淮北市 2023 届高三一模数学　参考答案

一、选择题

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	B	D	B	C	A	C	B	D	AD	AC	BCD	BC

二、填空题

13. 240 ；　**14.** $4\sqrt{3}$ ；　**15.** $\left(2,\frac{9}{4}\right]$；　**16.** $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$，$\left(-\frac{4\sqrt{3}}{3},\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)$

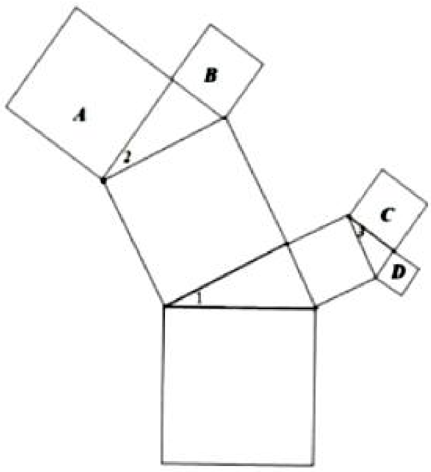
12.解：设 $\angle 1=\angle 2=\angle 3=\alpha$，最大正方形边长为 1，小正方形 A、B、C、D 的边长分别为 a,b,c,d

则 $a=\cos^2\alpha,\ b=\cos\alpha\sin\alpha,\ c=\sin\alpha\cos\alpha,\ d=\sin^2\alpha$

所以 $S_A+S_D=\sin^4\alpha+\cos^4\alpha\geq 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha=2S_B=2S_C$,故 C 正确

$S_AS_D=\sin^4\alpha\cos^4\alpha=S_BS_C$ 故 B 正确

所以选 BC.



16.解①由双曲线 C：$\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{6}=\lambda$ 过点 $\left(\sqrt{5},\sqrt{3}\right)$，所以 $\frac{5}{2}-\frac{3}{6}=\lambda\Rightarrow\lambda=2$

所以方程为 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$

②如图：

设 $\triangle AF_1F_2$ 的内切圆与 AF_1,AF_2,F_1F_2 分别切于 H,D,G，

所以 $|AH|=|AD|,|HF_1|=|GF_1|,|DF_2|=|GF_2|$，

所以 $|AF_1|-|AF_2|=|AH|+|HF_1|-|AD|-|DF_2|=|HF_1|-|DF_2|=|GF_1|-|GF_2|=2a$，

又 $|GF_1|+|GF_2|=2c$，所以 $|GF_1|=a+c,|GF_2|=c-a$，

又 $|EF_1|=a+c,|EF_2|=c-a$，所以 G 与 $E\ (a,0)$ 重合，所以 M 的横坐标为 a，同理可得 N 的横坐标也为 a，

设直线 AB 的倾斜角为 θ.则 $\angle EF_2M=\frac{\pi-\theta}{2}$，$\angle EF_2N=\frac{\theta}{2}$，

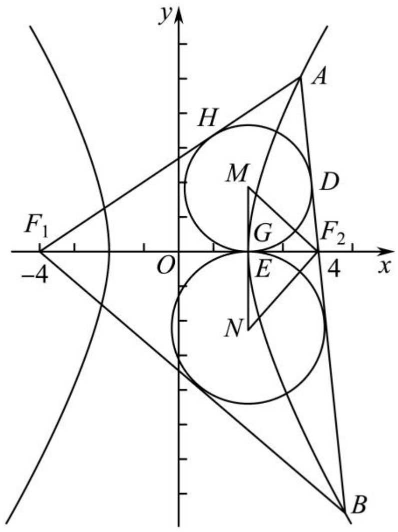
$$|ME|-|NE|=(c-a)\tan\frac{\pi-\theta}{2}-(c-a)\tan\frac{\theta}{2}$$

$$=(c-a)\cdot\left[\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)}-\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}\right]$$

$$=(c-a)\cdot\left(\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}-\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}\right)$$

$$=(c-a)\cdot\frac{\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}\cdot\cos\frac{\theta}{2}}$$

$$=(c-a)\frac{2\cos\theta}{\sin\theta},$$



当$\theta=\frac{\pi}{2}$时，$|ME|-|NE|=0$，

当$\theta\neq\frac{\pi}{2}$时，由题知，$a=2.c=4.\frac{b}{a}=\sqrt{3}$.

