蚌埠市2023届高三年级第三次教学质量检查考试

数学参考答案及评分标准

一、二、选择题：

题　号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答　案	B	C	C	A	D	D	A	D	ABC	BCD	AD	AD

三、填空题

13. $-\frac{1}{6}$　　14. -54　　15. $\frac{1}{2}$　　16. $-2^{1-x}+2$（2分）；$[\frac{1}{8},\frac{13}{8}]$（3分）

四、解答题

17. (1) 2×2 列联表如下：

	喜欢足球	不喜欢足球	合计
男生	60	40	100
女生	30	70	100
合计	90	110	200

……………………………………………………………………………………（2分）

零假设为 H_0：该校学生喜欢足球与性别无关联.

根据列联表中的数据，经计算得到

$$\chi^2=\frac{200\times(60\times 70-40\times 30)^2}{100\times 100\times 90\times 110}\approx 18.182>10.828=x_{0.001}$$

根据小概率值 $\alpha=0.001$ 的独立性检验，推断 H_0 不成立，即认为该校学生喜欢足球与性别有关.　……………………………………………………（5分）

(2) 依题意 X 的所有可能取值为 0，1，2，3，

$$P(X=0)=\left(\frac{1}{3}\right)^2\times\frac{1}{2}=\frac{1}{18},$$

$$P(X=1)=C_2^1\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{5}{18},$$

$$P(X=2)=C_2^1\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}+\left(\frac{2}{3}\right)^2\times\frac{1}{2}=\frac{4}{9},$$

$$P(X=3)=\left(\frac{2}{3}\right)^2\times\frac{1}{2}=\frac{2}{9}.$$

$\therefore X$ 的分布列如下：

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{18}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{9}$

……………………………………………………………………………………（8分）

$\therefore X$ 的数学期望 $E(X)=0\times\frac{1}{18}+1\times\frac{5}{18}+2\times\frac{4}{9}+3\times\frac{2}{9}=\frac{11}{6}.$　………………（10分）

18. (1) 因为 $f(x)=\sqrt{3}\sin\omega x\cos\omega x+\cos^2\omega x-\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin2\omega x+\frac{1}{2}\cos2\omega x=\sin\left(2\omega x+\frac{\pi}{6}\right)$,

…………………………………………………………………………………………(3 分)

所以函数 $f(x)$ 的最小正周期 $T=\frac{2\pi}{2\omega}=\pi$. ……………………………………………(5 分)

(2) 由 $2\omega x+\frac{\pi}{6}\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\omega+\frac{\pi}{6}\right)$,

因为函数 $f(x)$ 图象在 $\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ 内有且仅有一条对称轴,

所以 $\frac{\pi}{2}<\frac{\pi}{2}\omega+\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{3\pi}{2}$, 即 $\frac{2}{3}<\omega\leqslant\frac{8}{3}$, ……………………………………………(9 分)

所以 $\frac{\pi}{3}<\frac{\pi}{4}\omega+\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{5\pi}{6}$,

所以 $f\left(\frac{\pi}{8}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{4}\omega+\frac{\pi}{6}\right)\in\left[\frac{1}{2},1\right]$. ……………………………………………12 分

19. (1) 由题意 $a_{2n+1}=a_{2n}+1=2a_{2n-1}+1$,

所以 $a_{2n+1}+1=2(a_{2n-1}+1)$,

因为 $a_1+1=2\neq0$, 所以数列 $\{a_{2n-1}+1\}$ 是首项为 2, 公比为 2 的等比数列, …(2 分)

所以 $a_{2n-1}+1=2^n$, 即 $a_{2n-1}=2^n-1$,

而 $a_{2n}=2a_{2n-1}=2^{n+1}-2$, ……………………………………………………………(4 分)

所以 $a_n=\begin{cases}2^{\frac{n+1}{2}}-1, n\text{ 为奇数},\\ 2^{\frac{n}{2}+1}-2, n\text{ 为偶数}.\end{cases}$ ……………………………………………(6 分)

(2) 方法一:

由(1) $T_{2n}=\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{a_{2i-1}}+\frac{1}{a_{2i}}\right)=\frac{3}{2}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{2^i-1}=\frac{3}{2}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{2^{i+1}-1}{(2^i-1)(2^{i+1}-1)}$ …………(8 分)

