

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ им. ПЕТРА ВЕЛИКОГО

ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

КАФЕДРА ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №8

3 КУРС, ГРУППА 3630102/70301

Студент

Лебедев К.С.

Преподаватель

Баженов А. Н.

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ
2020 г.

Содержание

1. Список таблиц	3
2. Постановка задачи	4
3. Теория.....	4
4. Реализация.....	4
5. Результаты	5
6. Выводы	5
7. Список литературы	5
8. Приложения	5

1 Список таблиц

1	Результаты	5
---	------------------	---

2 Постановка задачи

Для двух выборок 20 и 100 элементов, сгенерированных согласно нормальному закону $N(x, 0, 1)$, для параметров масштаба и положения построить асимптотически нормальные интервальные оценки на основе точечных оценок метода максимального правдоподобия и классические интервальные оценки на основе статистик χ^2 и Стьюдента. В качестве параметра надёжности взять $\gamma = 0.95$.

3 Теория

Оценкой максимального правдоподобия для математического ожидания является среднее арифметическое: $\mu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$.

Оценка максимального правдоподобия для дисперсии вычисляется по формуле: $\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$.

Доверительным интервалом или интервальной оценкой числовой характеристики или параметра распределения θ с доверительной вероятностью γ называется интервал со случайными границами (θ_1, θ_2) , содержащий параметр θ с вероятностью γ [4].

Функция распределения Стьюдента [5]:

$$T = \sqrt{n-1} \frac{\bar{x} - \mu}{\delta} \quad (1)$$

Функция плотности распределения χ^2 [6]:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}, & x > 0 \end{cases} \quad (2)$$

Интервальная оценка математического ожидания [7]:

$$P = \left(\bar{x} - \frac{\sigma t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}{\sqrt{n-1}} < \mu < \bar{x} + \frac{\sigma t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}{\sqrt{n-1}} \right) = \gamma, \quad (3)$$

где $t_{1-\frac{\alpha}{2}}$ – квантиль распределения Стьюдента порядка $1 - \frac{\alpha}{2}$.

Интервальная оценка дисперсии [5]:

$$P = \left(\frac{\sigma \sqrt{n}}{\sqrt{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n-1)}} < \sigma < \frac{\sigma \sqrt{n}}{\sqrt{\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(n-1)}} \right) = \gamma, \quad (4)$$

где $\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2$, $\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2$ – квантили распределения Стьюдента порядков $1 - \frac{\alpha}{2}$ и $\frac{\alpha}{2}$ соответственно.

Асимптотическая интервальная оценка математического ожидания [5]:

$$P = \left(\bar{x} - \frac{\sigma u_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + \frac{\sigma u_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}} \right) = \gamma, \quad (5)$$

где $u_{1-\frac{\alpha}{2}}$ – квантиль нормального распределения $N(x, 0, 1)$ порядка $1 - \frac{\alpha}{2}$.

4 Реализация

Работы была выполнена на языке *Python3.7*. Для генерации выборок использовался модуль [1]. Для построения графиков использовалась библиотека *matplotlib* [2]. Функции распределения обрабатывались при помощи библиотеки *scipy.stats* [3]

5 Результаты

Таблица 1: Результаты

Метод	n	μ	σ
На основе ММП	20	$[-0.33527, 0.40768]$	$[0.71165, 1.36749]$
	100	$[-0.20017, 0.16315]$	$[0.79980, 1.05748]$
Асимптотический	20	$[-0.37421, 0.44662]$	$[0.75586, 1.11704]$
	100	$[-0.19705, 0.16003]$	$[0.80188, 1.01998]$

6 Выводы

По полученным результатам видно, что оба подхода дают лучший результат на выборках большого объема. Если рассматривать результаты для выборки объема $n = 20$ элементов, то видно, что интервал меньше и точнее в классической интервальной оценке.

7 Список литературы

- [1] Модуль numpy - <https://physics.susu.ru/vorontsov/language/numpy.html>
- [2] Модуль matplotlib - <https://matplotlib.org/users/index.html>
- [3] Модуль scipy - <https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/>
- [4] https://en.wikipedia.org/wiki/Confidence_interval
- [5] https://en.wikipedia.org/wiki/Student%27s_t-distribution
- [6] https://en.wikipedia.org/wiki/Chi-squared_distribution
- [7] Шевляков Г. Л. Лекции по математической статистике, 2019.

8 Приложения

Код отчёта: <https://github.com/MisterProper9000/MatStatLabs/blob/master/MatStatLab5/MatStatLab8.tex>

Код лабораторной: <https://github.com/MisterProper9000/MatStatLabs/blob/master/MatStatLab5/MatStatLab8.py>