宿州市 2023 届高三第一次质量检测

数学参考答案

一、选择题（单项选择）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	C	B	A	D	A	D	A	B

二、选择题（多项选择）

题号	9	10	11	12
答案	AB	AB	ABC	ABD

三、填空题

13. 5　　14. $y^2=4x$（$p>\frac{3}{2}$即可）　　15. $\frac{2^n-1}{2\left(2^n+1\right)}$　　16. $\left[\ln 3-3,\sqrt{5}\right]$

四、解答题

17. 解：（Ⅰ）由正弦定理可得$(b-c)(b-c)=a\cdot a-bc$，即$b^2+c^2-a^2=bc$，

由余弦定理的变形得$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{1}{2}$，

又$A\in\left(0,\pi\right)$，所以$A=\frac{\pi}{3}$.

（Ⅱ）$\sin B+\sin C=\sin B+\sin\left(B+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3}{2}\sin B+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos B=\sqrt{3}\sin\left(B+\frac{\pi}{6}\right)$，

由（Ⅰ）知$A=\frac{\pi}{3}$，所以$B\in\left(0,\frac{2}{3}\pi\right)$，从而$B+\frac{\pi}{6}\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{5}{6}\pi\right)$，

所以$\sin\left(B+\frac{\pi}{6}\right)\in\left(\frac{1}{2},1\right]$，从而$\sin B+\sin C\in\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\sqrt{3}\right]$.

即$\sin B+\sin C$的取值范围为$\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\sqrt{3}\right]$.

18.（Ⅰ）证明：记 F 为棱 PB 靠近点 P 的三等分点，连接 EF，AF.

因为$EF\,/\!/\,BC$，且$EF=\frac{1}{3}BC$，又$AD\,/\!/\,BC$且$AD=\frac{1}{3}BC$，

所以$EF\,/\!/\,AD$且$EF=AD$，即四边形 $ADEF$ 为平行四边形，

所以$DE\,/\!/\,AF$，又因为$AF\subset$平面 PAB，$DE\not\subset$平面 PAB，

所以$DE\,/\!/$平面 PAB.

（Ⅱ）解：在 BC 上取一点 G，使得$BC=3GC$，所以$GC=AD=2$，

又$AD\,/\!/\,BC$，$BC\perp CD$知四边形 $AGCD$ 为矩形，从而$AG\perp AD$，

又$PA\perp$底面 $ABCD$，所以 AG，AD，AP 两两垂直，以 A 为坐标原点，AG，AD，AP 所在直线分别为 x 轴，y 轴，z 轴建立如图所示的空间直角坐标系$O-xyz$，则

$B\left(2,-4,0\right)$，$C\left(2,2,0\right)$，$D\left(0,2,0\right)$，$P\left(0,0,2\right)$，$E\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right)$，

从而$\overrightarrow{BC}=(0,6,0)$，$\overrightarrow{CP}=(-2,-2,2)$，$\overrightarrow{DE}=\left(\frac{2}{3},-\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right)$，

设平面 PBC 的法向量为$\vec{n}=(x,y,z)$，则

$$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{BC}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{CP}=0\end{cases}，即\begin{cases}2y=0\\ -2x-2y+2z=0\end{cases}，$$

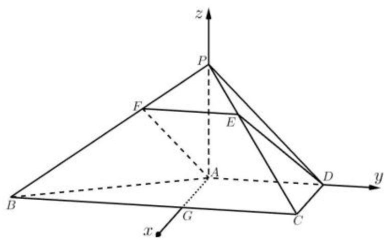
可取$\vec{n}=(1,0,1)$为平面 PBC 的一个法向量，则

$$\cos\left\langle\vec{n},\overrightarrow{DE}\right\rangle=\frac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{DE}}{|\vec{n}|\cdot\left|\overrightarrow{DE}\right|}=\frac{1\times\frac{2}{3}+1\times\frac{4}{3}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}，$$

设 DE 与平面 PBC 所成的角为α，则

$$\sin\alpha=\left|\cos\left\langle\vec{n},\overrightarrow{DE}\right\rangle\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}，$$

即 DE 与平面 PBC 所成的角的正弦值为$\frac{\sqrt{2}}{2}$.



