Теорминимум по теормеху

Драчов Ярослав
Факультет общей и прикладной физики, МФТИ

28 июня 2020 г.

Исправления

Содержание

Исп.

Первое задание

1 Определение положения равновесия

Определение. Положение системы материальных точек, определяемое в некоторой системе отсчёта обобщёнными координатами $q_j = q_j^n$ $\left(j = \overline{1, n}\right)$, называется *положением равновесия* для наблюдателя, связанного с этой системой отсчёта, если система материальных точек, будучи приведена в это положение с нулевыми скоростями $\dot{q}_j^0$ $\left(j = \overline{1, n}\right)$, остаётся в нём сколь угодно долго.

Положение равновесия ред.

2 Устойчивое положение равновесия

Пусть поставлена задача Коши для нахождения движения системы:

Добавлена система дифуров, описывающих движение

$$\mathbf{f}\left(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}, t\right) = \mathbf{0}, \qquad \mathbf{q}(t_0) = \mathbf{q}^0, \qquad \dot{\mathbf{q}}(t_0) = \dot{\mathbf{q}}^0.$$

Определение. Положение равновесия $\mathbf{q} = \mathbf{0}$ называется *устойчивым*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta = \delta(\varepsilon)$, что для всех $t > t_0$ выполняются неравенства

$$|q_i(t)| < \varepsilon, \qquad |\dot{q}_i(t)| < \varepsilon \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

где $q_i(t)$ — решения поставленной задачи Коши, при условии, что в начальный момент $t = t_0$

$$|q_i^0| < \delta, \qquad |\dot{q}_i^0| < \delta.$$

3 Теорема Лагранжа-Дирихле

Теорема (Лагранжа-Дирихле)**.** *Если в положении равновесия консервативной системы потенциальная энергия имеет строгий локальный минимум, то это положение равновесия устойчиво.*

4 Первая теорема Ляпунова о неустойчивости

Теорема (Ляпунова, 1-я)**.** *Если потенцмальная энергия консервативной системы в положении равновесия не имеет минимума и это узнаётся уже по членам второго порядка в разложении функции* Π *в ряд в окрестности положения равновесия без необходимости рассматривания членов высших порядков, то положение равновесия неустойчиво.*

5 Вторая теорема Ляпунова о неустойчивости

Теорема (Ляпунова, 2-я)**.** *Если в положении равновесия потенциальная энергия имеет максимум и это узнаётся по членам наименее высокого порядка, которые действительно присутствуют в разложении этой функции в ряд в окрестности положения равновесия, то это положение равновесия неустойчиво.*

6 Нормальные координаты

Определение. Обобщённые координаты θ_j, в которых кинетическая и потенциальная энергия системы имеют вид

$$T = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\dot{\theta}_j^2, \qquad \Pi = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\theta_j^2,$$

называются *нормальными.*

Привести систему к нормальным координатам можно в случае, если кинетическая энергия в первоначальных переменных — положительно-определённая квадратичная форма скоростей, а потенциальная энергия произвольная квадратичная форма координат.

Добавлено условие приводимости к нормальной форме

В нормальных координатах лианеризованные уравнения движения в окрестности положения равновесия имеют вид n не связанных друг с другом уравнений второго порядка

$$\ddot{\theta}_j + \lambda_j\theta_j = 0, \quad (j = 1, 2, \dots, n).$$

7 Асимптотически устойчивое положение равновесия

Пусть поставлена задача Коши для нахождения движения системы:

$$\mathbf{f}\left(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}, t\right) = \mathbf{0}, \qquad \mathbf{q}(t_0) = \mathbf{q}^0, \qquad \dot{\mathbf{q}}(t_0) = \dot{\mathbf{q}}^0.$$

Добавлена система дифуров, в соответствии с этим отредактирована формулировка

Определение. Положение равновесия $\mathbf{q} = \mathbf{0}$ называется *асимптотически устойчивым*, если оно устойчиво и, если, кроме того, существует такая δ-окрестность точки $\mathbf{q} = \mathbf{0}$, $\dot{\mathbf{q}} = 0$, что для всех $|q_j^0| < \delta$, $|\dot{q}_j^0| < \delta$ выполняются условия

$$\lim_{t\to\infty} q_j(t) = 0, \qquad \lim_{t\to\infty} \dot{q}_j(t) = 0, \qquad (j = 1, \dots, n),$$

где $q_j(t)$ — решения поставленной задачи Коши.

