

数 学 试 题

注意事项:

- 1.答卷前,考生务必将自己的姓名、考场号、座位号、准考证号填写在答题卡上。
- 2.回答选择题时,选出每小题答案后,用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
- 3.考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

考试时间为 120 分钟,满分 150 分

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

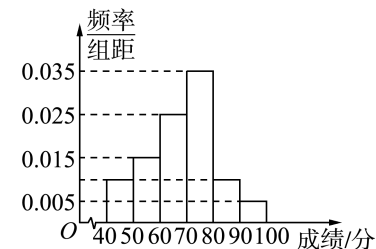
- 1.已知集合 $A = \{x | x^2 - 2x - 3 \leq 0\}$, $B = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$, 则下列判断正确的是
A. $A \cup B = A$ B. $A \cap B = A$ C. $A = B$ D. $A \subseteq B$
- 2.已知 $(2-i)z = 2+i$, 则 $|\bar{z}| =$
A. $\frac{5}{3}$ B. $\frac{\sqrt{41}}{5}$ C. 1 D. $\frac{3}{5}$
- 3.设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q , 则“ $q > 1$ ”是“ $\{a_n\}$ 是单调递增数列”的
A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充分必要条件 D. 既不充分又不必要条件
- 4.已知 α 为第一象限角, $\tan \alpha = \frac{3}{4}$, 则 $\tan \frac{\alpha}{2} =$
A. -3 B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{3}$ 或 -3 D. $-\frac{1}{3}$ 或 3
- 5.现有甲乙两个箱子, 分别装有除颜色外其它都相同的黑色和白色两种球, 甲箱装有 2 个白球 3 个黑球, 乙箱有 3 个白球 2 个黑球, 先从甲箱随机取一个球放入乙箱, 再从乙箱随机取一个球是白球的概率是
A. $\frac{3}{5}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{17}{30}$ D. $\frac{1}{2}$
- 6.《张丘建算经》是我国南北朝时期的一部重要数学著作, 书中系统地介绍了等差数列, 同类结果在三百年后在印度才首次出现, 卷中记载“今有女善织, 日益功疾, 初日织五尺, 今一月日织九匹三丈”, 其意思为: “现有一善于织布的女子, 从第二天开始, 每天比前一天多织相同量的布, 第一天织了 5 尺布, 现在一个月(30 天)共织 390 尺布”, 假如该女子 1 号开始织布, 则这个月中旬(第 11 天到第 20 天)的织布量为
A. 26 B. 130 C. $\frac{421}{3}$ D. 156
- 7.已知三棱锥 $A-BCD$, $AD \perp$ 平面 BCD , $AC \perp BD$, $AB = AC$, $2AD = BD = 4$, 将三棱锥绕着 AD 旋转一周, 则该三棱锥所经过的空间区域构成的几何体的体积为
A. $\frac{32\pi}{3}$ B. 32π C. 32 D. $\frac{32}{3}$

8. 设 x_0 是函数 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + mx + \ln x (x > 0)$ 的极值点, 若满足不等式 $\frac{1}{2} \leq x_0 \leq 3$ 的实数 x_0 有且只有一个, 则实数 m 的取值范围是

A. $\left(-\frac{10}{3}, -\frac{5}{2}\right)$ B. $\left[-\frac{10}{3}, -\frac{5}{2}\right)$ C. $\left(-\frac{10}{3}, -\frac{5}{2}\right]$ D. $\left[-\frac{10}{3}, -\frac{5}{2}\right]$

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分。

9. 某校举办了迎新年知识竞赛, 随机选取了 100 人的成绩整理后画出的频率分布直方图如下, 则根据频率分布直方图, 下列说法正确的是



A. 中位数 70 B. 众数 75 C. 平均数 68.5 D. 平均数 70

10. 函数 $f(x) = \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{4}\right)$ 的图象 $(0 < \omega < 4)$ 关于直线 $x = \frac{\pi}{6}$ 对称, 将 $f(x)$ 的图象向左平移

$\frac{\pi}{6}$ 个单位长度后与函数 $y = g(x)$ 图象重合, 则关于 $y = g(x)$, 下列说法正确的是

A. 函数图象关于 $x = \frac{\pi}{3}$ 对称 B. 函数图象关于 $\left(-\frac{\pi}{3}, 0\right)$ 对称
C. 在 $\left(0, \frac{2\pi}{3}\right)$ 单调递减 D. 最小正周期为 π

11. 已知过点 $(0, 1)$ 的直线与椭圆 $x^2 + \frac{y^2}{2} = 1$ 交于 A, B 两点, 则弦长 $|AB|$ 可能是

A. 1 B. $\sqrt{2}$ C. $\sqrt{3}$ D. 3

12. $y = f(x)$ 定义域为 \mathbf{R} , $y = f(x+2)$ 为偶函数, $f(2) = 1$ 且 $f(x) = g(2x) - g(4-2x)$, 则下列说法正确的是

