1} + \cos 1\sin\frac{1}{z-1}\right) =$$

$$\xlongequal{t=z-1} (t^2+2t+1)\left(\sin 1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!t^{2n}} + \cos 1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!t^{2n+1}}\right).$$

$$\operatorname*{res}_{z=1} f(z) = c_{-1} = \frac{5}{6}\cos 1 - \sin 1.$$

§13 №4(6)

Решение.

$$z\cos^2\frac{\pi}{z} = z\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\pi^{2n}}{(2n)!z^{2n}}\right)^2 = z - \frac{\pi^2}{z} + \ldots$$

$$\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = -c_{-1} = \pi^2.$$

§13 №5(3)

Решение. Особые точки: $z_1 = 0, z_2 = 2i, z_3 = -2i$.

$$\operatorname*{res}_{z=2i} f(z) = \frac{1+(2i)^{10}}{(2i)^6(2i+2i)} = -\frac{1023i}{256}.$$

$$\operatorname*{res}_{z=-2i} f(z) = \frac{1023i}{256}.$$

$$\frac{1+z^{10}}{z^6(z^2+4)} = \frac{1+z^{10}}{4z^6}\left(1 - \frac{z^2}{4} + \frac{z^4}{16} + \frac{z^6}{64} + \ldots\right).$$

$$\operatorname*{res}_{z=0} f(z) = c_{-1} = 0.$$

По теореме о вычетах

$$\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = \operatorname*{res}_{z=2i} f(z) + \operatorname*{res}_{z=-2i} f(z) + \operatorname*{res}_{z=0} f(z) = 0.$$

§14 №1(6)

Решение.

$$\oint\limits_{|z+i|=2} \frac{dz}{z^2(z^2-7z+12)}.$$

$$\frac{1}{z^2(z^2-7z+12)} = \frac{1}{z^2(z-3)(z-4)}.$$

Особые точки в круге $|z+i| \leqslant 2$: $z_1 = 0$

$$\oint\limits_{|z+i|=2} f(z)dz = 2\pi i \operatorname*{res}_{z=0} f(z) = \pi i \frac{7}{72}.$$

§14 №2(3)

Решение.

$$\oint\limits_{\left|z-\frac{1}{2}\right|=1} \frac{z^3e^{\frac{1}{z}}}{1-z^2}dz.$$

Особые точки внутри области: $z_1 = 1, z_2 = 0$

$$\operatorname*{res}_{z=-1} f(z) = -\frac{1}{2e}.$$

$$\frac{z^3e^{\frac{1}{z}}}{1-z^2} = ze^{\frac{1}{z}}\left(1-\frac{1}{z^2}\right)^{-1} = z\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^n n!}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{2n}}.$$

$$\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = -c_{-1} = -\frac{3}{2}.$$

$$\oint\limits_{\left|z-\frac{1}{2}\right|=1} f(z) = 2\pi i\left(\operatorname*{res}_{z=1} f(z) + \operatorname*{res}_{z=0} f(z)\right) = 2\pi i\left(\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) - \operatorname*{res}_{z=-1} f(z)\right) =$$

$$= \pi i\left(e^{-1}-3\right).$$

§14 №2(8)

Решение.

$$\oint\limits_{|z|=5/2}\frac{z^2}{z-3}\sin\frac{z}{z-2}dz.$$

Особые точки: $z_1 = 3, z_2 = 2$.

$$\operatorname*{res}_{z=2} f(z).$$

$$\operatorname*{res}_{z=3} f(z) = 9\sin 3.$$

$$\frac{z^2}{z-3}\sin\frac{z}{z-2} = z\left(1-\frac{3}{z}\right)^{-1}\sin\left(\frac{1}{1-\frac{2}{z}}\right) =$$

$$= z\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{z^n}\left(\sin 1 + 2\cos 1\frac{1}{z} + (4\cos 1 - 2\sin 1)\frac{1}{z^2} + \ldots\right).$$

$$\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = -c_{-1} = 7\sin 1 + 10\cos 1.$$

По теореме о вычетах

$$\operatorname*{res}_{z=2} f(z) = \operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) - \operatorname*{res}_{z=3} f(z)\ldots.$$

§14 №2(17)

Решение.

$$\oint\limits_{|z|=1}\frac{(z-i)\sin\frac{1}{iz}}{(z-3i)^2}dz.$$

Особые точки: $z_1 = 3i, z_2 = 0$.

$$\operatorname*{res}_{z=3i} f(z) = \sin\left(-\frac{1}{3}\right) + \frac{2}{9}\cos\left(-\frac{1}{3}\right).$$

$$\frac{(z-i)\sin\frac{1}{iz}}{(z-3i)^2} = \frac{z-i}{z^2}\left(1-\frac{3i}{z}\right)^{-2}\sin\frac{1}{iz} =$$

$$= \frac{z-i}{z^2}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\left(\frac{3i}{z}\right)^n\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!(iz)^{2n+1}}.$$

$$\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = -c_{-1} = 0.$$

По теореме о вычетах

$$\oint\limits_{|z|=1} f(z)dz = 2\pi i \operatorname*{res}_{z=0} f(z) = 2\pi i \left(\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) - \operatorname*{res}_{z=3i} f(z)\right) = 2\pi i \left(\sin\frac{1}{3} - \frac{2}{9}\cos\frac{1}{3}\right).$$

§14 №2(24)

Решение.

$$\oint\limits_{|z-1|=1} \frac{zdz}{(\pi-3z)(1+\cos 3z)}.$$

Особые точки: $z_1 = \pi/3$, $\tilde{z}_k = \pi/3 + 2\pi n/3, n \in \mathbb{Z}$.

$$\frac{z}{(\pi-3z)(1+\cos 3z)} = \frac{z}{(\pi-3z)\left(1-\cos(\pi-3z)\right)} =$$

$$= \frac{z}{(\pi-3z)\left(1-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}(\pi-3z)^{2n}\right)} = \frac{z}{(\pi-3z)^3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}(\pi-3z)^{2n-2}} =$$

$$\overset{t=\pi-3z}{=\!=\!=\!=} \frac{t-\pi}{3t^3}\left(\frac{1}{2} - \frac{t^2}{12} + \dots\right).$$

$$\operatorname*{res}_{z=\pi/3} f(z) = c_{-1} = .$$

§14 №3(1)

Решение.

$$I = \int\limits_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{a+\cos\varphi} \quad (a>1).$$

Пусть $z = e^{i\varphi}$, $\varphi \in [0, 2\pi]$, тогда

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2} = \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right),$$

$$dz = ie^{i\varphi}d\varphi = izd\varphi, \quad d\varphi = \frac{dz}{iz}.$$

Интеграл I сводится к интегралу по замкнутому контуру $\{z\colon |z|=1\}$:

$$I = \oint\limits_{|z|=1} \frac{dz}{iz\left(a+\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\right)} = \oint\limits_{|z|=1} \frac{-2idz}{z^2+2za+1}.$$

Найдём все особые точки подынтегральной функции $f(z)$, решив уравнение

$$z^2+2za+1=0.$$

Так как $D = 4a^2-4 = 4(a^2-1)$, то

$$z_{1,2} = -a \pm \sqrt{a^2-1}.$$

Внутри круга $\{z\colon |z|<1\}$ лежит только одна особая точка

$$z_1 = \sqrt{a^2-1} - a.$$

Точка z_1 — полюс первого порядка для $f(z)$. Поэтому

$$\operatorname*{res}_{z=z_1} f(z) = \left.\frac{-2i}{(z^2+2za+1)'}\right|_{z=z_1} = \left.\frac{-2i}{2z+2a}\right|_{z=z_1} = \frac{-i}{\sqrt{a^2-1}}.$$

$$I = 2\pi i \operatorname*{res}_{z=z_1} f(z) = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}.$$

§23 №1(4)

Решение.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1} = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} a>0} \operatorname*{res}_{z=a} \frac{z^2+1}{z^4+1}.$$

