

# Квантовая деформация иерархии $BKP$

Драчов Ярослав

Факультет общей и прикладной физики МФТИ

22 апреля 2022 г.

## Содержание

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| <b>1</b> | <b>Иерархия КП</b>   | <b>2</b>  |
| 1.1      | Пары Лакса . . . . .   | 2         |
| 1.2      | Билинейное тождество Хироты . . . . .  | 3         |
| 1.3      | Полиномы Шура, соотношения Плюккера, гипергеометрические $\tau$ -функции . . . . .                   | 4         |
| 1.4      | $\tau$ -функция чисел Гурвица . . . . .  | 5         |
| 1.5      | Фермионный формализм и бозонно-фермионное соответствие .   | 6         |
| <b>2</b> | <b>Квантовая деформация иерархии КП</b>  | <b>13</b> |
| 2.1      | Фермионный формализм . . . . .   | 14        |
| 2.2      | $\tau$ -функция чисел Гурвица . . . . .  | 14        |
| <b>3</b> | <b>Иерархия <math>BKP</math></b>   | <b>15</b> |
| 3.1      | Билинейное тождество $BKP$ . . . . .   | 15        |
| 3.2      | $Q$ -полиномы Шура, соотношения Плюккера $BKP$ , гипергеометрические $\tau^{BKP}$ -функции . . . . . | 16        |
| 3.3      | $\tau$ -функция спинных чисел Гурвица . . . . .  | 16        |
| 3.4      | Фермионный формализм и бозонно-фермионное соответствие .   | 17        |
| <b>4</b> | <b>Квантовая деформация иерархии <math>BKP</math></b>  | <b>18</b> |

# 1 Иерархия КП

*Иерархия КП* — бесконечный набор нелинейных дифференциальных уравнений, первое из которых даётся как

$$\frac{1}{4} \frac{\partial^2 F}{\partial t_2^2} = \frac{1}{3} \frac{\partial^2 F}{\partial t_1 \partial t_3} - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 F}{\partial t_1^2} \right)^2 - \frac{1}{12} \frac{\partial^4 F}{\partial t_1^4}. \quad (1)$$

Далее будут обсуждаться экспоненцированные решения данной иерархии ( *$\tau$ -функции*)  $\tau(\mathbf{t}) = \exp(F(\mathbf{t}))$ . В разделах 1.1 и 1.2 опишем методы получения уравнений данной иерархии.

## 1.1 Пары Лакса

Для псевдодифференциального оператора

$$L = \partial + \sum_{j=1}^{\infty} f_j \partial^{-j}, \quad \text{где} \quad \partial = \frac{\partial}{\partial t_1}, \quad (2)$$

условия совместности системы линейных уравнений

$$\begin{cases} Lw = kw, \\ \frac{\partial w}{\partial t_j} = B_j w, \end{cases} \quad \text{где } B_j = (L^j)_+. \quad (3)$$

могут быть записаны в Лаксовой форме

$$\frac{\partial L}{\partial t_j} = [B_j, L]. \quad (4)$$

Из второго уравнения данной иерархии получаем

$$\frac{\partial f_1}{\partial t_2} = \frac{\partial^2 f_1}{\partial t_1^2} + 2 \frac{\partial f_2}{\partial t_1}, \quad \frac{\partial f_2}{\partial t_2} = \frac{\partial^2 f_2}{\partial t_1^2} + 2 \frac{\partial f_3}{\partial t_1} + 2 \frac{\partial f_1}{\partial t_1} f_1, \quad \dots \quad (5)$$

Из третьего —

$$\frac{\partial f_1}{\partial t_3} = \frac{\partial^3 f_1}{\partial t_1^3} + 3 \frac{\partial^2 f_2}{\partial t_1^2} + 3 \frac{\partial f_3}{\partial t_1} + 6 \frac{\partial f_1}{\partial t_1} f_1, \quad \dots \quad (6)$$

Устраняя  $f_2$  и  $f_3$  из данных уравнений и пользуясь обозначениями  $u = -2f_1$ , получаем *уравнение КП*

$$3 \frac{\partial^2 u}{\partial t_2^2} = \frac{\partial}{\partial t_1} \left( 4 \frac{\partial u}{\partial t_3} + 6u \frac{\partial u}{\partial t_1} - \frac{\partial^3 u}{\partial t_1^3} \right). \quad (7)$$

Требует пояснений введённое обозначение для  $u$ . Решение первоначальной задачи на собственные значения можно искать в виде

$$w = e^{\xi(\mathbf{t}, k)} \left( 1 + \frac{w_1}{k} + \frac{w_2}{k^2} + \dots \right), \quad \text{где} \quad \xi(\mathbf{t}, k) = \sum_{j=1}^{\infty} t_j k^j. \quad (8)$$

Тогда связь между  $w_i$  и  $f_i$  может быть найдена, например, из уравнений

$$\frac{\partial w}{\partial t_j} = B_j w. \quad (9)$$

Из уравнения на  $t_1$  получаем

$$\frac{\partial w_1}{\partial t_1} = -f_1, \quad \dots \quad (10)$$

Оказывается, что все функции  $w_1, w_2, \dots$  могут быть выражены через одну функцию  $\tau$  по формуле

$$w = \frac{\tau \left( t_1 - \frac{1}{k}, t_2 - \frac{1}{2k^2}, t_3 - \frac{1}{3k^3}, \dots \right)}{\tau(t_1, t_2, t_3, \dots)} e^{\xi(\mathbf{t}, k)}. \quad (11)$$

Откуда, например,

$$w_1 = -\frac{\partial \tau}{\partial t_1} \cdot \tau^{-1}. \quad (12)$$

Иерархия КдФ получается из иерархии КП условием  $L^2 = \partial^2 + u$  и бесконечный набор функций  $f_i$  выражается через  $u$ . Таким же свойством обладает  $\tau$ -функция, между ними имеется связь

$$u = 2 \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} \ln \tau. \quad (13)$$

Обозначение  $u = -2f_1$  теперь поясняется формулами (10), (12), (13). Также, интегрируя два раза по  $t_1$  уравнение (7) и принимая во внимание обозначение для  $F$ , получаем в точности уравнение (1).

