2023年“安徽省示范高中皖北协作区”第25届高三联考

数学参考答案

1. A　由题意可得 $A=\{x|2<x<3\}$，$B=\{x|x<\frac{5}{2}\}$，则 $A\cap B=\{x|2<x<\frac{5}{2}\}$.

2. D　设 $z=a+b\mathrm{i}(a,b\in\mathbf{R})$，则 $\frac{a+b\mathrm{i}}{a+b\mathrm{i}+1}=3+\mathrm{i}$，整理得 $a+b\mathrm{i}=3a-b+3+(a+3b+1)\mathrm{i}$，从而 $\begin{cases}a=3a-b+3,\\ b=a+3b+1,\end{cases}$ 解得 $a=-\frac{7}{5}$，$b=\frac{1}{5}$，故 $|z|=\sqrt{(-\frac{7}{5})^2+(\frac{1}{5})^2}=\sqrt{2}$.

3. C　设 $P(m,n)$，由题意可得 $n+1=3$，解得 $n=2$，则 $m^2=8$，故点 P 到坐标原点 O 的距离是 $\sqrt{m^2+n^2}=\sqrt{8+4}=2\sqrt{3}$.

4. B　设圆锥的底面半径为 r，高为 $h=3$ m，母线长为 l，由题意可得 $\tan 60^\circ=\frac{h}{r}$，则 $r=\sqrt{3}$ m，从而 $l=2r=2\sqrt{3}$ m，圆锥的侧面展开图的面积 $s=\pi rl=6\pi$ m^2.

5. C　因为 $f(x)=\frac{2(x^2+1)\sin x}{2^x+2^{-x}}$，所以 $f(-x)=\frac{2(x^2+1)\sin(-x)}{2^{-x}+2^x}=-f(x)$，所以 $f(x)$ 是奇函数，则 $f(x)$ 的图象关于原点对称，排除 A，B. 当 $0<x<\pi$ 时，$f(x)>0$，排除 D.

6. D　设点 P 的坐标为 (x,y)，因为 $|PA|=\sqrt{2}|PB|$，所以点 P 的轨迹方程为 $(x-5)^2+(y-2)^2=20$，因为 P 点的轨迹关于直线 $mx+ny-2=0(m>0,n>0)$ 对称，所以圆心 $(5,2)$ 在此直线上，即 $5m+2n=2$，所以 $\frac{2}{m}+\frac{3}{n}-15=\frac{1}{2}(5m+2n)(\frac{2}{m}+\frac{3}{n})-15=-7+\frac{1}{2}(\frac{4n}{m}+\frac{15m}{n})\geqslant-7+2\sqrt{15}$，当且仅当 $\frac{4n}{m}=\frac{15m}{n}$，即 $n=\frac{\sqrt{15}}{2}m$ 时，等号成立.

7. B　由题意可得 $a=\ln\frac{5}{4}=\ln(1+\frac{1}{4})$，$b=\frac{1}{5}=\frac{\frac{1}{4}}{1+\frac{1}{4}}$，$c=\sqrt[4]{\mathrm{e}}-1=\mathrm{e}^{\frac{1}{4}}-1$. 设 $f(x)=\mathrm{e}^x-x-1(x>0)$，则 $f'(x)=\mathrm{e}^x-1$，当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，则 $f(x)>f(0)=0$，从而 $\mathrm{e}^x-x-1>0$，即 $\mathrm{e}^x-1>x$，故 $\mathrm{e}^{\frac{1}{4}}-1>\frac{1}{4}$，即 $c>\frac{1}{4}$. 设 $g(x)=\ln(1+x)-x(x>0)$，则 $g'(x)=\frac{-x}{1+x}$，当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$g'(x)<0$，所以 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，则 $g(x)<g(0)=0$，即 $\ln(1+x)-x<0$，即 $\ln(1+x)<x$，从而 $\ln(1+\frac{1}{4})<\frac{1}{4}$，即 $a<\frac{1}{4}$，故 $a<\frac{1}{4}<c$，即 $a<c$. 设 $h(x)=\ln(1+x)-\frac{x}{1+x}(x>0)$，则 $h'(x)=\frac{x}{(1+x)^2}$，当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$h'(x)>0$，所以 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，则 $h(x)>h(0)=0$，即 $\ln(1+x)>\frac{x}{1+x}$，从而 $\ln(1+\frac{1}{4})>\frac{\frac{1}{4}}{1+\frac{1}{4}}$，即 $\ln\frac{5}{4}>\frac{1}{5}$，故 $b<a$，即 $b<a<c$.