Особые точки:

$$e^{4i\varphi} = e^{i(\pi+2\pi n)}, \quad n\in\mathbb{Z}.$$

$$\varphi = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n, \quad n\in\mathbb{Z}.$$

$$z_1 = e^{\frac{i\pi}{4}}, \qquad z_2 = e^{\frac{3i\pi}{4}}.$$

$$\operatorname*{res}_{z=z_k} f(z) = \left.\frac{z^2+1}{4z^3}\right|_{z_k} = \frac{z_k^{-1}+z_k^{-3}}{4}.$$

$$I = 2\pi i\left(\operatorname*{res}_{z=z_1} f(z) + \operatorname*{res}_{z=z_2} f(z)\right) = \frac{2\pi i}{4}\left(2e^{-\frac{i\pi}{4}} + 2e^{-\frac{3i\pi}{4}}\right) =$$
$$= \pi e^{i\pi/2}\left(e^{-i\pi/4} + e^{-i3\pi/4}\right) = 2\pi\frac{e^{i\pi 4} + e^{-i\pi/4}}{2} = 2\pi\cos\frac{\pi}{4} = \pi\sqrt{2}.$$

§23 №1(8)

Решение.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^3} = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} a>0} \operatorname*{res}_{z=a} \frac{1}{(z^2+1)^3}.$$

Особые точки в исследуемой области: $z_1 = i$

$$\operatorname*{res}_{z=z_1} f(z) = \frac{1}{2!}\left.\left(\frac{1}{(z+i)^3}\right)''\right|_{z=z_1} = \frac{6}{(2i)^5} = \frac{3}{16i}.$$

$$I = \frac{3}{8}\pi.$$

§23 №2(9)

Решение.

$$I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(2x+3)\sin(x+5)}{x^2+4x+8}dx.$$

$$\max_{z\in\Gamma_R}|g(z)| = \max_{z\in\Gamma_R}\left|\frac{2z+3}{z^2+4z+8}\right| \to 0$$

при $R\to\infty$, следовательно

$$\lim_{R\to\infty}\int\limits_{\Gamma_R}\frac{2z+3}{z^2+4z+8}e^{i(z+5)}dz = 0.$$

Значит

$$I = \operatorname{Im}\left[2\pi i\sum_{\operatorname{Im} a>0}\operatorname*{res}_{z=a}\left(g(z)e^{i(z+5)}\right)\right].$$

Особые точки будут решениями уравнения $z^2+4z+8=0$ с $\operatorname{Im} z>0$:

$$D = 16-32 = -16.$$

$$z_1 = -2+2i.$$

$$\operatorname*{res}_{z=z_1} f(z) = \frac{-1+4i}{4i}e^{3i-2}.$$

$$I = \operatorname{Im}\left[\frac{\pi}{2}(-1+4i)e^{-2}(\cos 3+i\sin 3)\right] = \frac{\pi e^{-2}}{2}(4\cos 3-\sin 3).$$

§23 №2(13)

Решение.

$$I_1 = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos(3-8x)}{4x^2-7x+5}dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos(8x-3)}{4x^2-7x+5}dx.$$

$$\max_{z\in\Gamma_R}|g(z)| = \max_{z\in\Gamma_R}\left|\frac{1}{4z^2-7z+5}\right| \to 0 \text{ при } z\to\infty,$$

следовательно

$$I_1 = \operatorname{Re}\left[2\pi i\sum_{\operatorname{Im} a>0}\operatorname*{res}_{z=a} g(z)e^{i(8z-3)}\right].$$

Особые точки $g(z)e^{i(8z-3)}$ внутри Γ_R будут являться решениями уравнения $4z^2-7z+5=0$ с $\operatorname{Im} z>0$:

$$D = -31.$$

$$z_1 = \frac{7+i\sqrt{31}}{8}.$$

$$\operatorname*{res}_{z=z_1} f(z) = \frac{e^{-\sqrt{31}+4i}}{i\sqrt{31}}.$$

$$I_1 = \operatorname{Re}\left[2\pi\frac{e^{-\sqrt{31}+4i}}{\sqrt{31}}\right] = \frac{2\pi}{\sqrt{31}}e^{-\sqrt{31}}\cos 4.$$

§23 №2(20)

Решение.

$$I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3\sin(2-x)}{(x^2+2)^2}dx.$$

$$\max_{z\in\Gamma_R}|g(z)| = \left|\frac{z^3}{(z^2+2)^2}\right| \to 0 \text{ при } R\to\infty,$$

следовательно

$$I = \operatorname{Im}\left[2\pi i\sum_{\operatorname{Im}a<0}\operatorname*{res}_{z=a} g(z)e^{i(2-z)}\right].$$

$$z_1 = -\sqrt{2}i.$$

$$\operatorname*{res}_{z=z_1} f(z) = \left.\left(\frac{z^3e^{i(2-z)}}{\left(z-\sqrt{2}i\right)^2}\right)'\right|_{z=z_1} =$$

$$= \frac{\left(3z^2e^{i(2-z)} - iz^3e^{i(2-z)}\right)\left(z-\sqrt{2}i\right)^2 - \left(z^3e^{i(2-z)}\right)\cdot 2\left(z-\sqrt{2}i\right)}{\left(z-\sqrt{2}i\right)^4} =$$

$$= \frac{e^{-\sqrt{2}+2i}\left(2\sqrt{2}-6\right)(-8) - 16e^{-\sqrt{2}+2i}}{64} = \frac{16-8\sqrt{2}}{32}e^{-\sqrt{2}+2i}.$$

$$I = \frac{\sqrt{2}-2}{2}\pi e^{-\sqrt{2}}\cos 2.$$

T1

Решение.

$$I = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{x^2-3ix+4}dx = \frac{1}{2i}\left(\underbrace{\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix}}{x^2-3ix+4}dx}_{I_1} - \underbrace{\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-ix}}{x^2-3ix+4}dx}_{I_2}\right).$$

$$\max_{z\in\Gamma_R}|g(z)| = \max_{z\in\Gamma_R}\left|\frac{1}{z^2-3iz+4}\right| \to 0 \quad \text{при } t\to\infty.$$

Следовательно

$$I_1 = 2\pi i\sum_{\operatorname{Im}a>0}\operatorname*{res}_{z=a} g(z)e^{iz}.$$

Особенные точки:

$$z^2-3iz+4=0.$$

$$D=-25.$$

$$z_{1,\,2} = \frac{3i\pm 5i}{2}.$$

Из них только для $z_1 = 4i$ выполняется $\operatorname{Im} z > 0$.

$$\operatorname*{res}_{z=z_1} f(z) = \frac{e^{-4}}{5i} = .$$

$$I_1 = \frac{2\pi}{5e^4}.$$

$$I_2 = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} a<0} \operatorname*{res}_{z=a} g(z)e^{-iz}.$$

$$\operatorname*{res}_{z=z_2} f(z) = \frac{e^{-1}}{-5i}.$$

$$I_2 = -\frac{2\pi}{5e}.$$

$$I = \frac{1}{2i}(I_1 + I_2) = \frac{1}{2i}\left(\frac{2\pi}{5e^4} - \frac{2\pi}{5e}\right) = \frac{\pi i}{5e^4}(e^3 - 1).$$

§16 №2

Решение.

$$x(t) = (2+t)\sin 4\pi t, \qquad y(t) = (1+t)\cos 4\pi t + \frac{3}{2}.$$

$$z(0) = \frac{5}{2}i, \qquad z(1) = \frac{7}{2}i.$$

Нули $x(t)$ и $y(t)$:

$$\begin{aligned}
t = 0: &\qquad x = 0, \quad y = \frac{5}{2},\\
t = \frac{1}{8}: &\qquad x = 0, \quad y = \frac{21}{8},\\
t = \frac{3}{8}: &\qquad x = 0, \quad y = \frac{1}{8},\\
t = \frac{5}{8}: &\qquad x = 0, \quad y = \frac{25}{8},\\
t = \frac{7}{8}: &\qquad x = 0, \quad y = -\frac{3}{8},\\
t = 1: &\qquad x = 0, \quad y = \frac{7}{2}.
\end{aligned}$$

Построение на рис. 1. Откуда

$$\Delta_\gamma \arg z = -2\pi.$$

§16 №4

Решение. Кривая γ представлена на рис. 2 Приращение аргумента функции $\frac{1}{z^2+2z}$:

$$-\Delta_\gamma \arg\left(\frac{1}{z^2+2z}\right) = -\Delta_\gamma \arg z - \Delta_\gamma \arg(z+2) = -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4}.$$

