

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ им. ПЕТРА ВЕЛИКОГО

ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

КАФЕДРА ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №4
ЭМПИРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ И ЯДЕРНЫЕ
ОЦЕНКИ

3 КУРС, ГРУППА 3630102/70301

Студент

Лебедев К.С.

Преподаватель

Баженов А. Н.

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ
2020 г.

Содержание

1. Список иллюстраций	3
2. Постановка задачи	4
3. Теория	4
4. Реализация	4
5. Результаты	5
5.1. Эмпирические функции распределения	5
5.2. Ядерные функции	10
6. Выводы	24
7. Список литературы	24
8. Приложения	25

1 Список иллюстраций

1	Эмпирическая функция для нормального стандартного распределения ..	5
2	Эмпирическая функция для стандартного распределения Лапласа	6
3	Эмпирическая функция для стандартного распределения Коши	7
4	Эмпирическая функция для распределения Пуассона	8
5	Эмпирическая функция для равномерного распределения	9
6	Ядерная функция плотности для нормального распределения, $n = 20$...	10
7	Ядерная функция плотности для нормального распределения, $n = 60$...	11
8	Ядерная функция плотности для нормального распределения, $n = 100$..	12
9	Ядерная функция плотности для распределения Лапласа, $n = 20$	13
10	Ядерная функция плотности для распределения Лапласа, $n = 60$	14
11	Ядерная функция плотности для распределения Лапласа, $n = 100$	15
12	Ядерная функция плотности для распределения Коши, $n = 20$	16
13	Ядерная функция плотности для распределения Коши, $n = 60$	17
14	Ядерная функция плотности для распределения Коши, $n = 100$	18
15	Ядерная функция плотности для распределения Пуассона, $n = 20$	19
16	Ядерная функция плотности для распределения Пуассона, $n = 60$	20
17	Ядерная функция плотности для распределения Пуассона, $n = 100$	21
18	Ядерная функция плотности для равномерного распределения, $n = 20$..	22
19	Ядерная функция плотности для равномерного распределения, $n = 60$..	23
20	Ядерная функция плотности для равномерного распределения, $n = 100$.	24

2 Постановка задачи

Для, приведённых ниже, пяти распределений сгенерировать выборки объёмом 20, 60, 100, для каждой выборки построить эмпирические функции распределения и ядерные оценки плотности распределения на отрезке $[-4, 4]$.

Распределения [4]:

1. Стандартное нормальное распределение
2. Стандартное распределение Коши
3. Распределение Лапласа
4. Равномерное распределение
5. Распределение Пуассона

3 Теория

Эмпирическая функция распределения [5], построенная по выборке $X = (X_1, \dots, X_n)$ есть случайная функция $F_n(y)$, определённая на \mathbb{R} :

$$F_n(y) = \sum_{i=1}^n I(X_i < y) \quad \text{где } I(X_i < y) = \begin{cases} 1, & X_i < y \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} \quad (1)$$

$X = (X_1, \dots, X_n)$ есть одномерная выборка одинаково распределённых элементов, с плотностью распределения f .

Ядерная оценка плотности [6]:

$$f_h(x) = \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{x - x_i}{h}\right) \quad (2)$$

где K является ядром, а $h > 0$ является сглаживающим параметром, и называется шириной полосы.

В данной работе в качестве ядра была выбрана плотность вероятности стандартного нормального распределения [7]:

$$K(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad (3)$$

4 Реализация

Для генерации выборки был использован *Python 3.7*: модуль *random* библиотеки *numpy* [1] для генерации случайных чисел с различными распределениями.

Обработка функций распределений была сделана с помощью модуля *scipy* [3].