8 Теорема Ляпунова о лианеризованных системах

Теорема (Ляпунова о лианеризованных системах)**.** *Если все корни характеристического уравнения*

$$\det \|\mathbf{A}\lambda^2 + \mathbf{B}^*\lambda + (\mathbf{C} + \mathbf{C}^*)\| = 0$$

системы дифференциальных уравнений линейного приближения

$$\mathbf{A}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}^*\dot{\mathbf{q}} + (\mathbf{C} + \mathbf{C}^*)\mathbf{q} = 0$$

имеют отрицательные действительные части, то положение равновесия $q = 0$ *исходной* стационарной *системы, описываемой уравнениями*

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j, \qquad Q_j = -\frac{\partial V}{\partial q_j} + Q_j^* \quad (j = 1, \ldots, n),$$

асимтотически устойчиво. Если хотя бы один корень характеристического уравнения имеет действительную часть, то положение равновесия, определяемое системой, неустойчиво.

Добавлено упоминание стационарности системы, звёздочки не убирал, они общность не умаляют вроде, а показывают что в системе связано с обобщёнными силами

9 Критерии Рауса-Гурвица и Льенара-Шипара устойчивости многочлена

Определение. Назовём *матрицей Гурвица* квадратную матрицу m-го порядка

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \ldots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \ldots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \ldots & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & \ldots & 0 \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & a_m \end{pmatrix}.$$

Составим главные миноры матрицы Гурвица (*определители Гурвица*)

$$\Delta_1 = a_1,\ \Delta_2 = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{pmatrix},\ \Delta_3 = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{pmatrix}, \ldots, \Delta_m = a_m\Delta_{m-1}.$$

Теорема (Критерий Рауса-Гурвица)**.** *Для того чтобы все корни уравнения*

$$a_0\lambda^m + a_1\lambda^{m-1} + \ldots + a_{m-1}\lambda + a_m = 0$$

с вещественнными коэффициентами и положительным старшим коэффициентом a_0 *имели отрицательные вещественные части, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства*

$$\Delta_1 > 0, \quad \Delta_2 > 0, \quad \ldots, \quad \Delta_m > 0.$$

Теорема (Критерий Льенара-Шипара)**.** *Для того чтобы многочлен* $f(\lambda) \equiv a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n$ *при* $a_0 > 0$ *имел все корни с отрицательными вещественными частями, необходимо и достаточно, чтобы*

Добавлен критерий Льенара-Шипара

1. *все коэффициенты многочлена $f(\lambda)$ были положительны*
$$a_1 > 0, \qquad a_2 > 0, \qquad \ldots, \qquad a_n > 0;$$
2. *имели место детерминантные неравенства*
$$\Delta_{n-1} > 0, \qquad \Delta_{n-3} > 0, \qquad \ldots$$

(здесь, как и ранее, Δ_k обозначает определитель Гурвица k-го порядка).

10 Теорема Ляпунова об устойчивости/асимптотической устойчивости (функция Ляпунова)

Теорема (Ляпунова, об устойчивости движения)**.** *Если дифференциальные уравнения возмущённого движения таковы, что существует знакоопределённая функция V, производная которой $\dot{V}$ в силу этих уравнений является или знакопостоянной функцией противоположного знака с V, или тождественно равнойнулю, то невозмущённое движение устойчиво.*

здесь упомянуто про тождественное равенство нулю, полуопределённость всё же больше для форм подходит, я пока что решил не исправлять

Теорема (Ляпунова, об асимптотической устойчивости)**.** *Если дифференциальные уравнения возмущённого движения таковы, что существует знакоопределённая функция $V(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, производная которой $\dot{V}$ в силу этих уравнений есть знакоопределённая функция противоположного знака с V, то невозмущённое движение асимптотически устойчиво.*

11 Теорема Барбашина-Красовского

Формулировка по Амелькину

Теорема (Барбашина-Красовского)**.** *Пусть существует функция $V(\mathbf{x})$, для которой в некоторой окрестности положения равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ выполняются условия:*

1. *Её производная по времени, вычисленная в силу уравнений*
$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \tag{*}$$
знакоотрицательна, т. е.
$$\dot{V}\Big|_{(*)} = \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}}\dot{\mathbf{x}}\Big|_{(*)} = \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{f} \leqslant 0.$$
2. *Множество X^0 точек $\mathbf{x}$, в которых производная $\dot{V}$ равна нулю:*
$$X^0: \ \dot{V}(\mathbf{x})\Big|_{(*)} = \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{f} = 0$$
кроме $\mathbf{x}(t) = \mathbf{0}$ не содержит других целых траекторий системы (*). ($\mathbf{x}(t) = \mathbf{0}$ — единственное решение, полностью лежащее на множестве X^0).

