









# Теорминимум по теормеху

Драчов Ярослав  
Факультет общей и прикладной физики, МФТИ

28 июня 2020 г.

## Исправления

	Положение равновесия ред. . . . .	3
	Добавлена система дифуров, описывающих движение . . . . .	3
	Добавлено условие приводимости к нормальной форме . . . . .	4
	Добавлена система дифуров, в соответствии с этим отредактирована формулировка . . . . .	4
	Добавлено упоминание стационарности системы, звёздочки не убирал, они общность не умаляют вроде, а показывают что в системе связано с обобщёнными силами . . . . .	5
	Добавлен критерий Льенара-Шипара . . . . .	5
	здесь упомянуто про тождественное равенство нулю, полуопределённость всё же больше для форм подходит, я пока что решил не исправлять . . . . .	6
	Формулировка по Амелькину . . . . .	6

## Содержание

<b>Первое задание</b>	<b>3</b>
1 Определение положения равновесия . . . . .	3
2 Устойчивое положение равновесия . . . . .	3
3 Теорема Лагранжа-Дирихле . . . . .	3
4 Первая теорема Ляпунова о неустойчивости . . . . .	3
5 Вторая теорема Ляпунова о неустойчивости . . . . .	4
6 Нормальные координаты . . . . .	4
7 Асимптотически устойчивое положение равновесия . . . . .	4
8 Теорема Ляпунова о лианеризованных системах . . . . .	4
9 Критерии Рауса-Гурвица и Льенара-Шипара устойчивости многочлена . . . . .	5
10 Теорема Ляпунова об устойчивости/асимптотической устойчивости (функция Ляпунова) . . . . .	6
11 Теорема Барбашина-Красовского . . . . .	6
12 Теорема Четаева о неустойчивости . . . . .	7
13 Понятие о бифуркации положений равновесия . . . . .	7

14	Бифуркация Андронова-Хопфа . . . . .	7
15	Метод Биркгофа(?) приведения к нормальной форме. Понятие резонанса . . . . .	7
16	Вынужденные колебания под действием периодической силы. Частотная характеристика, амплитудно-фазовая характеристика. Необходимые и достаточные условия возникновения резонанса в таких системах. . . . .	8
<b>Второе задание</b>		<b>9</b>
1	Понятие краевой задачи для лагранжевых систем, теорема Гамильтона-Остроградского, формула изменения лагранжиана при замене координат и времени, теорема Нётер . . . . .	9
2	Переменные Гамильтона. Обобщенные импульсы . . . . .	10
3	Функция Гамильтона через функцию Лагранжа . . . . .	11
4	Функция Гамильтона через обобщенный потенциал и кин.энергию (случай обобщенно консервативной системы) (см. 286-287 стр. Маркеева) . . . . .	11
5	Канонические уравнения Гамильтона . . . . .	11
6	Понятие первого интеграла динамической системы (не только для гамильтоновых систем!) . . . . .	11
7	Понятие скобок Пуассона, их свойства (дистрибутивность, антикоммутативность etc). Критерий первого интеграла гамильтоновой системы . . . . .	11
8	Трубка прямых путей. Интегральные инварианты Пуанкаре и Пуанкаре-Картана . . . . .	12
9	Теорема Лиувилля о сохранении фазового объема. Общая формула для изменения фазового объема произвольной динамической системы (не только гамильтоновой!) . . . . .	13
10	Классификация интегральных инвариантов, теорема Ли Хуачжуна . . . . .	13
11	Канонические преобразования. Производящие функции . . . . .	13
12	Замена гамильтониана при каноническом преобразовании, $(q, p)$ описание . . . . .	14
13	Свободные преобразования, $(q, q^*)$ описание. Формулы преобразования импульсов гамильтониана . . . . .	14
14	<i>«Наивная» теория возмущений, использование <math>(q, p^*)</math> описания для задания преобразований, близких к тождественным. Метод Биркгофа, понятие резонанса . . . . .</i>	15
15	Уравнение Гамильтона-Якоби. Полный интеграл уравнения Гамильтона-Якоби . . . . .	15
16	Понятие адиабатических инвариантов динамических систем . . . . .	15
17	Переменные действие угол. Условие возможности перехода к ним, формулы перехода (случай одной степени свободы) . . . . .	15
18	Понятие интегрируемых гамильтоновых систем. Теорема Лиувилля-Арнольда . . . . .	15
19	Резонансные и нерезонансные торы . . . . .	16
20	<i>Невырожденность и изоэнергетическая невырожденность гамильтониана . . . . .</i>	16
21	<i>КАМ-теорема . . . . .</i>	16

