2023 年高三第一次教学质量监测

数学参考答案

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	B	D	C	C	B	C	D	A

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

题号	9	10	11	12				
答案	AC	AD	ABD	AD				

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13.【答案】3.

14.【答案】$a_n=2n+k$，其中 $k<-3$（只要符合题意即可）.

15.【答案】2.

16.【答案】$(0,\dfrac{\sqrt{3}}{3}]$.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.（10 分）

【解析】（1）由题意，$b_{n+1}=a_{n+1}b_n-a_nb_n$，$a_1=3$，$a_2=5$，令 $n=1$ 得 $2b_1=b_2$，又数列 $\{b_n\}$ 为等比数列，所以 $b_{n+1}=2b_n$，即数列 $\{b_n\}$ 为公比为 2 等比数列.

所以，$a_{n+1}-a_n=2$，数列 $\{a_n\}$ 是首项为 3，公差为 2 的等差数列，

数列 $\{a_n\}$ 的通项公式：$a_n=2n+1\ (n\in\mathbf{N}^*)$.（3 分）

由 b_2，$2a_4$，b_5 成等差数列，得：$b_2+b_5=4a_4$，$2b_1+16b_1=36$，$b_1=2$，有 $b_n=2^n$.（5 分）

（2）由（1）知：$c_n=\begin{cases}2n+1,(n\text{为奇数})\\2^n,(n\text{为偶数})\end{cases}$，数列 $\{c_n\}$ 的奇数项是首项为 3，公差为 4 的等差数列，偶数项是以首项为 4，公比为 4 的等比数列.

$$T_{2n}=(a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{2n-1})+(b_2+b_4+b_6+\cdots+b_{2n})=3n+\frac{n(n-1)}{2}\cdot4+\frac{4(1-4^n)}{1-4}$$

$$=2n^2+n+\frac{4}{3}(4^n-1).$$（10 分）

18.（12 分）

【解析】（1）选择条件① $\dfrac{\tan B+\tan C}{\tan B}=\dfrac{2a}{b}$：

$$\frac{\tan B+\tan C}{\tan B}=\frac{\sin B\cos C+\cos B\sin C}{\sin B\cos C}=\frac{\sin(B+C)}{\sin B\cos C}=\frac{\sin A}{\sin B\cos C}=\frac{a}{b\cos C},$$

所以 $\dfrac{a}{b\cos C}=\dfrac{2a}{b}$，于是 $\cos C=\dfrac{1}{2}$，又 $C\in(0,\pi)$，所以 $C=\dfrac{\pi}{3}$.

选择条件② $\frac{1+\sin 2C-\cos 2C}{1+\sin 2C+\cos 2C}=\sqrt{3}$：

因为 $\frac{1+\sin 2C-\cos 2C}{1+\sin 2C+\cos 2C}=\frac{2\sin C(\cos C+\sin C)}{2\cos C(\cos C+\sin C)}=\tan C$，

解得 $\tan C=\sqrt{3}$，又 $C\in(0,\pi)$，所以 $C=\frac{\pi}{3}$．

选择条件③ $\sqrt{3}a=2c\sin(B+\frac{\pi}{3})$：

则 $\sqrt{3}a=c(\sin B+\sqrt{3}\cos B)$，由正弦定理得：$\sqrt{3}\sin A=\sin C\sin B+\sqrt{3}\sin C\cos B$，

即 $\sqrt{3}\sin(B+C)=\sin C\sin B+\sqrt{3}\sin C\cos B$，整理得：$\sqrt{3}\sin B\cos C=\sin C\sin B$，

由 $\sin B\neq 0$ 得：$\tan C=\sqrt{3}$，又 $C\in(0,\pi)$，所以 $C=\frac{\pi}{3}$．　（6分）

（2）由（1）知，$C=\frac{\pi}{3}$，$B=\frac{2\pi}{3}-A$，$\triangle ABC$ 为锐角三角形，所以 $\frac{\pi}{6}<A<\frac{\pi}{2}$，

由正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=1$，得 $a=\sin A, b=\sin B$，