5 Результаты

5.1 Эмпирические функции распределения

Рис. 1: Эмпирическая функция для нормального стандартного распределения

Empirical distribution function for 20, 60, 100 elements. Distribution: normal

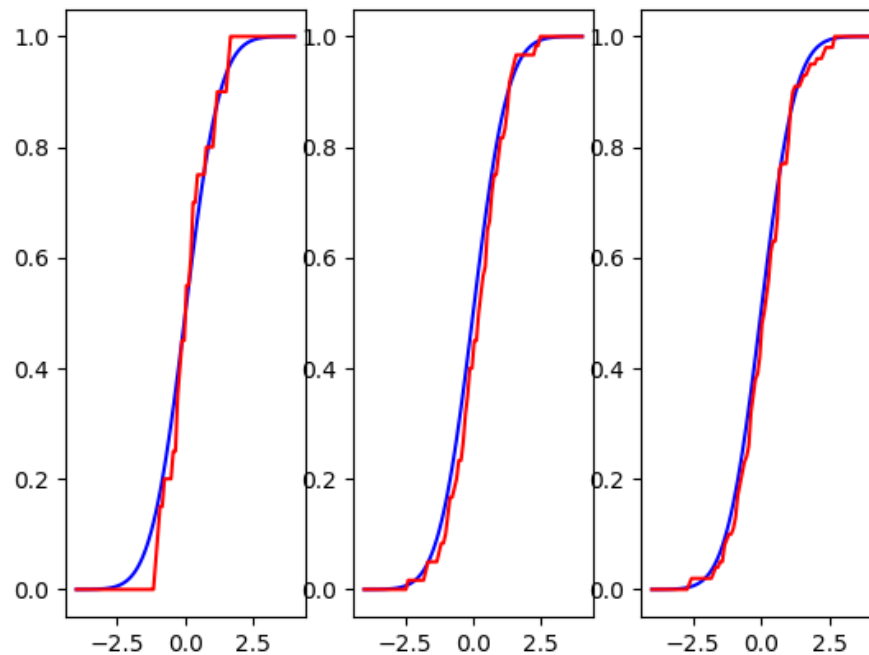


Рис. 2: Эмпирическая функция для стандартного распределения Лапласа

Empirical distribution function for 20, 60, 100 elements. Distribution: laplace

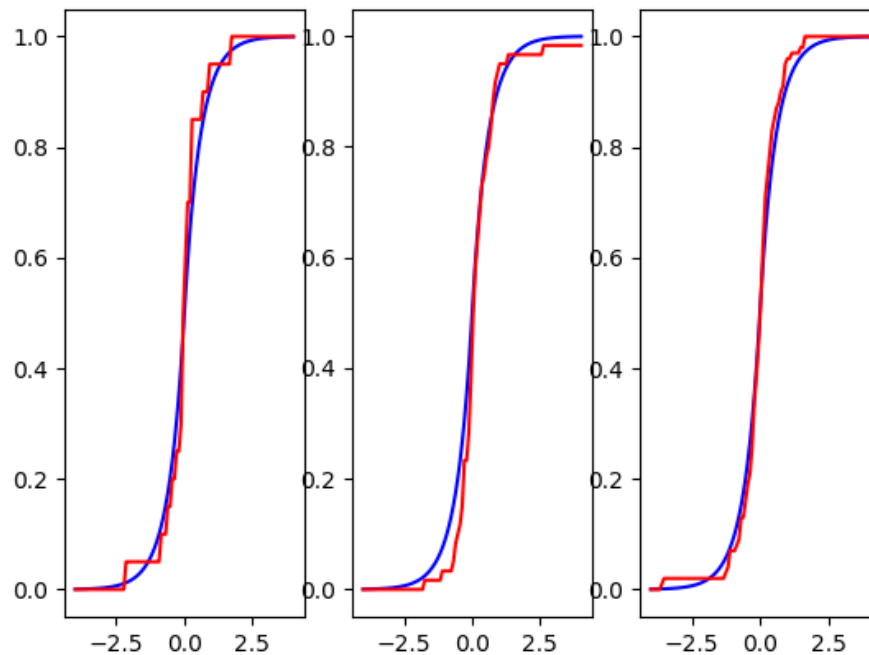


Рис. 3: Эмпирическая функция для стандартного распределения Коши

Empirical distribution function for 20, 60, 100 elements. Distribution:cauchy

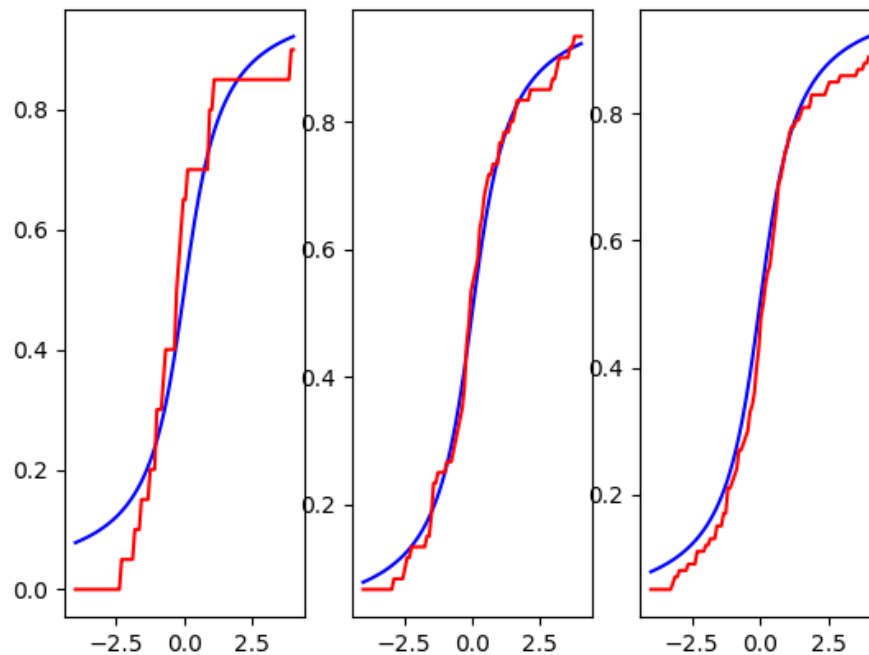


Рис. 4: Эмпирическая функция для распределения Пуассона

Empirical distribution function for 20, 60, 100 elements. Distribution:poissor

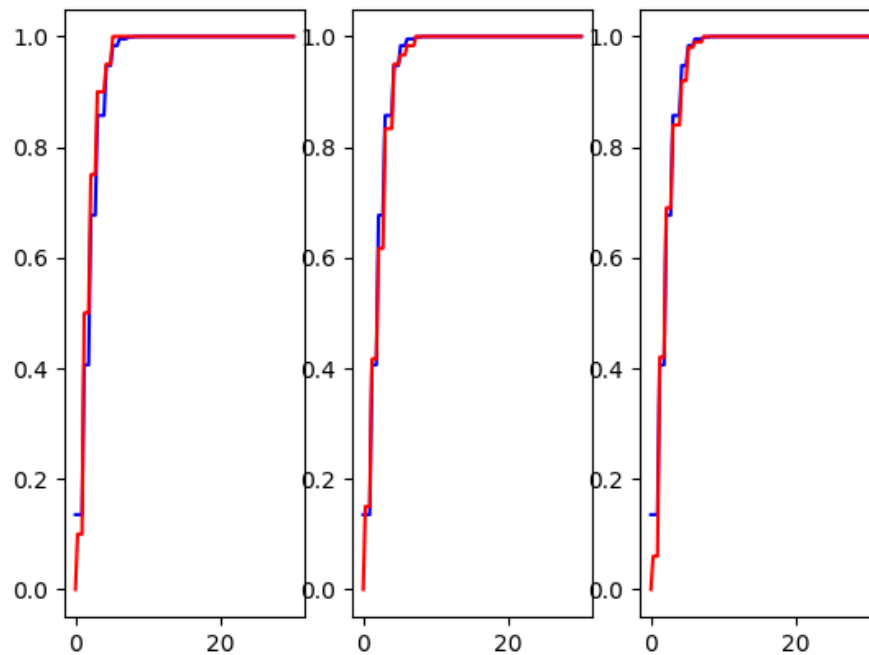
