

蚌埠市 2023 届高三年级第二次教学质量检查考试

数 学

本试卷满分 150 分,考试时间 120 分钟

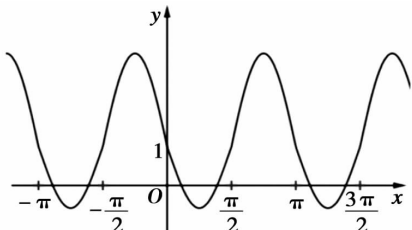
注意事项:

1. 答卷前,考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上.
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑. 如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其它答案标号. 回答非选择题时,将答案写在答题卡上. 写在本试卷上无效.

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 设集合 $A = \{0, 1, 2\}$, $B = \{x | -3 < x \leq 2\}$, 则 $A \cap B =$
A. $\{x | -2 \leq x \leq 2\}$ B. $\{x | 0 \leq x < 2\}$ C. $\{0, 1, 2\}$ D. $\{0, 1\}$
2. 已知复数 z 满足 $(1-i)z = 3+i$ (i 是虚数单位), 则 $z =$
A. $-1+2i$ B. $-1-2i$ C. $1-2i$ D. $1+2i$
3. 已知双曲线 $C: x^2 - \frac{y^2}{8} = 1$, 其一条渐近线被圆 $(x-\sqrt{3})^2 + y^2 = 3$ 截得弦长为
A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ B. 1 C. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ D. 2
4. 已知随机变量 X 服从正态分布 $N(2, \sigma^2)$, 且 $P(X > 3) = \frac{1}{6}$, 则 $P(X > 1) =$
A. $\frac{1}{6}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{5}{6}$
5. 设 α, β 是两个不同的平面, a, b 是两条不同的直线, 下列说法正确的是
A. 若 $a \perp \alpha, b \perp \beta, a \perp b$, 则 $\alpha \perp \beta$
B. 若 $a \perp \alpha, b \subset \beta, a \perp b$, 则 $\alpha \perp \beta$
C. 若 $a \perp \alpha, b \perp \beta, a // b$, 则 $\alpha \perp \beta$
D. 若 $a \perp \alpha, a \perp b, \alpha \cap \beta = b$, 则 $\alpha \perp \beta$
6. 某校对高三男生进行体能抽测, 每人测试三个项目, 1000 米为必测项目, 再从“引体向上, 仰卧起坐, 立定跳远”中随机抽取两项进行测试, 则某班参加测试的 5 位男生测试项目恰好相同的概率为
A. $\frac{1}{243}$ B. $\frac{1}{81}$ C. $\frac{1}{27}$ D. $\frac{1}{9}$

7. 已知函数 $f(x)$ 的图象如图所示, 则该函数的解析式可能是



(第7题图)

- A. $f(x) = |\sin x| + |\cos x| - 2\sin 2x$
- B. $f(x) = |\sin x| - |\cos x| + 2\sin 2x$
- C. $f(x) = |\sin x| - |\cos x| + 2\cos 2x$
- D. $f(x) = |\sin x| + |\cos x| + 2\cos 2x$

8. 已知 $x_1 = \log_5 2, x_2 + \ln x_2 = 0, 3^{-x_3} = \log_2 x_3$, 则

- A. $x_1 < x_2 < x_3$
- B. $x_2 < x_1 < x_3$
- C. $x_1 < x_3 < x_2$
- D. $x_2 < x_3 < x_1$

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 关于平面向量 a, b, c , 下列说法不正确的是

- A. 若 $a \cdot c = b \cdot c$, 则 $a = b$
- B. $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$
- C. 若 $a^2 = b^2$, 则 $a \cdot c = b \cdot c$
- D. $(a \cdot b)c = (b \cdot c)a$

10. 作为世界经济增长的重要引擎, 中国经济充满韧性活力, 备受世界瞩目. 当前, 新冠疫情延宕反复, 全球通胀攀升, 美联储激进加息冲击全球, 世界经济下行压力明显增大. 在此背景下, 中国经济稳住了自身发展势头, 不断向世界经济输送宝贵增长动能, 续写世界经济发展史上的中国奇迹. 中共二十大报告为中国的未来擘画了发展蓝图, 让全球经济界人士继续看好中国经济光明前景. 根据世界银行最新公布的数据, 下列说法正确的是

