2022 高三 秋季联赛数学参考答案及评分细则

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
B	D	C	D	C	A	B	D	AB	BC	CD	AD

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1．【答案】B

【解析】解：$A=\{x\in Z|-2\le x<3\}=\{-2,-1,0,1,2\}$, $B=\{x|\ \ln x\le 1\}=\{x\,|\,0<x\le \mathrm{e}\}$

所以 $A\cap B=\{1,2\}$.

故选：B.

2．【答案】D

解析：$z=i^{2022}+\frac{|3+4i|}{3+4i}=-1+\frac{5(3-4i)}{25}=-1+\frac{3-4i}{5}=-\frac{2}{5}-\frac{4}{5}i,\ \bar{z}=-\frac{2}{5}+\frac{4}{5}i$，虚部为 $\frac{4}{5}$.

故选 D .

3．【答案】C

【解析】设底面半径为 r，则 $l\cdot\pi=2\pi r\Rightarrow r=\frac{l}{2}=\sqrt{2}$，故选 D 项.

故选：C.

4．【答案】D

【解析】易知 $a_n=2n$， $b_n=2^n$，

所以 $b_1=2,b_2=2^2,b_3=2^3,b_4=2^4,b_5=2^5,b_6=2^6,b_7=2^7>100$，又 $a_{50}=100$

所以 $\{c_n\}$ 的前 50 项和为

$$(a_1+a_2+\cdots+a_{56})-(b_1+b_2+\cdots+b_6)=\frac{2+2\times 56}{2}\times 56-\frac{2(1-2^6)}{1-2}=3066.$$

故选：D.

5．【答案】C

【解析】因为 α,β 为锐角，所以 $0<\alpha+\beta<\pi$， $\sin(\alpha+\beta)=\frac{4}{5}$， $\tan(\alpha+\beta)=-\frac{4}{3}$，

因为 $\tan\alpha=3$，所以 $\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\frac{2\times 3}{1-9}=-\frac{3}{4}$ ，

$$\tan(\alpha-\beta)=\tan[2\alpha-(\alpha+\beta)]=\frac{\tan 2\alpha-\tan(\alpha+\beta)}{1+\tan 2\alpha\cdot\tan(\alpha+\beta)}=\frac{-\frac{3}{4}-(-\frac{4}{3})}{1+(-\frac{3}{4})\cdot(-\frac{4}{3})}=\frac{7}{24}.$$

故选：C.

6．【答案】A

【解析】解：令 $x=-1$，得 $f(1)+f(-1)=f(1)$，即 $f(-1)=0$，

因为 $f(x)$ 为偶函数，所以 $f(1)=0$， $f(x+2)+f(x)=f(1)=0$，$f(x+4)=-f(x+2)=f(x)$，所以 $f(x)$ 是以 4 为周期的函数，

因为 $f(x)$ 在 $(0,2)$ 上单调递增，所以 $f(x)$ 在一个周期内有两个零点，

故 $f(x)$ 在区间 $[-100,100]$ 上的零点个数为 $50\times 2=100$．

故选：A．

7．【答案】B

【解析】由题意可得 $g(x)=\cos\left(2\omega x\right)$，由 $g\left(x\right)=0$，可得 $2\omega x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$，即

$x=\dfrac{k\pi}{2\omega}+\dfrac{\pi}{4\omega}=\dfrac{(2k+1)\pi}{4\omega}$， $k\in\mathbf{Z}$，显然当 $k=-4,-3,-2,-1,0,1,2,3$ 时，零点在 $[-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}]$ 内，

当 $k=3$ 时， $x=\dfrac{7\pi}{4\omega}\le\dfrac{\pi}{4}$，即 $7\le\omega$；当 $k=4$ 时， $x=\dfrac{9\pi}{4\omega}>\dfrac{\pi}{4}$，即 $\omega<9$