于是，$a^2+b^2=\sin^2 A+\sin^2 B=\sin^2 A+\sin^2(\frac{2\pi}{3}-A)=1-\frac{1}{2}[\cos 2A+\cos(\frac{4\pi}{3}-2A)]$．

化简得，$a^2+b^2=1+\frac{1}{2}\sin(2A-\frac{\pi}{6})$，

因为 $\frac{\pi}{6}<2A-\frac{\pi}{6}<\frac{5\pi}{6}$，所以 $\frac{1}{2}<\sin(2A-\frac{\pi}{6})\leq 1$，$\frac{5}{4}<1+\frac{1}{2}\sin(2A-\frac{\pi}{6})\leq\frac{3}{2}$，

故 a^2+b^2 的取值范围为 $(\frac{5}{4},\frac{3}{2}]$．　（12分）

19．（12分）

【解析】（1）证法1：因为 $PD\perp$ 底面 $ABCD$，所以 $PD\perp BC$，
又 $ABCD$ 为正方形，所以 $BC\perp CD$，
且 $PD\cap CD=D$，所以 $BC\perp$ 平面 PCD，
又 $DM\subset$ 平面 PCD，所以 $BC\perp DM$，
因为 $PD=DC$，M 为线段 PC 的中点，所以 $DM\perp PC$，
且 $BC\cap PC=C$，所以 $DM\perp$ 平面 PBC，
而 $DM\subset$ 平面 DMN，所以平面 $DMN\perp$ 平面 PBC．　（6分）

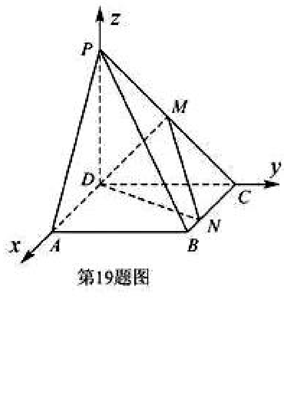
证法2：以 D 点为坐标原点，以 DA,DC,DP 分别为 x 轴，y 轴，z 轴，建立空间直角坐标系 $Dxyz$，如图，由已知可得 $D(0,0,0)$，$M(0,2,2)$，$N(3,4,0)$，$P(0,0,4)$，$B(4,4,0)$，$C(0,4,0)$，则

$\overline{DM}=(0,2,2)$，$\overline{DN}=(3,4,0)$，$\overline{PB}=(4,4,-4)$，$\overline{PC}=(0,4,-4)$．

设平面 DMN 的法向量为 $\overline{n_1}=(x_1,y_1,z_1)$，

由 $\overline{n_1}\perp\overline{DM},\overline{n_1}\perp\overline{DN}$ 得 $\overline{n_1}\cdot\overline{DM}=0,\overline{n_1}\cdot\overline{DN}=0$，所以 $\begin{cases}2y_1+2z_1=0\\3x_1+4y_1=0\end{cases}$，

令 $z_1=1$，得 $y_1=-1$，$x_1=\frac{4}{3}$，所以 $\overline{n_1}=(\frac{4}{3},-1,1)$．



第19题图

设平面 PBC 的法向量为 $\overline{n_2}=(x_2,y_2,z_2)$，

由$\overrightarrow{n_2}\perp\overrightarrow{PB},\overrightarrow{n_2}\perp\overrightarrow{PC}$得$\overrightarrow{n_2}\cdot\overrightarrow{PB}=0,\overrightarrow{n_2}\cdot\overrightarrow{PC}=0$，所以$\begin{cases}4x_2+4y_2-4z_2=0\\4y_2-4z_2=0\end{cases}$，

令$z_2=1$，得$y_2=1$，$x_2=0$，所以$\overrightarrow{n_2}=(0,1,1)$，

因为$\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}=0$，所以$\overrightarrow{n_1}\perp\overrightarrow{n_2}$，所以平面$DMN\perp$平面$PBC$． （6分）

