

2022—2023 学年度第一学期芜湖市中学教学质量统测

高三年级数学试题卷

本试卷共4页,22小题,满分150分.考试用时120分钟

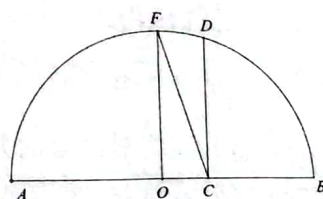
注意事项:

1. 答卷前,考生务必将自己的姓名、学校、考场/座位号、班级、准考证号填写在答题卷上.将条形码横贴在答题卷右上角“条形码粘贴处”。
2. 作答选择题时,选出每小题答案后,用2B铅笔在答题卷上对应题目选项的答案信息点涂黑;如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案.答案不能答在试题卷上。
3. 非选择题必须用黑色字迹的钢笔或签字笔作答,答案必须写在答题卷各题目指定区域内相应位置上;如需改动,先划掉原来的答案,然后再写上新答案;不准使用铅笔和涂改液,不按以上要求作答无效。
4. 考生必须保证答题卷的整洁,考试结束后,将试题卷和答题卷一并交回。

一、单项选择题(本大题共8小题,每小题5分,共40分,在每小题给出的四个选项中,只有一个选项是正确的.请把正确的答案写在答题卷上)

1. 已知集合 $A = \{x \mid \lg x < 1\}$, $B = \{x \mid y = \sqrt{x+3}\}$, 则 $A \cap B =$ ()
A. $[0, 1)$ B. $(0, 1)$ C. $(0, 10)$ D. $[-3, 10)$
2. 若复数 z 是方程 $x^2 - 4x + 5 = 0$ 的一个根, 则 $i \cdot z$ 的虚部为 ()
A. 2 B. -2 C. ± 1 D. $\pm i$
3. 已知角 β 的终边上一点 P 的坐标为 $(2, \sqrt{3})$, 则 $\tan(\beta - \frac{\pi}{6})$ 的值为 ()
A. 0 B. $\frac{\sqrt{3}}{9}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ D. $\sqrt{3}$
4. 若等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 + a_2 = -1$, $a_1 - a_3 = -3$, 则 $a_4 =$ ()
A. -4 B. 4 C. -8 D. 8

5. 《几何原本》第二卷中的几何代数法(以几何方法研究代数问题)成了后世西方数学家处理问题的重要依据,通过这一原理,很多代数的定理都能够通过图形实现证明,并称之为无字证明.现有如图所示的图形,点 F 在半圆 O 上,且 $OF \perp AB$, 点 C 在直径 AB 上运动.作 $CD \perp AB$ 交半圆 O 于点 D . 设 $AC = a$, $BC = b$, 则由 $FC \geq CD$ 可以直接证明的不等式为 ()



第5题图

- A. $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \ (a > 0, b > 0)$ B. $a^2 + b^2 \geq 2ab \ (a > 0, b > 0)$
- C. $\frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \ (a > 0, b > 0)$ D. $\sqrt{ab} \leq \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \ (a > 0, b > 0)$



6. 芜湖市疾控中心呼吁:“接种疫苗可以有效降低重症风险,建议没有禁忌症、符合接种条件的人群,特别是老年人,应当尽快接种新冠疫苗,符合加强接种条件的要尽快加强接种.”为部署进一步加快推进老年人新冠疫苗接种情况,某社区需从甲、乙等5名志愿者中选取3人到3个社区进行走访调查,每个社区1人,若甲、乙两人中至少1人入选,则不同的选派方法有()

- A.12种 B.18种 C.36种 D.54种

7. 已知 $\odot D: x^2 + y^2 - 2ax - 2a - 1 = 0$, 点 $P(-3, 0)$, 若 $\odot D$ 上总存在 M, N 两点使得 $\triangle PMN$ 为等边三角形, 则 a 的取值范围是()

- A. $[-\frac{5}{3}, -1) \cup (-1, +\infty)$ B. $(-\infty, -\frac{5}{3}] \cup [1, +\infty)$
C. $(-\infty, -2] \cup [1, +\infty)$ D. $[-2, -1) \cup (-1, +\infty)$

8. 定义在 \mathbf{R} 上的偶函数 $f(x)$ 满足 $f(2+x) = f(-x)$, 当 $x \in [0, 1]$ 时, $f(x) = 2^x - 1$, 若函数 $F(x) = f(x) - kx$ 在 $(-2, 2)$ 上恰有三个零点, 则实数 k 的取值范围是()

