2023 年高三二模参考答案

数　学

本试卷 4 页，满分 150 分。考试时间 120 分钟。

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．选 D．
2．选 C．
3．选 B．
4．选 B．
5．选 A．
6．选 D．
7．选 B．
8．选 C．

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9.【答案】选 BCD　　10.【答案】选 ABC　　11.【答案】选 BD　　12.【答案】选 ABD.

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13.【答案】$\dfrac{21}{2}$　　14.【答案】$2\sqrt{3}$　　15.【答案】20　　16.【答案】$\dfrac{13}{3}$.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.（10 分）

已知等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，若$a_1=1$，且a_1,a_2,S_3成等比数列.

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）设$b_n=\dfrac{1}{4S_n-1}$，求数列$\{b_n\}$的前n项和T_n.

【解析】（1）设数列$\{a_n\}$的公差为d，由a_1,a_2,S_3成等比数列，

得$a_1\cdot S_3={a_2}^2$即$3+3d=(1+d)^2$，解得$d=2$或-1，

当$d=-1$时$a_2=0$不合题意，所以$d=2$，即$a_n=2n-1$；（5 分）

（2）由（1）得$S_n=n^2$所以$b_n=\dfrac{1}{4n^2-1}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}\right)$

所以$T_n=\dfrac{1}{2}\left[\left(\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{3}\right)+\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}\right)\right]=\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{2n+1}\right)=\dfrac{n}{2n+1}$.（10 分）

18.（12 分）

在$\triangle ABC$中，角A,B,C所对的边分别为a,b,c，且$2\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}+3\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{CA}\times\overrightarrow{CB}$.

（1）求$\dfrac{b}{c}$；

（2）已知$B=\dfrac{\pi}{4}$，$a=2$，求$\triangle ABC$的面积.

【解析】（1）由题设得$2bc\cos A+3ac\cos B=ab\cos C$，

由余弦定理，$2bc\times\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+3ac\times\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=ab\times\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$，

整理得 $b^2=3c^2$，所以 $\frac{b}{c}=\sqrt{3}$．（6 分）

（2）由（1）知 $b=\sqrt{3}c$，由余弦定理得 $(\sqrt{3}c)^2=c^2+4-2\times 2\times c\cos\frac{\pi}{4}$，解得 $c=\frac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{2}$，

故△ABC 的面积为 $\frac{1}{2}2c\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}c=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$．（12 分）

19．（12 分）

大气污染物 $PM_{2.5}$（大气中直径小于或等于 2.5 μm 的颗粒物）的浓度超过一定的限度会影响人的身体健康．为了研究 $PM_{2.5}$ 的浓度是否受到汽车流量等因素的影响，研究人员选择了 24 个社会经济发展水平相近的城市，在每个城市选择一个交通点建立监测点，统计每个监测点 24 h 内过往的汽车流量（单位：千辆），同时在低空相同的高度测定每个监测点空气中 $PM_{2.5}$ 的平均浓度（单位：μg/m^3），得到的数据如下表：

城市编号	汽车流量	$PM_{2.5}$ 浓度	城市编号	汽车流量	$PM_{2.5}$ 浓度
1	1.30	66	11	1.82	135
2	1.44	76	12	1.43	99
3	0.78	21	13	0.92	35
4	1.65	170	14	1.44	58
5	1.75	156	15	1.10	29
6	1.75	120	16	1.84	140
7	1.20	72	17	1.11	43
8	1.51	120	18	1.65	69
9	1.20	100	19	1.53	87
10	1.47	129	20	0.91	45

（1）根据上表，若 24 h 内过往的汽车流量大于等于 1500 辆属于车流量大，$PM_{2.5}$ 大于等于 75 μg/m^3 属于空气污染．请结合表中的数据，依据小概率值 $\alpha=0.05$ 的独立性检验，能否认为车流量大小与空气污染有关联？

（2）设 $PM_{2.5}$ 浓度为 y，汽车流量为 x．根据这些数据建立 $PM_{2.5}$ 浓度关于汽车流量的线性回归模型，并求出对应的经验回归方程（系数精确到 0.01）．

附：$\chi^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，

α	0.100	0.050	0.010
x_α	2.706	3.841	6.635

$\sum_{i=1}^{20}x_i=27.8$，$\sum_{i=1}^{20}y_i=1770$，$\sum_{i=1}^{20}x_i^2=40.537$，$\sum_{i=1}^{20}y_i^2=193694$，$\sum_{i=1}^{20}x_iy_i=2680.48$．

在经验回归方程 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$ 中，$\begin{cases}\hat{b}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}\\ \hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}\end{cases}$．

