张家口市 2023 年高三年级第二次模拟考试

数学参考答案

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	C	D	C	D	A	B	C	D	ABC	BC	AB	BC

1. C　**解析**：由题意可得 $A=(2,4)$，$B=(-\infty,3)$，于是，$A\cap B=(2,3)$，因此 $(\complement_{\mathbf{R}}A)\cup(\complement_{\mathbf{R}}B)=\complement_{\mathbf{R}}(A\cap B)=(-\infty,2]\cup[3,+\infty)$. 故选 C.

[命题意图] 本题考查集合的运算及简单不等式的解法，考查学生的数学运算素养.

2. D　**解析**：由题意可得 $z=1-\mathrm{i}$，于是，$\dfrac{1+\mathrm{i}}{z}=\dfrac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}=\mathrm{i}$，故 $\left(\dfrac{1+\mathrm{i}}{z}\right)^3=\mathrm{i}^3=-\mathrm{i}$. 故选 D.

[命题意图] 本题考查复数的几何意义以及复数的除法、乘方运算，考查学生的数学运算素养.

3. C　**解析**：利用圆心距 d 和半径 $r=\sqrt{2}$ 的关系来确定直线与圆的位置关系. 由题意可得 $x_0^2+y_0^2=2$，于是 $d=\dfrac{2}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}=\dfrac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}=r$，所以，两者相切. 故选 C.

[命题意图] 本题考查直线与圆的位置关系的判定，考查学生的数学运算和逻辑推理素养.

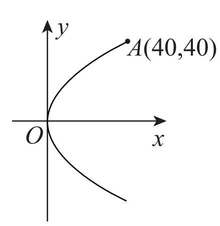
4. D　**解析**：由向量数量积的性质可得 $|2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2=(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2=4\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2-4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$. 于是，$-4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2$，即 $\dfrac{3}{2}x\cdot(-1)+\dfrac{1}{2}x=-\dfrac{1}{2}$，所以，$x=\dfrac{1}{2}$. 故选 D.

[命题意图] 本题考查向量的运算及数量积的性质，考查学生的逻辑推理和数学运算素养.

5. A　**解析**：设地球的公转周期为 $5T$，则火星的公转周期为 $9T$. 设地球、火星运行轨道的半长轴分别为 m，n，则 $\dfrac{m^3}{25T^2}=\dfrac{n^3}{81T^2}$，于是，$\dfrac{m}{n}=\sqrt[3]{\dfrac{25}{81}}$. 故选 A.

[命题意图] 本题考查函数建模、分数指数幂与根式的互化以及阅读理解能力，考查学生的数学运算和数学建模素养.

6. B　**解析**：在纵断面内，以反射镜的顶点（即抛物线的顶点）为坐标原点，过顶点垂直于灯口直径的直线为 x 轴，建立直角坐标系，如图，由题意可得 $A(40,40)$. 设抛物线的标准方程为 $y^2=2px(p>0)$，于是 $40^2=2p\cdot 40$，解得 $p=20$. 所以，抛物线的焦点到顶点的距离为 $\dfrac{p}{2}=10$，即光源到反射镜顶点的距离为 10 cm. 故选 B.



[命题意图] 本题考查抛物线的标准方程和几何性质，考查学生阅读理解和将实际问题数学化能力.

7. C　**解析**：根据欧拉函数的定义可得 $a_1=\varphi(2)=1$，$a_2=\varphi(2^2)=2$，$a_3=\varphi(2^3)=4$，$a_4=\varphi(2^4)=8$，一般地，$a_n=\varphi(2^n)=2^{n-1}$. 事实上，$\varphi(2^n)$ 表示从 1 到 2^n 的正整数中，与 2^n 互质的正整数的个数，相当于去掉从 1 到 2^n 的正整数中所有 2 的倍数的个数（共 2^{n-1} 个数），因此，$a_n=\varphi(2^n)=2^n-2^{n-1}=2^{n-1}$. 所以，$S_{10}=1+$

$2+4+\cdots+2^9=1\ 023$. 故选 C.

[**命题意图**] 本题考查数学新定义及数列求和，考查学生灵活运用新定义分析和解决问题的能力，考查学生逻辑推理和数学运算素养.