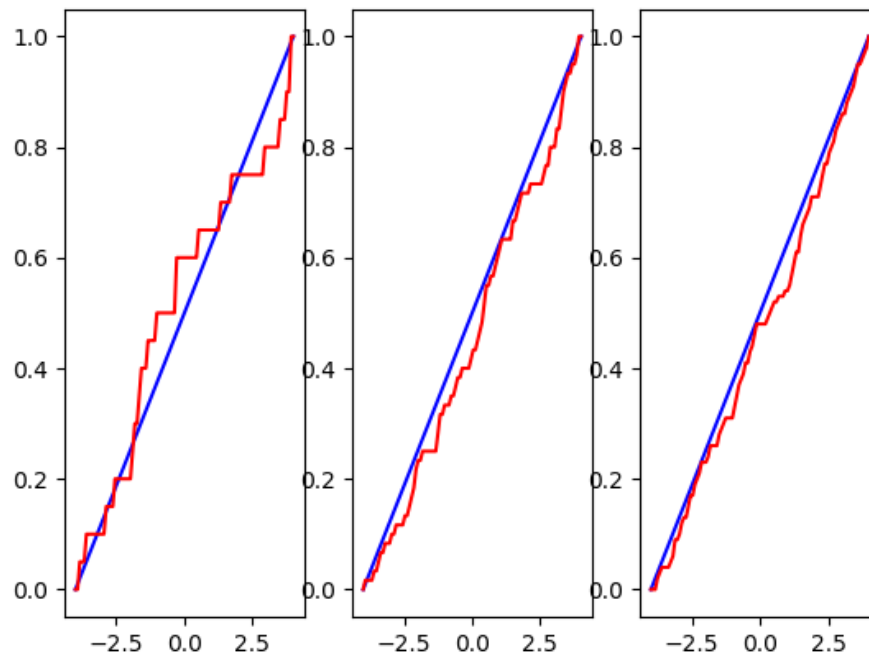


Рис. 5: Эмпирическая функция для равномерного распределения

Empirical distribution function for 20, 60, 100 elements. Distribution: uniform



5.2 Ядерные функции

Рис. 6: Ядерная функция плотности для нормального распределения, $n = 20$

$n = 20$. Kernel density estimation for $h = [0.3, 0.6, 1.2]$. Distribution: normal

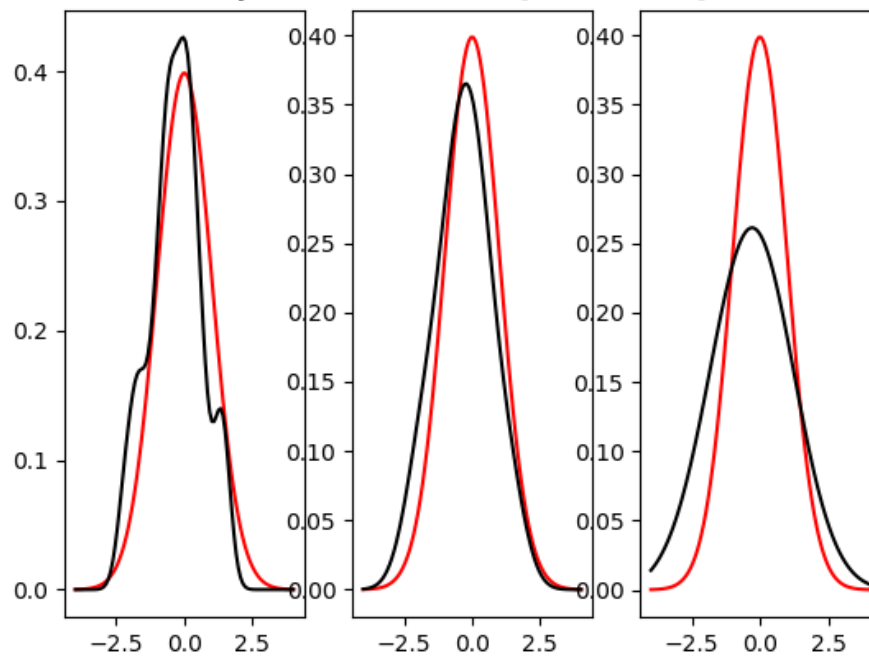


Рис. 7: Ядерная функция плотности для нормального распределения, $n = 60$

$n = 60$. Kernel density estimation for $h = [0.3, 0.6, 1.2]$. Distribution: normal

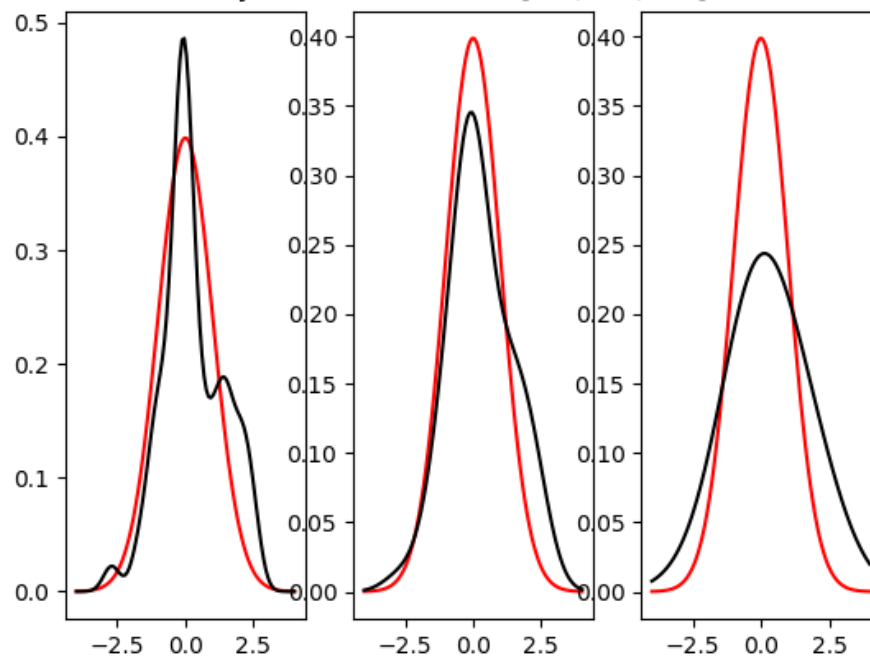


Рис. 8: Ядерная функция плотности для нормального распределения, $n = 100$

$n = 100$. Kernel density estimation for $h = [0.3, 0.6, 1.2]$. Distribution: norm