因为A,B两点在双曲线的右支上，$\therefore\frac{\pi}{3}<\theta<\frac{2\pi}{3}$，且$\theta\neq\frac{\pi}{2}$，所以$\tan\theta<-\sqrt{3}$或$\tan\theta>\sqrt{3}$，

$\therefore-\frac{\sqrt{3}}{3}<\frac{1}{\tan\theta}<\frac{\sqrt{3}}{3}$.且$\frac{1}{\tan\theta}\neq0$，$|ME|-|NE|=(4-2)\cdot\frac{2}{\tan\theta}=\frac{4}{\tan\theta}\in\left(-\frac{4\sqrt{3}}{3},0\right)\cup\left(0,\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)$，

综上所述，$|ME|-|NE|\in\left(-\frac{4\sqrt{3}}{3},\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)$.

故①答案为：$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1;\left(-\frac{4\sqrt{3}}{3},\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)$

三、解答题

17.(本题满分 10 分)

解:(1) 由$\frac{c\sin C}{a}-\sin C=\frac{b\sin B}{a}-\sin A$

得$\frac{c^2}{a}-c=\frac{b^2}{a}-a$，即$a^2+c^2-b^2=ac$，........................2 分

则$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{1}{2}$，所以$B=\frac{\pi}{3}$. ....4 分

(2) 注意到$b=4$，$B=\frac{\pi}{3}$，$c=\frac{4\sqrt{6}}{3}$，由$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$

得$\frac{4}{\sin\frac{\pi}{3}}=\frac{\frac{4\sqrt{6}}{3}}{\sin C}$，即$\sin C=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{4\sqrt{6}}{3}}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$. ....6 分

又$C\in(0,\frac{2\pi}{3})$，所以$C=\frac{\pi}{4}$．则$A=\pi-(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4})=\frac{5\pi}{12}$． ....7 分

$$\sin A=\sin\frac{5\pi}{12}=\sin(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6})=\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$ ....9 分

所以$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times4\times\frac{4\sqrt{6}}{3}\times\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}=4+\frac{4\sqrt{3}}{3}$． ....10 分

18.(本题满分 12 分)

(1) 注意到$a_n=3a_{n-1}+2(n\geq2,n\in N^*)$，则$a_n+1=3(a_{n-1}+1)$，

即$\frac{a_n+1}{a_{n-1}+1}=3$． ....3 分

所以$\{a_n+1\}$是以$a_1+1=2$为首项，以3为公比的等比数列． ....4 分

(2) 由(1)知$a_n+1=2\cdot3^{n-1}$，故$a_n=2\cdot3^{n-1}-1$．

所以$b_n=(2n+1)(2\cdot3^n-1-2\cdot3^{n-1}+1)=\frac{4}{3}(2n+1)\cdot3^n$． ....6 分

故$S_n=\frac{4}{3}[3\times3+5\times3^2+7\times3^3+\cdots+(2n+1)\cdot3^n]$，两同乘以3，错位

$3S_n=\frac{4}{3}[\quad 3\times3^2+5\times3^3+\cdots+(2n-1)\cdot3^n+(2n+1)\cdot3^{n+1}]$，两式相减得 ....8 分

$$-2S_n=\frac{4}{3}[3\times3+2\times3^2+2\times3^3+\cdots+2\cdot3^n-(2n+1)\cdot3^{n+1}]$$

$$=\frac{4}{3}\left[3+\frac{6(1-3^n)}{1-3}-(2n+1)3^{n+1}\right]$$

$$=-8n\cdot3^n$$ .... 11 分

所以$S_n=4n\cdot3^n,n\in N^*$ ....12 分

19.(本题满分 12 分)

（1）证明：在ΔABC中，因$BC=2AB,\angle ABC=60^0$

所以$\angle BAC=90^0$,即$AC\perp AB$

又$AC\perp PB$, PB,AB相交，

所以$AC\perp$面PAB

所以面 $PAB\perp$ 面 $ABCD$ 得证 ....4 分

（2）假设存在点 Q，使得平面 $BEQF\perp$ 平面 PAD.

