

宿州市 2023 届高三教学质量检测

数学试题

2023.2

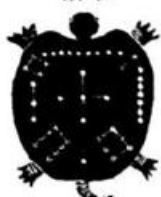
注意事项:

1. 本试卷满分 150 分, 考试时间 120 分钟.
2. 答卷前, 考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上.
3. 回答选择题时, 选出每小题答案后, 用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑. 如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其它答案标号. 回答非选择题时, 将答案写在答题卡上, 写在本试卷上无效.
4. 考试结束后, 将本试卷和答题卡一并交回.

一、单项选择题: 本大题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A = \{-1, 0, 1\}$, $B = \{x \mid |x-1| \leq 1\}$, 则 $A \cap B$ 的元素个数为 ()
 A. 0 B. 1 C. 2 D. 3
2. 已知复数 z 满足 $(1-i)z = 2i$, 则 $z =$ ()
 A. $-1-i$ B. $-1+i$ C. $1-i$ D. $1+i$
3. “ $\cos \alpha = \frac{1}{2}$ ” 是 “ $\cos 2\alpha = -\frac{1}{2}$ ” 的 ()
 A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
4. 我国《洛书》中记载着世界上最古老的一个幻方, 如图所示, 将 1, 2, 3, \dots , 9 填入 3×3 的方格内, 使得每行、每列、每条对角线上的数的和都相等, 便得到一个 3 阶幻方. 一般地, 将连续的正整数 1, 2, 3, \dots , n^2 填入 $n \times n$ 个方格中, 使得每行、每列、每条对角线上的数的和都相等, 这个正方形叫作 n 阶幻方. 记 n 阶幻方的数的和 (即方格内的所有数的和) 为 S_n , 如 $S_3 = 45$, 那么下列说法错误的是 ()

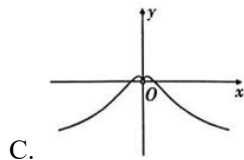
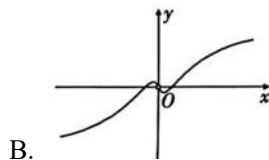
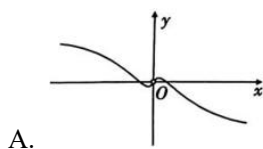
洛书



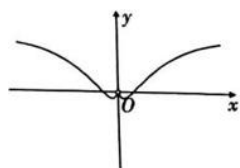
幻方

4	9	2
3	5	7
8	1	6

- A. $S_6 = 666$
 - B. 7 阶幻方第 4 行第 4 列的数字为 25
 - C. 8 阶幻方每行、每列、每条对角线上的数的和均为 260
 - D. 9 阶幻方每行、每列、每条对角线上的数的和均为 396
5. 函数 $f(x) = \left(\frac{1}{3^x + 1} - \frac{1}{2} \right) \ln |x|$ 的图象大致是 ()



D.



6. 设 $(1+2x)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$, 若 $a_7 = a_8$, 则 $n =$ ()

A. 8

B. 9

C. 10

D. 11

7. 已知 A, B, C 是双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 上不同的三点, 且 $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{OC}$,

直线 AC, BC 的斜率分别为 k_1, k_2 ($k_1 \cdot k_2 \neq 0$), 若 $|k_1| + |k_2|$ 的最小值为 1, 则双曲线的离心率为 ()

A. $\frac{\sqrt{5}}{2}$

B. $\frac{\sqrt{6}}{2}$

C. $\frac{3}{2}$

D. 2

8. 已知 $3^m = 4$, $a = 2^m - 3$, $b = 4^m - 5$, 则 ()

A. $a > 0 > b$

B. $b > 0 > a$

C. $a > b > 0$

D. $b > a > 0$

二、多项选择题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的四个选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 已知平面向量 $\vec{a} = (-2, 1)$, $\vec{b} = (4, 2)$, $\vec{c} = (2, t)$, 则下列说法正确的是 ()

A. 若 $\vec{a} \parallel \vec{c}$, 则 $t = -1$

B. 若 $\vec{b} \perp \vec{c}$, 则 $t = -4$

C. 若 $t = 1$, 则向量 \vec{a} 在 \vec{c} 上的投影向量为 $\frac{3}{5}\vec{c}$

D. 若 $t > -4$, 则向量 \vec{b} 与 \vec{c} 的夹角为锐角

10. 已知函数 $f(x) = 2\sin(\omega x + \varphi) \left(\omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2} \right)$, 其图象相邻对称轴间的距离为 $\frac{\pi}{2}$, 点

$\left(-\frac{\pi}{12}, 0 \right)$ 是其中一个对称中心, 则下列结论正确的是 ()

A. 函数 $f(x)$ 的最小正周期为 π

B. 函数 $f(x)$ 图象的一条对称轴方程是 $x = \frac{2}{3}\pi$

C. 函数 $f(x)$ 在区间 $\left[\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{3} \right]$ 上单调递增

D. 将函数 $f(x)$ 图象上所有点横坐标伸长为原来的 2 倍, 纵坐标缩短为原来的一半, 再把得到的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度, 可得到正弦函数 $g(x) = \sin x$ 的图象

11. 已知 $a > 0$, $b > 0$, 且 $ab = \frac{1}{4}$, 则下列不等关系成立的是 ()

A. $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq 4$ B. $\sqrt{a} + \sqrt{b} \geq \sqrt{2}$ C. $\log_2 a \cdot \log_2 b \leq 1$ D.

