







Теорминимум по теормеху

Драчов Ярослав

Факультет общей и прикладной физики, МФТИ

28 июня 2020 г.

Исправления

	Исп.	6
	Формулировки по Амелькину	6
	Исп.	7
	Формулировка по Амелькину	7
	Исп.	11
	Исп.	15

Содержание

Первое задание	3
1 Определение положения равновесия	3
2 Устойчивое положение равновесия	3
3 Теорема Лагранжа-Дирихле	4
4 Первая теорема Ляпунова о неустойчивости	4
5 Вторая теорема Ляпунова о неустойчивости	4
6 Нормальные координаты	4
7 Асимптотически устойчивое положение равновесия	4
8 Теорема Ляпунова о лианеризованных системах	5
9 Критерии Рауса-Гурвица и Льенара-Шипара устойчивости многочлена	5
10 Теорема Ляпунова об устойчивости/асимптотической устойчивости (функция Ляпунова)	6
11 Теорема Барбашина-Красовского	6
12 Теорема Четаева о неустойчивости	7
13 Понятие о бифуркации положений равновесия	7
14 Бифуркация Андронова-Хопфа	7
15 Метод Пуанкаре приведения к нормальной форме. Понятие резонанса	8
16 Вынужденные колебания под действием периодической силы. Частотная характеристика, амплитудно-фазовая характеристика. Необходимые и достаточные условия возникновения резонанса в таких системах.	9

Второе задание	10
1 Понятие краевой задачи для лагранжевых систем, теорема Гамильтона-Остроградского, формула изменения лагранжиана при замене координат и времени, теорема Нётер	10
2 Переменные Гамильтона. Обобщенные импульсы	12
3 Функция Гамильтона через функцию Лагранжа	12
4 Функция Гамильтона через обобщенный потенциал и кин.энергию (случай обобщенно консервативной системы) (см. 286-287 стр. Маркеева)	13
5 Канонические уравнения Гамильтона	13
6 Понятие первого интеграла динамической системы (не только для гамильтоновых систем!)	13
7 Понятие скобок Пуассона, их свойства (дистрибутивность, антикоммутативность etc). Критерий первого интеграла гамильтоновой системы	13
8 Трубка прямых путей. Интегральные инварианты Пуанкаре и Пуанкаре-Картана	14
9 Теорема Лиувилля о сохранении фазового объема. Общая формула для изменения фазового объема произвольной динамической системы (не только гамильтоновой!)	15
10 Классификация интегральных инвариантов, теорема Ли Хуачжуня	15
11 Канонические преобразования. Производящие функции	15
12 Замена гамильтониана при каноническом преобразовании, (q, p) описание	16
13 Свободные преобразования, (q, q^*) описание. Формулы преобразования импульсов гамильтониана	16
14 «Наивная» теория возмущений, использование (q, p^*) описания для задания преобразований, близких к тождественным. Метод Биркгофа, понятие резонанса	17
15 Уравнение Гамильтона-Якоби. Полный интеграл уравнения Гамильтона-Якоби	17
16 Понятие адиабатических инвариантов динамических систем .	17
17 Переменные действие угол. Условие возможности перехода к ним, формулы перехода (случай одной степени свободы) . . .	17
18 Понятие интегрируемых гамильтоновых систем. Теорема Лиувилля-Арнольда	17
19 Резонансные и нерезонансные торы	18
20 Невырожденность и изоэнергетическая невырожденность гамильтониана	18
21 КАМ-теорема	18
22 Важные следствия КАМ-теоремы для систем с двумя степенями свободы, обладающих свойством изоэнергетической и обычной невырожденности	18
23 Понятие детерминированного хаоса в динамических системах	18
24 Сечения Пуанкаре	18
25 Фрактальная размерность	18

Первое задание

1 Определение положения равновесия

Определение. Положение системы материальных точек, определяемое в некоторой системе отсчёта обобщёнными координатами $q_j = q_j^n$ ($j = \overline{1, n}$), называется *положением равновесия* для наблюдателя, связанного с этой системой отсчёта, если система материальных точек, будучи приведена в это положение с нулевыми скоростями \dot{q}_j^0 ($j = \overline{1, n}$), остаётся в нём сколь угодно долго.