8. C　一个正 $n(n\geqslant3)$ 边形各内角的和是 $(n-2)\pi$，则每个内角为 $\theta_n=\frac{(n-2)\pi}{n}(\theta_n<\pi)$.

设在顶点处有 k 块砖拼凑在一起，它们的边数分别为 $x_1,x_2,x_3,\cdots,x_k$，则有 $\theta_{x_1}+\theta_{x_2}+\theta_{x_3}+\cdots+\theta_{x_k}=2\pi$，即 $\frac{x_1-2}{x_1}\pi+\frac{x_2-2}{x_2}\pi+\frac{x_3-2}{x_3}\pi+\cdots+\frac{x_k-2}{x_k}\pi=2\pi$，

所以 $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\cdots+\frac{1}{x_k}=\frac{k-2}{2}$，$x_j\geqslant3(j=1,2,3,\cdots,k)$. (1)

由(1)式可得 $k\geqslant3$.

当 $k=3$ 时，$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}=\frac{1}{2}$，$x_j\geqslant 3(j=1,2,3)$.(2)

设(2)式的一组解为(x_1,x_2,x_3)，首先求出(2)式的全部整数解.

①当 $x_1=x_2=x_3$ 时，由(2)式可解得$(x_1,x_2,x_3)=(6,6,6)$.

这组解给出的正多边形可以铺设地板，如图 1 所示. 故这时只有一种拼法.

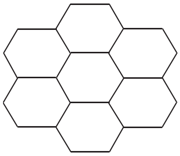


图 1

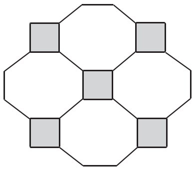


图 2

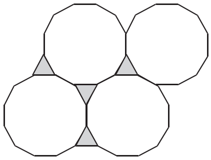


图 3

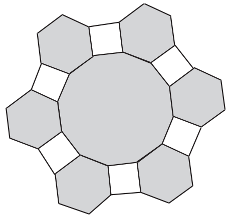


图 4

②当 x_1,x_2,x_3 中恰有两个相等，不妨设 $x_1=x_2\neq x_3$，

由(2)式得$\frac{2}{x_1}=\frac{1}{2}-\frac{1}{x_3}$，即 $x_3=2+\frac{8}{x_1-4}$，

易知(2)式的全部解为$(x_1,x_2,x_3)=(5,5,10),(5,10,5),(10,5,5),(8,8,4),(8,4,8),(4,8,8),(12,12,3),(12,3,12),(3,12,12)$.

依题设可知用正五边形和正十边形铺设地面，一定会出现两个正十边形有一条边重合的情况，这时，要铺满地面，另一个角是 72°，而正五边形的 1 个内角是 108°，则$(5,5,10),(5,10,5),(10,5,5)$不合要求. 而对于解$(8,8,4),(8,4,8),(4,8,8),(12,12,3),(12,3,12),(3,12,12)$给出的拼接方法符合要求，且$(8,8,4),(8,4,8),(4,8,8)$对应同一拼法，$(12,12,3),(12,3,12),(3,12,12)$对应同一拼法，如图 2 和图 3. 故这时有两种拼法.

③当 x_1,x_2,x_3 两两不相等，不妨设 $x_1<x_2<x_3$，

由(2)式得$\frac{1}{2}=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}<\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_1}=\frac{3}{x_1}$，即 $x_1\leqslant 5$.

