考号________ 班级________ 姓名________

线 题 ◇ 答 订 要 ◇ 不 装 内 ◇ 线 封 封 ◇ 弥 弥

2022—2023学年度下学期高三年级第三次综合素养评价

数学试卷

本试卷分第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分,共150分,考试时间120分钟.

第Ⅰ卷(选择题　共60分)

一、选择题(本题共8小题,每小题5分,共40分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

1. 设复数 $z=\cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}$,则在复平面内$\frac{z+1}{z}$对应的点位于　(　　)

A. 第一象限　B. 第二象限　C. 第三象限　D. 第四象限

2. 已知集合 $A=\{(x,y)|xy=1\}$,$B=\{(x,y)|x\in\mathbf{Z},y\in\mathbf{Z}\}$,则 $A\cap B$ 真子集的个数为　(　　)

A. 3　B. 16　C. 15　D. 4

3. 已知 $a>0$ 且 $a\neq1$,"函数 $f(x)=a^x$ 为增函数"是"函数 $g(x)=x^{a-1}$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增"的　(　　)

A. 充分不必要条件　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　D. 既不充分也不必要条件

4. 某校有5名大学生打算前往观看冰球,速滑,花滑三场比赛,每场比赛至少有1名学生且至多2名学生前往,则甲同学不去观看冰球比赛的方案种数是　(　　)

A. 48　B. 54　C. 60　D. 72

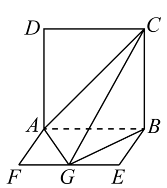
5. 公差不为0的等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n,且 $S_n=n^2a_1$,若 $a_1,a_2,a_{k_1},a_{k_2},a_{k_3}$ 依次成等比数列,则 $k_3=$　(　　)

A. 81　B. 63　C. 41　D. 32

6. 在$\triangle ABC$中,$|AB|=3$,$|AC|=2$,$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$,则直线 AD 通过$\triangle ABC$的　(　　)

A. 垂心　B. 外心　C. 重心　D. 内心

7. 如图,平面 $ABCD\perp$平面 $ABEF$,四边形 $ABCD$ 是正方形,四边形 $ABEF$ 是矩形,且 $AB=4$,$AF=1$,若 G 是线段 EF 上的动点,则三棱锥 $C\text{-}ABG$ 的外接球表面积的最小值是　(　　)



A. 16π　B. 20π　C. 32π　D. 36π

8. 已知向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 是夹角为60°的单位向量,若对任意的 $x_1,x_2\in(m,+\infty)$,且 $x_1<x_2$,$\frac{x_1\ln x_2-x_2\ln x_1}{x_1-x_2}>|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$,则 m 的取值范围是　(　　)

A. $[\mathrm{e}^2,+\infty)$　B. $[\mathrm{e},+\infty)$　C. $\left[\frac{1}{\mathrm{e}},+\infty\right)$　D. $\left[\frac{1}{\mathrm{e}},\mathrm{e}\right)$

二、选择题(本题共4小题,每小题5分,共20分.在每小题给出的四个选项中,有多项符合题目要求,全部选对的得5分,部分选对的得2分,有选错的得0分)

9. 以下四个命题中,真命题有　(　　)

A. 在回归分析中,可用相关指数 R^2 的值判断模型的拟合效果,R^2 越大,模型的拟合效果越好

B. 回归模型中残差是观测值 y,与预测值 $\hat{y}$ 的差,残差点所在的带状区域宽度越窄,说明模型拟合精度越高

C. 对分类变量 x 与 y 的统计量χ^2来说,χ^2值越小,判断"x 与 y 有关系"的把握程度越大

D. 已知随机变量 X 服从二项分布 $B\left(n,\frac{1}{3}\right)$,若 $E(3X+1)=6$,则 $n=6$

10. 钱塘江曾多处出现罕见潮景"鱼鳞潮","鱼鳞潮"的形成需要两股涌潮,一股是波状涌潮,另外一股是破碎的涌潮,两者相遇交叉就会形成像鱼鳞一样的涌潮.若波状涌潮的图像近似函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)\left(A,\omega\in\mathbf{N}^*,|\varphi|<\frac{\pi}{3}\right)$的图像,而破碎的涌潮的图像近似 $f'(x)$($f'(x)$是函数 $f(x)$的导函数)的图像.已知当 $x=2\pi$ 时,两潮有一个交叉点,且破碎的涌潮的波谷为-4,则　(　　)

A. $\omega=2$　B. $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{6}+\sqrt{2}$

C. $f'\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$的图像关于原点对称　D. $f'(x)$在区间$\left(-\frac{\pi}{3},0\right)$上单调

11. 在棱长为2的正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中,E,F 分别为 AB,BC 的中点,则　(　　)

A. 异面直线 DD_1 与 B_1F 所成角的余弦值为$\frac{\sqrt{5}}{5}$

B. 点 P 为正方形 $A_1B_1C_1D_1$ 内一点,当 $DP\parallel$平面 B_1EF 时,DP 的最小值为$\frac{3\sqrt{2}}{2}$

C. 过点 D_1,E,F 的平面截正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 所得的截面周长为 $2\sqrt{13}+\sqrt{2}$

D. 当三棱锥 $B_1\text{-}BEF$ 的所有顶点都在球 O 的表面上时,球 O 的表面积为 6π

12. 已知 F 是抛物线 $W:y^2=2px(p>0)$的焦点,点 $A(1,2)$在 W 上,过点 F 的两条互相垂直的直线 l_1,l_2 分别与 W 交于 B,C 和 D,E,过点 A 分别作 l_1,l_2 的垂线,垂足分别为 M,N,则　(　　)