2 Устойчивое положение равновесия

Пусть поставлена задача Коши для нахождения движения системы:

$$\mathbf{f}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}, t) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{q}(t_0) = \mathbf{q}^0, \quad \dot{\mathbf{q}}(t_0) = \dot{\mathbf{q}}^0.$$

Определение. Положение равновесия $\mathbf{q} = \mathbf{0}$ называется *устойчивым*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta = \delta(\varepsilon)$, что для всех $t > t_0$ выполняются неравенства

$$|q_i(t)| < \varepsilon, \quad |\dot{q}_i(t)| < \varepsilon \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

где $q_i(t)$ — решения поставленной задачи Коши, при условии, что в начальный момент $t = t_0$

$$|q_i^0| < \delta, \quad |\dot{q}_i^0| < \delta.$$

3 Теорема Лагранжа-Дирихле

Теорема (Лагранжа-Дирихле). Если в положении равновесия консервативной системы потенциальная энергия имеет строгий локальный минимум, то это положение равновесия устойчиво.

4 Первая теорема Ляпунова о неустойчивости

Теорема (Ляпунова, 1-я). Если потенциальная энергия консервативной системы в положении равновесия не имеет минимума и это узнаётся уже по членам второго порядка в разложении функции Π в ряд в окрестности положения равновесия без необходимости рассматривания членов высших порядков, то положение равновесия неустойчиво.

5 Вторая теорема Ляпунова о неустойчивости

Теорема (Ляпунова, 2-я). Если в положении равновесия потенциальная энергия имеет максимум и это узнаётся по членам наименее высокого порядка, которые действительно присутствуют в разложении этой функции в ряд в окрестности положения равновесия, то это положение равновесия неустойчиво.

6 Нормальные координаты

Определение. Обобщённые координаты θ_j , в которых кинетическая и потенциальная энергия системы имеют вид

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \dot{\theta}_j^2, \quad \Pi = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \lambda_j \theta_j^2,$$

называются *нормальными*.

Привести систему к нормальным координатам можно в случае, если кинетическая энергия в первоначальных переменных — положительно-определённая квадратичная форма скоростей, а потенциальная энергия произвольная квадратичная форма координат.

В нормальных координатах лианеризованные уравнения движения в окрестности положения равновесия имеют вид n не связанных друг с другом уравнений второго порядка

$$\ddot{\theta}_j + \lambda_j \theta_j = 0, \quad (j = 1, 2, \dots, n).$$

7 Асимптотически устойчивое положение равновесия

Пусть поставлена задача Коши для нахождения движения системы:

$$\mathbf{f}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}, t) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{q}(t_0) = \mathbf{q}^0, \quad \dot{\mathbf{q}}(t_0) = \dot{\mathbf{q}}^0.$$

Определение. Положение равновесия $\mathbf{q} = \mathbf{0}$ называется *асимптотически устойчивым*, если оно устойчиво и, если, кроме того, существует такая δ -окрестность точки $\mathbf{q} = \mathbf{0}$, $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$, что для всех $|q_j^0| < \delta$, $|\dot{q}_j^0| < \delta$ выполняются условия

$$\lim_{t \rightarrow \infty} q_j(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{q}_j(t) = 0, \quad (j = 1, \dots, n),$$

где $q_j(t)$ — решения поставленной задачи Коши.

8 Теорема Ляпунова о лианеризованных системах

Теорема (Ляпунова о лианеризованных системах). *Если все корни характеристического уравнения*

$$\det \|\mathbf{A}\lambda^2 + \mathbf{B}^*\lambda + (\mathbf{C} + \mathbf{C}^*)\| = 0$$

системы дифференциальных уравнений линейного приближения

$$\mathbf{A}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}^*\dot{\mathbf{q}} + (\mathbf{C} + \mathbf{C}^*)\mathbf{q} = \mathbf{0}$$

имеют отрицательные действительные части, то положение равновесия $\mathbf{q} = \mathbf{0}$ исходной стационарной системы, описываемой уравнениями

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j, \quad Q_j = -\frac{\partial V}{\partial q_j} + Q_j^* \quad (j = 1, \dots, n),$$

асимптотически устойчиво. Если хотя бы один корень характеристического уравнения имеет действительную часть, то положение равновесия, определяемое системой, неустойчиво.

