姓名__________ 座位号____________________

(在此卷上答题无效)

绝密★启用前

安徽省示范高中培优联盟2022年秋季联赛(高三)

数　学

本试卷分第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分,第Ⅰ卷第1至第3页,第Ⅱ卷第4至第6页。全卷满分150分,考试时间120分钟。

考生注意事项:

1. 答题前,务必在试题卷、答题卡规定的地方填写自己的姓名、座位号,并认真核对答题卡上所粘贴的条形码中姓名、座位号与本人姓名、座位号是否一致。
2. 答第Ⅰ卷时,每小题选出答案后,用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号,写在本试卷上无效。
3. 答第Ⅱ卷时,必须使用0.5毫米的黑色墨水签字笔在答题卡上书写,要求字体工整、笔迹清晰。作图题可先用铅笔在答题卡规定的位置绘出,确认后再用0.5毫米的黑色墨水签字笔描清楚。必须在题号所指示的答题区域作答,超出答题区域书写的答案无效,在试题卷、草稿纸上答题无效。
4. 考试结束,务必将试题卷和答题卡一并上交。

第Ⅰ卷(选择题　共60分)

一、选择题(本题共8小题,每小题5分,共40分。在每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求。)

1. 已知集合 $A=\{x\in\mathbf{Z}\mid -2\leqslant x<3\}$,$B=\{x\mid y=\sqrt{1-\ln x}\}$,则 $A\cap B=$

A. $\{-2,-1,0,1,2\}$　　B. $\{1,2\}$

C. $[-2,e]$　　D. $(0,e]$

2. 复数 $z=i^{2022}+\frac{|3+4i|}{3+4i}$,则 z 共轭复数 $\bar{z}$ 的虚部为

A. $-\frac{4}{5}i$　　B. $-\frac{4}{5}$　　C. $\frac{4}{5}i$　　D. $\frac{4}{5}$

3. 在古代,斗笠作为挡雨遮阳的器具,用竹篾夹油纸或竹叶棕丝等编织而成,其形状可以看成一个圆锥体,在《诗经》有“何蓑何笠”的句子,说明它很早就为人所用.已知某款斗笠如图所示,它的母线长为 $2\sqrt{2}$,侧面展开图是一个半圆,则该斗笠的底面半径为

第3题图

A. 4　　B. $4\sqrt{2}$　　C. $\sqrt{2}$　　D. 2

4. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 n^2+n,数列 $\{b_n\}$ 满足 $a_n=2\log_2 b_n$,设数列 $\{a_n\}$ 中不在数列 $\{b_n\}$ 中的项按从小到大的顺序构成数列 $\{c_n\}$,则数列 $\{c_n\}$ 的前50项和为

A. 3017　　B. 3018　　C. 3065　　D. 3066

5. 已知 α,β 为锐角,$\tan\alpha=3$,$\cos(\alpha+\beta)=-\frac{3}{5}$,则 $\tan(\alpha-\beta)$ 的值为

A. $\frac{7}{12}$　　B. $-\frac{7}{12}$　　C. $\frac{7}{24}$　　D. $-\frac{7}{24}$

6. 已知定义域为 $\mathbf{R}$ 的偶函数 $f(x)$ 的图象是连续不断的曲线,且 $f(x+2)+f(x)=f(1)$,$f(x)$ 在 $[0,2]$ 上单调递增,则 $f(x)$ 在区间 $[-100,100]$ 上的零点个数为

A. 100　　B. 102　　C. 200　　D. 202

7. 将函数 $f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$ 图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度,再将其图象上所有点的横坐标变为原来的 $\frac{1}{\omega}(\omega>0)$ 倍,得到函数 $g(x)$ 的图象.若函数 $g(x)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$ 上恰有8个零点,则 ω 的取值范围为

