

# 数学参考答案

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分，在每小题给出的四个选项中，有且只有一项符合题目要求。

1. 【答案】B 【解析】因为  $M = \{x | \log_2 x < 1\} = (0, 2)$ ,  $N = (-1, 1)$ , 所以  $M \cup N = (-1, 2)$ , 故选 B.

2. 【答案】C 【解析】由气温图可知，选 C.

3. 【答案】A 【解析】由已知  $\sin \theta + 2\cos^2 \frac{\theta}{2} = \frac{5}{4}$ , 化简得  $\sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{4}$ . 平方得,  $1 + \sin 2\theta = \frac{1}{16}$ ,  $\sin 2\theta = -\frac{15}{16}$ .

故选 A.

4. 【答案】B 【解析】 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB}) \cdot (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}) = \overrightarrow{AD}^2 - \overrightarrow{DC}^2 = \overrightarrow{AD}^2 - 1 = 8$ ,  $AD = 3$ . 故选 B.

5. 答案: B 【解析】由函数  $y = f(x)$  图象相邻两条对称轴之间的距离为  $\frac{\pi}{2}$  可知其周期为  $\pi$ , 所以  $\omega = \frac{2\pi}{\pi} = 2$ , 所以

$f(x) = \sin(2x + \varphi)$ . 将函数  $y = f(x)$  的图象向左平移  $\frac{\pi}{3}$  个单位后, 得到函数  $y = \sin\left[2\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \varphi\right]$  图象. 因为

得到的图象关于  $y$  轴对称, 所以  $2 \times \frac{\pi}{3} + \varphi = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ , 即  $\varphi = k\pi - \frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}$ . 又  $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$ , 所以  $\varphi = -\frac{\pi}{6}$ . 所

以  $f(x) = \sin(2x - \frac{\pi}{6})$ . 由  $\sin(2x - \frac{\pi}{6}) = 0$  得,  $2x - \frac{\pi}{6} = k\pi, x = \frac{1}{2}k\pi + \frac{\pi}{12}$ . 故选 B.

6. 【答案】D. 【解析】当  $\odot C$  与  $x$  轴相切时, 设圆心  $C(a, a+7)$ , 故  $\sqrt{a^2 + (a+7)^2} = 2 + |a+7|$ , 解得  $a = -4$

或  $a = 8$ , 所以  $\odot C$  方程为  $(x+4)^2 + (y-3)^2 = 9$  或  $(x-8)^2 + (y-15)^2 = 225$ ; 当  $\odot C$  与  $y$  轴相切时, 设圆心

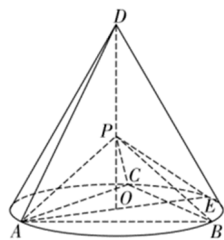
$C(a, a+7)$ , 故  $\sqrt{a^2 + (a+7)^2} = 2 + |a|$ , 解得  $a = -3$  或  $a = -15$ ,  $\odot C$  方程为  $(x+3)^2 + (y-4)^2 = 9$  或

$(x+15)^2 + (y+8)^2 = 225$ ; 故选 D.

7. 【答案】D 【解析】不妨设  $AE = AD = 1$ , 则  $BA = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $PO = \lambda DO = \frac{\sqrt{3}}{2}\lambda$ ,

$PA^2 = PB^2 = \frac{3}{4}\lambda^2 + \frac{1}{4}$ . 因为  $PA \perp$  平面  $PBC$ ,  $PB \subset$  平面  $PBC$ , 所以  $PA \perp PB$ .

在  $\triangle PAB$  中, 由勾股定理有  $PA^2 + PB^2 = BA^2$ , 即  $2(\frac{3}{4}\lambda^2 + \frac{1}{4}) = \frac{3}{4}$ , 解得  $\lambda = \frac{\sqrt{6}}{6}$ . 故选 D.



