2022 届高三第一次联考

数学参考答案

题 号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答 案	A	B	D	C	C	D	A	B	AC	ABD	BC	ACD

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. A 【解析】由正弦函数的单调性可知，当 $0<\theta<\frac{\pi}{3}$ 时，$0<\sin\theta<\frac{\sqrt{3}}{2}$. 反之，当 $0<\sin\theta<\frac{\sqrt{3}}{2}$ 时，可能有 $\theta=\frac{5\pi}{6}>\frac{\pi}{3}$，所以“$0<\theta<\frac{\pi}{3}$”是“$0<\sin\theta<\frac{\sqrt{3}}{2}$”的充分不必要条件，选 A.

2. B 【解析】因为 $z=\frac{2i(1+i)}{(1-i)(1+i)}-1+2i=i-1-1+2i=-2+3i$，则复数 z 在复平面内对应的点 $Z(-2,3)$ 位于第二象限，选 B.

3. D 【解析】对于 A，$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=0\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\perp(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$，结论不成立，命题为假；对于 B，当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 方向相反时，结论不成立，命题为假；对于 C，当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线时，结论不成立，命题为假；对于 D，若 $|\boldsymbol{a}|>|\boldsymbol{b}|$，则 $|\boldsymbol{a}|^2>|\boldsymbol{b}|^2$，即 $\boldsymbol{a}^2>\boldsymbol{b}^2$，则 $\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{b}^2>0$，所以 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{b}^2>0$，命题为真. 选 D.

4. C 【解析】由已知，函数 $y=f(x)$ 与函数 $y=2^x$ 互为反函数，则 $f(x)=\log_2x$. 由题设，当 $x>0$ 时，$g(x)=\log_2x-x$，则 $g(8)=\log_28-8=3-8=-5$. 因为 $g(x)$ 为奇函数，所以 $g(-8)=-g(8)=5$，选 C.

5. C 【解析】抛物线 C 的准线方程为 $x=-1$，分别过点 A,B 作 y 轴的垂线，垂足为 A_1,B_1，则 $\frac{S_1}{S_2}=\frac{|AE|}{|BE|}=\frac{|AA_1|}{|BB_1|}=\frac{|AF|-1}{|BF|-1}=3$，所以 $S_1=3S_2$，选 C.

6. D 【解析】由已知，$\frac{\sqrt{3}\sin 20^\circ}{\cos 20^\circ}+\lambda\sin 20^\circ=3$，则 $\sqrt{3}\sin 20^\circ+\lambda\sin 20^\circ\cos 20^\circ=3\cos 20^\circ$，从而 $\frac{\lambda}{2}\sin 40^\circ=3\cos 20^\circ-\sqrt{3}\sin 20^\circ=2\sqrt{3}\sin(60^\circ-20^\circ)=2\sqrt{3}\sin 40^\circ$，所以 $\lambda=4\sqrt{3}$，选 D.

7. A 【解析】取 AB 的中点 H，则 $BH\underline{\mathbin{/\!/}}C_1G$，从而四边形 BC_1GH 为平行四边形，所以 $BC_1\parallel HG$. 易知 $EH\underline{\mathbin{/\!/}}GF$，则四边形 $EGFH$ 为平行四边形，从而 $GH\subset$ 平面 EFG. 又 $BC_1\not\subset$ 平面 EFG，所以 $BC_1\parallel$ 平面 EFG. 易知 $BF\underline{\mathbin{/\!/}}ED_1$，则四边形 BFD_1E 为平行四边形，从而 BD_1 与 EF 相交，所以直线 BD_1 与平面 EFG 相交，选 A.

8. B 【解析】由已知，$ae^{a+1}<b(\ln b-1)=b\ln\frac{b}{e}$，则 $e^a\ln e^a<\frac{b}{e}\ln\frac{b}{e}$. 设 $f(x)=x\ln x$，则 $f(e^a)<f\left(\frac{b}{e}\right)$. 因为 $a>0$，则 $e^a>1$. 又 $b(\ln b-1)>0$，$b>0$，则 $\ln b>1$，即 $b>e$，从而 $\frac{b}{e}>1$. 当 $x>1$ 时，$f'(x)=\ln x+1>0$，则 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 内单调递增，所以 $e^a<\frac{b}{e}$，即 $b>e^{a+1}$，选 B.

