

蚌埠市 2023 届高三年级第三次教学质量检查考试

数 学

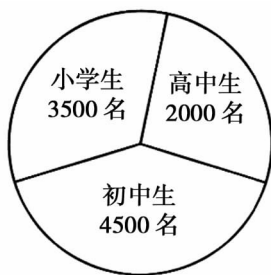
本试卷满分 150 分,考试时间 120 分钟

注意事项:

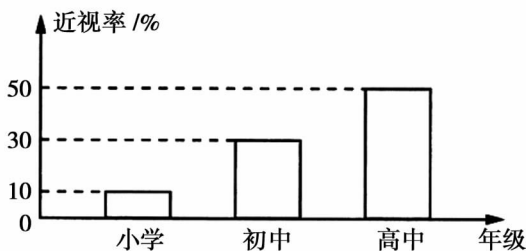
1. 答卷前,考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其它答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的。

1. 设集合 $A = \{-1, 0, 2, 3, 5\}$, $B = \{x \mid y = \sqrt{(3-x)(x+1)}\}$, 则 $A \cap B =$
 A. $\{0, 2\}$ B. $\{-1, 0, 2, 3\}$ C. $\{5\}$ D. $\{-1, 3, 5\}$
2. 已知 i 为虚数单位,复数 z 满足 $z(1-i)^2 = 2$, 则 $z^{2023} =$
 A. -1 B. 1 C. $-i$ D. i
3. 已知 $\tan\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = 3$, 则 $\tan\alpha =$
 A. -2 B. $-\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{2}$ D. 2
4. 直线 $l: x + my + 1 - m = 0$ 与圆 $C: (x-1)^2 + (y-2)^2 = 9$ 的位置关系是
 A. 相交 B. 相切 C. 相离 D. 无法确定
5. 已知某地区中小學生人数如图①所示,为了解该地区中小學生的近视情况,卫生部门根据当地中小學生人数,用分层抽样的方法抽取了 10% 的學生进行调查,调查数据如图②所示,则估计该地区中小學生的平均近视率为



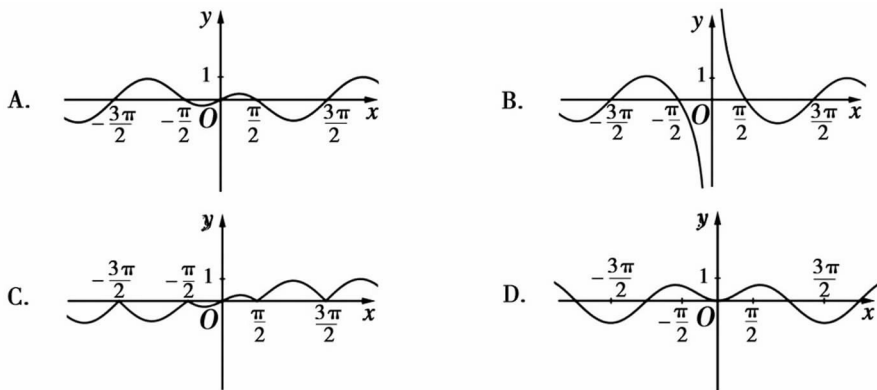
图①



图②

6. 若椭圆 $C: \frac{x^2}{m} + \frac{y^2}{2} = 1$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$, 则椭圆 C 的长轴长为
 A. 6 B. $2\sqrt{6}$ 或 $2\sqrt{6}$ C. $2\sqrt{6}$ D. $2\sqrt{2}$ 或 $2\sqrt{6}$

7. 函数 $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \cdot \cos x$ 的图象大致为



8. 在 $\triangle ABC$ 中, D 为 BC 上一点, 且 $\overrightarrow{BD} = 3\overrightarrow{DC}$, $\angle ABC = \angle CAD$, $\angle BAD = \frac{2\pi}{3}$, 则 $\tan \angle ABC =$

A. $\frac{\sqrt{39}}{13}$

B. $\frac{\sqrt{13}}{3}$

C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

D. $\frac{\sqrt{3}}{5}$

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的四个选项中, 有多项是符合题目要求的. 全部选对的得 5 分, 有选错的得 0 分, 部分选对的得 2 分.

9. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 等比数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项积为 T_n , 则下列结论正确的是

A. 数列 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 是等差数列

B. 数列 $\{S_{2n+2} - S_{2n}\}$ 是等差数列

C. 数列 $\left\{\frac{T_{2n+2}}{T_{2n}}\right\}$ 是等比数列

D. 数列 $\{\lg T_n\}$ 是等差数列

10. 已知 F 是抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 是抛物线上相异两点, 则以下结论正确的是

A. 若 $x_1 + x_2 = 6$, 那么 $|AB| = 8$

B. 若 $|AF| + |BF| = 3$, 则线段 AB 的中点到 y 轴的距离为 $\frac{1}{2}$

C. 若 $\triangle FAB$ 是以 F 为直角顶点的等腰三角形, 则 $|AB| = 4\sqrt{2} \pm 4$

D. 若 $\overrightarrow{AF} = 2\overrightarrow{FB}$, 则直线 AB 的斜率为 $\pm 2\sqrt{2}$

11. 已知 AB 为圆锥 SO 底面圆 O 的直径, 点 C 是圆 O 上异于 A, B 的一点, E 为 SA 的中点, $SA = 5$, 圆锥 SO 的侧面积为 15π , 则下列说法正确的是

A. 圆 O 上存在点 F 使 $EF \parallel$ 平面 SBC

B. 圆 O 上存在点 F 使 $AF \perp$ 平面 SBC

C. 圆锥 SO 的外接球表面积为 $\frac{625\pi}{32}$

D. 棱长为 $\sqrt{6}$ 的正四面体在圆锥 SO 内可以任意转动

12. 已知 $a > b > 1$, 则下列结论正确的是

A. $e^{a-b} > \frac{a}{b}$

B. $\frac{\ln a}{a} > \frac{\ln(b+1)}{b+1}$

C. $\log_a(a+1) > \log_b(b+1)$

D. $\frac{a}{b} > \frac{a^b}{b^a}$

三、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.