8. 【答案】C 【解析】设动圆圆心的坐标为  $(x, y)$ , 则  $(x-0)^2 + (y-4)^2 = 4^2 + y^2$ . 整理得,  $x^2 = 8y$ . 故动圆

圆心的轨迹  $C$  的方程为  $x^2 = 8y$ . 因此  $m^2 = 8 \times 2, m = \pm 4$ . 当  $m = 4$  时, 设  $S(x_1, y_1), T(x_2, y_2)$ , 则有  $x_1^2 = 8y_1$ ,

$x_2^2 = 8y_2$ . 于是  $k_{PS} + k_{PT} = 0$  就是  $\frac{y_1 - 2}{x_1 - 4} + \frac{y_2 - 2}{x_2 - 4} = \frac{\frac{1}{8}x_1^2 - 2}{x_1 - 4} + \frac{\frac{1}{8}x_2^2 - 2}{x_2 - 4} = \frac{x_1 + 4}{8} + \frac{x_2 + 4}{8} = 0$ , 所以

$x_1 + x_2 = -8$ . 此时直线  $ST$  的斜率  $k = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{x_1 + x_2}{8} = -1$ , 故  $mk = -4$ . 同理可得, 当  $m = -4$  时, 直线  $ST$

的斜率  $k = 1$ . 故  $mk = -4$ , 所以选 C.

二、多项选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分

9. 【答案】ABD 【解析】在  $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} = 4a_n (n \geq 2)$  中, 令  $n = 2$ , 则  $a_1 = 4a_2, a_2 = \frac{1}{4}a_1$ . A 正确. 当  $n \geq 2$

时, 将  $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = 4a_{n+1}$  与  $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} = 4a_n$  相减得,  $a_n = 4a_{n+1} - 4a_n$ , 即  $a_{n+1} = \frac{5}{4}a_n (n \geq 2)$ .

而  $a_2 = \frac{1}{4}a_1$ , 所以 B 正确, C 不正确. 因为  $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = 1 + \frac{\frac{1}{4}[1 - (\frac{5}{4})^{n-1}]}{1 - \frac{5}{4}} = (\frac{5}{4})^{n-1}, n \in N^*$ , 所以 D 正确.

故选 ABD.

10. 【答案】ABC 【解析】BCD 选项等价于  $\ln \pi < \frac{\pi}{e}, \ln 2 < \frac{2}{e}, \ln 3 > \frac{3}{e}$ , 构造函数  $f(x) = \ln x - \frac{x}{e}, x > 0$ . 则

$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{e}$ . 当  $0 < x < e$  时,  $f'(x) > 0$ ,  $f(x)$  在  $(0, e)$  内单增; 当  $x > e$  时,  $f'(x) < 0$ ,  $f(x)$  在  $(e, +\infty)$  内单减.

因此  $f(x)_{\max} = f(e) = \ln e - \frac{e}{e} = 0$ . 于是  $\ln \pi < \frac{\pi}{e}, \ln 2 < \frac{2}{e}, \ln 3 < \frac{3}{e}$ . 故  $e^\pi > \pi^e, 2^e < e^2, e^3 > 3^e$ , 所以 D 错误,

BC 正确, 故  $e^\pi > \pi^e > 3^e$ , A 正确. 故选 ABC.

11. 【答案】ACD 【解析】由  $f(x - \frac{3}{2}) = f(x + \frac{1}{2})$  得,  $f(x) = f(x + 2)$ , 所以  $f(x)$  的周期是  $2k (k \neq 0, k \in Z)$ . A

正确. 因为  $f(x)$  是偶函数, 所以  $f(x) = f(x + 2)$  就是  $f(-x) = f(x + 2)$ , 即  $f(1 - x) = f(1 + x)$ , 所以  $f(x)$  的图象关于直线  $x = 1$  对称. B 不正确. 根据偶函数的对称性, C 显然正确. 当  $x \in [-2, -1]$  时,  $x + 4 \in [2, 3]$ , 则  $f(x + 4) = x + 4$ , 即  $f(x) = x + 4$ ; 当  $x \in (-1, 0]$  时,  $x - 2 \in (-3, -2]$ , 则  $f(x - 2) = 2 - x$ , 即  $f(x) = 2 - x$ . 所以 D 正确. 故选 ACD.

12. 【答案】BCD 【解析】设  $CD$  中点为  $M$ , 若  $G$  为  $BC$  中点, 则有  $AC \perp MG, AC \perp MF$ ,

$MG \cap MF = M$ , 则  $AC \perp$  平面  $MFG$ , 则  $AC \perp FG$ . 因为  $EF \parallel AC$ , 所以  $EF \perp FG$ .