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

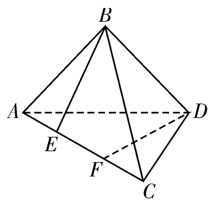
9. AC 【解析】由图知，$f(x)$ 的最小正周期为 $T=4\times\left(\frac{7\pi}{12}-\frac{\pi}{3}\right)=\pi$，结论 A 正确；因为 $\omega=\frac{2\pi}{T}=2$，$A=2$，则 $f(x)=2\sin(2x+\varphi)$. 因为 $x=\frac{\pi}{3}$ 为 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内的最小零点，则 $2\times\frac{\pi}{3}+\varphi=\pi$，得 $\varphi=\frac{\pi}{3}$，所以 $f(x)=$

$2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$，从而 $f\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=2\sin\left[2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{\pi}{3}\right]=2\sin\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)$ 不是偶函数，结论 B 错误；因为 $f(0)=2\sin\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$，$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=2\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)=2\cos\frac{\pi}{3}=1$，则 $f(x)$ 在区间 $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ 内的最小值为 1，结论 C 正确；因为 $f\left(-\frac{2\pi}{3}\right)=2\sin\left(-\frac{4\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\right)=2\sin(-\pi)=0$，则 $x=-\frac{2\pi}{3}$ 为 $f(x)$ 的零点，结论 D 错误，选 AC.

10. ABD 【解析】去掉 9 个原始评分中的一个最高分和一个最低分，不会改变该组数据的中位数，A 正确；因为学生网络评分在区间 $[8,9)$ 内的频率为 0.3，学生总人数为 4000，则网络评分在区间 $[8,9)$ 内的学生估计有 $4000\times0.3=1200$ 人，B 正确；若去掉的一个最高分为 9.6，去掉的一个最低分为 8.9，则 9 名教师原始评分的极差等于 0.7，C 错误；学生网络评分在区间 $[9,10]$ 内的频率为 0.5，则 $X\sim B(10,0.5)$，所以 $E(X)=10\times0.5=5$，D 正确；选 ABD.

11. BC 【解析】当 $a=3,b=2$ 时，双曲线的渐近线的斜率 $k=\pm\frac{b}{a}=\pm\frac{2}{3}$，A 错误；因为点 $P(2,4\sqrt{2})$ 在 C 上，则 $\frac{4}{a^2}-\frac{32}{b^2}=1$，得 $\frac{b^2}{a^2}=\frac{b^2}{4}+8>8$，所以 $e=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}>3$，B 正确；因为 $|PF_1|-|PF_2|=2a$，若 $PF_1\perp PF_2$，则 $|PF_1|^2+|PF_2|^2=|F_1F_2|^2=4c^2$，即 $(|PF_1|-|PF_2|)^2+2|PF_1|\cdot|PF_2|=4c^2$，即 $4a^2+2|PF_1|\cdot|PF_2|=4c^2$，得 $|PF_1|\cdot|PF_2|=2(c^2-a^2)=2b^2$，所以 $S_{\triangle F_1PF_2}=\frac{1}{2}|PF_1|\cdot|PF_2|=b^2$，C 正确；若 C 为等轴双曲线，则 $a=b$，从而 $|F_1F_2|=2c=2\sqrt{2}a$. 若 $|PF_1|=2|PF_2|$，则 $|PF_2|=2a$，$|PF_1|=4a$. 在 $\triangle F_1PF_2$ 中，由余弦定理，得 $\cos\angle F_1PF_2=\frac{|PF_1|^2+|PF_2|^2-|F_1F_2|^2}{2|PF_1|\cdot|PF_2|}=\frac{16a^2+4a^2-8a^2}{2\times4a\times2a}=\frac{3}{4}$，D 错误，选 BC.

