2023届石家庄市高中质量检测（二）

数学答案

一、单选题

1-4 CBAA　5-8 BDCD

二、多选题

9.BC　10.BD　11.ABC　12.ABC

三、填空题

13. 0.1　　　　14. $-\dfrac{4\sqrt{2}}{9}$

15. $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$　　　　16. $\dfrac{11\sqrt{5}}{25}$

四、解答题

17. 解:（I）设$\left\{a_n\right\}$的公比为q，由题知$q \neq 1$，

则$a_1\left(q^4-1\right)=30$，$\dfrac{a_1\left(1-q^4\right)}{1-q}=30$，……………………2分

解得$q=2, a_1=2$………………………………4分

$\therefore a_n=2^n$……………………5分

（II）由（I）知$b_n=\log_2 a_{2n+1}=2n+1$……………………6分

$\therefore \dfrac{1}{b_n b_{n+1}}=\dfrac{1}{(2n+1)(2n+3)}=\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{2n+1}-\dfrac{1}{2n+3})$……………………8分

$\therefore T_n=\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}+\cdots+\dfrac{1}{2n+1}-\dfrac{1}{2n+3})$

$=\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{2n+3})$

$=\dfrac{n}{3(2n+3)}$………………………………10分

18. （I）根据余弦定理得，$2\sqrt{2}a^2\cos B+b^2=a^2+b^2-c^2+a^2+c^2$，　…………2分

即$2\sqrt{2}a^2\cos B=2a^2$，$\therefore \cos B=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　………………4分

$\because\ B\in(0,\pi)\quad \therefore B=\dfrac{\pi}{4}$. ··················5 分

(II)方法一：

$\because \Delta ABC$ 为锐角三角形， $A+B+C=\pi, B=\dfrac{\pi}{4}$,

$\therefore A+C=\dfrac{3\pi}{4}, \therefore \begin{cases}0<A<\dfrac{\pi}{2}\\ 0<\dfrac{3\pi}{4}-A<\dfrac{\pi}{2}\end{cases}, \therefore \dfrac{\pi}{4}<A<\dfrac{\pi}{2}$.··················7 分

$\because a=4$,根据正弦定理 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{c}{\sin C}$， $\therefore c=\dfrac{4\sin(\frac{3\pi}{4}-A)}{\sin A}$ ··················8 分

由面积公式可得 $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}ac\sin B=\sqrt{2}c=4\sqrt{2}\dfrac{\sin(\frac{3\pi}{4}-A)}{\sin A}$,

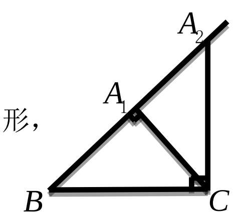
即 $S_{\Delta ABC}=\dfrac{4}{\tan A}+4$， ··················10 分

$\because \dfrac{\pi}{4}<A<\dfrac{\pi}{2}$， $\therefore \tan A>1$， $\therefore S_{\Delta ABC}\in(4,8)$,

故 ΔABC 面积的取值范围为 $(4,8)$.··················12 分

方法二：

由 $B=\dfrac{\pi}{4}, a=4$，画出如图所示三角形，



$\because \triangle ABC$ 为锐角三角形，$\therefore$ 点 A 落在线段 A_1A_2（端点 A_1、A_2 除外）上.....................7 分

当 $CA_1\perp A_1B$ 时，$S_{\triangle A_1BC}=\dfrac{1}{2}\times 2\sqrt{2}\times 2\sqrt{2}=4$ ....9 分

当 $CA_2\perp BC$ 时，$S_{\triangle A_2BC}=\dfrac{1}{2}\times 4\times 4=8$ ....11 分

$\therefore\ S\in(4,8)$ ....12 分

19. （I）事件 B = “甲乙两队比赛 4 局甲队最终获胜”,

事件 A_j = “甲队第 j 局获胜”，其中 $j=1,2,3,4$， A_j 相互独立.

