蚌埠市2023届高三年级第二次教学质量检查考试

数学参考答案

一、选择题：

题　号	1	2	3	4	5	6	7	8
答　案	C	D	C	D	A	B	A	A

二、选择题：

题　号	9	10	11	12
答　案	ACD	ABD	ACD	ACD

三、填空题：

13. 60　　14. 56　　15. $1+\sqrt{6}$　　16. $\dfrac{n(n+1)}{2}$

四、解答题：

17. (10 分)

(1) $\because 6S_n=a_n^2+3a_n+2$　①

$\therefore 6S_{n-1}=a_{n-1}^2+3a_{n-1}+2(n\geqslant 2)$　②

① − ②得：$6(S_n-S_{n-1})=a_n^2-a_{n-1}^2+3(a_n-a_{n-1})$，即

$6a_n=(a_n-a_{n-1})(a_n+a_{n-1})+3a_n-3a_{n-1}(n\geqslant 2)$

$3a_n+3a_{n-1}=(a_n-a_{n-1})(a_n+a_{n-1})(n\geqslant 2)$，…………………………………………… 2 分

因为正项数列$\{a_n\}$　$\therefore a_n+a_{n-1}>0,a_n-a_{n-1}=3(n\geqslant 2)$

又$6a_1=a_1^2+3a_1+2,a_1^2-3a_1+2=0,\because a_1>1$　$\therefore a_1=2$

$\therefore$ 数列$\{a_n\}$是首项为2，公差为3的等差数列，

$\therefore a_n=2+3(n-1)=3n-1$，

即$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=3n-1$. …………………………………………… 4 分

(2) $\because a_n(3^{b_n}-1)=3,\therefore b_n=\log_3\left(\dfrac{3}{a_n}+1\right)=\log_3\dfrac{3n+2}{3n-1}=\log_3\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$　…………………… 6 分

$\therefore T_n=b_1+b_2+\cdots+b_n=\log_3\dfrac{a_2}{a_1}+\log_3\dfrac{a_3}{a_2}+\cdots+\log_3\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\log_3\left(\dfrac{a_2}{a_1}\cdot\dfrac{a_3}{a_2}\cdot\cdots\cdot\dfrac{a_n}{a_{n-1}}\cdot\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right)$

$=\log_3\dfrac{a_{n+1}}{a_1}$. …………………………………………… 8 分

$\therefore T_{100}=\log_3\dfrac{a_{101}}{a_1}=\log_3\dfrac{302}{2}=\log_3 151$

$\therefore 3^{T_{100}}=151$. …………………………………………… 10 分

18. (12 分)

(1) $\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-A\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{6}+A\right)=\cos\left[\dfrac{\pi}{2}-\left(\dfrac{\pi}{3}-A\right)\right]\cos\left(\dfrac{\pi}{6}+A\right)$

$=\cos^2\left(\dfrac{\pi}{6}+A\right)=\dfrac{\cos\left(\dfrac{\pi}{3}+2A\right)+1}{2}=\dfrac{1}{4}$，

$\therefore \cos\left(\dfrac{\pi}{3}+2A\right)=-\dfrac{1}{2}$，…………………………………………… 3 分

因为 $0<A<\pi$，得 $\frac{\pi}{3}<\frac{\pi}{3}+2A<\frac{7\pi}{3}$，

所以 $\frac{\pi}{3}+2A=\frac{2\pi}{3}$ 或 $\frac{\pi}{3}+2A=\frac{4\pi}{3}$，

解得 $A=\frac{\pi}{6}$ 或 $A=\frac{\pi}{2}$，因为 $a<c$，得 $A<\frac{\pi}{2}$，

$\therefore A=\frac{\pi}{6}$. ………………………………………………………………………… 6 分

（2）由（1）知，$A=\frac{\pi}{6}$，

$a\sin A+c\sin C=4\sqrt{3}\sin B$，

由正弦定理，得 $a^2+c^2=4\sqrt{3}b=12$，

由余弦定理，得 $a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos A$，

即 $12-c^2=3+c^2-2\sqrt{3}c\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$，

整理，得 $2c^2-3c-9=0$，由 $c>0$ 得 $c=3$， ……………………………………… 10 分

所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times3\times\frac{1}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$. ………………………………… 12 分

19. （12 分）

（1）$\because$ 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$，连接 BD 交 AC 于点 O，连接 OE，