故 A 不正确; 因为  $V_{D_1-EFG} = V_{G-EFD_1}$ , 点  $G$  到平面  $EFD_1$  的距离为定值, 则三棱锥

$G-EFD_1$  的体积为定值, 故 B 正确; 在侧面  $BCC_1B_1$  内作  $GN \perp B_1C_1$  垂足为  $N$ , 设  $N$

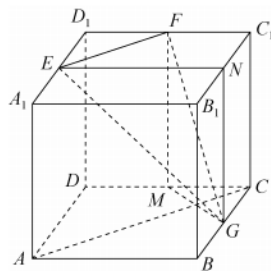
到  $EF$  的距离  $m$ , 则  $\triangle EFG$  边  $EF$  上的高为  $h = \sqrt{1+m^2}$ , 故其面积为

$S = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} h = \frac{\sqrt{2}}{4} \times \sqrt{1+m^2}$ . 当  $G$  与  $C$  重合时时,  $m = \frac{\sqrt{2}}{4}, S = \frac{3}{8}$ . 当  $G$  与  $B$  重合时时,  $m = \frac{3\sqrt{2}}{4}, S = \frac{\sqrt{17}}{8}$ .

故 C 正确; 取  $B_1C_1$  中点为  $N$ , 连接  $EN$ . 因为  $EN \parallel AB$ , 所以异面直线  $AB$  与  $EG$  所成的角即为  $\angle NEG = \alpha$ . 在

直角三角形  $NEG$  中,  $\sin \alpha = \frac{NG}{EG}$ . 当  $G$  为  $BC$  中点时,  $\sin \alpha = \frac{NG}{EG} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ , 当  $G$  与  $B, C$  重合时,

$\sin \alpha = \frac{NG}{EG} = \frac{\sqrt{5}}{3}$ , 故  $\sin \alpha \in \left[ \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{5}}{3} \right)$  所以 D 正确.



三、 填空题（本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）

13. 【答案】  $\frac{4}{5}$  【解析】  $z = \frac{i}{2-i} = \frac{i(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{2i-1}{5} = -\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i$ ,  $\bar{z} = -\frac{1}{5} - \frac{2}{5}i$ . 因此  $z - \bar{z} = \frac{4}{5}i$ , 虚部是  $\frac{4}{5}$ .

14. 解：由图可知：比赛共有 4 场，半决赛 2 场，季军赛 1 场，总决赛 1 场。选其中 3 场的基本事件共有 4 种，其中季军赛、总决赛被选上的基本事件共有 2 种，故概率为  $P = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ 。

15. 【答案】  $\sqrt{3}-1$  解析：由题意可设  $l$  的方程为  $y = kx + 1$ . 联立  $\begin{cases} x^2 - \frac{y^2}{2} = 1 \\ y = kx + 1 \end{cases}$  消去  $y$  得， $(2-k^2)x^2 - 2kx - 3 = 0$ .

显然  $2-k^2 \neq 0$ . 设  $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$ , 则  $x_1 + x_2 = \frac{2k}{2-k^2} = 1$ , 解得  $k = -1 \pm \sqrt{3}$ .

由  $\Delta > 0$  得， $-\sqrt{3} < k < \sqrt{3}$ , 显然  $k = -1 - \sqrt{3}$  不适合， $k = -1 + \sqrt{3}$  适合.

16. 【答案】  $y = x + 1$  或  $y = ex$  解：由  $y = e^x$ ,  $y' = e^x$ , 设切点为  $(x_1, e^{x_1})$ , 则直线  $l$  的方程为：

$y = e^{x_1}x + e^{x_1}(1-x_1)$ ; 由  $y = 2 + \ln x$ , 得  $y' = \frac{1}{x}$ , 设切点为  $(x_2, 2 + \ln x_2)$ , 则直线  $l$  的方程为：  $y = \frac{1}{x_2}x + 1 + \ln x_2$ 。

所以  $e^{x_1} = \frac{1}{x_2}$ ,  $e^{x_1}(1-x_1) = 1 + \ln x_2$ , 消去  $x_1$  得：  $\left(\frac{1}{x_2} - 1\right)(1 + \ln x_2) = 0$ , 故  $x_2 = 1$  或  $x_2 = \frac{1}{e}$ , 所以直线  $l$  的方程为：

$y = x + 1$  或  $y = ex$ 。

四、解答题（17 题 10 分，18---22 每题 12 分，共 70 分）

17. 解析：（1）因为  $\triangle ABC$  是锐角三角形，所以  $BC \cdot \cos B = R$  .....2 分

将  $BC = 2R \sin A$  代入就是， $2R \sin A \cos B = R$ , 因此  $\sin A \cos B = \frac{1}{2}$  .....5 分

（2）即  $4 \sin A \cos B = 2$ . 与已知条件  $4 \cos A \sin B = 1$

相加得， $4 \sin A \cos B + 4 \cos A \sin B = 3$ ,

即  $4 \sin(A+B) = 3$ ,  $4 \sin C = 3$ ,  $\sin C = \frac{3}{4}$ . .....8 分

于是  $2R = \frac{AB}{\sin C} = \frac{3}{\frac{3}{4}} = 4$ ,  $R = 2$ . 故选 B. ....10 分

18. 【解析】

	喜欢雪上运动	不喜欢雪上运动	合计
男生	80	40	120
女生	30	50	80
合计	110	90	200

(1)

.....1 分

假设  $H_0$ : 是否喜欢雪上运动与性别无关联.

