参考答案及解析

一、选择题

1. D 2. A 3. C 4. C 5. C 6. D 7. C 8. A

二、选择题

9. AB 10. BC 11. BCD 12. ABD

三、填空题

13. 70

14. $\left[\frac{9}{2},9\right]$

15. 9

16. $\frac{e}{4}$

四、解答题

17. **解**：(1)因为$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{5n-4}{1+5n}$，$a_1=1$，

所以当 $n\geqslant 2$ 时，$\frac{a_1}{a_2}=\frac{1}{6}$，$\frac{a_2}{a_3}=\frac{6}{11}$，$\frac{a_3}{a_4}=\frac{11}{16}$，…，$\frac{a_{n-1}}{a_n}=\frac{5n-9}{5n-4}$，（2 分）

所以当 $n\geqslant 2$ 时，$\frac{a_1}{a_n}=\frac{a_1}{a_2}\times\frac{a_2}{a_3}\times\frac{a_3}{a_4}\times\cdots\times\frac{a_{n-1}}{a_n}=\frac{1}{6}\times\frac{6}{11}\times\frac{11}{16}\times\cdots\times\frac{5n-9}{5n-4}=\frac{1}{5n-4}$，所以 $a_n=5n-4$；（4 分）

当 $n=1$ 时，$a_1=1$ 满足上式，

所以 $a_n=5n-4(n\in\mathbf{N}^*)$.（5 分）

(2)由(1)可得 $b_n=\frac{1}{(a_n+4)(a_n+14)}=\frac{1}{5n\times(5n+10)}=\frac{1}{50}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$，（7 分）

所以 $T_n=\frac{1}{50}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{50}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{50}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\frac{1}{50}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{1}{50}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{3n^2+5n}{100(n+1)(n+2)}$.（10 分）

18. (1)**证明**：在$\triangle ABC$中，由 $a+b=2b\cos C$ 及正弦定理得 $\sin A=\sin B+2\sin B\cos C$，

又 $A=\pi-(B+C)$，

所以 $\sin A=\sin[\pi-(B+C)]=\sin(B+C)=\sin B\cos C+\cos B\sin C$，（2 分）

即 $\sin B\cos C+\cos B\sin C=\sin B+2\sin B\cos C$，（3 分）

$\sin B\cos C+\cos B\sin C-2\sin B\cos C=\sin B$，

所以 $\sin(C-B)=\sin B$.（4 分）

又 $C-B\in(-\pi,\pi)$，$B\in(0,\pi)$，

所以 $C-B=B$ 或$(C-B)+B=\pi$(舍)，

所以 $C=2B$.（6 分）

(2)**解**：由 $C=2B$ 得 $B+C=3B\in(0,\pi)$，

所以 $0<B<\frac{\pi}{3}$，所以$\frac{1}{2}<\cos B<1$，（7 分）

由题意 $a=b+2b\cos C$，$C=2B$ 及正弦定理得：

$\frac{a+c}{b}=\frac{b+2b\cos C+c}{b}=\frac{\sin B+2\sin B\cos C+\sin C}{\sin B}=\frac{\sin B+2\sin B\cos C+\sin 2B}{\sin B}=\frac{\sin B+2\sin B\cos C+2\sin B\cos B}{\sin B}=1+2\cos C+2\cos B=1+2\cos 2B+2\cos B=1+2(\cos^2 B-1)+2\cos B=4\cos^2 B+2\cos B-1=4\left(\cos B+\frac{1}{4}\right)^2-\frac{5}{4}$.（10 分）

因为$\frac{1}{2}<\cos B<1$，所以 $1<4\left(\cos B+\frac{1}{4}\right)^2-\frac{5}{4}<5$，

即 $1<\frac{a+c}{b}<5$，故$\frac{a+c}{b}$的取值范围为$(1,5)$.（12 分）

19. **解**：(1)设事件 A 为“核酸检测呈阳性”，事件 B 为“患疾病”.（1 分）

由题意可得 $P(A)=0.02$，$P(B)=0.003$，$P(A|B)=0.98$，（2 分）

由条件概率公式 $P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$得：$P(AB)=0.98\times 0.003$，