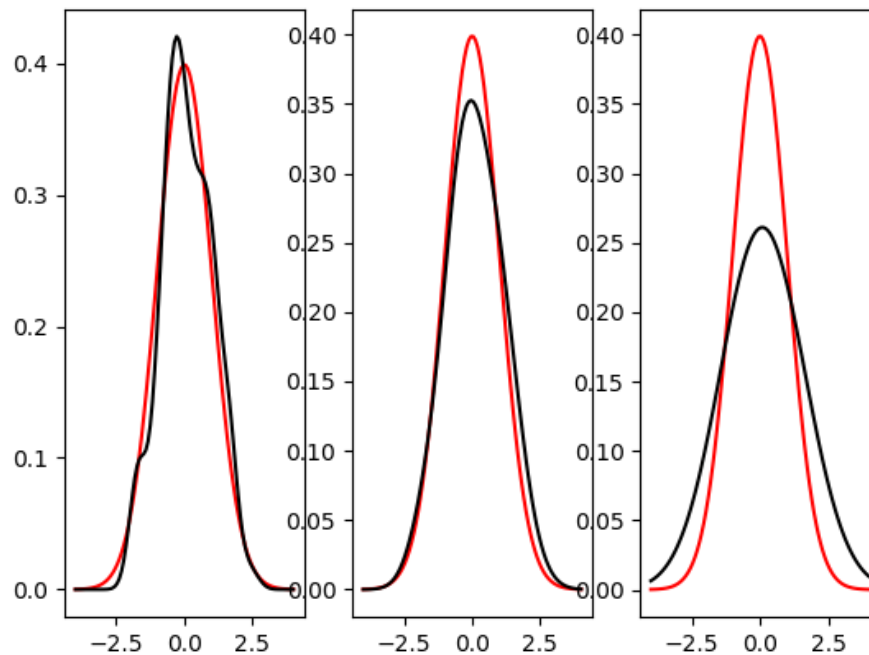


Рис. 9: Ядерная функция плотности для распределения Лапласа, $n = 20$

$n = 20$. Kernel density estimation for $h = [0.3, 0.6, 1.2]$. Distribution: laplac

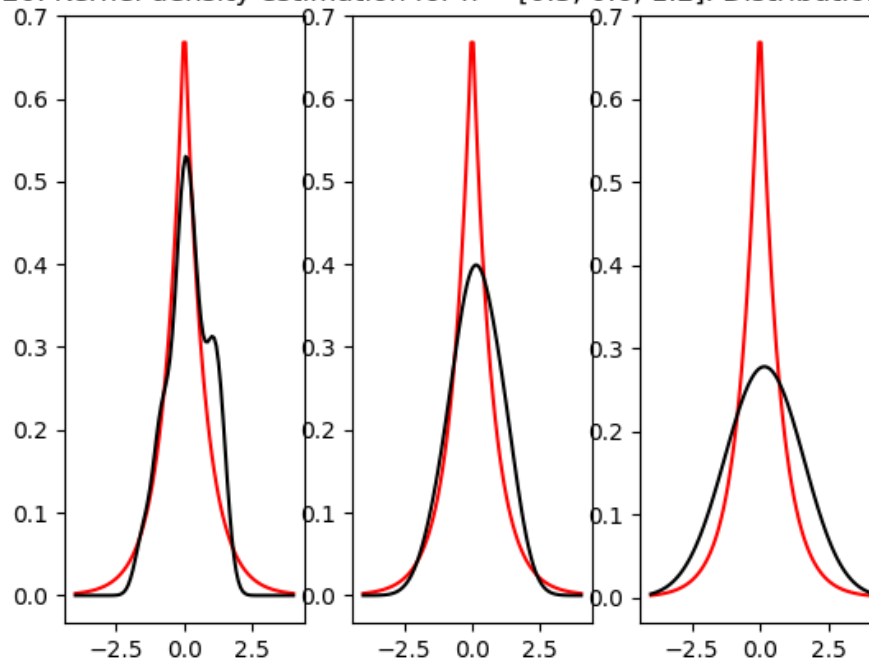


Рис. 10: Ядерная функция плотности для распределения Лапласа, $n = 60$

$n = 60$. Kernel density estimation for $h = [0.3, 0.6, 1.2]$. Distribution: laplac