又甲队明星队员 M 前四局不出场，故：$P\left(A_j\right)=\frac{1}{2}, j=1,2,3,4$，..................2 分

$B=\overline{A_1}A_2A_3A_4+A_1\overline{A_2}A_3A_4+A_1A_2\overline{A_3}A_4$，

所以$P\left(B\right)=C_3^1\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{3}{16}$ ....4 分

（II）设C为甲 3 局获得最终胜利，D为前 3 局甲队明星队员 M 上场比赛，

则由全概率公式可知：$P\left(C\right)=P\left(C|D\right)\cdot P\left(D\right)+P\left(C|\overline{D}\right)\cdot P\left(\overline{D}\right)$................................5 分

因为每名队员上场顺序随机，故$P\left(D\right)=\frac{C_4^2\cdot A_3^3}{A_5^3}=\frac{3}{5}$，

$P\left(\overline{D}\right)=1-\frac{3}{5}=\frac{2}{5}$，.....................................7 分

$P\left(C|D\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{3}{16}$，$P\left(C|\overline{D}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$.....................................9 分

所以$P\left(C\right)=\frac{3}{16}\times\frac{3}{5}+\frac{1}{8}\times\frac{2}{5}=\frac{13}{80}$ ....10 分

（III）$P\left(D|C\right)=\frac{P\left(CD\right)}{P\left(C\right)}=\frac{P\left(C|D\right)\cdot P\left(D\right)}{P\left(C\right)}=\frac{\frac{3}{16}\times\frac{3}{5}}{\frac{13}{80}}=\frac{9}{13}$.......................................12 分

20. 解：（I）平行四边形 *ABCD* 中，$AD\perp BD$, 可得$BD\perp BC$

$\because AD=2BD=4$

$\therefore BC=4, DC=2\sqrt{5}$

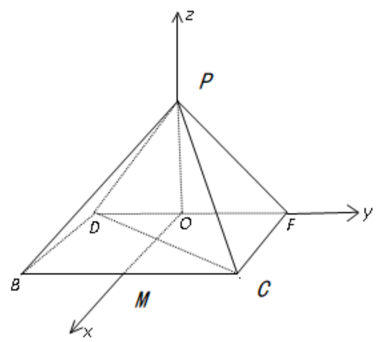
又$\because PC=6$

$\therefore PD^2+DC^2=PC^2, \therefore PD\perp DC$ ....2 分

又$PD\perp BD$，$BD\cap DC=D$

$\therefore PD\perp$ 平面BDC.......................3 分

$\therefore PD\perp BC$ ....4 分



（II）方法一：

如图，过点 D 做$DF\ /\!/\ BC$，且 *DF=BC*，连接 *PF*，*CF*，

由题意可知，$BD\perp PD, BD\perp DF$，$PD\cap DF=D$

$\therefore BD\perp$ 平面PDF，$\therefore BD\perp PF$

所以$CF \perp PF$

$\therefore PF = \sqrt{PC^2 - CF^2} = 4$

又$BD \subset$ 平面$BCFD$，$\therefore$ 平面$BCFD \perp$ 平面PDF ....5 分

取 *DF* 中点 *O*，连接 *PO*，由 *PF=PD*，得$PO \perp DF$

$\therefore PO \perp$ 平面$BCFD$，且$PO = 2\sqrt{3}$ ....6 分

过 O 点作 OM 垂直于 DF,建立如图所示的空间直角坐标系，由题可得$P(0, 0, 2\sqrt{3})$，

$B(2, -2, 0)$，$C(2, 2, 0)$，$D(0, -2, 0)$

$\therefore \overrightarrow{PC} = (2, 2, -2\sqrt{3})$, $\overrightarrow{DC} = (2, 4, 0)$, $\overrightarrow{BC} = (0, 4, 0)$，.....................8 分

设平面 *PBC* 的法向量为$\boldsymbol{m} = (x, y, z)$，平面 *PDC* 的法向量为$\boldsymbol{n} = (x', y', z')$

$\therefore \begin{cases} x + y - \sqrt{3}z = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ 取$\boldsymbol{m} = (\sqrt{3}, 0, 1)$

同理$\begin{cases} x' + y' - \sqrt{3}z' = 0 \\ x' + 2y' = 0 \end{cases}$ 取$\boldsymbol{n} = (2\sqrt{3}, -\sqrt{3}$, ...10 分

