河北省“五个一”名校联盟

2023 届高三年级联考（2022.12）

数学试卷

命题单位：石家庄市第一中学

（满分：150 分，测试时间：120 分钟）

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1.已知集合 $A=\left\{x\left|-1<2^{x}<2,x\in R\right.\right\}$，集合 $B=\left\{x\left|-1<\log_{2}x<2,x\in R\right.\right\}$，则集合 $A\bigcap B=$（　　）

A. $\left\{x\left|0<x<1\right.\right\}$　B. $\left\{x\left|x<1\right.\right\}$　C. $\left\{x\left|\frac{1}{2}<x<1\right.\right\}$　D. $\left\{x\left|x<4\right.\right\}$

答案：C.

2.已知 $(3+i)z=4+i$，其中 i 为虚数单位，则 z 的虚部是（　　）

A. $\frac{13}{10}$　B. $-\frac{1}{10}$　C. $\frac{13}{10}i$　D. $-\frac{1}{10}i$

答案：B.

3.已知 $p:x\neq 3$ 或 $y\neq 7$，$q:xy\neq 21$，则 p 是 q 的（　　）

A.充分不必要条件　B.必要不充分条件　C.充要条件　D.既不充分也不必要条件

答案：B.

4.已知双曲线 $C:\frac{x^{2}}{a^{2}}-\frac{y^{2}}{b^{2}}=1(a>0,b>0)$，左、右焦点分别为 F_{1}、F_{2}，O 为坐标原点，P 为右支上一点，且 $|OP|=\sqrt{a^{2}+b^{2}}$，O 到直线 PF_{2} 的距离为 b，则双曲线 C 的离心率为（　　）

A. 2　B. $\sqrt{5}$　C. $\sqrt{6}$　D. $2\sqrt{2}$

答案：B.

5. 已知$x>0,y>0$，且$xy=1$，则$\frac{x^3+2}{x}+\frac{4y^3+1}{y}$的最小值为（　　）

A. $2+2\sqrt{2}$　　B. 4　　C. $4+\sqrt{2}$　　D. $4+2\sqrt{2}$

答案：D.

6.设异面直线a,b所成的角为50°，经过空间一定点O有且只有四条直线与直线a,b所成的角均为θ，则θ可以是下列选项中的（　　）

A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{\pi}{3}$　　C. $\frac{5\pi}{12}$　　D. $\frac{\pi}{2}$

答案：C.

7. 设$a=\frac{12}{13}$，$b=\ln\frac{7}{4}$，$c=\sin\frac{4}{3}$，那么以下正确的是（　　）

A. $a>b>c$　　B. $c>a>b$　　C. $a>c>b$　　D. $c>b>a$

答案：B.

8. 已知点列P_n在△ABC内部，△ABP_n的面积与△ACP_n的面积比为$\frac{1}{3}$，在数列$\left\{a_n\right\}$中，$a_1=1$，若存在数列$\left\{\lambda_n\right\}$使得对$\forall n\in N^*$，$\overrightarrow{AP_n}=3\lambda_n a_n\overrightarrow{AB}+(4\lambda_n a_{n-1}+3\lambda_n)\overrightarrow{AC}$都成立，那么$a_4=$（　　）

A. 15　　B. 31　　C. 63　　D. 127

答案：D.

二、多项选择题：本大题共4小题，每小题5分，共20分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求，全部选对得5分，部分选对得2分，有选错的得0分.