类似②对于解$(5,5,10)$不能铺设地面的讨论可知，x_1 必须是偶数，同理可得，x_2,x_3 都是偶数.

由 $3\leqslant x_1\leqslant 5$ 知，$x_1=4$，代入(2)式得$\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}=\frac{1}{4}$，$3\leqslant x_2\leqslant x_3$，

则$\frac{1}{4}=\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}<\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_2}=\frac{2}{x_2}$，解得 $x_2<8$. 故可推出 $x_2=6$，则 $x_3=12$.

从而 x_1,x_2,x_3 两两不相等的全部解为$(4,6,12),(4,12,6),(6,4,12),(6,12,4),(12,6,4),(12,4,6)$，这些给出的正多边形都能铺设地面，它们对应同一拼法，如图 4.

综上，满足条件的拼法最多有 4 种.

9. BCD　A 选项中的数据按从小到大顺序，排出中位数为 10，故 A 错误. B 选项中的数据共有 10 个数，$10\times 0.8=8$，即第 8 个数与第 9 个数的平均数为 18.5，则这组数据的第 80 百分位数是 18.5，故 B 正确. 对于 C 选项，只有 3,4,5 这三个数符合，则 $P=\frac{1}{C_5^3}=\frac{1}{10}$，故 C 正确. 对于 D 选项，由全概率公式 $P(B)=P(A)P(B|A)+P(\overline{A})P(B|\overline{A})=0.8\times 0.6+0.2\times 0.1=0.5$，故 D 正确.

10. AD　当 $a=0,b=2$ 时，$a_{n+1}=2a_n$，所以$\frac{a_{n+1}}{a_n}=2$. 因为 $a_1=1$，所以$\{a_n\}$是首项为 1，公比为 2 的等比数列，则 $S_n=\frac{1-2^n}{1-2}=2^n-1$，故 A 正确. 当 $a=2,b=1$ 时，$a_{n+1}=a_n+2$，即 $a_{n+1}-a_n=2$. 因为 $a_1=1$，所以 $a_n=2n-1$，则 $S_n=\frac{(a_1+a_n)n}{2}=n^2$，故 B 错误. 当 $a=1,b=-1$ 时，$a_{n+1}=-a_n+1$，因为 $a_1=1$，所以 $a_2=0,a_3=1$，所以$\{a_n\}$是周期为 2 的周期数列，则 $a_{10}=0$，故 C 错误. 当 $a=1,b=2$ 时，$a_{n+1}=2a_n+1$，则 $a_{n+1}+1=2(a_n+1)$，即$\frac{a_{n+1}+1}{a_n+1}=2$. 因为 $a_1=1$，所以 $a_1+1=2$，所以$\{a_n+1\}$是首项为 2，公比为 2 的等比数列，所以 $a_n+1=2^n$，即 $a_n=2^n-1$，故 D 正确.

11. BD　由题意可得 $f(x)=\sin x\cos^2 x$，则 $f(\pi-x)=\sin x\cos^2 x$，$f(\pi-x)+f(x)=2\sin x\cos^2 x\neq 0$，故 A 错误. 因为 $f'(x)=\cos x(1-3\sin^2 x)$，所以当 $x\in(-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6})$时，$f'(x)>0$，故 B 正确. 由 $f(x)=0$ 得 $x=\frac{\pi}{2}$，π，$\frac{3\pi}{2}$，2π，$\frac{5\pi}{2}$，3π. 则 $f(x)$在$[1,10]$内共有 6 个零点，故 C 错误. 由题意可得 $f(x)=\sin x\cos^2 x=\sin x(1-\sin^2 x)=\sin x-\sin^3 x$，令 $\sin x=t(t\in[-1,1])$，则 $y=g(t)=t-t^3$，从而 $g'(t)=1-3t^2=(1-\sqrt{3}t)(1+\sqrt{3}t)$，故 $g(t)$在$(-1,-\frac{\sqrt{3}}{3})$上单调递减；在$(-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3})$上单调递增；在$(\frac{\sqrt{3}}{3},1)$上单调递减. 因为 $g(-1)=0$，$g(\frac{\sqrt{3}}{3})=\frac{2\sqrt{3}}{9}$，所以 $f(x)$的最大值为$\frac{2\sqrt{3}}{9}$，故 D 正确.