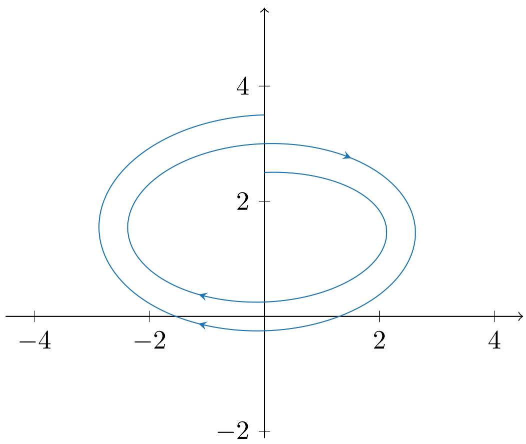

Рис. 1

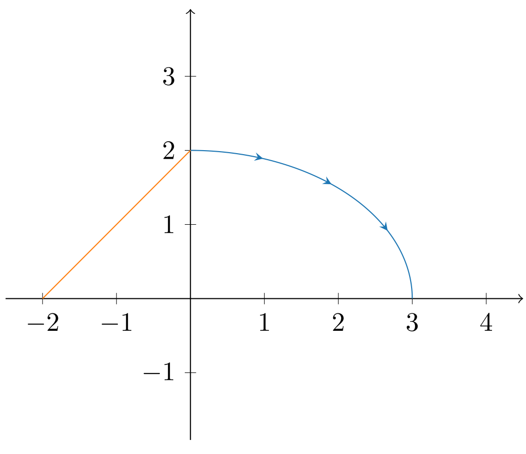

Рис. 2

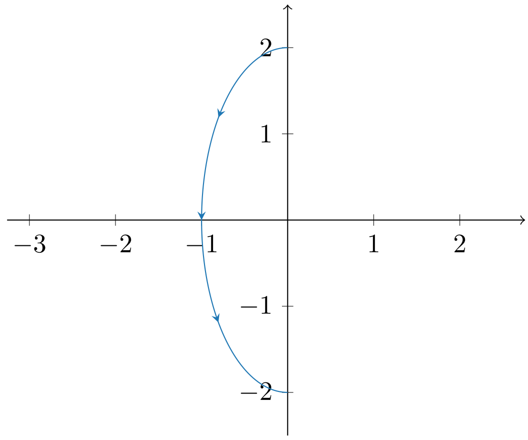

Рис. 3

§16 №5

Решение. Построение приведено на рис. 3.

$$\Delta_\gamma \frac{z^2+1}{z^2-4} = \Delta_\gamma(z+i)+\Delta_\gamma(z-i)-\Delta_\gamma(z+2)-\Delta_\gamma(z-2) = \pi+\pi-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2} = 2\pi.$$

§18 №9(2, 3)

Решение.

$$\varphi(z)^3 = 1 - z^2 = f(z).$$

2) Область G представлена на рис. 4.

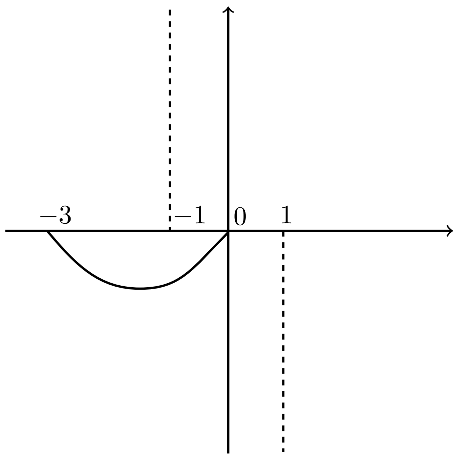

Рис. 4

$$\varphi(z) = \varphi(0)\cdot\sqrt[n]{\left|\frac{f(z)}{f(0)}\right|}e^{\frac{i}{n}\Delta_{\gamma_{0z}}\arg f(z)}.$$

Следовательно

$$\varphi(-3) = \sqrt[3]{8}e^{\frac{i}{n}\Delta_{\gamma_{0z}}\arg(1-z^2)}.$$

$$\Delta_\gamma \arg(1-z^2) = \Delta_\gamma \arg(1-z) + \Delta_\gamma(1+z) = 0 - \pi = -\pi.$$

Значит

$$\varphi(-3) = 2\cdot e^{\frac{i}{3}(-\pi)} = 1 - i\sqrt{3}.$$

3) Область G представлена на рис. 5. Аналогично предыдущему пункту

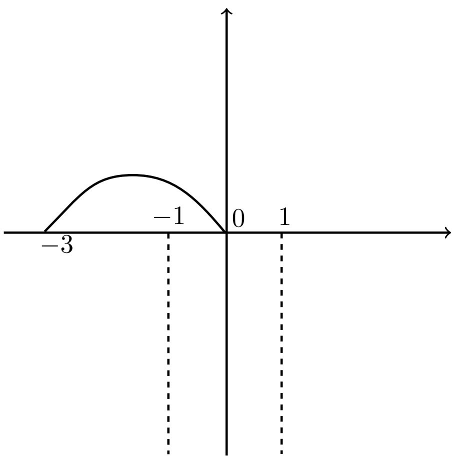

Рис. 5

$$\Delta_\gamma(1-z^2) = \Delta_\gamma(1-z)\Delta_\gamma(1+z) = \pi + 0 = \pi.$$

Следовательно

$$\varphi(-3) = 2e^{\frac{i}{3}\pi} = 1 + i\sqrt{3}.$$

§18 №25

Решение.

$$g(-2) = (-1)\cdot\sqrt[3]{2}\exp\left(\frac{i}{3}2\pi\right).$$

$$g(-3) = (-1)\sqrt[3]{3}\exp\left(\frac{i}{3}4\pi\right).$$

$$g(z)^3 = z \implies 3g(z)^2g'(z) = 1 \implies g'(-3) = \frac{1}{3g(z)^2} = \frac{1}{3\cdot\sqrt{9}}\exp\left(-\frac{2\pi i}{3}\right).$$

Разложение в ряд Тейлора в окрестности $z = 2$

$$g(z) = g(2)\sum_{k=0}^{\infty} C_{\frac{1}{3}}^k\frac{(z-2)^k}{2^k} = -\sqrt[3]{2}\exp\left(\frac{i}{3}3\pi\right)\sum_{k=0}^{\infty} C_{\frac{1}{3}}^k\frac{(z-2)^k}{2^k} = \sqrt[3]{2}\sum_{k=0}^{\infty} C_{\frac{1}{3}}^k\frac{(z-2)^k}{2^k}.$$

§18 №27

Решение. График к задаче на рис. 6.

$$g(z) = \sqrt[4]{7} \qquad f(z) = 7.$$

$$g(b) = g(a) \cdot \sqrt[4]{\left|\frac{f(b)}{f(a)}\right|} \cdot \exp\left(\frac{i}{4}\Delta_{\gamma_{ab}} \arg z\right).$$

$$g(1 + i0) = 1.$$

$$g(1 - i0) = 1 \cdot \exp\left(\frac{i}{4}2\pi\right) = \exp\left(\frac{i\pi}{2}\right) = i.$$

$$g(16 - i0) = i \cdot 2 = 2i.$$

$$g(-16) = 1 \cdot \sqrt[4]{16} \cdot \exp\left(\frac{i}{4}\pi\right) = 2e^{\frac{i\pi}{4}}.$$

$$g'(-16) = \frac{1}{4\left(g(-16)\right)^3} = \frac{1}{32} \cdot e^{-\frac{3i\pi}{4}}.$$

$$g''(-16) = \frac{-3}{4\left(g(-16)\right)^4} \cdot g'(-16) = -\frac{3}{64} \cdot e^{-i\pi} \cdot \frac{1}{32}e^{-\frac{3\pi i}{4}} = \frac{3}{2^{11}}e^{-\frac{3}{\pi i}4}.$$

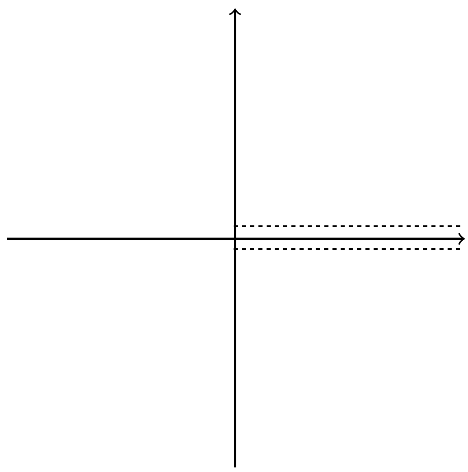

Рис. 6

§18 №35

Решение. Чертёж к задаче на рис. 7.

