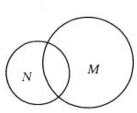
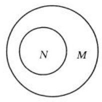
2022—2023学年度高三年级上学期期末考试数学学科
（答题时间120分钟，分值150分）

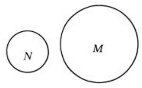
主命题人 ： 张红伟

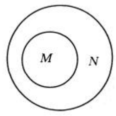
一、单项选择题（共8个小题，每小题5分，满分40分。下列每小题所给选项只有一项符合题意，请将正确答案的序号填涂在答题卡上）

1．下列表示集合 $M=\{x|x^2-4=0\}$ 和 $N=\left\{x\in Z\,\middle|\,\frac{2}{x}\in Z\right\}$ 关系的 *Venn* 图中正确的是（　　）

A．

B．

C．

D．

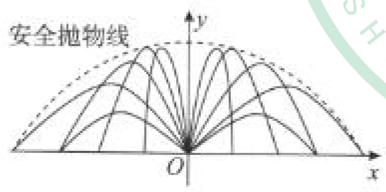
2．若复数 z 满足 $i\cdot z=1+4\sqrt{3}i$，则 $|z|=$（　　）

A． 1　　　　B． 5　　　　C． 7　　　　D． 25

3．$\left(\sqrt{x}-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^6$ 展开式中的常数项是（　　）

A． -160　　　　B． -140　　　　C． 160　　　　D． 140

4．矿山爆破时，在爆破点处炸开的矿石的运动轨迹可看作是不同的抛物线，根据地质、炸药等因素可以算出这些抛物线的范围，这个范围的边界可以看作一条抛物线，叫“安全抛物线”，如图所示．已知某次矿山爆破时的安全抛物线 $E:x^2=-2py+4(p>0)$ 的焦点为 $F(0,-\frac{3}{2})$，则这次爆破时，矿石落点的最远处到点 F 的距离为（　　）



A． $2\sqrt{2}$　　　　B． $\frac{5}{2}$　　　　C． 2　　　　D． $\frac{3}{2}$

5．若 $3\sin\alpha-\sin\beta=\sqrt{10},\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$，则 $\tan\alpha=$（　　）

A． $-\frac{1}{3}$　　　　B． $\frac{1}{3}$　　　　C． -3　　　　D． 3

6．已知正数 a,b,c 满足 $e^{2a}=be^{b}=2$，$\sqrt[3]{c}+1=\sqrt[3]{b}$，$a=c+\log_5(x^2-x+3)(x\in R)$，则 a,b,c 的大小关系是（　　）

A． a > b > c　　B． b > c > a　　C． b > a > c　　D. a > c > b

7．已知 $P(A)>0,P(B)>0,P(C)>0$，下列说法错误的是（　　）

A．若事件 A,B 独立，则 $P(A)=P(A|B)$

B．若事件 A,B 互斥，则 P(B|A)=P(A|B)

C．若事件 A,B 独立，则 P(C|AB)=P(C|A)P(C|B)

D．若事件 A,B 互斥，事件 A，C 独立，事件 B，C 独立，则 $P(C\mid(A+B))=P(C\mid A)$

8．双纽线最早于 1694 年被瑞士数学家雅各布·伯努利用来描述他所发现的曲线.在平面直角坐标系 xOy 中,把到定点 $F_1(-a,0)$，$F_2(a,0)$ 距离之积等于 a^2（$a>0$）的点的轨迹称为双纽线 C.已知点 $P(x_0,y_0)$ 是双纽线 C 上一点，当 a=1 时，$\triangle PF_1F_2$ 的面积最大值为（　　）.

A．1　　　　　B．$\frac{1}{2}$　　　　　C．$\frac{1}{3}$　　　　　D．$\frac{1}{4}$

二、多选题（共 4 个小题，每个 5 分，共 20 分，选对得 5 分，选错一个得 0 分,少选得 2 分）

9．已知 α，β 是两个不同的平面，m，n，l 是三条不同的直线，则下列命题中正确的是（　）

A．若 $m\perp\alpha$，$n\perp\alpha$，则 $m\parallel n$　　　　B．若 $m//\alpha$，$n//\alpha$，则 $m//n$

C．若 $\alpha\cap\beta=l$，$m\parallel\alpha$，$m\parallel\beta$，则 $m\parallel l$　D．若 $\alpha\cap\beta=l$，$m\subset\alpha$，$m\perp l$，则 $m\perp\beta$