12. ACD　因为 $\forall x\in\mathbf{R}$，$f(x+3)+f(x+1)=f(2)$，所以 $f(x+1)+f(x-1)=f(2)$，所以 $f(x+3)=f(x-1)$，即 $f(x+4)=f(x)$，所以 $f(x)$是周期为 4 的周期函数，则 A 正确. 在 $f(x+3)+f(x+1)=f(2)$中，令 $x=-1$，得 $f(2)+f(0)=f(2)$，则 $f(0)=0$. 因为 $f(2-x)=f(4+x)=f(x)$，所以 $f(x)$的图象关于直线 $x=1$ 对称，则 C 正确. 因为 $f(0)=0$，所以 $f(2)=f(0)=0$，所以 $f(2022)=f(2)=0$，则 B 错误. 由函数的对称性与周期性可得 $f(\frac{9}{2})=f(\frac{1}{2})=f(\frac{3}{2})=\frac{1}{2}$，$f(\frac{7}{2})=f(\frac{5}{2})=-f(\frac{1}{2})=-\frac{1}{2}$，则$\sum\limits_{k=1}^{200}kf(k-\frac{1}{2})=f(\frac{1}{2})+2f(\frac{3}{2})+3f(\frac{5}{2})+4f(\frac{7}{2})+\cdots+200f(\frac{399}{2})=\frac{1}{2}[(1+2-3-4)+(5+6-7-8)+\cdots+(197+198-199-200)]=\frac{1}{2}\times(-4\times 50)=-100$，则 D 正确.

13. $(\frac{3}{2},2)$　由题意可知与向量 $\boldsymbol{b}$ 方向相同的单位向量为 $\boldsymbol{b}_0=(\frac{3}{5},\frac{4}{5})$，则向量 $\boldsymbol{a}$ 在向量 $\boldsymbol{b}$ 上的投影向量为 $|\boldsymbol{a}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle\boldsymbol{b}_0=5\times\frac{1}{2}\times(\frac{3}{5},\frac{4}{5})=(\frac{3}{2},2)$.

14. -14　$(\frac{y}{x}-1)(x+y)^7$ 的展开式中 x^4y^3 的系数为 $C_7^2-C_7^3=-14$.

15. $\frac{7\sqrt{3}}{12}$　由题意可知该棱台的侧棱长为 1，棱台的高为$\frac{\sqrt{3}}{2}$，上底面边长$\frac{\sqrt{2}}{2}$，下底面边长为$\sqrt{2}$，所以该棱台的体积是$\frac{1}{3}\times(\frac{1}{2}+2+\sqrt{\frac{1}{2}\times 2})\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{7\sqrt{3}}{12}$.

16. $\frac{\sqrt{7}}{2}$或$\frac{\sqrt{21}}{3}$　当直线 l 与双曲线 C 的一支交于两点时，不妨设 $F(c,0)$，过 F 作双曲线 C 的一条渐近线 $y=\frac{b}{a}x$的垂线 l，垂足为 M，直线 l 与另一条渐近线 $y=-\frac{b}{a}x$ 交于点 N，则$|FM|=b$，$|OM|=a$，因为$|MN|=4\sqrt{3}a$，所以 $\tan\angle MON=\frac{|MN|}{|OM|}=\frac{4\sqrt{3}a}{a}=4\sqrt{3}$，设渐近线 $y=\frac{b}{a}x$ 的倾斜角为 θ，则 $\tan\angle MON=\tan 2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=4\sqrt{3}$，解得 $\tan\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$或 $\tan\theta=-\frac{2\sqrt{3}}{3}$（舍去），即 $\tan\theta=\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，故双曲线 C 的离心率 $e=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}=\frac{\sqrt{7}}{2}$. 当直线 l 与双曲线C 的两支各交于一点时，不妨设 $F(c,0)$，过 F 作双曲线C 的一条渐近线 $y=\frac{b}{a}x$ 的垂线 l，垂足为 M，直线 l 与另一条渐近线 $y=-\frac{b}{a}x$ 交于点 N，则$|FM|=b$，$|OM|=a$，因为$|MN|=4\sqrt{3}a$，所以 $\tan\angle MON=\frac{|MN|}{|OM|}=\frac{4\sqrt{3}a}{a}=4\sqrt{3}$. 设渐近线 $y=\frac{b}{a}x$ 的倾斜角为 θ，则 $\tan\angle MON=\tan(\pi-2\theta)=-\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=4\sqrt{3}$，解得 $\tan\theta=\frac{2\sqrt{3}}{3}$或 $\tan\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}$（舍去），即 $\tan\theta=\frac{b}{a}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，故双曲线 C 的离心率$e=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}=\frac{\sqrt{21}}{3}$. 综上，双曲线 C 的离心率是$\frac{\sqrt{7}}{2}$或$\frac{\sqrt{21}}{3}$.