综上可得， $7\le\omega<9$．

故选：B．

8．【答案】D

【解析】由题意知， $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)$，

所以
$$\begin{aligned}a_3=&(-1\times-2)+(-1\times-3)+(-1\times-4)+(-1\times-5)\\&+(-2\times-3)+(-2\times-4)+(-2\times-5)\\&+(-3\times-4)+(-3\times-5)\\&+(-4\times-5)\\=&85\end{aligned}$$

故选：D．

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求的. 全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9．【答案】AB

【解析】这 10 年居民人均年收入的极差为 35128-16510=18618，故 C 项错误；这 10 年居民人均年收入的 80%分位数为 2019 年和 2020 年居民人均可支配收入的平均值，故 D 项错误.

故选：AB.

10．【答案】BC

【解析】设 $|AF|=m$，$|BF|=n$，过点 A，B 分别作抛物线 C 的准线的垂线，垂足分别为 A_1，B_1，由抛物线的定义可得 $|AA_1|=m$， $|BB_1|=n$，

所以 $n=p+n\cos 60^\circ\Rightarrow n=2p$， $B(\dfrac{3p}{2},\sqrt{3}p)$，同理 $m=\dfrac{2p}{3}$， $A(\dfrac{p}{6},\dfrac{\sqrt{3}p}{3})$

$k_{AB}=\dfrac{\sqrt{3}p-\dfrac{\sqrt{3}}{3}p}{\dfrac{3}{2}p-\dfrac{1}{6}p}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，故 A 项错误；B 项正确；

$S_1=\dfrac{1}{2}|OF|\ y_B\quad \dfrac{1}{2}\ \dfrac{p}{2}\ n\ \sin 60\ =\dfrac{\sqrt{3}p^2}{4},S_2=\dfrac{1}{2}|OF|\ y_A\quad \dfrac{1}{2}\ \dfrac{p}{2}\ m\ \sin 60\ =\dfrac{\sqrt{3}p^2}{12}$，

所以 $S_1-S_2=\dfrac{\sqrt{3}p^2}{4}-\dfrac{\sqrt{3}p^2}{12}=\dfrac{\sqrt{3}p^2}{6}$.

故选：BC.

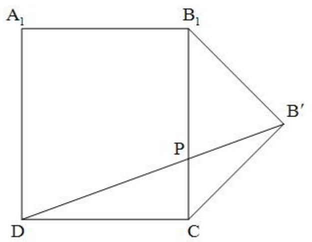
11．【答案】CD

【解析】对于 A：因为 $A_1D//B_1C$，易知 $BD_1\perp$ 平面 A_1C_1D，点 P 到平面 A_1C_1D 的距离为

$d=\dfrac{1}{3}BD_1=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，$S_{\triangle A_1C_1D}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times 8=2\sqrt{3}$，所以三棱锥 $P-A_1C_1D$ 的体积为

$\dfrac{1}{3}\quad S_{\triangle A_1C_1D}\quad d=\dfrac{4}{3}$，故 A 错误；

对于 B：将△ BCB_1 旋转至平面 A_1B_1CD 内，如图所示，当 P,B',D 三点共线时，$PB+PD$ 的取得最小值，且最小值为 $\sqrt{(2+\sqrt{2})^2+\sqrt{2}^2}=2\sqrt{2+\sqrt{2}}$，故 B 错误；



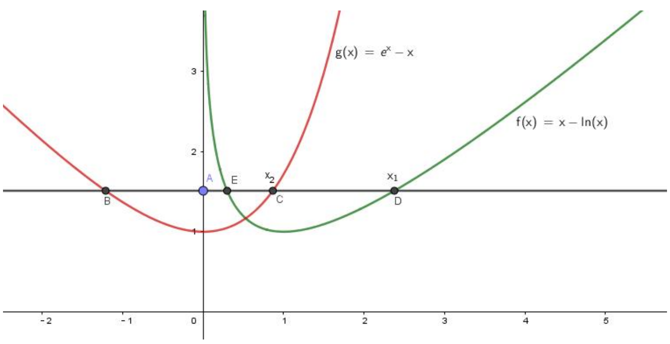
对于 C：正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的外接球是以直径 BD_1 为直径的球，线段 CB_1 在该外接球的内部，所以 $BPD_1\quad 90$，故 C 正确；