22	Важные следствия КАМ-теоремы для систем с двумя степенями свободы, обладающих свойством изознергетической и обычной невырожденности	16
23	Понятие детерминированного хаоса в динамических системах	16
24	Сечения Пуанкаре	16
25	Фрактальная размерность	16

## Первое задание

### 1 Определение положения равновесия

**Определение.** Положение системы материальных точек, определяемое в некоторой системе отсчёта обобщёнными координатами  $q_j = q_j^n$  ( $j = \overline{1, n}$ ), называется *положением равновесия* для наблюдателя, связанного с этой системой отсчёта, если система материальных точек, будучи приведена в это положение с нулевыми скоростями  $\dot{q}_j^0$  ( $j = \overline{1, n}$ ), остаётся в нём сколь угодно долго.

Положение равновесия ред.

### 2 Устойчивое положение равновесия

Пусть поставлена задача Коши для нахождения движения системы:

$$\mathbf{f}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}, t) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{q}(t_0) = \mathbf{q}^0, \quad \dot{\mathbf{q}}(t_0) = \dot{\mathbf{q}}^0.$$

Добавлена система дифуров, описывающих движение

**Определение.** Положение равновесия  $\mathbf{q} = \mathbf{0}$  называется *устойчивым*, если для любого  $\varepsilon > 0$  существует такое  $\delta = \delta(\varepsilon)$ , что для всех  $t > t_0$  выполняются неравенства

$$|q_i(t)| < \varepsilon, \quad |\dot{q}_i(t)| < \varepsilon \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

где  $q_i(t)$  — решения поставленной задачи Коши, при условии, что в начальный момент  $t = t_0$

$$|q_i^0| < \delta, \quad |\dot{q}_i^0| < \delta.$$

### 3 Теорема Лагранжа-Дирихле

**Теорема (Лагранжа-Дирихле).** Если в положении равновесия консервативной системы потенциальная энергия имеет строгий локальный минимум, то это положение равновесия устойчиво.

### 4 Первая теорема Ляпунова о неустойчивости

**Теорема (Ляпунова, 1-я).** Если потенциальная энергия консервативной системы в положении равновесия не имеет минимума и это узнаётся уже по членам второго порядка в разложении функции  $\Pi$  в ряд в окрестности положения равновесия без необходимости рассматривания членов высших порядков, то положение равновесия неустойчиво.

## 5 Вторая теорема Ляпунова о неустойчивости

**Теорема (Ляпунова, 2-я).** Если в положении равновесия потенциальная энергия имеет максимум и это узнаётся по членам наименее высокого порядка, которые действительно присутствуют в разложении этой функции в ряд в окрестности положения равновесия, то это положение равновесия неустойчиво.

## 6 Нормальные координаты

**Определение.** Обобщённые координаты  $\theta_j$ , в которых кинетическая и потенциальная энергия системы имеют вид

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \dot{\theta}_j^2, \quad \Pi = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \lambda_j \theta_j^2,$$

называются *нормальными*.

Привести систему к нормальным координатам можно в случае, если кинетическая энергия в первоначальных переменных — положительно-определённая квадратичная форма скоростей, а потенциальная энергия произвольная квадратичная форма координат.

В нормальных координатах лианеризованные уравнения движения в окрестности положения равновесия имеют вид  $n$  не связанных друг с другом уравнений второго порядка

$$\ddot{\theta}_j + \lambda_j \theta_j = 0, \quad (j = 1, 2, \dots, n).$$

Добавлено условие приводимости к нормальной форме

## 7 Асимптотически устойчивое положение равновесия

Пусть поставлена задача Коши для нахождения движения системы:

$$\mathbf{f}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}, t) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{q}(t_0) = \mathbf{q}^0, \quad \dot{\mathbf{q}}(t_0) = \dot{\mathbf{q}}^0.$$

**Определение.** Положение равновесия  $\mathbf{q} = \mathbf{0}$  называется *асимптотически устойчивым*, если оно устойчиво и, если, кроме того, существует такая  $\delta$ -окрестность точки  $\mathbf{q} = \mathbf{0}$ ,  $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$ , что для всех  $|\mathbf{q}_j^0| < \delta$ ,  $|\dot{\mathbf{q}}_j^0| < \delta$  выполняются условия

$$\lim_{t \rightarrow \infty} q_j(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{q}_j(t) = 0, \quad (j = 1, \dots, n),$$

где  $q_j(t)$  — решения поставленной задачи Коши.