17.(1)解:因为$a_n^2-na_na_{n-1}+a_n-na_{n-1}=0$,所以$(a_n-na_{n-1})(a_n+1)=0$. ……………………………… 2分

因为$a_n>0$,所以$a_n-na_{n-1}=0$,即$\frac{a_n}{a_{n-1}}=n(n\geqslant 2)$. ……………………………… 3分

因为$a_1=1$,所以$\frac{a_2}{a_1}\cdot\frac{a_3}{a_2}\cdot\frac{a_4}{a_3}\cdot\cdots\cdot\frac{a_n}{a_{n-1}}=2\times 3\times 4\times\cdots\times n(n\geqslant 2)$,即$a_n=n!\ (n\geqslant 2)$. ……………… 4分

当$n=1$,$a_1=1$满足上式,故$a_n=n!$. ……………………………… 5分

(2)证明:由(1)可知$a_{n+1}=(n+1)!$,则$b_n=\frac{n}{(n+1)!}=\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}$. ……………………………… 7分

所以$S_n=b_1+b_2+\cdots+b_n=(\frac{1}{1!}-\frac{1}{2!})+(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!})+\cdots+(\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!})=1-\frac{1}{(n+1)!}$. ………… 9分

因为$\frac{1}{(n+1)!}\in(0,\frac{1}{2}]$,所以$S_n\in[\frac{1}{2},1)$,即$\frac{1}{2}\leqslant S_n<1$. ……………………………… 10分

18.解:(1)由题意可得$\bar{x}=40\times 0.02+50\times 0.3+60\times 0.4+70\times 0.23+80\times 0.04+90\times 0.01=60$;……… 2分

$s^2=400\times 0.02+100\times 0.3+0\times 0.4+100\times 0.23+400\times 0.04+900\times 0.01=86$. ……………………………… 4分

(2)①由(1)可知$\mu=60$,$\delta=\sqrt{86}=9.27$,……………………………… 6分

则$P(50.73<Z\leqslant 69.27)=P(60-9.27<Z\leqslant 60+9.27)=P(\mu-\sigma<Z\leqslant\mu+\sigma)\approx 0.6826$. ………… 8分

②由①可知1名学生的体重位于$(50.73,69.27]$的概率为0.6826. ……………………………… 10分

因为$X\sim B(50,0.6826)$,所以$E(X)=50\times 0.6826=34.13$. ……………………………… 12分

19.解:(1)因为$\sqrt{2}c\sin(A+\frac{\pi}{4})=b$,所以$\sqrt{2}\sin C(\sin A\cos\frac{\pi}{4}+\cos A\sin\frac{\pi}{4})=\sin B$,

即$\sin C\sin A+\sin C\cos A=\sin B$. ……………………………… 2分

因为$A+B+C=\pi$,所以$\sin B=\sin(A+C)=\sin A\cos C+\cos A\sin C$,……………………………… 3分

所以$\sin C=\cos C$,即$\tan C=1$. ……………………………… 4分

因为$0<C<\pi$,所以$C=\frac{\pi}{4}$. ……………………………… 5分

(2)因为D为AB边的中点,所以$\overrightarrow{CD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$,……………………………… 6分