12. ACD 【解析】如图，因为 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ADC$ 都是以 AC 为斜边的直角三角形，则 AC 为四面体 $ABCD$ 外接球的直径. 因为 $AB=2$，$BC=2\sqrt{3}$，则 $2R=AC=4$，所以四面体 $ABCD$ 外接球的表面积为 $S=4\pi R^2=16\pi$，A 正确；分别作 $BE\perp AC$，$DF\perp AC$，垂足为 E,F，则 $\theta=\langle\overrightarrow{EB},\overrightarrow{FD}\rangle$. 由已知可得，$EB=FD=\sqrt{3}$，$AE=CF=1$，$EF=2$. 因为 $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FD}$，则 $|\overrightarrow{BD}|^2=\overrightarrow{BD}^2=(\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FD})^2=\overrightarrow{BE}^2+\overrightarrow{EF}^2+\overrightarrow{FD}^2+2\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{FD}=3+4+3+2\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}\cos(\pi-\theta)=8$，所以 $|\overrightarrow{BD}|=2\sqrt{2}$，B 错误；因为 $CD^2+BD^2=12=BC^2$，则 $CD\perp BD$. 同理，$AB\perp BD$. 又 $CD\perp AD$，则 $CD\perp$ 平面 ABD，所以 $V=\frac{1}{3}S_{\triangle ABD}\times CD=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times2\times2\sqrt{2}\times2=\frac{4\sqrt{2}}{3}$，C 正确；由已知可得，$\angle CAD=30^\circ$，$\angle CAB=60^\circ$，则 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AC}\cdot(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=4\times2\sqrt{3}\cos30^\circ-4\times2\cos60^\circ=8$，则 $\cos\langle\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BD}\rangle=\frac{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}}{|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{BD}|}=\frac{8}{4\times2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，得 $\langle\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BD}\rangle=45^\circ$，所以异面直线 AC 与 BD 所成的角为 45°，D 正确，选 ACD.



三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

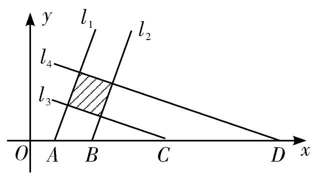
13. -2 【解析】因为 $f'(x)=e^{x-1}+3x^2$，则 $f'(1)=4$. 又 $f(1)=2$，则切线方程为 $y-2=4(x-1)$，即 $y=4x-2$，所以该切线在 y 轴上的截距为 -2.

14. 729 【解析】因为 $T_3=C_n^2(\sqrt{x})^{n-2}\left(-\frac{2}{x}\right)^2=4C_n^2x^{\frac{n-6}{2}}$，由已知 $\frac{n-6}{2}=0$，则 $n=6$. 因为 $\left(\sqrt{x}-\frac{2}{x}\right)^6$ 的展开式中各项系数的绝对值之和与 $\left(\sqrt{x}+\frac{2}{x}\right)^6$ 的展开式中各项系数之和相等，取 $x=1$，得 $\left(\sqrt{x}+\frac{2}{x}\right)^6$ 的展开式中各项系数之和为 $3^6=729$.

15. $m-1$ 【解析】由 $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$，得 $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$，即 $a_n=a_{n+2}-a_{n+1}(n\in\mathbf{N}^*)$. 所以 $S_{2021}=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{2021}=(a_3-a_2)+(a_4-a_3)+(a_5-a_4)+\cdots+(a_{2023}-a_{2022})=a_{2023}-a_2=m-1$.

16. $\frac{16}{17}$或$\frac{36}{5}$或$\frac{196}{53}$(三个结果只要求填写两个，不考虑数据排序，填对 1 个得 3 分，填对 2 个得 5 分)

【解析】不妨设正方形的四条边所在的直线分别为 l_1、l_2、l_3、l_4，它们分别经过点 A、B、C、D，直线 l_1 的倾斜角为 $\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$，正方形的边长为 a.



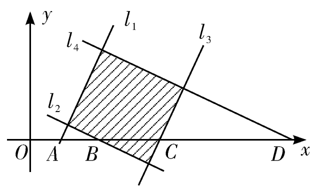
①若 $l_1 /\!/ l_2$，则 $l_3 /\!/ l_4$，且 $l_3\perp l_1$，从而 l_3 的倾斜角为 $\theta+\frac{\pi}{2}$.

因为 $|AB|=1$，则 l_1 与 l_2 之间的距离为 $\sin\theta$，所以 $a=\sin\theta$.

因为 $|CD|=4$，则 l_3 与 l_4 之间的距离为 $4\sin\left[\pi-\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)\right]=4\cos\theta$，

所以 $a=4\cos\theta$.

令 $\sin\theta=4\cos\theta$，则 $\sin^2\theta=16\cos^2\theta=16(1-\sin^2\theta)$，得 $\sin^2\theta=\frac{16}{17}$，则正方形面积 $S=\sin^2\theta=\frac{16}{17}$.