如图，以 A 为原点，分别以 $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ 为 x，y 轴的正方向建立空间直角坐标系 $A\text{-}xyz$，

则 $A\left(0,0,0\right)$，$B\left(2,0,0\right)$，$D\left(-2,2\sqrt{3},0\right)$，$P\left(1,0,\sqrt{3}\right)$，

$\overrightarrow{AD}=\left(-2,2\sqrt{3},0\right),\overrightarrow{AP}=\left(1,0,\sqrt{3}\right),\overrightarrow{BD}=\left(-4,2\sqrt{3},0\right),\overrightarrow{DP}=\left(3,-2\sqrt{3},\sqrt{3}\right)$ ....6 分

设 $\overrightarrow{n_1}=\left(x_1,y_1,z_1\right)$ 是平面 PAD 的法向量，则

$\begin{cases}\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{AD}=-2x_1+2\sqrt{3}y_1=0\\ \overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{AP}=x_1+\sqrt{3}z_1=0\end{cases}$，取 $\overrightarrow{n_1}=\left(\sqrt{3},1,-1\right)$.

设 $\overrightarrow{DQ}=\lambda\overrightarrow{DP}$，其中 $0\leqslant\lambda\leqslant1$.

则 $\overrightarrow{BQ}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DQ}=\overrightarrow{BD}+\lambda\overrightarrow{DP}=\left(3\lambda-4,2\sqrt{3}-2\sqrt{3}\lambda,\sqrt{3}\lambda\right)$

连接 EF，因 $AC\parallel$ 平面 $BEQF$，$AC\subset$ 平面 PAC，平面 $PAC\cap$ 平面 $BEQF=EF$，

故 $AC\parallel EF$ ....9 分

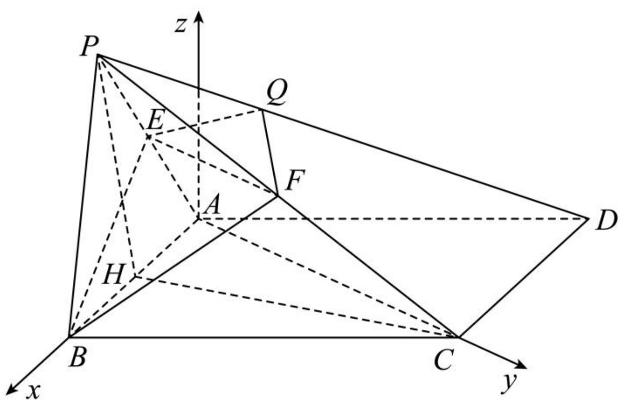
取与 $\overrightarrow{EF}$ 同向的单位向量 $\vec{j}=\left(0,1,0\right)$.

设 $\overrightarrow{n_2}=\left(x_2,y_2,z_2\right)$ 是平面 $BEQF$ 的法向量，

则 $\begin{cases}\overrightarrow{n_2}\cdot\vec{j}=y_2=0\\ \overrightarrow{n_2}\cdot\overrightarrow{BQ}=\left(3\lambda-4\right)x_2+2\sqrt{3}\left(1-\lambda\right)y_2+\sqrt{3}\lambda z_2=0\end{cases}$，取 $\overrightarrow{n_2}=\left(\sqrt{3}\lambda,0,4-3\lambda\right)$.

由平面 $BEQF\perp$ 平面 PAD，知 $\overrightarrow{n_1}\perp\overrightarrow{n_2}$，有 $\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}=3\lambda+3\lambda-4=0$，解得 $\lambda=\dfrac{2}{3}$.

