2022—2023学年度第一学期芜湖市中学教学质量统测
高三年级数学试题参考答案

一、单选题

1	2	3	4	5	6	7	8
C	A	B	C	D	D	B	C

二、多选题

9	10	11	12
BC	ACD	ACD	BCD

三、填空题

13.1　　14.$[2,+\infty)$　　15.2　　16.$[\frac{2}{9},\frac{1}{4}]$

四、解答题

17.(1)由题可知$2\sin C-\sin B=2\sin A\cos B$,

且$\sin C=\sin(A+B)$, $\therefore\ 2\cos A\sin B-\sin B=0$

又$\triangle ABC$中,$\sin B\neq 0$, $\therefore\ \cos A=\frac{1}{2}$,解得$A=\frac{\pi}{3}$ ……………………………………………（5分）

(2)由题可知$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$, $\therefore\ \overrightarrow{AD}^2=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AC}^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\right)$

即$|AD|^2=\frac{1}{4}\left(|AB|^2+|AC|^2+2|AB||AC|\cos A\right)$,又$AD=2$

$\therefore\ |AB|^2+|AC|^2+|AB||AC|=16\geqslant 3|AB||AC|$,当且仅当$|AB|=|AC|$时等号成立

$\therefore\ |AB||AC|\leqslant\frac{16}{3}$

$\therefore\ S=\frac{1}{2}|AB||AC|\sin A\leqslant\frac{4\sqrt{3}}{3}$ ……………………………………………………………（10分）

18.(1)由已知得$2\left(a_1+a_2\right)=3a_2$,即$a_2=2$,

$n\geqslant 2$时,由$2S_n=(n+1)a_n$,$2S_{n-1}=na_{n-1}$,两式相减得$(n-1)a_n=na_{n-1}$,

则$\frac{a_n}{n}=\frac{a_{n-1}}{n-1}=\cdots=\frac{a_2}{2}=\frac{2}{2}=1$,又$\frac{a_1}{1}=1$,于是$\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$为常数列.得$a_n=n$ …………（6分）

注:也可以利用等比型递推关系$\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{n}{n-1}$ $(n\geqslant 2)$,用累乘法求通项公式,请酌情赋分.

(2) $\because b_n=\dfrac{\sin 1}{\cos n\cos(n-1)}=\dfrac{\sin[n-(n-1)]}{\cos n\cos(n-1)}=\dfrac{\sin n\cdot\cos(n-1)-\cos n\cdot\sin(n-1)}{\cos n\cos(n-1)}=\tan n-$

$\tan(n-1)=-\tan(n-1)+\tan n$,

$\therefore T_n=(-\tan 0+\tan 1)+(-\tan 1+\tan 2)+(-\tan 2+\tan 3)+\cdots+[-\tan(n-1)+\tan n]$

$=\tan n$ ……………………………………………………………………………………（12分）

19.(1)零假设为

H_0:疗法与疗效独立,即两种疗法效果没有差异

根据列联表中数据,经过计算得到$\chi^2=\dfrac{136\times(15\times 63-52\times 6)^2}{67\times 69\times 21\times 115}\approx 4.882<7.879=x_{0.005}$

根据小概率值$\alpha=0.005$的独立性检验,没有充分证据推断H_0不成立,因此可以认为H_0成立,即认为两种疗法效果没有差异……………………………………………………（4分）

(2)设A组中服用甲种中药康复的人数为X_1,则$X_1\sim B(3,\dfrac{14}{15})$,所以$E(X_1)=3\times\dfrac{14}{15}=\dfrac{14}{5}$,

设A组的积分为X_2,则$X_2=2X_1$,所以$E(X_2)=2E(X_1)=\dfrac{28}{5}=5.6$, ……………………（7分）

设B组中服用乙种中药康复的人数为Y_1,则Y_1的可能取值为:0,1,2,3,

$P(Y_1=0)=\dfrac{1}{20}\times\dfrac{1}{10}\times\dfrac{1}{10}=\dfrac{1}{2000}$,

$P(Y_1=1)=\dfrac{19}{20}\times\dfrac{1}{10}\times\dfrac{1}{10}+\dfrac{1}{20}\times C_2^1\times\dfrac{1}{10}\times\dfrac{9}{10}=\dfrac{37}{2000}$,

$P(Y_1=2)=C_2^1\times\dfrac{19}{20}\times\dfrac{9}{10}\times\dfrac{1}{10}+\dfrac{1}{20}\times\dfrac{9}{10}\times\dfrac{9}{10}=\dfrac{423}{2000}$,

$P(Y_1=3)=\dfrac{19}{20}\times\dfrac{9}{10}\times\dfrac{9}{10}=\dfrac{1539}{2000}$,

故Y_1的分布列为:

Y_1	0	1	2	3
P	$\dfrac{1}{2000}$	$\dfrac{37}{2000}$	$\dfrac{423}{2000}$	$\dfrac{1539}{2000}$

所以$E(Y_1)=0\times\dfrac{1}{2000}+1\times\dfrac{37}{2000}+2\times\dfrac{423}{2000}+3\times\dfrac{1539}{2000}=\dfrac{11}{4}$,

设B组的积分为Y_2,则$Y_2=2Y_1$,所以$E(Y_2)=E(2Y_1)=2E(Y_1)=\dfrac{11}{2}=5.5$, ………（11分）

因为$5.6>5.5$,所以甲种联合治疗方案更好 ……………………………………………（12分）

20.(1)证明:因为$AD\ /\!/ CF$,$CF\subset$面$BCFE$,$AD\not\subset$面$BCFE$,

所以$AD\ /\!/$面$BCFE$.