9 Критерии Рауса-Гурвица и Лъенара-Шипара устойчивости многочлена

Определение. Назовём *матрицей Гурвица* квадратную матрицу m -го порядка

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \dots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & \dots & 0 \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & a_m \end{pmatrix}.$$

Составим главные миноры матрицы Гурвица (*определители Гурвица*)

$$\Delta_1 = a_1, \Delta_2 = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{pmatrix}, \Delta_3 = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{pmatrix}, \dots, \Delta_m = a_m \Delta_{m-1}.$$

Теорема (Критерий Рауса-Гурвица). Для того чтобы все корни уравнения

$$a_0 \lambda^m + a_1 \lambda^{m-1} + \dots + a_{m-1} \lambda + a_m = 0$$

с вещественными коэффициентами и положительным старшим коэффициентом a_0 имели отрицательные вещественные части, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства

$$\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \dots, \Delta_m > 0.$$

Теорема (Критерий Лъенара-Шипара). Для того чтобы многочлен $f(\lambda) \equiv a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n$ при $a_0 > 0$ имел все корни с отрицательными вещественными частями, необходимо и достаточно, чтобы

1. все коэффициенты многочлена $f(\lambda)$ были положительны

$$a_1 > 0, \quad a_2 > 0, \quad \dots, \quad a_n > 0;$$

2. в последовательности определителей Гурвица все определители с чётными индексами (либо все определители с нечётными индексами) были строго положительными.

Исп.

10 Теорема Ляпунова об устойчивости/асимптотической устойчивости (функция Ляпунова)

Формулировки по Амелингу

Теорема (Ляпунова, об устойчивости движения). Если существует функция $V(\mathbf{x})$, определённо положительная в окрестности положения равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ (имеет строгий минимум в точке $\mathbf{x} = \mathbf{0}$), а её производная по времени, вычисленная в силу уравнений

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad (*)$$

знакоотрицательна, т. е.

$$\dot{V}\Big|_{(*)} = \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}}\Big|_{(*)} = \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f} \leq 0,$$

то $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ — устойчивое положение равновесия.

Теорема (Ляпунова, об асимптотической устойчивости). Если существует функция $V(\mathbf{x})$, определённо положительная в окрестности положения равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ (имеет строгий минимум в точке $\mathbf{x} = \mathbf{0}$), а её производная по времени, вычисленная в силу уравнений $(*)$ определённо отрицательна, т. е.

$$\dot{V}\Big|_{(*)} = \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}}\Big|_{(*)} = \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f} < 0,$$

то $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ — устойчивое положение равновесия.

11 Теорема Барбашина-Красовского

Теорема (Барбашина-Красовского). Пусть существует функция $V(\mathbf{x})$, для которой в некоторой окрестности положения равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ выполняются условия:

1. Её производная по времени, вычисленная в силу уравнений

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad (*)$$

знакоотрицательна, т. е.

$$\dot{V}\Big|_{(*)} = \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}}\Big|_{(*)} = \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f} \leq 0.$$

2. Множество X^0 точек \mathbf{x} , в которых производная \dot{V} равна нулю:

$$X^0 : \dot{V}(\mathbf{x})\Big|_{(*)} = \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f} = 0$$

кроме $\mathbf{x}(t) = \mathbf{0}$ не содержит других целых траекторий системы $(*)$.
 $(\mathbf{x}(t) = \mathbf{0})$ — единственное решение, полностью лежащее на множестве X^0 .

Тогда

- а) Если функция $V(\mathbf{x})$ имеет строгий минимум в точке $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, то это положение асимптотически устойчиво.
- б) Если в точке $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ функция $V(\mathbf{x})$ не имеет минимума (включая нестрогий), то это положение неустойчиво.

Исп.

12 Теорема Четаева о неустойчивости

Формулировка
по Амелькину

Теорема (Четаева, о неустойчивости). Пусть существует такая функция $V(\mathbf{x})$, что в любой достаточно малой окрестности точки $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ существует область $V < 0$. Если во всех точках области $V < 0$ производная по времени, вычисленная в силу уравнений

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad (*)$$

определённо отрицательна, т. е.

$$\dot{V}\Big|_{(*)} = \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}}\Big|_{(*)} = \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f} < 0,$$

то положение равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ неустойчиво.

13 Понятие о бифуркации положений равновесия

Дифференциальные уравнения динамических систем часто зависят не только от фазовых переменных, но и от некоторых параметров. Иногда изменение параметров приводит к качественным перестройкам структуры фазовых траекторий системы — изменениям количества положений равновесия, характера их устойчивости, кардинальным трансформациям траекторий и т. п. В окрестности определённых значений параметров перестройки происходят при сколь угодно малом изменении параметров и называются *бифуркациями*.

14 Бифуркация Андронова-Хопфа

Определение. *Предельным циклом* векторного поля на фазовой плоскости или, более обобщённо, на каком-либо двумерном многообразии называется замкнутая (периодическая) траектория этого векторного поля, в окрестности которой нет других периодических траекторий.