## 1.2 Билинейное тождество Хироты

**Определение.** Производные хироты  $D_1^{n_1} \dots D_m^{n_m}$  задаются из соотношения

$$e^{y_1 D_1 + y_2 D_2 + \dots} f \cdot g = f(x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots) g(x_1 - y_1, x_2 - y_2, \dots). \quad (14)$$

**Теорема** (билинейное тождество). Для любых  $x$  и  $x'$  положим

$$\xi = \xi(\mathbf{t}, k), \quad \xi' = \xi(\mathbf{t}', k). \quad (15)$$

Тогда справедливо следующее тождество:

$$0 = \oint \frac{dk}{2\pi i} e^{\xi - \xi'} \tau \left( t_1 - \frac{1}{k}, t_2 - \frac{1}{2k^2}, \dots \right) \tau \left( t'_1 + \frac{1}{k}, t'_2 + \frac{1}{2k^2}, \dots \right). \quad (16)$$

Уравнения КП получаются из билинейного тождества после замены  $t_j = x_j + y_j$ ,  $t'_j = x_j - y_j$ :

$$\begin{aligned} & \oint \frac{dk}{2\pi i} \exp \left( 2 \sum_{j=1}^{\infty} k^j y_j \right) \tau \left( x_1 + y_1 - \frac{1}{k}, x_2 + y_2 - \frac{1}{2k^2}, \dots \right) \times \\ & \quad \times \tau \left( x_1 - y_1 + \frac{1}{k}, x_2 - y_2 + \frac{1}{2k^2}, \dots \right) = \\ & = \oint \frac{dk}{2\pi i} \exp \left( 2 \sum_{j=1}^{\infty} k^j y_j \right) \exp \left( \sum_{j=1}^{\infty} \left( y_l - \frac{1}{lk^l} \right) D_l \right) \tau \cdot \tau. \end{aligned} \quad (17)$$

Раскладывая подынтегральную функцию в ряд по степеням  $y_j$  и вычисляя коэффициент при  $k^{-1}$ , получаем уравнения КП. Например

$$(D_1^4 + 3D_2^2 - 4D_1D_3)\tau \cdot \tau = 0, \quad (D_1^3D_2 + 2D_2D_3 - 3D_1D_4)\tau \cdot \tau = 0. \quad (18)$$

Первое из них — буквально (1) с учётом определения  $F$ .

### 1.3 Полиномы Шура, соотношения Плюккера, гипергеометрические $\tau$ -функции

Решения данной иерархии могут быть разложены по базису полиномов Шура

$$\tau(\mathbf{t}) = \sum_{\lambda} C_{\lambda} s_{\lambda}(\mathbf{t}). \quad (19)$$

Можно показать, что  $\tau(\mathbf{t})$  — решение иерархии КП тогда и только тогда, когда коэффициенты  $C_{\lambda}$  удовлетворяют соотношениям Плюккера, первое из которых

$$C_{[2,2]}C_{[\emptyset]} - C_{[2,1]}C_{[1]} + C_{[2]}C_{[1,1]} = 0. \quad (20)$$

Имеется важное подмножество решений иерархии КП — *гипергеометрические  $\tau$ -функции*. Они определяются как

$$\tau(\mathbf{t}) = \sum_{\lambda} r_{\lambda} s_{\lambda}(\beta) s_{\lambda}(\mathbf{t}), \quad (21)$$

где  $s_{\lambda}(\beta)$  — полином Шура от переменных  $\beta_k$ ,

$$r_{\lambda} = \prod_{w \in \lambda} r(c(w)), \quad (22)$$

$$c(w) = j - i, \quad 1 \leq i \leq l(\lambda), \quad 1 \leq j \leq \lambda_i. \quad (23)$$

## 1.4 $\tau$ -функция чисел Гурвица

Производящая функция простых чисел Гурвица

$$\tau_H(\mathbf{t}) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\mu} h_{m;\mu}^{\circ} t_{\mu_1} t_{\mu_2} \cdots t_{\mu_{l(\mu)}} \frac{u^m}{m!}, \quad (24)$$

где

$$h_{m;\mu}^{\circ} = \frac{1}{|\mu|!} \left| \{ (\eta_1, \dots, \eta_m), \eta_i \in C_2(S_{|\mu|}) : \eta_m \circ \cdots \circ \eta_1 \in C_{\mu}(S_{|\mu|}) \} \right|, \quad (25)$$

$S_{|\mu|}$  — симметрическая группа перестановок  $\mu$  элементов,  $C_2(S_{|\mu|})$  — множество всех транспозиций в  $S_{|\mu|}$  и  $C_{\mu}(S_{|\mu|})$  — множество всех перестановок циклического типа  $\mu$ .

Можно показать (TODO), что

$$\tau_H(\mathbf{t}) = \sum_{\lambda} e^{uc(\lambda)} s_{\lambda}(\beta_k = \delta_{k,1}) s_{\lambda}(\mathbf{t}), \quad (26)$$

где  $c(\lambda) = \sum_{w \in \lambda} c(w)$ . То есть данная производящая функция — гипергеометрическая  $\tau$ -функция с параметрами

$$r(n) = e^{un}, \quad \beta_1 = 1, \quad \beta_k = 0, \quad k \geq 2. \quad (27)$$

## 1.5 Фермионный формализм и бозонно-фермионное соответствие

Будем рассматривать бесконечномерную алгебру Клиффорда с генераторами  $\{\psi_n, \psi_m^* \mid n, m \in \mathbb{Z}\}$ , обладающими коммутационными соотношениями

$$\{\psi_n, \psi_m\} = 0, \quad \{\psi_n^*, \psi_m^*\} = 0, \quad \{\psi_n, \psi_m^*\} = \delta_{n, m}. \quad (28)$$

Пространство Фока для фермионов определим действием алгебры Клиффорда на вакуумный вектор  $|0\rangle$  «моря Дирака». Действие генераторов алгебры на вакуумный вектор даётся как

$$\psi_k |0\rangle = 0, \quad k < 0; \quad \psi^* |0\rangle = 0, \quad k \geq 0. \quad (29)$$

То есть операторы  $\psi_k$  при  $k > 0$  и  $\psi_k^*$  при  $k \leq 0$  — это операторы рождения, а  $\psi_k$  при  $k \leq 0$  и  $\psi_k^*$  при  $k > 0$  — операторы уничтожения.

