2023届高三一轮复习联考(五)

数学参考答案及评分意见

1.A 【解析】易知 $A=\{x|-1\leqslant x\leqslant 3\}$，$B=\{-1,0,1,2,3\}$，所以 $A\cup B=A$，A 选项正确；$A\cap B=B$，B 选项错误；$A\supseteq B$，所以 C、D 选项错误.故选 A.

2.C 【解析】(方法一)由题可知 $z=\frac{2+i}{2-i}=\frac{3}{5}+\frac{4}{5}i$，则 $\bar{z}=\frac{3}{5}-\frac{4}{5}i$，所以 $|\bar{z}|=\sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^2+\left(-\frac{4}{5}\right)^2}=1$；

(方法二) $|\bar{z}|=|z|=\frac{|2+i|}{|2-i|}=1$.故选 C.

3.D 【解析】若 $a_1>0$，当 $q>1$ 时，数列 $\{a_n\}$ 单调递增，当 $0<q<1$ 时，数列 $\{a_n\}$ 单调递减；

若 $a_1<0$，当 $q>1$ 时，数列 $\{a_n\}$ 单调递减，当 $0<q<1$ 时，数列 $\{a_n\}$ 单调递增.所以等比数列单调性由首项和公比共同决定.故选 D.

4.B 【解析】α 为第一象限角，则 $2k\pi<\alpha<\frac{\pi}{2}+2k\pi$，$k\pi<\frac{\alpha}{2}<\frac{\pi}{4}+k\pi$，所以 $\frac{\alpha}{2}$ 为第一或第三象限角，$\tan\frac{\alpha}{2}>0$，$\tan\alpha=\frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{3}{4}$，$3\tan^2\frac{\alpha}{2}+8\tan\frac{\alpha}{2}-3=0$，$\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{3}$，或 $\tan\frac{\alpha}{2}=-3$(舍).故选 B.

5.C 【解析】设 $B=$“从乙箱中取出白球”，$A=$“从甲箱中取出白球”则 $P(A)=\frac{2}{5}$，$P(\bar{A})=\frac{3}{5}$，故由全概率公式得 $P(B)=P(A)\cdot P(B|A)+P(\bar{A})P(B|\bar{A})=\frac{2}{5}\times\frac{2}{3}+\frac{3}{5}\times\frac{1}{2}=\frac{17}{30}$.故选 C.

6.B 【解析】设这个月中的第 n 天所织布的尺数为 a_n，则 $\{a_n\}$ 为等差数列且 $\begin{cases}a_1=5,\\ S_{30}=\frac{30(a_1+a_{30})}{2}=390,\end{cases}$ 则 $\begin{cases}a_1=5,\\ a_{30}=21,\end{cases}$

则 $a_{11}+a_{12}+\cdots+a_{20}=\frac{10(a_{11}+a_{20})}{2}=\frac{10(a_1+a_{30})}{2}=130$.故选 B.

7.A 【解析】因为 $AD\perp$ 平面 BCD，所以 $AD\perp BD$，

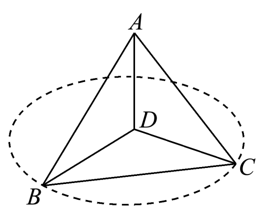
又因为 $AC\perp BD$，且 $AD\cap AC=A$，

所以 $BD\perp$ 平面 ACD，则 $BD\perp CD$，所以 AD,BD,CD 三条直线两两垂直.

$AB=AC$，可知 $BD=CD$.

如图三棱锥绕着 AD 旋转形成以 DC 为底面圆半径的圆锥.

圆锥的底面半径 $R=4$，高 $h=2$，体积 $v=\frac{1}{3}\pi R^2h=\frac{32\pi}{3}$.故选 A.



8.B 【解析】满足 $\frac{1}{2}\leqslant x_0\leqslant 3$ 的实数 x_0 有且只有一个，即导函数 $f'(x)$ 在区间 $\left[\frac{1}{2},3\right]$ 有且只有一个变号零点.

$f'(x)=x+\frac{1}{x}+m$，$f'(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增.