8. D **解析**：由题意可得，函数 $f(x)$ 为增函数. 若 $f(y_0)>y_0$，则 $f(f(y_0))>f(y_0)>y_0$；同理，若 $f(y_0)<y_0$，则 $f(f(y_0))<f(y_0)<y_0$，均与题设条件不符. 由 $f(f(y_0))=y_0$ 可得 $f(y_0)=y_0$，且 $y_0\in[0,1]$. 因此，关于 x 的方程 $\sqrt{2\ln(x+1)+x-m}=x$ 在 $[0,1]$ 上有解，整理得 $2\ln(x+1)-x^2+x=m$ 在 $[0,1]$ 上有解. 设 $g(x)=2\ln(x+1)-x^2+x$，$x\in[0,1]$，则 $g'(x)=\dfrac{2}{x+1}-2x+1$ 为 $[0,1]$ 上的减函数，注意到 $g'(1)=0$，故 $g'(x)\geqslant 0$，从而函数 $g(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递增. 所以，$g(x)\in[g(0),g(1)]=[0,2\ln 2]$. 因此，实数 m 的取值范围是 $[0,2\ln 2]$. 故选 D.

[**命题意图**] 本题考查函数的图象与性质、函数的零点的综合运用，考查学生的逻辑推理和数学运算素养.

9. ABC **解析**：显然 a 不是最小的数，也不是最大的数. 由于上四分位数即第 75 百分位数，于是 $18\times 75\%=13.5$，将这些数据按照从小到大排列后，第 14 个数为上四分位数. 而除去 a 后，从小到大排列得到的第 13 个数为 83，所以 a 的可能取值为 83，84，85. 故选 ABC.

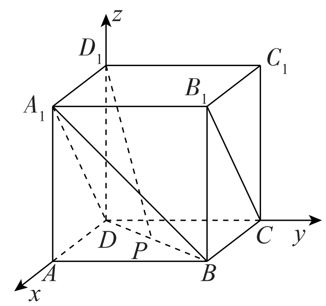
[**命题意图**] 本题考查统计中的百分位数，考查学生的数据分析和数学运算素养.

10. BC **解析**：由题意，$f(x)=\cos(2x-\varphi)+\dfrac{1}{2}$. 将其图象向左平移 $\dfrac{\pi}{6}$ 个单位长度，得到函数 $g(x)=\cos\left[2\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)-\varphi\right]+\dfrac{1}{2}=\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{3}-\varphi\right)+\dfrac{1}{2}$，而 $g(x)-g(-x)=0$ 恒成立，即函数 $y=g(x)$ 为偶函数，于是 $\dfrac{\pi}{3}-\varphi=k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$. 又 $|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}$，所以，$\varphi=\dfrac{\pi}{3}$，因此，函数 $f(x)=\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)+\dfrac{1}{2}$，$g(x)=\cos 2x+\dfrac{1}{2}$. 所以，函数 $g(x)$ 的最小正周期为 π，A 错误；由 $2x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$，即 $x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$ 时，$\cos 2x=0$，因此，函数 $g(x)$ 的图象的对称中心为 $\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2},\dfrac{1}{2}\right)(k\in\mathbf{Z})$，B 正确；当 $0\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{3}$ 时，$-\dfrac{\pi}{3}\leqslant 2x-\dfrac{\pi}{3}\leqslant\dfrac{\pi}{3}$，所以 $f(x)$ 在 $\left[0,\dfrac{\pi}{3}\right]$ 上的最小值为 1，最大值为 $\dfrac{3}{2}$，C 正确；令 $2x-\dfrac{\pi}{3}=\pi+2k\pi$，即 $x=\dfrac{2\pi}{3}+k\pi$ $(k\in\mathbf{Z})$ 为函数的极小值点，D 错误. 故选 BC.

[**命题意图**] 本题考查三角函数的恒等变换、三角函数的图象性质与三角函数图象的变换，考查学生的代数变形能力和数学运算素养.