所以$\overrightarrow{CD}^2=\frac{\overrightarrow{CA}^2+2\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CB}^2}{4}=\frac{b^2+a^2+2ab\cos C}{4}=\frac{b^2+4b+8}{4}=\frac{(b+2)^2+4}{4}$. ………… 8分

在$\triangle ABC$中,由正弦定理$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$,得$b=\frac{2\sqrt{2}\sin B}{\sin(B+\frac{\pi}{4})}=\frac{4}{1+\frac{1}{\tan B}}$. ……………………………… 9分

因为$\triangle ABC$为锐角三角形,且$C=\frac{\pi}{4}$,所以$B\in(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})$,……………………………… 10分

则$\tan B\in(1,+\infty)$,故$b\in(2,4)$. ……………………………… 11分

因为$b\in(2,4)$,所以$|\overrightarrow{CD}|\in(\sqrt{5},\sqrt{10})$,即线段$CD$长的取值范围为$(\sqrt{5},\sqrt{10})$. ………… 12分

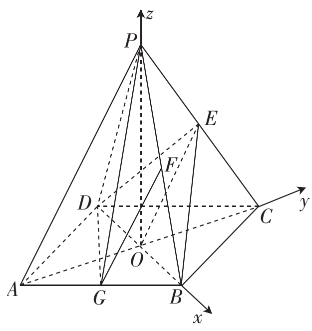
20.(1)证明:连接AC,记$AC\cap BD=O$,连接OE.

因为四边形$ABCD$是正方形,所以O是AC的中点,……………………… 1分

因为E是PC的中点,所以$OE/\!/PA$. ……………………… 2分

因为G,F分别是棱AB,PB的中点,所以$GF/\!/PA$,所以$GF/\!/OE$. … 4分

因为$OE\subset$平面BDE,$GF\not\subset$平面BDE,所以$GF/\!/$平面BDE. ………… 5分



(2)解:易证OB,OC,OP两两垂直,故以O为原点,分别以$\overrightarrow{OB}$,$\overrightarrow{OC}$,$\overrightarrow{OP}$的方向为x,y,z轴的正方向,建立如图所示的空间直角坐标系.

设$AB=4$,则$A(0,-2\sqrt{2},0)$,$B(2\sqrt{2},0,0)$,$D(-2\sqrt{2},0,0)$,$E(0,\sqrt{2},\sqrt{2})$,$P(0,0,2\sqrt{2})$,

从而$\overrightarrow{AB}=(2\sqrt{2},2\sqrt{2},0)$,$\overrightarrow{BD}=(-4\sqrt{2},0,0)$,$\overrightarrow{BE}=(-2\sqrt{2},\sqrt{2},\sqrt{2})$,$\overrightarrow{DP}=$

$(2\sqrt{2},0,2\sqrt{2})$. ………………………………………………………………………… 6 分

因为$\overrightarrow{AG}=\lambda\overrightarrow{AB}=(2\sqrt{2}\lambda,2\sqrt{2}\lambda,0)$,所以 $G(2\sqrt{2}\lambda,2\sqrt{2}\lambda-2\sqrt{2},0)$,

则$\overrightarrow{DG}=(2\sqrt{2}\lambda+2\sqrt{2},2\sqrt{2}\lambda-2\sqrt{2},0)$. ………………………………………… 7 分

设平面 BDE 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x_1,y_1,z_1)$,

则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BD}=-4\sqrt{2}x_1=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BE}=-2\sqrt{2}x_1+\sqrt{2}y_1+\sqrt{2}z_1=0,\end{cases}$令 $y_1=1$,得 $\boldsymbol{n}=(0,1,-1)$. ………………………… 8 分

