U04_freie_Stationierung

1 Inhalt

2 Aufgabenstellung

Im Feldkurs wurde eine freie Stationierung gemacht. Diese gilt es nun nach der Methode der kleinsten Quadrate auszugleichen. Nachfolgend wird das Vorgehen erläutert.

3 Projektionsdistanzen bestimmen

Die auf dem Feld bestimmten Distanzen beziehen sich auf die Erdoberfläche. Die Koordinaten der Punkte befinden sich in Bezugssystem. Entsprechend müssen die gemessenen Distanzen korrigiert werden. Die Distanzreduktion erfolgt in drei Schritten (siehe Abbildung 1):

1. Reduktion der Schrägdistanz (dS) auf die Horizontaldistanz (dHor)
2. Reduktion der Horizontaldistanz (dHor) auf die Distanz auf Höhe 0 (d0)
3. Reduktion der Distanz von Höhe 0 (d0) auf die Projektionsdistanz (dProj)

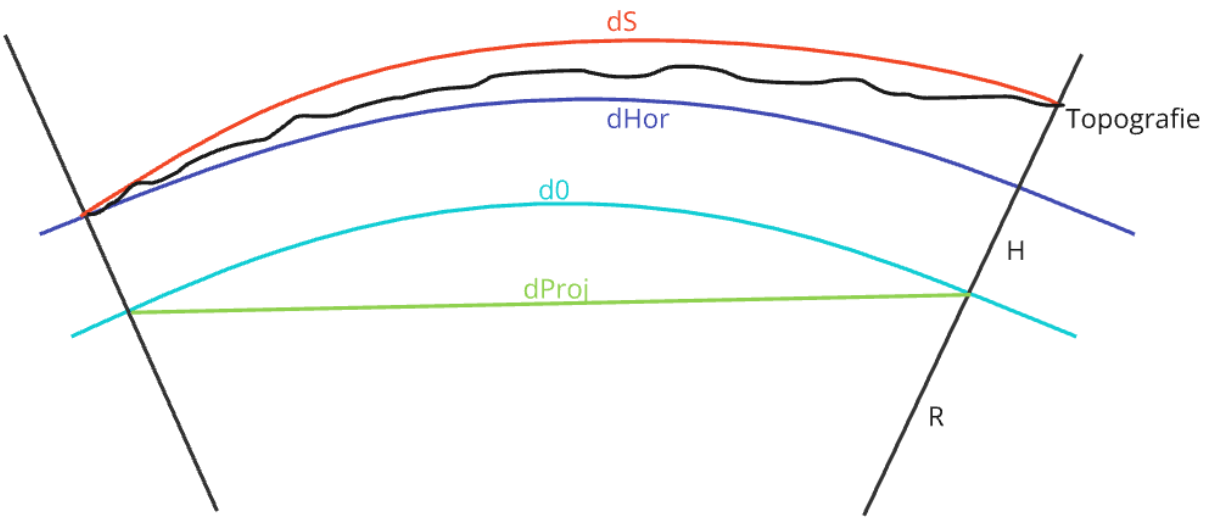

Abbildung 1: Darstellung Distanzreduktion

Formel 2 und Formel 3 stammen aus (Grimm 2021: 35 ff). Formel 1 stammt aus eigener Herleitung.

$$d_{Hor} = \sin(V) * d_S$$

Formel 1: Berechnung Horizontaldistanz

$$d_0 = d_{Hor} - d_{Hor} * \frac{H}{R + H}$$

Formel 2: Berechnung Distanz auf Höhe 0

$$d_{Proj} = d_0 + d_0 * \frac{(Nord - Nord_0)^2}{2 * R^2}$$

Formel 3: Berechnung Projektionsdistanz

Mit:

$V: Zenitwinkel$
$d_S: gemessene\ Schrägdistanz$
$H: Höhe\ über\ Meer$
$R: Erdradius = 6'378'816\ m$
$Nord_0: Ursprung\ Nord\ (1'200'000\ m)$

4 Beobachtungsgleichung

In die Ausgleichung werden Richtungs- und Distanzmessungen eingeführt. Daher entspringen zwei Beobachtungsgleichungen. Für die Herleitung der Beobachtungsgleichungen wird auf die Literatur verwiesen.