Определение. *Бифуркация Андронова-Хопфа* — локальная бифуркация векторного поля на плоскости, в ходе которой особая точка-фокус теряет устойчивость при переходе пары её комплексно-сопряжённых собственных значений через мнимую ось. При этом либо из особой точки рождается небольшой устойчивый предельный цикл, либо, наоборот, небольшой неустойчивый предельный цикл в момент бифуркации схлопывается в эту точку.

15 Метод Пуанкаре приведения к нормальной форме. Понятие резонанса

Определение. *Нормальной формой* системы

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} = [x_1, \dots, x_n]^T, \quad \mathbf{f} = [f_1, \dots, f_n]^T$$

называется форма содержащая лишь линейные и резонансные слагаемые.

При помощи разложения в ряд Тейлора функции \mathbf{f} в окрестности положения равновесия выделим в данной системе линейные слагаемые:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{g}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{g} = [g_1, \dots, g_n]^T,$$

$$g_i(\mathbf{x}) = \sum_{k_1, \dots, k_n} g_{k_1, \dots, k_n}^i x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n}, \quad k_1 + \dots + k_n \geq 2.$$

Здесь \mathbf{A} — матрица с постоянными коэффициентами размера $n \times n$, g_{k_1, \dots, k_n} — постоянные коэффициенты в полиномах \mathbf{g} .

Определение. Нормализующим преобразованием (вплоть до степени k) называется последовательность преобразований

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{y} + \mathbf{p}(\mathbf{y}), \quad \mathbf{p}(\mathbf{y}) = [p_1, \dots, p_n]^T,$$

$$p_i(\mathbf{y}) = \sum_{k_1, \dots, k_n} p_{k_1, \dots, k_n}^i y_1^{k_1} \dots y_n^{k_n}, \quad k_1 + \dots + k_n = k$$

с полиномиальными коэффициентами

$$p_{k_1, \dots, k_n}^i = \frac{g_{k_1, \dots, k_n}^i}{k_1 \lambda_1 + \dots + k_n \lambda_n - \lambda_i},$$

приводящее систему к её нормальной форме (вплоть до слагаемых степени k).

Определение. Нелинейные слагаемые системы, показатели k_1, \dots, k_n которых таковы, что выполняется $\lambda_i = k_1 \lambda_1 + \dots + k_n \lambda_n$, называются *резонансными*.

В соответствии с описанным выше алгоритмом все нерезонансные слагаемые могут быть исключены из правой части системы при помощи последовательно применяемых полиномиальных замен. В то же время резонансные слагаемые не могут быть ни исключены, ни каким-либо образом ими преобразованы.

16 Вынужденные колебания под действием периодической силы. Частотная характеристика, амплитудно-фазовая характеристика. Необходимые и достаточные условия возникновения резонанса в таких системах.

Определение. Колебания, которые возникают благодаря наличию вынуждающей силы, зависящей явно от времени, и к которым в пределе стремится суммарное движение, называют *вынужденными колебаниями*.

Представим уравнения линейного приближения стационарной системы в виде

$$\sum_{k=1}^n (a_{jk} \ddot{q}_k + b_{jk} \dot{q}_k + c_{jk} q_k) = Q_j(t) \quad (j = 1, \dots, n),$$

где $Q_j(t)$ — зависящие явно от времени части обобщённых сил. Предполагается, что в процессе движения они остаются малыми по модулю и не выводят систему из малой окрестности положения равновесия.

В связи с тем, что данная система уравнений является линейной, а для линейных систем имеет место принцип суперпозиции, можно рассмотреть движение системы под действием какой-либо одной силы из $Q_j(t)$ ($j = 1, \dots, n$), предположив, что все остальные равны нулю. Определив порознь движения, возникающие под действием каждой из таких обобщённых сил, их следует затем сложить.

Учитывая это обстоятельство, положим

$$Q_2(t) = Q_3(t) = \dots = Q_n(t) = 0,$$

т. е. будем считать, что отлична от нуля только обобщённая сила $Q_1(t)$, относящаяся к первой обобщённой координате, а все остальные обобщённые силы такого рода равны нулю.

Предположим, что обобщённая сила Q_1 является гармонической функцией от t ,

$$Q_1(t) = A \sin \Omega t.$$

Здесь A — амплитуда, а Ω — частота внешней вынуждающей силы Q_1 . Если же в системе присутствуют обобщённые периодические силы Q_j , которые гармоническими функциями от t не являются, то их мы можем представить в виде ряда Фурье гармонических функций и далее работать с этим рядом.