11. AB **解析**：当 P 在对角线 BD 上运动时，$BD//$ 平面 AB_1D_1，从而点 P 到平面 AB_1D_1 的距离为定值，从而三棱锥 $P\text{-}AB_1D_1$ 的体积为定值，即三棱锥 $A\text{-}PB_1D_1$ 的体积为定值，A 正确；以 D 为原点，DA，DC，DD_1 分别为 x 轴、y 轴、z 轴，建立空间直角坐标系，则 $D_1(0,0,1)$，由 P 在对角线 BD 上运动，$B_1(1,1,1)$，$C(0,1,0)$，$A(1,0,0)$，$C_1(0,1,1)$，$P(m,m,0)(0\leqslant m\leqslant 1)$，于是 $\overrightarrow{B_1C}=(-1,0,-1)$，$\overrightarrow{D_1P}=(m,m,-1)$. 假设存在点 P 满足异面直线 D_1P 与 B_1C 所成角为 $\dfrac{\pi}{3}$，因此，$\dfrac{1}{2}=\left|\dfrac{-m+1}{\sqrt{2m^2+1}\cdot\sqrt{2}}\right|$，解得 $m=\dfrac{1}{4}$. 所以，异面直线 D_1P 与 B_1C 所成角可以取到 $\dfrac{\pi}{3}$，B 正确；注意到直线 $AC_1\perp$ 平面 A_1BD，所以，平面 A_1BD 的一个法向量为 $\overrightarrow{AC_1}=(-1,1,1)$，于是，$\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\left|\dfrac{-m+m-1}{\sqrt{2m^2+1}\cdot\sqrt{3}}\right|$，解得 $m\in\varnothing$. 所以，C 错误；注意到点 P 到棱 AA_1 的距离为 PA，过点 P 作 BC 的垂线，垂足为 H，则点 P 到平面 BCC_1B_1 的距离为 PH，在平面

$ABCD$ 内，动点 P 到定点 A 的距离与到定直线 BC 的距离之比为 2，即动点 P 的轨迹在双曲线上，D 错误. 故选 AB.



[命题意图] 本题考查立体几何中动点轨迹，异面直线所成角、线面角的计算，考查利用空间向量处理空间角，利用圆锥曲线的定义确定立体几何中动点的轨迹，考查学生的逻辑推理、直观想象和数学运算素养.

12. BC **解析：** 对于选项 A，$\forall\varepsilon>0$，令 $x_1=n$，$x_2=n+\dfrac{1}{n}$，当 n 充分大时，$x_2-x_1=\dfrac{1}{n}<\delta$；另一方面，$|f(x_1)-f(x_2)|=\left|n^2-\left(n+\dfrac{1}{n}\right)^2\right|=2+\dfrac{1}{n^2}>2$，不满足 $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$，因此，函数 $f(x)=x^2$ 在 $[0,+\infty)$ 上不一致连续. 对于选项 B，令 $x_1,x_2\in[1,+\infty)$，且 $x_1<x_2$，则 $|\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}|=\dfrac{|x_1-x_2|}{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}}<\dfrac{|x_1-x_2|}{2}$，$\forall\varepsilon>0$，取 $\delta=2\varepsilon$，当 $x_1,x_2\in[1,+\infty)$，且 $|x_1-x_2|<\delta$ 时，$|\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}|<\dfrac{\delta}{2}=\varepsilon$，所以，函数 $f(x)=\sqrt{x}$ 在区间 $[1,+\infty)$ 上一致连续. 对于选项 C，$\forall\varepsilon>0$，取 $\delta=\varepsilon>0$，$\forall x_1,x_2\in(-\infty,+\infty)$，当 $|x_1-x_2|<\delta$ 时，有 $|\sin x_1-\sin x_2|=2\left|\sin\dfrac{x_1-x_2}{2}\right|\left|\cos\dfrac{x_1+x_2}{2}\right|\leqslant2\left|\sin\dfrac{x_1-x_2}{2}\right|\leqslant2\cdot\dfrac{|x_1-x_2|}{2}<\delta=\varepsilon$，因此，函数 $f(x)=\sin x$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上一致连续. 利用题目给出的一致连续的定义，我们可以得到函数 $f(x)$ 在区间 I 不一致连续的定义：对给定的某正数 ε_0，不论 δ 取值多么小，总至少有 x_1，$x_2\in I$，满足 $|x_1-x_2|<\delta$，但 $|f(x_1)-f(x_2)|\geqslant\varepsilon_0$，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 不一致连续. 对于选项 D，对给定的 $\varepsilon_0=1$，$\forall\delta>0$，δ 充分小，不妨设 $\delta<\dfrac{1}{2}$，取 $x_1=\delta$，$x_2=\dfrac{\delta}{2}$，则 $|x_1-x_2|=\dfrac{\delta}{2}<\delta$，但 $\left|\dfrac{1}{x_1}-\dfrac{1}{x_2}\right|=\dfrac{1}{\delta}>1$，这说明，函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上不一致连续. 故选 BC.

[命题意图] 本题考查学生阅读理解能力及逻辑推理素养，考查学生灵活运用所学知识解决问题的能力.