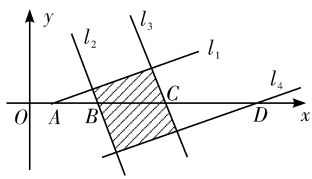
②若 $l_1 /\!/ l_3$，则 $l_2 /\!/ l_4$，且 $l_2\perp l_1$，从而 l_2 的倾斜角为 $\theta+\frac{\pi}{2}$.

因为 $|AC|=3$，则 l_1 与 l_3 之间的距离为 $3\sin\theta$，所以 $a=3\sin\theta$.

因为 $|BD|=6$，则 l_2 与 l_4 之间的距离为 $6\sin\left[\pi-\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)\right]=6\cos\theta$，

所以 $a=6\cos\theta$. 令 $3\sin\theta=6\cos\theta$，则 $\sin^2\theta=4\cos^2\theta=4(1-\sin^2\theta)$，得 $\sin^2\theta=\frac{4}{5}$，

则正方形面积 $S=9\sin^2\theta=\frac{36}{5}$.



③若 $l_1 /\!/ l_4$，则 $l_2 /\!/ l_3$，且 $l_2\perp l_1$，从而 l_2 的倾斜角为 $\theta+\frac{\pi}{2}$.

因为 $|AD|=7$，则 l_1 与 l_4 之间的距离为 $7\sin\theta$，所以 $a=7\sin\theta$.

因为 $|BC|=2$，则 l_2 与 l_3 之间的距离为 $2\sin\left[\pi-\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)\right]=2\cos\theta$，

所以 $a=2\cos\theta$.

令 $7\sin\theta=2\cos\theta$，则 $49\sin^2\theta=4\cos^2\theta=4(1-\sin^2\theta)$，得 $\sin^2\theta=\frac{4}{53}$，则正方形面积 $S=49\sin^2\theta=\frac{196}{53}$.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分，解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

17.【解析】(1)由已知，$f(x)=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x-\frac{1}{2}\left(2\cos^2\frac{x}{2}-1\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x-\frac{1}{2}\cos x=\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$. ……… (2 分)

则 $g(x)=f(-x)=\sin\left(-x-\frac{\pi}{6}\right)=-\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$，

所以当 $g(x)$ 单调递减时，函数 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$ 单调递增. ……………………………………………… (3 分)

令 $-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant x+\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，得 $-\frac{2\pi}{3}+2k\pi\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{3}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$.

所以函数 $g(x)$ 的单调递减区间是 $\left[-\frac{2\pi}{3}+2k\pi,\frac{\pi}{3}+2k\pi\right],k\in\mathbf{Z}$. ………………………………… (5 分)

(2)因为 $f(A)=\sin\left(A-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$,$A\in(0,\pi)$,则 $A=\frac{\pi}{3}$. ……………………………………………… (6 分)

又 $a=\sqrt{3}$,由余弦定理,得 $3=b^2+c^2-bc$,即 $b^2+c^2=bc+3$. ………………………………………… (7 分)

因为 D 为 BC 的中点,则$\overrightarrow{AD}^2=\frac{1}{4}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})^2=\frac{1}{4}(b^2+c^2+bc)=\frac{1}{4}(2bc+3)$. ……………… (8 分)

因为 $b^2+c^2\geqslant 2bc$,则 $bc+3\geqslant 2bc$,即 $0<bc\leqslant 3$,所以$\frac{3}{4}<|\overrightarrow{AD}|^2\leqslant\frac{9}{4}$,即$\frac{\sqrt{3}}{2}<|\overrightarrow{AD}|\leqslant\frac{3}{2}$.