Тогда

а) Если функция $V(\mathbf{x})$ имеет строгий минимум в точке $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, то это положение асимптотически устойчиво.

б) Если в точке $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ функция $V(\mathbf{x})$ не имеет минимума (включая строгий), то это положение неустойчиво.

12 Теорема Четаева о неустойчивости

Теорема (Четаева, о неустойчивости)**.** *Если дифференциальные уравнения возмущённого движения таковы, что существует функция* $V(x_1, x_2, \dots, x_m)$ *такая, что в сколь угодно малой окрестности*

$$|x_i| < h \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

существует область $V > 0$ *и во всех точках области* $V > 0$ *производная* $\dot{V}$ *в силу этих уравнений принимает положительные значения, то невозмущённое движение неустойчиво.*

13 Понятие о бифуркации положений равновесия

Дифференциальные уравнения динамических систем часто зависят не только от фазовых переменных, но и от некоторых параметров. Иногда изменение параметров приводит к качественным перестройкам структуры фазовых траекторий системы — изменениям количества положений равновесия, характера их устойчивости, кардинальным трансформациям траекторий и т. п. В окрестности определённых значений параметров перестройки происходят при сколь угодно малом изменении параметров и называются *бифуркациями.*

14 Бифуркация Андронова-Хопфа

Новые определения

Определение. *Предельным циклом* векторного поля на фазовой плоскости или, более обобщённо, на каком-либо думерном многообразии называется замкнутая (периодическая) траектория этого векторного поля, в окрестности которой нет других периодических траекторий.

Определение. *Бифуркация Андронова-Хопфа* — локальная бифуркация векторного поля на плоскости, в ходе которой особая точка-фокус теряет устойчивость при переходе пары её комплексно-сопряжённых собственных значений через мнимую ось. При этом либо из особой точки рождается небольшой устойчивый предельный цикл, либо, наоборот, небольшой неустойчивый предельный цикл в момент бифуркации схлопывается в эту точку.

15 Метод Пуанкаре приведения к нормальной форме. Понятие резонанса

Исп.

Определение. *Нормальной формой* системы

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} = [x_1, \dots, x_n]^T, \quad \mathbf{f} = [f_1, \dots, f_n]^T$$

называется форма содержащая лишь линейные и резонансные слагаемые.

При помощи разложения в ряд Тейлора функции $\mathbf{f}$ в окрестности положения равновесия выделим в данной системе линейные слагаемые:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \boldsymbol{g}(\mathbf{x}), \quad \boldsymbol{g} = [g_1, \dots, g_n]^T,$$

$$g_i(\mathbf{x}) = \sum_{k_1, \dots, k_n} g^i_{k_1, \dots, k_n} x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n}, \quad k_1 + \dots + k_n \geqslant 2.$$

Здесь $\mathbf{A}$ — матрица с постоянными коэффициентами размера $n \times n$, $g_{k_1,\ldots,k_n}$ — постоянные коэффициенты в полиномах $\boldsymbol{g}$.

Определение. *Нормализующим преобразованием* (вплоть до степени k) называется последовательность преобразований

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{y} + \mathbf{p}(\mathbf{y}), \quad \mathbf{p}(\mathbf{y}) = [p_1, \ldots, p_n]^T,$$
$$p_i(\mathbf{y}) = \sum_{k_1,\ldots,k_n} p^i_{k_1,\ldots,k_n} y_1^{k_1} \ldots y_n^{k_n}, \quad k_1 + \ldots + k_n = k$$

с полиномиальными коэффициентами

$$p^i_{k_1,\ldots,k_n} = \frac{g^i_{k_1,\ldots,k_n}}{k_1\lambda_1 + \ldots + k_n\lambda_n - \lambda_i},$$

приводящее систему к её нормальной форме (вплоть до слагаемых степени k).