$$\overline{d_{ik}} = d_{ik} + v_{ik} = \sqrt{(x_k - x_i)^2 + (y_k - y_i)^2} - m * d_{proj}$$

Formel 4: Beobachtungsgleichung der Distanzen (nach Carosio 2008: 137)

$$\overline{ri_{ik}} = ri_{ik} + v_{ik} = arctan\left(\frac{E_k - E_i}{N_k - N_i}\right) + n * 200^{gon}$$

Formel 5: Beobachtungsgleichung der Richtungen (nach Carosio 2008: 144)

5 Näherungswerte

Wie in Kapitel 4 zu sehen ist, sind die Beobachtungsgleichungen nicht linear. Deswegen werden Näherungswerte für die Beobachtungen benötigt. So kann die Beobachtungsgleichung nach Taylor linearisiert werden. (Carosio 2008: 138)

5.1 Näherungswerte der Unbekannten

Wir haben pro freie Stationierung vier Unbekannte. Namentlich sind dies die Koordinaten (Ost, Nord) sowie ein Massstab und eine Orientierung.

Als Näherung für die Koordinaten können wir die Resultate der freien Stationierung nehmen. Wir gehen davon aus, dass die Messungen keinen Massstab haben. Deswegen verwenden wir den Massstab 1 als Näherung. Für die Orientierung haben Sie in der ersten Übung «U01_orientierungsunbekannte» bereits gelernt, wie man einen guten Wert dafür bekommen kann. Damals haben wir ein gewichtetes Mittel verwendet. In den meisten Fällen ist dies aber «Overkill». Wir verwenden als Näherung für die Orientierung ein einfaches Mittel (Azimut – Richtungsmessung).

5.2 Näherungswerte der Beobachtungen

Mit den Näherungswerten der Unbekannten können wir die Beobachtungen verbessern und somit Näherungswerte der Beobachtungen erhalten.

5.2.1 Näherungswert Distanzen

Als Näherungswerte für die Distanzen berechnen wir die Projektionsdistanz aus den genäherten Koordinaten der freien Stationierung und den Anschlusspunkten gemäss Formel 6.

$$d_{0_{ik}} = \sqrt{(e_i - e_k)^2 + (n_i - n_k)^2}$$

Formel 6: Berechnung Näherungsdistanz

5.2.2 Näherungswert Richtungen

Als Näherungswert für die Richtungen verwenden wir das gemäss Formel 7 berechnete Azimut. Da wir allerdings eine Näherung für die Orientierungsunbekannte bestimmt haben, müssen wir diese ebenfalls an den gemessenen Richtungen anbringen. Dies wird gemäss Formel 8 gemacht.

$$Azi = arctan\left(\frac{E_k - E_i}{N_k - N_i}\right) + n * 200^{gon}$$

Formel 7: Berechnung Azimut

$$Ri_{korr} = Ri + Ori_0$$

Formel 8: Korrigierte Richtung

6 Verbesserungsgleichungen aufstellen

Aus den Beobachtungsgleichungen kann die Verbesserungsgleichung erstellt werden. Dafür wird auf die Literatur verwiesen. Die Verbesserungsgleichung, genau wie die Beobachtungsgleichung ist nicht linear. Also muss sie nach Taylor linearisiert werden (Niemeier 2008: 170).

Es resultieren wiederum je eine Verbesserungsgleichung für die Distanzbeobachtungen und eine Verbesserungsgleichung für die Richtungsbeobachtungen. Werden nach der Linearisierung sehen diese wie folgt aus:

$$Distanz: v_{ik} = \sqrt{(N_{ok} - N_{oi})^2 + (E_{ok} - E_{oi})^2} - d_i \xrightarrow{Taylor}$$
$$v_{ik} = -a * N_i - b * E_i + a * N_k + b * E_k - d_0 * m - (s_{ik} - s_0)$$

$$mit: a = \frac{N_{0k} - N_{0i}}{d_{0ik}}; b = \frac{E_{0k} - E_{0i}}{d_{0ik}}$$