所以线段 AD 的长的取值范围是$\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2}\right]$. ……………………………………………………… (10 分)

18.【解析】(1)设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d,因为 $a_1=3$,则 $S_3=3a_1+3d=9+3d$. ……………… (2 分)

因为 $S_3=5a_1=15$,则 $9+3d=15$,得 $d=2$. ……………………………………………………………… (3 分)

所以数列$\{a_n\}$的通项公式是 $a_n=3+2(n-1)=2n+1$. …………………………………………………… (4 分)

(2)因为 $S_n=3n+\frac{n(n-1)}{2}\times 2=n^2+2n$,则 $b_n=1+\frac{2}{S_n}=1+\frac{2}{n(n+2)}=1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}$. ……………… (6 分)

所以 $T_n=n+\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$

$=n+1+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$. ……………………………………………………………………… (8 分)

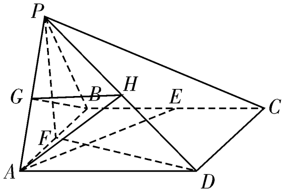
当 $n\leqslant 2$ 时,因为$-\frac{1}{3}\leqslant\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}<0$,则$[T_n]=n$. ……………………………………… (9 分)

当 $n\geqslant 3$ 时,因为 $0<\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}<\frac{1}{2}$,则$[T_n]=n+1$. ………………………………… (10 分)

因为$[T_1]+[T_2]+\cdots+[T_n]=63$,则 $1+2+4+5+\cdots+(n+1)=63$,即 $3+\frac{(n-2)(4+n+1)}{2}=63$,

即 $n^2+3n-130=0$,即$(n-10)(n+13)=0$. 因为 $n\in\mathbf{N}^*$,所以 $n=10$. ……………………………… (12 分)

19.【解析】(1)解法一:取 AB 的中点 F,连接 PF,DF.



因为 $PB=AB$,$\angle PBA=60°$,则$\triangle PAB$ 为正三角形,所以 $PF\perp AB$.

因为平面 $PAB\perp$平面 $ABCD$,则 $PF\perp$平面 $ABCD$.

因为 $AE\subset$平面 $ABCD$,则 $PF\perp AE$. ① ……………………………………… (2 分)

因为四边形 $ABCD$ 为正方形,E 为 BC 的中点,则

$\text{Rt}\triangle DAF\cong\text{Rt}\triangle ABE$,所以$\angle ADF=\angle BAE$,

从而$\angle ADF+\angle EAD=\angle BAE+\angle EAD=\angle BAD=90°$,

所以 $DF\perp AE$. ② ……………………………………………………………………………………… (4 分)

结合①②知,$AE\perp$平面 PDF,所以 $AE\perp PD$. ………………………………………………………… (5 分)

解法二:因为平面 $PAB\perp$平面 $ABCD$,$AD\perp AB$,则

$AD\perp$平面 PAB,所以 $AD\perp AP$,从而$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=0$,$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AD}=0$. ……………………………………… (2 分)

因为 $PB=AB$,$\angle PBA=60°$,则$\triangle PAB$ 为正三角形.

设 $AB=2$,则 $AD=AP=2$. …………………………………………………………………………………… (3 分)

所以$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{PD}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE})\cdot(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AP})=\left(\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\right)\cdot(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AP})=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}^2-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP}=2-4\cos 60°=0$,

则$\overrightarrow{AE}\perp\overrightarrow{PD}$,所以 $AE\perp PD$. ……………………………………………………………………… (5 分)

(2)解法一：分别取 PA,PD 的中点 G,H，则 $GH \underline{\mathbin{/\!/}} \frac{1}{2}AD$.

又 $BE \underline{\mathbin{/\!/}} \frac{1}{2}AD$，则 $GH \underline{\mathbin{/\!/}} BE$，所以四边形 $BGHE$ 为平行四边形，从而 $EH // BG$. ……………………………… (6 分)

因为 $PB=AB$，则 $BG \perp PA$. 因为平面 $PAB \perp$ 平面 $ABCD$，$AD \perp AB$，则 $AD \perp$ 平面 PAB，

从而 $AD \perp BG$，所以 $BG \perp$ 平面 PAD，从而 $EH \perp$ 平面 PAD.

连接 AH，则 $\angle EAH$ 为直线 AE 与平面 PAD 所成的角. …………………………………………… (8 分)

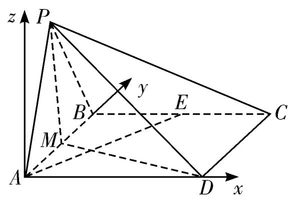
设正方形 $ABCD$ 的边长为 1，$PA=x(0<x<2)$，则 $BE=GH=\frac{1}{2}$，$AG=\frac{x}{2}$.