$$g(z) = \sqrt[3]{z + 9}.$$

$$G = \mathbf{C} \setminus \left\{\left\{z(t) = 9e^{it}, t \in \left[-\pi, \frac{\pi}{2}\right]\right\}, \{z(t) = 9i + ti, t \geqslant 0\}\right\}.$$

$$\arg g(10) = \frac{2\pi}{3}.$$

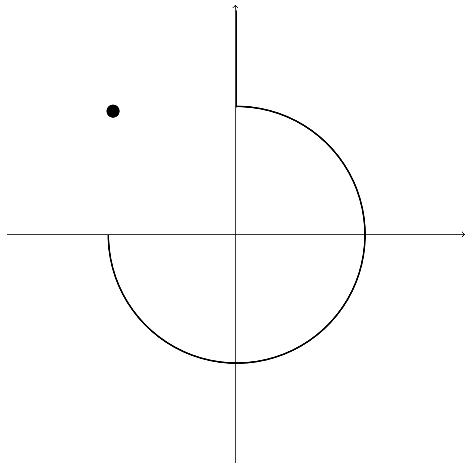

Рис. 7: 7

$$g(-8) = \sqrt[3]{19} \cdot e^{i\frac{2\pi}{3}} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{19}} \cdot \exp\left(\frac{i}{3}(-2\pi)\right) = 1.$$

$g(-1) = 2$, т. к. точки (-1) и (-8) можно соединить отрезками, лежащими в G.

$$g(-9+8i) = \sqrt[3]{19} \cdot e^{i\frac{2\pi}{3}} \cdot \sqrt[3]{\frac{8}{19}} \cdot \exp\left(\frac{i}{3} \cdot \left(-\frac{3}{2}\pi\right)\right) = 2e^{i\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{2}\right)} = 2e^{i\frac{\pi}{6}}.$$

$$g(0) = \sqrt[3]{19} \cdot e^{i\frac{2\pi}{3}} \cdot \sqrt[3]{\frac{9}{19}} \cdot \exp\left(\frac{i}{3} \cdot (-2\pi)\right) = \sqrt[3]{9}.$$

$$g'(z) = \frac{1}{3\left(g(z)\right)^2} \implies g'(0) = \frac{1}{3 \cdot 3^{\frac{4}{3}}} = \frac{1}{9\sqrt[3]{3}}.$$

В окр-ти $z_0 = 3$

$$g(z) = g(3) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} C_{\frac{1}{3}}^{n} \frac{(z-3)^n}{\left(g(3)\right)^{3n}}.$$

$$g(3) = \sqrt[3]{12} \implies g(z) = \sqrt[3]{12} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} C_{\frac{1}{3}}^{n} \frac{(z-3)^n}{12^n}.$$

Область сходимости — круг радиуса 6 с центром в т. z_0.

§18 №8

Решение.

$$f(z) = \mathrm{Ln}(z+5).$$

$$\mathrm{Im}\, f(6) = -2\pi.$$

Чертёж к задаче на рис. 8.

$$J = \oint\limits_{|z|=4,5} \frac{f(z)}{z^2(z+4)} dz.$$

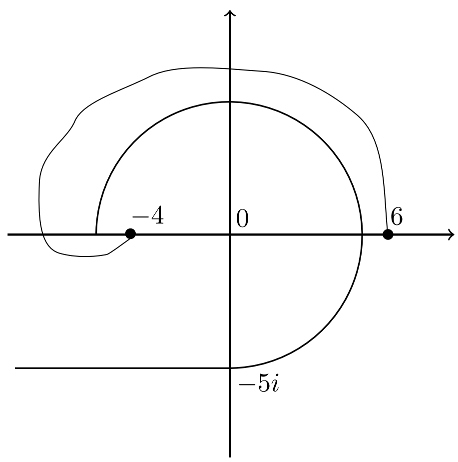

Рис. 8

$$z_1 = 0; \qquad z_2 = -4.$$

$$f(6) = \ln 11 + 2\pi i k; \qquad k = -1 \implies \arg g(6) = -2\pi.$$

$$f(z) = \ln|g(z)| + i\left(\arg g(6) + \Delta_{\gamma_{6,\,z}} \arg g(z)\right).$$

$$f(-4) = i \cdot (-2\pi + 2\pi) = 0.$$

$$f(0) = \ln + i(-2\pi + 2\pi) = \ln 5.$$

В т. $z_1 = 0$:

$$f(z) = \ln 5 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \cdot z^4}{n \cdot 5^n} \implies z_1 \text{ — полюс порядка 2.}$$

Значит

$$\operatorname*{res}_{z=0} \frac{f(z)}{z^2(z+4)} = \frac{d}{dz}\left(\frac{f(z)}{z+4}\right)\bigg|_{z=0} = \left(\frac{1}{(z+4)(z+5)} - \frac{f(z)}{(z+4)^2}\right)\bigg|_{z=0} = \frac{1}{20} - \frac{\ln 5}{16}.$$

В т. $z_2 = -4$

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(z+4)^n}{n}.$$

Значит z_2 — устранимая особая точка.

$$J = 2\pi i \cdot \operatorname*{res}_{z=0} \frac{f(z)}{z^2(z+4)} = \pi i \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{8}\ln 5\right).$$

§19 №10

Решение.

$$f(z) = \sqrt[3]{z-1} \qquad f(1-i) = i.$$

$$J = \oint\limits_{|z-8|=2} \frac{z\,(f(z)-2)}{(z-9)^2} dz.$$

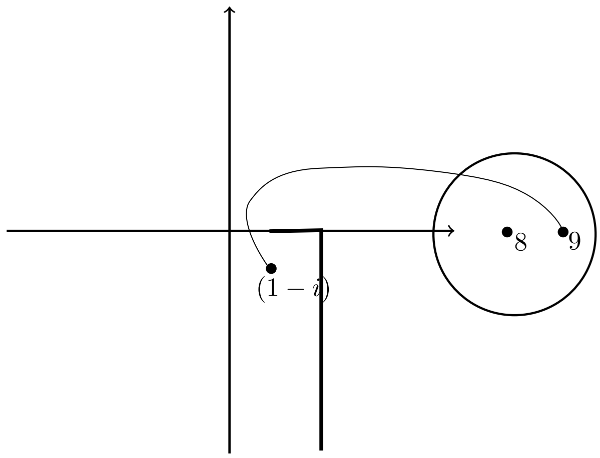

Рис. 9

Чертёж к задаче на рис. 9

$z = 9$:

$$f(9) = f(1-i)\cdot\sqrt[3]{\frac{8}{1}}\cdot\exp\left(\frac{i}{3}-\frac{3\pi}{2}\right) = 2i\cdot\exp\left(-\frac{i\pi}{2}\right) = 2.$$

$$f(z) = \sqrt[3]{(z-9)+8} = 2\sum_{n=0}^{\infty} C^n_{\frac{1}{3}}\frac{(z-9)^n}{8^n} \implies z = 9 \text{ — полюс порядка 1.}$$

Следовательно

$$J = 2\pi i \operatorname*{res}_{z=9}\frac{z(f(z)-2)}{(z-9)^2} = 2\pi i\lim_{z\to 9}\frac{z(f(z-2)}{(z-9)} = 9\cdot\frac{C^1_{\frac{1}{3}}}{8}\cdot 4\pi i = \frac{3}{2\pi i}.$$

§19 №24

Решение.

$$f(z) = \sqrt{2z^2+1}; \qquad f(0) = 1.$$

$$J = \oint\limits_{|z|=1}\frac{zdz}{(z+2)(f(z)+3)} \qquad g(z) = \frac{z}{(z+2)(f(z+3)}.$$

Чертёж к задаче на рис. 10.

$$f(z) = -3 \implies 2z^2+1 = 9 \implies z = \pm 2.$$

Проверим ф-ию f в найденных точках $z_1 = 2:$

$$f(z) = f(0)\cdot\sqrt{\frac{9}{1}}\cdot\exp\left(\frac{i}{2}\Delta_{\gamma_{0,\,2}}\arg(2z^2+1)\right) = 3\exp\left(\frac{i}{2}\Delta_{\gamma_{0,\,2}}\arg(2z^2+1)\right).$$

$$\Delta_{\gamma_{0,\,2}}\arg(2z^2+1) = \Delta_{\gamma_{0,\,2}}\arg\left(z-\frac{i}{2}\right)+\Delta_{\gamma_{0,\,2}}\arg\left(z+\frac{i}{2}\right) = -2\pi.$$