Введём обозначения

$$d_{jk}(i\Omega) = a_{jk}(i\Omega)^2 + b_{jk}(i\Omega) + c_{jk},$$

$$\Delta = \det \|d_{jk}(i\Omega)\| = \begin{vmatrix} d_{11}(i\Omega) & \dots & d_{1n}(i\Omega) \\ \vdots & & \vdots \\ d_{n1}(i\Omega) & \dots & d_{nn}(i\Omega) \end{vmatrix},$$

$$W_{1k}(i\Omega) = \frac{\Delta_{1k}}{\Delta},$$

где Δ_{1k} — алгебраическое дополнение расположенного в первой строке и k -ом столбце элемента определителя Δ . Тогда при поиске частного решения неоднородной системы дифференциальных уравнений в виде $\tilde{q}_f = Be^{i\Omega t}$ и, выделяя в последствии мнимую часть, получим

$$q_k = A|W_{1k}(i\Omega)| \sin[\Omega t + \arg W_{1k}(i\Omega)] \quad (k = 1, \dots, n).$$

Определение. Введённая выше функция $W_{1k}(i\Omega)$ называется *частотной характеристикой системы*, или, как говорят иногда, её *амплитудно-фазовой характеристикой*.

Определение. Если отдельно рассмотреть изменение модуля и аргумента вектора $W(i\Omega)$ в зависимости от Ω , то получатся характеристики, которые называются соответственно *амплитудной* и *фазовой* характеристиками системы.

Определение. Если амплитудная характеристика системы при некотором значении $\Omega = \Omega^*$ имеет отчётливо выраженный пик, то при одной и той же амплитуде внешней силы Q_1 амплитуда отклика резко возрастает, когда частота внешней силы приближается к значению $\Omega = \Omega^*$. Это явление называют *резонансом* (в геометрическом смысле).

Определение. Резонансом (в смысле существенного изменения частного решения) будем называть случай, когда система не имеет частного решения представленного суперпозицией гармонических функций с частотой внешней вынуждающей силы.

Пусть

$$A = \|a_{jk}\|, \quad B = \|b_{jk}\|, \quad C = \|c_{jk}\|, \quad \mathbf{Q}(t) = \mathbf{a} \sin \Omega t.$$

Тогда неразрешимость матричного уравнения

$$(-A\omega^2 + iB\omega + C)\mathbf{b} = \mathbf{a}$$

для любого вектора обобщённых сил $\mathbf{Q}(t)$, действующих в системе будет необходимым и достаточным условием резонанса (в смысле существенного изменения частного решения).

В данном случае условие

$$\det(-A\omega^2 + iB\omega + C) = 0$$

будет необходимым.

Второе задание

1 Понятие краевой задачи для лагранжевых систем, теорема Гамильтона-Остроградского, формула изменения лагранжиана при замене координат и времени, теорема Нётер

Определение. *Прямым путём* системы называют путь этой системы из точки A в точку B в $(n+1)$ -мерном расширенном координатном пространстве q_1, \dots, q_n, t , удовлетворяющий соответствующим уравнениям Лагранжа.

Определение. *Окольным путём* системы называют путь этой системы из точки A в точку B в $(n+1)$ -мерном расширенном координатном пространстве q_1, \dots, q_n, t , не являющийся прямым.

Рассмотрим произвольную голономную систему с независимыми координатами q_1, \dots, q_n и функцией Лагранжа $L(t, q_i, \dot{q}_i)$.

Определение. Интеграл

$$W = \int_{t_0}^{t_1} L dt$$

называется *действием (по Гамильтону)* за промежуток времени (t_0, t_1) .

При построении прямого пути системы решается вариационная задача о нахождении экстремали функционала

$$\int_{t_0}^{t_1} L(t, q_i, \dot{q}_i) dt$$

с заданными граничными условиями $q_i(t_0) = q_i^0, q_i(t_1) = q_i^1, (i = \overline{1, n})$.

Исп.

Теорема (Гамильтона-Остроградского). *Прямой путь является экстремалью рассматриваемой вариационной задачи — на прямом пути действие по Гамильтону достигает стационарного значения.*

Рассмотрим преобразования

$$q_j = \varphi_j(q^*, t^*), \quad t = \psi(q^*, t^*), \quad j = 1, \dots, n,$$

где q^* и t^* — «новые» координаты и время, q и t — «старые» координаты и время, а φ_j и ψ — достаточно гладкие функции. Предположим, что данные преобразования разрешимы относительно переменных q^* и t^* .