（2）方法1：因为底面$ABCD$为正方形，所以$AB/\!/CD$，

所以直线AB与平面DMN所成角等于直线CD与平面DMN所成角，设所求角为θ，

由已知可求得$MN=\sqrt{17}$，$DN=5$，$DM=2\sqrt{2}$，所以$\angle DMN=90^\circ$，

所以$S_{\triangle DMN}=\sqrt{34}$，又$S_{\triangle CDN}=6$，点$M$到平面$CDN$的距离为2，

设C点到平面DMN的距离为h，由$V_{C-DMN}=V_{M-CDN}$，得$\frac{1}{3}\times6\times2=\frac{1}{3}\times\sqrt{34}\times h$，得$h=\frac{12}{\sqrt{34}}$，

又$CD=4$，所以$\sin\theta=\frac{h}{CD}=\frac{3\sqrt{34}}{34}$． （12分）

方法2：因为$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}=(0,4,0)$，平面$DMN$的法向量为$\overrightarrow{n_1}=(\frac{4}{3},-1,1)$，

设直线与平面DMN所成的角为θ，则$\sin\theta=|\cos<\overrightarrow{AB},\overrightarrow{n_1}>|=|\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{n_1}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{n_1}|}|=\frac{3\sqrt{34}}{34}$． （12分）

20．（12分）

【解析】（1）随机变量X的可能取值为$0,1,2,3,4$， （1分）

$P(X=0)=\frac{C_2^2\cdot C_3^2}{C_5^2\cdot C_5^2}=0.03$，$P(X=1)=\frac{C_2^2\cdot C_2^1C_3^1+C_3^1C_2^1\cdot C_3^2}{C_5^2\cdot C_5^2}=0.24$，

$P(X=2)=\frac{C_2^2\cdot C_2^2+C_3^1C_2^1\cdot C_2^1C_3^1+C_3^2\cdot C_3^2}{C_5^2\cdot C_5^2}=0.46$，$P(X=3)=\frac{C_3^2\cdot C_2^1C_3^1+C_3^1C_2^1\cdot C_2^2}{C_5^2\cdot C_5^2}=0.24$，

$P(X=4)=\frac{C_3^2\cdot C_2^2}{C_5^2\cdot C_5^2}=0.03$． （4分）

随机变量X的分布列为：

X	0	1	2	3	4
P	0.03	0.24	0.46	0.24	0.03

随机变量X的期望$E(X)=0\times0.03+1\times0.24+2\times0.46+3\times0.24+4\times0.03=2$． （6分）

（2）$\overline{x_甲}=\frac{1}{5}(137+133+130+128+122)=130$，$s_甲^2=\frac{1}{5}(7^2+3^2+0+2^2+8^2)=25.2$，$s_甲\approx5.02$．

$\overline{x_乙}=\frac{1}{5}(111+110+109+106+114)=110$，$s_乙^2=\frac{1}{5}(1^2+0+1^2+4^2+4^2)=6.8$，$s_乙\approx2.61$． （8分）

根据公式，甲品种的变异系数为$\frac{5.02}{130}\times100\%\approx3.86\%$，乙的变异系数为$\frac{2.61}{110}\times100\%\approx2.37\%$，

所以甲品种的成年水牛的变异系数大． （12分）

21．（12分）

【解析】（1）由题意，$A(-a,0),B(a,0)$，$P(x_0,y_0)$满足$\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}=1$，即$y_0^2=\frac{b^2}{a^2}(x_0^2-a^2)$．

于是，$k_{PA}\cdot k_{PB}=\dfrac{y_0}{x_0+a}\cdot\dfrac{y_0}{x_0-a}=\dfrac{y_0^2}{x_0^2-a^2}=\dfrac{y_0^2}{x_0^2-a^2}=\dfrac{b^2}{a^2}=3$， （4 分）

所以双曲线 C 的渐近线方程为 $y=\pm\sqrt{3}x$． （5 分）

（2）由题，$A(-a,0),B(a,0)$，直线 $PB: y=\dfrac{y_0}{x_0-a}(x-a)$，直线 $QA: y=\dfrac{-y_0}{x_0+a}(x+a)$．

