

姓名_____ 座位号_____

(在此卷上答题无效)

数 学

本试卷共 4 页,22 题。全卷满分 150 分,考试时间 120 分钟。

考生注意事项:

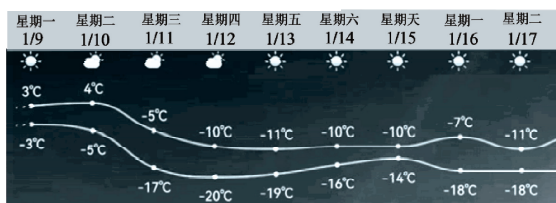
1. 答题前,先将自己的姓名、准考证号填写在试卷和答题卡上,并将准考证号条形码粘贴在答题卡上的指定位置。
2. 选择题的作答:每小题选出答案后,用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
3. 非选择题的作答:用黑色签字笔直接答在答题卡上对应的答题区域内。写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
4. 考试结束后,请将本试卷和答题卡一并上交。

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $M = \{x \mid \log_2 x < 1\}$, 集合 $N = \{x \mid -1 < x < 1\}$, 则 $M \cup N =$

- A. $(0, 1)$ B. $(-1, 2)$ C. $(0, 2)$ D. $(-\infty, 2)$

2. 2022 年三九天从农历腊月十八开始计算,也就是 2023 年 1 月 9 日至 17 日,是我国北方地区一年中最冷的时间. 下图是北方某市三九天气预报气温图,则下列对这 9 天判断错误的是



- A. 昼夜温差最大为 12°C B. 昼夜温差最小为 4°C
C. 有 3 天昼夜温差大于 10°C D. 有 3 天昼夜温差小于 7°C

3. 已知 $\sin\theta + 2\cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{5}{4}$, 则 $\sin 2\theta =$

- A. $-\frac{15}{16}$ B. $\frac{15}{16}$ C. $-\frac{3}{4}$ D. $\frac{3}{4}$

4. 在 $\triangle ABC$ 中, $BC = 2$, $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 8$, 若 D 是 BC 的中点, 则 $AD =$

- A. 1 B. 3 C. 4 D. 5

5. 已知函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0$, $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 图象上相邻两条对称轴之间的距离为 $\frac{\pi}{2}$, 将函数 $y = f(x)$

的图象向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位后, 得到的图象关于 y 轴对称, 则函数 $f(x)$ 的一个零点是

- A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{12}$ C. $\frac{\pi}{3}$ D. $\frac{5\pi}{12}$

6. 已知 $\odot O, x^2+y^2=4$, $\odot C$ 与一条坐标轴相切, 圆心在直线 $x-y+7=0$ 上. 若 $\odot C$ 与 $\odot O$ 相切, 则满足条件的 $\odot C$ 有

- A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

7. 已知圆锥 DO 的轴截面为等边三角形, $\triangle ABC$ 是底面 $\odot O$ 的内接正三角形, 点 P 在 DO 上, 且 $PO = \lambda DO$. 若 $PA \perp$ 平面 PBC , 则实数 $\lambda =$

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{6}}{3}$ C. $\frac{\sqrt{6}}{4}$ D. $\frac{\sqrt{6}}{6}$

8. 已知动圆过定点 $M(0,4)$, 且在 x 轴上截得的弦 AB 的长为 8. 过此动圆圆心轨迹 C 上一个定点 $P(m,2)$ 引它的两条弦 PS, PT , 若直线 PS, PT 的倾斜角互为补角, 记直线 ST 的斜率为 k , 则 $mk =$

- A. 4 B. 2 C. -4 D. -2

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求, 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1=1, a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{n-1}=4a_n (n \geq 2)$, 则下列结论中正确的是

- A. $a_2 = \frac{1}{4}$ B. $a_{n+1} = \frac{5}{4}a_n, n \geq 2$
C. $\{a_n\}$ 是等比数列 D. $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n = \left(\frac{5}{4}\right)^{n-1}, n \in \mathbf{N}^*$

10. 已知 e 是自然对数的底数, 则下列不等关系中正确的是

- A. $e^\pi > 3^\pi$ B. $\pi^e < e^\pi$ C. $2^e < e^2$ D. $e^3 < 3^e$

11. 已知 $f(x) (x \in \mathbf{R})$ 为偶函数, 且 $f(x - \frac{3}{2}) = f(x + \frac{1}{2})$ 恒成立. 当 $x \in [2, 3]$ 时 $f(x) = x$. 则下列四个命题中, 正确的是

- A. $f(x)$ 的周期是 $2k (k \neq 0, k \in \mathbf{Z})$ B. $f(x)$ 的图象关于点 $(1, 0)$ 对称
C. 当 $x \in [-3, -2]$ 时, $f(x) = -x$ D. 当 $x \in [-2, 0]$ 时, $f(x) = 3 - |x+1|$

12. 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1, E, F 分别是棱 A_1D_1 和棱 C_1D_1 的中点, G 为棱 BC 上的动点 (不含端点). 下列说法中正确的是

- A. 当 G 为棱 BC 的中点时, $\triangle EFG$ 是锐角三角形
B. 三棱锥 D_1-EFG 的体积为定值

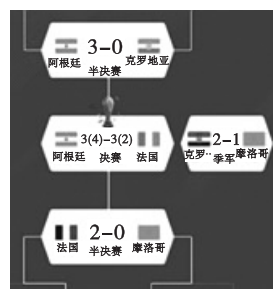
C. $\triangle EFG$ 面积的取值范围是 $\left(\frac{3}{8}, \frac{\sqrt{17}}{8}\right)$

D. 若异面直线 AB 与 EG 所成的角为 α , 则 $\sin \alpha \in \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{5}}{3}\right)$

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 若复数 $z = \frac{i}{2-i}$ (i 是虚数单位) 的共轭复数是 \bar{z} , 则 $z - \bar{z}$ 的虚部是_____.