Определение. Нелинейные слагаемые системы, показатели $k_1, \ldots, k_n$ которых таковы, что выполняется $\lambda_i = k_1\lambda_1 + \ldots k_n\lambda_n$, называются *резонансными.*

В соответствии с описанным выше алгоритмом все нерезонансные слагаемые могут быть исключены из правой части системы при помощи последовательно применяемых полиномиальных замен. В то же время резонансные слагаемые не могут быть ни исключены, ни каким-либо образом ими преобразованы.

16 Вынужденные колебания под действием периодической силы. Частотная характеристика, амплитудно-фазовая характеристика. Необходимые и достаточные условия возникновения резонанса в таких системах.

Определение. Колебания, которые возникают благодаря наличию вынуждающей силы, зависящей явно от времени, и к которым в пределе стремится суммарное движение, назывют *вынужденными колебаниями.*

Представим уравнения линейного приближения стационарной системы в виде

$$\sum_{k=1}^{n} (a_{jk}\ddot{q}_k + b_{jk}\dot{q}_k + c_{jk}q_k) = Q_j(t) \quad (j = 1, \ldots, n),$$

где $Q_j(t)$ — зависящие явно от времени части обобщённых сил. Предполагается, что в процессе движения они остаются малыми по модулю и не выводят систему из малой окрестности положения равновесия.

В связи с тем, что данная система уравнений является линейной, а для линейных систем имеет место принцип суперпозиции, можно рассмотреть движение системы под действием какой-либо одной силы из $Q_j(t)$ $(j = 1, \ldots, n)$, предположив, что все остальные равны нулю. Определив порознь движения, возникающие под действием каждой из таких обобщённых сил, их следует затем сложить.

Учитывая это обстоятельство, положим

$$Q_2(t) = Q_3(t) = \ldots = Q_n(t) = 0,$$

т. е. будем считать, что отлична от нуля только обобщённая сила $Q_1(t)$, относящаяся к первой обобщённой координате, а все остальные обобщённые силы такого рода равны нулю.

Предположим, что обобщённая сила Q_1 является гармонической функцией от t,

$$Q_1(t) = A \sin \Omega t.$$

Добавлено упоминание гармоничности

Здесь A — амплитуда, а Ω — частота внешней вынуждающей силы Q_1. Если же в системе присутствуют обобщённые периодические силы Q_j, которые гармоническими функциями от t не являются, то их мы можем представить в виде ряда Фурье гармонических функций и далее работать с этим рядом.

Введём обозначения

$$d_{jk}(i\Omega) = a_{jk}(i\Omega)^2 + b_{jk}(i\Omega) + c_{jk},$$

$$\Delta = \det \|d_{jk}(i\Omega)\| = \begin{pmatrix} d_{11}(i\Omega) & \cdots & d_{1n}(i\Omega) \\ \vdots & & \vdots \\ d_{n1}(i\Omega) & \cdots & d_{nn}(i\Omega) \end{pmatrix},$$

$$W_{1k}(i\Omega) = \frac{\Delta_{1k}}{\Delta},$$

где Δ_{1k} — алгебраическое дополнение расположенного в первой строке и k-ом столбце элемента определителя Δ. Тогда при поиске частного решения неоднородной системы дифференциальных уравнений в виде $\tilde{q}_f = Be^{i\Omega t}$ и, выделяя в последствии мнимую часть, получим

$$q_k = A|W_{1k}(i\Omega)| \sin[\Omega t + \arg W_{1k}(i\Omega)] \quad (k = 1, \ldots, n).$$

Определение. Введённая выше функция $W_{1k}(i\Omega)$ называется *частотной характеристикой системы*, или, как говорят иногда, её *амлитудно-фазовой характеристикой.*

Определение. Если отдельно рассмотреть изменение модуля и аргумента вектора $W(i\Omega)$ в зависимости от Ω, то получатся характеристики, которые называются соответственно *амплитудной* и *фазовой* характеристиками системы.

Определение. Если амплитудная характеристика системы при некотором значении $\Omega = \Omega^*$ имеет отчётливо выраженный пик, то при одной и той же амплитуде внешней силы Q_1 амплитуда отклика резко возрастает, когда частота внешней силы приближается к значению $\Omega = \Omega^*$. Это явление называют *резонансом (в геометрическом смысле).*

Необходимые и достаточные условия резонанса

Определение. *Резонансом (в смысле существенного изменения частного решения)* будем называть случай, когда система не имеет частного решения представленного суперпозицией гармонических функций с частотой внешней вынуждающей силы.