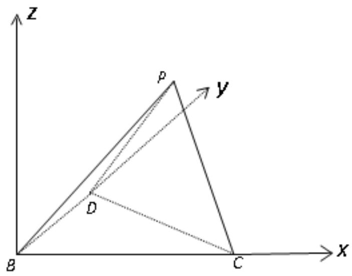
$\therefore \cos\langle \boldsymbol{m}, \boldsymbol{n} \rangle = \dfrac{\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|} = \dfrac{7}{8}$

所以平面 *PDC* 与平面 *PBC* 夹角的余弦值为$\dfrac{7}{8}$.........................12 分

方法二：由$BD \perp BC$,建立如图所示的空间直角坐标系

$\because AD = 2BD = 4$

$\therefore B(0, 0, 0)$，$C(4, 0, 0)$，$D(0, 2, 0)$



设$P(x, y, z)$（其中$z > 0$） ....5 分

$\because PB = 2\sqrt{5}, PC = 2\sqrt{5}, PD = 4$

$\therefore \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 20 \\ (x-4)^2 + y^2 + z^2 = 20 \\ x^2 + (y-2)^2 + z^2 = 16 \end{cases}$.............................6 分

解得$\begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \\ z = 2\sqrt{3} \end{cases}$

$\therefore\ P\left(2, 2, 2\sqrt{3}\right)$

$\therefore\ \overrightarrow{CP} = \left(-2, 2, 2\sqrt{3}\right), \overrightarrow{CD} = \left(-4, 2, 0\right), \overrightarrow{BP} = \left(2, 2, 2\sqrt{3}\right), \overrightarrow{BC} = \left(4, 0, 0\right)$

..............................8 分

设平面 *PDC* 的法向量为$\boldsymbol{m} = (x, y, z)$，平面 *PBC* 的法向量为$\boldsymbol{n} = (x', y', z')$

$\therefore\ \begin{cases} -x + y + \sqrt{3}z = 0 \\ -2x + y = 0 \end{cases}$ 取$\boldsymbol{m} = \left(1, 2, -\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$

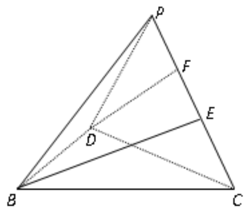
同理$\begin{cases} x' + y' + \sqrt{3}z' = 0 \\ x' = 0 \end{cases}$ 取$\boldsymbol{n} = \left(0, -\sqrt{3}, 1\right)$....................................10 分

$\therefore\ \cos\langle \boldsymbol{m}, \boldsymbol{n}\rangle = \dfrac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|} = -\dfrac{7}{8}$

所以平面 *PDC* 与平面 *PBC* 夹角的余弦值为$\dfrac{7}{8}$....................................12 分

方法三：

过点 B 作 $BE \perp PC$ 交 PC 于 E，过点 D 作 $DF \perp PC$交PC于F..............................5 分



ΔPDC中，由$PD = 4, PC = DC = 2\sqrt{5}$

可得$\cos\angle DPF = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$ $\therefore\ DF = \dfrac{8\sqrt{5}}{5}, PF = \dfrac{4\sqrt{5}}{5}$

同理，在ΔPBC中，$BE = \dfrac{8\sqrt{5}}{5}, CE = \dfrac{4\sqrt{5}}{5}$,可得$EF = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.......................7 分

而$\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FD} = \overrightarrow{BD}$..............................9 分

$\therefore\ \left(\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FD}\right)^2 = \overrightarrow{BD}^2$

$\therefore\ \left|\overrightarrow{BE}\right|^2 + \left|\overrightarrow{EF}\right|^2 + \left|\overrightarrow{FD}\right|^2 + 2\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{EF} + 2\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{FD} + 2\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{FD} = \left|\overrightarrow{BD}\right|^2$........10 分

即$\dfrac{64}{5} + \dfrac{4}{5} + \dfrac{64}{5} + 2\times\dfrac{8\sqrt{5}}{5}\times\dfrac{8\sqrt{5}}{5}\times\cos\langle\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{FD}\rangle = 4$

解得 $\cos\langle\overrightarrow{BE},\overrightarrow{FD}\rangle=\dfrac{\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{FD}}{|\overrightarrow{BE}||\overrightarrow{FD}|}=-\dfrac{7}{8}$

所以平面 *PDC* 与平面 *PBC* 夹角的余弦值为 $\dfrac{7}{8}$……………………………12 分

21.解：(I) $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，

当 $a=1$ 时， $f'(x)=2e^{2x+1}-2e^{x+1}+\dfrac{1}{2}e^{x}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}(e^{x}-1)(4e^{x+1}+1)$，………………2 分

令 $f'(x)=0$, 解得 $x=0$.