A. 四边形 $AMFN$ 面积的最大值为2　B. 四边形 $AMFN$ 周长的最大值为 $4\sqrt{2}$

C. $\frac{1}{|BC|}+\frac{1}{|DE|}$为定值$\frac{1}{2}$　D. 四边形 $BDCE$ 面积的最小值为32

第Ⅱ卷(非选择题　共90分)

三、填空题(本题共4小题,每小题5分,共20分)

13. $\left(x+\frac{1}{x}+2\right)^4$ 的展开式的常数项是________.

14. 已知点 $A(-1,1)$,$B(1,3)$,若线段 AB 与圆 $C:(x-1)^2+y^2=m$ 存在公共点,则 m 的取值范围为________.

15. 已知实数 $a>b>1$,满足 $a+\frac{1}{a-1}\geqslant b+\frac{1}{b-1}$,则 $a+4b$ 的最小值是________.

16. 若正实数 a,b 满足 $a(\ln b-\ln a+a)\geqslant b\mathrm{e}^{a-1}$,则$\frac{1}{ab}$的最小值为________.

四、解答题(本题共 6 小题,共 70 分,解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

17.(10 分)

已知数列$\{a_n\}$满足$\dfrac{a_n}{a_{n+1}}=\dfrac{5n-4}{1+5n}$,$a_1=1$.

(1)求$\{a_n\}$的通项公式;

(2)若$b_n=\dfrac{1}{(a_n+4)(a_n+14)}$,$T_n$为数列$\{b_n\}$的前$n$项和,求$T_n$.

18.(12 分)

已知$\triangle ABC$的内角A,B,C所对的边分别为a,b,c,且$a=b+2b\cos C$.

(1)求证:$C=2B$;

(2)求$\dfrac{a+c}{b}$的取值范围.

19.(12 分)

某社区对 55 位居民是否患有新冠肺炎疾病进行筛查,已知随机一人其口拭子核酸检测结果呈阳性的概率为 2%,且每个人的口拭子核酸是否呈阳性相互独立.

(1)假设该疾病患病的概率是 0.3%,且患病者口拭子核酸呈阳性的概率为 98%,设这 55 位居民中有一位的口拭子核酸检测呈阳性,求该居民可以确诊为新冠肺炎患者的概率;

(2)根据经验,口拭子核酸检测采用分组检测法可有效减少工作量,具体操作如下:将 55 位居民分成若干组,先取每组居民的口拭子核酸混在一起进行检测,若结果显示阴性,则可断定本组居民没有患病,不必再检测;若结果显示阳性,则说明本组中至少有一位居民患病,需再逐个进行检测,现有两个分组方案:

方案一:将 55 位居民分成 11 组,每组 5 人;方案二:将 55 位居民分成 5 组,每组 11 人,试分析哪一个方案的工作量更少?

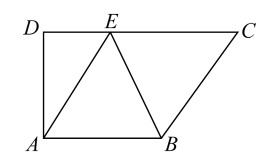
参考数据:$0.98^5\approx0.904$,$0.98^{11}\approx0.801$.

20.(12 分)

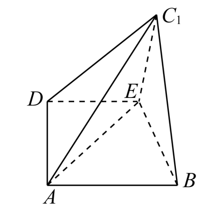
图①是直角梯形$ABCD$,$AB\parallel CD$,$\angle D=90^\circ$,四边形$ABCE$是边长为 2 的菱形,并且$\angle BCE=60^\circ$,以BE为折痕将$\triangle BCE$折起,使点C到达C_1的位置,且$AC_1=\sqrt{6}$.

(1)求证:平面$BC_1E\perp$平面$ABED$;

(2)在棱DC_1上是否存在点P,使得点P到平面ABC_1的距离为$\dfrac{\sqrt{15}}{5}$?若存在,求出直线EP与平面ABC_1所成角的正弦值;若不存在,请说明理由.



①



②

21.(12 分)

已知双曲线$W:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左、右焦点分别为$F_1,F_2$,点$N(0,b)$,右顶点是$M$,且$\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{MF_2}=-1$,$\angle NMF_2=120^\circ$.

(1)求W的方程;

(2)过点$Q(0,-2)$的直线l交W的右支于A,B两个不同的点(B在A,Q之间),若点$H(7,0)$在以线段AB为直径的圆的外部,试求$\triangle AQH$与$\triangle BQH$面积之比λ的取值范围.

22.(12 分)

已知λ为正实数,函数$f(x)=\ln(\lambda x+1)-\lambda x+\dfrac{x^2}{2}(x>0)$.

(1)若$f(x)>0$恒成立,求λ的取值范围;

(2)求证:$2\ln(n+1)-\dfrac{5}{3}<\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\dfrac{2}{i}-\dfrac{1}{i^2}\right)<2\ln(n+1)(n\in\mathbf{N},n\geqslant2)$.