则 $\begin{cases}f'\left(\frac{1}{2}\right)<0,\\ f'(3)\geqslant 0,\end{cases}$ 解之得 $-\frac{10}{3}\leqslant m<-\frac{5}{2}$.故选 B.

9.ABC 【解析】显然众数是 75，$[40,50)$ 的频率是 0.1，$[50,60)$ 的频率是 0.15，$[60,70)$ 的频率是 0.25，其频率和为 0.5，所以中位数为

70,所以 A、B 正确;

平均数$=45\times0.1+55\times0.15+65\times0.25+75\times0.35+85\times0.1+95\times0.05=68.5$,所以 C 正确,D 不正确,故选 ABC.

10.BC 【解析】$f(x)$关于 $x=\frac{\pi}{6}$ 对称,则 $\frac{\pi}{6}\omega+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$,解得 $\omega=\frac{3}{2}+6k,k\in\mathbf{Z}$.

又 $0<\omega<4$,故当 $k=0$ 时,$\omega=\frac{3}{2}$,$f(x)=\sin\left(\frac{3}{2}x+\frac{\pi}{4}\right)$,将 $f(x)$的图象向左平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度得到 $g(x)=\cos\frac{3}{2}x$.

令 $\frac{3}{2}x=k\pi(k\in\mathbf{Z})$,则对称轴为 $x=\frac{2k\pi}{3}(k\in\mathbf{Z})$,显然 $x=\frac{\pi}{3}$ 不满足,故 A 错误;

令 $\frac{3x}{2}=\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$,则 $x=\frac{\pi}{3}+\frac{2k\pi}{3}(k\in\mathbf{Z})$,所以对称中心为 $\left(\frac{\pi}{3}+\frac{2k\pi}{3},0\right)(k\in\mathbf{Z})$,

显然 $k=-1$ 时,$\left(\frac{\pi}{3}+\frac{2k\pi}{3},0\right)=\left(-\frac{\pi}{3},0\right)$,故 B 正确;

令 $2k\pi\leqslant\frac{3x}{2}\leqslant\pi+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$,整理得 $\frac{4k\pi}{3}\leqslant x\leqslant\frac{2\pi}{3}+\frac{4k\pi}{3}(k\in\mathbf{Z})$,所以单调递减区间为 $\left[\frac{4k\pi}{3},\frac{2\pi}{3}+\frac{4k\pi}{3}\right](k\in\mathbf{Z})$,显然,$k=0$ 时,C 正确;最小正周期 $T=\frac{2\pi}{\frac{3}{2}}=\frac{4\pi}{3}$,故 D 不正确.故选 BC.

11.BC 【解析】当直线斜率存在时,设过$(0,1)$斜率存在的直线方程为:$y=kx+1$,联立方程组 $\begin{cases}y=kx+1,\\x^2+\frac{y^2}{2}=1,\end{cases}$ 消去 y,并整理得 $(2+k^2)x^2+2kx-1=0$,

设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,则 $x_1+x_2=\frac{-2k}{2+k^2}$,$x_1x_2=\frac{-1}{2+k^2}$,

$|AB|=\sqrt{1+k^2}\,|x_1-x_2|=\sqrt{1+k^2}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$,

$|AB|=\sqrt{1+k^2}\sqrt{\left(\frac{-2k}{2+k^2}\right)^2-4\times\frac{-1}{2+k^2}}=\frac{2\sqrt{2}(1+k^2)}{2+k^2}=2\sqrt{2}\left(1-\frac{1}{2+k^2}\right)\in[\sqrt{2},2\sqrt{2})$,

当斜率不存在时 $|AB|=2\sqrt{2}$,故 $|AB|\in[\sqrt{2},2\sqrt{2}]$.故选 BC.

12.ABC 【解析】因为 $y=f(x+2)$为偶函数,则 $f(x+2)=f(-x+2)$,可知函数 $y=f(x)$关于 $x=2$ 对称,

$f(x)=g(2x)-g(4-2x)$,把 x 换成 $2-x$ 可得 $f(2-x)=g(4-2x)-g(2x)$,两式相加可得

$f(x)+f(2-x)=0$,$y=f(x)$关于$(1,0)$对称,又 $f(x)$关于 $x=2$ 轴对称,

则可得 $f(x)=-f(2-x)=-f(2+x)$,$f(x)=-f(2+x)=f(x+4)$,可知 4 为 $f(x)$的周期,所以 ABC 都正确.