13. -160 **解析：** 由题意可得 $2^n=64$，于是，$n=6$. 设第 $r+1$ 项为常数项，则 $C_6^r x^{6-r}\left(-\dfrac{2}{x}\right)^r=(-2)^r C_6^r x^{6-2r}$，即 $6-2r=0$，解得 $r=3$. 所以，该展开式的常数项为 $(-2)^3C_6^3=-160$.

[命题意图] 本题考查二项展开式通项公式以及二项式系数的性质，考查学生的数学运算素养.

14. 1 **解析：** 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,0]\cup[2,+\infty)$. 由复合函数的单调性可知，$f(x)$ 在 $(-\infty,0]$ 上单调递减，在 $[2,+\infty)$ 上单调递增. 而 $f(0)=4$，$f(2)=1$. 所以，函数 $f(x)$ 的最小值为 1.

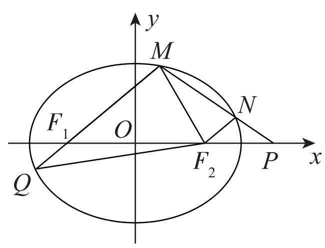
[命题意图] 本题考查函数的单调性及应用求最值，考查学生的逻辑推理和数学运算素养.

15. 1 **解析：** 由题意可得，点 C 在抛物线 $y=x^2-ax-3(a\in\mathbf{R})$ 上，且点 D 在 x 轴上方，即 $b>0$. 设过 A,B，C 三点的圆的方程为 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$. 令 $y=0$，则有 $x^2+Dx+F=0$；令 $x=0$，则有 $y^2+Ey+F=0$. 设 A,B 的横坐标分别为 x_1,x_2，则 x_1,x_2 也为方程 $x^2+Dx+F=0$ 的根，由韦达定理可得，

$x_1x_2=F=-3$;同理,$-3,b$ 为方程 $y^2+Ey+F=0$ 的根,由韦达定理可得 $-3b=F$. 因此,$-3b=-3$,即 $b=1$.

[命题意图] 本题考查圆的定义及方程的应用,考查学生的数学抽象能力和数学运算素养.

16. $\frac{\sqrt{10}}{5}$ **解析**:如图,由 $\overrightarrow{PM}=\frac{3}{2}\overrightarrow{NM}$,可得 $\frac{|PN|}{|PM|}=\frac{1}{3}$,又 $\frac{|PF_2|}{|PF_1|}=\frac{1}{3}$,故 $NF_2/\!/MF_1$,且 $|MF_1|=3|F_2N|$. 设 $|F_2N|=m$,则 $|MF_1|=3m$,而 $|\overrightarrow{F_2M}|=2|\overrightarrow{F_2N}|$,于是 $|F_2M|=2m$. 由椭圆的定义可知,$2a=|MF_1|+|MF_2|=3m+2m=5m$,即 $a=\frac{5m}{2}$. 延长 MF_1 交椭圆 C 于点 Q,连接 QF_2,则由椭圆的对称性可知,$|QF_1|=|F_2N|=m$. 又 $|QF_1|+|QF_2|=2a$,故 $|QF_2|=4m$,即 $\triangle QMF_2$ 为等腰三角形,于是,$\cos\angle QMF_2=\frac{1}{4}$. 在 $\triangle MF_1F_2$ 中,设 $|F_1F_2|=2c$,由余弦定理可得 $4c^2=9m^2+4m^2-2\cdot 3m\cdot 2m\cdot\frac{1}{4}=10m^2$,即 $c=\frac{\sqrt{10}}{2}m$. 所以,椭圆 C 的离心率为 $e=\frac{c}{a}=\frac{\frac{\sqrt{10}}{2}m}{\frac{5}{2}m}=\frac{\sqrt{10}}{5}$.



[命题意图] 本题考查椭圆的定义、几何性质、离心率的计算,考查学生数形结合、逻辑推理、直观想象和数学运算素养.

17. **解**:(1)由题意,当 $n=1$ 时,$a_2=2S_1+2=2a_1+2=4$. ……………………………… (1 分)

当 $n\geqslant 2$ 时,$(n-1)a_n=2S_{n-1}+2$. 又 $na_{n+1}=2S_n+2(n\in\mathbf{N}^*)$,

所以,当 $n\geqslant 2$ 时,有 $na_{n+1}-(n-1)a_n=2a_n$,即 $\frac{a_{n+1}}{n+1}=\frac{a_n}{n}$. ……………………… (3 分)

这表明从第二项起,数列 $\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$ 是以 $\frac{a_2}{2}=2$ 为首项的常数列,即 $\frac{a_n}{n}=2(n\geqslant 2)$. ……………… (4 分)