$<\frac{3}{2}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{2^{i+1}}{(2^i-1)(2^{i+1}-1)}=3\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{2^i}{(2^i-1)(2^{i+1}-1)}$ …………………(10 分)

$=3\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{2^i-1}-\frac{1}{2^{i+1}-1}\right)=3\left(1-\frac{1}{2^{n+1}-1}\right)<3$. ……………………(12 分)

方法二:

$\because 2^n-1\geqslant2^{n-1}(\mathrm{n}\in\mathrm{N}^*)$, ……………………………………………………………8 分

$\therefore T_{2n}=\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{a_{2i-1}}+\frac{1}{a_{2i}}\right)=\frac{3}{2}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{2^i-1}\leqslant\frac{3}{2}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{2^{i-1}}=3\left(1-\frac{1}{2^n}\right)<3$. ……………(12 分)

20. (1) 解: 延长 CG 交 AB 于点 H, 连接 CH, DH,

因为 G 为 $\triangle ABC$ 的重心, 所以 H 为 AB 的中点, 且 $\frac{CG}{CH}=\frac{2}{3}$, ……………………(2 分)

因为平面 ABD // 平面 EFG, 平面 $ABD\cap$ 平面 $DCH=DH$, 平面 $EFG\cap$ 平面 $DCH=FG$,

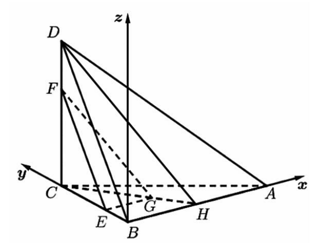
所以 FG // DH, …………………………………………………………………………(4 分)

所以 $\frac{CF}{CD}=\frac{CG}{CH}=\frac{2}{3}$, 所以 $\frac{DF}{CF}=\frac{1}{2}$. ……………………………………………(5 分)

(2) 解: 因为 $AB\perp$ 平面 BCD, BC, $CD\subset$ 平面 BCD, 所以 $AB\perp BC$, $AB\perp CD$,

因为 $CD\perp CB$，$CD\perp AB$，$BC\cap AB=B$，$BC,AB\subset$平面 ABC，所以 $CD\perp$平面 ABC，…………………………………………………………………………（7 分）

如图，以 BA 为 x 轴，BC 为 y 轴，过 B 与 CD 平行的直线为 z 轴，建立空间直角坐标系，



第 20 题答案图

方法一：

由(1)同理可得 $EF/\!/BD$，则$\dfrac{CF}{CD}=\dfrac{CE}{CB}=\dfrac{2}{3}$，

所以 $A(3,0,0)$，$F(0,3,2)$，$E(0,1,0)$，$G(1,1,0)$，$C(0,3,0)$，$D(0,3,3)$，

所以$\overrightarrow{GF}=(-1,2,2)$，$\overrightarrow{GE}=(-1,0,0)$，$\overrightarrow{CD}=(0,0,3)$，$\overrightarrow{CA}=(3,-3,0)$．……（8 分）

设平面 EFG 的法向量为$m=(a,b,c)$，则$\begin{cases} m\cdot\overrightarrow{GF}=-a+2b+2c=0,\\ m\cdot\overrightarrow{GE}=-a=0,\end{cases}$

令 $b=1$，则 $a=0$，$c=-1$，则$m=(0,1,-1)$，

设平面 ACD 的法向量为$n=(x,y,z)$，则$\begin{cases} n\cdot\overrightarrow{CD}=3z=0,\\ n\cdot\overrightarrow{CA}=3x-3y=0,\end{cases}$

令 $x=1$，则 $y=1$，$z=0$，则$n=(1,1,0)$，…………………………………………（10 分）

设平面 EFG 与平面 ACD 的夹角为 θ，则 $\cos\theta=\dfrac{|n\cdot m|}{|n|\cdot|m|}=\dfrac{1}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\dfrac{1}{2}$，

所以平面 EFG 与平面 ACD 的夹角的大小为$\dfrac{\pi}{3}$． ……………………………………（12 分）

方法二：

易知 $A(3,0,0)$，$C(0,3,0)$，$D(0,3,3)$，

所以$\overrightarrow{CD}=(0,0,3)$，$\overrightarrow{CA}=(3,-3,0)$，$\overrightarrow{BD}=(0,3,3)$，$\overrightarrow{BA}=(3,0,0)$．…………（8 分）