19. 解：（Ⅰ）由题意$b_{n+1}-b_n=a_{2n+1}-a_{2n-1}=4$，又$b_1=a_1=1$，

所以，数列$\{b_n\}$为以 1 为首项，4 为公差的等差数列，

所以$b_n=1+(n-1)\times4=4n-3$.

（Ⅱ）由已知当 n 为偶数时$a_{n+2}+a_n=4$，所以

$$S_{23}=a_1+a_2+\cdots+a_{23}$$
$$=(a_1+a_3+\cdots+a_{23})+(a_2+a_4+\cdots+a_{22})$$
$$=(b_1+b_2+\cdots+b_{12})+\left[a_2+(a_4+a_6)+(a_8+a_{10})+\cdots+(a_{20}+a_{22})\right]$$
$$=\frac{12\times(1+45)}{2}+(1+4\times5)=297.$$

20. 解：（Ⅰ）共有$n+6$个机房，抽取 2 个机房有C_{n+6}^2种方法，其中全是小机房有C_6^2种方法，因此全是小机房的概率为$\frac{C_6^2}{C_{n+6}^2}=\frac{1}{3}$，从而解得$n=4$.

（Ⅱ）X 的可能取值为 0，1，2，3.

$$P(X=0)=\frac{C_6^0C_4^3}{C_{10}^3}=\frac{4}{120}=\frac{1}{30}，$$

$P(X=1)=\dfrac{C_6^1C_4^2}{C_{10}^3}=\dfrac{36}{120}=\dfrac{3}{10}$，

$P(X=2)=\dfrac{C_6^2C_4^1}{C_{10}^3}=\dfrac{60}{120}=\dfrac{1}{2}$，

$P(X=3)=\dfrac{C_6^3C_4^0}{C_{10}^3}=\dfrac{20}{120}=\dfrac{1}{6}$.

则随机变量 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\dfrac{1}{30}$	$\dfrac{3}{10}$	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{1}{6}$

则 X 的数学期望 $E(X)=0\times\dfrac{1}{30}+1\times\dfrac{3}{10}+2\times\dfrac{1}{2}+3\times\dfrac{1}{6}=\dfrac{9}{5}$.

21．解：（Ⅰ）设椭圆焦距为 $2c$，由题意可得

$$\begin{cases}\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\ 2a+2c=4+2\sqrt{2}\end{cases},$$

解得 $a=2$，$c=\sqrt{2}$，所以 $b^2=a^2-c^2=2$，

从而椭圆 C 的标准方程 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1$.

（Ⅱ）设点 $M\left(x_0,y_0\right)$，则以 OM 为直径的圆的方程为 $x\left(x-x_0\right)+y\left(y-y_0\right)=0$，

又圆 O：$x^2+y^2=1$，两式相减得直线 AB 的方程为 $x_0x+y_0y=1$，

设 $P\left(x_1,y_1\right)$，$Q\left(x_2,y_2\right)$，由 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1\\ x_0x+y_0y=1\end{cases}$，

消去 y 整理后得 $\left(2x_0^2+y_0^2\right)x^2-4x_0x+2-4y_0^2=0$，

$x_1+x_2=\dfrac{4x_0}{2x_0^2+y_0^2}$，$x_1x_2=\dfrac{2-4y_0^2}{2x_0^2+y_0^2}$，

所以 $|PQ|=\sqrt{1+\left(-\dfrac{x_0}{y_0}\right)^2}\left|x_1-x_2\right|=\sqrt{1+\left(-\dfrac{x_0}{y_0}\right)^2}\sqrt{\left(x_1+x_2\right)^2-4x_1x_2}$

$$=\sqrt{1+\frac{x_0^2}{y_0^2}}\sqrt{\left(\frac{4x_0}{2x_0^2+y_0^2}\right)^2-4\times\frac{2-4y_0^2}{2x_0^2+y_0^2}}=2\sqrt{6}\times\frac{\sqrt{x_0^2+y_0^2}\sqrt{x_0^2+1}}{2x_0^2+y_0^2},$$