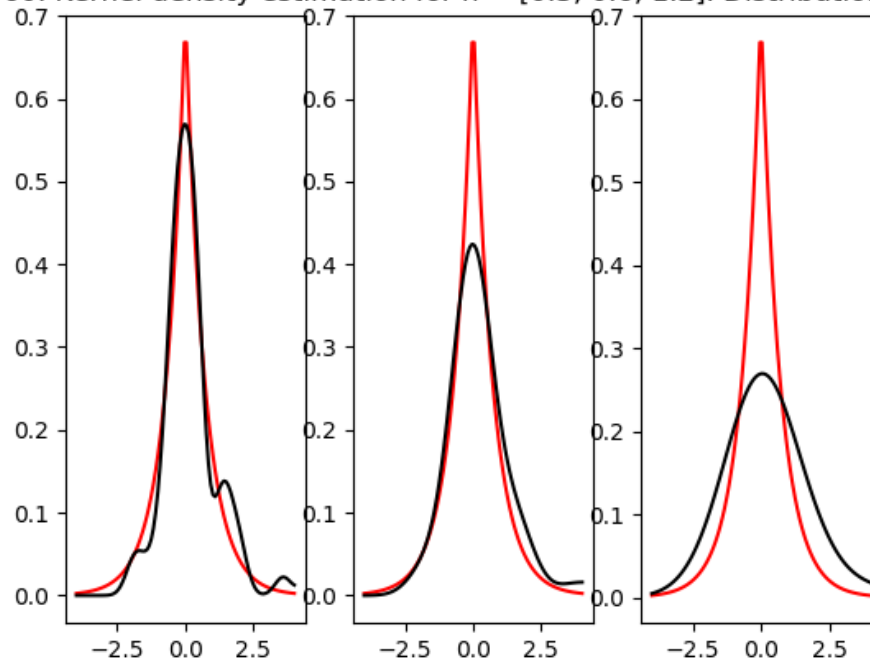


Рис. 11: Ядерная функция плотности для распределения Лапласа, $n = 100$

$n = 100$. Kernel density estimation for $h = [0.3, 0.6, 1.2]$. Distribution: laplac

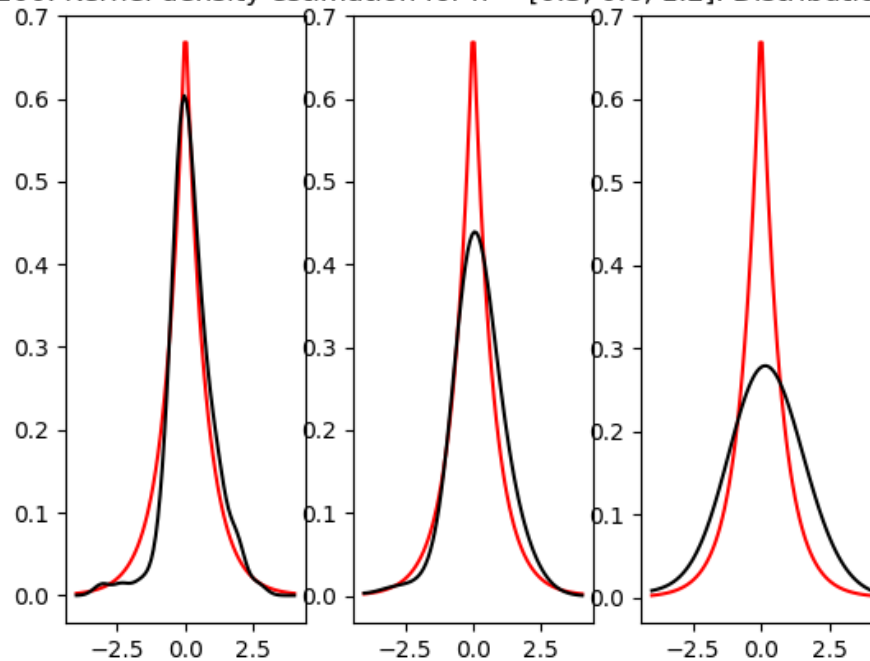


Рис. 12: Ядерная функция плотности для распределения Коши, $n = 20$

$n = 20$. Kernel density estimation for $h = [0.3, 0.6, 1.2]$. Distribution: cauch

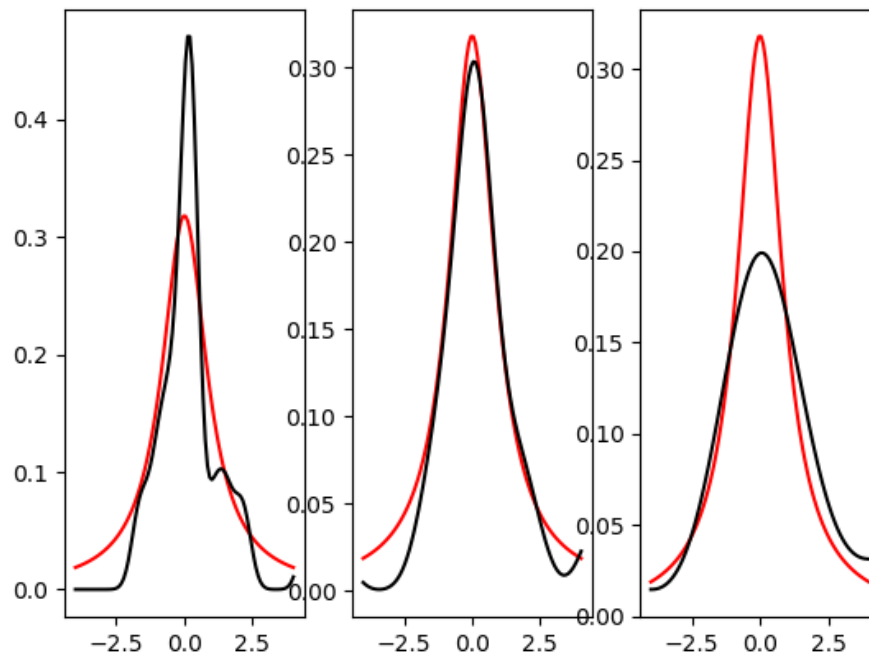


Рис. 13: Ядерная функция плотности для распределения Коши, $n = 60$

$n = 60$. Kernel density estimation for $h = [0.3, 0.6, 1.2]$. Distribution: cauch