所以,数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=\begin{cases}1, n=1,\\ 2n, n\geqslant 2.\end{cases}$ ……………………………… (5 分)

(2)由(1)可得,$b_1=\frac{1}{a_1a_2}=\frac{1}{4}$,$T_1=b_1=\frac{1}{4}<\frac{3}{8}$. ……………………………… (6 分)

当 $n\geqslant 2$ 时,$b_n=\frac{1}{a_na_{n+1}}=\frac{1}{4n(n+1)}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$, ……………………………… (7 分)

所以,$T_n=b_1+b_2+\cdots+b_n=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{1}{4(n+1)}<\frac{3}{8}$.

综上所述,对 $n\in\mathbf{N}^*$,都有 $T_n<\frac{3}{8}$. ……………………………… (10 分)

[命题意图] 本题考查利用递推关系确定数列的通项公式以及数列求和方法,考查学生的逻辑推理能力和数学运算素养.

18. **解**:(1)由 $A+B+C=\pi$,得 $\tan A=-\tan(B+C)=-\dfrac{\tan B+\tan C}{1-\tan B\tan C}$,

即 $\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C$, ……………………………………………………(2 分)

又 $\tan A+\tan B+\tan C=\sqrt{3}\tan B\tan C$,所以 $\tan A=\sqrt{3}$. ……………………………………(4 分)

因为 $A\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$,所以,$A=\dfrac{\pi}{3}$. ……………………………………………………………………(5 分)

(2)由题意可得 $\lambda\geqslant\dfrac{b(c-b)}{a^2}$恒成立.

由余弦定理可得$\dfrac{1}{2}=\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$,于是,$b^2+c^2-a^2=bc$.

所以 $bc-b^2=c^2-a^2$,则$\dfrac{b(c-b)}{a^2}=\dfrac{c^2-a^2}{a^2}=\left(\dfrac{c}{a}\right)^2-1$, ……………………………………(7 分)

由正弦定理得$\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sin C}{\sin A}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\sin C$. ……………………………………………………………………(8 分)

在锐角$\triangle ABC$ 中,$A=\dfrac{\pi}{3}$,则 $B+C=\dfrac{2\pi}{3}$,且 $B,C\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$,故$\dfrac{\pi}{6}<C<\dfrac{\pi}{2}$, ……………………(9 分)

所以$\dfrac{1}{2}<\sin C<1$,所以$\dfrac{c}{a}\in\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)$, ……………………………………………………(10 分)

因此,$\dfrac{b(c-b)}{a^2}\in\left(-\dfrac{2}{3},\dfrac{1}{3}\right)$, ……………………………………………………………………(11 分)

于是,$\lambda\geqslant\dfrac{1}{3}$.所以,实数 λ 的取值范围是 $\left[\dfrac{1}{3},+\infty\right)$. ……………………………………(12 分)

[命题意图] 本题考查利用正弦定理、余弦定理解三角形问题,考查边元结构的取值范围,考查学生的逻辑推理和数学运算素养.

19. **解**:(1)由题意可得,$EF /\!/ BC$,又 $BC\subset$平面 ABC,$EF\not\subset$平面 ABC,所以,$EF /\!/$平面 ABC. ……(2 分)

又 $EF\subset$平面 AEF,平面 AEF 与底面 ABC 的交线为 l,所以,$EF /\!/ l$. ……………………………(3 分)

从而,$l /\!/ BC$,而 $BC\subset$平面 PBC,$l\not\subset$平面 PBC,所以,$l /\!/$平面 PBC. ………………………(4 分)

(2)由(1)可知,在底面 ABC 内过点 A 作 BC 的平行线,即平面 AEF 与底面 ABC 的交线 l.

由题意可得 $AC^2+BC^2=AB^2$,即 $AC\perp BC$.

故$\triangle ABC$ 的面积 $S=\dfrac{1}{2}AC\cdot BC=4$.

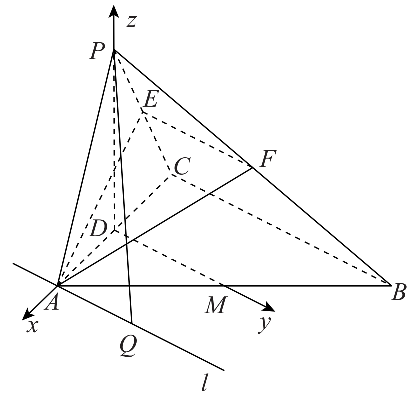
设点 P 到平面 ABC 的距离为 h,则$\dfrac{4\sqrt{3}}{3}=\dfrac{1}{3}Sh=\dfrac{1}{3}\times4h$,于是 $h=\sqrt{3}$. ……………………(6 分)

注意到侧面 PAC 是边长为 2 的正三角形,取 AC 的中点记为 D,连接 PD,则 $PD=\sqrt{3}$,

从而 $PD\perp$平面 ABC. ……………………………………………………………………………………(8 分)

取 AB 的中点记为 M,连接 DM,则 $DM\perp AC$.