即 $P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{0.98\times 0.003}{0.02}=0.147$，（3 分）

故该居民可以确诊为新冠肺炎患者的概率为 14.7%.（4 分）

(2)设方案一中每组的检测次数为 X，则 X 的取值为 1，6，

$P(X=1)=(1-0.02)^5=0.98^5\approx 0.904$，

$P(X=6)=1-0.98^5\approx 0.096$，（6 分）

所以 X 的分布列为

X	1	6
P	0.904	0.096

所以 $E(X)\approx1\times0.904+6\times0.096=1.48$，

即方案一检测的总次数的期望为 $11\times1.48=16.28$.

（8 分）

设方案二中每组的检测次数为 Y，则 Y 的取值为 1，12，

$P(Y=1)=(1-0.2)^{11}\approx0.801$，

$P(Y=12)=1-0.801\approx0.199$，（9 分）

所以 Y 的分布列为

Y	1	12
P	0.801	0.199

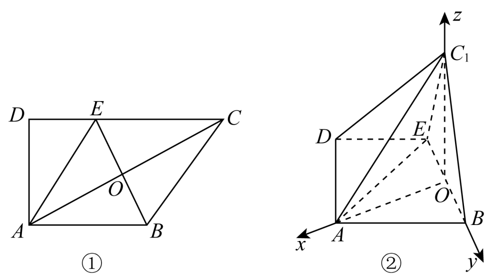
所以 $E(Y)\approx1\times0.801+12\times0.199=3.189$，

即方案二检测的总次数的期望为 $3.189\times5=15.945$.

（11 分）

由 $16.28>15.945$，则方案二的工作量更少.（12 分）

20.（1）**证明**：如图所示：



在图①中，连接 AC，交 BE 于 O，

因为四边形 $ABCE$ 是边长为 2 的菱形，且 $\angle BCE=60°$，

所以 $AC\perp BE$，且 $OA=OC=\sqrt{3}$，（1 分）

在图②中，相交直线 OA，OC_1 均与 BE 垂直，

所以 $\angle AOC_1$ 是二面角 A-BE-C_1 的平面角.（2 分）

因为 $AC_1=\sqrt{6}$，所以 $OA^2+OC_1^2=AC_1^2$，所以 $OA\perp OC_1$，（3 分）

所以平面 $BC_1E\perp$ 平面 $ABED$.（4 分）

（2）**解**：由（1）知，分别以直线 OA，OB，OC_1 为 x，y，z 轴建立如图②所示的空间直角坐标系，

则 $D\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{3}{2},0\right)$，$C_1(0,0,\sqrt{3})$，$A(\sqrt{3},0,0)$，$B(0,1,0)$，$E(0,-1,0)$，

所以 $\overrightarrow{DC_1}=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2},\sqrt{3}\right)$，$\overrightarrow{AD}=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{3}{2},0\right)$，

$\overrightarrow{AB}=(-\sqrt{3},1,0)$，$\overrightarrow{AC_1}=(-\sqrt{3},0,\sqrt{3})$，$\overrightarrow{AE}=(-\sqrt{3},-1,0)$.（6 分）

设 $\overrightarrow{DP}=\lambda\overrightarrow{DC_1}$，$\lambda\in[0,1]$，

则 $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DP}=\overrightarrow{AD}+\lambda\overrightarrow{DC_1}=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda,-\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\lambda,\sqrt{3}\lambda\right)$，（7 分）

设平面 ABC_1 的一个法向量 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\overrightarrow{AB}\cdot\boldsymbol{n}=0,\\\overrightarrow{AC_1}\cdot\boldsymbol{n}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-\sqrt{3}x+y=0,\\-\sqrt{3}x+\sqrt{3}z=0,\end{cases}$ 取 $\boldsymbol{n}=(1,\sqrt{3},1)$.