Пусть

$$A = \|a_{jk}\|, \qquad B = \|b_{jk}\|, \qquad C = \|c_{jk}\|, \qquad \mathbf{Q}(t) = \mathbf{a}\sin\Omega t.$$

Тогда неразрешимость матричного уравнения

$$(-A\omega^2 + iB\omega + C)\mathbf{b} = \mathbf{a}$$

для любого вектора обобщённых сил $\mathbf{Q}(t)$, действующих в системе будет *необходимым и достаточным условием резонанса (в смысле существенного изменения частного решения).*

В данном случае условие

$$\det(-A\omega^2 + iB\omega + C) = 0$$

будет *необходимым.*

Второе задание

1 Понятие краевой задачи для лагранжевых систем, теорема Гамильтона- Остроградского, формула изменения лагранжиана при замене координат и времени, теорема Нётер

Добавлены определение окольного пути, действия по Гамильтону, поставлена вариационная задача

Определение. *Прямым путём* системыназывают путь этой системы из точки A в точку B в $(n+1)$-мерном расширенном координатном пространстве $q_1, \ldots, q_n, t$, удовлетворяющий соответствующим уравнениям Лагранжа.

Определение. *Окольным путём* системы называют путь этой системы из точки A в точку B в $(n+1)$-мерном расширенном координатном пространстве $q_1, \ldots, q_n, t$, не являющийся прямым.

Рассмотрим произвольную голономную систему с независимыми координатами $q_1, \ldots, q_n$ и функцией Лагранжа $L\left(t, q_i, \dot{q}_i\right)$.

Определение. Интеграл

$$W = \int\limits_{t_0}^{t_1} L dt$$

называется *действием (по Гамильтону)* за промежуток времени (t_0, t_1).

При построении прямого пути системы решается вариационная задача о нахождении экстремали функционала

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} L\left(t, q_i, \dot{q}_i\right) dt$$

с заданными граничными условиями $q_i(t_0) = q_i^0, \dot{q}_i(t_0) = \dot{q}_i^0, q_i(t_1) = q_i^1, \dot{q}_i(t_1) = \dot{q}_i^1 \left(i = \overline{1, n}\right)$.

Теорема (Гамильтона-Остроградского)**.** *Прямой путь является экстремалью рассматриваемой вариационной задачи — на прямом пути действие по Гамильтону достигает стационарного значения.*

Рассмотрим преобразования

$$q_j = \varphi_j(q^*, t^*), \quad t = \psi(q^*, t^*), \quad j = 1, \ldots, n,$$

где q^* и t^* — «новые» координаты и время, q и t — «старые» координаты и время, а φ_j и ψ — достаточно гладкие функции. Предположим, что данные преобразования разрешимы относительно переменных q^* и t^*.

Формула изменения лагранжиана при замене координат и времени тогда выглядит следующим образом

$$L^*(q^*, dq^*/dt^*, t^*) = L(\varphi, d\varphi/d\psi, \psi)(d\psi/dt^*),$$

где, в свою очередь,

$$\frac{d\varphi_j}{d\psi} = \frac{\displaystyle\sum_k \frac{\partial \varphi_j}{\partial q_k^*}\frac{dq_k^*}{dt^*} + \frac{\partial \varphi_j}{\partial t^*}}{\displaystyle\sum_k \frac{\partial \psi}{\partial q_k^*}\frac{dq_k^*}{dt^*} + \frac{\partial \psi}{\partial t^*}},$$

а $d\psi/dt^*$ совпадает со знаменателем данной дроби.