令 $x=1$,$f(1)=g(2)-g(2)=0$,$f(3)=f(1)=0$,$f(0)=-f(2)=-1$,$\sum\limits_{i=1}^{22}=5(f(1)+f(2)+f(3)+f(4))+f(1)+f(2)=1$,

故选 ABC.

13.$\frac{x^2}{4}-y^2=1$ 【解析】由题可知 $\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{5}}{2}$,$e^2=1+\frac{b^2}{a^2}=\frac{5}{4}$,则渐近线方程为 $x\pm2y=0$,焦点$(c,0)$到渐近线距离为 1,则 $c=\sqrt{5}$,所以 $a=2$,由 $c^2=a^2+b^2$ 得 $b=1$.所以双曲线方程为 $\frac{x^2}{4}-y^2=1$.

14.60 【解析】由题可知:$2^n=64$,所以 $n=6$,展开式通项为 $T_{k+1}=c_6^k(2x^2)^{6-k}(-x^{-1})^k=(-1)^k2^{6-k}c_6^kx^{12-3k}$,

令 $12-3k=0$,得 $k=4$,常数项为 $2^2C_6^4=60$.

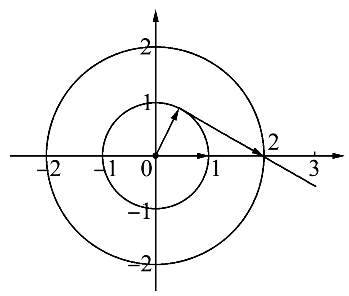
15.$\frac{1}{2}$ 【解析】解法一:设 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ,

$\cos\langle 2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}\rangle=\frac{(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\boldsymbol{a}}{|2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}||\boldsymbol{b}|}=\frac{2-\cos\theta}{\sqrt{5-4\cos\theta}}=\frac{2-\cos\theta}{\sqrt{8-4\cos\theta-3}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{4}{2-\cos\theta}-\frac{3}{(2-\cos\theta)^2}}}$,

令$\frac{1}{2-\cos\theta}=t\in\left[\frac{1}{3},1\right]$,$\cos\langle 2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}\rangle=\frac{1}{\sqrt{-3t^2+4t}}$,$\cos\langle 2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}\rangle$取最小值时,两向量夹角最大,所以$t=\frac{2}{3}$,即$\cos\theta=\frac{1}{2}$时,两向量夹角最大.

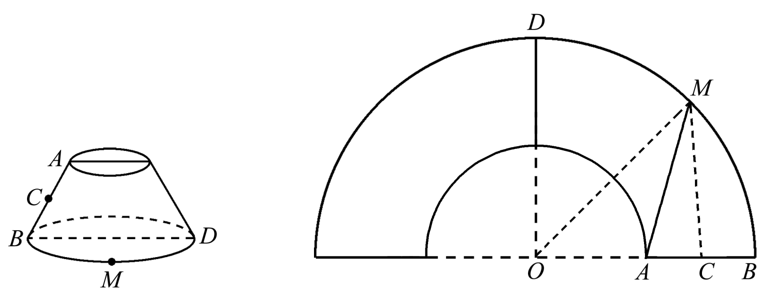
此时$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta=\frac{1}{2}$.

解法二:利用数形结合.



由图可知$2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$与$\boldsymbol{a}$夹角最大为$30°$,所以$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos 60°=\frac{1}{2}$.

16.$25-12\sqrt{2}$ 【解析】沿母线AB展开如图所示,$OM=4$,$OC=3$.$\angle COM=\frac{\pi}{4}$,由余弦定理可得:$CM^2=OC^2+OM^2-2OC\cdot OM\cos\angle COM=25-12\sqrt{2}$.