故在侧棱 PD 上存在点 Q 且当 $DQ=\dfrac{2}{3}DP$ 时，使得平面 $BEQF\perp$ 平面 PAD. ....12 分



另，用几何法也可：

由题意及（1）得 $EF\perp PA$，取 E 为 PA 中点，

则 $BE\perp PA$

所以 $PA \perp$ 面 $BEQF$，故平面 $BEQF \perp$ 平面 PAD

在 ΔPAD 中，$QE \perp PA, E$ 为中点，进而求解。

请阅卷老师相应给分！

20. (本题满分 12 分)

解：(Ⅰ)记"任取 1 名学生，该生获得一等奖"为事件 A，记"任取 1 名学生，该生为高一学生"为事件 B，$\therefore P(\mathrm{A}) = \frac{36}{350}, P(\mathrm{AB}) = \frac{20}{350}$,

$\therefore P(\mathrm{B}|\mathrm{A}) = \frac{\mathrm{P(AB)}}{\mathrm{p(A)}} = \frac{\frac{20}{350}}{\frac{36}{350}} = \frac{5}{9}$ ……………………**4 分**

(Ⅱ)由已知可得，X得可能取值为 0, 1, 2

$\therefore P(\mathrm{X}=0) = \frac{100}{150} \times \frac{150}{200} = \frac{1}{2}$,

$P(\mathrm{X}=1) = \frac{100}{150} \times \frac{50}{200} + \frac{50}{150} \times \frac{150}{200} = \frac{5}{12}$,

$P(\mathrm{X}=2) = \frac{50}{150} \times \frac{50}{200} = \frac{1}{12}$,

$\therefore X$的分布列为

X	0	1	2
p	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{12}$

$\therefore E(X) = 0 \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{5}{12} + 2 \times \frac{1}{12} = \frac{7}{12}$ ……………………**9 分**

(Ⅲ) $D(\xi) = D(\eta)$ ……………………**12 分**

理由：$\because \xi + \eta = 3$，$\therefore \xi = 3 - \eta$，$\therefore D(\xi) = D(3-\eta) = (-1)^2 D(\eta) = D(\eta)$

21. (本题满分 12 分)

解：(Ⅰ)由已知点M是以AO为直径的圆上的点

$\therefore \angle AOM = \frac{\pi}{2}$, 又$\because OA = a, OM = \frac{a}{2}$, $\therefore AM = \frac{\sqrt{3}}{2}a, \angle AOM = \frac{\pi}{3}$

$\therefore M(-\frac{a}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}a)$, 又$\because$点$M$在椭圆$\Gamma$上，$\therefore \frac{\left(-\frac{a}{4}\right)^2}{a^2} + \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{4}a\right)^2}{b^2} = 1$, 整理得$\frac{b^2}{a^2} = \frac{1}{5}$

$\therefore \mathrm{e} = \sqrt{1 - \frac{\mathrm{b}^2}{\mathrm{a}^2}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ ……………………**4 分**

(Ⅱ) 设$P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$,

(ⅰ)由$b = 2, a = 2\sqrt{5}$, $\therefore$椭圆Γ的方程为:$\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{4} = 1$

在$RT_{\Delta}AOM$中$\angle OAM = \frac{\pi}{6}$, $\therefore$直线l的斜率为$k = \frac{\sqrt{3}}{3}$,

$\therefore$直线l的方程为$y=\frac{\sqrt{3}}{3}(x-4)$,

与椭圆方程联立得$\begin{cases}\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{4}=1\\ y=\frac{\sqrt{3}}{3}(x-4)\end{cases}$

整理得：$2x^2-10x+5=0$，$\therefore x_1+x_2=5$，$x_1x_2=\frac{5}{2}$

$\therefore k_1k_2=\frac{y_1y_2}{x_1x_2}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{3}(x_1-4)\frac{\sqrt{3}}{3}(x_2-4)}{x_1x_2}=-\frac{1}{5}$ ……………………8 分

(ⅱ)设直线l的方程为$y=\frac{\sqrt{3}}{3}(x-t),t\neq 0$与椭圆方程联立得$\begin{cases}\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{4}=1\\ y=\frac{\sqrt{3}}{3}(x-t)\end{cases}$