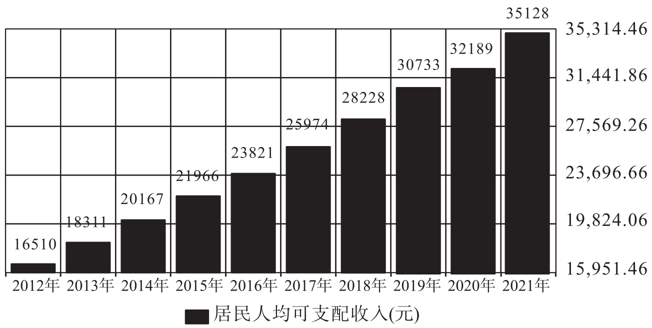
A. $[7,9]$　　B. $[7,9)$　　C. $[5,7]$　　D. $[5,7)$

8. 已知函数 $f(x)=x^5+a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$ 的5个零点分别为1,2,3,4,5,则 a_3 的值为

A. 14　　B. 24　　C. 60　　D. 85

二、选择题(本题共4小题,每小题5分,共20分。在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求。全部选对的得5分,部分选对的得2分,有选错的得0分。)

9. 下图是中华人民共和国国家统计局发布的2012年至2021年居民人均可支配收入(单位:元)的变化情况,则



A. 2012 年至 2021 年,人均年收入逐年上升

B. 这 10 年居民人均年收入的平均数超过 23821

C. 这 10 年居民人均年收入的极差为 18608

D. 这 10 年居民人均年收入的 80% 分位数为 30733

10. 已知抛物线 $C: y^2 = 2px(p>0)$ 的焦点为 F,点 A,B 在抛物线 C 上,且 A,B 都在 x 轴的上方,$\angle OFB = 2\angle OFA = \frac{2\pi}{3}$($O$ 为坐标原点),记 $\triangle OFB,\triangle OFA$ 的面积分别为 S_1,S_2,则

A. 直线 AB 的斜率为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$

B. 直线 AB 的斜率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$

C. $S_1 - S_2 = \frac{\sqrt{3}p^2}{6}$

D. $S_1 - S_2 = \frac{p^2}{3}$

11. 在棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,点 P 在线段 B_1C 上运动,则

A. 三棱锥 $P-A_1C_1D$ 的体积为定值 $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

B. $PB+PD$ 的最小值为 $2+\sqrt{3}$

C. $\angle BPD_1 \geqslant 90^\circ$

D. 直线 AP 与 A_1D 所成角的取值范围是 $\left[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right]$

12. 已知函数 $f(x)=x-\ln x, g(x)=e^x - x$,若存在 x_1,x_2,使得 $f(x_1)=g(x_2)=t$ 成立,则

A. $t \geqslant 1$

B. $x_1 - x_2$ 的最小值为 1

C. 当 $0<x_1<1, x_2<0$ 时,x_1x_2 的取值范围为 $[-e,+\infty)$

D. 当 $x_1>1, x_2>0$ 时,$\frac{tx_2}{x_1} - x_2$ 的最小值为 $-\frac{4}{e^2}$

(在此卷上答题无效)

第 Ⅱ 卷(非选择题　共 90 分)

考生注意事项:

请用 0.5 毫米黑色墨水签字笔在答题卡上作答,在试题卷上答题无效。

三、填空题(本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分。)

13. 已知向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=2|\boldsymbol{b}|$,且 $2|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{3}|\boldsymbol{a}|$,则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为__________.

14. 为了监控某种零件的一条生产线的生产过程,检验员每天从该生产线上随机抽取 1000 个零件,并测量其尺寸(单位:cm).根据长期生产经验,可以认为这条生产线正常状态下生产的零件尺寸服从正态分布 $N(20,2^2)$,则可估计所抽取的 1000 个零件中尺寸高于 24 的个数大约为__________.

(附:若随机变量 ξ 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$,则 $P(\mu-\sigma \leqslant \xi \leqslant \mu+\sigma) \approx 0.6827$,$P(\mu-2\sigma \leqslant \xi \leqslant \mu+2\sigma) \approx 0.9545$.)