Далее определим  $m$ -е вакуумы

$$\psi_k |m\rangle = 0, \quad k < m; \quad \psi^* |m\rangle = 0, \quad k \geq m, \quad (30)$$

и состояния

$$|m, \lambda\rangle = \psi_{\lambda_1+m-1} \psi_{\lambda_2+m-2} \cdots \psi_{\lambda_{l(\lambda)}+m-l(\lambda)} \psi_{m-l(\lambda)}^* \cdots \psi_{m-2}^* \psi_{m-1}^* |m\rangle.$$

Введём также производящие функции для фермионов

$$\psi(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \psi_k z^k, \quad \psi^*(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \psi_k^* z^{-k-1}. \quad (31)$$

Будем обозначать нормальное упорядочение фермионных операторов как  $:(\dots):$ . Результатом нормального упорядочения будет перемещение всех операторов уничтожения направо, а операторов рождения — налево, где каждая транспозиция двух фермионов будет производиться в согласии с антикоммутационным соотношением и, следовательно, давать множитель  $(-1)$ .

Алгебра Ли  $gl_\infty$  определяется как пространство

$$gl_\infty = \left\{ (a_{ij})_{i,j \in \mathbb{Z}} \mid \text{все } a_{ij}, \text{ кроме конечного числа, равны } 0 \right\}. \quad (32)$$

Базисом данной алгебры можно выбрать матрицы  $E_{ij}$ , у которых единственный, отличный от нуля, элемент равен 1 и находится на пересечении  $i$ -й строки и  $j$ -го столбца.

$$(E_{ij})_{kl} = \delta_{ik} \delta_{jl}. \quad (33)$$

$$[E_{ij}, E_{kl}] = E_{ij}E_{kl} - E_{kl}E_{ij} = \delta_{in}\delta_{jm}\delta_{km}\delta_{lp} - \delta_{kn}\delta_{lm}\delta_{im}\delta_{jp} = \delta_{jk}E_{il} - \delta_{il}E_{kj}. \quad (34)$$

Данную алгебру можно рассматривать как алгебру Ли группы  $GL_\infty$ , определённой следующим образом

$$GL_\infty = \left\{ A = (a_{ij})_{i,j \in \mathbb{Z}} \mid \begin{array}{l} A \text{ обратима и все числа } a_{ij} - \delta_{ij}, \\ \text{кроме конечного числа, равны } 0 \end{array} \right\}. \quad (35)$$

Представление  $R$  группы  $GL_\infty$  и представление  $\rho$  алгебры Ли  $gl_\infty$  в пространстве  $\mathcal{F}$  задаётся формулами

$$R(A)(\psi_{i_1} \wedge \psi_{i_2} \wedge \dots) = A\psi_{i_1} \wedge A\psi_{i_2} \wedge \dots, \quad (36)$$

$$\rho(a)(\psi_{i_1} \wedge \psi_{i_2} \wedge \dots) = a\psi_{i_1} \wedge \psi_{i_2} \wedge \dots + \psi_{i_1} \wedge a\psi_{i_2} \wedge \dots + \dots \quad (37)$$

Последние две формулы связаны соотношением

$$e^{\rho(a)} = R(e^a), \quad a \in gl_\infty. \quad (38)$$

Представлением данной алгебры на введённом пространстве Фока будет

$$\rho(E_{ij}) = \psi_i \psi_j^* \quad (39)$$

т. к.

$$\begin{aligned} [\psi_i \psi_j^*, \psi_k \psi_l^*] &= \psi_i \psi_j^* \psi_k \psi_l^* - \psi_k \psi_l^* \psi_i \psi_j^* = \\ &= \psi_i (\delta_{jk} - \psi_k \psi_j^*) \psi_l^* - \psi_k \psi_l^* \psi_i \psi_j^* = \\ &= \delta_{jk} \psi_i \psi_l^* - \psi_k \psi_i \psi_l^* \psi_j^* - \psi_k \psi_l^* \psi_i \psi_j^* = \\ &= \delta_{jk} \psi_i \psi_l^* - \delta_{il} \psi_k \psi_j^*. \end{aligned} \quad (40)$$

Пользуясь формулой (36) и стандартным исчислением внешних степеней найдём оператор представления  $R$  элемента  $A \in GL_\infty$  в пространстве  $\mathcal{F}$

$$\begin{aligned} R(A)(\psi_{i_m} \wedge \psi_{i_{m-1}} \wedge \dots) &= \sum_{j_m, j_{m-1}, \dots \in \mathbb{Z}} A_{j_m, i_m} \psi_{j_m} \wedge A_{j_{m-1}, i_{m-1}} \psi_{j_{m-1}} \wedge \dots = \\ &= \sum_{j_m > j_{m-1} > \dots} \left( \det A_{j_m, j_{m-1}, \dots}^{i_m, i_{m-1}, \dots} \right) \psi_{j_m} \wedge \psi_{j_{m-1}} \wedge \dots \end{aligned} \quad (41)$$

где  $A_{j_m, j_{m-1}, \dots}^{i_m, i_{m-1}, \dots}$  означает матрицу, состоящую из элементов, стоящих на пересечении строк  $j_m, j_{m-1}, \dots$  и столбцов  $i_m, i_{m-1}, \dots$  матрицы  $A$ .

В альтернативных обозначениях

$$R(A) |m, \lambda\rangle = \sum_{\mu \in \text{Par}} \left( \det A_{\mu_1+m, \mu_2+m-1, \dots}^{\lambda_1+m, \lambda_2+m-1, \dots} \right) |m, \mu\rangle. \quad (42)$$

Определим также большую алгебру Ли  $\bar{\mathfrak{a}}_\infty$ . Элементами данной алгебры будут бесконечномерные матрицы, у которых конечное количество диагоналей отличны от нулевых:

$$\bar{\mathfrak{a}}_\infty = \{(a_{ij}) \mid i, j \in \mathbb{Z}, a_{ij} = 0 \text{ при } |i - j| \gg 0\}. \quad (43)$$

$\bar{\mathfrak{a}}_\infty$  является алгеброй Ли с матричным коммутатором в качестве операции, содержащей алгебру Ли  $gl_\infty$  как подалгебру.