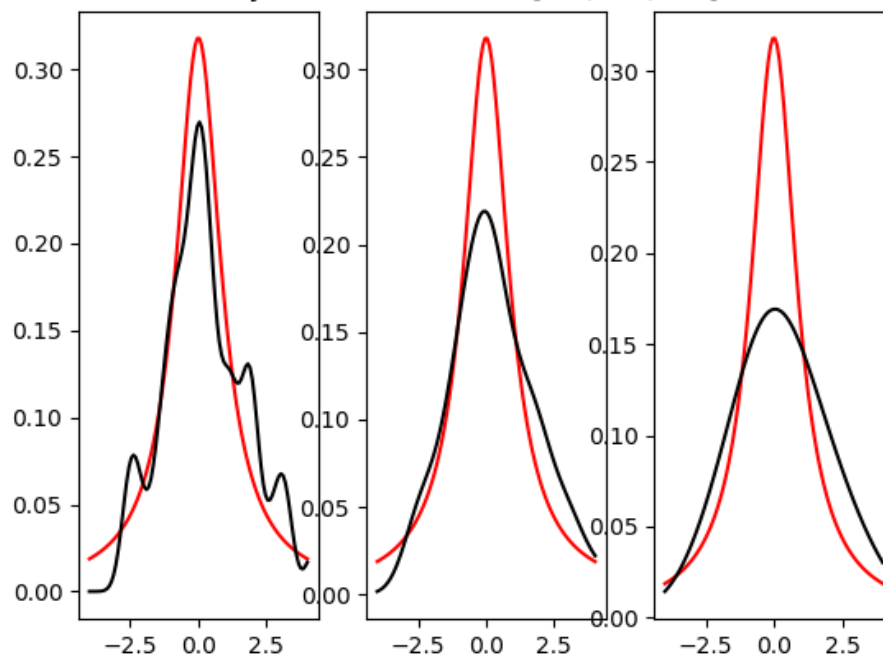


Рис. 14: Ядерная функция плотности для распределения Коши, $n = 100$

$n = 100$. Kernel density estimation for $h = [0.3, 0.6, 1.2]$. Distribution: `cauchy`

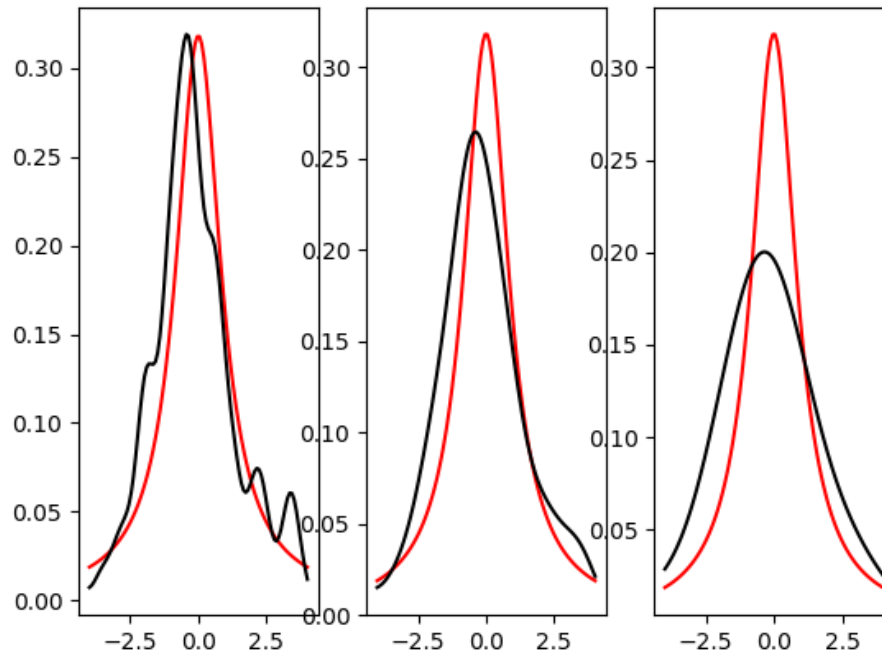


Рис. 15: Ядерная функция плотности для распределения Пуассона, $n = 20$

$n = 20$. Kernel density estimation for $h = [0.3, 0.6, 1.2]$. Distribution: poisson

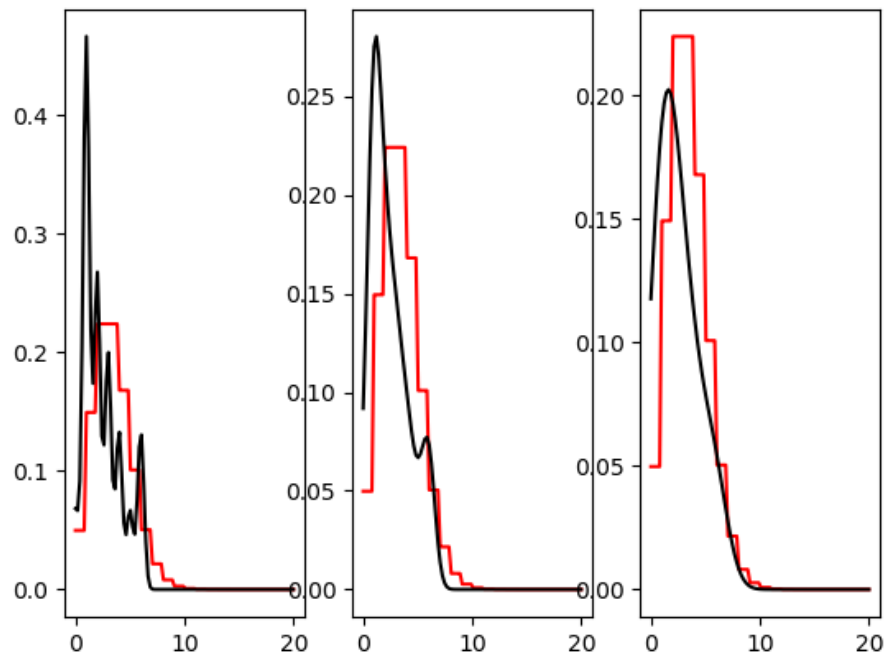


Рис. 16: Ядерная функция плотности для распределения Пуассона, $n = 60$

$n = 60$. Kernel density estimation for $h = [0.3, 0.6, 1.2]$. Distribution: poisson