从而 $AE=\sqrt{AB^2+BE^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}$，$AH=\sqrt{AG^2+GH^2}=\frac{\sqrt{x^2+1}}{2}$. ……………………………… (10 分)

在 Rt$\triangle AHE$ 中，$\cos\angle EAH=\frac{AH}{AE}=\frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{5}}$.

因为当 $0<x<2$ 时，$f(x)=\frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{5}}$ 单调递增，则 $\cos\angle EAH\in\left(\frac{\sqrt{5}}{5},1\right)$，

所以直线 AE 与平面 PAD 所成角的余弦值的取值范围是$\left(\frac{\sqrt{5}}{5},1\right)$. ……………………………… (12 分)



解法二：以直线 AD 为 x 轴，AB 为 y 轴，过点 A 且垂直于平面 $ABCD$ 的直线为 z 轴，建立空间直角坐标系. ……………………………………… (6 分)

设正方形 $ABCD$ 的边长为 1，则$\overrightarrow{AD}=(1,0,0)$，$\overrightarrow{AE}=\left(\frac{1}{2},1,0\right)$. …… (7 分)

在平面 PAB 内过点 P 作 AB 的垂线，垂足为 M.

因为平面 $PAB \perp$ 平面 $ABCD$，则 $PM \perp$ 平面 $ABCD$.

设 $AM=a(0<a<2)$，则 $BM=|1-a|$.

因为 $PB=1$，则 $PM=\sqrt{PB^2-BM^2}=\sqrt{1-(1-a)^2}=\sqrt{2a-a^2}$，所以$\overrightarrow{AP}=(0,a,\sqrt{2a-a^2})$. …… (8 分)

设 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$ 为平面 PAD 的一个法向量，则$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AD}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AP}=0,\end{cases}$ 即$\begin{cases}x=0,\\ ay+\sqrt{2a-a^2}z=0.\end{cases}$

取 $z=-a$，则 $y=\sqrt{2a-a^2}$，所以 $\boldsymbol{m}=(0,\sqrt{2a-a^2},-a)$. ……………………………………… (9 分)

于是 $\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AE}=\sqrt{2a-a^2}$，$|\boldsymbol{m}|=\sqrt{2a}$.

又 $|\overrightarrow{AE}|=\frac{\sqrt{5}}{2}$，则 $\cos\langle\boldsymbol{m},\overrightarrow{AE}\rangle=\frac{\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AE}}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\overrightarrow{AE}|}=\frac{2}{\sqrt{5}}\sqrt{1-\frac{a}{2}}$. ……………………………………… (10 分)

设直线 AE 与平面 PAD 所成的角为 θ，则 $\sin\theta=\frac{2}{\sqrt{5}}\sqrt{1-\frac{a}{2}}$.

从而 $\cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\sqrt{\frac{2a+1}{5}}$. ……………………………………………………… (11 分)

因为函数 $f(a)=\sqrt{\frac{2a+1}{5}}$ 单调递增，则当 $0<a<2$ 时，则 $\cos\theta\in\left(\frac{\sqrt{5}}{5},1\right)$，

所以直线 AE 与平面 PAD 所成角的余弦值的取值范围是$\left(\frac{\sqrt{5}}{5},1\right)$. ……………………………… (12 分)

20.**【解析】**(1)由已知，$e=\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$，则 $a=2c$. …………………………………………………… (1 分)

设点 F_1,F_2 关于直线 l 的对称点分别为 M,N，因为点 O,C 关于直线 l 对称，O 为线段 F_1F_2 的中点，

则 C 为线段 MN 的中点，从而线段 MN 为圆 C 的一条直径，所以 $|F_1F_2|=|MN|=2$，即 $2c=2$，即 $c=1$.

…………………………………………………………………………………… (3 分)

于是 $a=2,b^2=a^2-c^2=3$，所以椭圆 E 的方程是 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$. …………………………… (4 分)

(2)因为原点 O 为线段 F_1F_2 的中点，圆心 C 为线段 MN 的中点，直线 l 为线段 OC 的垂直平分线，

所以点 O 与 C 也关于直线 l 对称，

因为点 $C(2m,4m)$，则线段 OC 的中点为 $(m,2m)$，直线 OC 的斜率为 2，又直线 l 为线段 OC 的垂直平分线，

所以直线 l 的方程为 $y-2m=-\frac{1}{2}(x-m)$，即 $y=-\frac{1}{2}x+\frac{5m}{2}$. ……………………………… (6 分)

将 $y=-\frac{1}{2}x+\frac{5m}{2}$ 代入 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$，得 $3x^2+4\left(-\frac{x}{2}+\frac{5m}{2}\right)^2=12$，即 $4x^2-10mx+25m^2-12=0$.