于是,以 D 为坐标原点,DA,DM,DP 所在直线分别为 x 轴、y 轴、z 轴,建立空间直角坐标系,



则 $A(1,0,0)$,$P(0,0,\sqrt{3})$,$C(-1,0,0)$,$B(-1,4,0)$,$E\left(-\frac{1}{2},0,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,$F\left(-\frac{1}{2},2,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,设 $Q(1,y_1,0)$.

于是,$\overrightarrow{PQ}=(1,y_1,-\sqrt{3})$,$\overrightarrow{AE}=\left(-\frac{3}{2},0,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,$\overrightarrow{EF}=(0,2,0)$.设平面 AEF 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x_2,y_2,z_2)$,则

$\begin{cases}\overrightarrow{AE}\cdot\boldsymbol{n}=0,\\ \overrightarrow{EF}\cdot\boldsymbol{n}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-\frac{3}{2}x_2+\frac{\sqrt{3}}{2}z_2=0,\\ 2y_2=0,\end{cases}$ 取 $z_2=1$,则 $x_2=\frac{\sqrt{3}}{3}$,$y_2=0$,即 $\boldsymbol{n}=\left(\frac{\sqrt{3}}{3},0,1\right)$.

又直线 PQ 与平面 AEF 所成角为 α,于是 $\sin\alpha=|\cos\langle\overrightarrow{PQ},\boldsymbol{n}\rangle|=\frac{\left|\frac{\sqrt{3}}{3}-\sqrt{3}\right|}{\sqrt{1+\frac{1}{3}}\sqrt{4+y_1^2}}=\frac{1}{\sqrt{4+y_1^2}}$, ……………………………………………………………………………………………… (9 分)

而异面直线 PQ,EF 所成角为 β,于是 $\cos\beta=|\cos\langle\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{EF}\rangle|=\frac{|y_1|}{\sqrt{4+y_1^2}}$, ……………………… (10 分)

假设存在点 Q 满足题设 $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$,则 $\sin\alpha=\cos\beta$,整理得 $|y_1|=1$. ……………………………… (11 分)

所以,这样的点 Q 存在,且有 $AQ=1$. ……………………………………………………………… (12 分)

[命题意图] 本题考查立体几何中的面与面的交线、线面平行、线面垂直、线面角与异面直线所成角的计算,考查学生的逻辑推理能力和数学表达能力.

20. **解**:(1)由题意可得,随机变量 X 的所有可能取值为 0,1,2,3. ……………………………………… (1 分)

$X=0$ 表示从甲、乙两盒中取出的都是白球,故 $P(X=0)=\frac{C_3^2}{C_5^2}\cdot\frac{C_4^2}{C_5^2}=\frac{9}{50}$; ……………………………… (2 分)

$X=1$ 表示甲盒中取出 1 个白球 1 个红球、乙盒中取出 2 个白球或甲盒中取出 2 个白球、乙盒中取出 1 个白球 1 个红球,故 $P(X=1)=\frac{C_2^1C_3^1}{C_5^2}\cdot\frac{C_4^2}{C_5^2}+\frac{C_3^2}{C_5^2}\cdot\frac{C_4^1C_1^1}{C_5^2}=\frac{12}{25}$; ……………………………………………… (3 分)

$X=3$ 表示从甲盒中取出 2 个红球、乙盒中取出 1 个白球 1 个红球,故 $P(X=3)=\frac{C_2^2}{C_5^2}\cdot\frac{C_4^1C_1^1}{C_5^2}=\frac{1}{25}$. …… ……………………………………………………………………………………………… (4 分)

于是,$P(X=2)=1-P(X=0)-P(X=1)-P(X=3)=\frac{3}{10}$. ……………………………………… (5 分)

所以,随机变量 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{9}{50}$	$\frac{12}{25}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{25}$

数学期望为 $E(X)=0\times\frac{9}{50}+1\times\frac{12}{25}+2\times\frac{3}{10}+3\times\frac{1}{25}=\frac{6}{5}$. ……………………………………… (6 分)

(2)设事件 A_1:从甲盒中取出两个红球,事件 A_2:从甲盒中取出两个白球,事件 A_3:从甲盒中取出一个红球一个白球,事件 B:从乙盒中取出两个白球.