对于 D：因为 $A_1D//B_1C$，异面直线 AP 与 A_1D 所成角转化为直线 AP 与 B_1C 所成角，$\triangle AB_1C$ 是正三角形，当点 P 与线段 B_1C 的端点重合时，异面直线 AP 与 A_1D 所成角取得最小值为 $\dfrac{\pi}{3}$，当点 P 为线段 B_1C 的中点时，所成角取得最大值为 $\dfrac{\pi}{2}$，故异面直线 AP 与 A_1D 所成角的取值范围是 $\left[\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{2}\right]$，D 正确.

故选：CD

12．【答案】AD

【解析】$f(x)=x-\ln x, f'(x)=\dfrac{x-1}{x}$，$f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 上单调递减，$(1,+\infty)$ 上单调递增，$f(x)$ 的最小值为 1，函数 $g(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，$(0,+\infty)$ 上单调递增，$g(x)$ 的最小值为 1.草图如下图所示：



由 $f(x_1)=g(x_2)=t$ 成立，则 $t\geq 1$，故 A 正确；当 $0<x_1<1$， $x_2>0$ 时， x_1-x_2 的最小值显然不为 1，故 B 错误；

由 $x_1-\ln x_1=\mathrm{e}^{x_2}-x_2=\mathrm{e}^{x_2}-\ln \mathrm{e}^{x_2}=t$，可知当 $0<x_1<1$， $x_2<0$ 或 $x_1>1$， $x_2>0$ 时，$x_1=\mathrm{e}^{x_2}$； $x_1x_2=x_2\mathrm{e}^{x_2}$，令 $h(x)=x\mathrm{e}^x,h'(x)=(x+1)\mathrm{e}^x$，当 $x<-1$ 时，$h'(x)<0$，当 $x>-1$ 时， $h'(x)>0$，所以 $h(x)$ $(-\infty,-1)$ 上单调递减，在 $(-1,+\infty)$ 上单调递增，所以

$h(x)_{\min}=h(-1)=-\dfrac{1}{e}$，故 C 错误；$\dfrac{tx_2}{x_1}-x_2=\dfrac{(\mathrm{e}^{x_2}-x_2)x_2}{\mathrm{e}^{x_2}}-x_2=-\dfrac{{x_2}^2}{\mathrm{e}^{x_2}}$

令 $F(x)=-\dfrac{x^2}{\mathrm{e}^x},F'(x)=-\dfrac{2x-x^2}{\mathrm{e}^x}$， $F(x)$ $(0,2)$ 上单调递减，在 $(2,+\infty)$ 上单调递增，所以

$F(x)_{\min}=F(2)=-\dfrac{4}{e^2}$，故 D 正确；

故选：AD

三、填空题:本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13．【答案】60°

【解析】由 $2|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{3}|\boldsymbol{a}|$，平方可得 $4\boldsymbol{a}^2-8\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+4\boldsymbol{b}^2=3\boldsymbol{a}^2$，又 $|\boldsymbol{a}|=2|\boldsymbol{b}|$，

整理可得 $\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\dfrac{1}{2}$，所以 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 60° .

故答案为：60° .

14．【答案】23

【解析】由正态分布 $N(20,4)$ 可知： $\mu=20$， $\sigma=2$， $\mu+2\sigma=24$，

$\therefore P(x>24)=\dfrac{1-0.9545}{2}=0.02275$，

尺寸高于 22 的个数大约为 $1000\times 0.02275=22.75\approx 23$.