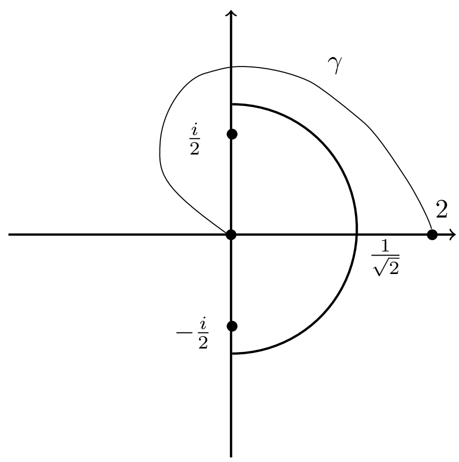

Рис. 10

Значит

$$f(2) = 3\exp(-i\pi) = -3 \qquad f(2) + 3 = 0;.$$

$$f'(2) = \left(\frac{4z}{2f(z)}\right)\Bigg|_{z=2} = \frac{8}{-6} = \frac{-4}{3} \neq 0.$$

Следовательно

$$f(2) + 3 = (z-2)\cdot h(z).$$

$h(z)$ — голоморфная в $U(2)$ функция: $h(2) \neq 0$. Поэтому

$$g(z) = \frac{z}{(z+2)(z-2)\cdot h(z)} \implies z_1 = 2 \text{ — полюс 1-го порядка.}$$

$z_2 = 2$:

$$f(-2) = 3\cdot\exp(i\cdot 0) = 3 \implies z_2 \text{ — также полюс 1-го порядка.}$$

Заметим, что $\lim_{z\to\infty} zg(z) = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt[3]{1}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{f(x)} = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x}{\sqrt{\frac{|2x^2+1|}{1}}}\right) = \frac{-1}{\sqrt{2}} \implies \lim_{z\to\infty} zg(z) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \implies \operatorname*{res}_{z=\infty} g(z) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$J + 2\pi i\left(\operatorname*{res}_{z=2} g(z) + \operatorname*{res}_{z=-2} g(z) + \operatorname*{res}_{z=-\infty} g(z)\right) = 0.$$

$$\operatorname*{res}_{z=2} g(z) = \frac{2}{4f'(2)} = -\frac{3}{8}; \qquad \operatorname*{res}_{z=-2} g(z) = \frac{-2}{f(-z)+3} = -\frac{1}{3} \implies J = \pi i\left(\frac{17}{12} - \sqrt{2}\right).$$

§19 №42

Решение.

$$f(z) = \operatorname{Ln}\underbrace{\frac{3+z}{z-3}}_{h(z)}.$$

$$f(\infty) = -\frac{5}{2} i\pi \qquad J = \oint\limits_{\gamma=\{|z|=1\}} \frac{dz}{\left(f^2(z)+\pi^2\right)^2}.$$

Чертёж к задаче приведён на рис. 11

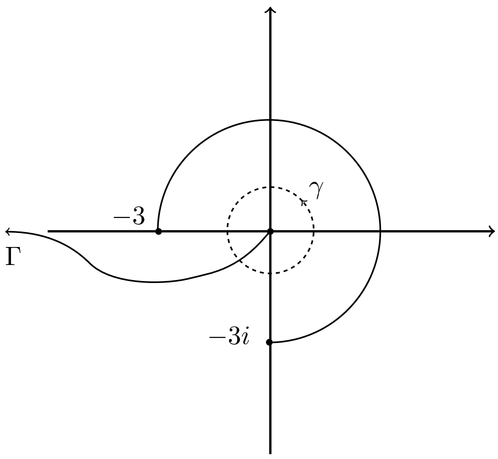

Рис. 11

$$f(z) = \pm i\pi \implies -1 = \frac{3+z}{iz-3} \implies -iz+3 = 3+z \implies z = 0.$$

$$f(\infty) = \underbrace{\ln|h(\infty)|}_{=0} + i\left(\arg h(0) + \Delta_{\Gamma_{0,\,\infty}} \arg h(z)\right) = i\left(\arg h(0) + \left(-\pi - \frac{\pi}{2}\right)\right) =$$
$$= i\arg h(0) - \frac{3\pi}{2} i = -\frac{5}{2}\pi i \implies \arg h(0) = -\pi, \implies f(z) = -i\pi + \ln\frac{1+\frac{z}{3}}{1-\frac{i}{3}z} =$$
$$= -i\pi + \frac{z}{3}(1+i) - \frac{z^2}{18}(1+1) + o(z^2) = -i\pi + \frac{z}{3}(1+i) - \frac{z^2}{9} + o(z^2).$$

$$\frac{1}{\left(f^2(z)+\pi^2\right)^2} = \frac{1}{\left(-\frac{2}{3}i\pi(1+i)z + z^2\left(\frac{(1+i)^2}{9} + \frac{2i\pi}{9}\right) + o(z^2)\right)^2} =$$
$$= \frac{1}{z^2\cdot\frac{4}{9}\cdot(-1)\cdot\pi^2\cdot 2i\cdot\left(1 + z\cdot\frac{2i}{9}(1+\pi)\cdot\left(\frac{-3}{2i\pi(1+i)}\right) + o(z)\right)^2}.$$

Следовательно

$$C_1 = \frac{-\frac{4}{9}i(1+\pi)\cdot\left(\frac{-3}{2i\pi(1+i)}\right)}{\frac{4}{9}\cdot(-2i)\cdot\pi^2}.$$

Значит

$$J = 2\pi i\cdot\operatorname*{res}_{z=0}\frac{1}{\left(f^2(z)+\pi^2\right)^2} = \frac{i(1+\pi)\cdot\frac{3}{1+i}}{(-2i)\pi^2} = \frac{-3(1+\pi)}{2\pi^2(1+i)} = \frac{3(1+\pi)}{4\pi^2}(i-1).$$

§23 № 5(2)

Решение.

$$J = \int\limits_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2(2-x)}}.$$

Чертёж к задаче представлен на рис. 12. Необходимо определить регу-

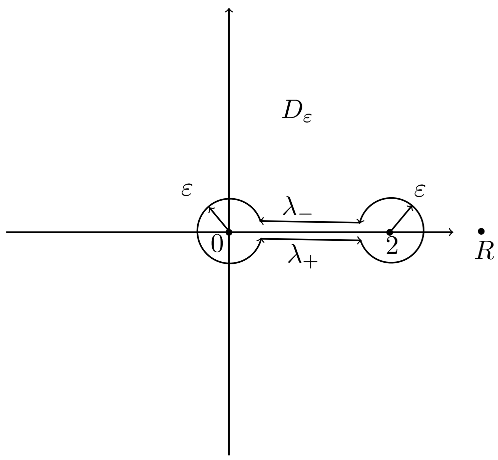

Рис. 12

лярную ветвь $\sqrt[3]{z^2(2-z)}$ в нек. области D: $\forall \gamma$ — замкн. кус. гл $\subset D \hookrightarrow$ $\Delta_\gamma \arg z^2(2-z) = 2\Delta_\gamma \arg z + \Delta_\gamma \arg(z-2) = 3 \cdot_2 \pi k$. Внешняя область D_ε вполне для этого подходит. Саму ветвь зададим условием: $f(R) = -\sqrt[3]{|R^2(2-R)|}$ при $R > 2$. Тогда для $\lambda_- \ni z = x + i0$, $x \in \varepsilon, 2-\varepsilon]$:

$$f(z) = f(R) \cdot \sqrt[3]{\frac{|z^2(2-z)|}{|R^2(2-R)|}} \cdot \exp\left(\frac{i}{3} \cdot \pi\right) = -\sqrt[3]{x^2(2-x)} \cdot \exp\left(\frac{i\pi}{3}\right).$$

А для $\lambda_+ \ni x - i0$ аналогичноо

$$f(z) = -\sqrt[3]{x^2(2-x)} \cdot \exp\left(-\frac{i\pi}{3}\right).$$

При больших z

$$f(z) = z \cdot \sqrt[3]{1 - \frac{2}{z}} \cdot \sqrt[3]{-1} = \sqrt[3]{-1}\left(z \cdot \left(1 - \frac{2}{3z} + \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{z}\right)^2 + o\left(\frac{1}{z^2}\right)\right)\right).$$

Из условия на выбранную ветвь $\sqrt[3]{-1} = -1 \implies$ для ф-ии $\frac{1}{f(z)}$ $c_{-1} = -1 \implies \operatorname{res}_{z=\infty} \frac{1}{f(z)} = 1$.