9.下列说法错误的是（　　）

A. 甲乙丙丁四个人排队，事件A：甲不在排头，事件B：乙不在排尾，那么$P(B|A)=\frac{7}{9}$；

B. 若随机变量ξ服从二项分布$B(100,0.6)$，则$P(\xi=0)=0.6^{100}$；

C. 若随机变量ξ服从正态分布$N(100,64)$，则$E\xi=100,D\xi=8$；

D. $E(4X+1)=4E(X)+1$，$D(4X+1)=16D(X)+1$.

答案：BCD

10. 已知函数 $f(x)=2\sin(2x+\theta)+1(0<\theta<\pi)$，其一个对称中心为点 $(\frac{\pi}{6},1)$，那么以下正确的是（　　）

A. 函数 $f(x)$ 的图像向右平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位后，关于 y 轴对称；

B. 函数 $\left|f(x)\right|$ 的最小正周期为 $\frac{\pi}{2}$；

C. 不等式 $f(x)\le 0$ 的解集是 $\left\{x\left|k\pi+\frac{\pi}{4}\le x\le k\pi+\frac{7\pi}{12},k\in Z\right.\right\}$；

D. 当 $x\in\left[-\frac{\pi}{12},0\right]$ 时，$f(x)+\frac{36}{\pi}x\ge 0$ 恒成立.

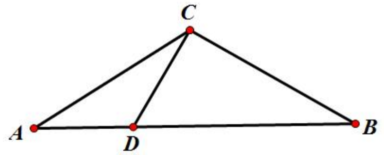
答案：ACD.

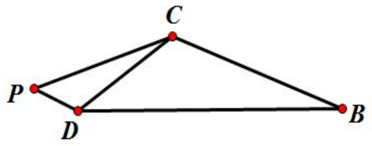
11.已知 x,y,z 均为正数，$a=\sqrt{x^2+xy+y^2}$，$b=\sqrt{y^2+yz+z^2}$，$c=\sqrt{x^2+xz+z^2}$，则三元数组 (a,b,c) 可以是以下（　　）

A. $(1,2,3)$　　B. $(3,4,9)$　　C. $(5,6,10)$　　D. $(7,8,13)$

答案：CD.

12. 已知等腰三角形 ABC，$AC=BC=3$，$AB=3\sqrt{3}$，D 为边 AB 上一点，且 $AD=\sqrt{3}$，沿 CD 把△ ADC 向上折起，A 到达点 P 位置，使得二面角 $P-CD-B$ 的大小为 $\frac{2\pi}{3}$，在几何体 $PBCD$ 中，若其外接球半径为 R，其外接球表面积为 S，那么以下正确的是（　　）





A. $CD=\sqrt{3}$　　B. $PB=\frac{3\sqrt{10}}{2}$　　C. $R=3$　　D. $S=39\pi$

答案：ABD.

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，其中 16 题第一空 2 分，第二空 3 分，共 20 分.

13.在 $(x-\frac{1}{x^2})^9$ 的展开式中，常数项是第_______项.

答案：4.

14. 已知函数 $f(x)=\lg(ax^2-6x+5)$ 的值域为 R，那么 a 的取值范围是_______.

答案：$\left[0,\dfrac{9}{5}\right]$

15.已知椭圆 $\dfrac{x^2}{10}+\dfrac{y^2}{5}=1$ 上有不同的三点 A,B,C，那么△ ABC 面积最大值是_______.

答案：$\dfrac{15\sqrt{6}}{4}$.

16. 对 $\forall x\in(0,+\infty)$，都有 $f(x)=x^3+(e-2m)x^2+x+e^x-e(\ln x+1)\geq 0$ 恒成立，那么 m 的取值范围是________.

答案：$(-\infty,\dfrac{e}{2}+1]$

四、解答题：本题共 6 小题，第 17 题 10 分，第 18～22 题每题 12 分，共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.已知数列 $\{a_n\}$，其前 n 项和 $S_n=n^2-6n+1$，

（1）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

（2）若 $b_n=2^n$，求数列 $\{a_nb_n\}$ 的前 n 项和 T_n.