因为 P 到平面 ABC_1 的距离为 $\frac{\sqrt{15}}{5}$，

所以 $d=\frac{|\overrightarrow{AP}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}=\frac{|-2\sqrt{3}+2\sqrt{3}\lambda|}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{15}}{5}$，解得 $\lambda=\frac{1}{2}$，（9 分）

则 $\overrightarrow{AP}=\left(-\frac{3\sqrt{3}}{4},-\frac{3}{4},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，所以 $\overrightarrow{EP}=\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AE}=\left(\frac{\sqrt{3}}{4},\frac{1}{4},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.（10 分）

设直线 EP 与平面 ABC_1 所成的角为 θ，

所以 $\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{EP},\boldsymbol{n}\rangle|=\frac{|\overrightarrow{EP}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{EP}||\boldsymbol{n}|}=\frac{\sqrt{15}}{5}$.（12 分）

21.**解**：（1）由已知 $M(a,0)$，$N(0,b)$，$F_2(c,0)$，

$\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{MF_2}=(-a,b)\cdot(c-a,0)=a^2-ac=-1$，

（2 分）

因为 $\angle NMF_2=120°$，则 $\angle NMF_1=60°$，

所以 $b=\sqrt{3}a$，所以 $c=\sqrt{a^2+c^2}=2a$，（3 分）

解得 $a=1$，$b=\sqrt{3}$，所以 W 的方程为 $x^2-\frac{y^2}{3}=1$.

（4 分）

（2）直线 l 的斜率存在且不为 0，设直线 l：$y=kx-2$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

由 $\begin{cases}y=kx-2,\\x^2-\frac{y^2}{3}=1,\end{cases}$ 得 $(3-k^2)x^2+4kx-7=0$，

则$\begin{cases}3-k^2\neq 0,\\ \Delta=16k^2+28(3-k^2)>0,\\ x_1+x_2=\dfrac{4k}{k^2-3}>0,\\ x_1x_2=\dfrac{7}{k^2-3}>0,\end{cases}$

解得$\sqrt{3}<k<\sqrt{7}$.① (6分)

因为点 $H(7,0)$在以线段 AB 为直径的圆的外部,则$\overrightarrow{HA}\cdot\overrightarrow{HB}>0$,

$\overrightarrow{HA}\cdot\overrightarrow{HB}=(x_1-7,y_1)\cdot(x_2-7,y_2)=(x_1-7)\cdot(x_2-7)+y_1y_2=(1+k^2)x_1x_2-(7+2k)(x_1+x_2)+53=(1+k^2)\cdot\dfrac{7}{k^2-3}-(7+2k)\cdot\dfrac{4k}{k^2-3}+53=\dfrac{7k^2+7-8k^2-28k+53k^2-159}{k^2-3}>0$,

解得 $k>2$.②

由①②得实数 k 的范围是 $2<k<\sqrt{7}$. (8分)

由 $\lambda=\dfrac{S_{\triangle AQH}}{S_{\triangle BQH}}=\dfrac{|AQ|}{|BQ|}$,因为 B 在 A,Q之间,

则$\overrightarrow{QA}=\lambda\overrightarrow{QB}$,且 $\lambda>1$,

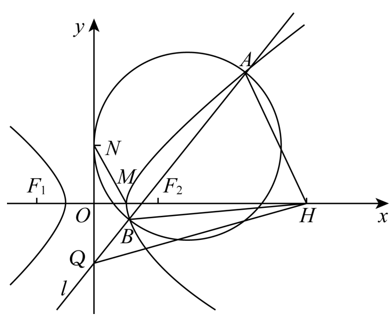
所以$(x_1,y_1+2)=\lambda(x_2,y_2+2)$,则 $x_1=\lambda x_2$, (9分)

所以$\begin{cases}(1+\lambda)x_2=\dfrac{4k}{k^2-3},\\ \lambda x_2^2=\dfrac{7}{k^2-3},\end{cases}$则$\dfrac{(1+\lambda)^2}{\lambda}=\dfrac{16}{7}\cdot\dfrac{k^2}{k^2-3}=\dfrac{16}{7}\left(1+\dfrac{3}{k^2-3}\right)$, (10分)

因为 $2<k<\sqrt{7}$,所以 $4<\dfrac{(1+\lambda)^2}{\lambda}<\dfrac{64}{7}$,

又 $\lambda>1$,所以 $1<\lambda<7$.