消去x整理得：$8y^2+2\sqrt{3}ty+t^2-20=0$，当$\Delta>0$得$0\le t^2<32$

$\therefore y_1+y_2=-\frac{\sqrt{3}}{4}t$，$y_1y_2=\frac{t^2-20}{8}$

$\therefore S_{\Delta POQ}=\frac{1}{2}|t||y_1-y_2|=\frac{1}{2}|t|\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=\frac{\sqrt{5}}{8}\sqrt{t^2(32-t^2)}$ ……………10 分

$\therefore$当且仅当$t^2=16$时，

$S_{\Delta POQ}$有最大值，此时最大值是$2\sqrt{5}$ ……………………12 分

22.(本题满分 12 分)

解：(1)由题意得：$f'(x)=e^x-k$ ………….1 分

当$k\le 0$时,$f'(x)>0$恒成立，得$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上单调递增；

当$k>0$时，$x\in(\ln k,+\infty)$时$f'(x)>0$，此时$f(x)$单调递增，

$x\in(-\infty,\ln k)$时$f'(x)<0$，此时$f(x)$单调递减， …………..3 分

综上得：当$k\le 0$时,$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上单调递增，

当$k>0$时，$f(x)$在$(-\infty,\ln k)$单调递减，在$(\ln k,+\infty)$上单调递增。

…………5 分

(2)（i）当$k=1$时，$g(x)=\frac{2f(x)}{x^2}=\frac{2(e^x-x-1)}{x^2}$，$x>0$

欲证$g(x)>1$，往证$e^x>\frac{x^2}{2}+x+1$，即证$\frac{x^2+2x+2}{2e^x}<1$，

记 $h(x)=\dfrac{x^2+2x+2}{2e^x}, x\ge 0$，得 $h'(x)=-\dfrac{x^2}{2e^x}\le 0$， 故 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，

得 $h(x)<h(0)=1$， $x>0$.

故当 $x>0$ 时， $g(x)>1$ 成立. ....**8 分**

（ii）由（i）得当 $x>0$ 时， $g(x)>1$，

故当 $x_1=\dfrac{1}{3}$，得 $e^{x_2}=g(x_1)>1$，进而 $x_2>0$，依次得 $x_n>0, n\in N^*$.

欲证 $x_n+n\ln 2<\ln(1+2^n)$，即证 $e^{x_n}-1<\dfrac{1}{2^n}$.

下面先证关系 $e^{x_{n+1}}-1<\dfrac{1}{2}(e^{x_n}-1)$，即证 $g(x_n)-1<\dfrac{1}{2}(e^{x_n}-1)$， $x_n>0$.

即 $\dfrac{2(e^{x_n}-x_n-1)}{{x_n}^2}-1<\dfrac{1}{2}(e^{x_n}-1)$，整理得即证：$(x_n+2)\left[e^{x_n}(x_n-2)+x_n+2\right]>0$

记 $F(x)=e^x(x-2)+x+2$， $x\ge 0$，得 $F'(x)=(x-1)e^x+1>0$

又 $F''(x)=xe^x>0$，所以 $F'(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，有 $F'(x)\ge F'(0)=0, x\ge 0$

所以 $F(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，得 $F(x)>F(0)=0, x>0$

故当 $x_n>0, n\in N^*$ 时，有 $F(x_n)>0$

所以 $g(x_n)-1<\dfrac{1}{2}(e^{x_n}-1)$， $x_n>0$. ....**10 分**

故 $e^{x_{n+1}}-1<\dfrac{1}{2}(e^{x_n}-1)<\dfrac{1}{2^2}(e^{x_{n-1}}-1)<\cdots<\dfrac{1}{2^n}(e^{x_1}-1)=\dfrac{1}{2^n}(e^{\frac{1}{3}}-1)$

又 $e-\dfrac{27}{8}<0$，得 $e^{\frac{1}{3}}<\dfrac{3}{2}$

所以 $e^{x_n}-1<\dfrac{1}{2^{n-1}}(e^{\frac{1}{3}}-1)<\dfrac{1}{2^{n-1}}(\dfrac{3}{2}-1)=\dfrac{1}{2^n}$

所以 $x_n+n\ln 2<\ln(1+2^n)$ 得证. ....**12 分**