设平面 ABD 的法向量为$m=(a,b,c)$，则$\begin{cases} m\cdot\overrightarrow{BD}=3b+3c=0,\\ m\cdot\overrightarrow{BA}=3a=0,\end{cases}$

令 $b=1$，则 $a=0$，$c=-1$，则$m=(0,1,-1)$，

因为平面 $ABD/\!/$平面 EFG. 所以平面 EFG 的法向量即$m=(0,1,-1)$，

（下同方法一）

21．(1)设 $M(x_M,y_M)$，由题意 $A(-2,0)$，$B(2,0)$，且$\dfrac{x_M^{\ 2}}{4}-y_M^{\ 2}=1$，

所以 $k_1\cdot k_2=\dfrac{y_M}{x_M+2}\cdot\dfrac{y_M}{x_M-2}=\dfrac{y_M^{\ 2}}{x_M^{\ 2}-4}=\dfrac{\dfrac{x_M^{\ 2}}{4}-1}{x_M^{\ 2}-4}=\dfrac{1}{4}$． ……………………………（4 分）

(2)设 $M(x_M,y_M)$，$N(x_N,y_N)$，$P(1,t)$，BN 的斜率为 k_3，由 $\overrightarrow{QS}=2\overrightarrow{SP}$知：$Q(1,-2t)$，

所以$\dfrac{k_1}{k_3}=\dfrac{k_{AP}}{k_{BQ}}=\dfrac{\dfrac{t}{1-(-2)}}{\dfrac{-2t}{1-2}}=\dfrac{1}{6}$.

由(1)知:$k_1\cdot k_2=\dfrac{1}{4}$,所以 $k_2\cdot k_3=\dfrac{3}{2}$. ……………………………………………… (6 分)

设 MN:$x=my+n(m\neq0,m\neq\pm2,n\neq2)$……①

双曲线 E:$\dfrac{x^2}{4}-y^2=1$……②

联立①②得:$(m^2-4)y^2+2mny+n^2-4=0$,

所以 $y_M+y_N=-\dfrac{2mn}{m^2-4}$,$y_My_N=\dfrac{n^2-4}{m^2-4}$, ……………………………………………… (9 分)

所以 $k_2\cdot k_3=\dfrac{y_M}{x_M-2}\cdot\dfrac{y_N}{x_N-2}=\dfrac{y_My_N}{(my_M+n-2)(my_N+n-2)}=\dfrac{3}{2}$,

即$(3m^2-2)y_My_N+3m(n-2)(y_M+y_N)+3(n-2)^2=0$,

整理得 $n=\dfrac{10}{7}$,

故直线 MN 过定点$\left(\dfrac{10}{7},0\right)$. ……………………………………………… (12 分)

22. (1)令 $F(x)=f(x)-x$,则 $F'(x)=e^x-1>0\Rightarrow x>0$,

所以 $F(x)$在$(-\infty,0)$上单调递减,在$(0,+\infty)$上单调递增,

所以 $F(x)\geqslant F(0)=0$,

所以$f(x)=e^x-1\geqslant x$,当且仅当 $x=0$ 时,等号成立, ……………………………… (2 分)

所以$f(\ln(x+1))=x\geqslant\ln(x+1)$,当且仅当 $x=0$ 时,等号成立,

即$f(x)\geqslant x\geqslant g(x)$,当且仅当 $x=0$ 时,等号成立. ……………………………… (4 分)

(2)设$f(x)$与 $g(x)$的公切线为 l,直线 l 与 $f(x)$和 $g(x)$分别切于点 $A(x_1,e^{x_1}-1)$和点 $B(x_2,\ln(x_2+a))$

易知$f'(x)=e^x$,$g'(x)=\dfrac{1}{x+a}$,

方法一:

由题意知,公切线 l:$y=e^{x_1}(x-x_1)+e^{x_1}-1$,$y=\dfrac{1}{x_2+a}(x-x_2)+\ln(x_2+a)$,

所以$\begin{cases}e^{x_1}=\dfrac{1}{x_2+a},\\(1-x_1)e^{x_1}-1=\ln(x_2+a)-\dfrac{x_2}{x_2+a}.\end{cases}$ 即$\begin{cases}x_1=-\ln(x_2+a),\\(1-x_1)e^{x_1}=\ln(x_2+a)+\dfrac{a}{x_2+a}.\end{cases}$

所以$\dfrac{1+\ln(x_2+a)}{x_2+a}=\ln(x_2+a)+\dfrac{a}{x_2+a}$,即$(x_2+a-1)\ln(x_2+a)+a-1=0$.