Теорема (Нётер)**.** *Пусть задана система движущихся в потенциальном поле материальных точек, имеющая лагранжиан $L(q, dg/dt, t)$, и пусть существует однопараметрическое семейство преобразований*

$$q_j^* = \varphi_j(q, t, \alpha) \quad (j = 1, \ldots, n), \qquad t^* = \psi(q, t, \alpha),$$

(φ, ψ — достаточно гладкие, обратимые функции) удовлетворяющее условиям Упомянута гладкость

- *тождественности при $\alpha = 0$, т. е.*

$$\varphi_j(q, t, 0) = q_j \quad (j = 1, \ldots, n), \qquad \psi(q, t, 0) = t;$$

- *существования обратного преобразования:*

$$q_j = \tilde{\varphi}_j(q^*, t^*, \alpha) \quad (j = 1, \ldots, n), \qquad t = \tilde{\psi}(q^*, t^*, \alpha).$$

Пусть, далее, лагранжиан L инвариантен по отношению к таким преобразованиям, т. е. «новый» лагранжиан L^* (вычисленный по формуле выше) не зависит от α и как функция $q^*, dq^*/dt^*, t^*$ имеет совершенно такой же вид, как и «старый» лагранжиан L как функция $q, dq/dt, t$. Тогда существует функция $\Phi(q, p, t)$, которая не изменяется во время движения этой системы, т. е. является первым интегралом движения. Эта функция имеет вид

$$\Phi(q, p, t) = \sum p_j \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial \alpha}\right)\bigg|_{\alpha=0} - H \left(\frac{\partial \psi}{\partial \alpha}\right)\bigg|_{\alpha=0},$$

где H — гамильтониан рассматриваемой системы.

2 Переменные Гамильтона. Обобщенные импульсы

В предположении, что

Добавлено условие на гессиан

$$\det \left\| \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_j \partial \dot{q}_k} \right\|_{j,\,k=1}^{n} \neq 0,$$

состояние системы можно задавать при помощи параметров q_i, p_i, t, где p_i — *обобщённые импульсы*, определяемые равенствами

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Определение. Переменные q_i, p_i, t называют *переменными Гамильтона.*

3 Функция Гамильтона через функцию Лагранжа

В предположении, что

Добавлено условие на гессиан

$$\det \left\| \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_j \partial \dot{q}_k} \right\|_{j,\,k=1}^{n} \neq 0,$$

функцию Гамильтона через функцию Лагранжа можно получить при помощи *преобразования Лежандра* функции $L(q_i, \dot{q}_i, t)$ по переменным $\dot{q}_i$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$

$$H(q_i, p_i, t) = \sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i - L(q_j, \dot{q}_j, t),$$

где величины $\dot{q}_i$ выражены через q_j, p_j, t.

4 Функция Гамильтона через обобщенный потенциал и кин.энергию (случай обобщенно консервативной системы) (см. 286-287 стр. Маркеева)

Система называется *обобщённо консервативной*, если её функция Гамильтона не зависит явно от времени. В этом случае

$$H(q_i, p_i) = T_2 - T_0 + \Pi = h,$$

где

$$T_2 = \frac{1}{2} \sum_{j,\,k=1}^{m} a_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k, \qquad T_0 = a_0.$$

5 Канонические уравнения Гамильтона

Определение. *Каноническими уравнениями Гамильтона* называются уравнения

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad (i = 1, 2, \ldots,).$$

6 Понятие первого интеграла динамической системы (не только для гамильтоновых систем!)

Изм.

Определение. *Первым интегралом дифференциальных уравнений движения* называется функция $I(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ отличная от постоянной, производная которой в силу уравнений движения

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{q}} &= \mathbf{f}_q(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t), \\ \dot{\mathbf{p}} &= \mathbf{f}_p(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t), \end{aligned}$$

равна нулю:

$$\frac{\partial I}{\partial \mathbf{q}} \mathbf{f}_q + \frac{\partial I}{\partial \mathbf{p}} \mathbf{f}_p + \frac{\partial I}{\partial t} = 0.$$

7 Понятие скобок Пуассона, их свойства (дистрибутивность, антикоммутативность etc). Критерий первого интеграла гамильтоновой системы

Определение. Пусть u и v — дважды непрерывно дифференцируемые функции от $q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n, t$. Выражение

$$(u, v) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial q_i} \frac{\partial v}{\partial p_i} - \frac{\partial u}{\partial p_i} \frac{\partial v}{\partial q_i} \right)$$

называют *скобкой Пуассона* функций u и v.