解析：（1）由题意可知，$S_n=n^2-6n+1$，

$S_{n-1}=(n-1)^2-6(n-1)+1(n\geq 2)$ ....2 分

两式作差，可得 $a_n=2n-7(n\geq 2)$，当 $n=1$ 时，$a_1=S_1=-4$，

所以 $a_n=\begin{cases}2n-7 & (n\geq 2)\\ -4 & (n=1)\end{cases}$ ....4 分

（2）由题意可知，$a_nb_n=(2n-7)\cdot 2^n \quad (n\geq 2)$，$a_1b_1=-8 \quad (n=1)$

那么 $T_n=-8+a_2b_2+a_3b_3+\ldots\ldots+a_nb_n$，..6 分

可知：

$T_n-2=(-5)\cdot 2+(-3)\cdot 2^2+(-1)\cdot 2^3+\ldots\ldots+(2n-7)\cdot 2^n$，两边乘以 2，可得：

$2(T_n-2)=(-5)\cdot 2^2+(-3)\cdot 2^3+(-1)\cdot 2^4+\ldots\ldots+(2n-7)\cdot 2^{n+1}$，......................8 分

两式作差可得：

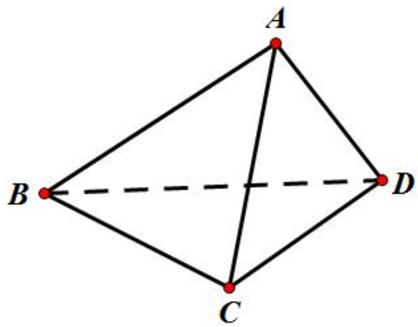
所以 $-(T_n-2)=-10+2^{n+2}-8-(2n-7)\cdot 2^{n+1}$，

即：$T_n=(2n-9)\cdot 2^{n+1}+20$. ....10 分

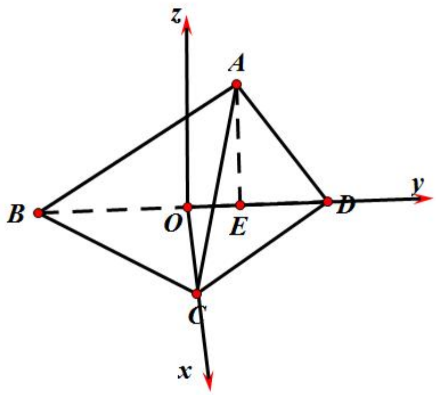
18. 已知在如图所示的三棱锥 $A-BCD$ 中，$BD=4, BA=2\sqrt{3}, BC=2\sqrt{2}$，$\angle BAD=\angle BCD=\frac{\pi}{2}$，面 $BAD\perp$ 面 BCD，

（1）求棱 AC 的长度；

（2）求直线 CD 与平面 ABC 所成角的正弦值.



解析：由题意，取 BD 中点设为 O，在面 BAD 内做 $Oz\perp BD$，以 O 为坐标原点，OC, OD, Oz 分别为 x, y, z 轴正方向，如图所示建立空间直角坐标系，..1 分



（1）在直角三角形 ABD 内，过 A 做 $AE\perp BD$ 于 E，可求 $AD=2$，那么

$AE=\frac{AB\cdot AD}{BD}=\sqrt{3}$，$DE=\frac{AD^2}{BD}=1$，..................2 分

所以 $OE=1$，

那么 $A(0,1,\sqrt{3})$，$C(2,0,0)$，所以

$|AC|=2\sqrt{2}$. ....4 分

（2）由题意，$B(0,-2,0)$，$D(0,2,0)$，

那么 $\overrightarrow{BA}=(0,3,\sqrt{3})$，$\overrightarrow{BC}=(2,2,0)$，..6 分

设平面 ABC 的法向量为 $\vec{m}=(x,y,z)$，那么：

$\begin{cases}\overrightarrow{BA}\cdot\vec{m}=0\\ \overrightarrow{BC}\cdot\vec{m}=0\end{cases}$，整理可得 $\begin{cases}3y+\sqrt{3}z=0\\ 2x+2y=0\end{cases}$，