根据表中数据, 计算得到  $\chi^2 = \frac{200 \times (80 \times 50 - 40 \times 30)^2}{120 \times 80 \times 110 \times 90} \approx 16.498 > 6.635$ ,

.....3 分

依据小概率值  $\alpha = 0.01$  的  $\chi^2$  独立性检验, 我们推断  $H_0$  不成立.

即认为是否喜欢雪上运动与性别有关联.

.....4 分

(2) (i) 由已知事件  $ABC$  表示: “2 男生 1 女生都喜欢雪上运动” 和

“3 男生中至少两人喜欢雪上运动” 事件

因为  $P(ABC) = \frac{C_8^2(C_3^1 + C_5^1) + C_8^2 C_4^1 + C_8^3}{C_{20}^3} = \frac{98}{285}$ ,

.....7 分

$$P(A)P(B|A)P(C|AB) = \frac{C_{12}^2 C_8^1 + C_{12}^3}{C_{20}^3} \cdot \frac{C_8^2(C_4^1 + C_3^1 + C_5^1) + C_8^3}{C_{12}^2 C_8^1 + C_{12}^3} \cdot \frac{C_8^2(C_3^1 + C_5^1) + C_8^2 C_4^1 + C_8^3}{C_8^2(C_4^1 + C_3^1 + C_5^1) + C_8^3} = \frac{98}{285},$$

所以  $P(ABC) = P(A) \cdot P(B|A) \cdot P(C|AB)$ .

.....10 分

(ii)(i)  $P(ABC)$  与  $P(A) \cdot P(B|A) \cdot P(C|AB)$  相等的关系可以推广到更一般的情形,

即对于一般的三个事件  $A, B, C$ , 有  $P(ABC) = P(A) \cdot P(B|A) \cdot P(C|AB)$ .

证明过程如下:  $P(A)P(B|A)P(C|AB) = P(A) \cdot \frac{P(AB)}{P(A)} \cdot \frac{P(ABC)}{P(AB)} = P(ABC)$ , 得证.

.....12 分

19. 【解析】(1) 因为  $a_n^2 - 2S_n \cdot a_n + 1 = 0$ ,  $a_n > 0 (n \in N^*)$ , 所以  $a_1 = 1$ .

当  $n \geq 2$  时,  $2S_n = a_n + \frac{1}{a_n} = S_n - S_{n-1} + \frac{1}{S_n - S_{n-1}}$ ,

.....2 分

则  $S_n + S_{n-1} = \frac{1}{S_n - S_{n-1}}$ , 即  $S_n^2 - S_{n-1}^2 = 1$ .

所以数列  $\{S_n^2\}$  是以  $S_1^2 = 1$  为首项, 1 为公差的等差数列,

因此  $S_n^2 = n$ ,  $S_n = \sqrt{n}$ .

.....4 分

当  $n \geq 2$  时,  $a_n = S_n - S_{n-1} = \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$ , 且  $a_1 = 1$  符合上式.

故  $a_n = \sqrt{n} - \sqrt{n-1}, n \in N^*$ .

.....5 分

(2) 记  $2\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$  为数列  $\{b_n\}$  的前  $n$  项和, 则  $b_1 = 1$ ,

$$\text{当 } n \geq 2 \text{ 时, } b_n = 2\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) - 2\left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) = \frac{1}{2^{n-1}},$$

又  $b_1 = 1$  符合上式, 所以  $b_n = \frac{1}{2^{n-1}} (n \in N^*)$ . .....7 分

$$\text{由 (1) 可知 } \frac{1}{S_n^2} = \frac{1}{n}, \text{ 易知 } \frac{1}{S_1^2} = b_1, \frac{1}{S_2^2} = b_2,$$

下证当  $n \geq 3$  时,  $\frac{1}{S_n^2} > b_n$ , 即证  $2^{n-1} > n$ .

