0-9-1. Оценить максимальный ток, который может протекать через индиевую проволочку диаметром $d = 100$ мкм, не разрушая сверхпроводимость. Критическое поле для индия при $T = 0$ равно $H_c = 280$ Э.

Решение. Применим теорему о циркуляции для магнитного поля для контура, опоясывающего провод:

$$2\pi r H_c = \frac{4\pi}{c} J_c, \quad J_c = \frac{cr}{2} H_c =$$

$$= \frac{dc}{4} H_c \approx 21 \cdot 10^{10} \text{ ед. СГС} = 7 \text{ А}.$$

0-9-2. На кварцевый стержень диаметром $d = 10$ мкм напылён слой свинца ($T_c = 7{,}2$ К), толщина которого много больше лондоновской глубины проникновения. Оценить, чему должна быть равна напряженность магнитного поля, приложенного параллельного оси стержня при $T > T_c$, чтобы при переходе в сверхпроводящее состояние был захвачен магнитный поток, равный кванту потока Φ_0.

Решение. Квант магнитного потока равен $\Phi_0 = \pi\hbar c/e$. Захваченный магнитный поток равен величине BS, где S — площадь сечения: $S = \pi d^2/4$.

$$B = \frac{\Phi_0}{S} = \frac{4\pi\hbar c}{\pi e d^2} = \frac{4\hbar c}{e d^2} \approx 0{,}9 \cdot 10^{-9} \text{ Гс}.$$

0-10-1. При приложении какого напряжения начнёт течь ток в туннельном контакте между сверхпроводящим свинцом ($T_c = 7{,}2$ К) и нормальным металлом? Температура $T \ll T_c$.

Решение. Щель в спектре возбуждений равна $\Delta \approx 1{,}5 k_B T_c$. Пороговое напряжение равно $U = \Delta/e$. Получаем, что $U = 1{,}5 k_B T_c/e \approx 928$ мкВ.

0-10-2. При каком напряжении на джозефсоновском контакте в нём будут генерироваться электромагнитные волны с длиной волны $\lambda = 3$ см?

Решение. Связь частоты осцилляции и напряжения: $\omega = 2eU/\hbar$. Тогда для длины волны имеем, что

$$\lambda = \frac{2\pi c}{\omega} = \frac{2\pi\hbar c}{2eU} = \frac{hc}{eU}.$$

$$U = \frac{hc}{e\lambda} \approx 40 \text{ мкВ}.$$

0-11-1. Чему равен уровень химпотенциала в полупроводнике с легированием акцепторными примесями при $T = 0$? Считать энергию «потолка» валентной зоны равной нулю, ширина запрещенной зоны Δ, расстояние от примесного уровня до «дна» зоны проводимости δ.

Решение. При нулевой температуре при наличии акцепторных примесей уровень химпотенциала находится между потолком валентной зоны и акцепторным уровнем. Акцепторный уровень: $\Delta - \delta$. Получаем, что $\mu = (\Delta - \delta)/2$.

0-11-2. Найти потенциал плоской границы контакта полупроводников на p-n-переходе при $T = 0$, если концентрация донорных примесей в 10 раз больше, чем концентрация акцепторных. Оба полупроводника получены легированием кремния ($\Delta = 1{,}1$ эВ), примесные уровни близки к

Решение. Пусть N_d и N_a — концентрации доноров и акцепторов. Пусть $x = 0$ есть граница контакта, $x < 0$ есть проводник типа (n), $x > 0$ есть проводник типа (p). Тогда химический потенциал монотонно убывает с увеличением x. Тогда существуют такие точки h_d и h_a, что при $-h_d < x < 0$ донорные уровни выше химического потенциала, а при $0 < x < h_a$ акцепторные уровни ниже химического потенциала. В этих областях соответствующие ионы полностью ионизированы. Из условия электронейтральности: $N_d h_d = N_a h_a$. Если ε — диэлектрическая проницаемость среды, то имеем уравнения Пуассона в областях:

$$\varepsilon\varphi''(x) = 4\pi e \cdot \begin{cases} N_d & \text{при } x \in (-h_d, 0)\,, \\ N_a & \text{при } x \in (0, h_a)\,. \end{cases}$$

При $x < -h_d$ считаем, что $\varphi(x) = 0$.

$$\varphi(x) = -\frac{4\pi e N_d}{2\varepsilon}(x + h_d)^2$$

при $x \in (-h_d, 0)$.