Далее рассмотрим центральное расширение алгебры Ли  $\bar{\mathfrak{a}}_\infty$ , а именно алгебру Ли  $\mathfrak{a}_\infty$ , определённую как

$$\mathfrak{a}_\infty = \bar{\mathfrak{a}}_\infty \oplus \mathbb{C}c \quad (44)$$

с центром  $\mathbb{C}c$  и скобкой

$$[a, b] = ab - ba + \alpha(a, b)c. \quad (45)$$

Функцию  $\alpha(a, b)$  называют *два-коциклом*, для корректности определения скобки Ли на неё накладываются дополнительные ограничения:

- Антисимметричность скобки влечёт антисимметричность  $\alpha(a, b)$ .
- Линейность скобки по обоим аргументам влечёт аналогичную линейность  $\alpha(a, b)$ .
- Из тождества Якоби скобки

$$[[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = 0 \quad (46)$$

следует, что

$$\begin{aligned} [xy - yx + \alpha(x, y)c, z] + [yz - zy + \alpha(y, z)c, x] + \\ + [zx - xz + \alpha(z, x)c, y] = 0 \end{aligned} \quad (47)$$

и, как итог,

$$\alpha(xy - yx, z) + \alpha(yz - zy, x) + \alpha(zx - xz, y) = 0. \quad (48)$$



Два-коцикл  $\alpha(a, b)$  определим на матрицах  $E_{ij}$  как

$$\begin{aligned}\alpha(E_{ij}, E_{ji}) &= -\alpha(E_{ji}, E_{ij}) = 1 \quad \text{при } i < 0, j \geq 0, \\ \alpha(E_{ij}, E_{kl}) &= 0 \quad \text{во всех остальных случаях.}\end{aligned}\tag{49}$$

Антисимметричность, линейность по каждому аргументу данного два-коцикла очевидны.

Покажем, что представлением данной алгебры на пространстве Фока будет

$$\hat{\rho}(E_{ij}) = :\psi_i \psi_j^* :.\tag{50}$$

По определению свёртки

$$:\psi_i \psi_j^* : = \psi_i \psi_j^* - \overline{\psi_i \psi_j^*}.\tag{51}$$

Для неё выполняется

$$\overline{\psi_i \psi_j^*} = \overline{\psi_i \psi_j^*} \langle 0|0 \rangle = \langle 0|\overline{\psi_i \psi_j^*}|0 \rangle = \langle 0|\psi_i \psi_j^* - :\psi_i \psi_j^* :|0 \rangle = \langle 0|\psi_i \psi_j^*|0 \rangle.\tag{52}$$

Откуда

$$\overline{\psi_i \psi_i^*} = 1 \quad \text{при } i < 0,\tag{53}$$

$$\overline{\psi_i \psi_j^*} = 0 \quad \text{во всех остальных случаях.}\tag{54}$$

Тогда

$$\begin{aligned}[:\psi_i \psi_j^* :, :\psi_k \psi_l^* :] &= [\psi_i \psi_j^* - \overline{\psi_i \psi_j^*}, \psi_k \psi_l^* - \overline{\psi_k \psi_l^*}] = \\ &= [\psi_i \psi_j^*, \psi_k \psi_l^*] = \delta_{jk} \psi_i \psi_l^* - \delta_{il} \psi_k \psi_j^* = \\ &= \delta_{jk} (: \psi_i \psi_l^* : + \overline{\psi_i \psi_l^*}) - \delta_{il} (: \psi_k \psi_j^* : + \overline{\psi_k \psi_j^*}) = \\ &= \delta_{jk} : \psi_i \psi_l^* : - \delta_{il} : \psi_k \psi_j^* : + \delta_{jk} \overline{\psi_i \psi_l^*} - \delta_{il} \overline{\psi_k \psi_j^*} = \\ &= \delta_{jk} : \psi_i \psi_l^* : - \delta_{il} : \psi_k \psi_j^* : + \alpha(E_{ij}, E_{kl}).\end{aligned}\tag{55}$$

В последнем переходе мы воспользовались соотношением

$$\alpha(E_{ij}, E_{kl}) = \delta_{jk} \overline{\psi_i \psi_l^*} - \delta_{il} \overline{\psi_k \psi_j^*},\tag{56}$$

верность которого следует из (49), (53) и (54). Далее проверим, что скобка с определённым выше два-коциклом удовлетворяет тождеству Якоби

$$\begin{aligned}\alpha(E_{ij} E_{kl} - E_{kl} E_{ij}, E_{mn}) + \alpha(E_{kl} E_{mn} - E_{mn} E_{kl}, E_{ij}) + \\ + \alpha(E_{mn} E_{ij} - E_{ij} E_{mn}, E_{kl}) = 0,\end{aligned}\tag{57}$$

$$\alpha(\delta_{jk}E_{il} - \delta_{il}E_{kj}, E_{mn}) + \alpha(\delta_{lm}E_{kn} - \delta_{kn}E_{ml}, E_{ij}) + \\ + \alpha(\delta_{ni}E_{mj} - \delta_{mj}E_{in}, E_{kl}) = 0, \quad (58)$$

$$\delta_{jk}\alpha(E_{il}, E_{mn}) - \delta_{il}\alpha(E_{kj}, E_{mn}) + \\ + \delta_{lm}\alpha(E_{kn}, E_{ij}) - \delta_{kn}\alpha(E_{ml}, E_{ij}) + \\ + \delta_{ni}\alpha(E_{mj}, E_{kl}) - \delta_{mj}\alpha(E_{in}, E_{kl}) = 0, \quad (59)$$