又点 O 到直线 PQ 的距离 $d=\dfrac{1}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}$，

设△OPQ 的面积为 S，则

$$S=\frac{1}{2}|PQ|\cdot d=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{6}\times\frac{\sqrt{x_0^2+y_0^2}\sqrt{x_0^2+1}}{2x_0^2+y_0^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}$$

$$=\frac{2\sqrt{6}\sqrt{x_0^2+1}}{4x_0^2+4-x_0^2}=\frac{2\sqrt{6}\sqrt{x_0^2+1}}{3x_0^2+4}=2\sqrt{6}\times\frac{\sqrt{x_0^2+1}}{3\left(x_0^2+1\right)+1}$$

$$=2\sqrt{6}\times\frac{1}{3\sqrt{x_0^2+1}+\frac{1}{\sqrt{x_0^2+1}}},$$

其中 $x_0^2\in[0,4)$，令 $t=\sqrt{x_0^2+1}$，则 $t\in\left[1,\sqrt{5}\right)$，

设 $f(t)=3t+\frac{1}{t}$，$t\in\left[1,\sqrt{5}\right)$，则 $f'(t)=3-\frac{1}{t^2}>0$，

所以 $f(t)$ 在区间 $\left[1,\sqrt{5}\right)$ 上单调递增，从而得 $f(t)\in\left[4,\frac{16\sqrt{5}}{5}\right)$，

于是可得 $S\in\left(\frac{\sqrt{30}}{8},\frac{\sqrt{6}}{2}\right]$，

即△OPQ 的面积的取值范围为 $\left(\frac{\sqrt{30}}{8},\frac{\sqrt{6}}{2}\right]$.

22. 解：（Ⅰ）当 $b=0$ 时，$f(x)=x^2+a(x-\ln x)$，$f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，

$f'(x)=2x+a-\frac{a}{x}=\frac{2x^2+ax-a}{x}$，

当 $a^2+8a\le 0$，即 $-8\le a\le 0$ 时，$f'(x)\ge 0$ 且不恒为 0，

所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；

当 $a<-8$ 时，方程 $2x^2+ax-a=0$ 有两不等正根 $\frac{-a\pm\sqrt{a^2+8a}}{4}$，

结合定义域由 $f'(x)>0$ 可得 $x\in\left(0,\frac{-a-\sqrt{a^2+8a}}{4}\right)\cup\left(\frac{-a+\sqrt{a^2+8a}}{4},+\infty\right)$，

由 $f'(x)<0$ 可得 $x\in\left(\frac{-a-\sqrt{a^2+8a}}{4},\frac{-a+\sqrt{a^2+8a}}{4}\right)$，

所以 $f(x)$ 在区间 $\left(\frac{-a-\sqrt{a^2+8a}}{4},\frac{-a+\sqrt{a^2+8a}}{4}\right)$ 上单调递减，

在区间 $\left(0,\frac{-a-\sqrt{a^2+8a}}{4}\right)$ 和 $\left(\frac{-a+\sqrt{a^2+8a}}{4},+\infty\right)$ 上单调递增；

当 $a>0$ 时，方程 $2x^2+ax-a=0$ 有一负根 $\frac{-a-\sqrt{a^2+8a}}{4}$ 和一正根 $\frac{-a+\sqrt{a^2+8a}}{4}$，

结合定义域由 $f'\left(x\right)>0$ 可得 $x\in\left(\dfrac{-a+\sqrt{a^2+8a}}{4},+\infty\right)$，

由 $f'\left(x\right)<0$ 可得 $x\in\left(0,\dfrac{-a+\sqrt{a^2+8a}}{4}\right)$，

所以 $f\left(x\right)$ 在区间 $\left(0,\dfrac{-a+\sqrt{a^2+8a}}{4}\right)$ 上单调递减，在区间 $\left(\dfrac{-a+\sqrt{a^2+8a}}{4},+\infty\right)$ 上单调递增.