$$\int\limits_{\lambda_-} \frac{dz}{f(z)} + \int\limits_{\gamma(0)} \frac{dz}{f(z)} + \int\limits_{\lambda_+} \frac{dz}{f(z)} + \int\limits_{\gamma(2)} \frac{dz}{f(z)} + 2\pi i \operatorname*{res}_{z=\infty} \frac{1}{f(z)} = 0.$$

$$\int\limits_{\lambda_-} \frac{dz}{f(z)} = \exp\left(-\frac{i\pi}{3}\right) \cdot \int\limits_{\varepsilon}^{2-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{x^2(2-x)}};.$$

$$\int\limits_{\lambda_+} \frac{dz}{f(z)} = -\exp\left(\frac{i\pi}{3}\right) \cdot \int\limits_{\varepsilon}^{2-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{x^2(2-x)}}.$$

На мн-ве $\gamma(0)$:

$$|f(z)| \geqslant \left(\min_{z\in\gamma(0)} |z^2(2-z)|\right)^{\frac{1}{3}} \geqslant \frac{\varepsilon^2}{3} \implies \left|\int\limits_{\gamma(0)} \frac{dz}{f(z)}\right| \leqslant \int\limits_{\gamma(0)} \frac{|dz|}{|f(z)|} \leqslant 2\pi\varepsilon\cdot\varepsilon^{-\frac{2}{3}} \xrightarrow{\varepsilon\to 0} 0.$$

На мн-ве $\gamma(2)$

$$|f(z)| \geqslant \varepsilon^{\frac{1}{3}} \implies \left|\int\limits_{\gamma(2)} \frac{dz}{f(z)}\right| \leqslant 2\pi\varepsilon^{\frac{2}{3}} \xrightarrow{\varepsilon\to 0} 0.$$

Следовательно

$$\underbrace{\int\limits_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2(2-x)}}}_{J} \cdot \left(e^{-\frac{i\pi}{3}} - e^{\frac{i\pi}{3}}\right) = -2\pi i \implies J = \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{3}} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

§23 №5(4)

Решение.

$$J = \int\limits_0^6 \frac{1}{x+2} \cdot \sqrt{\frac{x}{6-x}} dx.$$

Чертёж для задачи представлен на рис. 13 Нужно определить область G : $x_0 = 6 \notin G$ и $\forall \gamma \in G \hookrightarrow \Delta_\gamma \arg \frac{z}{6-z} = 4\pi k$ Пусть $G = \mathbb{C} \setminus [0,6]$. Все названные условия выполняются, значит в G $\exists f(z) = \sqrt{\frac{z}{6-z}}$ — регулярная ветвь корня. Зададим эту ветвь $f(x) = \sqrt{|x|}$ при $x > 0$. При $x \in [0,6]$

$$f(x+i0) = \sqrt{\left|\frac{x}{6-x}\right|} \cdot \exp\left(-i\frac{\pi}{2}\right).$$

$$f(x-i0) = \sqrt{\left|\frac{x}{6-x}\right|} \cdot \exp\left(i\frac{\pi}{2}\right).$$

$$\int\limits_{\lambda_-} \frac{1}{z+2} f(z)dz = -\int\limits_{\varepsilon}^{6-\varepsilon} \frac{1}{x+2} \cdot \sqrt{\frac{x}{6-x}} \cdot \exp\left(-i\frac{\pi}{2}\right) dx = i \cdot \cdot \int\limits_{\varepsilon}^{6-\varepsilon} \frac{1}{x+2} \cdot \sqrt{\frac{x}{6-x}} dx.$$

Аналогично

$$\int\limits_{\lambda_+} \frac{1}{z+2} f(z)dz = i \cdot \int\limits_{\varepsilon}^{6-\varepsilon} \frac{1}{x+2} \cdot \sqrt{\frac{x}{6-x}} dx.$$

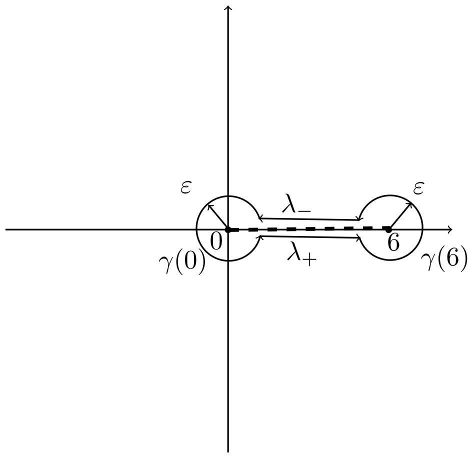

Рис. 13

$$\left|\int\limits_{\gamma(0)} \frac{1}{z+2} f(z)dz\right| \leqslant \frac{1}{2-\varepsilon} \cdot \sqrt{\frac{\varepsilon}{6-\varepsilon}} \cdot_2 \pi\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon\to 0} 0.$$

Аналогично оценивается и интеграл по $\gamma(6)$

$$2J \cdot i + 2\pi i \left(\operatorname*{res}_{z=-2} \frac{1}{z+2} f(z) + \operatorname*{res}_{z=\infty} \frac{1}{z+2} f(z)\right) = 0.$$

Т. к. $f(-2) \neq 0$ и f голоморфна, то $z = -2$ — полюс порядка 1, значит

$$\operatorname*{res}_{z=-2} f(z) \frac{1}{z+2} = f(-2) = \sqrt{\left|-\frac{2}{6+2}\right|} = \frac{1}{2}.$$

$$\frac{1}{z+2} \cdot \sqrt{\frac{z}{6-z}} \cdot \sqrt{1} = \frac{1}{1+\frac{2}{z}} \cdot \frac{1}{z} \cdot \left(1 - \frac{6}{z}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{1}.$$

Отсюда уже видно, что $c_{-1} = \sqrt{1}$, т. к.

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 1 \equiv \sqrt{1},$$

то $c_{-1} = 1$, следовательно

$$\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) \frac{1}{z+2} = -1 \implies J = \pi\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

§23 №5(8)

Решение.

$$J = \int\limits_0^2 \frac{\sqrt[3]{x^2(2-x)}}{(x+2)^2} dx.$$

Регулярную ветвь $f(z)=\sqrt[3]{z^2(2-z)}$ определим так же, как и в 5(2).

При $x\in[0,2]$

$$f(x+i0)=-\sqrt{x^2(2-x)}e^{i\frac{\pi}{3}} \qquad f(x-i0)=-\sqrt{x^2(2-x)}e^{-i\frac{\pi}{3}}.$$

$$\int\limits_{\lambda_-+\gamma(0)+\lambda_++\gamma(2)} \frac{f(z)dz}{(z+2)^2} \xrightarrow{\varepsilon\to 0} \left(e^{i\frac{\pi}{3}}-e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)J=-2\pi i\left(\operatorname*{res}_{z=-2}\frac{f(z)}{z(+2)^2}+\operatorname*{res}_{z=\infty}\frac{f(z)}{(z+2)^2}\right).$$

$z=-2$ — полюс порядка 2, значит

$$\operatorname*{res}_{z=-2}\frac{f(z)}{(z+2)^2}=f'(-2)=\frac{-8-12}{3\cdot 4\cdot\sqrt[3]{4}}=\frac{-5}{3\sqrt[3]{4}}.$$

$$f(-2)=-\sqrt[3]{|4\cdot 4|}\cdot e^{i\pi}=2^{\frac{4}{3}}.$$

$$\frac{1}{(z+2)^2}\cdot f(z)=\frac{z\cdot\sqrt[3]{1-\frac{2}{z}}}{z^2\left(1+\frac{2}{z}\right)}\cdot\sqrt[3]{1}\implies c_{-1}=\sqrt[3]{-1}.$$

Т. к.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=-1,$$

то $\sqrt[3]{-1}=-1=c_{-1}$, значит

$$J=\frac{-\pi\cdot\left(\frac{-5\sqrt[3]{2}}{6}+1\right)}{\sin\frac{\pi}{3}}=\frac{\pi\left(\frac{5\sqrt[3]{2}}{6}-1\right)}{\sin\frac{\pi}{3}}.$$

§23 № 6(6)

Решение.

$$J=\int\limits_1^\infty\frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{x-1}}.$$

Область G изображена на рис. 14. В G можно определить регулярную ветвь $f(z)=\sqrt{z-1}$

$$\int\limits_{\partial G}\frac{dz}{(z^2+1)f(z)}=\int\limits_{\gamma_R}\ldots+\int\limits_{\gamma_\varepsilon}\ldots+\int\limits_{\lambda_+}\ldots+\int\limits_{\lambda_-}\ldots=2\pi i\left(\operatorname*{res}_{z=i}\frac{1}{(z^2+1)f(z)}+\operatorname*{res}_{z=-i}\frac{1}{(z^2+1)f(z)}\right).$$