设点 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=\frac{5m}{2}$，$x_1x_2=\frac{25m^2-12}{4}$. ……………………………… (7 分)

所以 $k_{AC}+k_{BC}=\frac{y_1-4m}{x_1-2m}+\frac{y_2-4m}{x_2-2m}=-\frac{1}{2}\left(\frac{x_1+3m}{x_1-2m}+\frac{x_2+3m}{x_2-2m}\right)$

$=-\frac{(x_1+3m)(x_2-2m)+(x_2+3m)(x_1-2m)}{2(x_1-2m)(x_2-2m)}$

$=-\frac{2x_1x_2+m(x_1+x_2)-12m^2}{2x_1x_2-4m(x_1+x_2)+8m^2}$. ………………………………………………………… (8 分)

由已知，$k_{AC}+k_{BC}=\frac{2}{3}$，则 $\frac{2x_1x_2+m(x_1+x_2)-12m^2}{2x_1x_2-4m(x_1+x_2)+8m^2}+\frac{2}{3}=0$，得 $2x_1x_2-m(x_1+x_2)-4m^2=0$.

所以 $\frac{25m^2-12}{2}-\frac{5m^2}{2}-4m^2=0$，即 $m^2=1$，即 $m=\pm1$. ……………………………………… (10 分)

因为直线 l 与椭圆 E 相交，则 $\Delta=100m^2-16(25m^2-12)>0$，解得 $m^2<\frac{16}{25}$，即 $|m|<\frac{4}{5}$.

因为 $\frac{4}{5}<1$，所以不存在实数 m，使直线 AC 与 BC 的斜率之和为 $\frac{2}{3}$. …………………………… (12 分)

21.**【解析】**(1)设甲同学正确配对 3 对为事件 A，正确配对 5 对为事件 B，甲同学能晋级为事件 C，

则 $C=A+B$，且 A,B 互斥. ……………………………………………………………………… (1 分)

因为甲同学只有一组能正确配对，其余四组都随机配对，则 $P(A)=\frac{C_4^2}{A_4^4}=\frac{1}{4}$，$P(B)=\frac{1}{A_4^4}=\frac{1}{24}$. …… (3 分)

从而 $P(C)=P(A)+P(B)=\frac{1}{4}+\frac{1}{24}=\frac{7}{24}$，所以甲同学能晋级的概率为 $\frac{7}{24}$. ……………………… (4 分)

(2)设选择方式一、二的班级团队挑战成功的概率分别为 P_1,P_2.

当选择方式一时，因为两人都回答错误的概率为 $(1-p)^2$，则两人中至少有一人回答正确的概率为

$1-(1-p)^2$，所以 $P_1=[1-(1-p)^2]^n=p^n(2-p)^n$. ……………………………………………… (6 分)

当选择方式二时，因为一个小组闯关成功的概率为 p^n，则一个小组闯关不成功的概率为 $1-p^n$，

所以 $P_2=1-(1-p^n)^2=p^n(2-p^n)$. ………………………………………………………… (7 分)

所以 $P_1-P_2=p^n(2-p)^n-p^n(2-p^n)=p^n[(2-p)^n+p^n-2]$. ……………………………… (8 分)

设 $f(n)=(2-p)^n+p^n-2$，则 $f(n+1)-f(n)=(2-p)^{n+1}+p^{n+1}-(2-p)^n-p^n$

$=(2-p)^n(1-p)+p^n(p-1)=(1-p)[(2-p)^n-p^n]$. ……………………………………………（10 分）

因为 $0<p<1$，则 $1-p>0$，$2-p>1$，从而 $(2-p)^n>1$，$p^n<1$，所以 $f(n+1)-f(n)>0$，

即 $f(n+1)>f(n)$，所以 $f(n)$ 单调递增. ……………………………………………（11 分）

因为 $f(2)=(2-p)^2+p^2-2=2p^2-4p+2=2(p-1)^2>0$，则当 $n\geqslant 15$ 时，$f(n)>0$，从而 $P_1-P_2>0$，

