期末考试题答案

一、单选题

1、D　2、C　3、A　4、B　5、C　6、C　 7、C 8、B

二、多选题

9．AC　10. ABC　11.AB　 12.　ABC

二、填空题

13 题 $\left(\sqrt{3},3\right)$　　　14 题 3 个　　　15 题6、12、18　　16 题　$4\sqrt{2}$；$\frac{338}{5}\pi$

三、解答题

17、（1）设等差数列$\{a_n\}$的公差为d，则由a_2，a_3+2，a_8成等比数列及$a_1=2$，

得$\left(a_3+2\right)^2=a_2a_8$，即$(4+2d)^2=(2+d)(2+7d)$，解得$d=\pm2$．

当$d=2$时，$a_2=4$，$a_3+2=8$，$a_8=16$构成等比数列，符合条件；

当$d=-2$时，$a_2=0$，$a_3+2=0$，$a_8=-12$不能构成等比数列，不符合条件．

因此$d=2$，于是数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=2n$；

（2）由（1）知$a_n=2n$，故$b_n=2^{2n}+8$，所以

$$S_n=b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n=\frac{4}{3}\left(4^n-1\right)+8n$$

18

【解析】(1)当$\frac{PF}{PB}=\frac{1}{3}$时，$CF//$平面$PDE$.

理由如下：

过点C作$CH\perp ED$，垂足为H，

在PE上取一点M，使得$PM=\frac{1}{3}PE$，连接HM，FM，……………………………… 2 分

因为$PM=\frac{1}{3}PE$，$PF=\frac{1}{3}PB$，所以$FM \mathrel{\underline{\parallel}} \frac{1}{3}EB$，……………………………… 3 分

因为D是AC的中点，且$DE\perp AB$，所以$CH \mathrel{\underline{\parallel}} \frac{1}{3}EB$，……………………………… 4 分

所以$CH \mathrel{\underline{\parallel}} FM$，所以四边形$CFMH$是平行四边形，即$CF//HM$，

又因为$CF\not\subset$平面PDE，$HM\subset$平面PDE，所以$CF//$平面PDE；……………………………… 5 分

18. 由题意可知，$ED\perp PE$，$DE\perp EB$，$\because$面$PDE\perp$面PEB，$\therefore PE\perp EB$，以E为原点，EB为x轴，ED为y轴，EP为z轴，建立空间直角坐标系，$P(0,0,1)$ $D(0,\sqrt{3},0)$，$C(1,2\sqrt{3},0)$ 面PBE的一个法向量为$(0,1,0)$，$\overrightarrow{PD}=(0,\sqrt{3},-1)$，$\overrightarrow{DC}=(1,\sqrt{3},0)$ 面PCD的一个法向量$\vec{n}=(-\sqrt{3},1,\sqrt{3})$

则$\cos\langle\vec{m},\vec{n}\rangle=\frac{\sqrt{7}}{7}$，$\therefore$面$PBE$与面$PCD$所成二面角的正弦值为$\frac{\sqrt{42}}{7}$

19、（1）证明：由题知$\frac{\sin(A-B)}{\cos B}=\frac{\sin(A-C)}{\cos C}$，所以$\sin(A-B)\cos C=\sin(A-C)\cos B$，

所以$\sin A\cos B\cos C-\cos A\sin B\cos C=\sin A\cos C\cos B-\cos A\sin C\cos B$,

所以$\cos A\sin B\cos C=\cos A\sin C\cos B$.因为A 为锐角，即$\cos A\neq 0$，

所以$\sin B\cos C=\sin C\cos B$，所以$\tan B=\tan C$，所以$B=C$.

（2）由（1）知：$B=C$，所以$\sin B=\sin C$，因为$a\sin C=1$，

所以$\frac{1}{a}=\sin C$，因为由正弦定理得：$a=2R\sin A,\sin B=\frac{b}{2R}$，

所以$a\sin C=2R\sin A\bullet\frac{b}{2R}=b\sin A=1$,所以$\frac{1}{b}=\sin A$，因为$A=\pi-B-C=\pi-2C$，

所以$\frac{1}{b}=\sin A=\sin 2C$，所以$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\sin C+\sin 2C$，$C\in(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})$，当$\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=1+\frac{\sqrt{2}}{2}$时，$C=\frac{\pi}{4}$，所以不存在。

20. 解：(I) 设事件C为“一天中甲员工午餐和晚餐都选择A餐厅就餐”，事件D为“乙员工午餐和晚餐都选择B餐厅就餐”因为100个工作日中甲员工午餐和晚餐都选择A餐厅就餐的天数为30，乙员工午餐和晚餐都选择B餐厅就餐的天数为40，所以$P(C)=\frac{30}{100}=0.3$，