10. 已知点 P 在圆 O:$x^2+y^2=4$ 上，直线 l:4x+3y-12=0 分别与 x 轴，y 轴交于 A，B 两点，则（　　）

A. 过点 B 作圆 O 的切线，则切线长为 $2\sqrt{3}$　　B. 满足 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=0$ 的点 P 有 2 个

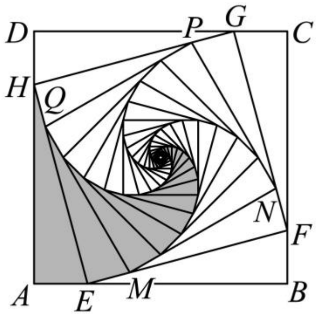
C. 点 P 到直线 l 距离的最大值为 $\frac{22}{5}$　　　　D. $\left|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}\right|$ 的最小值是 $\frac{1}{2}$

11. 下列关于函数 $f(x)=x^3-3x^2+2x$ 的叙述正确的为(　　)

A. 函数 f(x)有三个零点　　　　B.点(1，0)是函数 f(x)图象的对称中心

C.函数 f(x)的极大值点为 $x=1+\frac{\sqrt{3}}{3}$　D.存在实数 a，使得函数 $g(x)=[f(x)]^2+af(x)$ 为增函数

12.“内卷”是指一类文化模式达到最终的形态以后，既没有办法稳定下来，也没有办法转变为新的形态，而只能不断地在内部变得更加复杂的现象，热爱数学的小明由此想到了数学中的螺旋线．连接嵌套的各个正方形的顶点就得到了近似于螺旋线的美丽图案，具体作法是：在边长为 1 的正方形 $ABCD$ 中，作它的内接正方形 $EFGH$，且使得 $\angle BEF=15°$；再作正方形 $EFGH$ 的内接正方形 $MNPQ$，且使得 $\angle FMN=15°$；依次进行下去，就形成了阴影部分的图案，如图所示．设第 n 个正方形的边长为 a_n（其中第 1 个正方形 $ABCD$ 的边长为 $a_1=AB$，第 2 个正方形 $EFGH$ 的边长为 $a_2=EF$，…），第 n 个直角三角形（阴影部分）的面积为 S_n（其中第 1 个直角三角形 AEH 的面积为 S_1，第 2 个直角三角形 EQM 的面积为 S_2，…），则（　）



A．数列$\{a_n\}$是公比为$\frac{\sqrt{6}}{3}$的等比数列　　　B．$S_1=\frac{1}{12}$

C．数列$\{S_n\}$是公比为$\frac{2}{3}$的等比数列　　　D．数列$\{a_n\}$的前 n 项和 $T_n<3$

三、填空题（共 4 个小题，每个 5 分，共 20 分）

13．已知向量$\vec{a}=(2\sqrt{3},2)$，　向量$\vec{e}=(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$，　则向量$\vec{a}$在向量$\vec{e}$上的投影向量为________

14．以下四个命题中：

①若 $X\sim N(1,\sigma^2)$，$P(x>2)=0.2$，则$P(0<X<1)=0.3$

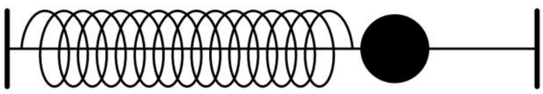
②在线性回归分析中，R^2为 0.98 的模型比R^2为 0.80 的模型拟合的效果好；

③对分类变量 X 与 Y 的随机变量K^2的观测值k来说，k越小，判断“X与 Y 有关系的把握程度越大；

④数据 1，2，3，4 的标准差是数据 2，4，6，8 的标准差的一半.

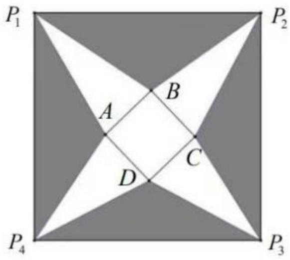
其中真命题的个数为_________

15．从物理学知识可知，图中弹簧振子中的小球相对平衡位置的位移y与时间t（单位：s）的关系符合函数$y=A\sin(\omega t+\varphi)(|\omega|<100)$.从某一时刻开始，用相机的连拍功能给弹簧振子连拍了20张照片.已知连拍的间隔为0.01s，将照片按拍照的时间先后顺序编号，发现仅有第5张、第13张、第17张照片与第1张照片是完全一样的，请写出小球正好处于平衡位置的所有照片的编号为_________



16. 某校学生去工厂进行劳动实践，加工制作某种零件。如图，将边长为 10cm 正方形铁皮剪掉阴影部分四个全等的等腰三角形，然后将ΔP_1AB, ΔP_2BC, ΔP_3CD, ΔP_4DA 分别沿 AB，BC，CD，DA 翻折,使得 P_1,P_2,P_3,P_4 重合并记为点 P，制成正四棱锥 P-ABCD 形状的零件。当该四棱锥体积最大时，AB=_______cm；此时该三棱锥 P—ABC 外接球的表面积 S=_____ cm^2.