17.(1)证明过程见解析 (2)$6+2\sqrt{3}$

【解析】(1)$a\sin(B+C)=(b+c)\sin B$,即$a\sin A=(b+c)\sin B$, ……………… 1分

由正弦定理得$a^2=b^2+bc$……①, ……………… 2分

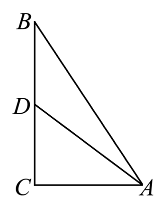
余弦定理$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$……②,

①②联立得到$b+2b\cos A=c$, ……………… 3分

由正弦定理可得$\sin B+2\sin B\cos A=\sin(A+B)$,

所以$\sin B+2\sin B\cos A=\sin A\cos B+\cos A\sin B$, ……………… 4分

所以$\sin(A-B)=\sin B$,A,B为三角形内角,所以$A-B=B$,即$A=2B$. ……………… 5分



(2)由(1)知$A=2B$,$A=\frac{\pi}{3}$,$B=\frac{\pi}{6}$,所以$\triangle ABC$为直角三角形, ……………… 6分

设$AC=2m$,则$AB=4m$,$BC=2\sqrt{3}m$,$CD=\sqrt{3}m$,

在$\triangle ACD$中,由勾股定理得$(2m)^2+(\sqrt{3}m)^2=(\sqrt{7})^2$, ……………… 8分

解之得:$m=1$,所以三角形的周长$C=4+2+2\sqrt{3}=6+2\sqrt{3}$. ……………… 10分

18.(1)$a_n=2^{n-1}+1$ (2)b_3

【解析】(1)$S_n=2a_n+n-3$①,

当$n=1$时,$a_1=2$, ……………… 1分

当$n\geqslant 2$,$S_{n-1}=2a_{n-1}+n-1-3$②, ……………… 2分

①－②得：$a_n=2a_{n-1}-1,n\geqslant 2$，即 $a_n-1=2(a_{n-1}-1),n\geqslant 2$， …………………………………………………………… 3 分

由 $S_n=2a_n+n-3$ 知 $a_n\neq 1$ 即 $a_n-1\neq 0$， ………………………………………………………………………………… 4 分

所以$\{a_n-1\}$是首项为 1 公比为 2 的等比数列，得 $a_n-1=2^{n-1}$， ……………………………………………………… 5 分

所以数列$\{a_n\}$的通项公式为：$a_n=2^{n-1}+1$． …………………………………………………………………………………… 6 分

(2)$b_n=\dfrac{n^2}{a_n-1}=\dfrac{n^2}{2^{n-1}}$，

$b_{n+1}-b_n=\dfrac{(n+1)^2}{2^n}-\dfrac{n^2}{2^{n-1}}=\dfrac{-n^2+2n+1}{2^n},n\in\mathbf{N}^*$，……………………………………………………………… 7 分

令$-n^2+2n+1>0$ 得 $n=1$ 或 $n=2$，即 $b_3>b_2>b_1$， ……………………………………………………………………… 8 分

令$-n^2+2n+1<0$ 得 $n\geqslant 3$，即 $b_n\leqslant b_3$，…………………………………………………………………………………………… 9 分

当 $n\leqslant 2$ 时 $b_{n+1}-b_n>0$， …… 10 分

当 $n\geqslant 3$ 时 $b_{n+1}-b_n<0$，又 $b_2=2,b_3=\dfrac{9}{4}$，……………………………………………………………………………………… 11 分

所以数列$\{b_n\}$最大项为 $b_3=\dfrac{9}{4}$． ………………………………………………………………………………………………… 12 分

19.(1)$\dfrac{144}{625}$　(2)没有充分证据说明“防电信诈骗意识强弱”与性别有关

【解析】(1)100 人中成绩不低于 80 的人数有 60 人，由频率估计概率的思想可知从该校中任选一人防骗意识强的概率 $p=\dfrac{3}{5}$． …

…… 2 分

从学生中任选 5 人，其中防骗意识强的人数 $X\sim B\left(5,\dfrac{3}{5}\right)$， ……………………………………………………………………… 4 分