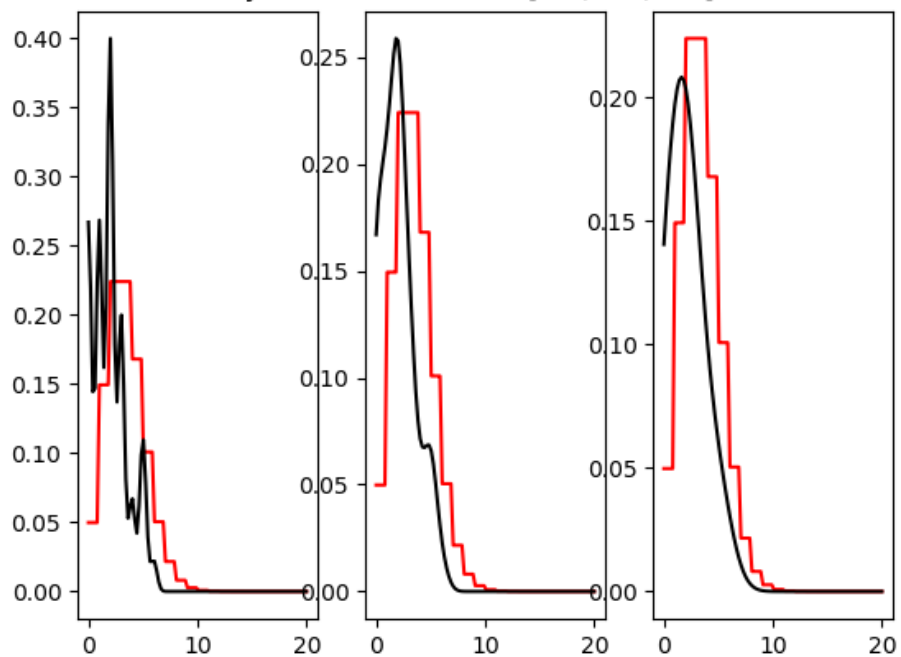


Рис. 17: Ядерная функция плотности для распределения Пуассона, $n = 100$

$n = 100$. Kernel density estimation for $h = [0.3, 0.6, 1.2]$. Distribution: poisson

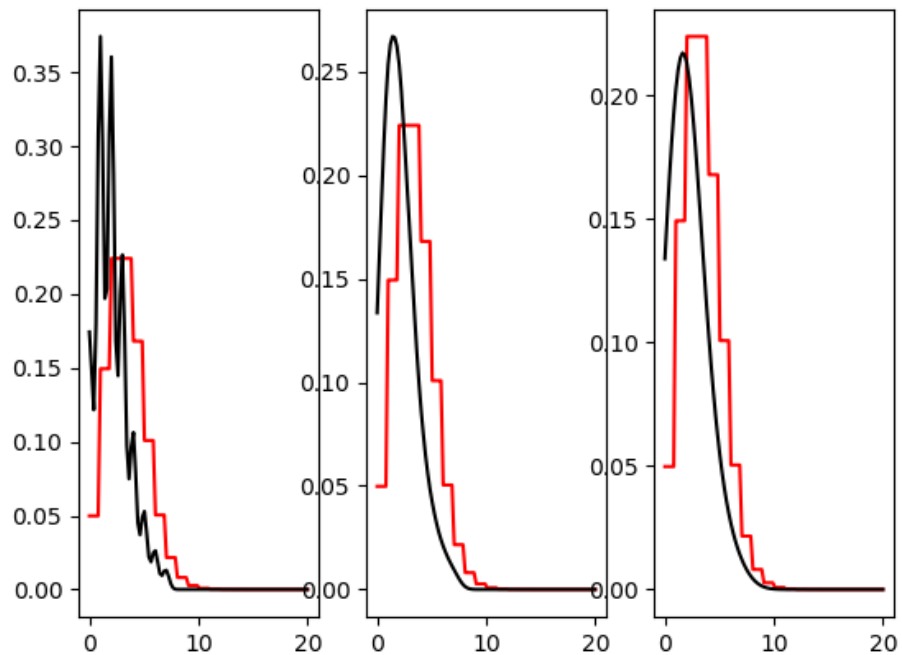


Рис. 18: Ядерная функция плотности для равномерного распределения, $n = 20$

$n = 20$. Kernel density estimation for $h = [0.3, 0.6, 1.2]$. Distribution: uniform

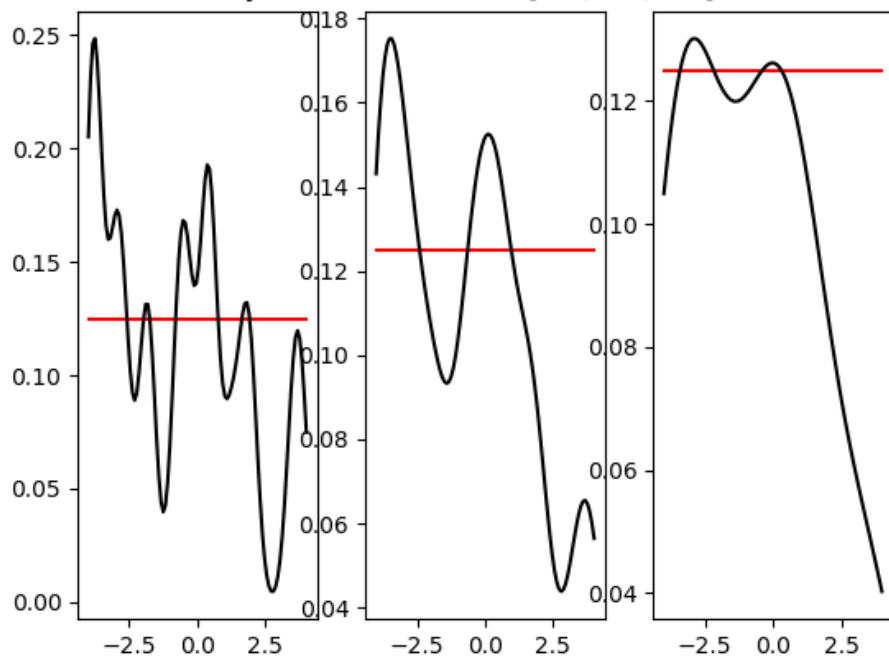


Рис. 19: Ядерная функция плотности для равномерного распределения, $n = 60$

$n = 60$. Kernel density estimation for $h = [0.3, 0.6, 1.2]$. Distribution: uniform

