Теорминимум по теормеху

Драчов Ярослав
Факультет общей и прикладной физики, МФТИ

24 мая 2020 г.

Первое задание

1 Определение положения равновесия

Определение. Некоторое положение системы тогда и только тогда является её *положением равновесия*, когда в этом положении все обобщённые силы равны нулю:

$$Q_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} = 0, \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

где Π — потенциальная энергия системы, которая в случае консервативной системы явно от времени не зависит.

2 Устойчивое положение равновесия

Определение. Положение равновесия $q_1 = q_2 = \ldots = 0$ называется *устойчивым*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta = \delta(\varepsilon)$, что для всех $t > t_0$ выполняются неравенства

$$|q_i(t)| < \varepsilon, \quad |\dot{q}_i(t) < \varepsilon \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

при условии, что в начальный момент $t = t_0$

$$|q_i(t_0)| < \delta, \quad |\dot{q}_i(t_0) < \delta|.$$

3 Теорема Лагранжа-Дирихле

Теорема (Лагранжа-Дирихле). *Если в положении равновесия консервативной системы потенциальная энергия имеет строгий локальный минимум, то это положение равновесия устойчиво.*

4 Первая теорема Ляпунова о неустойчивости

Теорема (Ляпунова, 1-я). *Если потенцмальная энергия консервативной системы в положении равновесия не имеет минимума и это узнаётся уже по членам второго порядка в разложении функции* Π *в ряд в окрестности положения равновесия без необходимости рассматривания членов высших порядков, то положение равновесия неустойчиво.*

5 Вторая теорема Ляпунова о неустойчивости

Теорема (Ляпунова, 2-я). *Если в положении равновесия потенциальная энергия имеет максимум и это узнаётся по членам наименее высокого порядка, которые действительно присутствуют в разложении этой функции в ряд в окрестности положения равновесия, то это положение равновесия неустойчиво.*

6 Нормальные координаты

Определение. Обобщённые координаты θ_j, в которых кинетическая и потенциальная энергия системы имеют вид

$$T = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} \dot{\theta}_j^2, \qquad \Pi = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \theta_j^2,$$

называются *нормальными.*

В нормальных координатах лианеризованные уравнения движения в окрестности положения равновесия имеют вид n не связанных друг с другом уравнений второго порядка

$$\ddot{\theta}_j + \lambda_j \theta_j = 0, \quad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

7 Асимптотически устойчивое положение равновесия

Определение. Положение равновесия q_j^0 называется асимптотически устойчивым, если оно устойчиво и, если, кроме того, существует такая δ-окрестность точки $q_j = q_j^0$, $\dot{q}_j = 0$ $(j = 1, \ldots, n)$, что для всех $|q_j^0 - q_j| < \delta$, $|\dot{q}_j(0)| < \delta$ выполняются условия

$$\lim_{t\to\infty} q_j(t) = q_j^0, \quad \lim_{t\to\infty} \dot{q}_j(t) = 0, \quad (j = 1, \ldots, n).$$

8 Теорема Ляпунова о лианеризованных системах

Теорема (Ляпунова о лианеризованных системах)**.** *Если все корни характеристического уравнения*

$$\det \|\mathbf{A}\lambda^2 + \mathbf{B}^*\lambda + (\mathbf{C} + \mathbf{C}^*)\| = 0$$

системы дифференциальных уравнений линейного приближения

$$\mathbf{A}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}^*\dot{\mathbf{q}} + (\mathbf{C} + \mathbf{C}^*)\mathbf{q} = 0$$

имеют отрицательные действительные части, то положение равновесия $q = 0$ *исходной системы, описываемой уравнениями*

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j, \qquad Q_j = -\frac{\partial V}{\partial q_j} + Q_j^* \quad (j = 1, \ldots, n),$$

асимтотически устойчиво. Если хотя бы один корень характеристического уравнения имеет действительную част, то положение равновесия, определяемое системой, неустойчиво.

9 Критерии Рауса-Гурвица и Льенара-Шипара устойчивости многочлена

Определение. Назовём *матрицей Гурвица* квадратную матрицу m-го порядка

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \ldots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \ldots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \ldots & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & \ldots & 0 \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & a_m \end{pmatrix}.$$

Составим главные миноры матрицы Гурвица (*определители Гурвица*)

$$\Delta_1 = a_1,\ \Delta_2 = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{pmatrix},\ \Delta_3 = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{pmatrix}, \ldots, \Delta_m = a_m\Delta_{m-1}.$$

Теорема (Критерий Рауса-Гурвица в форме Льенара-Шипара)**.** *Для того чтобы все корни уравнения*

$$a_0\lambda^m + a_1\lambda^{m-1} + \ldots + a_{m-1}\lambda + a_m = 0$$

с вещественнными коэффициентами и положительным старшим коэффициентом a_0 *имели отрицательные вещественные части, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства*

$$\Delta_1 > 0, \quad \Delta_2 > 0, \quad \ldots, \quad \Delta_m > 0.$$

10 Теорема Ляпунова об устойчивости/асимптотической устойчивости (функция Ляпунова)