所以恰有 2 人防骗意识强的概率 $p(X=2)=C_5^2\left(\dfrac{3}{5}\right)^2\left(1-\dfrac{3}{5}\right)^3=\dfrac{144}{625}$． ……………………………………………………… 6 分

(2)2×2 列联表如下：

	男生	女生	合计
防诈骗意识强	38	22	60
防诈骗意识弱	22	18	40
合计	60	40	100

………………………………………………………………………………………… 8 分

$\chi^2=\dfrac{(38\times 18-22\times 22)^2\times 100}{60\times 40\times 60\times 40}\approx 0.6944,0.6944<6.635$， ………………………………………………………… 10 分

根据小概率值 $\alpha=0.01$ 的独立性检验，所给数据中没有充分证据说明“防电信诈骗意识强弱”与性别有关． ……………… 12 分

20.(1)证明过程见解析　(2)$\dfrac{\sqrt{15}}{10}$

【解析】连接 AC 与 BD 交于点 O，连接 PO．

(1)证明：因为底面为菱形，所以 $AC\perp BD$， ………………………………………………………………………………………… 1 分

且 $AO=CO$．因为 $PA=PC$，所以 $PO\perp AC$． ………………………………………………………………………………………… 2 分

又因为 $PO\subset$平面 PBD，$BD\subset$平面 PBD，$BD\cap PO=O$，

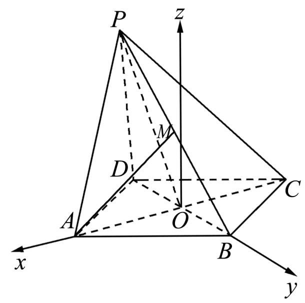
所以 $AC\perp$平面 PBD， ……… 3 分

因为 $PD\subset$平面 PBD，所以 $AC\perp PD$． ………………………………………………………………………………………………… 4 分

(2)由题可知 $PD=BD=2,PB=2\sqrt{3}$，所以$\angle PDB=\dfrac{2\pi}{3}$， ………………………………………………………………… 5 分

由(1)可知平面 $PBD\perp$平面 $ABCD$，

以 O 为坐标原点，射线 OA 方向为 x 轴正方向，射线 OB 方向为 y 轴正方向，建立如图直角坐标系.



则 $A(\sqrt{3},0,0)$，$B(0,1,0)$，$C(-\sqrt{3},0,0)$，$D(0,-1,0)$，$P(0,-2,\sqrt{3})$，…………………………………… 7 分

$M\left(0,-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$\overrightarrow{AM}=\left(-\sqrt{3},-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，…………………………………… 8 分

$\overrightarrow{DP}=(0,-1,\sqrt{3})$，$\overrightarrow{DC}=(-\sqrt{3},1,0)$，设平面 PCD 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\overrightarrow{DP}\cdot\boldsymbol{n}=-y+\sqrt{3}z=0,\\ \overrightarrow{DC}\cdot\boldsymbol{n}=-\sqrt{3}x+y=0,\end{cases}$ 令 $z=1$，则 $\boldsymbol{n}=(1,\sqrt{3},1)$，…………………………………… 10 分

$\cos\langle\overrightarrow{AM},\boldsymbol{n}\rangle=\dfrac{\overrightarrow{AM}\cdot\boldsymbol{n}}{|\overrightarrow{AM}|\,|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{-\sqrt{3}\times1+\left(-\frac{1}{2}\right)\times\sqrt{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times1}{\sqrt{(-\sqrt{3})^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\cdot\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2+1^2}}=\dfrac{-\sqrt{3}}{2\sqrt{5}}=-\dfrac{\sqrt{15}}{10}$，…………………………………… 11 分

所以 AM 与平面 PCD 所成角的正弦值为$\frac{\sqrt{15}}{10}$. …………………………………… 12 分

21.(1)$y^2=4x$　(2)是定值，定值为-1

【解析】(1)设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，由题可知 F 点坐标为$\left(\frac{p}{2},0\right)$，

直线 AB 的方程为 $y=x-\frac{p}{2}$，代入 $y^2=2px$，得 $x^2-3px+\frac{p^2}{4}=0$，…………………………………… 1 分