设平面 PDG 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x_2,y_2,z_2)$,

则$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{DP}=2\sqrt{2}x_2+2\sqrt{2}z_2=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{DG}=(2\sqrt{2}\lambda+2\sqrt{2})x_2+(2\sqrt{2}\lambda-2\sqrt{2})y_2=0,\end{cases}$令 $x_2=\lambda-1$,得 $\boldsymbol{m}=(\lambda-1,-\lambda-1,-\lambda+1)$. … 9 分

设平面 BDE 与平面 PDG 的夹角为 θ,

则 $\cos\theta=\cos\langle\boldsymbol{n},\boldsymbol{m}\rangle=\dfrac{|\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{m}|}{|\boldsymbol{n}||\boldsymbol{m}|}=\dfrac{2}{\sqrt{2}\times\sqrt{(\lambda-1)^2+(-\lambda-1)^2+(-\lambda+1)^2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3\lambda^2-2\lambda+3}}$. ………… 10 分

因为 $0\leqslant\lambda\leqslant1$,所以 $3\lambda^2-2\lambda+3=3(\lambda-\dfrac{1}{3})^2+\dfrac{8}{3}\geqslant\dfrac{8}{3}$,所以$\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3\lambda^2-2\lambda+3}}\leqslant\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{\dfrac{8}{3}}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,

则当 $\lambda=\dfrac{1}{3}$ 时,平面 BDE 与平面 PDG 夹角的余弦值取得最大值$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. ……………………………… 12 分

21.(1)解:由题意可得$\begin{cases}2b=2c,\\ \dfrac{(-\sqrt{2})^2}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}=1,\\ a^2=b^2+c^2,\end{cases}$解得 $a=2,b=c=\sqrt{2}$. ………………………………… 3 分

故所求椭圆 C 的标准方程为$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1$. ………………………………………………………… 4 分

(2)证明:设直线 MN 的方程为 $x=my+\sqrt{2}$,$M(x_1,y_1)$,$N(x_2,y_2)$,

联立$\begin{cases}x=my+\sqrt{2},\\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1,\end{cases}$消元得 $(m^2+2)y^2+2\sqrt{2}my-2=0$.

所以 $y_1+y_2=-\dfrac{2\sqrt{2}m}{m^2+2}$,$y_1y_2=-\dfrac{2}{m^2+2}$①, ………………………………………………… 5 分

直线 AM 的方程为 $y=\dfrac{y_1}{x_1+2}(x+2)$,

与直线 l:$x=2\sqrt{2}$联立,可得点 P 的纵坐标 $y_P=\dfrac{y_1}{x_1+2}(2\sqrt{2}+2)$. ………………………………… 6 分

直线 AN 的方程为 $y=\dfrac{y_2}{x_2+2}(x+2)$与直线 l:$x=2\sqrt{2}$联立,

可得点 Q 的纵坐标 $y_Q=\dfrac{y_2}{x_2+2}(2\sqrt{2}+2)$, ……………………………………………………… 7 分

则 $k_{MB}=\dfrac{y_1}{x_1-2}=\dfrac{y_1}{my_1+\sqrt{2}-2}$,$k_{BQ}=\dfrac{y_Q}{2\sqrt{2}-2}=\dfrac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}\cdot\dfrac{y_2}{my_2+\sqrt{2}+2}$.

故 $k_{MB}-k_{BQ}=\dfrac{y_1}{my_1+\sqrt{2}-2}-\dfrac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}\cdot\dfrac{y_2}{my_2+\sqrt{2}+2}=\dfrac{2(y_1+y_2)-2\sqrt{2}my_1y_2}{(my_1+\sqrt{2}-2)(my_2+\sqrt{2}-2)(2-\sqrt{2})}$②, …… 9 分

把①代入②,可得 $k_{MB}-k_{BQ}=\dfrac{2(-\dfrac{2\sqrt{2}m}{m^2+2})-2\sqrt{2}m(-\dfrac{2}{m^2+2})}{(my_1+\sqrt{2}-2)(my_2+\sqrt{2}-2)(2-\sqrt{2})}=0$,

所以直线 MQ 与 x 轴相交于右顶点 B. ………………………………………………………………… 11 分

同理可得直线 NP 与 x 轴相交于右顶点 B. 故直线 MQ 与直线 NP 相交于点 B. …………………… 12 分

22. (1)证明：当 $a=\frac{1}{2}$ 时，$f(x)=\frac{1}{2}x^2+x-e^x+1$，所以 $f'(x)=x-e^x+1(x\in\mathbf{R})$.