故答案为：23

15．【答案】e^2

【解析】由题意，可得 $\dfrac{e^a}{a}\geq n\dfrac{\ln b}{b}$ 恒成立，令 $f(x)=\dfrac{e^x}{x},g(x)=\dfrac{\ln x}{x}$，

$f'(x)=\dfrac{e^x(1-x)}{x^2}$，当 $x\in(1,+\infty)$ 时， $f'(x)<0,f(x)$ 单减，所以 $f(x)>f(1)=e$，

$g'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$，当 $x\in(1,e)$ 时， $f'(x)<0,f(x)$ 单增，

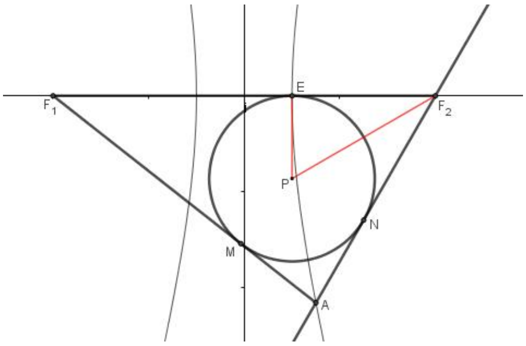
当 $x\in(e,+\infty)$ 时， $f'(x)<0,f(x)$ 单减，又 $g(x)_{\max}=g(e)=\dfrac{1}{e}$，

要使不等式 $\dfrac{e^a}{a}\geq n\dfrac{\ln b}{b}$ 恒成立，必有 $e\geq\dfrac{n}{e}$，即 $n\leq e^2$

故答案为： e^2.

16．【答案】4

【解析】如图，设内切圆与 AF_1,AF_2,F_1F_2 分别切于点 M,N,E



因为 A 在双曲线的右支上，所以 $|AF_1|-|AF_2|=2a$，

又 $|AF_1|=|AM|+|MF_1|,|AF_2|=|AN|+|NF_2|$，

由切线长定理可知，$|AM|=|AN|,|F_1M|=|F_1E|,|F_2N|=|F_2E|$.

∴ $|AF_1|-|AF_2|=|EF_1|-|EF_2|=2a$，故点 E 在双曲线上，所以 $\triangle AF_1F_2$ 的内切圆的圆心必在直线 $x=a$ 上，所以 $\tan\angle PF_2E=\frac{PE}{EF_2}$， 即 $\frac{\sqrt{3}a}{c-a}=\tan 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3}$，解得 $\frac{c}{a}=4$

故答案为： 4 .

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。

17．(10 分）

【答案】(1) $B=\frac{\pi}{4}$

(2) $S_{\triangle ABC}=2\sqrt{3}$，周长为 $3+\sqrt{33}$.

（1）利用正弦定理得：$\sqrt{2}\sin B\cos C=\sqrt{2}\sin A-\sin C$， 1 分

即 $\sqrt{2}\sin B\cos C=\sqrt{2}\sin(B+C)-\sin C$， 2 分

化简得 $\sin C=\sqrt{2}\sin C\cos B$，由 C 为 $\triangle ABC$ 的内角，得 $\sin C\neq 0$，

可得 $\cos B=\frac{\sqrt{2}}{2}$， 4 分

又 B 为 $\triangle ABC$ 的内角，所以 $B=\frac{\pi}{4}$. 5 分

（2）$S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}c\cdot\frac{4}{5}a\cdot\sin B=\frac{7}{5}$，即 $ac=\frac{7\sqrt{2}}{2}$ ① 6 分

$\sin A=\sin(C+\frac{\pi}{4})=\sin C\cos\frac{\pi}{4}+\cos C\sin\frac{\pi}{4}=\frac{7\sqrt{2}}{10}$ 7 分

利用正弦定理可得，$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C},\frac{a}{\frac{7\sqrt{2}}{10}}=\frac{c}{\frac{4}{5}}$，即 $a=\frac{7\sqrt{2}}{8}c$ ② 8 分