Зададим ветвь условием $f(0)=e^{i\frac{\pi}{2}}$, тогда при $x\in[1,R]$

$$f(x+i0)=\sqrt{|x-1|}\cdot\exp\left(i\frac{\pi}{2}+\frac{i}{2}\cdot(-\pi)\right)=\sqrt{x-1}.$$

$$f(x-i0)=\sqrt{x-1}\cdot\exp\left(i\frac{\pi}{2}+\frac{i}{2}\cdot\pi\right)=-\sqrt{x-1}.$$

$$\int\limits_{\lambda_-}\ldots=\int\limits_{\varepsilon}^{R}\frac{dx}{(x^2+1)\cdot\sqrt{x-1}}=\int\limits_{\lambda_-}^{\infty}.$$

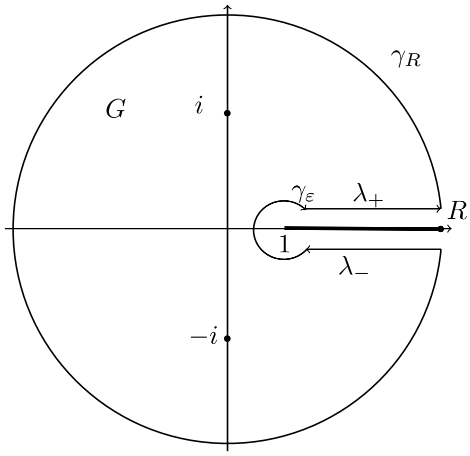

Рис. 14

$$\left|\int\limits_{\gamma_\varepsilon} \frac{dz}{(z^2+1)\cdot f(z)}\right| \leqslant \frac{1}{2-3\varepsilon}\cdot\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\cdot 2\pi\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon\to 0}.$$

Значит в пределе $\varepsilon \to 0$

$$\int\limits_{\lambda_+ + \lambda_- + \gamma_\varepsilon} \ldots = 2\int\limits_0^R \frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{x-1}}.$$

$$\left|\int\limits_{\gamma_R} \frac{dz}{(z^2+1)f(z)}\right| \leqslant \frac{1}{R^2-1}\cdot\frac{1}{\sqrt{R-1}}\cdot 2\pi R \xrightarrow{R\to\infty} 0.$$

Следовательно

$$2J = 2\pi i\left(\operatorname*{res}_{z=i}\frac{1}{(z^2)f(z)} + \operatorname*{res}_{z=-i}\frac{1}{(z^2+1)f(z)}\right).$$

Т. к. $z = \pm i$ — полюсы первого порядка, то

$$\operatorname*{res}_{z=i}\frac{1}{(z^2+1)f(z)} = \frac{1}{2if(i)} = \frac{1}{2i\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{8}}}.$$

$$\operatorname*{res}_{z=-i}\frac{1}{(z^2+1)f(z)} = \frac{1}{-2if(-i)} = \frac{-1}{2i\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{8}}}.$$

Поэтому

$$J = \pi i\left(\frac{1}{2i\sqrt[4]{2}}e^{-i\frac{3\pi}{8}} - \frac{1}{2i\sqrt[4]{2}}e^{-\frac{5\pi}{8}i}\right) = \frac{\pi}{2\sqrt[4]{2}}\cdot\sin\frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{\sqrt[4]{2}}\sin\frac{\pi}{8}.$$

§23 № 6(7)

Решение.

$$J = \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt[5]{x}(x+1)^2}.$$

Область G изображена на рис. 15.

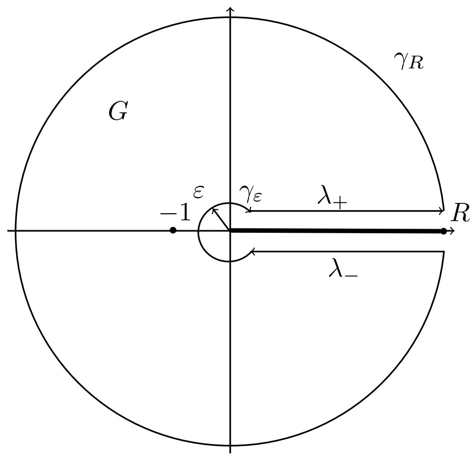

Рис. 15: 15

$$g(z) = \left(\sqrt[5]{x} \cdot (z+1)^2\right)^- 1.$$

Определим ветвь $f(z) = \sqrt[5]{z}$ в G условием $f(x) = -\sqrt[5]{|x|}$ при $x < 0$. Тогда при $x > 0$

$$f(x+i0) = \sqrt{x} \cdot \exp\left(i \cdot (-\pi) - \frac{i}{5}\pi\right) = \sqrt{x} \cdot \exp\left(-i\frac{6\pi}{5}\right).$$

$$f(x-i0) = \sqrt{x} \cdot \exp\left(-i\frac{4\pi}{5}\right).$$

$$\int\limits_{\partial G} g(z)dz = \int\limits_{\lambda_-} g(z)dz + \int\limits_{\lambda_+} g(z)dz + \int\limits_{\gamma_\varepsilon} g(z)dz + \int\limits_{\gamma_R} g(z)dz.$$

$$\left|\int\limits_{\gamma_\varepsilon} g(z)dz\right| \leqslant \frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{5}} \cdot (1-\varepsilon)^2} \cdot 2\pi\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon\to 0} 0.$$

Значит при $\varepsilon \to 0$ получим

$$\int\limits_{\partial G} g(z)dz = -\int_0^R \frac{dx}{\sqrt[5]{x}(x+1)^2} \cdot \exp\left(i\frac{4\pi}{5}\right) + \int_0^R \frac{dx}{\sqrt[5]{(x+1)^2}} \cdot \exp\left(i\frac{6\pi}{5}\right) + \int\limits_{\gamma_R} g(z)dz.$$

$$\left|\int\limits_{\gamma_R} g(z)dz\right| \leqslant \frac{1}{R^{\frac{1}{5}}\cdot(R-1)^2}\cdot 2\pi R \xrightarrow{R\to\infty} 0.$$

Переходя к пределу при $R\to\infty$

$$J\cdot\left(\exp\left(i\frac{6\pi}{5}\right)-\exp\left(i\frac{4\pi}{5}\right)\right) = 2\pi i \operatorname*{res}_{z=-1} g(z).$$

$z=-1$ — полюс второго порядка, значит

$$\operatorname*{res}_{z=-1} g(z) = \frac{d}{dz}\left(\frac{1}{f(z)}\right)\Bigg|_{z=-1} = \left(-\frac{1}{(f(z))^2}\cdot f'(z)\right)\Bigg|_{z=-1}.$$

$$f'(z) = \frac{1}{5(f(z))^4} \implies \operatorname*{res}_{z=-1} g(z) = -\left(\frac{1}{5(f(z))^6}\right)\Bigg|_{z=-1} = |f(-1)=-1| = -\frac{1}{5}.$$

Поэтому

$$J\cdot(-2)\sin\frac{\pi}{5}i = -\frac{2\pi i}{5}.$$

Значит

$$J = \frac{\pi}{5\sin\frac{\pi}{5}}.$$

§23 №6(8)

Решение.

$$J = \int\limits_0^\infty \frac{\sqrt{x}\ln x}{(x+1)(x+2)}dx.$$

Область G изображена на рис. 16.