当 x 变化时， $f'(x), f(x)$ 的变化情况如表：

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,+\infty)$
$f'(x)$	−	0	+
$f(x)$	单调递减	$\dfrac{1}{2}-e$	单调递增

………………4 分

因此，当 $x=0$ 时, $f(x)$ 有极小值，极小值为 $f(0)=\dfrac{1}{2}-e$.　　　………………5 分

(2) $f'(x)=2ae^{2x+1}-2e^{x+1}+\dfrac{a}{2}e^{x}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}(ae^{x}-1)(4e^{x+1}+1)$，………………6 分

(i) 若 $a\le 0$，则 $f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 单调递减,

$f(x)$ 至多有一个零点. ………………7 分

(ii) 若 $a>0$，令 $f'(x)=0$，解得 $x=-\ln a$.

当 $x\in(-\infty,-\ln a)$ 时， $f'(x)<0$；当 $x\in(-\ln a,+\infty)$ 时， $f'(x)>0$，

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,-\ln a)$ 单调递减，在 $(-\ln a,+\infty)$ 单调递增.

所以当 $x=-\ln a$ 时， $f(x)$ 取得最小值，最小值为 $f(-\ln a)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{e}{a}+\dfrac{1}{2}\ln a$.………9 分

①当 $a=e$ 时，由于 $f(-\ln a)=0$，故 $f(x)$ 只有一个零点；

②当 $a\in(e,+\infty)$ 时，由于 $\dfrac{1}{2}-\dfrac{e}{a}+\dfrac{1}{2}\ln a>0$，即 $f(-\ln a)>0$，故 $f(x)$ 没有零点；

………………10 分

③当 $a\in(0,e)$ 时，$\frac{1}{2}-\frac{e}{a}+\frac{1}{2}\ln a<0$，即 $f(-\ln a)<0$.

当$0<a<e$时,$\ln a<1,-\ln a>-1>-2,$ 且 $f(-2)=\frac{a}{e^3}+\frac{a}{2e^2}+1-\frac{2}{e}>0$，故 $f(x)$ 在

$(-\infty,-\ln a)$ 有一个零点.

$\because f(\ln\frac{2e}{a})=\frac{4e^3-4e^2}{a}+e-\frac{1}{2}\ln\frac{2e}{a}$，$\ln\frac{2e}{a}>-\ln a$

先证明当$x>0$时,$\ln x\le x-1$，设$m(x)=\ln x-(x-1),$则$m'(x)=\frac{1-x}{x},$

$\because$ 当$0<x<1$时,$m'(x)>0$，当$x>1$时,$m'(x)<0,$

$\therefore m(x)$在（0,1）上单调递增，在（$1,+\infty$）上单调递减.

$\therefore$ 当$x=1$时$m(x)$取到最大值$m(1)=0.$

所以当$x>0$时,$\ln x\le x-1$.

$$\therefore f(\ln\frac{2e}{a})=\frac{4e^3-4e^2}{a}+e-\frac{1}{2}\ln\frac{2e}{a}\ge\frac{4e^3-4e^2}{a}+e-\frac{1}{2}(\frac{2e}{a}-1)=\frac{4e^3-4e^2-e}{a}+e+\frac{1}{2}>0$$

因此 $f(x)$ 在 $(-\ln a,+\infty)$ 有一个零点.