……………………………………………………………………………………………… (6 分)

令 $G(u)=(u-1)\ln u+a-1$,则 $G(u)$在$(0,+\infty)$上存在两个零点.

因为 $G'(u)=\ln u+\dfrac{u-1}{u}$,$G''(u)=\dfrac{1}{u}+\dfrac{1}{u^2}>0$,

所以 $G'(u)$在$(0,+\infty)$上单调递增,

又因为 $G'(1)=0$,所以 $G(u)$在$(0,1)$上单调递减,在$(1,+\infty)$上单调递增.

1°若 $a>1$,则 $G(u)\geqslant G(1)=a-1>0$,

所以 $G(u)$ 在 $(0,+\infty)$ 上没有零点. ………………………………………………………… (7 分)

2°若 $a=1$,则 $G(u)\geqslant G(1)=0$,当且仅当 $u=1$ 时,等号成立,

所以 $G(u)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有且只有一个零点. …………………………………………………… (8 分)

3°若 $a<1$,令 $u_0=e^{2a-3}$,则 $0<u_0<\frac{1}{e}<\frac{1}{2}$,且 $\ln u_0<0$,

所以 $G(u_0)=(u_0-1)\ln u_0+a-1>-\frac{1}{2}\ln u_0+a-1=-\frac{(2a-3)}{2}+a-1=\frac{1}{2}>0$,

……………………………………………………………………………………………… (10 分)

$G(1)=a-1<0$,

$G(e^{1-a}+1)=e^{1-a}\ln(e^{1-a}+1)+a-1>\ln(e^{1-a}+1)+a-1>\ln e^{1-a}+a-1=0$,

所以 $G(u)$ 在 $(0,+\infty)$ 上存在两个零点,

综上所述,$a<1$. ………………………………………………………………………………… (12 分)

方法二:

由题意知 $k_{AB}=f'(x_1)=g'(x_2)$,即 $\frac{e^{x_1}-1-\ln(x_2+a)}{x_1-x_2}=e^{x_1}=\frac{1}{x_2+a}$,

整理得:$1-x_1+\frac{x_1}{e^{x_1}}-a=0$, ……………………………………………………………… 6 分

令 $H(x)=1-x+\frac{x}{e^x}-a,x\in\mathbf{R}$,依题意 $H(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上存在两个零点.

易知 $H'(x)=-1+\frac{1-x}{e^x}=\frac{1-x-e^x}{e^x}$,

令 $u(x)=1-x-e^x$,则 $u'(x)=-1-e^x<0$,可知 $u(x)$ 是减函数,且 $u(0)=0$,

所以当 $x<0$,$u(x)>0$,$H'(x)>0$,$H(x)$ 在区间 $(-\infty,0)$ 单调递增;

当 $x>0$,$u(x)<0$,$H'(x)<0$,$H(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 单调递减.

由题意知,$H(0)=1-a>0$,解得 $a<1$, ………………………………………………………… 8 分

令 $x_0=1+\frac{1}{e}-a>0$,又易证 $e^x\geqslant ex$,当且仅当 $x=1$ 时,等号成立.

则 $H(x_0)=1-x_0+\frac{x_0}{e^{x_0}}-a\leqslant 1-x_0+\frac{x_0}{ex_0}-a=1-x_0+\frac{1}{e}-a=1-\left(1+\frac{1}{e}-a\right)+\frac{1}{e}-a=0$,

因为 $H(0)H(x_0)\leqslant 0$,$H(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 单调递减,所以 $H(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上存在唯一零点,

令 $x'=a-2<-1$,所以 $\frac{1}{e^{x'}}>2$,

则 $H(x')=1-x'+\frac{x'}{e^{x'}}-a<1-x'+2x'-a=1+x'-a=-1<0$,

因为 $H(0)H(x')<0$,$H(x)$ 在区间 $(-\infty,0)$ 单调递增,

所以 $H(x)$ 在区间 $(-\infty,0)$ 上存在唯一零点,

综上所述,$a<1$. ………………………………………………………………………………… (12 分)

(以上答案仅供参考,其它解法请参考以上评分标准酌情赋分)