$\because BF/\!/$ 平面 ACE，平面 $BEF\cap$ 平面 $ACE=OE$，$BF\subset$ 平面 BEF

$\therefore BF/\!/OE$，又 $EF/\!/BO$，$\therefore BOEF$ 为平行四边形，

$EF=BO=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ………………………………………………………………………… 5 分

（2）以点 C 为坐标原点，$\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CC_1}$ 方向分别为 x 轴、y 轴、z 轴正方向建立空间直角坐标系，则 $D_1(1,0,1)$，$B_1(0,1,1)$，$A(1,1,0)$，$B(0,1,0)$，

$\overrightarrow{D_1B_1}=(-1,1,0)$，$\overrightarrow{D_1E}=\frac{1}{4}\overrightarrow{D_1B_1}=\left(-\frac{1}{4},\frac{1}{4},0\right)$，

$\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{CD_1}+\overrightarrow{D_1E}=\left(\frac{3}{4},\frac{1}{4},1\right)$，

$\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{CE}-\overrightarrow{CB}=\left(\frac{3}{4},-\frac{3}{4},1\right)$， ……………………………………………………… 7 分

设平面 ACE 的法向量为 $m=(x,y,z)$，则

$\begin{cases}\overrightarrow{CA}\cdot m=x+y=0,\\ \overrightarrow{CE}\cdot m=\frac{3}{4}x+\frac{1}{4}y+z=0,\end{cases}$ 取 $z=-1$，解得 $m=(2,-2,-1)$， ……………… 9 分

设直线 BE 与平面 ACE 所成角为 α，则

$\sin\alpha=\frac{|\overrightarrow{BE}\cdot m|}{|\overrightarrow{BE}|\cdot|m|}=\frac{4\sqrt{34}}{51}$

即直线 BE 与平面 ACE 所成角的正弦值为 $\frac{4\sqrt{34}}{51}$. ……………………………………… 12 分

20. (12 分)

(1)记事件 A:直径约 10mm 的结节在 1 年内发展为恶性肿瘤,事件 B:该项无创血液检测的检查结果为阴性,

由题,$P(A)=0.2\%$,$P(\overline{A})=99.8\%$,$P(B|A)=15\%$,$P(\overline{B}|A)=85\%$,

$P(B|\overline{A})=85\%$,$P(\overline{B}|\overline{A})=15\%$,则

$$P(B)=P(BA+B\overline{A})=P(BA)+P(B\overline{A})=P(B|A)P(A)+P(B|\overline{A})P(\overline{A})$$
$$=15\%\times 0.2\%+85\%\times 99.8\%=0.8486$$

患者甲检查结果为阴性的概率为 0.8486. …………………………………………… 4 分

(2)$P(AB)=P(B|A)P(A)=15\%\times 0.2\%$,

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{15\%\times 0.2\%}{15\%\times 0.2\%+85\%\times 99.8\%}\approx 0.00035.$$

患者甲的检查结果为阴性,他的这个结节在 1 年内发展为恶性肿瘤的概率为 0.00035.
…………………………………………………………………………………………… 8 分

(3)记参加该项检查的 1000 位患者中,获得 20 万元赔付的有 X 人,

$X\sim B(1000,0.00035)$,则 $EX=1000\times 0.00035=0.35$,

记保险公司每年在这个项目上的收益为 Y 元,

$Y=200\times 1000-2\times 10^5X$,

则 $EY=200\times 1000-2\times 10^5EX=1.3\times 10^5$,

保险公司每年在这个项目上的收益估计为 13 万元. ………………………………… 12 分

21. (12 分)

(1)由点 $A(1,2)$ 在 C 上,代入 $C:y^2=2px$,解得 $p=2$,即 $C:y^2=4x$.

因为 M 为 A 关于动点 $T(t,0)$ 的对称点,所以 $M(2t-1,-2)$.

设直线 $l:x=n(y+2)+2t-1$,

联立 $\begin{cases}x=n(y+2)+2t-1,\\ y^2=4x,\end{cases}$ 整理得 $y^2-4ny-8n-8t+4=0$,

则 $\Delta=(-4n)^2-4(-8n-8t+4)=16(n^2+2n+2t-1)$,

$y_1+y_2=4n$,$y_1y_2=-8n-8t+4$, ……………………………………………… 2 分

由 M 为 P,Q 的中点,得 $\frac{y_1+y_2}{2}=-2$,故 $n=-1$,

由 $\Delta>0$,解得 $1<t<3$,

由直线 l 过坐标原点 O,得 $n=\frac{1}{2}-t$,则 $t=\frac{3}{2}$,

解得 $y_1=0$,$y_2=-4$,即 $P(0,0)$,$Q(4,-4)$,

设△APQ 外接圆的一般方程 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$,

代入 $A(1,2)$,$P(0,0)$,$Q(4,-4)$,

$$\begin{cases}F=0,\\ 5+D+2E+F=0,\\ 32+4D-4E+F=0,\end{cases}$$

解得 $D=-7$,$E=1$,$F=0$,即 $x^2+y^2-7x+y=0$,

即△APQ 外接圆的标准方程为 $\left(x-\frac{7}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{25}{2}$. ……………… 6 分