Теорема (Ляпунова, об устойчивости движения). *Если дифференциальные уравнения возмущённого движения таковы, что существует знакоопределённая функция V, производная которой $\dot{V}$ в силу этих уравнений является или знакопостоянной функцией противоположного знака с V, или тождественно равной нулю, то невозмущённое движение устойчиво.*

Теорема (Ляпунова, об асимптотической устойчивости). *Если дифференциальные уравнения возмущённого движения таковы, что существует знакоопределённая функция $V(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, производная которой $\dot{V}$ в силу этих уравнений есть знакоопределённая функция противоположного знака с V, то невозмущённое движение асимптотически устойчиво.*

11 Теорема Барбашина-Красовского

Теорема (Барбашина-Красовского). *Если для дифференциальных уравнений возмущённого движения можно найти положительно определённую функцию $V(y)$, производная которой, вычисленная в силу этих уравнений $\dot{V}(y) < 0$ вне K и $\dot{V}(y) = 0$ на K, где K — многообразие точек, содержащее единственное решение $y(t) \equiv 0$, то невозмущённое движение асимптотически устойчиво, если функция $V(y)$ отрицательно определена, то невозмущённое движение асимптотически неустойчиво.*

12 Теорема Четаева о неустойчивости

Теорема (Четаева, о неустойчивости). *Если дифференциальные уравнения возмущённого движения таковы, что существует функция $V(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ такая, что в сколь угодно малой окрестности*

$$|x_i| < h \quad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

существует область $V > 0$ и во всех точках области $V > 0$ производная $\dot{V}$ в силу этих уравнений принимает положительные значения, то невозмущённое движение неустойчиво.

13 Понятие о бифуркации положений равновесия

Дифференциальные уравнения динамических систем часто зависят не только от фазовых переменных, но и от некоторых параметров. Иногда изменение параметров приводит к качественным перестройкам структуры фазовых траекторий системы — изменениям количества положений равновесия, характера их устойчивости, кардинальным трансформациям траекторий и т. п. В окрестности определённых значений параметров перестройки происходят при сколь угодно малом изменении параметров и называются *бифуркациями*.

14 Бифуркация Андронова-Хопфа

Бифуркацией Андронова-Хопфа называется бифуркация рождения цикла.

15 Метод Биркгофа(?) приведения к нормальной форме. Понятие резонанса

Определение. *Нормальной формой* системы

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} = [x_1, \dots, x_n]^T, \quad \mathbf{f} = [f_1, \dots, f_n]^T$$

называется форма содержащая лишь линейные и резонансные слагаемые.

При помощи разложения в ряд Тейлора функции f в окрестности положения равновесия выделим в данной системе линейные слагаемые:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \boldsymbol{g}(\mathbf{x}), \quad \boldsymbol{g} = [g_1, \dots, g_n]^T,$$
$$g_i(\mathbf{x}) = \sum_{k_1, \dots, k_n} g^i_{k_1, \dots, k_n} x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n}, \quad k_1 + \dots + k_n \geqslant 2.$$

Здесь $\mathbf{A}$ — матрица с постоянными коэффициентами размера $n \times n$, $g_{k_1, \dots, k_n}$ — постоянные коэффициенты в полиномах $\boldsymbol{g}$.

Определение. *Нормализующим преобразованием* (вплоть до степени k) называется последовательность преобразований

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{y} + \mathbf{p}(\mathbf{y}), \quad \mathbf{p}(\mathbf{y}) = [p_1, \dots, p_n]^T,$$
$$p_i(\mathbf{y}) = \sum_{k_1, \dots, k_n} p^i_{k_1, \dots, k_n} y_1^{k_1} \dots y_n^{k_n}, \quad k_1 + \dots + k_n = k$$

с полиномиальными коэффициентами

$$p^i_{k_1,\ldots,k_n} = \frac{g^i_{k_1,\ldots,k_n}}{k_1\lambda_1 + \ldots + k_n\lambda_n - \lambda_i},$$

приводящее систему к её нормальной форме (вплоть до слагаемых степени k).

Определение. Нелинейные слагаемые системы, показатели $k_1, \ldots, k_n$ которых таковы, что выполняется $\lambda_i = k_1\lambda_1 + \ldots k_n\lambda_n$, называются *резонансными.*

В соответствии с описанным выше алгоритмом все нерезонансные слагаемые могут быть исключены из правой части системы при помощи последовательно применяемых полиномиальных замен. В то же время резонансные слагаемые не могут быть ни исключены, ни каким-либо образом ими преобразованы.

16 Вынужденные колебания под действием периодической силы. Частотная характеристика, амплитудно-фазовая характеристика. Необходимые и достаточные условия возникновения резонанса в таких системах.

Определение. Колебания, которые возникают благодаря наличию вынуждающей силы, зависящей явно от времени, и к которым в пределе стремится суммарное движение, назывют *вынужденными колебаниями.*

Представим уравнения линейного приближения стационарной системы в виде

$$\sum_{k=1}^{n}(a_{jk}\ddot{q}_k + b_{jk}\dot{q}_k + c_{jk}q_k) = Q_j(t) \quad (j = 1, \ldots, n),$$

где $Q_j(t)$ — зависящие явно от времени части обобщённых сил. Предполагается, что в процессе движения они остаются малыми по модулю и не выводят систему из малой окрестности положения равновесия.