联立①②可得 $c=2$. 10 分

18.（12 分）

【答案】（1）3 人都没通过初赛的概率为 $P_0=\left(1-\frac{2}{3}\right)^3=\frac{1}{27}$，

所以这三人中至少有 1 人通过初赛的概率 $P_1=1-P_0=\frac{26}{27}$．　　3 分

（2）设随机抽中甲、乙、丙的事件分别记为 A,B,C，甲、乙、丙通过决赛的事件分别记为 D,E,F，随机抽取一名学生，他通过决赛的事件记为 G，

则 $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{3}$，

$$P(D|A)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{3},P(E|B)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{3},P(F|C)=\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}=\frac{1}{2},$$

由全概率公式，得

$$P(G)=P(A)\cdot P(D|A)+P(B)\cdot P(E|B)+P(C)\cdot P(F|C)$$

$$=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{7}{18}$$　　7 分

（3）依题意 ξ 可能取值为 0，1，2，3．

$$P(D)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{3},P(E)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{3},P(F)=\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}=\frac{1}{2}$$

$$P(\xi=0)=P(\overline{D}\overline{E}\overline{F})=\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{2}{9},$$

$$P(\xi=1)=P(D\overline{E}\overline{F}+\overline{D}E\overline{F}+\overline{D}\overline{E}F)=\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{4}{9},$$

$$P(\xi=2)=P(DE\overline{F}+\overline{D}EF+D\overline{E}F)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{5}{18},$$

$$P(\xi=3)=P(DEF)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{18},$$

所以 ξ 的分布列为：

ξ	0	1	2	3
P	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{1}{18}$

$E_\xi=0\times\frac{2}{9}+1\times\frac{4}{9}+2\times\frac{5}{18}+3\times\frac{1}{18}=\frac{7}{6}$．　　12 分

19．（12 分）

【答案】(1)略 ；(2)$\dfrac{1}{2}$

（1）证明：由题意可得，$PE\perp AE$，$CE\perp AE$，因为 $PE\cap CE=E$，

所以 $AE\perp$平面 PEC，因为 $EM\subseteq$平面 PEC，

所以 $AE\perp EM$

因为 $BC//AE$，所以 $EM\perp BC$

因为 $PE=EC$，M 为 PC 的中点

所以 $EM\perp PC$

因为 $PC\cap BC=C$，所以 $EM\perp$平面 PBC

又 $EN\subseteq$平面 EMC

所以，平面 $EMN\perp$平面 PBC； 5 分

（2）平面 $PAE\perp$平面 $ABCE$，平面 $PAE\cap$平面 $ABCE=AE$，$PE\perp AE$

所以 $PE\perp$平面 $ABCE$

以 EA，EC，EP 分别为 x,y,z 轴建立空间直角坐标系，不妨设 $EA=2$，设 $CN=a$

$P(0,0,2),A(2,0,0),B(2,2,0),C(0,2,0),M(0,1,1),N(a,2,0)$

设平面 PAB 的法向量为$\vec{n}_1=(x,y,z)$，$\overrightarrow{AB}=(0,2,0)$，$\overrightarrow{AP}=(-2,0,2)$，

$\begin{cases}\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}_1=2y=0\\ \overrightarrow{AP}\cdot\vec{n}_1=-2x+2z=0\end{cases}$，令 $z=1$，$\vec{n}_1=(1,0,1)$， 8 分

设平面 EMN 的法向量为$\vec{n}_2=(x,y,z)$，$\overrightarrow{EM}=(0,1,1)$，$\overrightarrow{EN}=(a,2,0)$，

$\begin{cases}\overrightarrow{EM}\cdot\vec{n}_2=y+z=0\\ \overrightarrow{EN}\cdot\vec{n}_2=ax+2y=0\end{cases}$，令 $y=a$，$\overrightarrow{n_2}=(-2,a,-a)$， 10 分