令 y=1，那么 $\vec{m}=(-1,1,-\sqrt{3})$，..8 分

而 $\overrightarrow{CD}=(-2,2,0)$，..9 分

直线 CD 与平面 ABC 所成角的正弦即为 $\overrightarrow{CD}$ 与 $\vec{m}$ 所成角的余弦，

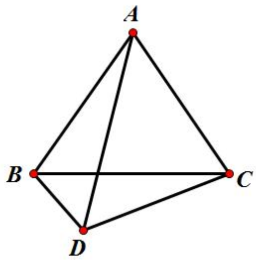
所以 $\cos<\overrightarrow{CD},\vec{m}>=\dfrac{\overrightarrow{CD}\cdot\vec{m}}{|\overrightarrow{CD}|\cdot|\vec{m}|}=\dfrac{(-2,2,0)\cdot(-1,1,-\sqrt{3})}{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{10}}{5}$

所以直线 CD 与平面 ABC 所成角的正弦为 $\dfrac{\sqrt{10}}{5}$. ....12 分

19.在三角形 ABC 中，若 $\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C=2\sqrt{3}\sin A\sin B\sin C$，

（1）求角 A 的大小；

（2）如图所示，若 $DB=2$，$DC=4$，求 DA 长度的最大值.



解析：由题意可知，由正弦定理可得：$a^2+b^2+c^2=2\sqrt{3}bc\sin A$，

再由余弦定理可得：$b^2+c^2-2bc\cos A+b^2+c^2=2\sqrt{3}bc\sin A$，

....2 分

即：$b^2+c^2=\sqrt{3}bc\sin A+bc\cos A$，整理可得：

$\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{b}=\sqrt{3}\sin A+\cos A=2\sin(A+\dfrac{\pi}{6})$，..3 分

可知左边$\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\geq 2$，当且仅当$b=c$时，

右边$\sqrt{3}\sin A+\cos A=2\sin(A+\frac{\pi}{6})\leq 2$，当且仅当$A=\frac{\pi}{3}$，

左右相等只有两边都等于 2 时，即同时取得等号，

所以，$A=\frac{\pi}{3}$. ....5 分

（2）由（1）可知：$b=c$,所以三角形ABC是正三角形.

设$\angle BDC=\theta$，$\angle BCD=\alpha$，那么由余弦定理可得：

$BC^2=4+16-2\cdot 2\cdot 4\cos\theta=20-16\cos\theta$，即：

$BC=\sqrt{20-16\cos\theta}$，同样$CA=\sqrt{20-16\cos\theta}$，..7 分

在三角形BDC中，由正弦定理可得：

$\frac{\sqrt{20-16\cos\theta}}{\sin\theta}=\frac{2}{\sin\alpha}$，整理得：

$\sin\alpha=\frac{\sin\theta}{\sqrt{5-4\cos\theta}}$，...9 分

因为$BD<CD$，所以α为锐角，那么$\cos\alpha=\frac{2-\cos\theta}{\sqrt{5-4\cos\theta}}$，........................10 分

那么$\cos(\alpha+\frac{\pi}{3})=\frac{1}{2}\cos\alpha-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha=\frac{2-\cos\theta-\sqrt{3}\sin\theta}{2\sqrt{5-4\cos\theta}}$，所以

$DA^2=16+20-16\cos\theta-8(2-\cos\theta-\sqrt{3}\sin\theta)=20+16\sin(\theta-\frac{\pi}{6})\leq 36$，

当且仅当$\theta=\frac{2\pi}{3}$时取得等号，所以DA最大值为 6...12 分

20. 甲、乙两人进行一次乒乓球比赛，约定先胜 4 局者获得这次比赛的胜利，比赛结束，假设在一局比赛中，甲、乙获胜的概率均为 0.5，且各局比赛结果相互独立，已知前两局比赛均为甲获胜，

（1）求甲获得这次比赛胜利的概率；

（2）设ξ表示从第 3 局开始到比赛结束所进行的局数，求ξ的分布列及数学期望.