表 1 世界主要国家经济增长率和对世界经济增长的贡献率(单位:%)

国 家	经济增长率			对世界经济增长的贡献率 ^①		
	2013 年	2021 年	2013—2021 年 平均增速	2013 年	2021 年	2013—2021 年 年均贡献率
中 国	7.8	8.1	6.6	35.7	24.9	38.6
美 国	1.8	5.7	2.0	16.1	23.0	18.6
日 本	2.0	1.6	0.4	4.4	1.5	0.9
德 国	0.4	2.9	1.0	0.7	2.1	1.8
英 国	1.9	7.4	1.4	2.7	4.5	2.1
印 度	6.4	8.9	5.4	5.6	4.7	5.8
法 国	0.6	7.0	0.9	0.7	3.5	1.1
意大利	-1.8	6.6	0.0	-1.8	2.4	0.0
加拿大	2.3	4.6	1.5	1.8	1.5	1.2
韩 国	3.2	4.0	2.6	2.2	1.4	2.0

注: ① 根据 2015 年为基期的国内生产总值计算. 资料来源: 世界银行 WDI 数据库.

- A. 2013 - 2021 年, 我国经济平均增速 6.6%, 居世界主要经济体前列
- B. 2013 - 2021 年, 我国对世界经济增长的年均贡献率达到 38.6%, 超过表中其他国家年均贡献率的总和, 是推动世界经济增长的第一动力
- C. 2021 年, 我国的经济增长率位居世界第一
- D. 表中“2021 年世界主要国家经济增长率”这组数据的 75 百分位数是 7.4%

11. 已知函数 $f(x) = \cos(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$), 将 $y = f(x)$ 的图象上所有点向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度, 然后横坐标伸长为原来的 2 倍, 纵坐标不变, 得到函数 $y = g(x)$ 的图象. 若 $g(x)$ 为奇函数, 且最小正周期为 π , 则下列说法正确的是

- A. 函数 $f(x)$ 的图象关于点 $(\frac{\pi}{6}, 0)$ 中心对称
- B. 函数 $f(x)$ 在区间 $(0, \frac{\pi}{4})$ 上单调递减
- C. 不等式 $g(x) \geq \frac{1}{2}$ 的解集为 $[k\pi - \frac{5\pi}{12}, k\pi - \frac{\pi}{12}]$ ($k \in \mathbb{Z}$)
- D. 方程 $f(\frac{x}{2}) = g(x)$ 在 $(0, \pi)$ 上有 2 个解

12. 球冠是指球面被平面所截得的一部分曲面, 截得的圆叫做球冠的底, 垂直于截面的直径被截得的一段叫做球冠的高. 小明撑伞站在太阳下, 撑开的伞面可以近似看作一个球冠. 已知该球冠的底半径为 60cm, 高为 20cm. 假设地面是平面, 太阳光线是平行光束, 下列说法正确的是



(第 12 题图)

- A. 若伞柄垂直于地面, 太阳光线与地面所成角为 $\frac{\pi}{4}$, 则伞在地面的影子是圆
- B. 若伞柄垂直于地面, 太阳光线与地面所成角为 $\frac{\pi}{6}$, 则伞在地面的影子是椭圆
- C. 若伞柄与太阳光线平行, 太阳光线与地面所成角为 $\frac{\pi}{3}$, 则伞在地面的影子为椭圆, 且该椭圆离心率为 $\frac{1}{2}$
- D. 若太阳光线与地面所成角为 $\frac{\pi}{6}$, 则小明调整伞柄位置, 伞在地面的影子可以形成椭圆, 且椭圆长轴长的最大值为 240cm

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. $(\frac{2}{x} - x)^6$ 的展开式中 x^2 的系数为_____.

14. 已知数列 $\{a_n\}$ 中: $a_1 = 2, a_{n+1} = \begin{cases} a_n - 1, & n \text{ 为奇数,} \\ 2a_n + 2, & n \text{ 为偶数,} \end{cases}$ 则 $\{a_n\}$ 的前 8 项和为_____.

15. 如图是我国古代测量粮食的容器“升”, 其形状是正四棱台, “升”装满后用手指或筷子沿升口刮平, 这叫“平升”, 若该“升”内粮食的高度为“平升”的一半时, 粮食的体积约为“平升”时体积的 $\frac{1}{4}$, 则该“升”升口边长与升底边长的比值为_____.