（第一空 2 分，第二空 3 分）



四、解答题（共 6 个题，17 题 10 分，其余每题 12 分，共 70 分）

17．在等差数列$\{a_n\}$中，$a_1=2$，且a_2，a_3+2，a_8构成等比数列.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2)令$b_n=2^{a_n}+8$，记S_n为数列$\{b_n\}$的前n项和，求S_n.

18．如图 1 .在等边三角形ABC中，*边长为* 4.D 是 AC 的中点，E 是 AB 上一点,且 DE⊥AB.将△ADE 沿着 DE 折起,形成四棱锥 P-BCDE.其中点A对应的点为点 P.如图 2.

⑴在图 2 中.在线段 PB 上是否存在一点 F，使得 CF∥平面 PDE？若存在，请求出 $\frac{PF}{PB}$的值，并说明理由:若不存在,请说明理由；

⑵在图 *2* 中.二面角 P—DE—B 为直二面角，求平面PBE与平面 PCD 所成的锐二面角的正弦值.

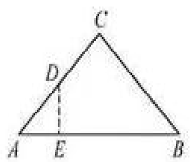


图 1

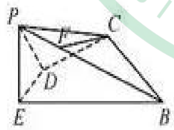


图 2

19．记锐角$\triangle ABC$的内角A,B,C的对边分别为a,b,c，已知$\frac{\sin(A-B)}{\cos B}=\frac{\sin(A-C)}{\cos C}$.

(1)求证：$B=C$；

(2)若$a\sin C=1$，试问$\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=1+\frac{\sqrt{2}}{2}$能否成立？若能成立，求此时$\triangle ABC$的周长；若不能成立，请说明理由.

20. 某大学有 A，B 两个餐厅为学生提供午餐与晚餐服务，甲、乙两位学生每天午餐和晚餐都在学校就餐，近 100 天选择餐厅就餐情况统计如下:

选择餐厅情况(午餐，晚餐)	(A,A)	(A,B)	(B,A)	(B,B)
甲	30 天	20 天	40 天	10 天
乙	20 天	25 天	15 天	40 天

假设甲、乙选择餐厅相互独立，用频率估计概率.

（1）分别估计一天中甲午餐和晚餐都选择 A 餐厅就餐的概率，乙午餐和晚餐都选择 B 餐厅就餐的概率;

(2))记 X 为甲、乙在一天中就餐餐厅的个数，求 X 的分布列和数学期望 E(X);

(3) 假设 M 表示事件“A 餐厅推出优惠套餐”，N 表示事件“某学生去 A 餐厅就餐”，P(M)>0,一般来说在推出优惠套餐的情况下学生去该餐厅就餐的概率会比不推出优惠套餐的情况下去该餐厅就餐的概率要大，证明: $P(M\mid N)>P(M\mid \bar{N})$.

21. 已知椭圆 $C':\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$ 的离心率与双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 的离心率互为倒数，实轴长为 $2\sqrt{2}$.

(1)求双曲线 C 的标准方程;

(2)设直线 l 与双曲线 C 相切于点 A，且直线 l 的斜率 $k\geq 2$，A 关于原点 O 的对称点为点 B，过点 B 作 $BM\perp l$，垂足为 M，求 $\triangle ABM$ 面积的取值范围.

22．已知函数 $f(x)=\frac{ax^2}{e^x}$，直线 $y=\frac{1}{e}x$ 为曲线 $y=f(x)$ 的切线（e 为自然对数的底数).

（1）求实数 a 的值;

（2）用 $\min\{m,n\}$ 表示 m,n 中的最小值，设函数 $g(x)=\min\left\{f(x),x-\frac{1}{x}\right\}(x>0)$，若函数 $h(x)=g(x)-c\ln x$ 为增函数，求实数 c 的取值范围.