令 $h(x)=x-e^x+1$，则 $h'(x)=1-e^x$. …………………………………………………… 1 分

由 $h'(x)>0$，得 $x<0$，由 $h'(x)<0$，得 $x>0$，

则 $h(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递增，在 $(0,+\infty)$ 上单调递减. ……………………………… 2 分

因为 $h(0)=0-e^0+1=0$，所以当 $x\in(-\infty,+\infty)$ 时，$h(x)\leqslant 0$，即 $f'(x)\leqslant 0$，则 $f(x)$ 在 $x\in(-\infty,+\infty)$ 上单调递减. …………………………………………………………………… 3 分

因为 $f(0)=0+0-e^0+1=0$，所以当 $x<0$ 时，$f(x)>0$，当 $x>0$ 时，$f(x)<0$. ……………… 4 分

(2)解：由题意可得 $g(x)=\cos x-ax^2-x+e^x$，则 $g'(x)=-\sin x-2ax-1+e^x$，且 $g'(0)=0$. ……… 5 分

令 $G(x)=g'(x)=-\sin x-2ax-1+e^x$，则 $G'(x)=-\cos x-2a+e^x$.

令 $H(x)=G'(x)=-\cos x-2a+e^x$，则 $H'(x)=\sin x+e^x$. ……………………………………… 6 分

当 $x>0$ 时，$\sin x\geqslant -1$，$e^x>1$，所以 $\sin x+e^x>0$，即 $H'(x)=\sin x+e^x>0$.

所以 $G'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数，则 $G'(x)>G'(0)=-2a$. ………………………………… 7 分

①当 $-2a\geqslant 0$，即 $a\leqslant 0$ 时，$G'(x)>0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，即 $G(x)=g'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数.

因为 $g'(0)=0$，所以 $g'(x)>g'(0)=0$，所以 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增. 与 $x=0$ 是极大值点矛盾，即 $a\leqslant 0$ 不符合题意. …………………………………………………………………………………… 8 分

②当 $-2a<0$，即 $a>0$ 时，因为 $G'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数，且 $G'(0)=-2a<0$，

$G'(\ln(2a+2))=-\cos[\ln(2a+2)]-2a+e^{\ln(2a+2)}=-\cos[\ln(2a+2)]-2a+(2a+2)>0$，

所以 $\exists x_0\in(0,\ln(2a+2))$，$G'(x_0)=0$，

则当 $x\in(0,x_0)$ 时，$G'(x_0)<0$，即 $g'(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上是减函数，从而 $g'(x)<g'(0)=0$，

故 $g(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递减. ………………………………………………………………… 10 分

当 $x<0$ 时，对 $\forall x\in(-\frac{\pi}{6},0)$，$\sin(-\frac{\pi}{6})<\sin x<\sin 0$，$e^{-\frac{\pi}{6}}<e^x<1$，

即 $-\frac{1}{2}<\sin x<0$，$0.59<e^x<1$，所以 $\sin x+e^x>0$，则当 $x\in(-\frac{\pi}{6},0)$ 时，$H'(x)=\sin x+e^x>0$.

故 $G'(x)$ 在 $(-\frac{\pi}{6},0)$ 上是增函数.

因为 $G'(x)<G'(0)=-2a<0$，即当 $a>0$ 时，$g'(x)$ 在 $(-\frac{\pi}{6},0)$ 上是减函数，

所以 $g'(x)>g'(0)=0$，则 $g(x)$ 在 $(-\frac{\pi}{6},0)$ 上单调递增，符合 $x=0$ 是极大值点.

故所求实数 a 的取值范围为 $(0,+\infty)$. ………………………………………………………… 12 分