则 A_1,A_2,A_3 两两互斥,且 $B=A_1B\cup A_2B\cup A_3B$. ……………………………………………………(7 分)

且 $P(A_1)=\dfrac{C_2^2}{C_5^2}$,$P(B|A_1)=\dfrac{C_4^2}{C_7^2}$,$P(A_2)=\dfrac{C_3^2}{C_5^2}$,$P(B|A_2)=\dfrac{C_6^2}{C_7^2}$,$P(A_3)=\dfrac{C_3^1C_2^1}{C_5^2}$,$P(B|A_3)=\dfrac{C_5^2}{C_7^2}$. ………

……………………………………………………………………………………………………(10 分)

于是,$P(B)=P(A_1B\cup A_2B\cup A_3B)=P(A_1B)+P(A_2B)+P(A_3B)$

$=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)+P(A_3)P(B|A_3)$

$=\dfrac{C_2^2}{C_5^2}\cdot\dfrac{C_4^2}{C_7^2}+\dfrac{C_3^2}{C_5^2}\cdot\dfrac{C_6^2}{C_7^2}+\dfrac{C_3^1C_2^1}{C_5^2}\cdot\dfrac{C_5^2}{C_7^2}=\dfrac{37}{70}$.

所以,从甲盒中任取两个球放入乙盒后,从乙盒中取出两个白球的概率为$\dfrac{37}{70}$. ………………………(12 分)

[**命题意图**]本题考查概率与统计的综合应用,考查随机变量的分布列和期望的计算以及复杂事件的全概率公式,考查学生的逻辑推理和数学运算素养.

21. **解**:(1)由题意可得$\dfrac{b}{a}=\sqrt{3}$,即 $b^2=3a^2$. ……………………………………………………………(1 分)

又 $c=2$,即 $a^2+b^2=4$,所以,$a^2=1,b^2=3$. ……………………………………………………………(2 分)

因此,双曲线 C 的方程为 $x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$. …………………………………………………………………(3 分)

(2)设点 $M(x,y)$,$P(x_1,y_1)$,$Q(x_2.y_2)$,$x_1,x_2>1$,设直线 l 的方程为 $x=my+2$,

与双曲线 C 的方程 $x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$ 联立,整理得$(3m^2-1)y^2+12my+9=0$,

则 $3m^2-1\neq0$,$\Delta=(12m)^2-36(3m^2-1)=36(m^2+1)>0$,整理得 $m^2\neq\dfrac{1}{3}$. ………………………(5 分)

由根与系数的关系得 $y_1+y_2=-\dfrac{12m}{3m^2-1}$,于是 $x_1+x_2=m(y_1+y_2)+4=\dfrac{-4}{3m^2-1}$,

注意到 $x_1+x_2>2$,于是$\dfrac{-4}{3m^2-1}>2$,解得 $m^2<\dfrac{1}{3}$. ……………………………………………(7 分)

又点 M 满足 $\overrightarrow{FP}=\overrightarrow{QM}$,即$\begin{cases}x_1-2=x-x_2,\\y_1=y-y_2,\end{cases}$整理得$\begin{cases}x=x_1+x_2-2,\\y=y_1+y_2,\end{cases}$ ……………………(9 分)

于是$\begin{cases}x=\dfrac{-4}{3m^2-1}-2=\dfrac{-6m^2-2}{3m^2-1},\\y=\dfrac{-12m}{3m^2-1},\end{cases}$消去 m 得$\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{12}=1(x>0)$. ……………………………(10 分)

因此,点 M 的轨迹是以$(-4,0)$,$(4,0)$为焦点,实轴长为 4 的双曲线的右支, ……………………(11 分)

由双曲线的定义可知,存在两个定点 $E_1(-4,0)$,$E_2(4,0)$,使得$|ME_1|-|ME_2|=4$. …………(12 分)

[**命题意图**]本题考查双曲线的定义、几何性质、直线与双曲线的位置关系以及动点轨迹,考查学生的逻辑推理、数学抽象和数学运算素养.

22. **解**:(1)函数 $f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$.

