

数 学

考生注意：

- 1. 答题前,考生务必将自己的姓名、考生号填写在试卷和答题卡上,并将考生号条形码粘贴在答题卡上的指定位置.
- 2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡对应题目的答案标号涂黑.如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号.回答非选择题时,将答案写在答题卡上.写在本试卷上无效. 全站免费, 更多学习资源关注公众号拾穗者的杂货铺x思维方糖研究所
- 3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回.

一、单项选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

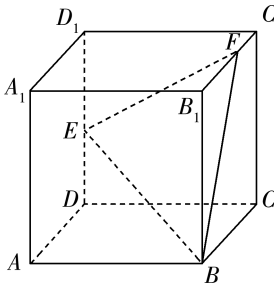
- 1. 已知集合  $A = \{x|y = \sqrt{x}\}$ ,  $B = \{x|y = \ln|x-1|\}$ , 则  $A \cap B =$   
A.  $\{x|x \geq 0\}$  B.  $\{x|x > 1\}$   
C.  $\{x|0 \leq x < 1 \text{ 或 } x > 1\}$  D.  $\{x|0 \leq x < 1\}$
- 2. 若  $\bar{z}(1+2i) = 11+2i$ , 则  $z =$   
A.  $3+4i$  B.  $3-4i$  C.  $4+3i$  D.  $4-3i$
- 3. 已知函数  $f(x)$  在  $\mathbf{R}$  上的导函数为  $f'(x)$ , 则“ $f'(x_0) = 0$ ”是“ $x_0$  是  $f(x)$  的极值点”的  
A. 充分必要条件 B. 既不充分也不必要条件  
C. 充分不必要条件 D. 必要不充分条件
- 4.  $\left(1 + \frac{x}{y}\right)(x+2y)^6$  的展开式中  $x^2y^4$  的系数为  
A. 192 B. 240 C. 432 D. 256
- 5. 若  $\frac{1 - \cos 2\theta}{\sin 2\theta} = \frac{\cos \theta - \sin \theta}{\cos \theta}$ , 则  $\tan\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right) =$   
A. 3 B. 2 C.  $\sqrt{3}$  D. 1
- 6. 下表为某外来生物物种入侵某河流生态后的前 3 个月繁殖数量  $y$  (单位:百只)的数据,通过相关理论进行分析,知可用回归模型  $y = e^{1+at}$  ( $a \in \mathbf{R}$ ) 对  $y$  与  $t$  的关系进行拟合,则根据该回归模型,预测从第( )个月开始该物种的繁殖数量超过 5 000 只(参考数据: $e^3 \approx 20.09$ ,  $e^4 \approx 54.60$ ) 全站免费, 更多学习资源关注公众号拾穗者的杂货铺x思维方糖研究所

第 $t$ 个月	1	2	3
繁殖数量 $y$	$e^{1.4}$	$e^{2.2}$	$e^{2.4}$

- A. 4 B. 5 C. 6 D. 7
- 7. 已知双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > 0, b > 0$ ) 的左顶点为  $A$ , 点  $B\left(0, \frac{b}{2}\right)$ , 直线  $AB$  与双曲线的两条渐近线分别交于  $P, Q$  两点, 若线段  $PQ$  的垂直平分线经过双曲线的右顶点, 则双曲线的离心率为  
A.  $\sqrt{2}$  B.  $\sqrt{3}$  C.  $\frac{\sqrt{5}}{2}$  D.  $\frac{2\sqrt{3}}{3}$
- 8. 已知函数  $f(x) = xe^x - a \ln x + x - x^{a+1}$ , 若  $f(x) > 0$  在定义域上恒成立, 则实数  $a$  的取值范围是  
A.  $(-\infty, e)$  B.  $[0, e)$  C.  $(-\infty, 1)$  D.  $[0, 1)$

二、多项选择题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分. 在每小题给出的四个选项中,有多项符合题目要求,全部选对的得 5 分,部分选对的得 2 分,有选错的得 0 分.

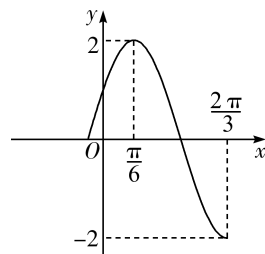
- 9. 已知正六边形  $ABCDEF$  的边长为 1,  $P$  为正六边形边上的动点, 则  $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BP}$  的值可能为  
A.  $-2$  B.  $-1$  C. 1 D. 2
- 10. 已知  $a > 0, b > 0, 4a + b + ab = 12$ , 则  
A.  $b < 3$  B.  $4a + b < 8$  C.  $\log_2 a + \log_2 b \leq 2$  D.  $16^a + 2^b \geq 32$
- 11. 已知抛物线  $C: y^2 = 8x$  的焦点为  $F$ , 直线  $l$  过点  $F$  且与抛物线  $C$  交于  $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$  两点, 其中  $y_1 > 0$ , 且  $\frac{|MF|}{|NF|} = \frac{1}{2}$ , 则  
A. 直线  $l$  的斜率为  $-\frac{\sqrt{2}}{4}$  B.  $x_1x_2 = 4$   
C.  $|MN| = 9$  D.  $\triangle MON$  (点  $O$  为坐标原点) 的面积为 6
- 12. 如图, 在正方体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  中,  $E$  为棱  $DD_1$  上的一个动点,  $F$  为棱  $B_1C_1$  上的一个动点, 则直线  $AA_1$  与平面  $EFB$  所成的角可能是  
A.  $\frac{\pi}{6}$  B.  $\frac{\pi}{4}$   
C.  $\frac{\pi}{3}$  D.  $\frac{\pi}{2}$



三、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.