13. 已知 $a = (1, 2), b = (2, m), a \perp (a - 3b)$, 则 $m =$ _____.
14. 已知 $(2x - 1)^3 - (x + 2)^4 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4$, 则 $a_0 + a_2 + a_4 =$ _____.
15. 已知实数 $a > 0 > b$, 且 $a - b = 5$, 则 $\frac{1}{a+1} + \frac{1}{2-b}$ 的最小值为 _____.
16. 已知定义在 \mathbb{R} 上的奇函数 $f(x)$ 满足 $f(x+2) = -f(x)$, 且当 $-1 \leq x \leq 0$ 时, $f(x) = 2^{x+1} - m$, 则当 $0 < x \leq 1$ 时, $f(x) =$ _____; 若对 $\forall x \in [0, 1]$ 都有 $f\left(-x^2 + 2tx + \frac{1}{4}\right) \geq \sqrt{2} - 2$, 则实数 t 的取值范围为 _____.

四、解答题:本题共 6 小题,共 70 分. 解答应写出说明文字、演算式、证明步骤.

17. (本小题满分 10 分)

某校为了丰富学生课余生活,组建了足球社团. 为了解学生喜欢足球是否与性别有关,随机抽取了男、女同学各 100 名进行调查,部分数据如表所示:

	喜欢足球	不喜欢足球	合计
男生		40	
女生	30		
合计			

- (1) 根据所给数据完成上表, 依据 $\alpha = 0.001$ 的独立性检验, 能否认为该校学生喜欢足球与性别有关?
- (2) 社团指导老师从喜欢足球的学生中抽取了 2 名男生和 1 名女生示范点球射门. 已知这两名男生进球的概率均为 $\frac{2}{3}$, 这名女生进球的概率为 $\frac{1}{2}$, 每人射门一次, 假设各人射门相互独立, 求 3 人进球总次数 X 的分布列和数学期望.

附: $\chi^2 = \frac{n(ad - bc)^2}{(a + b)(c + d)(a + c)(b + d)}$

α	0.1	0.05	0.01	0.005	0.001
χ_α	2.706	3.841	6.635	7.879	10.828

18. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = \sqrt{3} \sin \omega x \cos \omega x + \cos^2 \omega x - \frac{1}{2} (\omega > 0)$.

- (1) 若 $\omega = 1$, 求函数 $f(x)$ 的最小正周期;
- (2) 若 $y = f(x)$ 图象在 $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ 内有且仅有一条对称轴, 求 $f\left(\frac{\pi}{8}\right)$ 的取值范围.

19. (本小题满分 12 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1, a_{2n+1} = a_{2n} + 1, a_{2n} = 2a_{2n-1}$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

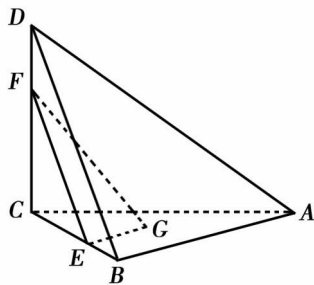
(2) 设 $T_n = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}$, 求证: $T_{2n} < 3$.

20. (本小题满分 12 分)

如图, 在四面体 $ABCD$ 中, G 为 $\triangle ABC$ 的重心, E, F 分别在棱 BC, CD 上, 平面 $ABD \parallel$ 平面 EFG .

(1) 求 $\frac{DF}{CF}$ 的值;

(2) 若 $AB \perp$ 平面 $BCD, DC \perp CB$, 且 $AB = BC = CD = 3$, 求平面 EFG 与平面 ACD 的夹角的大小.



第 20 题图

21. (本小题满分 12 分)

已知 A, B 是双曲线 $E: \frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ 的左、右顶点, M 为双曲线上与 A, B 不重合的点.

(1) 设直线 MA, MB 的斜率分别为 k_1, k_2 , 求证: $k_1 \cdot k_2$ 是定值;

(2) 设直线 $l: x = 1$ 与直线 MA 交于点 P , l 与 x 轴交于点 S , 点 Q 满足 $\vec{QS} = 2\vec{SP}$, 直线 BQ 与双曲线 E 交于点 N (与 A, B, M 不重合). 判断直线 MN 是否过定点, 若直线 MN 过定点, 求出该定点坐标; 若直线 MN 不过定点, 请说明理由.

22. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = e^x - 1, g(x) = \ln(x + a), a \in \mathbb{R}$.

(1) 若 $a = 1$, 求证: $f(x) \geq g(x)$;

(2) 若函数 $f(x)$ 与函数 $g(x)$ 存在两条公切线, 求实数 a 的取值范围.