Свойства скобок Пуассона:

1. $(u, v) = -(v, u)$,
2. $(cu, v) = c(u, v) \quad (c = \text{const})$,
3. $(u + v, w) = (u, w) + (v, w)$,
4. $\dfrac{\partial}{\partial t}(u, v) = \left(\dfrac{\partial u}{\partial t}, v \right) + \left(u, \dfrac{\partial v}{\partial t} \right)$,
   $\dfrac{\partial}{\partial q_i}(u, v) = \left(\dfrac{\partial u}{\partial q_i}, v \right) + \left(u, \dfrac{\partial v}{\partial q_i} \right)$,
   $\dfrac{\partial}{\partial p_i}(u, v) = \left(\dfrac{\partial u}{\partial p_i}, v \right) + \left(u, \dfrac{\partial v}{\partial p_i} \right)$,
5. $((u, v), w) + ((v, w), u) + ((w, u), v) = 0$.

Добавлены производные по q_i, p_i

Необходимое и достаточное условие того, что f — первый интеграл, можно записать в виде равенства

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (f, H) = 0.$$

8 Трубка прямых путей. Интегральные инварианты Пуанкаре и Пуанкаре-Картана

Определение. Множество прямых путей «выпускаемых» из замкнутого несамопересекающегося контура C_0 в $(2n+1)$-мерном расширенном фазовом пространстве q, p, t динамической системой, движущейся в потенциальном поле и имеющей гамильтониан H образует *трубку прямых путей.*

Определение. Контурный интеграл

$$J = \oint\limits_C \left(\sum p_j dq_j - H dt\right),$$

взятый по контуру C, охватывающему трубку прямых путей называют *интегральным инвариантом Пуанкаре-Картана.*

Данный интеграл, взятый по любому контуру C^*, охватывающему определённую трубку прямых путей, не зависит от выбора этого контура на трубке.

Определение. Контурный интеграл, рассматриваемый только на «одновременных» контурах $\widetilde{C}$, имеет вид

$$J_1 = \oint\limits_{\tilde{C}} \sum p_j dq_j = \mathrm{const}$$

и называется *универсальным интегральным инвариантом Пуанкаре.*

Особенность интегрального инварианта, взятого в такой форме, состоит в том, что в подынтегральное выражение уже не входит гамильтониан, и следовательно, этот интегральный инвариант оказывается *одинаковым для всех динамических систем*, движущихся в произвольных потенциальных полях.

9 Теорема Лиувилля о сохранении фазового объема. Общая формула для изменения фазового объема произвольной динамической системы (не только гамильтоновой!)

Теорема (Лиувилля)**.** *Фазовый объём V не зависит от t, т. е. является инвариантом движения.*

Пусть задана система обыкновенных дифференциальных уравнений $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, решения которой продолжаются на всю ось времени. Пусть также $D(t)$ — область в пространстве $\{\mathbf{x}\}$ и $v(t)$ — её объём, тогда справедлива следующая формула

$$\left.\frac{dv(t)}{dt}\right|_{t=t_0} = \int\limits_{D(t_0)} \operatorname{div} \mathbf{f}\, dx \quad (dx = dx_1 \ldots dx_n).$$

10 Классификация интегральных инвариантов, теорема Ли Хуачжуна

Универсальный относительный интегральный инвариант первого порядка в общем виде можно записать так

$$\tilde{J}_1 = \oint\limits_{\tilde{C}} \sum \left[A_j(q,p,t)\delta q_j + B_j(q,p,t)\delta p_j \right].$$

Теорема. *Любой универсальный относительный инвариант первого порядка $\tilde{J}_1$ может отличаться от инварианта Пуанкаре лишь постоянным множителем, т. е. для любого J_1 существует константа c (одна и та же на всех трубках прямых путей рассматриваемой гамильтоновой системы) такая, что*

$$\tilde{J}_1 = cJ_1.$$

Добавлен комментарий

11 Канонические преобразования. Производящие функции

Рассмотрим преобразование

$$q_j^* = \varphi(q,p,t), \quad p_j^* = \psi(q,p,t) \quad (j = 1,\ldots,n),,$$

которое переводит «старые» гамильтоновы переменные p и q в «новые» гамильтоновы переменные q^* и p^*

Определение. Преобразование выше называется *каноническим*, если оно переводит любую гамильтонову систему

$$\frac{dq_j}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \quad \frac{dp_j}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_j} \quad (j = 1,\ldots,n)$$

в новую гамильтонову систему

$$\frac{dq_j^*}{dt} = \frac{\partial H^*}{\partial p_j^*}, \quad \frac{dp_j^*}{dt} = -\frac{\partial H^*}{\partial q_j^*} \quad (j = 1,\ldots,n).$$