Formel 9: Linearisierung Verbesserungsgleichung Distanzen (nach Carosio 2008: 138 f)

$$Richtung: v_{ik} = arctan\left(\frac{E_k - E_i}{N_k - N_i}\right) + n * 200^{gon} - Ri_{ik} \xrightarrow{Taylor}$$
$$v_{ik} = -Ori + a * N_i + b * E_i - a * N_k - b * E_k - f_{ik}$$

$$mit: a = \frac{E_{0k} - E_{0i}}{{D_0}^2} * \frac{200}{\pi}; b = -\frac{N_{0k} - N_{0i}}{{D_0}^2} * \frac{200}{\pi}$$

Formel 10: Linearisierung der Verbesserungsgleichung Richtungen (nach Carosio 2008: 144 f)

Sowohl für die Verbesserungsgleichung der Richtungen als auch für die der Distanzen gilt:

- Roter Teil der Formel: für die Berechnung der Standpunktunbekannten
- Blauer Teil der Formel: für die Berechnung der Zielpunktunbekannten
- Gelber Teil der Formel: für Stand- und Zielpunktunbekannte benötigt

Beachten Sie, dass dies eine Abschrift der Formeln ist. Aufgrund der Komplexität derer können sie Fehler enthalten. Vergleichen Sie die Formeln also mit der Literatur oder mit den Musterlösungen der vorliegenden Übung bevor sie das Dokument zur Prüfungsvorbereitung nutzen!

6.1 A-Matrix (Designmatrix)

Aus diesen Informationen können wir die A-Matrix erstellen:

$$A = \begin{vmatrix} -a_d & -b_d & -d_0 & 0 \\ a_r & b_r & 0 & -1 \\ . & . & . & . \end{vmatrix}$$

Die oben gezeigte Matrix stellt in Zeile 1 ein Beispiel für eine Distanzbeobachtung und in Zeile 2 ein Beispiel für eine Richtungsbeobachtung. Die Unbekannten sind in folgendermassen in den Spalten zu finden: [N, E, m, Ori].

6.2 F-Vektor (Absolutglied-Vektor)

Den F-Vektor bilden wir wie gewohnt aus den Messungen – («minus») den Näherungen.

6.2.1 Distanz

Die Näherungen haben wir in Abschnitt 5.2.1 berechnet. Diese subtrahieren wir von den gemessenen Distanzen.

6.2.2 Richtungen

Die Näherungen und die korrigierten Beobachtungen haben wir in Abschnitt 5.2.2 berechnet. Wir subtrahieren die Näherungen (Azimute) von den korrigierten Richtungen (Messung + Orientierung).

$$f = \begin{vmatrix} d_{ik} - d_{0ik} \\ r_{ik} + Ori - Azi_{ik} \\ \dots \end{vmatrix}$$

7 Standardabweichungen der Beobachtungen

Um die Gewichte zu bestimmen, berechnen wir zuerst die Standardabweichungen der Beobachtungen.

Für die Richtungen treffen wir in diesem Beispiel die Annahme, dass alle Richtungen gleich genau sind – egal auf welche Distanz sie gemessen wurden. Man könnte das Modell allerdings weiterentwickeln und die Distanz in die Berechnung der Standardabweichungen miteinbeziehen.

Für die Distanzen berechnen wir die Standardabweichung basierend auf der Schrägdistanz. Wir verwenden die Formel, welche die Instrumentenhersteller empfehlen (Formel 11).

$$\sigma_d = 1\,mm + 1.5\,ppm$$

Formel 11: Berechnung Standardabweichung Distanz. (Leica Geosystems 2020: 2)

8 Gewichte der Beobachtungen (P-Matrix)

Das Gewicht der einzelnen Beobachtung berechnet sich durch Formel 12.

$$p_i = \left(\frac{\sigma_0}{\sigma_i}\right)^2 ; \sigma_0 : frei\ wählbar$$

Formel 12: Berechnung Gewicht.

9 Ausgleichung der verkürzten Unbekannten

Die Ausgleichung der verkürzten Unbekannten erfolgt nach der vermittelnden Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate.

$$N = A^T P A$$
$$\vec{n} = A^T P \vec{f}$$
$$Q_{xx} = N^{-1}$$
$$\vec{x} = Q_{xx} * \vec{n}$$

Formel 13: Berechnung der verkürzten Unbekannten x. (Niemeier 2008: 152 f)

10 Volle Unbekannte bestimmen

Da wir eine Linearisierung mit Näherungswerten vorgenommen haben, erhalten wir nicht direkt die gesuchten Grössen. Das Resultat in $\vec{x}$ ist schlussendlich die Ergänzung zu den Näherungswerten. Die vollen Unbekannten erhalten wir durch die Addition in Formel 14.

$$X = X_0 + x$$

Formel 14: Berechnung der vollen unbekannten.