设平面 EMN 与平面 PAB 所成的锐二面角为α，

$\cos\alpha=\dfrac{|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_2|}=\dfrac{|-2-a|}{\sqrt{2}\times\sqrt{4+a^2+a^2}}=\dfrac{|a+2|}{2\sqrt{a^2+2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，解得 $a=1$

所以，$\dfrac{BN}{BC}$的值为$\dfrac{1}{2}$. 12 分

20.（12 分）

【答案】(1)证明见解析；(2) $S_n=2^n-1$

（1）由题意，$a_{n+2}+a_{n+1}=2(a_{n+1}+a_n)$，且 $a_1+a_2=3$，

所以数列$\{a_{n+1}+a_n\}$是以 3 为首项，2 为公比的等比数列. 5 分

（2）由（1）可得 $a_{n+1}+a_n=3\cdot 2^{n-1}$， 6 分

当 n 为偶数时，

$$S_n=(a_1+a_2)+(a_3+a_4)+\cdots+(a_{n-1}+a_n)=3\cdot2^0+3\cdot2^2+\cdots+3\cdot2^{n-2}=2^n-1$$ 9 分

当 n 为奇数时，

$$S_n=a_1+(a_2+a_3)+(a_4+a_5)+\cdots+(a_{n-1}+a_n)=1+3\cdot 2^1+3\cdot 2^3+\cdots+3\cdot 2^{n-2}=2^n-1$$

所以数列$\{a_n\}$的前 n 项和$S_n=2^n-1$. 12 分

21．（12 分）

【答案】(1) $\frac{x^2}{4}+y^2=1$；(2)证明见解析，定值为$-\frac{1}{4}$

（1）由题意，$A\left(-a,0\right)$，$B\left(a,0\right)$，设$P(x_0,y_0)$，

$k_{PA}=\frac{y_0}{x_0+a},k_{PB}=\frac{y_0}{x_0-a}$，由题意可得$\frac{y_0}{x_0+a}\cdot\frac{y_0}{x_0-a}=-\frac{1}{4}$，

即$\frac{{y_0}^2}{{x_0}^2-a^2}=-\frac{1}{4}$，可得$\frac{(1-\frac{{x_0}^2}{a^2})b^2}{{x_0}^2-a^2}=-\frac{1}{4}\Rightarrow\frac{b^2}{a^2}=\frac{1}{4}\Rightarrow\frac{a^2-c^2}{a^2}=\frac{1}{4}$

又$2c=2\sqrt{3}$，所以$c=\sqrt{3}$，解得$a=2$

所以，椭圆E的方程为$\frac{x^2}{4}+y^2=1$； 5 分

（2）证明：由题意知，直线MP的斜率存在，设直线$MP:y=kx+m$，且

$2=-2k+m$ $P(x_1,y_1)$，$M(x_2,y_2)$

联立$\begin{cases}y=kx+m\\ \frac{x^2}{4}+y^2=1\end{cases}$，得$(1+4k^2)x^2+8kmx+4m^2-4=0$

由$\Delta>0$，得$4k^2+1-m^2>0$，

所以$x_1+x_2=\frac{-8km}{1+4k^2}$，$x_1x_2=\frac{4m^2-4}{1+4k^2}$， 7 分

设$G(-t,t)$，由G,M,B三点共线可得$\frac{t}{-t-2}=\frac{y_2}{x_2-2}\Rightarrow t=\frac{-2y_2}{x_2+y_2-2}$