$$\delta_{jk}(\delta_{lm}\overbrace{\psi_i\psi_n^*} - \delta_{in}\overbrace{\psi_m\psi_l^*}) - \delta_{il}(\delta_{jm}\overbrace{\psi_k\psi_n^*} - \delta_{kn}\overbrace{\psi_m\psi_j^*}) + \\ + \delta_{lm}(\delta_{in}\overbrace{\psi_k\psi_j^*} - \delta_{kj}\overbrace{\psi_i\psi_n^*}) - \delta_{kn}(\delta_{il}\overbrace{\psi_m\psi_j^*} - \delta_{mj}\overbrace{\psi_i\psi_l^*}) + \\ + \delta_{ni}(\delta_{jk}\overbrace{\psi_m\psi_l^*} - \delta_{lm}\overbrace{\psi_k\psi_j^*}) - \delta_{mj}(\delta_{kn}\overbrace{\psi_i\psi_l^*} - \delta_{il}\overbrace{\psi_k\psi_n^*}) = 0, \quad (60)$$

$$0 = 0. \quad (61)$$

Оказывается, можно построить изоморфизм между описанным фермионным пространством Фока  $\mathcal{F}$  и бозонным пространством  $\mathcal{B}$  полиномов от  $x_1, x_3, \dots, z$  и  $z^{-1}$ :

$$\Phi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{B} = \mathbb{C}[x_1, x_2, \dots; z, z^{-1}]. \quad (62)$$

Отображение  $\Phi$  буквально задаёт бозонно-фермионное соответствие. Как следствие, можно построить бозонные представления  $\rho^B = \Phi\rho\Phi^{-1}$  и  $\hat{\rho}^B = \Phi\hat{\rho}\Phi^{-1}$  на данном пространстве.

Определим

$$H(\mathbf{t}) = \sum_{k=1}^{\infty} t_k H_k, \quad H_n = \sum_{k \in \mathbb{Z}} :\psi_k \psi_{k+n}^*:. \quad (63)$$

Тогда

$$H_n = \sum_{k \in \mathbb{Z}} :\psi_k \psi_{k+n}^* : = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (\psi_k \psi_{k+n}^* - \overbrace{\psi_k \psi_{k+n}^*}) = \\ = \begin{cases} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \psi_k \psi_{k+n}^*, & n \neq 0, \\ \sum_{i > 0} \psi_k \psi_k^* - \sum_{i \leq 0} \psi_k^* \psi_k, & n = 0. \end{cases} \quad (64)$$

$$e^{H(\mathbf{t})} = \exp \left( \sum_{k \geq 1} t_k H_k \right) = \exp \left( \sum_{k \geq 1} t_k H_1^k \right) = \sum_{k \geq 0} s_k(\mathbf{t}) H_k. \quad (65)$$

$$\left( e^{H(\mathbf{t})} \right)_{mn} = s_{n-m}(\mathbf{t}). \quad (66)$$

Получаем явный вид бозонно-фермионного соответствия (TODO привести мотивацию)

$$\begin{aligned} \Phi(|m, \lambda\rangle) &= z^m \langle m | e^{H(\mathbf{t})} | m, \lambda \rangle = \\ &= z^m \langle m | \sum_{\mu \in \text{Par}} \det \left[ \left( e^{H(\mathbf{t})} \right)_{\mu_1+m, \mu_2+m-1, \dots}^{\lambda_1+m, \lambda_2+m-1, \dots} \right] | m, \mu \rangle = \\ &= z^m \det \left[ \left( e^{H(\mathbf{t})} \right)_{m, m-1, \dots}^{\lambda_1+m, \lambda_2+m-1, \dots} \right] = z^m \det \left[ \left( e^{H(\mathbf{t})} \right)_{m, m-1, \dots}^{\lambda_1+m, \lambda_2+m-1, \dots} \right] = \\ &= z^m \det_{i,j} s_{\lambda_i - i + j}(\mathbf{t}) = z^m s_{\lambda}(\mathbf{t}). \end{aligned} \quad (67)$$

Рассмотрим выражение

$$\begin{aligned} \langle 0 | e^{H(\mathbf{t})} G | 0 \rangle &= \langle 0 | e^{H(\mathbf{t})} \sum_{\lambda \in \text{Par}} \det \left( G_{\lambda_1, \lambda_2-1, \dots}^{0, -1, \dots} \right) | 0, \mu \rangle = \\ &= \sum_{\lambda \in \text{Par}} \det \left( G_{\lambda_1, \lambda_2-1, \dots}^{0, -1, \dots} \right) \langle 0 | e^{H(\mathbf{t})} | 0, \lambda \rangle = \sum_{\lambda \in \text{Par}} \det \left( G_{\lambda_1, \lambda_2-1, \dots}^{0, -1, \dots} \right) s_{\lambda}(\mathbf{t}). \end{aligned} \quad (68)$$

Сравнивая с  $\tau$ -функцией в бозонном представлении (19) можно получить, что

$$\tau(\mathbf{t}) = \langle 0 | e^{H(\mathbf{t})} G | 0 \rangle \quad \text{при} \quad C_{\lambda} = \det \left( G_{\lambda_1, \lambda_2-1, \dots}^{0, -1, \dots} \right). \quad (69)$$

Для гипергеометрических  $\tau$ -функций выполняется

$$G = e^{A(\beta)}, \quad A(\beta) = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k A_k. \quad (70)$$

$$A_k = \oint \frac{dz}{2\pi i} : \left[ \left( \frac{1}{z} r(D) \right)^k \psi(z) \right] \cdot \psi^*(z) :, \quad (71)$$

где  $D = z \frac{d}{dz}$ .