11 Verbesserungen der Beobachtungen

Neben den Unbekannten Parametern wollen wir ebenfalls wissen, wie gross die Verbesserungen der Beobachtungen sind. Diese erlauben eine Beurteilung der Messungen. Somit können unter Umständen fehlerhafte Messungen aufgedeckt und ggf. eliminiert werden.

Die Verbesserungen können auf zwei verschiedene Arten berechnet werden (folgende zwei Unterkapitel).

11.1 Verbesserungen aus den verkürzten Unbekannten durch Matrix-Multiplikation

Die erste Variante berechnet die Verbesserungen mittels Matrixmultiplikation. Wir verwenden die Design-Matrix, die verkürzten unbekannten und den Absolutglied-Vektor (Formel 15). Für den Beweis und die Herleitung wird an dieser Stelle auf die Literatur hingewiesen.

$$v = A * x - f$$

Formel 15: Berechnung der Verbesserungen mittels Matrixmultiplikation

11.2 Verbesserungen aus der Beobachtungsgleichung

In der zweiten Variante werden die Verbesserung durch das einführen der ausgeglichenen, vollen Unbekannten in die Beobachtungsgleichungen (Formel 16, Formel 17).

$$Richtungen: v = Ri_i + \overline{Ori} - arctan\left(\frac{E_k - \overline{E_i}}{N_k - \overline{N_i}}\right)$$

Formel 16: Verbesserung der Richtung aus Beobachtungsgleichung

$$Distanzen: v = \sqrt{(N_{ok} - \overline{N_{oi}})^2 + (E_{ok} - \overline{E_{oi}})^2} - \overline{m} * d_{Proj}$$

Formel 17: Verbesserung der Distanz aus Beobachtungsgleichung

Sind die Näherungswerte gut, erhalten wir in beiden Szenarien dieselbe Verbesserung (Carosio 2008: 250). Wir können also die Näherungswerte prüfen --> wir sind zufrieden, wenn $abs(v - v_{BGL}) <= 10^{-6}\, m$ ist. Ist dies nicht der Fall, müssen die Näherungswerte mit den ausgeglichenen Unbekannten ersetzt werden (Iterieren). Dies wird wiederholt, bis die Bedingung erfüllt ist. (Niemeier 2008: 147) Mehr Informationen dazu erhalten Sie voraussichtlich nächste Woche.

12 Ausgeglichene Beobachtungen

Mit den in Kapitel 11.1 berechneten Verbesserungen lassen sich die ausgeglichenen Beobachtungen berechnen. Wenn wir die Verbesserungsgleichung, in der nicht linearisierten Form rekapitulieren, sehen wir, dass die ausgeglichene Beobachtung aus der Messung und der zugehörigen Verbesserung besteht. Wir verwenden also Formel 9 & Formel 10 wieder und erhalten so entsprechend Formel 18 & Formel 19.

$$\overline{d_i} = d_i + v_{ik}$$

Formel 18: Berechnung ausgeglichene Distanzbeobachtungen.

$$\overline{Ri_{ik}} = Ri_{ik} + v_{ik}$$

Formel 19: Berechnung ausgeglichene Richtungsbeobachtungen

13 Anhang

- A01_ML_U04_freie_Stationierung.xlsx (Lösung Peter Mahler)
- A02_ML_U04_freie_Stationierung.zip (Lösung Fabian Rüfenacht)

14 Quellen

Carosio, Alessandro (2008): *Fehlertheorie und Ausgleichungsrechnung Band 1*. Zürich: Eidgenössische Technische Hochschule Zürich, Institut für Geodäsie und Photogrammetrie.

Grimm, Prof. Dr. David Eugen (2021): *Geomatik Grundlagen GMT*. Muttenz: Institut Geomatik.

Leica Geosystems (2020): *Leica Nova MS60 Data sheet*. [Stand: 14.10.2024].

Niemeier, Wolfgang (2008): *Ausgleichungsrechnung. Statistische Auswertemethoden*. 2 Aufl. Berlin: de Gruyter.