Добавлена система дифуров, в соответствии с этим отредактирована формулировка

## 8 Теорема Ляпунова о лианеризованных системах

**Теорема (Ляпунова о лианеризованных системах).** Если все корни характеристического уравнения

$$\det \|\mathbf{A}\lambda^2 + \mathbf{B}^*\lambda + (\mathbf{C} + \mathbf{C}^*)\| = 0$$

системы дифференциальных уравнений линейного приближения

$$\mathbf{A}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}^*\dot{\mathbf{q}} + (\mathbf{C} + \mathbf{C}^*)\mathbf{q} = \mathbf{0}$$

имеют отрицательные действительные части, то положение равновесия  $q = 0$  исходной стационарной системы, описываемой уравнениями

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j, \quad Q_j = -\frac{\partial V}{\partial q_j} + Q_j^* \quad (j = 1, \dots, n),$$

асимптотически устойчиво. Если хотя бы один корень характеристического уравнения имеет действительную часть, то положение равновесия, определяемое системой, неустойчиво.

Добавлено упоминание стационарности системы, звёздочки не убирал, они общность не умаляют вроде, а показывают что в системе связано с обобщёнными силами

## 9 Критерии Рауса-Гурвица и Лъенара-Шипара устойчивости многочлена

**Определение.** Назовём матрицей Гурвица квадратную матрицу  $m$ -го порядка

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \dots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & \dots & 0 \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & a_m \end{pmatrix}.$$

Составим главные миноры матрицы Гурвица (определители Гурвица)

$$\Delta_1 = a_1, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix}, \dots, \quad \Delta_m = a_m \Delta_{m-1}.$$

**Теорема** (Критерий Рауса-Гурвица). Для того чтобы все корни уравнения

$$a_0 \lambda^m + a_1 \lambda^{m-1} + \dots + a_{m-1} \lambda + a_m = 0$$

с вещественными коэффициентами и положительным старшим коэффициентом  $a_0$  имели отрицательные вещественные части, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства

$$\Delta_1 > 0, \quad \Delta_2 > 0, \quad \dots, \quad \Delta_m > 0.$$

**Теорема** (Критерий Лъенара-Шипара). Для того чтобы многочлен  $f(\lambda) \equiv a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n$  при  $a_0 > 0$  имел все корни с отрицательными вещественными частями, необходимо и достаточно, чтобы

Добавлен критерий Лъенара-Шипара

1. все коэффициенты многочлена  $f(\lambda)$  были положительны

$$a_1 > 0, \quad a_2 > 0, \quad \dots, \quad a_n > 0;$$

2. имели место детерминантные неравенства

$$\Delta_{n-1} > 0, \quad \Delta_{n-3} > 0, \quad \dots$$

(здесь, как и ранее,  $\Delta_k$  обозначает определитель Гурвица  $k$ -го порядка).

## 10 Теорема Ляпунова об устойчивости/асимптотической устойчивости (функция Ляпунова)

**Теорема** (Ляпунова, об устойчивости движения). Если дифференциальные уравнения возмущённого движения таковы, что существует знакоопределённая функция  $V$ , производная которой  $\dot{V}$  в силу этих уравнений является или знакопостоянной функцией противоположного знака с  $V$ , или тождественно равной нулю, то невозмущённое движение устойчиво.

**Теорема** (Ляпунова, об асимптотической устойчивости). Если дифференциальные уравнения возмущённого движения таковы, что существует знакоопределённая функция  $V(x_1, x_2, \dots, x_m)$ , производная которой  $\dot{V}$  в силу этих уравнений есть знакоопределённая функция противоположного знака с  $V$ , то невозмущённое движение асимптотически устойчиво.

здесь упомянуто про тождественное равенство нулю, полуопределённость всё же больше для форм подходит, я пока что решил не исправлять

## 11 Теорема Барбашина-Красовского

**Теорема** (Барбашина-Красовского). Пусть существует функция  $V(\mathbf{x})$ , для которой в некоторой окрестности положения равновесия  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  выполняются условия:

Формулировка по Амелькину

1. Её производная по времени, вычисленная в силу уравнений

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad (*)$$

знакоотрицательна, т. е.

$$\dot{V}|_{(*)} = \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}^T} \dot{\mathbf{x}}|_{(*)} = \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}^T} \mathbf{f} \leq 0.$$

2. Множество  $X^0$  точек  $\mathbf{x}$ , в которых производная  $\dot{V}$  равна нулю:

$$X^0 : \dot{V}(\mathbf{x})|_{(*)} = \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}^T} \mathbf{f} = 0$$

кроме  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{0}$  не содержит других целых траекторий системы (\*).  
 $(\mathbf{x}(t) = \mathbf{0})$  — единственное решение, полностью лежащее на множестве  $X^0$ .