В связи с тем, что данная система уравнений является линейной, а для линейных систем имеет место принцип суперпозиции, можно рассмотреть движение системы под действием какой-либо одной силы из $Q_j(t)$ $(j = 1, \ldots, n)$, предположив, что все остальные равны нулю. Определив порознь движения, возникающие под действием каждой из таких обобщённых сил, их следует затем сложить.

Учитывая это обстоятельство, положим

$$Q_2(t) = Q_3(t) = \ldots = Q_n(t) = 0,$$

т. е. будем считать, что отлична от нуля только обобщённая сила $Q_1(t)$, относящаяся к первой обобщённой координате, а все остальные обобщённые силы такого рода равны нулю.

Введём обозначения

$$d_{jk}(i\Omega) = a_{jk}(i\Omega)^2 + b_{jk}(i\Omega) + c_{jk},$$

$$\Delta = \det \|d_{jk}(i\Omega)\| = \begin{pmatrix} d_{11}(i\Omega) & \cdots & d_{1n}(i\Omega) \\ \vdots & & \vdots \\ d_{n1}(i\Omega) & \cdots & d_{nn}(i\Omega) \end{pmatrix},$$

$$W_{1k}(i\Omega) = \frac{\Delta_{1k}}{\Delta},$$

где Δ_{1k} — алгебраическое дополнение расположенного в первой строке и k-ом столбце элемента определителя Δ. Тогда при поиске частного решения неоднородной системы дифференциальных уравнений в виде $\tilde{q}_f = Be^{i\Omega t}$ и, выделяя в последствии мнимую часть, получим

$$q_k = A|W_{1k}(i\Omega)| \sin[\Omega t + \arg W_{1k}(i\Omega)] \quad (k = 1, \ldots, n).$$

Определение. Введённая выше функция $W_{1k}(i\Omega)$ называется *частотной характеристикой системы*, или, как говорят иногда, её *амлитудно-фазовой характеристикой.*

Определение. Если отдельно рассмотреть изменение модуля и аргумента вектора $W(i\Omega)$ в зависимости от Ω, то получатся характеристики, которые называются соответственно *амплитудной* и *фазовой* характеристиками системы.

Определение. Если амплитудная характеристика системы при некотором значении $\Omega = \Omega^*$ имеет отчётливо выраженный пик, то при одной и той же амплитуде внешней силы Q_1 амплитуда отклика резко возрастает, когда частота внешней силы приближается к значению $\Omega = \Omega^*$. Это явление называют *резонансом.*

Второе задание

1 Понятие краевой задачи для лагранжевых систем, теорема Гамильтона- hi Остроградского, формула изменения лагранжиана при замене координат и времени, теорема Нётер

2 Переменные Гамильтона. Обобщенные импульсы

hi

3 Функция Гамильтона через функцию Лагранжа

hi

4 Функция Гамильтона через обобщенный потенциал и кин.энергию (случай обобщенно консервативной системы) (см. 286-287 стр. Маркеева)

hi

5 Канонические уравнения Гамильтона

hi

6 Понятие первого интеграла динамической системы (не только для гамильтоновых систем!)

hi

7 Понятие скобок Пуассона, их свойства (дистрибутивность, антикоммутативность etc). Критерий первого интеграла гамильтоновой системы

hi

8 Трубка прямых путей. Интегральные инварианты Пуанкаре и Пуанкаре- Картана

hi

9 Теорема Лиувилля о сохранении фазового объема. Общая формула для изменения фазового объема произвольной динамической системы (не только гамильтоновой!)

hi

10 Классификация интегральных инвариантов, теорема Ли Хуачжуна

hi

11 Канонические преобразования. Производящие функции

hi

12 Замена гамильтониана при каноническом преобразовании, (q, p) описание

hi

13 Свободные преобразования, (q, q^*) описание. Формулы преобразования импульсов гамильтониана

hi

14 *«Наивная» теория возмущений, использование (q, p^*) описания для задания преобразований, близких к тождественным. Метод Биркгофа, понятие резонанса*

hi

15 Уравнение Гамильтона-Якоби. Полный интеграл уравнения Гамильтона-Якоби

hi

16 Понятие адиабатических инвариантов динамических систем

hi

17 Переменные действие угол. Условие возможности перехода к ним, формулы перехода (случай одной степени свободы)

hi

18 Понятие интегрируемых гамильтоновых систем. Теорема Лиувилля-Арнольда

hi

19 Резонансные и нерезонансные торы

hi

20 *Невырожденность и изоэнергетическая невырожденность гамильтониана*

hi

21 *КАМ-теорема*

hi

22 *Важные следствия КАМ-теоремы для систем с двумя степенями свободы, обладающих свойством изоэнергетической и обычной невырожденности*

hi

23 *Понятие детерминированного хаоса в динамических системах*

hi

24 *Сечения Пуанкаре*

hi

25 *Фрактальная размерность*

hi