故 λ 的取值范围是$(1,7)$. (12分)



22.(1)**解**:$f'(x)=\dfrac{\lambda}{\lambda x+1}-\lambda+x=\dfrac{\lambda x\left[x-\left(\lambda-\dfrac{1}{\lambda}\right)\right]}{\lambda x+1}$, (1分)

若 $\lambda-\dfrac{1}{\lambda}\leqslant 0$,即 $0<\lambda\leqslant 1$,$f'(x)>0$,$f(x)$在区间$(0,+\infty)$单调递增,故 $f(x)>f(0)=0$,满足条件; (2分)

若 $\lambda-\dfrac{1}{\lambda}>0$,即 $\lambda>1$,当 $x\in\left(0,\lambda-\dfrac{1}{\lambda}\right)$时,$f'(x)<0$,$f(x)$单调递减,则 $f(x)<f(0)=0$,矛盾,不符合题意. (3分)

综上,λ 的取值范围为$(0,1]$. (4分)

(2)**证明**:先证右侧不等式,如下:

由(1)可得:当 $\lambda=1$ 时,有 $f(x)=\ln(x+1)-x+\dfrac{x^2}{2}>0$,

则 $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\ln\left(\dfrac{1}{x}+1\right)-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2x^2}>0$,

即 $\ln(x+1)-\ln x>\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{2x^2}$,

即 $2\ln(x+1)-2\ln x>\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{x^2}$, (6分)

则有$[2\ln(n+1)-2\ln n]+[2\ln n-2\ln(n-1)]+\cdots+(2\ln 2-2\ln 1)>\dfrac{2}{n}-\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n-1}-\dfrac{1}{(n-1)^2}+\cdots+\dfrac{2}{1}-\dfrac{1}{1^2}=\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\dfrac{2}{i}-\dfrac{1}{i^2}\right)$,

即 $2\ln(n+1)>\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\dfrac{2}{i}-\dfrac{1}{i^2}\right)$,右侧不等式得证. (7分)

下证左侧不等式,如下:

构建 $g(x)=\ln(x+1)-x(x>0)$,

则 $g'(x)=-\dfrac{x}{x+1}<0$ 在$(0,+\infty)$上恒成立,

故 $g(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减,则 $g(x)<g(0)=0$,

即 $\ln(x+1)<x(x>0)$,可得 $\ln\left(\dfrac{1}{x}+1\right)<\dfrac{1}{x}$,

即 $\ln(x+1)-\ln x<\dfrac{1}{x}$, (8分)

则有$[\ln(n+1)-\ln n]+[\ln n-\ln(n-1)]+\cdots+(\ln 2-\ln 1)<\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n-1}+\cdots+\dfrac{1}{1}$,

即 $\ln(n+1)<\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n-1}+\cdots+\dfrac{1}{1}$,

因为$\dfrac{1}{n^2}=\dfrac{4}{4n^2}<\dfrac{4}{4n^2-1}=2\left(\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}\right)$,

则$\dfrac{1}{1^2}+\dfrac{1}{2^2}+\cdots+\dfrac{1}{n^2}<1+2\times\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}+\cdots+\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}\right)<\dfrac{5}{3}$, (10分)

故 $2\ln(n+1)-\dfrac{5}{3}<2\left(\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n-1}+\cdots+\dfrac{1}{1}\right)-\left(\dfrac{1}{1^2}+\dfrac{1}{2^2}+\cdots+\dfrac{1}{n^2}\right)=\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\dfrac{2}{i}-\dfrac{1}{i^2}\right)$,左侧得证. (11分)

综上所述,不等式 $2\ln(n+1)-\dfrac{5}{3}<\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\dfrac{2}{i}-\dfrac{1}{i^2}\right)<2\ln(n+1)$成立. (12分)