Тогда

- а) Если функция  $V(\mathbf{x})$  имеет строгий минимум в точке  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ , то это положение асимптотически устойчиво.
- б) Если в точке  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  функция  $V(\mathbf{x})$  не имеет минимума (включая строгий), то это положение неустойчиво.

## 12 Теорема Четаева о неустойчивости

**Теорема** (Четаева, о неустойчивости). Если дифференциальные уравнения возмущённого движения таковы, что существует функция  $V(x_1, x_2, \dots, x_m)$  такая, что в сколь угодно малой окрестности

$$|x_i| < h \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

существует область  $V > 0$  и во всех точках области  $V > 0$  производная  $\dot{V}$  в силу этих уравнений принимает положительные значения, то невозмущённое движение неустойчиво.

## 13 Понятие о бифуркации положений равновесия

Дифференциальные уравнения динамических систем часто зависят не только от фазовых переменных, но и от некоторых параметров. Иногда изменение параметров приводит к качественным перестройкам структуры фазовых траекторий системы — изменениям количества положений равновесия, характера их устойчивости, кардинальным трансформациям траекторий и т. п. В окрестности определённых значений параметров перестройки происходят при сколь угодно малом изменении параметров и называются *бифуркациями*.

## 14 Бифуркация Андронова-Хопфа

*Бифуркацией Андронова-Хопфа* называется бифуркация рождения цикла.

## 15 Метод Биркгофа(?) приведения к нормальной форме. Понятие резонанса

**Определение.** *Нормальной формой* системы

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} = [x_1, \dots, x_n]^T, \quad \mathbf{f} = [f_1, \dots, f_n]^T$$

называется форма содержащая лишь линейные и резонансные слагаемые.

При помощи разложения в ряд Тейлора функции  $\mathbf{f}$  в окрестности положения равновесия выделим в данной системе линейные слагаемые:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{g}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{g} = [g_1, \dots, g_n]^T,$$

$$g_i(\mathbf{x}) = \sum_{k_1, \dots, k_n} g_{k_1, \dots, k_n}^i x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n}, \quad k_1 + \dots + k_n \geq 2.$$

Здесь  $\mathbf{A}$  — матрица с постоянными коэффициентами размера  $n \times n$ ,  $g_{k_1, \dots, k_n}$  — постоянные коэффициенты в полиномах  $\mathbf{g}$ .

**Определение.** *Нормализующим преобразованием* (вплоть до степени  $k$ ) называется последовательность преобразований

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{y} + \mathbf{p}(\mathbf{y}), \quad \mathbf{p}(\mathbf{y}) = [p_1, \dots, p_n]^T,$$

$$p_i(\mathbf{y}) = \sum_{k_1, \dots, k_n} p_{k_1, \dots, k_n}^i y_1^{k_1} \dots y_n^{k_n}, \quad k_1 + \dots + k_n = k$$

с полиномиальными коэффициентами

$$p_{k_1, \dots, k_n}^i = \frac{g_{k_1, \dots, k_n}^i}{k_1 \lambda_1 + \dots + k_n \lambda_n - \lambda_i},$$

приводящее систему к её нормальной форме (вплоть до слагаемых степени  $k$ ).

**Определение.** Нелинейные слагаемые системы, показатели  $k_1, \dots, k_n$  которых таковы, что выполняется  $\lambda_i = k_1 \lambda_1 + \dots + k_n \lambda_n$ , называются *резонансными*.

В соответствии с описанным выше алгоритмом все нерезонансные слагаемые могут быть исключены из правой части системы при помощи последовательно применяемых полиномиальных замен. В то же время резонансные слагаемые не могут быть ни исключены, ни каким-либо образом ими преобразованы.

## 16 Вынужденные колебания под действием периодической силы. Частотная характеристика, амплитудно-фазовая характеристика. Необходимые и достаточные условия возникновения резонанса в таких системах.

**Определение.** Колебания, которые возникают благодаря наличию вынуждающей силы, зависящей явно от времени, и к которым в пределе стремится суммарное движение, называют *вынужденными колебаниями*.