$$\varphi(x) = \frac{1}{\varepsilon}\left(2\pi e N_a (x - h_a)^2 - \right.$$

$$\left. - 2\pi e N_a h_a^2 - 2\pi e N_d h_d^2\right)$$

при $x \in (0, h_a)$ Получаем, что $\varphi(0) = -2\pi e N_d h_d^2/\varepsilon$. С другой стороны

$$\varphi(h_a) = -\frac{2\pi e}{\varepsilon}\left(N_a h_a^2 + N_d h_d^2\right)$$

и $\varphi(h_d) = 0$. С учётом того, что $N_a h_a = N_d h_d$, получаем, что

$$\varphi(0) = -\frac{N_a}{N_a + N_d}\left(\varphi(h_d) - \varphi(h_a)\right)$$

есть выражение для потенциала границы. При этом

$$\varphi(h_d) - \varphi(h_a) = \frac{1}{e}(\mu_d - \mu_a) \approx \frac{\Delta}{e},$$

где учтено, что химические потенциалы близки к границам зоны. Получаем потенциал границы:

$$\varphi(0) = -\frac{1}{1 + N_d/N_a}\frac{\Delta}{e} = -0{,}1 \text{ В}.$$

0-12-1. При изучении двумерного электронного газа в графене или гетероструктурах часто используют дополнительный электрод («затвор»), который создаёт перпендикулярное плоскости газа электрическое поле, притягивающее или выталкивающее электроны из внешней цепи. Это позволяет регулировать концентрацию электронов. В опыте такого типа при приложении электрического поля перпендикулярно плоскости графена энергия Ферми электронов оказалась равна $E_F = 0{,}1$ эВ. Найти поверхностную плотность электронов в графене в этом опыте. Спектр электронов вблизи точки Дирака $E(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) = \hbar c^* |\mathbf{k} - \mathbf{k}_0|$, $c^* = 108$ см/с.

Решение. Фермиевский вектор в двумерном случае равен $k_F = \sqrt{2\pi n}$, где n — плотность электронов.

$$E_F = c^* k_F \hbar, \quad n = \frac{k_F^2}{2\pi}.$$

Получаем, что

$$n = \frac{E_F^2}{2c^{*2}\pi\hbar^2} \approx 3{,}6 \cdot 10^{11} \text{ см}^{-2}.$$

0-12-2. Вычислить энергетическое расстояние между нижними уровнями размерного квантования для двумерного электронного газа в Si и GaAs в приближении прямоугольной потенциальной ямы с бесконечно высокими потенциальными стенками в направлении, нормальном к плоскости двумерного электронного газа. Эффективная масса электрона m^* в GaAs и Si составляет 0.067 и 0.19 масс свободного электрона соответственно. Ширину ямы принять равной $d = 20$ нм. Сравнить полученное значение с характерными температурами – комнатной (300 К), температурой жидкого азота (77 К), температурой жидкого гелия (4.2 К).

Решение. ?

0-13-1. Оценить, при какой температуре диполь-дипольное взаимодействие атомных магнитных моментов могло бы привести к возникновению упорядоченной магнитной структуры. Для оценки принять магнитный момент атомов равным μ_B, расстояние между атомами $d = 4$ Å.

Решение. Диполь-дипольное взаимодействие может привести к возникновению упорядоченной магнитной структуры, если энергия этого взаимодействия будет больше тепловой энергии. Значит, $\Delta E > k_B T$. Энергию дипольного взаимодействия оценим как $\Delta E \simeq \mu_B^2/\alpha^3$. Получаем оценку для температуры $T < \mu_B^2/\left(k_B\alpha^3\right) \approx 0{,}01$ К.

0-13-2. Спектр длинноволновых элементарных возбуждений ферромагнетика (спиновых волн) $\omega(k) = Ak^2$. Определить зависимость от температуры вклада спиновых волн в теплоёмкость трёхмерного ферромагнетика.

Решение. Запишем плотность энергии для магнонов:

$$\rho = \int_0^{+\infty} n(\omega)\hbar\omega \frac{d^3k}{(2\pi)^3},$$

где

$$n = \frac{1}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{k_B T}\right) - 1}$$

— функция распределения.

$$\int_0^{+\infty} n(\omega)\hbar\omega \frac{d^3k}{(2\pi)^3} =$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{A\hbar k^2}{\exp\left(\frac{A\hbar k^2}{k_B T}\right) - 1}\frac{4\pi k^2 dk}{(2\pi)^3} =$$

$$= \left(\frac{k_B T}{A\hbar}\right)^{5/2}\frac{4\pi\hbar}{(2\pi)^3}\int_0^{+\infty}\frac{x^4 dx}{\exp\left(x^2\right) - 1} \propto$$

$$\propto T^{5/2}.$$

Теплоёмкость равна $C = \dfrac{d\rho}{dT} \propto T^{3/2}$.

Получаем зависимость теплоёмкости от температуры: $C \propto T^{3/2}$.