Теорема. *Для того чтобы рассматриваемое преобразование было каноническим, необходимо и достаточно, чтобы существовали такая функция $F(q,p,t)$ и такое число c, чтобы тождественно выполнялось равенство*

$$\sum \psi_j \delta\varphi_j - c\sum p_j \delta q_j = -\delta F(q,p,t).$$

В последней формуле δ — оператор дифференцирования функции от q, p, t при «замороженном» времени, т. е.

$$\delta\varphi_j = d\varphi_j - \frac{\partial \varphi_j}{\partial t}dt, \quad \delta F = dF - \frac{\partial F}{\partial t}dt..$$

Определение. Функцию $F(q,p,t)$ из последней теоремы называют *производящей.*

12 Замена гамильтониана при каноническом преобразовании, (q, p) описание

Теорема. *Пусть преобразование из предыдущего пункта является каноническим, причём с и $F(q, p, t)$, при которых удовлетворяется тождество последней теоремы известны. Тогда «новый» гамильтониан H^* определяется по «старому» гамильтониану H, если в функции*

$$H^* = cH + \frac{\partial F}{\partial t} + \sum \psi_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial t}$$

выразить переменные q и p через q^* и p^* при помощи обратных преобразований (если таковые существуют).

13 Свободные преобразования, (q, q^*) описание. Формулы преобразования импульсов гамильтониана

Преобразование из пункта 11 называется *свободным*, если для первых n его уравнений

$$q_j^* = \varphi_j(q, p, t) \quad (j = 1, \dots, n)$$

якобиан отличен от нуля:

$$\det \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial p} \right\| = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial p_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial p_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial 1} & \dots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial p_n} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Тогда для функции $S(q, q^*, t) = F(q, p, t)$ можем записать следующие соотношения

$$\frac{\partial S}{\partial q_j} = cp_j, \qquad \frac{\partial S}{\partial q_j^*} = -p_j^* \quad (j = 1, \dots, n),$$

и, кроме того, равенство связывающее «старый» и «новый» гамильтонианы:

$$H^* = cH + \frac{\partial s}{\partial t}.$$

14 *«Наивная» теория возмущений, использование (q, p^*) описания для задания преобразований, близких к тождественным. Метод Биркгофа, понятие резонанса*

🤔🤔🤔

15 Уравнение Гамильтона-Якоби. Полный интеграл уравнения Гамильтона-Якоби

Определение. Уравнением Гамильтона-Якоби называют следующее выражение

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}, t\right) = 0.$$

Определение. Любая функция $S(q, \alpha, t)$, обращающая уравнение Гамильтона-Якоби в тождество, зависящая от n констант α и удовлетворяющая условию

$$\det \left\| \frac{\partial^2 S}{\partial q_k \partial \alpha_j} \right\|_{k,\,j=1}^{n} \neq 0$$

называется *полным интегралом* уравнения Гамильтона-Якоби.

16 Понятие адиабатических инвариантов динамических систем

Пусть $H(p, q;\, \lambda)$ — фиксированная дважды непрерывно дифференцируемая функция λ. Положим $\lambda = \varepsilon t$ и будем рассматривать полученную систему с медленно меняющимся параметром $\lambda = \varepsilon t$:

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \quad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad H = H(p, q;\, \varepsilon t). \tag{*}$$

Определение. Величина $I(p, q;\, \lambda)$ называется *адиабатическим инвариантом* системы (*), если для всякого $\varkappa > 0$ существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что если $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, $0 < t < 1/\varepsilon$, то

$$|I(p(t), q(t);\, \varepsilon t) - I(p(0), q(0);\, 0)| < \varkappa.$$

17 Переменные действие угол. Условие возможности перехода к ним, формулы перехода (случай одной степени свободы)

hi

18 Понятие интегрируемых гамильтоновых систем. Теорема Лиувилля-Арнольда

hi

19 Резонансные и нерезонансные торы

hi

20 *Невырожденность и изоэнергетическая невырожденность гамильтониана*

hi

21 *КАМ-теорема*

hi

22 *Важные следствия КАМ-теоремы для систем с двумя степенями свободы, обладающих свойством изоэнергетической и обычной невырожденности*

hi

23 *Понятие детерминированного хаоса в динамических системах*

hi

24 *Сечения Пуанкаре*

hi

25 *Фрактальная размерность*

hi