Формула изменения лагранжиана при замене координат и времени тогда выглядит следующим образом

$$L^*(q^*, dq^*/dt^*, t^*) = L(\varphi, d\varphi/d\psi, \psi)(d\psi/dt^*),$$

где, в свою очередь,

$$\frac{d\varphi_j}{d\psi} = \frac{\sum_k \frac{\partial \varphi_j}{\partial q_k^*} \frac{dq_k^*}{dt^*} + \frac{\partial \varphi_j}{\partial t^*}}{\sum_k \frac{\partial \psi}{\partial q_k^*} \frac{dq_k^*}{dt^*} + \frac{\partial \psi}{\partial t^*}},$$

а $d\psi/dt^*$ совпадает со знаменателем данной дроби.

Теорема (Нётер). *Пусть задана система движущихся в потенциальном поле материальных точек, имеющая лагранжиан $L(q, dq/dt, t)$, и пусть существует однопараметрическое семейство преобразований*

$$q_j^* = \varphi_j(q, t, \alpha) \quad (j = 1, \dots, n), \quad t^* = \psi(q, t, \alpha),$$

(φ, ψ — достаточно гладкие, обратимые функции) удовлетворяющее условиям

- тождественности при $\alpha = 0$, т. е.

$$\varphi_j(q, t, 0) = q_j \quad (j = 1, \dots, n), \quad \psi(q, t, 0) = t;$$

- существования обратного преобразования:

$$q_j = \tilde{\varphi}_j(q^*, t^*, \alpha) \quad (j = 1, \dots, n), \quad t = \tilde{\psi}(q^*, t^*, \alpha).$$

Пусть, далее, лагранжиан L инвариантен по отношению к таким преобразованиям, т. е. «новый» лагранжиан L^* (вычисленный по формуле выше) не зависит от α и как функция $q^*, dq^*/dt^*, t^*$ имеет совершенно такой же вид, как и «старый» лагранжиан L как функция $q, dq/dt, t$. Тогда существует функция $\Phi(q, p, t)$, которая не изменяется во время движения этой системы, т. е. является первым интегралом движения. Эта функция имеет вид

$$\Phi(q, p, t) = \sum p_j \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial \alpha} \right) \Big|_{\alpha=0} - H \left(\frac{\partial \psi}{\partial \alpha} \right) \Big|_{\alpha=0},$$

где H — гамильтониан рассматриваемой системы.

2 Переменные Гамильтона. Обобщенные импульсы

В предположении, что

$$\det \left\| \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_j \partial \dot{q}_k} \right\|_{j,k=1}^n \neq 0,$$

состояние системы можно задавать при помощи параметров q_i, p_i, t , где p_i — обобщённые импульсы, определяемые равенствами

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad (i = 1, \dots, n).$$

Определение. Переменные q_i, p_i, t называют переменными Гамильтона.

3 Функция Гамильтона через функцию Лагранжа

В предположении, что

$$\det \left\| \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_j \partial \dot{q}_k} \right\|_{j,k=1}^n \neq 0,$$

функцию Гамильтона через функцию Лагранжа можно получить при помощи преобразования Лежандра функции $L(q_i, \dot{q}_i, t)$ по переменным \dot{q}_i , ($i = 1, 2, \dots, n$)

$$H(q_i, p_i, t) = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - L(q_j, \dot{q}_j, t),$$

где величины \dot{q}_i выражены через q_j, p_j, t .

4 Функция Гамильтона через обобщенный потенциал и кин.энергию (случай обобщенно консервативной системы) (см. 286-287 стр. Маркеева)

Система называется обобщённо консервативной, если её функция Гамильтона не зависит явно от времени. В этом случае

$$H(q_i, p_i) = T_2 - T_0 + \Pi = h,$$

где

$$T_2 = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^m a_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k, \quad T_0 = a_0.$$

5 Канонические уравнения Гамильтона

Определение. Каноническими уравнениями Гамильтона называются уравнения

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad (i = 1, 2, \dots).$$

6 Понятие первого интеграла динамической системы (не только для гамильтоновых систем!)

Определение. *Первым интегралом дифференциальных уравнений движения* называется функция $I(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ отличная от постоянной, производная которой в силу уравнений движения

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{q}} &= \mathbf{f}_q(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t), \\ \dot{\mathbf{p}} &= \mathbf{f}_p(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t),\end{aligned}$$

равна нулю:

$$\frac{\partial I}{\partial \mathbf{q}} \mathbf{f}_q + \frac{\partial I}{\partial \mathbf{p}} \mathbf{f}_p + \frac{\partial I}{\partial t} = 0.$$

7 Понятие скобок Пуассона, их свойства (дистрибутивность, антикоммутативность etc). Критерий первого интеграла гамильтоновой системы

Определение. Пусть u и v — дважды непрерывно дифференцируемые функции от $q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n, t$. Выражение

$$(u, v) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial q_i} \frac{\partial v}{\partial p_i} - \frac{\partial u}{\partial p_i} \frac{\partial v}{\partial q_i} \right)$$

называют *скобкой Пуассона* функций u и v .