$P(D)=\frac{40}{100}=0.4.$ ………………3分

(II) 由题意知，甲员工午餐和晚餐都选择B餐厅就餐的概率为0.1，

乙员工午餐和晚餐都选择A餐厅就餐的概率为0.2，

记X为甲、乙两员工在一天中就餐餐厅的个数，则X的所有可能取值为1、2，

所以$P(X=1)=0.3\times0.2+0.1\times0.4=0.1$，$P(X=2)=1-P(X=1)=0.9$，

所以X的分布列为：

X	1	2
P	0.1	0.9

所以X的数学期望$E(X)=1\times0.1+2\times0.9=1.9$. ………………8分

(III) 由题知$P(N|M)>P(N|\bar{M})$，即$\frac{P(NM)}{P(M)}>\frac{P(N\bar{M})}{P(\bar{M})}=\frac{P(N)-P(NM)}{1-P(M)}$,即

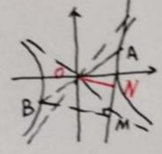
$P(NM)>P(N)\cdot P(M)$，

即$P(NM)-P(N)P(NM)>P(N)\cdot P(M)-P(N)P(NM)$，

即$P(NM)\cdot P(\bar{N})>P(N)P(\bar{N}M)$，即$\frac{P(NM)}{P(N)}>\frac{P(\bar{N}M)}{P(\bar{N})}$，

即$P(M|N)>P(M|\bar{N})$. ………………12分

21.（1）$\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}=1$



（2）$\begin{cases} x^2-y^2=2 \\ y=kx+m \end{cases} \Rightarrow (1-k^2)x^2-2kmx-m^2-2=0$

$\Delta=4k^2m^2+4(1-k^2)(m^2+2)=0$ $\quad x_A=\frac{km}{1-k^2}=-\frac{2k}{m}$

$\therefore m^2+2=2k^2$ $\quad A\left(-\frac{2k}{m},-\frac{2}{m}\right)$

O到AM距离 $d_1=\frac{|m|}{\sqrt{1+k^2}}$ $\quad AN=\sqrt{x_A^2+y_A^2-\frac{m^2}{1+k^2}}=\sqrt{\frac{4(k^2+1)}{m^2}-\frac{m^2}{1+k^2}}$

$\therefore S_{\triangle ABM}=\frac{2|m|}{\sqrt{1+k^2}}\cdot\sqrt{\frac{4(k^2+1)}{m^2}-\frac{m^2}{1+k^2}}=2\sqrt{4-\left(\frac{m^2}{1+k^2}\right)^2}$

设 $t=\frac{m^2}{1+k^2}=\frac{2k^2-2}{1+k^2}=2-\frac{4}{1+k^2}$ $\quad t\in\left[\frac{6}{5},2\right)$

$\therefore S_{\triangle ABM}\in\left(0,\frac{16}{5}\right]$

22.（1）对 $f(x)$ 求导得 $f'(x)=a\cdot\frac{2xe^x-x^2\cdot e^x}{\left(e^x\right)^2}=a\cdot\frac{x(2-x)}{e^x}$.

设直线 $y=\frac{1}{e}x$ 与曲线 $y=f(x)$ 切于点 $P(x_0,y_0)$，则 $\begin{cases} \frac{1}{e}x_0=\frac{ax_0^2}{e^{x_0}} \\ \frac{1}{e}=a\cdot\frac{x_0(2-x_0)}{e^{x_0}} \end{cases}$，解得 $a=x_0=1$，

所以 a 的值为 1.

22.（2）设 $F(x)=f(x)-x+\frac{1}{x}$ $\quad F'(x)=\frac{x(2-x)}{e^x}-1-\frac{1}{x^2}$ $(x>0)$

当 $x\geq 2$ 时，$F'(x)<0$ 恒成立；当 $x\in(0,2)$ $x(2-x)\leq 1$

$F'(x)\leq\frac{1}{e^x}-1-\frac{1}{x^2}<0$ $\quad\therefore F(x)$ 在 $(0,+\infty)\downarrow$ $\quad F(1)=\frac{1}{e}>0$

$F(2)=\frac{4}{e^2}-\frac{3}{2}<0$，$\therefore$ 存在 $x_0\in(1,2)$，$F(x_0)=0$.

$\therefore g(x)=\begin{cases} x-\frac{1}{x} & 0<x\leq x_0 \\ \frac{x^2}{e^x} & x>x_0 \end{cases}$ $\quad h(x)=\begin{cases} x-\frac{1}{x}-c\ln x & 0<x\leq x_0 \\ \frac{x^2}{e^x}-c\ln x & x>x_0 \end{cases}$

当 $x\in(0,x_0]$，$h'(x)=1+\frac{1}{x^2}-\frac{c}{x}\geq 0$ $\quad\therefore c\leq x+\frac{1}{x}$ 恒成立

$\therefore c\leq 2$

当 $x\in(x_0,+\infty)$，$h'(x)=\frac{2x-x^2}{e^x}-\frac{c}{x}\geq 0$ $\quad\therefore c\leq\frac{2x^2-x^3}{e^x}$ 恒成立.

设 $\varphi(x)=\frac{2x^2-x^3}{e^x}$ $\quad\varphi'(x)=\frac{x(x-4)(x-1)}{e^x}$ $\quad(x_0,4)\downarrow$ $(4,+\infty)\uparrow$

$\therefore c\leq\varphi(4)=\frac{-32}{e^4}$ $\quad\therefore$ C的取值范围为 $\left(-\infty,-\frac{32}{e^4}\right]$