Представим уравнения линейного приближения стационарной системы в виде

$$\sum_{k=1}^n (a_{jk} \ddot{q}_k + b_{jk} \dot{q}_k + c_{jk} q_k) = Q_j(t) \quad (j = 1, \dots, n),$$

где  $Q_j(t)$  — зависящие явно от времени части обобщённых сил. Предполагается, что в процессе движения они остаются малыми по модулю и не выводят систему из малой окрестности положения равновесия.

В связи с тем, что данная система уравнений является линейной, а для линейных систем имеет место принцип суперпозиции, можно рассмотреть движение системы под действием какой-либо одной силы из  $Q_j(t)$  ( $j = 1, \dots, n$ ), предположив, что все остальные равны нулю. Определив по разности движения, возникающие под действием каждой из таких обобщённых сил, их следует затем сложить.

Учитывая это обстоятельство, положим

$$Q_2(t) = Q_3(t) = \dots = Q_n(t) = 0,$$

т. е. будем считать, что отлична от нуля только обобщённая сила  $Q_1(t)$ , относящаяся к первой обобщённой координате, а все остальные обобщённые силы такого рода равны нулю.



Введём обозначения

$$d_{jk}(i\Omega) = a_{jk}(i\Omega)^2 + b_{jk}(i\Omega) + c_{jk},$$

$$\Delta = \det \|d_{jk}(i\Omega)\| = \begin{pmatrix} d_{11}(i\Omega) & \cdots & d_{1n}(i\Omega) \\ \vdots & & \vdots \\ d_{n1}(i\Omega) & \cdots & d_{nn}(i\Omega) \end{pmatrix},$$

$$W_{1k}(i\Omega) = \frac{\Delta_{1k}}{\Delta},$$

где  $\Delta_{1k}$  — алгебраическое дополнение расположенного в первой строке и  $k$ -ом столбце элемента определителя  $\Delta$ . Тогда при поиске частного решения неоднородной системы дифференциальных уравнений в виде  $\tilde{q}_f = Be^{i\Omega t}$  и, выделяя в последствии мнимую часть, получим

$$q_k = A|W_{1k}(i\Omega)| \sin[\Omega t + \arg W_{1k}(i\Omega)] \quad (k = 1, \dots, n).$$

**Определение.** Введённая выше функция  $W_{1k}(i\Omega)$  называется *частотной характеристикой системы*, или, как говорят иногда, её *амплитудно-фазовой характеристикой*.

**Определение.** Если отдельно рассмотреть изменение модуля и аргумента вектора  $W(i\Omega)$  в зависимости от  $\Omega$ , то получатся характеристики, которые называются соответственно *амплитудной* и *фазовой* характеристиками системы.

**Определение.** Если амплитудная характеристика системы при некотором значении  $\Omega = \Omega^*$  имеет отчётливо выраженный пик, то при одной и той же амплитуде внешней силы  $Q_1$  амплитуда отклика резко возрастает, когда частота внешней силы приближается к значению  $\Omega = \Omega^*$ . Это явление называют *резонансом*.

## Второе задание

### 1 Понятие краевой задачи для лагранжевых систем, теорема Гамильтона-Остроградского, формула изменения лагранжиана при замене координат и времени, теорема Нётер

**Определение.** *Прямым путём* системы называют путь этой системы из точки  $A$  в точку  $B$  в  $(n+1)$ -мерном расширенном координатном пространстве  $q_1, \dots, q_n, t$ , удовлетворяющий соответствующим уравнениям Лагранжа.

При построении прямого пути системы решается краевая задача с заданными точками  $A$  и  $B$ .

**Теорема** (Гамильтона-Остроградского). *Прямой путь является экстремалью рассматриваемой вариационной задачи — на прямом пути действие по Гамильтону достигает стационарного значения.*

Рассмотрим преобразования

$$q_j = \varphi_j(q^*, t^*), \quad t = \psi(q^*, t^*), \quad j = 1, \dots, n,$$

где  $q^*$  и  $t^*$  — «новые» координаты и время,  $q$  и  $t$  — «старые» координаты и время, а  $\varphi_j$  и  $\psi$  — достаточно гладкие функции. Предположим, что данные преобразования разрешимы относительно переменных  $q^*$  и  $t^*$ .