综上可知：

当 $a<-8$ 时，$f\left(x\right)$ 在区间 $\left(\dfrac{-a-\sqrt{a^2+8a}}{4},\dfrac{-a+\sqrt{a^2+8a}}{4}\right)$ 上单调递减，

在区间 $\left(0,\dfrac{-a-\sqrt{a^2+8a}}{4}\right)$ 和 $\left(\dfrac{-a+\sqrt{a^2+8a}}{4},+\infty\right)$ 上单调递增；

当 $-8\le a\le 0$ 时，$f\left(x\right)$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 上单调递增；

当 $a>0$ 时，$f\left(x\right)$ 在区间 $\left(0,\dfrac{-a+\sqrt{a^2+8a}}{4}\right)$ 上单调递减，

在区间 $\left(\dfrac{-a+\sqrt{a^2+8a}}{4},+\infty\right)$ 上单调递增.

（Ⅱ）当 $b=1$ 时，$f(x)=x^2+a(x-\ln x)-\dfrac{e}{x}$，令 $g(x)=x^2+a(x-\ln x)$，$h(x)=\dfrac{e}{x}$，

则 $f\left(x\right)>0$，即为 $g\left(x\right)>h\left(x\right)$，

而 $h\left(x\right)$ 在 $\left[1,e\right]$ 上单调递减，所以当 $1\le x\le e$ 时，$h\left(x\right)\ge h\left(e\right)=1$.

又 $g(e)=e^2+ae-a$，

①当 $g\left(e\right)>h\left(e\right)$，即 $e^2+ae-a>1$ 时，$a>-1-e$，符合题意；

②当 $-8\le a\le -1-e$ 时，由（Ⅰ）知 $g\left(x\right)$ 在 $\left[1,e\right]$ 上是增函数，

恒有 $g(x)\le g(e)\le h(e)=1$，故不存在 $x\in\left[1,e\right]$，使 $g\left(x\right)>h\left(x\right)$；

③当 $a<-8$ 时，由于 $1\le x\le e$ 时，$x-\ln x>0$，

所以 $g(x)=x^2+a(x-\ln x)<x^2-8(x-\ln x)$，令 $m(x)=x^2-8(x-\ln x)$，

则 $m'(x)=2x-8+\dfrac{8}{x}=\dfrac{2\left(x^2-4x+4\right)}{x}=\dfrac{2(x-2)^2}{x}\ge 0$，

所以 $m\left(x\right)$ 在 $\left[1,e\right]$ 上是增函数，最大值为 $m\left(e\right)$，

又 $m(e)-h(e)=e^2-8(e-1)-1=e^2-8e+7=(e-1)(e-7)<0$，

所以 $m\left(e\right)<h\left(e\right)$，此时恒有 $g\left(x\right)<h\left(x\right)$，

因此不存在$x\in[1,e]$，使$g(x)>h(x)$.

综上可知，$a>-1-e$.

即a的取值范围为$(-1-e,+\infty)$.

另解：分离变量可得：$a>\dfrac{\frac{e}{x}-x^2}{x-\ln x}$，令$F(x)=\dfrac{\frac{e}{x}-x^2}{x-\ln x}$，$x\in[1,e]$，则

$$F'(x)=\frac{\left(-\frac{e}{x^2}-2x\right)(x-\ln x)-\left(\frac{e}{x}-x^2\right)\left(1-\frac{1}{x}\right)}{(x-\ln x)^2}$$

$$=\frac{\frac{e}{x^2}(\ln x-2x+1)+x(2\ln x-x-1)}{(x-\ln x)^2},$$

易得当$x\in[1,e]$时，$\ln x-2x+1<0$，且$2\ln x-x-1<0$，从而$F'(x)<0$，

所以$F(x)$在$[1,e]$单调递减，于是$a>F(x)_{\min}=F(e)=-1-e$.