(2)由(1)可知,$|PQ|=8\sqrt{t-1}$,

A 到直线 $l:x+y+3-2t=0$ 的距离为 $d=\frac{|1+2+3-2t|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}(3-t)$,

则$\triangle APQ$面积$S=\frac{1}{2}\cdot|PQ|\cdot d=4\sqrt{2}(3-t)\sqrt{t-1}$， ………………………………… 8分

$S'=\frac{2\sqrt{2}(5-3t)}{\sqrt{t-1}}$，由$S'=0$，解得$t=\frac{5}{3}$，

当$1<t<\frac{5}{3}$，$S'>0$，S单调递增；当$\frac{5}{3}<t<3$，$S'<0$，S单调递减；

故$t=\frac{5}{3}$，$\triangle APQ$面积的最大值$S=\frac{32\sqrt{3}}{9}$. ………………………………………… 12分

22.（12分）

（1）由题易知$a\neq0$，$f'(x)=\frac{a}{1+ax}-1=\frac{a-1-ax}{1+ax}$， ……………………………………… 1分

① 当$a<0$，函数$f(x)$定义域为$\left(-\infty,-\frac{1}{a}\right)$，

$f(0)=-\frac{1}{a}>0>\frac{1}{a}-2$，不合题意，舍去； ……………………………………………… 2分

② 当$a>0$，函数$f(x)$定义域为$\left(-\frac{1}{a},+\infty\right)$，由$f'(x)=0$，解得$x=1-\frac{1}{a}$，

当$-\frac{1}{a}<x<1-\frac{1}{a}$，$f'(x)>0$，即$f(x)$在区间$\left(-\frac{1}{a},1-\frac{1}{a}\right)$单调递增，

当$x>1-\frac{1}{a}$，$f'(x)<0$，即$f(x)$在区间$\left(1-\frac{1}{a},+\infty\right)$单调递减，

$f_{max}=f\left(1-\frac{1}{a}\right)=\ln a-1$，即$\ln a-1\leqslant\frac{1}{a}-2$， ……………………………………… 4分

设函数$h(a)=\ln a-\frac{1}{a}+1$，$a>0$，

$h'(a)=\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}>0$，即$h(a)$在$(0,+\infty)$单调递增，

又因为$h(1)=0$，故$0<a\leqslant1$时，$h(a)\leqslant0$成立，即$\ln a-1\leqslant\frac{1}{a}-2$成立，

故a的取值范围是$(0,1]$. ……………………………………………………………… 6分

（2）当$a=1$，$f(x)=\ln(1+x)-x-1$，

设函数$F(x)=\ln x-x$，$x>0$，$F'(x)=\frac{1}{x}-1$，

易知$x\in(0,1)$，$F'(x)>0$，$F(x)$单调递增，

$x\in(1,+\infty)$，$F'(x)<0$，$F(x)$单调递减， …………………………………………… 7分

不妨令$f(x_1)=f(x_2)=g(x_3)=g(x_4)=m$，

由$f(x_1)=f(x_2)=m$，即$F(1+x_1)=F(1+x_2)=m$，

又因为$g(x)=x-e^x=\ln e^x-e^x$，$g(x_3)=g(x_4)=m$，

故$\ln e^{x_3}-e^{x_3}=\ln e^{x_4}-e^{x_4}=m$，即$F(e^{x_3})=F(e^{x_4})=m$，

由函数$F(x)$单调性可知，方程$F(x)=m$至多有两解，

故不妨令$1+x_1=e^{x_3}$，$1+x_2=e^{x_4}$，

两式相减得$|x_2-x_1|=|e^{x_4}-e^{x_3}|$，

由$g(x_3)=g(x_4)=m$，得$e^{x_3}=x_3-m$，$e^{x_4}=x_4-m$，

故$|x_2-x_1|=|e^{x_4}-e^{x_3}|=|(x_4-m)-(x_3-m)|=|x_4-x_3|$，问题得证. ……… 12分

（以上各题其它解法请参考以上评分标准酌情赋分）