$$D^n z^k = D^{n-1} z \frac{\partial}{\partial z} z^k = k D^{n-1} z^k = k^n z^k.$$

$$(\hbar D - j)^n z^k = (\hbar D - j)^{n-1} (\hbar k - j) z^k = (\hbar k - j)^n z^k.$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{z} r(D) \psi(z) &= \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^{(n)}(0)}{n!} D^n \sum_{k \in \mathbb{Z}} \psi_k z^k = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{r^{(n)}(0)}{n!} \psi_k k^n z^{k-1} = \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} r(k) \psi_k z^{k-1}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{z} r(\hbar D) \psi(z) &= \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^{(n)}(0)}{n!} (\hbar D)^n \sum_{k \in \mathbb{Z}} \psi_k z^k = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{r^{(n)}(0)}{n!} \psi_k (\hbar k)^n z^{k-1} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} r(\hbar k) \psi_k z^{k-1}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{z} r(\hbar D) \sum_{k \in \mathbb{Z}} r(\hbar k) \psi_k z^{k-1} &= \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^{(n)}(0)}{n!} (\hbar D)^n \sum_{k \in \mathbb{Z}} r(\hbar k) \psi_k z^{k-1} = \\ &= \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{r^{(n)}(0)}{n!} \hbar^n r(\hbar k) \psi_k (k-1)^n z^{k-1} = \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} r(\hbar(k-1)) r(\hbar k) \psi_k z^{k-2}. \quad (72) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{z} r(D) \frac{1}{z} r(D) &= \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^{(n)}(0)}{n!} D^n \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r^{(k)}(0)}{k!} D^k = \\ &= \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^{(n)}(0)}{n!} \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \left( D^{n-i} \frac{1}{z} \right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r^{(k)}(0)}{k!} D^{k+i} = \\ &= \frac{1}{z^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^{(n)}(0)}{n!} \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (-1)^{n-i} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r^{(k)}(0)}{k!} D^{k+i} = \\ &= \frac{1}{z^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^{(n)}(0)}{n!} (D-1)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r^{(k)}(0)}{k!} D^k = \frac{1}{z^2} r(D-1) r(D). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{z} r(\hbar D) \frac{1}{z} r(\hbar D) &= \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^{(n)}(0)}{n!} (\hbar D)^n \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r^{(k)}(0)}{k!} (\hbar D)^k = \\
 &= \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^{(n)}(0)}{n!} \hbar^n \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \left( D^{n-i} \frac{1}{z} \right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r^{(k)}(0)}{k!} \hbar^k D^{k+i} = \\
 &= \frac{1}{z^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^{(n)}(0)}{n!} \hbar^n \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (-1)^{n-i} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r^{(k)}(0)}{k!} \hbar^k D^{k+i} = \\
 &= \frac{1}{z^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^{(n)}(0)}{n!} (\hbar(D-1))^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r^{(k)}(0)}{k!} (\hbar D)^k = \\
 &= \frac{1}{z^2} r(\hbar(D-1)) r(\hbar D).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \left[ \left( \frac{1}{z} r(D) \right)^k \psi(z) \right] \cdot \psi^*(z) &= \\
 &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} r(n) r(n-1) \cdots r(n-k+1) \psi_n z^{n-k} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \psi_j^* z^{-j-1}.
 \end{aligned}$$

$$A_k = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \prod_{i=n-k+1}^n r(i) : \psi_n \psi_{n-k} :. \quad (73)$$

## 2 Квантовая деформация иерархии КП

В  $\hbar$ -деформированной иерархии КП связь между  $F$  и  $\tau$  будет следующей

$$F^{\hbar}(\mathbf{t}) = \hbar^2 \ln(\tau^{\hbar}(\mathbf{t})). \quad (74)$$

Уравнения иерархии  $\hbar$ -КП получаются из иерархии КП заменой  $\mathbf{t} \rightarrow \mathbf{t}/\hbar$ . Первое уравнение деформированной иерархии

$$\frac{1}{4} \frac{\partial^2 F}{\partial t_2^2} = \frac{1}{3} \frac{\partial^2 F}{\partial t_1 \partial t_3} - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 F}{\partial t_1^2} \right)^2 - \frac{\hbar^2}{12} \frac{\partial^4 F}{\partial t_1^4}. \quad (75)$$

$\tau$ -функции иерархии  $\hbar$ -КП

$$\tau^{\hbar}(\mathbf{t}) = \sum_{\lambda} C_{\lambda}^{\hbar} s_{\lambda} \left( \frac{\mathbf{t}}{\hbar} \right), \quad (76)$$

где  $C_\lambda^{\hbar}$  удовлетворяют соотношениям Плюкера. В разделах далее будем добавлять  $\hbar$  в  $\tau$ -функции так, чтобы полученные  $\tau^{\hbar}$ -функции удовлетворяли  $\hbar$ -деформированной иерархии, а также имели «хорошее» разложение по степеням  $\hbar$ .

## 2.1 Фермионный формализм

Рецепт деформации  $\tau$ -функций в фермионном формализме

$$\tau^{\hbar}(\mathbf{t}) = \langle 0 | e^{H(\mathbf{t}/\hbar)} \exp\left(\frac{1}{\hbar} A^{\hbar}\right) | 0 \rangle, \quad (77)$$

где

$$A^{\hbar} = \oint \frac{dz}{2\pi i} : \left[ \hat{A}\left(z, \hbar \frac{d}{dz}\right) \psi(z) \right] \cdot \psi^*(z) : \quad (78)$$

и

$$\hat{A}\left(z, \hbar \frac{d}{dz}\right) = \sum_{i \in \mathbb{Z}, j \geq 0} a_{ij} z^i (\hbar \partial_z)^j. \quad (79)$$

## 2.2 $\tau$ -функция чисел Гурвица

Формула Римана-Гурвица

$$2g - 2 = m - |\mu| - l(\mu), \quad (80)$$

позволяет нам разделить вклады различных родов  $g$  в производящую функцию. Каждая точка простого ветвления даёт вклад  $+1$  к степени  $\hbar$ , каждый цикл длины  $\mu_i$  даёт вклад  $-\mu_i - 1$  к степени  $\hbar$ . Получаем замену переменных

$$t_{\mu_i} \rightarrow \hbar^{-\mu_i-1} t_{\mu_i}, \quad u \rightarrow \hbar u. \quad (81)$$

Умножая производящую функцию на  $\hbar^2$ , чтобы избавиться от отрицательных степеней  $\hbar$  в разложении, получаем

$$F_H^{\hbar}(\mathbf{t}) = \sum_{g=0}^{\infty} \hbar^{2g} F_H^g(\mathbf{t}). \quad (82)$$