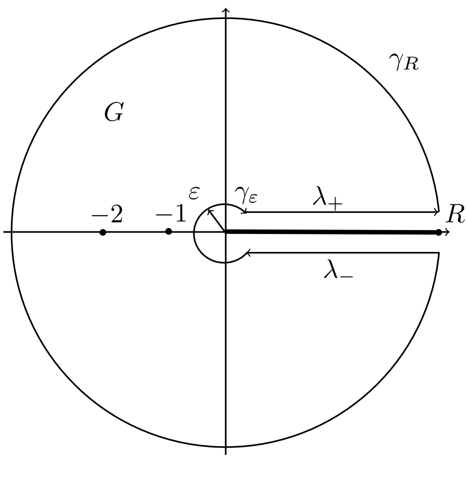

Рис. 16

$$g(z) = \frac{\sqrt{z}\ln z}{(z+1)(z+2)}.$$

Регулярные ветви $f(z) = \sqrt{z}$ и $h(z) = \ln z$ в области G заданы условиями $\sqrt{x} = i\sqrt{|x|}$, $\ln x = \ln|x| - i\pi$, $x < 0$.

$$\int\limits_{\partial G} g(z)dz = \int\limits_{\lambda_+ + \lambda_- + \gamma_\varepsilon + \gamma_R} g(z)dz.$$

При $x > 0$

$$f(x+i0) = \sqrt{|x|} \cdot \exp\left(i\frac{\pi}{2} - \frac{i}{2}\pi\right) = \sqrt{x}.$$

$$f(x-i0) = \sqrt{|x|} \cdot \exp\left(i\frac{\pi}{2} + i\frac{\pi}{2}\right) = -\sqrt{x}.$$

$$g(x+i0) = \ln x - i\pi - i\pi = \ln x - 2i\pi.$$

$$g(x-i0) = \ln x.$$

$$\left|\int\limits_{\gamma_\varepsilon} g(z)dz\right| \leqslant \frac{\varepsilon^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{(\ln\varepsilon)^2 + 4\pi^2}}{(1-\varepsilon)} \cdot 2\pi\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon\to 0} 0.$$

$$\left|\int\limits_{\gamma_R} g(z)dz\right| \leqslant \frac{R^{\frac{1}{2}}\sqrt{(\ln R)^2 + 4\pi^2}}{(R-1)(R-2)} \cdot 2\pi R \xrightarrow{R\to\infty} 0.$$

Следовательно

$$\int\limits_{\partial G} g(z)dz = \int\limits_0^\infty \frac{\sqrt{x}(\ln x - 2\pi i)}{(x+1)(x+2)}dx - \int\limits_0^\infty \frac{-\sqrt{x}\ln x}{(x+1)(x+2)}dx =$$

$$= 2J - 2\pi i\underbrace{\int\limits_0^\infty \frac{\sqrt{x}dx}{(x+1)(x+2)}}_{\tilde{J}} = 2\pi i\left(\operatorname*{res}_{z=-1} g(z) + \operatorname*{res}_{z=-2} g(z)\right).$$

$z=-1$ и $z=-2$ — полюса порядка 1, значит

$$\operatorname*{res}_{z=-1} g(z) = \frac{i\cdot(-i\pi)}{1} = \pi.$$

$$\operatorname*{res}_{z=-2} g(z) = \frac{i\sqrt{2}\cdot(\ln 2 - i\pi)}{-1} = -\sqrt{2}\left(\ln 2\cdot i + \pi\right).$$

Аналогичные оценки верны и для $\tilde{g} = \frac{\sqrt{z}}{(z+1)(z+2)}$, следовательно

$$2\tilde{J} = 2\pi i\left(\operatorname*{res}_{z=-1}\tilde{g}(z) + \operatorname*{res}_{z=-2}\tilde{g}(z)\right) = 2\pi i\cdot\left(i + \frac{\sqrt{2}i}{-1}\right) = 2\pi\left(\sqrt{2}-1\right).$$

Поэтому

$$J = \pi i\left(\pi\left(\sqrt{2}-1\right) + \pi - \sqrt{2}\left(\ln 2\cdot i + \pi\right)\right) = \sqrt{2}\pi\ln 2.$$

§23 №7(1)

Решение.

$$\int\limits_0^\infty \frac{\ln x}{(x+1)^2}dx.$$

Область G изображена на рис. 17.

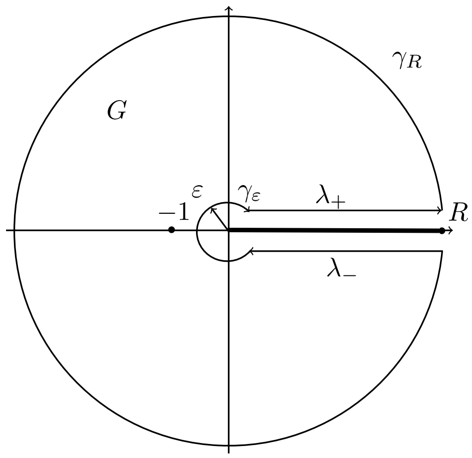

Рис. 17

$$g(x) = \frac{(\ln z)^2}{(z+1)^2}.$$

Зададим ветвь $f_9z) = \ln z$ условием при $x < 0$ $\ln x = \ln|x| - i\pi$.

При $x > 0$

$$f(x+i0) = \ln x - 2\pi i.$$

$$f(x-i0) = \ln x.$$

$$\int\limits_{\partial G} g(z)dz = \int\limits_{\lambda_+ + \lambda_- + \gamma_\varepsilon + \gamma_R} g(z)dz.$$

$$\left|\int\limits_{\gamma_\varepsilon} g(z)dz\right| \leqslant \frac{(\ln\varepsilon)^2 + 4\pi^2}{(1-\varepsilon)^2}\cdot 2\pi\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon\to 0} 0.$$

$$\left|\int\limits_{\gamma_R} g(z)dz\right| \leqslant \frac{(\ln R)^2 + 4\pi^2}{(R-1)^2}\cdot 2\pi R \xrightarrow{R\to\infty} 0.$$

Значит

$$\int\limits_{\partial G} g(z)dz = \int\limits_0^\infty \frac{(\ln x - 2\pi i)^2}{(x+1)^2}dx - \int\limits_0^\infty \frac{(\ln x)^2}{(x+1)^2}dx = -4\pi i\cdot J - 4\pi^2\int\limits_0^\infty \frac{dx}{(x+1)^2} = 2\pi i \operatorname*{res}_{z=-1} g(z).$$

Т. к. $z=-1$ — полюс втоорого порядка, то

$$\operatorname*{res}_{z=-1} g(z) = \frac{d}{dz}\left((\ln z)^2\right)\Big|_{z=-1} = \left(2\ln z\cdot\frac{1}{z}\right)\Bigg|_{z=-1} = -2i\pi\cdot(-1) = 2\pi i.$$

Следовательно

$$J = 0.$$

§15 № 1(1)

Решение.

$$z^4 - 3z + 1 = 0 \qquad |z| < 1.$$

На $\gamma = \{|z| = 1\}$:

$$\underbrace{|-3z+1|}_{f(z)} \geqslant \underbrace{|z^4|}_{\varphi(x)}.$$

Значит $z^4 - 3z + 1 = 0$ имеет в D стоолько же нулей, сколько и $-3z+1$, т. е. ровно один

§15 № 1(3)

Решение.

$$z^7 - 5z^4 + z^2 - 2 = 0 \qquad |z| < 1.$$

На $\gamma = \{|z| = 1\}$

$$\underbrace{|-5z^4 + z^2 - 2|}_{f(z)} \geqslant 5 - |z^2 - 2| \geqslant 5 - 3 = 2 > 1 \geqslant \underbrace{|z^7|}_{\varphi(x)}.$$

Значит исходное ур-е имеет столько же нулей, сколько и ур-е $f(z) = 0$ в D. Т. к. при $|z| \geqslant 1 \hookrightarrow |-5z^4 + z^2 - 2| \geqslant 5|z|^4 - (|z|^2 + 2) > 0$, то все нули ф-ии f лежат в D, следовательно ур-е имеет 4 корня в D (с учётом их кратностей).

§15 № 1(7)

Решение.

$$z^6 - 6z + 10 = 0 \qquad |z| > 1.$$

На $\gamma = \{|z| = 1\}$

$$\underbrace{|-6z+10|}_{f(z)} \geqslant 4 > 1 \geqslant \underbrace{|z^6|}_{\varphi(z)}.$$

Значит в области $D = \{|z| < 1\}$ данное ур-е не имеет нулей. На γ

$$|z^6 - 6z + 10| \geqslant |-6z+10| - |z^6| \geqslant 3.$$

Следовательно в области $|z| > 1$ исходное ур-е имеет 6 корней.

Т.4

Решение.

$$4z^6 + 4z^3 + \underbrace{9z - 4} = 0 \qquad |z| < 1.$$

T.5

Решение.

$$J = \oint\limits_{|z|=1} z^6 \frac{1}{3z^4+z+1} dz.$$

$$|3z^4| \geqslant 3 > 2 \geqslant |z+1|$$

на $\gamma = \{|z|=1\}$. Значит у многочлена $3z^4+z+1=0$ 4 корня в $D = \{|z|<1\}$.

$$J = -2\pi i \operatorname*{res}_{z=\infty} \frac{z^6}{3z^4+z+1} = f(z).$$

$$f(z) = \frac{z^2}{3} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{3z^2}+o\left(\frac{1}{z^3}\right)} = \frac{z^2}{3}\left(1-\frac{1}{3z^2}+o\left(\frac{1}{z^3}\right)\right) \implies c_1 = -\frac{1}{9} \implies J = -\frac{2\pi i}{9}.$$