Формула изменения лагранжиана при замене координат и времени тогда выглядит следующим образом

$$L^*(q^*, dq^*/dt^*, t^*) = L(\varphi, d\varphi/d\psi, \psi)(d\psi/dt^*),$$

где, в свою очередь,

$$\frac{d\varphi_j}{d\psi} = \frac{\sum_k \frac{\partial \varphi_j}{\partial q_k^*} \frac{dq_k^*}{dt^*} + \frac{\partial \varphi_j}{\partial t^*}}{\sum_k \frac{\partial \psi}{\partial q_k^*} \frac{dq_k^*}{dt^*} + \frac{\partial \psi}{\partial t^*}},$$

а  $d\psi/dt^*$  совпадает со знаменателем данной дроби.

**Теорема (Нётер).** Пусть задана система движущихся в потенциальном поле материальных точек, имеющая лагранжиан  $L(q, dq/dt, t)$ , и пусть существует однопараметрическое семейство преобразований

$$q_j^* = \varphi_j(q, t, \alpha) \quad (j = 1, \dots, n), \quad t^* = \psi(q, t, \alpha),$$

удовлетворяющее условиям

- тождественности при  $\alpha = 0$ , т. е.

$$\varphi_j(q, t, 0) = q_j \quad (j = 1, \dots, n), \quad \psi(q, t, 0) = t;$$

- существования обратного преобразования:

$$q_j = \tilde{\varphi}_j(q^*, t^*, \alpha) \quad (j = 1, \dots, n), \quad t = \tilde{\psi}(q^*, t^*, \alpha).$$

Пусть, далее, лагранжиан  $L$  инвариантен по отношению к таким преобразованиям, т. е. «новый» лагранжиан  $L^*$  (вычисленный по формуле выше) не зависит от  $\alpha$  и как функция  $q^*, dq^*/dt^*, t^*$  имеет совершенно такой же вид, как и «старый» лагранжиан  $L$  как функция  $q, dq/dt, t$ . Тогда существует функция  $\Phi(q, p, t)$ , которая не изменяется во время движения этой системы, т. е. является первым интегралом движения. Эта функция имеет вид

$$\Phi(q, p, t) = \sum p_j \left( \frac{\partial \varphi_j}{\partial \alpha} \right) \Big|_{\alpha=0} - H \left( \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} \right) \Big|_{\alpha=0},$$

где  $H$  — гамильтониан рассматриваемой системы.

## 2 Переменные Гамильтона. Обобщенные импульсы

Состояние системы можно задавать при помощи параметров  $q_i, p_i, t$ , где  $p_i$  — обобщённые импульсы, определяемые равенствами

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad (i = 1, \dots, n).$$

**Определение.** Переменные  $q_i, p_i, t$  называют переменными Гамильтона.

### 3 Функция Гамильтона через функцию Лагранжа

Функцию Гамильтона через функцию Лагранжа можно получить при помощи *преобразования Лежандра* функции  $L(q_i, \dot{q}_i, t)$  по переменным  $\dot{q}_i$ , ( $i = 1, 2, \dots, n$ )

$$H(q_i, p_i, t) = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - L(q_j, \dot{q}_j, t),$$

где величины  $\dot{q}_i$  выражены через  $q_j, p_j, t$ .

### 4 Функция Гамильтона через обобщенный потенциал и кин.энергию (случай обобщенно консервативной системы) (см. 286-287 стр. Маркеева)

Система называется *обобщённо консервативной*, если её функция Гамильтона не зависит явно от времени. В этом случае

$$H(q_i, p_i) = T_2 - T_0 + \Pi = h,$$

где

$$T_2 = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^m a_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k, \quad T_0 = a_0.$$

### 5 Канонические уравнения Гамильтона

**Определение.** *Каноническими уравнениями Гамильтона* называются уравнения

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad (i = 1, 2, \dots).$$

### 6 Понятие первого интеграла динамической системы (не только для гамильтоновых систем!)

**Определение.** *Первыми интегралами дифференциальных уравнений движения* называются функции от координат точек и их скоростей, которые не изменяются во время движения системы.

### 7 Понятие скобок Пуассона, их свойства (дистрибутивность, антикоммутативность etc). Критерий первого интеграла гамильтоновой системы

**Определение.** Пусть  $u$  и  $v$  — дважды непрерывно дифференцируемые функции от  $q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n, t$ . Выражение

$$(u, v) = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial u}{\partial q_i} \frac{\partial v}{\partial p_i} - \frac{\partial u}{\partial p_i} \frac{\partial v}{\partial q_i} \right)$$

называют *скобкой Пуассона* функций  $u$  и  $v$ .