Покажем, что топологической деформацией (81) из  $\tau$ -функции иерархии КП (26) действительно можно получить  $\tau$ -функцию иерархии  $\hbar$ -КП (76). Имеем

$$\tau_H^{\hbar}(\mathbf{t}) = \sum_{\lambda} e^{u\hbar c(\lambda)} s_{\lambda}(\beta_k = \delta_{k,1}) s_{\lambda}\left(\frac{t_1}{\hbar^2}, \frac{t_2}{\hbar^3}, \dots\right). \quad (83)$$

Можно показать (это вопросов не вызывает), что

$$\tau_H^{\hbar}(\mathbf{t}) = \sum_{\lambda} e^{u\hbar c(\lambda)} s_{\lambda} \left( \frac{1}{\hbar}, 0, 0, \dots \right) s_{\lambda} \left( \frac{\mathbf{t}}{\hbar} \right) \quad (84)$$

и что коэффициенты

$$C_{\lambda}^{\hbar} = e^{u\hbar c(\lambda)} s_{\lambda} \left( \beta_k = \frac{\delta_{k,1}}{\hbar} \right) \quad (85)$$

удовлетворяют соотношениям Плюкера. Это показывает, что  $\hbar$ -деформацией мы получаем  $\tau$ -функцию иерархии  $\hbar$ -КП. Для найденной функции было явно посчитано разложение по  $\mathbf{t}$  для первых порядков и проверено, что в неё действительно входят только чётные степени  $\hbar$ .

## 3 Иерархия ВКП

### 3.1 Билинейное тождество ВКП

*Билинейное тождество иерархии ВКП*

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \oint e^{\xi^{\mathbf{h}}(\mathbf{t}-\mathbf{t}', k)} \tau_{ВКП}(\mathbf{t} - 2[k^{-1}]) \tau_{ВКП}(\mathbf{t}' + 2[k^{-1}]) \frac{dk}{k} = \\ = \tau_{ВКП}(\mathbf{t}) \tau_{ВКП}(\mathbf{t}'), \end{aligned} \quad (86)$$

где

$$\mathbf{t} \pm [k^{-1}] \stackrel{\text{онп}}{=} \left\{ t_1 \pm k^{-1}, t_2 \pm \frac{1}{2}k^{-2}, t_3 \pm \frac{1}{3}k^{-3}, \dots \right\} \quad (87)$$

и

$$\xi^{\mathbf{h}}(\mathbf{t}, k) = \sum_{j \in \mathbb{Z}_{\text{неч}}^+} t_j k^j. \quad (88)$$

Первое уравнение иерархии ВКП в терминах производных Хироты

$$(D_1^6 - 5D_1^3 D_3 - 5D_3^2 + 9D_1 D_5) \tau_{ВКП} \cdot \tau_{ВКП}. \quad (89)$$

Что можно переписать как

$$\begin{aligned} -60 \left( \frac{\partial^2 F}{\partial t_1^2} \right)^3 - 30 \frac{\partial^4 F}{\partial t_1^4} \frac{\partial^2 F}{\partial t_1^2} + 30 \frac{\partial^2 F}{\partial t_1 \partial t_3} \frac{\partial^2 F}{\partial t_1^2} - \frac{\partial^6 F}{\partial t_1^6} + \\ + 5 \frac{\partial^2 F}{\partial t_3^2} - 9 \frac{\partial^2 F}{\partial t_1 \partial t_5} + 5 \frac{\partial^4 F}{\partial t_1^3 \partial t_3} = 0. \end{aligned} \quad (90)$$

### 3.2 $Q$ -полиномы Шура, соотношения Плюккера ВКП, гипергеометрические $\tau^{\text{ВКП}}$ -функции

Соотношения Плюккера для ВКП

$$c_{[\alpha_1, \dots, \alpha_k]} c_{[\alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4]} - c_{[\alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta_1, \beta_2]} c_{[\alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta_3, \beta_4]} + \\ + c_{[\alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta_1, \beta_3]} c_{[\alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta_2, \beta_4]} - c_{[\alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta_1, \beta_4]} c_{[\alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta_2, \beta_3]} = 0. \quad (91)$$

Простейшее соотношение Плюккера

$$c_{\emptyset} c_{\boxplus\boxplus} - c_{\square} c_{\boxplus\boxminus} + c_{\boxminus} c_{\boxplus\boxplus} - c_{\boxminus\boxminus} c_{\boxplus} = 0. \quad (92)$$

Проверено, что  $Q$ -полиномы Шура действительно удовлетворяют простейшему соотношению Плюккера.

Для определения гипергеометрических  $\tau$ -функций зададим функцию

$$r_\lambda = \prod_{w \in \lambda} r(c(w)), \quad (93)$$

где

$$c(w) = j, \quad 1 \leq i \leq l(\lambda), \quad 1 \leq j \leq \lambda_i. \quad (94)$$

Визуализация функции  $c(w)$  на таблице Юнга:

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| 1 | 2 | 3 |   |
| 1 | 2 |   |   |

Гипергеометрическими  $\tau$ -функциями ВКП будем называть функции вида

$$\tau(\mathbf{t}) = \sum_{\lambda} r_{\lambda} Q_{\lambda}(\beta) Q_{\lambda}(\mathbf{t}). \quad (95)$$

Данные функции действительно решают иерархию ВКП, т. к.  $Q$ -полиномы Шура удовлетворяют соотношениям Плюккера ВКП, а множители  $r(c(w))$  выносятся как общие. Например, для простейшего соотношения Плюккера общим множителем будет

$$r(1)^3 r(2)^2 r(3). \quad (96)$$

### 3.3 $\tau$ -функция спиновых чисел Гурвица

Следующая  $\tau$ -функция является решением иерархии ВКП:

$$\tau(\mathbf{p}, \bar{\mathbf{p}}) = \sum_{R \in \text{SP}} \left( e^{u[\Phi_R([3]) + \frac{1}{2} \Phi_R([1, 1])]} \right) Q_R\left(\frac{\mathbf{p}}{2}\right) Q_R\left(\frac{\bar{\mathbf{p}}}{2}\right). \quad (97)$$