即 $P_1>P_2$. 所以为使本班挑战成功的可能性更大，应选择方式一参赛. ……………………（12 分）

22.【解析】(1) $f'(x)=\frac{a}{x}-\cos x+1(x>0)$. ……………………………………………（1 分）

若 $a>0$，因为 $x>0$，$1-\cos x\geqslant 0$，则 $f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，符合要求. ………（2 分）

若 $a<0$，则当 $x\in\left(0,-\frac{a}{2}\right)$ 时，$\frac{a}{x}<-2$，从而 $f'(x)<-2-\cos x+1=-(1+\cos x)\leqslant 0$，

所以 $f(x)$ 在 $\left(0,-\frac{a}{2}\right)$ 上单调递减，不合要求.

综上分析，a 的取值范围是 $(0,+\infty)$. ……………………………………………（4 分）

(2) 令 $f'(x)=0$，则 $\frac{a}{x}-\cos x+1=0$，即 $a=x\cos x-x$.

设 $g(x)=x\cos x-x$，则 $g'(x)=\cos x-x\sin x-1$. ……………………………………………（5 分）

①当 $x\in(0,\pi)$ 时，$\cos x<1$，$\sin x>0$，则 $\cos x-1<0$，$-x\sin x<0$，从而 $g'(x)<0$，所以 $g(x)$ 单调递减.

……………………………………………………………………………（6 分）

②当 $x\in\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$ 时，$g''(x)=-\sin x-(\sin x+x\cos x)=-(2\sin x+x\cos x)$.

因为 $\sin x<0$，$\cos x<0$，则 $g''(x)>0$，从而 $g'(x)$ 单调递增. 因为 $g'(\pi)=-2<0$，$g'\left(\frac{3\pi}{2}\right)=\frac{3\pi}{2}-1>0$，

则 $g'(x)$ 在 $\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$ 上有唯一零点，记为 x_0，且当 $x\in(\pi,x_0)$ 时，$g'(x)<0$，则 $g(x)$ 单调递减；

当 $x\in\left(x_0,\frac{3\pi}{2}\right)$ 时，$g'(x)>0$，则 $g(x)$ 单调递增. ……………………………………（8 分）

③当 $x\in\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right)$ 时，$g'''(x)=-(2\cos x+\cos x-x\sin x)=x\sin x-3\cos x$.

因为 $\sin x<0$，$\cos x>0$，则 $g'''(x)<0$，从而 $g''(x)$ 单调递减.

因为 $g''\left(\frac{3\pi}{2}\right)=2>0$，$g''(2\pi)=-2\pi<0$，则 $g''(x)$ 在 $\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right)$ 内有唯一零点，记为 x_1，且当 $x\in\left(\frac{3\pi}{2},x_1\right)$ 时，

$g''(x)>0$，$g'(x)$ 单调递增；当 $x\in(x_1,2\pi)$ 时，$g''(x)<0$，$g'(x)$ 单调递减.

因为 $g'\left(\frac{3\pi}{2}\right)=\frac{3\pi}{2}-1>0$，$g'(2\pi)=0$，则当 $x\in\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right)$ 时，$g'(x)>0$，所以 $g(x)$ 单调递增. ……（10 分）

综上分析，$g(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递减，在 $(x_0,2\pi)$ 上单调递增.

因为 $g(0)=g(2\pi)=0$，则当 $g(x_0)<a<0$ 时，直线 $y=a$ 与函数 $g(x)$ 的图象在 $(0,2\pi)$ 上有两个交点，

从而 $f'(x)$ 有两个变号零点，即 $f(x)$ 在 $(0,2\pi)$ 上恰有两个极值点.

因为 $g'(x_0)=0$，则 $\cos x_0-x_0\sin x_0-1=0$，即 $\cos x_0=1+x_0\sin x_0$.

从而 $g(x_0)=x_0\cos x_0-x_0=x_0(1+x_0\sin x_0)-x_0=x_0^2\sin x_0$. 取 $\theta=x_0$，则 $\cos\theta=1+\theta\sin\theta$，

且当 $\theta^2\sin\theta<a<0$ 时，函数 $f(x)$ 在 $(0,2\pi)$ 上恰有两个极值点. ……………………………（12 分）