Свойства скобок Пуассона:

1.  $(u, v) = -(v, u)$ ,
2.  $(cu, v) = c(u, v) \quad (c = \text{const})$ ,
3.  $(u + v, w) = (u, w) + (v, w)$ ,
4.  $\frac{\partial}{\partial t}(u, v) = \left(\frac{\partial u}{\partial t}, v\right) + \left(u, \frac{\partial v}{\partial t}\right)$ ,
5.  $((u, v), w) + ((v, w), u) + ((w, u), v) = 0$ .

Необходимое и достаточное условие того, что  $f$  — первый интеграл, можно записать в виде равенства

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (f, H) = 0.$$

## 8 Трубка прямых путей. Интегральные инварианты Пуанкаре и Пуанкаре-Картана

**Определение.** Множество прямых путей «выпускаемых» из замкнутого несамопересекающегося контура  $C_0$  в  $(2n+1)$ -мерном расширенном фазовом пространстве  $q, p, t$  динамической системой, движущейся в потенциальном поле и имеющей гамильтониан  $H$  образует *трубку прямых путей*.

**Определение.** Контурный интеграл

$$J = \oint_C \left( \sum p_j dq_j - H dt \right),$$

взятый по контуру  $C$ , охватывающему трубку прямых путей называют *интегральным инвариантом Пуанкаре-Картана*.

Данный интеграл, взятый по любому контуру  $C^*$ , охватывающему определённую трубку прямых путей, не зависит от выбора этого контура на трубке.

**Определение.** Контурный интеграл, рассматриваемый только на «одновременных» контурах  $\tilde{C}$ , имеет вид

$$J_1 = \oint_{\tilde{C}} \sum p_j dq_j = \text{const}$$

и называется *универсальным интегральным инвариантом Пуанкаре*.

Особенность интегрального инварианта, взятого в такой форме, состоит в том, что в подынтегральное выражение уже не входит гамильтониан, и следовательно, этот интегральный инвариант оказывается *одинаковым для всех динамических систем*, движущихся в произвольных потенциальных полях.

## 9 Теорема Лиувилля о сохранении фазового объема. Общая формула для изменения фазового объема произвольной динамической системы (не только гамильтоновой!)

**Теорема (Лиувилля).** *Фазовый объём  $V$  не зависит от  $t$ , т. е. является инвариантом движения.*

Пусть задана система обыкновенных дифференциальных уравнений  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ , решения которой продолжаются на всю ось времени. Пусть также  $D(t)$  — область в пространстве  $\{\mathbf{x}\}$  и  $v(t)$  — её объём, тогда справедлива следующая формула

$$\left. \frac{dv(t)}{dt} \right|_{t=t_0} = \int_{D(t_0)} \operatorname{div} \mathbf{f} dx \quad (dx = dx_1 \dots dx_n).$$

## 10 Классификация интегральных инвариантов, теорема Ли Хуачжуна

Универсальный относительный интегральный инвариант первого порядка в общем виде можно записать так

$$\tilde{J}_1 = \oint_{\tilde{C}} \sum [A_j(q, p, t) \delta q_j + B_j(q, p, t) \delta p_j].$$

**Теорема.** *Любой универсальный относительный инвариант первого порядка  $\tilde{J}_1$  может отличаться от инварианта Пуанкаре лишь постоянным множителем, т. е. для любого  $J_1$  существует константа  $c$  такая, что*

$$\tilde{J}_1 = c J_1.$$

## 11 Канонические преобразования. Производящие функции

Рассмотрим преобразование

$$q_j^* = \varphi(q, p, t), \quad p_j^* = \psi(q, p, t) \quad (j = 1, \dots, n),$$

которое переводит «старые» гамильтоновы переменные  $p$  и  $q$  в «новые» гамильтоновы переменные  $q^*$  и  $p^*$

**Определение.** Преобразование выше называется *каноническим*, если оно переводит любую гамильтонову систему

$$\frac{dq_j}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \quad \frac{dp_j}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_j} \quad (j = 1, \dots, n)$$

в новую гамильтонову систему

$$\frac{dq_j^*}{dt} = \frac{\partial H^*}{\partial p_j^*}, \quad \frac{dp_j^*}{dt} = -\frac{\partial H^*}{\partial q_j^*} \quad (j = 1, \dots, n).$$