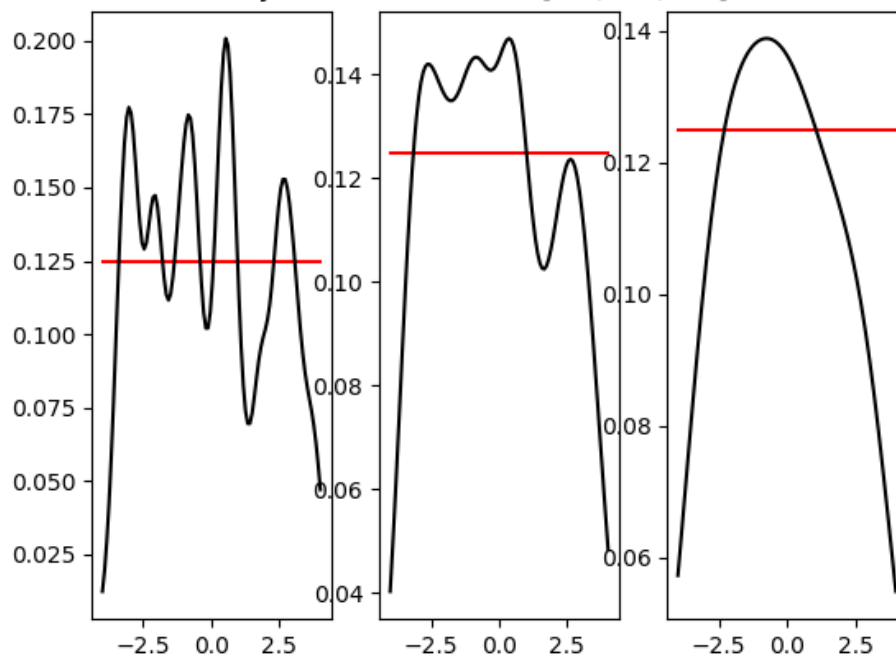
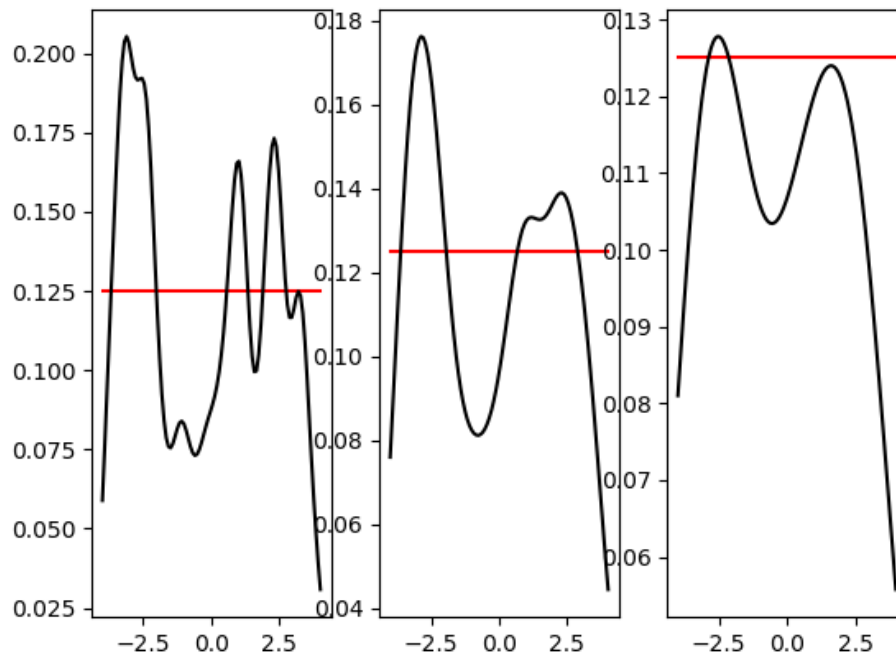


Рис. 20: Ядерная функция плотности для равномерного распределения, $n = 100$

$n = 100$. Kernel density estimation for $h = [0.3, 0.6, 1.2]$. Distribution: unifor



6 Выводы

Эмпирическая функция лучше приближает эталонную функцию на больших выборках.

Наилучшее приближение функции распределения ядерной функции получено при наибольшей ширине окна. При фиксированной ширине окна точнее приблизить функцию распределения позволяет увеличение выборки.

7 Список литературы

- [1] Модуль numpy - <https://physics.susu.ru/vorontsov/language/numpy.html>
- [2] Модуль matplotlib - <https://matplotlib.org/users/index.html>
- [3] Модуль scipy - <https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/>
- [4] Формулы распределений - https://vk.com/doc184549949_491827451
- [5] <https://nsu.ru/mmftvims/chernova/ms/lec/node4.html>
- [6] <https://www.mql5.com/ru/articles/396>
- [7] <http://users.stat.umn.edu/~helwig/notes/den-Notes.pdf>

8 Приложения

Код отчёта: <https://github.com/MisterProper9000/MatStatLabs/blob/master/MatStatLab4/MatStatLab4.tex>

Код лабораторной: <https://github.com/MisterProper9000/MatStatLabs/blob/master/MatStatLab4/MatStatLab4.py>