Свойства скобок Пуассона:

1. $(u, v) = -(v, u)$,
2. $(cu, v) = c(u, v) \quad (c = \text{const})$,
3. $(u + v, w) = (u, w) + (v, w)$,
4.
$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}(u, v) &= \left(\frac{\partial u}{\partial t}, v \right) + \left(u, \frac{\partial v}{\partial t} \right), \\ \frac{\partial}{\partial q_i}(u, v) &= \left(\frac{\partial u}{\partial q_i}, v \right) + \left(u, \frac{\partial v}{\partial q_i} \right), \\ \frac{\partial}{\partial p_i}(u, v) &= \left(\frac{\partial u}{\partial p_i}, v \right) + \left(u, \frac{\partial v}{\partial p_i} \right),\end{aligned}$$
5. $((u, v), w) + ((v, w), u) + ((w, u), v) = 0$.

Необходимое и достаточное условие того, что f — первый интеграл, можно записать в виде равенства

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (f, H) = 0.$$

8 Трубка прямых путей. Интегральные инварианты Пуанкаре и Пуанкаре-Картана

Определение. Множество прямых путей «выпускаемых» из замкнутого несамопересекающегося контура C_0 в $(2n+1)$ -мерном расширенном фазовом пространстве q, p, t динамической системой, движущейся в потенциальном поле и имеющей гамильтониан H образует *трубку прямых путей*.

Определение. Контурный интеграл

$$J = \oint_C \left(\sum p_j dq_j - H dt \right),$$

взятый по контуру C , охватывающему трубку прямых путей называют *интегральным инвариантом Пуанкаре-Картана*.

Данный интеграл, взятый по любому контуру C^* , охватывающему определённую трубку прямых путей, не зависит от выбора этого контура на трубке.

Определение. Контурный интеграл, рассматриваемый только на «одновременных» контурах \tilde{C} , имеет вид

$$J_1 = \oint_{\tilde{C}} \sum p_j dq_j = \text{const}$$

и называется *универсальным интегральным инвариантом Пуанкаре*.

Особенность интегрального инварианта, взятого в такой форме, состоит в том, что в подынтегральное выражение уже не входит гамильтониан, и следовательно, этот интегральный инвариант оказывается *одинаковым для всех динамических систем*, движущихся в произвольных потенциальных полях.

9 Теорема Лиувилля о сохранении фазового объема. Общая формула для изменения фазового объема произвольной динамической системы (не только гамильтоновой!)

Теорема (Лиувилля). Фазовый объём гамильтоновой системы V не зависит от t , т. е. является инвариантом движения. Исп.

Пусть задана система обыкновенных дифференциальных уравнений $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, решения которой продолжаются на всю ось времени. Пусть также $D(t)$ — область в пространстве $\{\mathbf{x}\}$ и $v(t)$ — её объём, тогда справедлива следующая формула

$$\left. \frac{dv(t)}{dt} \right|_{t=t_0} = \int_{D(t_0)} \text{div } \mathbf{f} \, dx \quad (dx = dx_1 \dots dx_n).$$

10 Классификация интегральных инвариантов, теорема Ли Хуачжуна

Универсальный относительный интегральный инвариант первого порядка в общем виде можно записать так

$$\tilde{J}_1 = \oint_{\tilde{C}} \sum [A_j(q, p, t) \delta q_j + B_j(q, p, t) \delta p_j].$$

Теорема. Любой универсальный относительный инвариант первого порядка \tilde{J}_1 может отличаться от инварианта Пуанкаре лишь постоянным множителем, т. е. для любого J_1 существует константа c (одна и та же на всех трубках прямых путей рассматриваемой гамильтоновой системы) такая, что

$$\tilde{J}_1 = cJ_1.$$

11 Канонические преобразования. Производящие функции

Рассмотрим преобразование

$$q_j^* = \varphi(q, p, t), \quad p_j^* = \psi(q, p, t) \quad (j = 1, \dots, n),$$

которое переводит «старые» гамильтоновы переменные p и q в «новые» гамильтоновы переменные q^* и p^*

Определение. Преобразование выше называется *каноническим*, если оно переводит любую гамильтонову систему

$$\frac{dq_j}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \quad \frac{dp_j}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_j} \quad (j = 1, \dots, n)$$