### 3.4 Фермионный формализм и бозонно-фермионное соответствие

Нейтральные фермионы определяются как

$$\phi_m = \frac{\psi_m + (-1)^m \psi_{-m}^*}{\sqrt{2}},$$

$$\phi_m^* = \frac{\psi_m^* + (-1)^m \psi_{-m}}{\sqrt{2}}.$$

Откуда сразу можно заметить что

$$\phi_m^* = (-1)^m \phi_{-m}.$$

Благодаря этому свойству далее мы можем ограничиться рассмотрением лишь фермионов  $\phi_m$ . Прямой подстановкой можно получить каноническое коммутационное соотношение нейтральных фермионов

$$\{\phi_k, \phi_m\} = (-1)^k \delta_{k+m,0}, \quad (98)$$

а также их действие на вакуум «моря Дирака»

$$\phi_m |0\rangle = 0, \quad \langle 0| \phi_{-m} = 0, \quad m < 0.$$

Легко видеть, что

$$\langle 0| \phi_k \phi_m |0\rangle = \delta_{k+m,0} H[m],$$

где

$$H[m] = \begin{cases} 0, & m < 0, \\ \frac{1}{2}, & m = 0, \\ (-1)^m, & m > 0. \end{cases}$$

Коммутационные соотношения билинейных комбинаций нейтральных фермионов  $\phi_k \phi_m$

$$\begin{aligned} [\phi_a \phi_b, \phi_c \phi_d] &= \phi_a \phi_b \phi_c \phi_d - \phi_c \phi_d \phi_a \phi_b = \phi_a \left( (-1)^b \delta_{b+c,0} - \phi_c \phi_b \right) \phi_d - \\ &- \phi_c \left( (-1)^a \delta_{a+d,0} - \phi_a \phi_d \right) \phi_b = (-1)^b \delta_{b+c,0} \phi_a \phi_d - \left( (-1)^a \delta_{a+c,0} - \phi_c \phi_a \right) \phi_b \phi_d - \\ &- (-1)^a \delta_{a+d,0} \phi_c \phi_b + \phi_c \phi_a \left( (-1)^b \delta_{b+d,0} - \phi_b \phi_d \right) = (-1)^b \delta_{b+c,0} \phi_a \phi_d - \\ &- (-1)^a \delta_{a+c,0} \phi_b \phi_d + (-1)^b \delta_{b+d,0} \phi_c \phi_a - (-1)^a \delta_{a+d,0} \phi_c \phi_b. \end{aligned}$$

Элементами матричной алгебры Ли  $\mathfrak{go}(\infty)$  являются матрицы

$$F_{k,m} = (-1)^m E_{k,-m} - (-1)^k E_{m,-k}.$$

Их коммутационные соотношения

$$\begin{aligned} [F_{a,b}, F_{c,d}] &= (-1)^{b+d} [E_{a,-b}, E_{c,-d}] - (-1)^{b+c} [E_{a,-b}, E_{d,-c}] - \\ &\quad - (-1)^{a+d} [E_{b,-a}, E_{c,-d}] + (-1)^{a+c} [E_{b,-a}, E_{d,-c}] = \\ &= (-1)^{b+d} (\delta_{b+c,0} E_{a,-d} - \delta_{a+d,0} E_{c,-b}) - (-1)^{b+c} (\delta_{b+d,0} E_{a,-c} - \delta_{a+c,0} E_{d,-b}) - \\ &\quad - (-1)^{a+d} (\delta_{a+c,0} E_{b,-d} - \delta_{b+d,0} E_{c,-a}) + (-1)^{a+c} (\delta_{a+d,0} E_{b,-c} - \delta_{b+c,0} E_{d,-a}) = \\ &= (-1)^b \delta_{b+c,0} F_{a,d} - (-1)^a \delta_{a+c} F_{b,d} + (-1)^b \delta_{b+d,0} F_{c,a} - (-1)^a \delta_{a+d,0} F_{c,b} \end{aligned}$$

совпадают с коммутационными соотношениями билинейных комбинаций нейтральных фермионов. Значит представление алгебры  $\mathfrak{go}(\infty)$  может быть реализовано на введённом пространстве Фока элементами  $\phi_k \phi_m$ .

$$\phi_k \phi_m = \frac{1}{2} \left( \psi_k + (-1)^k \psi_{-k}^* \right) \left( \psi_m + (-1)^m \psi_{-m}^* \right) = ???.$$

Нормальное упорядочение на этот раз определим как

$$:\phi_k \phi_m: = \phi_k \phi_m - \langle 0 | \phi_k \phi_m | 0 \rangle.$$

Коммутационное соотношение алгебры нормально упорядоченных пар нейтральных фермионов

$$\begin{aligned} [:\phi_a \phi_b:, :\phi_c \phi_d:] &= (-1)^b \delta_{b+c,0} :\phi_a \phi_d: - (-1)^a \delta_{a+c,0} :\phi_b \phi_d: + (-1)^b \delta_{b+d,0} :\phi_c \phi_a: - \\ &\quad - (-1)^a \delta_{a+d,0} :\phi_c \phi_b: + (\delta_{c,b} \delta_{a,d} - \delta_{a-c,0} \delta_{b-d,0}) \left( (-1)^a H[b] - (-1)^b H[a] \right). \end{aligned}$$

## 4 Квантовая деформация иерархии ВКП

Аналогично деформации иерархии КП получаем первое уравнение  $\hbar$ -ВКП

$$\begin{aligned} -60 \left( \frac{\partial^2 F}{\partial t_1^2} \right)^3 - 30 \hbar^2 \frac{\partial^4 F}{\partial t_1^4} \frac{\partial^2 F}{\partial t_1^2} + 30 \frac{\partial^2 F}{\partial t_1 \partial t_3} \frac{\partial^2 F}{\partial t_1^2} - \hbar^4 \frac{\partial^6 F}{\partial t_1^6} + \\ + 5 \frac{\partial^2 F}{\partial t_3^2} - 9 \frac{\partial^2 F}{\partial t_1 \partial t_5} + 5 \hbar^2 \frac{\partial^4 F}{\partial t_1^3 \partial t_3} = 0. \quad (99) \end{aligned}$$