15. 已知 $a>1,b>1$ 时,不等式 $be^a - na\ln b \geqslant 0$ 恒成立,则 n 的最大值是__________.

16. 设双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1,F_2,点 A 在双曲线的右支上,且直线 AF_2 的倾斜角为 60°,$\triangle AF_1F_2$ 的内切圆半径为 $\sqrt{3}a$,则双曲线 C 的离心率为__________.

四、解答题(本题共 6 小题,共 70 分。解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤。)

17. (10 分)

在 $\triangle ABC$ 中,角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c,满足 $\sqrt{2}b\cos C=\sqrt{2}a-c$.

(1) 求角 B;

(2) 若 $\cos C=\frac{3}{5}$,$\overrightarrow{BD}=4\overrightarrow{DC}$,$\triangle ABD$ 的面积为 $\frac{7}{5}$,求 c 的值.

18. (12 分)

某校为了庆祝二十大的胜利召开,决定举办“学党史·铭初心”党史知识竞赛.高三年级为此举办了一场选拔赛,选拔赛分为初赛和决赛,初赛通过后才能参加决赛,决赛通过后将代表年级参加学校比赛.已知甲、乙、丙 3 位同学通过初赛的概率均为 $\frac{2}{3}$,通过初赛后再通过决赛的

概率依次为$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2}$，$\frac{3}{4}$，假设他们之间通过与否互不影响.

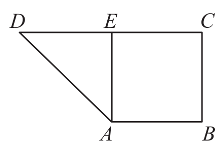
(1) 求这 3 人中至少有 1 人通过初赛的概率；

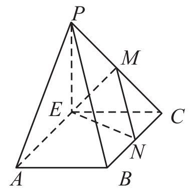
(2) 从甲、乙、丙 3 位同学中随机抽取一名，求他通过决赛的概率；

(3) 设这 3 人中通过决赛的人数为 ξ，求 ξ 的分布列及期望.

19. (12 分)

如图，直角梯形 $ABCD$ 中，$CD=2AB=2BC$，$AB\perp BC$，$AB//CD$，点 E 为 CD 的中点，$\triangle ADE$ 沿着 AE 翻折至 $\triangle APE$，点 M 为 PC 的中点，点 N 在线段 BC 上.





(1) 证明：平面 $EMN\perp$ 平面 PBC；

(2) 若平面 $PAE\perp$ 平面 $ABCE$，平面 EMN 与平面 PAB 所成的锐二面角为 30°，求$\frac{BN}{BC}$的值.

20. (12 分)

已知数列$\{a_n\}$满足 $a_{n+2}=a_{n+1}+2a_n$，$a_1=1$，$a_2=2$.

(1) 求证：数列$\{a_{n+1}+a_n\}$为等比数列；

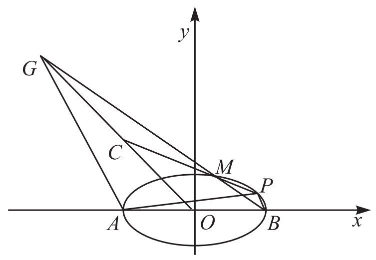
(2) 求数列$\{a_n\}$的前 n 项和 S_n.

21. (12 分)

如图所示，A，B 为椭圆 E：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右顶点，焦距长为 $2\sqrt{3}$，点 P 在椭圆 E 上，直线 PA，PB 的斜率之积为 $-\frac{1}{4}$.

(1) 求椭圆 E 的方程；

(2) 已知 O 为坐标原点，点 $C(-2,2)$，直线 PC 交椭圆 E 于点 M(M，P 不重合)，直线 BM，OC 交于点 G. 求证：直线 AP，AG 的斜率之积为定值，并求出该定值.



第 21 题图

22. (12 分)

已知函数 $f(x)=e^x-1-x-ax^2$，$x\geqslant 0$，且 $f(x)\geqslant 0$ 恒成立.

(1) 求实数 a 的最大值；

(2) 证明：$f(x)+x\sin x\geqslant 0$.(参考数据：$e^\pi=23.1$)