$a + \ln b \geq \frac{1}{2} - \ln 2$

12. 棱长为 2 的正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, E, F, G 分别为棱 AD, A_1B_1, CC_1 的中点, 过点 E, F, G 的平面记为平面 α , 则下列说法正确的是 ()

A. $FG \parallel$ 平面 ACB_1

B. $BD_1 \perp$ 平面 α

C. 平面 α 截正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 外接球所得圆的面积为 2π

D. 正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的表面上与点 E 的距离为 $\sqrt{5}$ 的点形成的曲线的长度为 4π

三、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 一组样本数据: $(1, b_1), (2, b_2), (3, b_3), (4, b_4), (a, b_5)$, 由最小二乘法求得线性回归方程为 $\hat{y} = 3x - 4$, 若 $b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 = 25$, 则实数 a 的值为_____.

14. 若抛物线 $C: y^2 = 2px$ 存在以点 $(3, 3)$ 为中点的弦, 请写出一个满足条件的抛物线方程为_____.

15. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $S_n = 2a_n - 2$, 则数列 $\left\{ \frac{a_n}{(a_n + 1)(a_n + 2)} \right\}$ 的前 n 项和 $T_n =$ _____.

16. 已知函数 $f(x) = 2e^x - x^2 + 2ax - a^2$ (e 为自然对数的底数), 若 $f(x) \geq -3$ 在 $x \in (0, +\infty]$ 上恒成立, 则实数 a 的取值范围是_____.

四、解答题: 本大题共 6 小题, 满分 70 分. 解答须写出文字说明、证明过程和演算步骤.

17. (本小题满分 10 分)

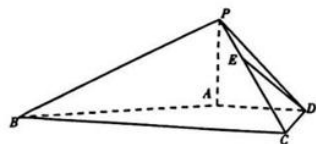
在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别是 a, b, c , 且 $(b - c)(\sin B - \sin C) = a \sin A - b \sin C$.

(1) 求角 A 的大小;

(2) 求 $\sin B + \sin C$ 的取值范围.

18. (本小题满分 12 分)

如图, 四棱锥 $P - ABCD$ 中, $PA \perp$ 底面 $ABCD$, $AD \parallel BC$, $BC \perp CD$, $BC = 6$, $PA = AD = DC = 2$, E 为棱 PC 靠近点 P 的三等分点.



(1) 证明: $DE \parallel$ 平面 PAB ;

(2) 求 DE 与平面 PBC 所成的角的正弦值.

19. (本小题满分 12 分)

在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = a_2 = 1$, 且 $a_{n+2} + (-1)^n a_n = 4$.

(1) 令 $b_n = a_{2n-1}$, 证明: 数列 $\{b_n\}$ 为等差数列, 并求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 记数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 求 S_{23} .

20. (本小题满分 12 分)

宿州号称“中国云都”，拥有华东最大的云计算数据中心、CG 动画集群渲染基地，是继北京、上海、合肥、济南之后的全国第 5 家量子通信节点城市. 为了统计智算中心的算力，现从全市 n 个大型机房和 6 个小型机房中随机抽取若干机房进行算力分析，若一次抽取 2 个机房，全是小型机房的概率为 $\frac{1}{3}$.

(1) 求 n 的值；

(2) 若一次抽取 3 个机房，假设抽取的小型机房的个数为 X ，求 X 的分布列和数学期望.

21. (本小题满分 12 分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 ，离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ， M 为

椭圆上异于左右顶点的动点， $\triangle MF_1F_2$ 的周长为 $4 + 2\sqrt{2}$.

(1) 求椭圆 C 的标准方程；

(2) 过点 M 作圆 $O: x^2 + y^2 = 1$ 的两条切线，切点分别为 A, B ，直线 AB 交椭圆 C 于 P, Q 两点，求 $\triangle OPQ$ 的面积取值范围.

22. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = x^2 + a(x - \ln x) - \frac{be}{x}$ (e 为自然对数的底数)， $a, b \in \mathbf{R}$.

(1) 当 $b = 0$ 时，讨论 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上的单调性；

(2) 当 $b = 1$ 时，若存在 $x \in [1, e]$ ，使 $f(x) > 0$ ，求 a 的取值范围.