由题意,$f'(x)=-2x+1-\dfrac{a}{x}=-\dfrac{2x^2-x+a}{x}$. …………………………………………………(1 分)

若函数 $f(x)$为$(0,+\infty)$上的单调函数,则 $f'(x)$在$(0,+\infty)$上恒非正或恒非负. ………………(2 分)

又 $u=2x^2-x+a$ 为开口向上的抛物线,从而知 $f'(x)$在$(0,+\infty)$上恒非正, ………………………(3 分)

即 $u=2x^2-x+a\geqslant0$ 在$(0,+\infty)$上恒成立,于是,$\Delta=1-8a\leqslant0$,解得,$a\geqslant\dfrac{1}{8}$. ……………(4 分)

所以,函数 $f(x)$为$(0,+\infty)$上的单调递减函数时,实数 a 的取值范围是$\left[\dfrac{1}{8},+\infty\right)$. ……………(5 分)

(2)若函数 $f(x)$ 的极值点为 $x_1,x_2(x_1\neq x_2)$，则 x_1,x_2 是方程 $2x^2-x+a=0$ 的两个不等正实根，

从而，$\begin{cases}\Delta=1-8a>0,\\ x_1+x_2=\dfrac{1}{2}>0,\\ x_1x_2=\dfrac{a}{2}>0,\end{cases}$ 解得 $0<a<\dfrac{1}{8}$.

不妨设 $x_1<x_2$，则 $x_1=\dfrac{1-\sqrt{1-8a}}{4}$，$x_2=\dfrac{1+\sqrt{1-8a}}{4}$，且 $f(x)$ 在 $(0,x_1)$，$(x_2,+\infty)$ 上单调递减，在 (x_1,x_2) 上单调递增，从而 x_2 为极大值点，x_1 为极小值点. ……………………………………………… (7 分)

因此，$|f(x_1)-f(x_2)|=f(x_2)-f(x_1)=-x_2^2+x_2-a\ln x_2+x_1^2-x_1+a\ln x_1=(x_1-x_2)(x_1+x_2)+(x_2-x_1)+a\ln\dfrac{x_1}{x_2}=\dfrac{x_1-x_2}{2}+(x_2-x_1)+a\ln\dfrac{x_1}{x_2}=\dfrac{x_2-x_1}{2}+a\ln\dfrac{x_1}{x_2}$.

所以，原不等式等价于 $\dfrac{x_2-x_1}{2}+a\ln\dfrac{x_1}{x_2}<\dfrac{1}{4}-2a$，……………………………………………… (9 分)

整理得 $\dfrac{\sqrt{1-8a}}{4}+a\ln\dfrac{1-\sqrt{1-8a}}{1+\sqrt{1-8a}}<\dfrac{1}{4}-2a$，(＊)其中 $0<a<\dfrac{1}{8}$.

设 $\sqrt{1-8a}=t$，则 $t\in(0,1)$，且 $a=\dfrac{1-t^2}{8}$，

则不等式(＊)等价于 $\dfrac{t}{4}+\dfrac{1-t^2}{8}\ln\dfrac{1-t}{1+t}<\dfrac{1}{4}-2\cdot\dfrac{1-t^2}{8}$，其中 $t\in(0,1)$，

整理得 $\ln\dfrac{1-t}{1+t}<\dfrac{-2t}{1+t}$，其中 $t\in(0,1)$，

即 $\ln\left(1+\dfrac{-2t}{1+t}\right)<\dfrac{-2t}{1+t}$，其中 $t\in(0,1)$， ……………………………………………… (10 分)

设 $y=\ln(1+x)-x$，由 $y'=\dfrac{1}{1+x}-1=\dfrac{-x}{1+x}>0$，得 $x\in(-1,0)$，

即函数 $y=\ln(1+x)-x$ 在 $(-1,0)$ 上单调递增，在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，

于是，当 $x=0$ 时，y 取得最大值 0，从而，$\ln(1+x)\leqslant x$，当且仅当 $x=0$ 时取等号.

而 $t\in(0,1)$，$\dfrac{-2t}{1+t}\neq 0$，所以 $\ln\left(1+\dfrac{-2t}{1+t}\right)<\dfrac{-2t}{1+t}$，其中 $t\in(0,1)$.

所以，原不等式成立，即 $|f(x_1)-f(x_2)|<\dfrac{x_1+x_2}{2}-2a$. ……………………………………………… (12 分)

[命题意图] 本题考查函数与导数的综合应用，考查利用导数研究函数的单调性，证明函数极值满足的含参不等式问题，考查学生的逻辑推理、数学建模和数学运算素养.