综上，a 的取值范围为 $(0,e)$.　　　　　　　　　　　　………………12 分

22.解：(I) 设 $A(x_0,y_0),B(x_0',y_0')$

由题意可知，P 点坐标为 $\left(\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right)$，则直线 l_2 的斜率为 $k_{l_2}=-\frac{1}{2}$，所以直线 l_1 的斜率为

$k_{l_1}=2$，

故直线 l_1 的方程为：$y=2(x-2)$；……………………………………………………………1 分

联立直线 l_1 和曲线 Γ 的方程：$\begin{cases}y=2(x-2)\\ x^2-\frac{y^2}{3}=1\end{cases}\Rightarrow x^2-16x+19=0$，此方程的两根即为

x_0,x_0'，

由韦达定理可得：$x_0+x_0'=16,x_0x_0'=19$①……………………………………………3 分

所以：$\left|AB\right|=\sqrt{1+k^2}\sqrt{\left(x_0+x_0'\right)^2-4x_0x_0'}=30$……………………………………………………………4 分

（II）设 $A\left(x_0,y_0\right),M\left(x_1,y_1\right),N\left(-x_1,-y_1\right)$，则 $k_1=\dfrac{y_0}{x_0-2}$，因为直线 l_2 垂直直线 l_1，故 l_2 的直线方程为 $y=-\dfrac{1}{k_1}\left(x-2\right)$，代入 $x=\dfrac{1}{2}$，可得点 P 的坐标 $P\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{2k_1}\right)$，

所以：$k_2=\dfrac{\dfrac{3}{2k_1}-y_0}{\dfrac{1}{2}-x_0}=\dfrac{\dfrac{3\left(x_0-2\right)}{2y_0}-y_0}{\dfrac{1}{2}-x_0}=\dfrac{3x_0-6-2y_0^2}{\left(1-2x_0\right)y_0}$，……………………………………………………5 分

因为点 $A\left(x_0,y_0\right)$ 在双曲线上，故 x_0,y_0 满足双曲线方程，即 $x_0^2-\dfrac{y_0^2}{3}=1\Rightarrow y_0^2=3x_0^2-3$。

所以 $k_2=\dfrac{3x_0-6-2y_0^2}{\left(1-2x_0\right)y_0}=\dfrac{3x_0}{y_0}$，……………………………………………………6 分

所以 $k_1+k_2=\dfrac{y_0}{x_0-2}+\dfrac{3x_0}{y_0}=\dfrac{y_0^2+3x_0\left(x_0-2\right)}{\left(x_0-2\right)y_0}=\dfrac{6x_0^2-6x_0-3}{\left(x_0-2\right)y_0}$；

$k_1k_2=\dfrac{y_0}{x_0-2}\cdot\dfrac{3x_0}{y_0}=\dfrac{3x_0}{x_0-2}$……………………………………………………7 分

又直线 OP 的斜率 $k_{OP}=\dfrac{y_P}{x_P}=\dfrac{3}{k_1}$，联立直线 OP 与双曲线 C 的方程：

$$\begin{cases}y=\dfrac{3}{k_1}x\\x^2-\dfrac{y^2}{3}=1\end{cases}\Rightarrow\left(k_1^2-3\right)x^2-k_1^2=0,$$

此方程的两根即为 $x_1,-x_1$，所以 $x_1^2=\dfrac{k_1^2}{k_1^2-3}=\dfrac{y_0^2}{12x_0-15}$，…………………………………………8 分

所以

$$k_3+k_4=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}+\frac{-y_1-y_0}{-x_1-x_0}=\frac{2x_1y_1-2x_0y_0}{x_1^2-x_0^2}=\frac{\dfrac{6}{k_1}x_1^2-2x_0y_0}{x_1^2-x_0^2}=\frac{\dfrac{6\left(x_0-2\right)y_0}{12x_0-15}-2x_0y_0}{\dfrac{y_0^2}{12x_0-15}-x_0^2}$$

$$=\frac{-12y_0\left(2x_0^2-3x_0+1\right)}{y_0^2-\left(12x_0-15\right)x_0^2}=\frac{-12y_0\left(2x_0^2-3x_0+1\right)}{-3\left(4x_0^3-6x_0^2+1\right)}=\frac{4y_0\left(2x_0-1\right)\left(x_0-1\right)}{\left(2x_0-1\right)\left(2x_0^2-2x_0-1\right)}$$

即：$k_3+k_4=\dfrac{4y_0\left(x_0-1\right)}{2x_0^2-2x_0-1}$ ……………………………………………………10 分

所以：$\left(k_3+k_4\right)\left(k_1+k_2\right)=\dfrac{12\left(x_0-1\right)}{x_0-2}=2k_1k_2+6$ ，

即：$v=\dfrac{1}{2}uw-3$ ……………………………………………………12 分