由一元二次方程根与系数的关系得 $x_1+x_2=3p$，$x_1x_2=\frac{p^2}{4}$，…………………………………… 2 分

$|AB|=|AF|+|BF|=x_1+x_2+p=4p=8$，…………………………………… 3 分

得 $p=2$，所以抛物线方程为 $y^2=4x$. …………………………………… 4 分

(2)由(1)知 Q 点坐标为$(1,2)$，设 $M(x_3,y_3)$，$N(x_4,y_4)$，由 $y_3^2=4x_3$，$y_4^2=4x_4$， …………………………………… 5 分

两式相减得$(y_3-y_4)(y_3+y_4)=4(x_3-x_4)$，…………………………………… 6 分

$k_{MN}=\frac{4}{y_3+y_4}$. …………………………………… 7 分

设直线 QM 的方程为 $y-2=k(x-1)$，由$\begin{cases}y^2=4x,\\ y-2=k(x-1),\end{cases}$ …………………………………… 8 分

消去 x 整理得 $ky^2-4y+8-4k=0$①，…………………………………… 9 分

显然 2，y_3 是方程①的两根得 $y_3+2=\frac{4}{k}$②，…………………………………… 10 分

同理可得 $y_4+2=-\frac{4}{k}$③，…………………………………… 11 分

②+③得 $y_3+y_4=-4$，所以 $k_{MN}=\frac{4}{y_3+y_4}=-1$.所以 MN 的斜率为定值-1. …………………………………… 12 分

22.(1)$-1\leqslant a\leqslant 0$　(2)证明过程见解析

【解析】(1)$f'(x)=e^{x-1}+a$，

当 $a>0$ 时，$f'(x)>0$ 恒成立，$f(x)$ 单调递增，

$\exists x_0<0$，且 $x_0<-\frac{1}{ae}$，使 $f(x_0)=e^{x_0}-1+ax_0<e^{-1}+a\left(-\frac{1}{ae}\right)=0$，所以 $a>0$ 时不符合题意； ………………………… 2 分

当 $a=0$ 时，$f(x)=e^{x-1}\geqslant 0$，显然成立；………………………………………………………………………… 3 分

当 $a<0$ 时，$f'(x)=0$ 解得 $x=1+\ln(-a)$，

易知 $x\in(-\infty,1+\ln(-a))$，$f(x)$ 单调递减；$x\in(1+\ln(-a),+\infty)$，$f(x)$ 单调递增.

$f(x)\geqslant 0$ 恒成立，

则 $f(1+\ln(-a))=-a+a[1+\ln(-a)]=a\ln(-a)\geqslant 0$，解之得 $-1\leqslant a<0$，…………………………………… 4 分

综上可得 $-1\leqslant a\leqslant 0$. ……………………………………………………………………………………………… 5 分

(2)由题可知 $x>0$，

令 $g(m)=\frac{e^x}{x}\cdot m+\ln x-\sin x-1$，可看成关于 m 的一次函数，且单调递增. ……………………………… 6 分

当 $m\geqslant 1$ 时，$g(m)\geqslant g(1)$，所以若证原不等式成立，即证 $\frac{e^x}{x}+\ln x-\sin x-1>0$，……………………………… 7 分

因为 $\frac{e^x}{x}=e^{x-\ln x}$，$\frac{e^x}{x}+\ln x-\sin x-1=e^{x-\ln x}-x+\ln x-1+x-\sin x$，…………………………………… 8 分

由(1)知 $e^{x-1}-x\geqslant 0$， …………………………………………………………………………………………… 9 分

把 x 换成 $x-\ln x+1$，易得 $e^{x-\ln x}-(x-\ln x+1)\geqslant 0$，……………………………………………………………… 10 分

不妨设 $h(x)=x-\sin x$，$h'(x)=1-\cos x\geqslant 0$，所以 $h(x)$ 单调递增，……………………………………………… 11 分

$x>0$，$h(x)>h(0)=0$，所以 $e^{x-\ln x}-x+\ln x-1+x-\sin x>0$，即原不等式得证. ………………………………… 12 分