14. 2022 年 12 月 18 日在卡塔尔世界杯决赛中, 阿根廷队以总分 7 比 5 战胜法国队, 历时 28 天的 2022 卡塔尔世界杯也缓缓落下了帷幕. 随后某电视台轮流播放半决赛及以后的这 4 场足球赛 (如图), 某人随机选 3 场进行观看, 其中恰好总决赛、季军赛被选上的概率为_____.



15. 过点 $A(0,1)$ 作斜率为 k 的直线 l 交双曲线 $x^2 - \frac{y^2}{2} = 1$ 于 P_1, P_2 两点, 线段 P_1P_2 的中点在直线 $x = \frac{1}{2}$ 上, 则实数 k 的值为_____.

16. 已知直线 l 与曲线 $y = e^x, y = 2 + \ln x$ 都相切, 则直线 l 的方程为_____.

四、解答题: 共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (本小题满分 10 分)

在锐角 $\triangle ABC$ 中, BC 在 AB 上的投影长等于 $\triangle ABC$ 的外接圆半径 R .

- (1) 求 $\sin A \cos B$ 的值;
- (2) 若 $4 \cos A \sin B = 1$, 且 $AB = 3$, 求 R .

18. (本小题满分 12 分)

2022 年北京冬奥会圆满落幕, 随后多所学校掀起了“雪上运动”的热潮. 为了解学生对“雪上运动”的喜爱程度, 某学校从全校学生中随机抽取 200 名学生进行问卷调查, 得到以下数据:

	喜欢雪上运动	不喜欢雪上运动	合计
男生	80	40	
女生	30	50	
合计			

- (1) 完成 2×2 列联表, 依据小概率值 $\alpha = 0.01$ 的 χ^2 独立性检验, 能否认为是否喜欢雪上运动与性别有关联?
- (2) (i) 从随机抽取的这 200 名学生中采用分层抽样的方法抽取 20 人, 再从这 20 人中随机抽取 3 人. 记事件 $A =$ “至少有 2 名是男生”, 事件 $B =$ “至少有 2 名喜欢雪上运动的男生”, 事件 $C =$ “至多有 1 名喜欢雪上运动的女生”. 试计算 $P(A) \cdot P(B|A) \cdot P(C|AB)$ 和 $P(ABC)$ 的值, 并比较它们的大小.
- (ii) (i) 中 $P(ABC)$ 与 $P(A) \cdot P(B|A) \cdot P(C|AB)$ 的大小关系能否推广到更一般的情形? 请写出结论, 并说明理由.

参考公式及数据: $\chi^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}, n = a+b+c+d.$

α	0.10	0.05	0.010	0.001
x_α	2.706	3.841	6.635	10.828

19. (本小题满分 12 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数, 其前 n 项和为 S_n , 且 $a_n^2 - 2S_n \cdot a_n + 1 = 0$.

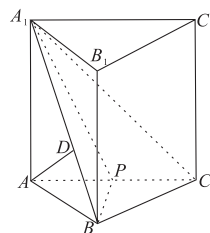
- (1) 求 a_n 和 S_n ;
- (2) 若 $n \geq 3$, 证明: $\frac{1}{S_1^2} + \frac{1}{S_2^2} + \cdots + \frac{1}{S_n^2} > 2 \left(1 - \frac{1}{2^n} \right).$

20. (本小题满分 12 分)

如图,在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, D 为 A_1B 上一点, $AD \perp$ 平面 A_1BC .

(1)求证: $BC \perp A_1B$;

(2)若 $AD = \sqrt{3}$, $AB = BC = 2$, P 为 AC 的中点,求二面角 $A-A_1B-P$ 的余弦值.



21. (本小题满分 12 分)

已知 F_1, F_2 为椭圆 $C: \frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 的左右焦点, P 为椭圆 C 上一点. 若 $\triangle PF_1F_2$ 为直角三角形, 且 $|PF_1| \geq |PF_2|$.

(1)求 $\frac{|PF_1|}{|PF_2|}$ 的值;

(2)若直线 $l: y = kx + m$ ($k \neq 0$) 与椭圆 C 交于 A, B 两点, 线段 AB 的垂直平分线经过点 $N(0, -\frac{1}{2})$, 求实数 m 的取值范围.

22. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = e^x + a \cos x$, 其中 $x > 0, a \in \mathbf{R}$.

(1)当 $a = -1$ 时, 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2)若函数 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 在 $(0, \pi)$ 内有且仅有一个极值点, 求 a 的取值范围.