(第 15 题图)

16. 若函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, 且 $f(x) + f(y) = f(xy)$, $f(a_n) = n + f(n)$, 则 $\sum_{i=1}^n f(\frac{a_i}{i}) =$ _____.

四、解答题:本题共 6 个小题,共 70 分. 解答应写出说明文字、演算式、证明步骤.

17. (本小题满分 10 分)

正项数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 满足 $6S_n = a_n^2 + 3a_n + 2$, 且 $a_1 > 1$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设数列 $\{b_n\}$ 满足 $a_n(3^{b_n} - 1) = 3$, T_n 为数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和, 求 $3^{T_{100}}$.

18. (本小题满分 12 分)

已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , $b = \sqrt{3}$, $a < c$, 且 $\sin\left(\frac{\pi}{3} - A\right)\cos\left(\frac{\pi}{6} + A\right) = \frac{1}{4}$.

(1) 求 A 的大小;

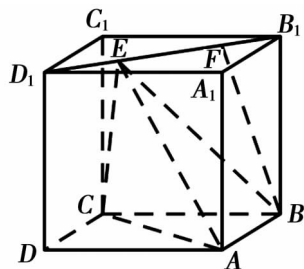
(2) 若 $a\sin A + c\sin C = 4\sqrt{3}\sin B$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

19. (本小题满分 12 分)

如图, 正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1, E, F 是线段 B_1D_1 上的两个动点.

(1) 若 $BF \parallel$ 平面 ACE , 求 EF 的长度;

(2) 若 $\overrightarrow{D_1E} = \frac{1}{4}\overrightarrow{D_1B_1}$, 求直线 BE 与平面 ACE 所成角的正弦值.



(第 19 题图)

20. (本小题满分 12 分)

有研究显示, 人体内某部位的直径约 10mm 的结节约有 0.2% 的可能性会在 1 年内发展为恶性肿瘤. 某医院引进一台检测设备, 可以通过无创的血液检测, 估计患者体内直径约 10mm 的结节是否会在 1 年内发展为恶性肿瘤, 若检测结果为阳性, 则提示该结节会在 1 年内发展为恶性肿瘤, 若检测结果为阴性, 则提示该结节不会在 1 年内发展为恶性肿瘤. 这种检测的准确率为 85%, 即一个会在 1 年内发展为恶性肿瘤的患者有 85% 的可能性被检出阳性, 一个不会在 1 年内发展为恶性肿瘤的患者有 85% 的可能性被检出阴性. 患者甲被检查出体内长了一个直径约 10mm 的结节, 他做了该项无创血液检测.

(1) 求患者甲检查结果为阴性的概率;

(2) 若患者甲的检查结果为阴性, 求他的这个结节在 1 年内发展为恶性肿瘤的概率(结果保留 5 位小数);

(3) 医院为每位参加该项检查的患者缴纳 200 元保险费, 对于检测结果为阴性, 但在 1 年内发展为恶性肿瘤的患者, 保险公司赔付该患者 20 万元, 若每年参加该项检查的患者有 1000 人, 请估计保险公司每年在这个项目上的收益.

21. (本小题满分 12 分)

已知抛物线 $C: y^2 = 2px$, 点 $A(1, 2)$ 在 C 上, A 关于动点 $T(t, 0)$ ($t < 3$) 的对称点记为 M , 过 M 的直线 l 与 C 交于 $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$, M 为 P, Q 的中点.

(1) 当直线 l 过坐标原点 O 时, 求 $\triangle APQ$ 外接圆的标准方程;

(2) 求 $\triangle APQ$ 面积的最大值.

22. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = \ln(1 + ax) - x - \frac{1}{a}$, $g(x) = x - e^x$.

(1) 若不等式 $f(x) \leq \frac{1}{a} - 2$ 恒成立, 求 a 的取值范围;

(2) 若 $a = 1$ 时, 存在 4 个不同实数 x_1, x_2, x_3, x_4 , 满足 $f(x_1) = f(x_2) = g(x_3) = g(x_4)$, 证明: $|x_2 - x_1| = |x_4 - x_3|$.