- A. $(-1, 0) \cup (0, 1)$ B. $(-\ln 2, 0) \cup (0, \ln 2)$
C. $(-1, -\ln 2) \cup (\ln 2, 1)$ D. $(-1, -\frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 1)$

二、多项选择题(本大题共4小题,每小题5分,共20分,在每小题给出的四个选项中,有多个选项是正确的.每题全部选对的得5分,部分选对得2分,有选错得0分.请把正确的答案写在答题卷上)

9. 已知 m, n 为异面直线, 直线 l 与 m, n 都垂直, 则下列说法正确的是()

- A. 若 $l \perp$ 平面 α , 则 $m \parallel \alpha, n \parallel \alpha$
B. 存在平面 α , 使得 $l \perp \alpha, m \subset \alpha, n \parallel \alpha$
C. 有且只有一对互相平行的平面 α 和 β , 其中 $m \subset \alpha, n \subset \beta$
D. 至多有一对互相垂直的平面 α 和 β , 其中 $m \subset \alpha, n \subset \beta$

10. 已知 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 2, & x \geq 0 \\ 1 + \ln(-x), & x < 0 \end{cases}$, 若存在 $x_1 < x_2 < x_3$, 使得 $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = t$, 则下列结论正确的有()

- A. 实数 t 的取值范围为 $(1, 2]$ B. $-e < x_1 \leq -1$
C. $x_2 + x_3 = 2$ D. $x_1 \cdot x_2$ 的取值范围为 $(-1, 0]$

11. 有3台车床加工同一型号的零件,第1台加工的次品率为6%,第2,3台加工的次品率均为5%,加工出来的零件混放在一起.已知第1,2,3台车床加工的零件数分别占总数的25%,30%,45%.现任取一个零件,记事件 A_i = “零件为第 i 台车床加工” ($i = 1, 2, 3$), 事件 B = “任取一零件为次品”, 则()

- A. $P(A_1) = 0.25$ B. $P(B|A_2) = 0.015$ C. $P(B) = 0.0525$ D. $P(A_1|B) = \frac{2}{7}$

12. 已知椭圆 $\Gamma: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$ 的左、右焦点为 F_1, F_2 , 点 $D(4, 2), E(1, -1)$, P 为椭圆 Γ 上一动点, 过点 $Q(n, 0)$ ($n > 0$) 的直线 l 交椭圆 Γ 于 M, N 两点, 则下列说法正确的有()



A. 若 PF_2 的垂直平分线过点 F_1 , 则 $k_{PF_1} = \pm \frac{\sqrt{15}}{15}$

B. $|PD| - |PE| - 2|PF_1|$ 的最小值为 $\sqrt{2} - 12$

C. 若 $n = 2$, 则 $\triangle MNF_1$ 的面积的最大值为 $\frac{20}{3}$

D. 若 $\triangle MNF_1$ 的面积取最大值时的直线 l 不唯一, 则 $n \in (\frac{3\sqrt{2}}{2}, +\infty)$

三、填空题(本大题共有4小题,每小题5分,共20分,请把正确的答案写在答题卷上)

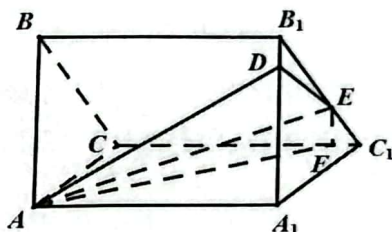
13. 已知向量 $\vec{m} = (-1, 2)$, $\vec{n} = (\frac{1}{2} - b, 1)$, 若 $\vec{m} \parallel \vec{n}$, 则 b 的值为_____.

14. 函数 $f(x) = \sin 2x - a \cos x$ 在 $[0, \pi]$ 上单调递增, 则实数 a 的取值范围是_____.

15. 已知双曲线 $M: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点为 F_1, F_2 , P 为双曲线 M 渐近线上一点,

满足 $\overrightarrow{PF_1} \cdot \overrightarrow{PF_2} = 0$, 且直线 PF_1, PF_2 的斜率之和为 $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$, 则双曲线 M 的离心率为_____.

16. 如图, 在三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, 点 E 是棱 B_1C_1 上一点, 且 $B_1E = 2EC_1$, 过直线 AE 的一个平面与棱 CC_1 交于 F , 与棱 A_1B_1 交于 D , 记截面 $ADEF$ 的面积为 S , $\triangle AEF$ 的面积为 S_1 , $\triangle AED$ 的面积为 S_2 , 则 $\frac{S_1 \cdot S_2}{S^2}$ 的取值范围是_____.