$k_{AG}=\frac{t}{-t+2},k_{AP}=\frac{y_1}{x_1+2}$，

$$k_{AG}\cdot k_{AP}=\frac{t}{-t+2}\cdot\frac{y_1}{x_1+2}=-\frac{y_1y_2}{(x_2+2y_2-2)(x_1+2)}=-\frac{y_1y_2}{[(2k+1)x_2+2m-2](x_1+2)}$$

$$=-\frac{y_1y_2}{[(m-1)x_2+2m-2](x_1+2)}=-\frac{y_1y_2}{(m-1)(x_2+2)(x_1+2)}=-\frac{k^2x_1x_2+km(x_1+x_2)+m^2}{(m-1)[x_1x_2+2(x_1+x_2)+4]}$$

$$=-\frac{k^2\frac{4m^2-4}{1+4k^2}+km\cdot\frac{-8km}{1+4k^2}+m^2}{(m-1)[\frac{4m^2-4}{1+4k^2}+2\cdot\frac{-8km}{1+4k^2}+4]}=-\frac{k^2(4m^2-4)-8k^2m^2+m^2+4k^2m^2}{(m-1)[4m^2-4-16km+4+16k^2]}$$

$$=-\frac{m^2-4k^2}{4(m-1)(m^2-4km+4k^2)}=-\frac{(m-2k)(m+2k)}{4(m-1)(m-2k)^2}=-\frac{m+2k}{8(m-1)}=-\frac{m+m-2}{8(m-1)}=-\frac{1}{4}$$

所以，直线 AP,AG 的斜率之积为定值 $-\frac{1}{4}$.　　　　12 分

22.（12 分）

【解析】（1）由条件得 $f'(x)=e^x-1-2ax$，　　　　1 分

令 $h(x)=e^x-1-2ax$，则 $h'(x)=e^x-2a$，

①当 $2a\le 1$，即 $a\le\frac{1}{2}$ 时，在 $[0,+\infty)$ 上，$h'(x)\ge 0$，即 $h(x)$ 单调递增，

所以 $h(x)\ge h(0)$，即 $f'(x)\ge f'(0)=0$，

$\therefore f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上为增函数，$\therefore f(x)\ge f(0)=0$，

$\therefore a\le\frac{1}{2}$ 时满足条件.　　　　3 分

②当 $2a>1$ 时，令 $h'(x)=0$，

解得 $x=\ln 2a$，在 $(0,\ln 2a)$ 上，$h'(x)<0$，$h(x)$ 单调递减，

$\therefore$ 当 $x\in(0,\ln 2a)$ 时，有 $h(x)<h(0)=0$，即 $f'(x)<f'(0)=0$，则 $f(x)$ 在 $(0,\ln 2a)$ 上为减函数，$\therefore f(x)<f(0)=0$，不合题意.

综上，实数 a 的最大值为 $\frac{1}{2}$.　　　　5 分

（2）由（1）可知，当 $a\le\frac{1}{2}$ 时，$f(x)+x\sin x\ge e^x-1-x-\frac{1}{2}x^2+x\sin x$　　　　7 分

令 $F(x)=e^x-1-x-\frac{1}{2}x^2+x\sin x$，$x\ge 0$

①当 $0<x<\pi$ 时，由题意知 $f(x)\ge 0$，$x\sin x>0$，所以 $F(x)=e^x-1-x-\frac{1}{2}x^2+x\sin x>0$ 成立；　　　　8 分

②当 $x\ge\pi$ 时，因为 $\sin x\ge -1$，所以 $x\sin x\ge -x$，即 $F(x)\ge e^x-1-2x-\frac{1}{2}x^2$

令 $g(x)=e^x-1-2x-\frac{1}{2}x^2$，$g'(x)=e^x-2-x$，$g''(x)=e^x-1>0$

所以 $g'(x)$ 在 $(\pi,+\infty)$ 上单调递增，所以 $g'(x)\ge g'(\pi)=e^\pi-2-\pi>0$

故 $g(x)$ 在 $(\pi,+\infty)$ 上单调递增，所以 $g(x)\ge g(\pi)=e^\pi-1-2\pi-\frac{1}{2}\pi^2>0$

综上，$f(x)+x\sin x\ge 0$.　　　　12 分