解析：用A_i表示事件：第i局甲获胜（$i=3,4,5,6,7$），用B_i表示事件：第i局乙获胜

（$i=3,4,5,6,7$），..1 分

（1）记 A 表示事件：甲获得这次比赛的胜利，记 B 表示事件：乙获得这次比赛的胜利，

那么 $P(A)=1-P(B)=1-P(B_3B_4B_5B_6)-P(A_3B_4B_5B_6B_7)-P(B_3A_4B_5B_6B_7)$

$-P(B_3B_4A_5B_6B_7)-P(B_3B_4B_5A_6B_7)=1-(\frac{1}{2})^4-\frac{1}{2}C_4^1(\frac{1}{2})^4=\frac{13}{16}$. ....4 分

（2）ξ 表示从第 3 局开始到比赛结束所进行的局数，由题意 ξ 可取 2，3，4，5，

那么 $P(\xi=2)=P(A_3A_4)=(\frac{1}{2})^2=\frac{1}{4}$，

$P(\xi=3)=P(B_3A_4A_5)+P(A_3B_4A_5)=\frac{1}{2}C_2^1(\frac{1}{2})^2=\frac{1}{4}$， . ...7 分

$P(\xi=4)=P(B_3B_4B_5B_6)+P(A_3B_4B_5A_6)+P(B_3A_4B_5A_6)+P(B_3B_4A_5A_6)=\frac{1}{2}C_3^2(\frac{1}{2})^3+(\frac{1}{2})^4=\frac{1}{4}$

$P(\xi=5)=1-P(\xi=2)-P(\xi=3)-P(\xi=4)=\frac{1}{4}$ ....10 分

所以 $E\xi=2\times\frac{1}{4}+3\times\frac{1}{4}+4\times\frac{1}{4}+5\times\frac{1}{4}=\frac{7}{2}$. ....12 分

21.已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x$，$g(x)=-x^2$.

（1）若 $f(x)\ge ax+1$ 恒成立，求 a.

（2）若直线 l 与函数 $f(x)$ 的图像切于 $A(x_1,y_1)$，与函数 $g(x)$ 的图像切于 $B(x_2,y_2)$，求证：$x_1+x_2<\frac{1}{4}$.

解：（1）设函数 $h(x)=e^x-ax-1\ge 0$，发现 $h(0)=0$，所以 $h(x)=e^x-ax-1\ge h(0)$ 恒成立，

那么 $x=0$ 是函数 $h(x)$ 的最小值点，也就是极小值点，所以 $h'(0)=0$，

求导：$h'(x)=e^x-a$，把 $x=0$ 代入得：$a=1$..2 分

证明：当 $a=1$ 时，$h(x)=e^x-x-1$，求导：$h'(x)=e^x-1$，

当 $x<0$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 单调递减；当 $x>0$，$h'(x)>0$，$h(x)$ 单调递增.

所以 $h(x)\ge h(0)=0$.

所以 $a=1$ ....4 分

（2）由题意可知：$f'(x)=\mathrm{e}^x$，$g'(x)=-2x$，

那么：$e^{x_1}=-2x_2=\dfrac{e^{x_1}-(-x_2^2)}{x_1-x_2}$ ....6 分

解之可得：$-2x_2=\dfrac{-2x_2-(-x_2^2)}{x_1-x_2}$，即 $x_2=2x_1-2$，

所以 x_1 满足 $e^{x_1}=-2(2x_1-2)$，即 $e^{x_1}+2(2x_1-2)=e^{x_1}+4x_1-4=0$ ....8 分

令 $m(x)=e^x+4x-4$，可知 $m(x)$ 单调递增，且 $m(\dfrac{1}{2})=\sqrt{e}-2<0$，$m(\dfrac{3}{4})=e^{\frac{3}{4}}-1>0$，

所以 $\dfrac{1}{2}<x_1<\dfrac{3}{4}$，...10 分

而 $x_2=2x_1-2<-\dfrac{1}{2}$，

所以 $x_1+x_2<\dfrac{1}{4}$，命题得证..12 分

22. 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，左、右焦点分别为 $F_1(-1,0)$、$F_2(1,0)$，左、右顶点分别为 A、B，若 T 为椭圆上一点，$\angle F_1TF_2$ 的最大值为 $\dfrac{\pi}{3}$，点 P 在直线 $x=4$ 上，直线 PA 与椭圆 C 的另一个交点为 M，直线 PB 与椭圆 C 的另一个交点为 N，其中 M、N 不与左右顶点重合.