联立直线 PB 与直线 QA 方程，解得 $x_M=\dfrac{a^2}{x_0}$，故 $x_N=\dfrac{a^2}{x_0}$． （7 分）

由（1）知双曲线 $C: 3x^2-y^2=3a^2$，故 $y_0^2=3(x_0^2-a^2)$，

于是直线 $PN: y=\dfrac{y_0}{x_0-\dfrac{a^2}{x_0}}(x-\dfrac{a^2}{x_0})$，即 $y=\dfrac{x_0y_0}{x_0^2-a^2}(x-\dfrac{a^2}{x_0})$，即 $y=\dfrac{3x_0}{y_0}x-\dfrac{3a^2}{y_0}$，与双曲线 C 联立

得：$3x^2-(\dfrac{3x_0}{y_0}x-\dfrac{3a^2}{y_0})^2=3a^2$，即 $(y_0^2-3x_0^2)x^2+6a^2x_0x-a^2(3a^2+y_0^2)=0$， （10 分）

即 $-3a^2x^2+6a^2x_0x-3a^2x_0^2=0$，因为 $\Delta=(6a^2x_0)^2-4(-3a^2x_0^2)(-3a^2)=0$，所以直线 PN 与双曲线 C 只有一个公共点． （12 分）

22．（12 分）

【解析】（1）由 $f(x)=\ln(x-1)-\dfrac{k(x-2)}{x}\geq 0$，得 $x\ln(x-1)-k(x-2)\geq 0$．

令 $\varphi(x)=x\ln(x-1)-k(x-2), x\in[2,+\infty)$，则 $\varphi'(x)=\ln(x-1)+\dfrac{x}{x-1}-k$，

$\varphi''(x)=\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{(x-1)^2}=\dfrac{x-2}{(x-1)^2}\geq 0(x\geq 2)$．

于是 $\varphi'(x)=\ln(x-1)+\dfrac{x}{x-1}-k$ 在 $[2,+\infty)$ 上单增，故 $\varphi'(x)\geq\varphi'(2)=2-k$．

① 当 $k\leq 2$ 时，则 $\varphi'(x)\geq 2-k\geq 0$，所以 $\varphi(x)$ 在 $[2,+\infty)$ 上单增，$\varphi(x)\geq\varphi(2)=0$，
此时 $f(x)\geq 0$ 对 $\forall x\in[2,+\infty)$ 恒成立，符合题意； （4 分）

② 当 $k>2$ 时，$\varphi'(2)=2-k<0$，$\varphi'(\mathrm{e}^k+1)=\dfrac{\mathrm{e}^k+1}{\mathrm{e}^k}>0$，故存在 $x_0\in(2,+\infty)$ 使得 $\varphi'(x_0)=0$，

当 $x\in(2,x_0)$ 时，$\varphi'(x)<0$，则 $\varphi(x)$ 单减，此时 $\varphi(x)<\varphi(2)=0$，不符合题意．
综上，实数 k 的取值范围 $(-\infty,2]$． （6 分）

（2）由（1）中结论，取 $k=2$，有 $\ln(x-1)>\dfrac{2(x-2)}{x}(x>2)$，即 $\ln t>\dfrac{2(t-1)}{t+1}(t>1)$．

不妨设 $x_2>x_1>1$，$t=\dfrac{x_2}{x_1}>1$，则 $\ln\dfrac{x_2}{x_1}>\dfrac{2(\dfrac{x_2}{x_1}-1)}{\dfrac{x_2}{x_1}+1}$，整理得 $\dfrac{x_1+x_2}{2}>\dfrac{x_2-x_1}{\ln x_2-\ln x_1}$． （9 分）

于是 $\dfrac{(x_1-1)+(x_2-1)}{2}>\dfrac{(x_2-1)-(x_1-1)}{\ln(x_2-1)-\ln(x_1-1)}=\dfrac{x_2-x_1}{\dfrac{1}{3\mathrm{e}}[(x_2-1)-(x_1-1)]}=3\mathrm{e}$，

即 $x_1+x_2>6\mathrm{e}+2$． （12 分）