в новую гамильтонову систему

$$\frac{dq_j^*}{dt} = \frac{\partial H^*}{\partial p_j^*}, \quad \frac{dp_j^*}{dt} = -\frac{\partial H^*}{\partial q_j^*} \quad (j = 1, \dots, n).$$

Теорема. Для того чтобы рассматриваемое преобразование было каноническим, необходимо и достаточно, чтобы существовали такая функция $F(q, p, t)$ и такое число c , чтобы тождественно выполнялось равенство

$$\sum \psi_j \delta \varphi_j - c \sum p_j \delta q_j = -\delta F(q, p, t).$$

В последней формуле δ — оператор дифференцирования функции от q, p, t при «замороженном» времени, т. е.

$$\delta \varphi_j = d\varphi_j - \frac{\partial \varphi_j}{\partial t} dt, \quad \delta F = dF - \frac{\partial F}{\partial t} dt.$$

Определение. Функцию $F(q, p, t)$ из последней теоремы называют *производящей*.

12 Замена гамильтониана при каноническом преобразовании, (q, p) описание

Теорема. Пусть преобразование из предыдущего пункта является каноническим, причём c и $F(q, p, t)$, при которых удовлетворяется тождество последней теоремы известны. Тогда «новый» гамильтониан H^* определяется по «старому» гамильтониану H , если в функции

$$H^* = cH + \frac{\partial F}{\partial t} + \sum \psi_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial t}$$

выразить переменные q и p через q^* и p^* при помощи обратных преобразований (если таковые существуют).

13 Свободные преобразования, (q, q^*) описание. Формулы преобразования импульсов гамильтониана

Преобразование из пункта 11 называется *свободным*, если для первых n его уравнений

$$q_j^* = \varphi_j(q, p, t) \quad (j = 1, \dots, n)$$

якобиан отличен от нуля:

$$\det \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial p} \right\| = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial p_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial p_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial p_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial p_n} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Тогда для функции $S(q, q^*, t) = F(q, p, t)$ можем записать следующие соотношения

$$\frac{\partial S}{\partial q_j} = cp_j, \quad \frac{\partial S}{\partial q_j^*} = -p_j^* \quad (j = 1, \dots, n),$$

и, кроме того, равенство связывающее «старый» и «новый» гамильтонианы:

$$H^* = cH + \frac{\partial S}{\partial t}.$$

14 «Наивная» теория возмущений, использование (q, p^*) описания для задания преобразований, близких к тождественным. Метод Биркгофа, понятие резонанса



15 Уравнение Гамильтона-Якоби. Полный интеграл уравнения Гамильтона-Якоби

Определение. Уравнением Гамильтона-Якоби называют следующее выражение

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H \left(q, \frac{\partial S}{\partial q}, t \right) = 0.$$

Определение. Любая функция $S(q, \alpha, t)$, обращающая уравнение Гамильтона-Якоби в тождество, зависящая от n констант α и удовлетворяющая условию

$$\det \left\| \frac{\partial^2 S}{\partial q_k \partial \alpha_j} \right\|_{k,j=1}^n \neq 0$$

называется *полным интегралом* уравнения Гамильтона-Якоби.

16 Понятие адиабатических инвариантов динамических систем

Пусть $H(p, q; \lambda)$ — фиксированная дважды непрерывно дифференцируемая функция λ . Положим $\lambda = \varepsilon t$ и будем рассматривать полученную систему с медленно меняющимся параметром $\lambda = \varepsilon t$:

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \quad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad H = H(p, q; \varepsilon t). \quad (*)$$

Определение. Величина $I(p, q; \lambda)$ называется *адиабатическим инвариантом* системы (*), если для всякого $\varkappa > 0$ существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что если $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, $0 < t < 1/\varepsilon$, то

$$|I(p(t), q(t); \varepsilon t) - I(p(0), q(0); 0)| < \varkappa.$$

17 Переменные действие угол. Условие возможности перехода к ним, формулы перехода (случай одной степени свободы)

hi

18 Понятие интегрируемых гамильтоновых систем. Теорема Лиувилля-Арнольда

hi

19 Резонансные и нерезонансные торы

hi

20 Невырожденность и изоэнергетическая невырожденность гамильтониана

hi

21 КАМ-теорема

hi

- 22 *Важные следствия КАМ-теоремы для систем с двумя степенями свободы, обладающих свойством изоэнергетической и обычной невырожденности*

hi

- 23 *Понятие детерминированного хаоса в динамических системах*

hi

- 24 *Сечения Пуанкаре*

hi

- 25 *Фрактальная размерность*

hi