$$\text{因为 } 2^{n-1} = (1+1)^{n-1} = C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1 + C_{n-1}^2 + \cdots + C_{n-1}^{n-1} > C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1 = 1 + n - 1 = n,$$

$$\text{所以 } 2^{n-1} > n \text{ 得证. 故当 } n \geq 3 \text{ 时, } \frac{1}{S_1^2} + \frac{1}{S_2^2} + \cdots + \frac{1}{S_n^2} > 2\left(1 - \frac{1}{2^n}\right). \text{ .....12 分}$$

20. 【解析】(1) 因为  $ABC - A_1B_1C_1$  是直三棱柱, 所以  $A_1A \perp$  平面  $ABC$ .

又因为  $BC \subset$  平面  $ABC$ , 所以  $A_1A \perp BC$ . 因为  $AD \perp$  平面  $A_1BC$ ,

且  $BC \subset$  平面  $A_1BC$ , 所以  $AD \perp BC$ . .....2 分

又  $AA_1 \subset$  平面  $A_1AB$ ,  $AD \subset$  平面  $A_1AB$ ,  $A_1A \cap AD = A$ ,

所以  $BC \perp$  平面  $A_1AB$ . 而  $A_1B \subset$  平面  $A_1BC$ , 所以  $BC \perp A_1B$ . .....5 分

(2) 因为  $AD \perp$  平面  $A_1BC$ , 所以  $AD \perp A_1B$ . 在  $Rt\triangle ABD$  中,  $AD = \sqrt{3}$ ,

$$AB = BC = 2, \sin \angle ABD = \frac{AD}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$\angle ABD = 60^\circ$ . 在  $Rt\triangle ABA_1$  中,

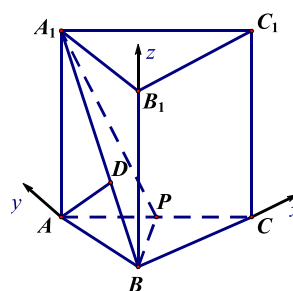
$$AA_1 = AB \cdot \tan 60^\circ = 2\sqrt{3}$$

由 (1) 知,  $BC \perp AB$ .

以  $B$  为坐标原点, 直线  $BC, BA, BB_1$  分别为  $x, y, z$  轴, 建立空间直角坐标系  $B - xyz$ .

则  $B(0,0,0), A_1(0,2,2\sqrt{3}), P(1,1,0)$ , .....8 分

所以  $\overrightarrow{BA_1} = (0,2,2\sqrt{3}), \overrightarrow{BP} = (1,1,0)$ .



设面  $A_1PB$  的法向量为  $\vec{m} = (x, y, z)$ , 则由  $\vec{m} \cdot \vec{BP} = 0, \vec{m} \cdot \vec{BA_1} = 0$  得,

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ 2y + 2\sqrt{3}z = 0 \end{cases}, \text{ 取 } x = 1, y = 1, z = -\frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\vec{m} = \left(1, 1, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right). \quad \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

又平面  $A_1AB$  的一个法向量是  $\vec{n} = (1, 0, 0)$ .

$$\text{所以 } \cos \langle \vec{m}, \vec{n} \rangle = \frac{\vec{m} \cdot \vec{n}}{|\vec{m}| |\vec{n}|} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{21}}{7}.$$

故二面角  $A - A_1B - P$  的余弦值为  $\frac{\sqrt{21}}{7}$ . \dots\dots\dots 12 \text{ 分}

21. 【解析】 (1) 若  $\angle PF_2F_1 = 90^\circ$ , 则  $|PF_1|^2 = |PF_2|^2 + |F_1F_2|^2$ .

$$\text{因为 } |PF_1| + |PF_2| = 2\sqrt{2}, |F_1F_2| = 2, \text{ 解得 } |PF_1| = \frac{3\sqrt{2}}{2}, |PF_2| = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{因此 } \frac{|PF_1|}{|PF_2|} = 3. \quad \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$\text{若 } \angle F_1PF_2 = 90^\circ, \text{ 则 } |F_1F_2|^2 = |PF_1|^2 + |PF_2|^2 = |PF_1|^2 + (2\sqrt{2} - |PF_1|)^2,$$

$$\text{解得 } |PF_1| = |PF_2| = \sqrt{2}. \text{ 因此 } \frac{|PF_1|}{|PF_2|} = 1.$$