第16题图

四、解答题(本大题共6题,共70分.第17题满分10分,其余大题

每题满分12分.解答时每小题必须给出必要的演算过程或推理步骤)

17. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $2c - b = 2a \cos B$.

(1) 求角 A 的大小;

(2) 若 D 是 BC 边上的中点, 且 $AD = 2$, 求 $\triangle ABC$ 面积的最大值.

18. 已知 S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, $2S_n = (n+1)a_n$, 且 $a_1 = 1$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 $a_0 = 0$, 已知数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n = \frac{\sin 1}{\cos a_n \cos a_{n-1}}$, 求 $\{b_n\}$ 的前 n 项的和 T_n .

19. 某医院用 a, b 两种疗法治疗某种疾病. 采用有放回简单随机抽样的方法对治疗情况进行检查, 得到了如下数据:

	未治愈	治愈	合计
疗法 a	15	52	67
疗法 b	6	63	69
合计	21	115	136

(1) 根据小概率值 $\alpha = 0.005$ 的独立性检验, 分析 b 种疗法的效果是否比 a 种疗法效果好;



- (2)为提高临床医疗安全性,提高疾病的治愈率及好转率,同时降低医疗费用,降低患者医疗负担.该医院对于 a, b 两种疗法进行联合改进,研究了甲、乙两种联合治疗方案.现有6位症状相同的确诊患者,平均分成 A, B 两组, A 组用甲方案, B 组用乙方案.一个疗程后, A 组中每人康复的概率都为 $\frac{14}{15}$, B 组3人康复的概率分别为 $\frac{19}{20}, \frac{9}{10}, \frac{9}{10}$.若一个疗程后,每康复1人积2分,假设认定:积分期望值越高疗法越好,请问甲、乙哪种联合治疗方案更好?

参考公式及数据: $\chi^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$.

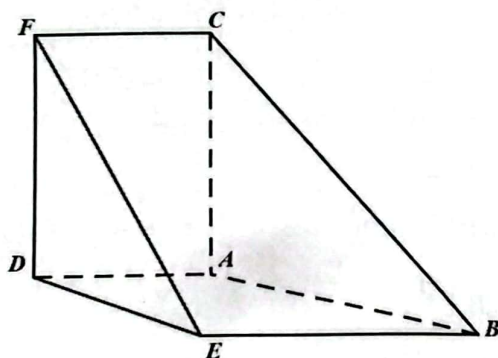
α	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
χ_{α}	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

$$\frac{(15 \times 6 - 52 \times 63)^2}{67 \times 69 \times 21 \times 115} \approx 0.9092, \frac{(15 \times 63 - 52 \times 6)^2}{67 \times 69 \times 21 \times 115} \approx 0.0359, \frac{(15 \times 52 - 6 \times 63)^2}{67 \times 69 \times 21 \times 115} \approx 0.0145.$$

20. 五面体 $ABCDEF$ 中, $AD \parallel CF$, $AD=CF=2$, $BE=EF=4$, $CA=2\sqrt{2}$, $\angle CFE = \frac{\pi}{3}$.

(1)证明: $AD \parallel BE$;

- (2)给出① $FD \perp BE$; ② $CA \perp DE$; ③ 平面 $ABED \perp$ 平面 $ACFD$. 试从中选两个作为条件, 剩下一个作为结论, 可以让推理正确, 请证明你的推理, 并求出平面 EFD 和平面 BCE 夹角的余弦值. 注: 如果选择不同组合分别解答, 则按照第一个解答计分.



第20题图

21. 已知抛物线 $C: y^2 = 2px$ ($p > 0$)的焦点为 F , 过焦点 F 的直线 l 与抛物线交于 A, B 两点. 当直线 l 的倾斜角为 60° 时, $|AB| = \frac{16}{3}$.

(1)求抛物线 C 的方程;

(2)求证: 过焦点 F 且垂直于 l 的直线与以 AB 为直径的圆的交点分别在定直线上.

22. 已知函数 $f(x) = e^x - \frac{x^2}{4} - 1$, $g(x) = a \ln(x+1)$.

(1)证明: 当 $a = 1$ 时, $f(x) \geq g(x)$;

(2) $x > 0$ 时, 设 $h(x) = f(x) - g(x)$, 讨论 $h(x)$ 零点的个数.