A. $y = f(x)$ 的图象关于 $(1, 0)$ 对称 B. $y = f(x)$ 的图象关于 $x = 2$ 对称
C. 4 为 $y = f(x)$ 的周期 D. $\sum_{k=1}^{22} f(k) = 0$

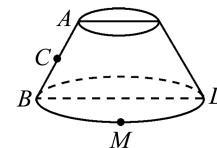
三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$, 离心率为 $\frac{\sqrt{5}}{2}$, 焦点 F 到渐近线距离为 1, 则双曲线方程为_____.

14. 在 $\left(2x^2 - \frac{1}{x}\right)^n$ 的展开式中, 所有项的二项式系数的和为 64, 则常数项为_____.

15. 已知 \mathbf{a}, \mathbf{b} 为单位向量, 当 $2\mathbf{a} - \mathbf{b}$ 与 \mathbf{a} 夹角最大时, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} =$ _____.

16. 如图 C 是圆台母线 AB 的中点, BD 是底面的直径, 上底面半径为 1, 下底面半径为 2, $AB = 2$, 点 M 是弧 BD 的中点, 则 C, M 两点在圆台侧面上连线长最小值的平方等于_____.



四、解答题:本题共 6 小题,共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

- 17.(10 分)记 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 所对边分别为 a, b, c .已知 $a \sin(B+C)=(b+c) \sin B, D$ 为边 BC 的中点.
- (1)证明: $A=2B$;
- (2)若 $A=\frac{\pi}{3}, AD=\sqrt{7}$,求 $\triangle ABC$ 的周长 C .

- 18.(12 分)已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ,且满足 $S_n=2a_n+n-3, n \in \mathbf{N}^*$.
- (1)求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;
- (2) $b_n=\frac{n^2}{a_n-1}$,数列 $\{b_n\}$ 是否存在最大项,若存在,求出最大项.

- 19.(12 分)2022 年 9 月 2 日第十三届全国人民代表大会常务委员会第三十六次会议通过《中华人民共和国反电信网络诈骗法》.某高校为了提高学生防电信网络诈骗的法律意识,举办了专项知识竞赛,从竞赛成绩中随机抽取了 100 人的成绩,成绩数据如下表:

性别 成绩	[60,70)	[70,80)	[80,90)	[90,100]
女生	8	10	16	6
男生	7	15	25	13

若学生的测试成绩大于等于 80 分,则“防电信诈骗意识强”,否则为“防电信诈骗意识弱”.

- (1)用 100 人样本的频率估计概率,求从该校任选 5 人,恰有 2 人防骗意识强的概率;
- (2)根据上表数据,完成 2×2 列联表,根据小概率值 $\alpha=0.01$ 的独立性检验,分析“防电信诈骗意识强弱”是否有性别差异.

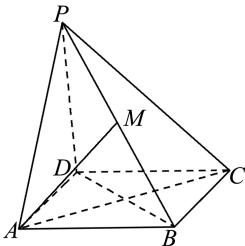
	男生	女生	合计
防诈骗意识强			
防诈骗意识弱			
合计			

附: $\chi^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$

α	0.1	0.05	0.01	0.005	0.001
x_α	2.706	3.841	6.635	7.879	10.828

- 20.(12 分)如图,四棱锥 $P-ABCD$, M 为棱 PB 的中点,底面 $ABCD$ 是边长为 2 的菱形, $PA=PC, PD=2, \angle DAC=\frac{\pi}{6}$.

- (1)证明: $AC \perp PD$;
- (2)若 $PB=2\sqrt{3}$,求 AM 与平面 PCD 所成角的正弦值.



- 21.(12 分)设抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 的焦点为 F ,过 F 作斜率为 1 的直线交抛物线于 A, B 两点,且 $AB=8, Q$ 为抛物线上一点,过 Q 作两条均不垂直于对称轴的直线分别交抛物线于除 Q 之外的 M, N 两点.
- (1)求 C 的方程;
- (2)若 Q 坐标为 $(\frac{p}{2}, p)$,且 $k_{QM}+k_{QN}=0$,判断 MN 斜率是否为定值,若是,求出该值,若不是,说明理由.

- 22.(12 分)已知函数 $f(x)=e^{x-1}+ax$.
- (1)若 $f(x) \geq 0$ 恒成立,求 a 的取值范围;
- (2)当 $m \geq 1$ 时,证明 $\ln x + \frac{me^x}{x} - \sin x > 1$ 恒成立.