

Домашняя работа по вычислительной
математике
Задание 1

Драчев Ярослав
Факультет общей и прикладной физики МФТИ
12 марта 2021 г.

Тема IX. Построение общего решения

7.19. Найти все решения задачи на собственные значения

$$\frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{h^2} = (2 - \lambda)y_k, \quad y_0 = 0, \quad y_N = y_{N-1}, \quad h = \frac{1}{N}.$$

Решение. Рассмотрим эту задачу как разностное уравнение второго порядка

$$y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1} = (2 - \lambda)h^2 y_k$$

или

$$y_{k+1} + (\lambda h^2 - 4)y_k + y_{k-1} = 0.$$

Характеристическое уравнение, соответствующее данному разностному, есть

$$q^2 + (\lambda h^2 - 4)q + 1 = 0.$$

По теореме Виета имеем

$$q_1 = \frac{1}{q_2}.$$

Тогда общее решение разностного уравнения имеет вид

$$\bar{y}_n = \alpha q_1^n + \beta q_1^{-n}.$$

Подстановка в левое граничное условие даёт соотношение $\alpha + \beta = 0$, тогда

$$\bar{y} = \alpha (q_1^n - q_1^{-n}).$$

Теперь используем правое граничное условие

$$\alpha (q_1^N - q_1^{-N}) = \alpha (q_1^{N-1} - q_1^{-N+1}).$$

При $\alpha = 0$ получаем тривиальное решение, которое нас не интересует. Тогда для того, чтобы удовлетворить этому уравнению, должно быть выполнено

$$q_1^N - q_1^{-N} = q_1^{N-1} - q_1^{1-N}.$$

$$q_1^{2N} - 1 = q_1^{2N-1} - q_1.$$

$$(q_1^{2N-1} + 1)(q_1 - 1) = 0.$$

Откуда

$$q_1 = e^{\frac{\pi(1+2k)i}{2N-1}}.$$

knknllkn;lnm;lm;lkjbkjblknkbnkljbkjbkjbkj