Неделя №5
Кинетические и электрические явления в твёрдых телах и металлах

Драчов Ярослав
Факультет общей и прикладной физики МФТИ

25 марта 2021 г.

2.65.

Решение. Для фононов можно использовать оценочную формулу для газовой кинетической теории
$$\varkappa_{ph} = \frac{1}{3} C s \Lambda.$$
При низких температурах $C \propto T^3$. Рассеяние фононов может происходить на других фононах, краях образца, дефектах. Время рассеяния на других фононах будет обратно пропорционально их концентрации (T^3). Следовательно, данный процесс будет вымерзать при понижении температуры, что и происходит ниже 7 K, согласно условию задачи. По-видимому также образцы содержат мало дефектов, раз теплопроводность зависит от толщины образца.

По аналогии с кнудсеновским течением газа длину свободного пробега Λ надо принять равной расстоянию между границами кристалла. Тогда увеличение толщины кристалла в 4 раза увеличит и Λ и $\varkappa$ тоже в 4 раза.

3.77.

Решение. При $T > \Theta$ можно для каждого атома применить теорему о равнораспределении энергии по степеням свободы, считая, что каждый атом находится в изотропном гармоническом потенциале, описываемом «жёсткостью» k:
$$\frac{3}{2} k_B T = k \frac{\overline{\xi^2}}{2} = k \frac{\overline{x^2 + y^2 + z^2}}{2}.$$
Коэффициент упругости «отдельной пружинки» k можно оценить, зная модуль Юнга. Действительно, если мы растягиваем весь кристалл с относительным удлинением ε, то мы просто растягиваем $n_{at} = a^{-3}$ «пружинок» в единице объёма на величину $a\varepsilon$. Приравняем две упругие энергии:
$$E \frac{\varepsilon^2}{2} = k n_{at} \frac{(a\varepsilon)^2}{2}.$$
Отсюда $k = Ea$. Соответственно
$$\overline{\xi^2} = \frac{3 k_B T}{Ea}.$$

Длина свободного пробега

$$\Lambda = \frac{1}{n_{at}\sigma} = \frac{1}{n_{at}\pi\overline{\xi^2}} = \frac{Ea^4}{3\pi k_B T} = 2\cdot 10^{-6} \text{ см.}$$

Из этого решения следует, что

$$\rho \equiv \frac{m}{ne^2\tau} = m\frac{v_F}{ne^2\Lambda} \propto T,$$

что наблюдается в большинстве металлов.

Ответ отличается от того, что в задачнике заменой n_e на n_{at} и цифрой 3 в знаменателе, возникающей из-за равнораспределения.

3.79.

Решение. Характерное время t, через которое пластинка «почувствует» изменение температуры, оценивается как d^2/D, где D — коэффициент диффузии. Это время также известно, как время «выравнивания».

Коэффициент диффузии есть отношение коэффициентов теплопроводности кристалла $\varkappa$ к его теплоёмкости C. При комнатных температурах теплоёмкость кристалла практически равна решёточной $C_{\text{реш}}$ и согласно закону Дюлонга-Пти $C = C_{\text{реш}} = 3nk_{\text{Б}}T$, где n — плотность атомов. Таким образом

$$D = \frac{\varkappa}{C_{\text{реш}}} = \frac{\varkappa}{nk_{\text{Б}}}.$$

Коэффициент теплопроводности $\varkappa$ для переноса тепла в газе со средней скоростью частиц v и длиной свободного пробега Λ равен

$$\varkappa = \frac{1}{3}C_V\Lambda v,$$

где C_V — теплоёмкость единицы объёма газа. При комнатных температурах в большинстве металлов почти весь тепловой поток переносят электроны. В применении к электронному газу в качестве v разумно взять v_F, а

$$C_V = C_{\text{эл}} = \frac{\pi^2}{2}nk_{\text{Б}}^2\frac{T}{\varepsilon_F} = \frac{\pi^2 nk_{\text{Б}}^2 T}{m_e v_F}\Lambda.$$

Таким образом, коэффициент диффузии

$$D = \frac{\varkappa}{C_{\text{реш}}} = \frac{\pi^2}{9}\frac{k_{\text{Б}}T\Lambda}{m_e v_F},$$

откуда искомое время

$$t \simeq \frac{d^2}{D} \approx \frac{9}{\pi^2}\frac{d^2 m_e v_F}{k_{\text{Б}}T\Lambda} \simeq 2\cdot 10^{-2} \text{ с},$$

где $v_F \simeq \dfrac{\hbar}{m_e a}\left(3\pi^2\right)^{1/3} \sim 10^8$ см/с (рассчитано для постоянной решётки $a \simeq 3$ Å).

3.80.

Решение. В стержне можно считать что тепловое равновесие поперёк устанавливается мгновенно по сравнению с тепловым равновесием вдоль и перенос тепла подчиняется одномерному уравнению теплопроводности:

$$c\frac{\partial T}{\partial t} = -\varkappa\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}.$$

Отсюда из размерности сразу понятно, какое будет время установления:

$$\tau \sim \frac{cL^2}{\varkappa}.$$

Поскольку температура много больше дебаевской, применима классическая теория теплоёмкости: $c = 3R\rho/\mu$ (здесь речь идёт о теплоёмкости на единицу объёма, R — газовая постоянная, $\mu = 64$ г/моль — молярная масса меди).

Имеем ответ

$$\tau = 3R\frac{\rho L^2}{\varkappa\mu} = 92 \text{ с}.$$

3.88.

Решение. Квазиклассическое описание (импульс как квантовое число) и понятие длины свободного пробега применимы только когда на длине свободного пробега укладывается несколько длин волн де-Бройля. Минимальная металлическая проводимость реализуется, когда длина свободного пробега равна $2\pi/k_F$.

Подставляем в формулу Друде:

$$\sigma_{\min} = \frac{ne^2\tau}{m} = \frac{ne^2\cdot 2\pi\hbar}{p_F v_F m} = \frac{ne^2\cdot 2\pi}{\hbar k_F^2} = \frac{2\pi ne^2}{\hbar\left(3\pi^2 n\right)^{2/3}} = 2n^{1/3}(9\pi)^{-1/3}\frac{e^2}{\hbar}.$$

С точностью до численного множителя порядка 1 это совпадает с ответом задачника и даёт $2{,}8\cdot 10^{-4}$ Ом $\cdot$ см.