- 13. 已知随机变量  $X \sim N(1, \sigma^2)$ , 且  $P\left(X \leq \frac{3}{2}\right) = 2P\left(X > \frac{3}{2}\right)$ , 则  $P\left(1 \leq X < \frac{3}{2}\right) =$ \_\_\_\_\_.

14. 已知函数  $f(x) = A\cos(\omega x + \varphi)$  ( $A, \omega > 0, |\varphi| \leq \frac{\pi}{2}$ ) 的部分图象如图所示, 将  $f(x)$  的图象向右平移  $\frac{T}{4}$  ( $T$  为  $f(x)$  的最小正周期) 个单位长度得到  $g(x)$  的图象, 则  $g(0) =$  \_\_\_\_\_.



15. 已知圆锥内有一个内接圆柱, 圆柱的底面在圆锥的底面内, 当圆柱与圆锥体积之比最大时, 圆柱与圆锥的底面半径之比为 \_\_\_\_\_.
16. 已知函数  $f(x), g(x), h(x)$  在区间  $I$  上均有定义, 若对任意  $x_0 \in I, f(x_0), g(x_0), h(x_0)$  成等差数列, 则称函数  $f(x), g(x), h(x)$  在区间  $I$  上成“等差函数列”. 若  $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ ,  $g(x) = x+b, h(x)$  在区间  $[-2, 2]$  上成等差函数列, 且  $h(x) \geq f(x)$  恒成立, 则实数  $b$  的取值范围是 \_\_\_\_\_.

四、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤.

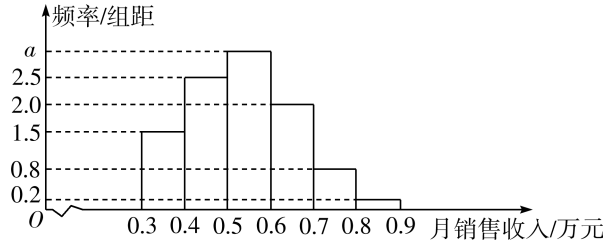
17. (10 分)

已知数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和  $S_n = \frac{n^2 - 5n}{2}$ .

- (I) 求  $\{a_n\}$  的通项公式;
- (II) 设  $b_n = \begin{cases} a_n, & n \leq 10, \\ 2b_{n-10}, & n > 10, \end{cases}$  求数列  $\{b_n\}$  的前 30 项和.

18. (12 分)

某超市为改善某产品的销售状况并制订销售策略, 统计了过去 100 天该产品的日销售收入 (单位: 万元) 并分成六组制成如图所示的频率分布直方图.



- (I) 求  $a$  的值并估计过去 100 天该产品的日销售收入的平均值  $\bar{x}$ ; (同一区间数据以中点值作代表)

(II) 该超市过去 100 天中有 30 天将该商品降价销售, 在该商品降价的 30 天中有 18 天该产品的日销售收入不低于 0.6 万元, 判断能否有 97.5% 的把握认为该商品的日销售收入不低于 0.6 万元与该日是否降价有关.

附:  $K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$ , 其中  $n = a+b+c+d$ .

$P(K^2 \geq k_0)$	0.050	0.025	0.010
$k_0$	3.841	5.024	6.635

19. (12 分)

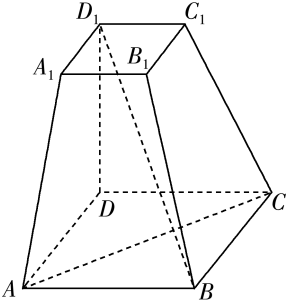
在  $\triangle ABC$  中, 角  $A, B, C$  所对的边分别为  $a, b, c$ , 已知  $a = c - 2a \cos B$ .

- (I) 证明:  $B = 2A$ ;
- (II) 若  $4a = \sqrt{6}b, c = 5$ , 求  $\triangle ABC$  的面积.

20. (12 分)

如图所示, 四棱台  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  的上、下底面均为正方形, 且  $DD_1 \perp$  底面  $ABCD$ .

- (I) 证明:  $AC \perp BD_1$ ;
- (II) 若  $AD = DD_1 = 2A_1D_1 = 2$ , 求二面角  $A - BB_1 - C$  的正弦值.



21. (12 分)

已知函数  $f(x) = \ln x \cdot \cos x$ .

- (I) 设  $x_0$  是  $f(x)$  的最小零点, 求曲线  $y = f(x)$  在点  $(x_0, f(x_0))$  处的切线方程;
- (II) 证明: 当  $x \in (0, \pi]$  时,  $f(x) < \frac{1}{e}$ .

22. (12 分)

已知椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > b > 0$ ) 的离心率为  $\frac{2}{3}$ , 且  $(\sqrt{7}, \frac{\sqrt{10}}{3})$  为  $C$  上一点.

- (I) 求  $C$  的标准方程; 全站免费, 更多学习资源关注公众号拾穗者的杂货铺x思维方糖研究所
- (II) 点  $A, B$  分别为  $C$  的左、右顶点,  $M, N$  为  $C$  上异于  $A, B$  的两点, 直线  $MN$  不与坐标轴平行且不过坐标原点  $O$ , 点  $M$  关于原点  $O$  的对称点为  $M'$ , 若直线  $AM'$  与直线  $BN$  相交于点  $P$ , 直线  $OP$  与直线  $MN$  相交于点  $Q$ , 证明: 点  $Q$  位于定直线上.