【解析】（1）由题知，列二联表，如下图

	汽车流量大于等于 1500 辆	汽车流量小于 1500 辆	合计

$PM_{2.5}$ 大于等于 75	7	4	11
$PM_{2.5}$ 小于 75	1	8	9
合计	8	12	20

$\chi^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}=\dfrac{20\times(7\times8-4\times1)^2}{11\times9\times8\times12}\approx 5.69>3.841$，

依据小概率值 $\alpha=0.05$ 的独立性检验，可以认为车流量大小与空气污染有关联．（5 分）

（2）由题知，$\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{20}x_iy_i-20\overline{x}\overline{y}}{\sum\limits_{i=1}^{20}x_i^2-n\overline{x}^2}=\dfrac{2680.48-20\times\dfrac{27.8}{20}\times\dfrac{1770}{20}}{40.537-20\times(\dfrac{27.8}{20})^2}\approx116.19$，

$\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\cdot\overline{x}=\dfrac{1770}{20}-116.19\times\dfrac{27.8}{20}\approx-73.00$，

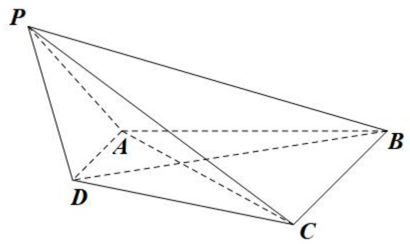
故 $PM_{2.5}$ 浓度关于汽车流量的经验回归方程为 $\hat{y}=116.19x-73.00$．（12 分）

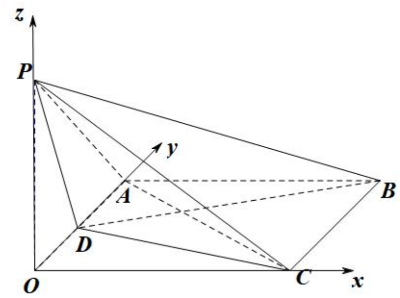
20．（12 分）

如图，已知四棱锥 $P-ABCD$ 中，平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$，底面 $ABCD$ 是直角梯形，$AD//BC$，$\angle DAB=90^\circ$，$AB=BC=4$，$PA=PC=5$．

（1）求证：$PB\perp AC$；

（2）若平面 $PBD\perp$ 平面 PBC，且 $\triangle PAD$ 中，AD 边上的高为 3，求 AD 的长．





【解析】（1）设线段 AC 中点为 E，连接 BE，PE，

由 $AB=BC$ 及 $PA=PC$ 得 $BE\perp AC$ 且 $PE\perp AC$，又 $BE\cap PE=E$，所以 $AC\perp$ 平面 PBE，

又 $PB\subset$ 平面 PBE，所以 $PB\perp AC$．（5 分）

（2）过点 P 作 PO 垂直直线 AD 于点 O，则 $PO=3$，

因为平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$，平面 $PAD\cap$ 平面 $ABCD=AD$，$PO\perp AD$ 及 $PO\subset$ 平面 PAD，所以 $PO\perp$ 平面 $ABCD$，

连接 OC，由 $PA=PC=5$，$PO=3$，易知 $OA=OC=4$，所以四边形 $ABCO$ 是菱形，

因为 $\angle DAB=90^\circ$，所以四边形 $ABCO$ 是正方形，且 OA,OC,OP 两两互相垂直，

以 O 为空间直角坐标系原点，分别以 OC，OA，OP 方向为 x 轴正半轴，y 轴正半轴，z 轴正半轴，建立如图空间直角坐标系．

设 $OD=a$，则 $P(0,0,3)$，$D(0,a,0)$，$B(4,4,0)$，$C(4,0,0)$，

即 $\overrightarrow{PD}=(0,a,-3)$，$\overrightarrow{PB}=(4,4,-3)$，$\overrightarrow{BC}=(0,-4,0)$，$\overrightarrow{PC}=(4,0,-3)$，

设平面 PBD 的法向量为 $\vec{m}=(x_1,y_1,z_1)$，则 $\vec{m}\cdot\overrightarrow{PD}=0$，$\vec{m}\cdot\overrightarrow{PB}=0$，得 $x_1=\dfrac{a-4}{4}y_1$，$z_1=\dfrac{a}{3}y_1$；不妨取 $y_1=1$，则 $\vec{m}=\left(\dfrac{a-4}{4},1,\dfrac{a}{3}\right)$，同理可得平面 PBC 的一个法向量 $\vec{n}=\left(1,0,\dfrac{4}{3}\right)$，

由平面 $PBD\perp$ 平面 PBC 得 $\vec{m}\cdot\vec{n}=0$，所以 $a=\dfrac{36}{25}$，即 $AD=4-\dfrac{36}{25}=\dfrac{64}{25}$.　　（12 分）

21.（12 分）

已知双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0，b>0)$ 的焦距为 $2\sqrt{3}$，离心率 $e=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

（1）求双曲线 C 的方程；

（2）设 P,Q 为双曲线 C 上异于点 M $(\sqrt{2}a,b)$ 的两动点，记直线 MP,MQ 的斜率分别为 k_1，k_2，若 $k_1+k_2=2k_1k_2$，求证：直线 PQ 过定点.