$$\text{综上知, } \frac{|PF_1|}{|PF_2|} = 3 \text{ 或 } \frac{|PF_1|}{|PF_2|} = 1. \quad \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

$$(2) \text{ 设 } A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), \text{ 联立 } \begin{cases} x^2 + 2y^2 - 2 = 0 \\ y = kx + m \end{cases} \text{ 消去 } y \text{ 得到,}$$

$$x^2 + 2(kx + m)^2 - 2 = 0, \text{ 即 } (1 + 2k^2)x^2 + 4kmx + 2m^2 - 2 = 0.$$

$$\text{则 } x_1 + x_2 = -\frac{4km}{1 + 2k^2}, y_1 + y_2 = k(x_1 + x_2) + 2m = \frac{2m}{1 + 2k^2},$$

$$\text{弦 } AB \text{ 中点 } M \text{ 的坐标是 } \left(-\frac{2km}{1 + 2k^2}, \frac{m}{1 + 2k^2}\right).$$

$$\text{由 } \Delta = 16k^2m^2 - 8(m^2 - 1)(1 + 2k^2) > 0 \text{ 得, } 1 + 2k^2 > m^2. \quad \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\text{另一个方面, 直线 } PM \text{ 的方程是 } y = -\frac{1}{k}x - \frac{1}{2}.$$

点  $M(-\frac{2km}{1+2k^2}, \frac{m}{1+2k^2})$  在此直线上,

故  $\frac{m}{1+2k^2} = -\frac{1}{k}(-\frac{2km}{1+2k^2}) - \frac{1}{2}$ , 整理得,  $2m = 1 + 2k^2$ .

代入  $1 + 2k^2 > m^2$  中,  $m^2 - 2m < 0, 0 < m < 2$ .

又  $2m = 1 + 2k^2 > 1, k \neq 0$ , 所以  $2m > 1, m > \frac{1}{2}$ .

故实数  $m$  的取值范围是  $(\frac{1}{2}, 2)$ . .....12 分

22. 【解析】 (1) 当  $a = -1$  时,  $f(x) = e^x - \cos x, f'(x) = e^x + \sin x$ . .....2 分

因为  $x > 0$ , 所以  $e^x > 1, -1 \leq \sin x \leq 1$ , 因此  $f'(x) = e^x + \sin x > 0$ ,

故函数  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  内单调递增. ....4 分

(2)  $f'(x) = e^x - a \sin x, f''(x) = e^x - a \cos x$ .

由  $f''(x) = e^x - a \cos x = 0$  得,  $a \cos x = e^x$ . 显然  $x = \frac{\pi}{2}$  不是  $f''(x) = 0$  的根.

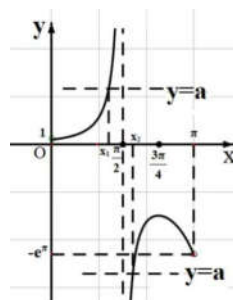
当  $x \in (0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi)$  时,  $a = \frac{e^x}{\cos x}$ .

令  $g(x) = \frac{e^x}{\cos x}$ , 则  $g'(x) = \frac{e^x(\sin x + \cos x)}{\cos^2 x}$ .

由  $g'(x) = 0$  得  $x = \frac{3\pi}{4}$ . 当  $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{4}$  或  $0 < x < \frac{\pi}{2}$  时,

$g'(x) > 0$ ; 当  $\frac{3\pi}{4} < x < \pi$  时,  $g'(x) < 0$ ,

且  $g(0) = 1, g(\pi) = -e^\pi$ . 所以极大值是  $g(\frac{3\pi}{4}) = -\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}}$ . .....8 分



由右图知, 当  $a > 1$  或  $a \leq -e^\pi$  时,

直线  $y = a$  与曲线  $y = g(x)$  在  $(0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi)$  内有唯一交点  $(x_1, a)$  或  $(x_2, a)$ ,

且在  $x < x_1$  附近,  $a > \frac{e^x}{\cos x}$ , 则  $f''(x) = e^x - a \cos x < 0$ ;

在  $x > x_1$  附近,  $a < \frac{e^x}{\cos x}$ , 则  $f''(x) = e^x - a \cos x > 0$ .

因此  $x_1$  是  $f'(x)$  在  $(0, \pi)$  内唯一极小值点.

同理可得,  $x_2$  是  $f'(x)$  在  $(0, \pi)$  内唯一极大值点.

故  $a$  的取值范围是  $(-\infty, -e^\pi] \cup (1, +\infty)$ . .....12 分