（1）求椭圆 C 的标准方程；

（2）从点 A 向直线 MN 做垂线，垂足为 Q，证明：存在点 D，使得 $|DQ|$ 为定值.

解：（1）由题意可得：$c=1$，设 $|PF_1|=r_1$，$|PF_2|=r_2$，那么

$$\cos\angle F_1TF_2=\frac{r_1^2+r_1^2-4c^2}{2r_1r_2}=\frac{(r_1+r_2)^2-2r_1r-4c^2}{2r_1r_2}$$

$=\dfrac{4b^2-2r_1r}{2r_1r_2}=\dfrac{4b^2}{2r_1r_2}-1$，...1 分

可知 $r_1r_2 \le \left(\dfrac{r_1+r_2}{2}\right)^2 = a^2$，当且仅当 $r_1=r_2$ 取得等号，

所以上式 $\ge \dfrac{4b^2}{2a^2}-1=\dfrac{2b^2}{a^2}-1$，即 $\cos\angle F_1TF_2$ 的最小值为 $\dfrac{2b^2}{a^2}-1$，

又 $\angle F_1TF_2$ 的最大值为 $\dfrac{\pi}{3}$，所以 $\cos\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{2}=\dfrac{2b^2}{a^2}-1$，..2 分

所以 $b^2=\dfrac{3}{4}a^2$，又 $c=1$，所以解得 $a=2,b=\sqrt{3}$，所以椭圆 C 的标准方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$.

....4 分

（2）由题意可知，直线 MN 斜率为 0 时，显然不成立；

设直线 $MN: x=my+t$，点 $M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$，联立直线 MN 与椭圆 C：

$\begin{cases} x=my+t \\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1 \end{cases}$，整理可得：$(3m^2+4)y^2+6mty+3t^2-12=0$，

$y_1+y_2=\dfrac{-6mt}{3m^2+4}, y_1y_2=\dfrac{3t^2-12}{3m^2+4}$， ....5 分

由上，设直线 $MA: y=\dfrac{y_1}{x_1+2}(x+2)$，直线 $NB: y=\dfrac{y_2}{x_2-2}(x-2)$，

两直线联立可知交点为 P，解之：$\dfrac{y_1}{x_1+2}(4+2)=\dfrac{y_2}{x_2-2}(4-2)$，

所以：$\dfrac{y_1(x_2-2)}{y_2(x_1+2)}=\dfrac{1}{3}$，即：$\dfrac{y_1y_2(x_2-2)}{{y_2}^2(x_1+2)}=\dfrac{1}{3}$ ....7 分

而 $y_2^2=3(1-\dfrac{x_2^2}{4})=-\dfrac{3}{4}(x_2-2)(x_2+2)$，代入上式，$-\dfrac{4}{3}\dfrac{y_1y_2}{(x_1+2)(x_2+2)}=\dfrac{1}{3}$，

即：$-\dfrac{4}{3}\dfrac{y_1y_2}{(my_1+t+2)(my_2+t+2)}=\dfrac{1}{3}$，……………………………………………………9 分

然后韦达定理代入可得:

$-\dfrac{4}{3}\dfrac{3t^2-12}{4(t+2)^2}=\dfrac{1}{3}$，解之可得：$t=1$或$-2$（舍）……………………………………11 分

可知直线MN过定点$E(1,0)$，又由条件：$AQ\perp EQ$，所以Q在以AE为直径的圆上，圆心即为$D(-\dfrac{1}{2},0)$，$|DQ|$为定值$\dfrac{3}{2}$……………………………………………………12 分