【解析】（1）由题意知 $2c=2\sqrt{3}$，$\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$，$c^2=a^2+b^2$，解得 $a=\sqrt{2},b=1$，

所以双曲线 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{2}-y^2=1$.　　（4 分）

（2）由题意可知直线 PQ 斜率存在，设其方程为 $y=kx+m$，与 $\dfrac{x^2}{2}-y^2=1$ 联立，

得 $(1-2k^2)x^2-4kmx-2m^2-2=0$，设 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，

则 $x_1+x_2=\dfrac{4km}{1-2k^2},x_1x_2=\dfrac{-2m^2-2}{1-2k^2}$，　　（6 分）

由 $k_1+k_2=2k_1k_2$ 得 $\dfrac{y_1-1}{x_1-2}+\dfrac{y_2-1}{x_2-2}=2\dfrac{y_1-1}{x_1-2}\times\dfrac{y_2-1}{x_2-2}$，

即 $\dfrac{(y_1-1)(x_2-2)+(x_1-2)(y_2-1)}{(x_1-2)(x_2-2)}=\dfrac{2(y_1-1)(y_2-1)}{(x_1-2)(x_2-2)}$，

即 $(kx_1+m-1)(x_2-2)+(x_1-2)(kx_2+m-1)=2(kx_1+m-1)(kx_2+m-1)$，

即 $2kx_1x_2+(m-1)(x_1+x_2)-2k(x_1+x_2)-4(m-1)=2k^2x_1x_2+2k(m-1)(x_1+x_2)-2(m-1)^2$，

将 $x_1+x_2=\dfrac{4km}{1-2k^2},x_1x_2=\dfrac{-2m^2-2}{1-2k^2}$ 代入上式并整理得 $m^2+2k+2km-1=0$，　　（9 分）

即 $(m+1)(m-1+2k)=0$，故 $m=-1$ 或 $m=1-2k$.

当 $m=-1$ 时，直线 PQ 方程为 $y=kx-1$ 过定点 $(0,-1)$；

当 $m=1-2k$ 时，直线 PQ 方程为 $y=k(x-2)+1$ 过点 M 与题意矛盾.

综上，直线 PQ 过定点 $(0,-1)$.　　（12 分）

22.（12 分）

已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}+2\ln x$.

（1）求函数 $g(x)=f(x)-x$ 的零点；

（2）证明：对于任意的正实数 k，存在 $x_0>0$，当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，恒有 $k\sqrt{x}>f(x)$.

【解析】（1）由题，$g(x)=\frac{1}{x}+2\ln x-x$，定义域为$(0,+\infty)$，

因为$g'(x)=-\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x}-1=-(\frac{1}{x}-1)^2\le 0$，所以函数$g(x)$在区间$(0,+\infty)$上单调递减. （3 分）

又$g(1)=0$，故函数$g(x)$的零点为1. （5 分）

（2）由（1）可知$x>1$时，$g(x)<0$，即$2\ln x<x-\frac{1}{x}(x>1)$，

因此$\ln x=2\ln\sqrt{x}<\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}<\sqrt{x}(x>1)$，进而$\ln x=2\ln\sqrt{x}<2\sqrt{\sqrt{x}}=2\sqrt[4]{x}(x>1)$.

注意到，当$k>0$时，$\frac{k}{2}\sqrt{x}>\frac{1}{x}$等价于$x>(\frac{2}{k})^{\frac{2}{3}}$，$\frac{k}{2}\sqrt{x}>4\sqrt[4]{x}$等价于$x>(\frac{8}{k})^4$，

于是，对于任意的正实数k，取$x_0=\max\{(\frac{2}{k})^{\frac{2}{3}},(\frac{4}{k})^4,1\}$，则当$x\in(x_0,+\infty)$时，有

$k\sqrt{x}=\frac{k}{2}\sqrt{x}+\frac{k}{2}\sqrt{x}>\frac{1}{x}+4\sqrt[4]{x}>\frac{1}{x}+2\ln x=f(x)$，即证. （12 分）