**Теорема.** Для того чтобы рассматриваемое преобразование было каноническим, необходимо и достаточно, чтобы существовали такая функция  $F(q, p, t)$  и такое число  $c$ , чтобы тождественно выполнялось равенство

$$\sum \psi_j \delta \varphi_j - c \sum p_j \delta q_j = -\delta F(q, p, t).$$

В последней формуле  $\delta$  — оператор дифференцирования функции от  $q, p, t$  при «замороженном» времени, т. е.

$$\delta \varphi_j = d\varphi_j - \frac{\partial \varphi_j}{\partial t} dt, \quad \delta F = dF - \frac{\partial F}{\partial t} dt..$$

**Определение.** Функцию  $F(q, p, t)$  из последней теоремы называют *производящей*.

## 12 Замена гамильтониана при каноническом преобразовании, $(q, p)$ описание

**Теорема.** Пусть преобразование из предыдущего пункта является каноническим, причём  $c$  и  $F(q, p, t)$ , при которых удовлетворяется тождество последней теоремы известны. Тогда «новый» гамильтониан  $H^*$  определяется по «старому» гамильтониану  $H$ , если в функции

$$H^* = cH + \frac{\partial F}{\partial t} + \sum \psi_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial t}$$

выразить переменные  $q$  и  $p$  через  $q^*$  и  $p^*$  при помощи обратных преобразований (если таковые существуют).

## 13 Свободные преобразования, $(q, q^*)$ описание. Формулы преобразования импульсов гамильтониана

Преобразование из пункта 11 называется *свободным*, если для первых  $n$  его уравнений

$$q_j^* = \varphi_j(q, p, t) \quad (j = 1, \dots, n)$$

якобиан отличен от нуля:

$$\det \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial p} \right\| = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial p_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial p_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial p_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial p_n} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Тогда для функции  $S(q, q^*, t) = F(q, p, t)$  можем записать следующие соотношения

$$\frac{\partial S}{\partial q_j} = cp_j, \quad \frac{\partial S}{\partial q_j^*} = -p_j^* \quad (j = 1, \dots, n),$$

и, кроме того, равенство связывающее «старый» и «новый» гамильтонианы:

$$H^* = cH + \frac{\partial S}{\partial t}.$$

- 14 «Наивная» теория возмущений, использование  $(q, p^*)$  описания для задания преобразований, близких к тождественным. Метод Биркгофа, понятие резонанса



- 15 Уравнение Гамильтона-Якоби. Полный интеграл уравнения Гамильтона-Якоби

**Определение.** Уравнением Гамильтона-Якоби называют следующее выражение

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}, t\right) = 0.$$

**Определение.** Любая функция  $S(q, \alpha, t)$ , обращающая уравнение Гамильтона-Якоби в тождество, зависящая от  $n$  констант  $\alpha$  и удовлетворяющая условию

$$\det \left\| \frac{\partial^2 S}{\partial q_k \partial \alpha_j} \right\|_{k, j=1}^n \neq 0$$

называется *полным интегралом* уравнения Гамильтона-Якоби.

- 16 Понятие адиабатических инвариантов динамических систем

Пусть  $H(p, q; \lambda)$  — фиксированная дважды непрерывно дифференцируемая функция  $\lambda$ . Положим  $\lambda = \varepsilon t$  и будем рассматривать полученную систему с медленно меняющимся параметром  $\lambda = \varepsilon t$ :

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \quad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad H = H(p, q; \varepsilon t). \quad (*)$$

**Определение.** Величина  $I(p, q; \lambda)$  называется *адиабатическим инвариантом* системы (\*), если для всякого  $\varkappa > 0$  существует  $\varepsilon_0 > 0$  такое, что если  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ ,  $0 < t < 1/\varepsilon$ , то

$$|I(p(t), q(t); \varepsilon t) - I(p(0), q(0); 0)| < \varkappa.$$

- 17 Переменные действие угол. Условие возможности перехода к ним, формулы перехода (случай одной степени свободы)

hi

- 18 Понятие интегрируемых гамильтоновых систем. Теорема Лиувилля-Арнольда

hi

19 Резонансные и нерезонансные торы

hi

20 *Невырожденность и изоэнергетическая невырожденность гамильтониана*

hi

21 *КАМ-теорема*

hi

22 *Важные следствия КАМ-теоремы для систем с двумя степенями свободы, обладающих свойством изоэнергетической и обычной невырожденности*

hi

23 *Понятие детерминированного хаоса в динамических системах*

hi

24 *Сечения Пуанкаре*

hi

25 *Фрактальная размерность*

hi