又因为$AD\subset$面$ABED$,面$ABED\cap$面$BCFE=BE$,

所以$AD\ /\!/ BE$ ………………………………………………………………………………（4分）

（2）条件①②,结论③

由条件易知四边形$ACFD$是平行四边形,故$CA\ /\!/ FD$,

因为$FD\perp BE$,所以$CA\perp BE$,又$CA\perp DE$,

$BE\cap DE=E$,所以$CA\perp$面$ABED$,而$CA\subset$面$ACFD$,故平面$ABED\perp$平面$ACFD$.

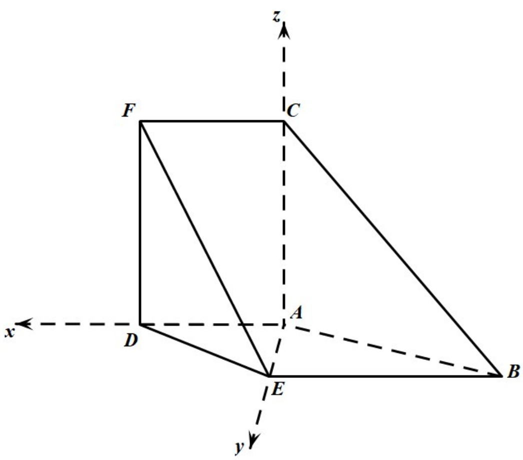
条件①③,结论②

证明:由条件易知四边形$ACFD$是平行四边形,故$CA\ /\!/ FD$.

由$FD\perp BE$,$AD\ /\!/ BE$可得$FD\perp AD$.

因为面$ABED\perp$面$ACFD$,面$ABED\cap$面$ACFD=AD$,$FD\subset$面$ACFD$

所以$FD\perp$面$ABED$.



第20题图

而$ED\subset$面$ABED$,$CA\ /\!/ FD$,故$CA\perp DE$ ………………………………………………（8分）

下面求平面EAC和平面PBD夹角的余弦值:

$\triangle CFE$中,由余弦定理可得$CE^2=CF^2+EF^2-2CF\cdot EF\cdot\cos\dfrac{\pi}{3}=12$,故$CE=2\sqrt{3}$.

又由$CA=2\sqrt{2}$,$CA\perp AE$,得$AE=2$.

由$EF=4$,$FD=2\sqrt{2}$,$FD\perp DE$,得$DE=2\sqrt{2}$.

因为$AD^2+AE^2=DE^2$,所以$DA\perp AE$.

以A为原点,AD,AE,AC分别为x轴,y轴,z轴建立空间直角坐标系.

$A(0,0,0)$,$B(-4,2,0)$,$C(0,0,2\sqrt{2})$.易知$\vec{m}=(1,0,0)$是平面ACE的一个法向量.

设$\vec{n}=(x,y,z)$是平面ABC的一个法向量

由$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0\\\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0\end{cases}$,得$\begin{cases}-4x+2y=0\\2\sqrt{2}z=0\end{cases}$,取$x=1$,得$y=2$,故$\vec{n}=(1,2,0)$

$\left|\cos<\vec{m},\vec{n}>\right|=\dfrac{|\vec{m}\cdot\vec{n}|}{|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

故平面EAC和平面PBD夹角的余弦值是$\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ ……………………………………（12分）

21.解:(1)当直线l的倾斜角为60°时,设直线l的方程为$y=\sqrt{3}(x-\dfrac{p}{2})$,

联立方程$\begin{cases}y^2=2px\\y=\sqrt{3}(x-\dfrac{p}{2})\end{cases}$得:$3x^2-5px+\dfrac{3}{4}p^2=0$,

$\therefore x_1+x_2=\dfrac{5p}{3}$,$|AB|=x_1+x_2+p=\dfrac{8p}{3}=\dfrac{16}{3}$,

$\therefore p=2$,$\therefore$ 抛物线C的方程为$y^2=4x$ ……………………………………（4分）

(2)设直线l的方程为$x-1=my$,$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,

联立方程$\begin{cases}y^2=4x\\x=my+1\end{cases}$得:$y^2-4my-4=0$,

$\therefore y_1+y_2=4m,y_1y_2=-4,x_1+x_2=m(y_1+y_2)+2=4m^2+2,x_1x_2=\dfrac{y_1y_2}{16}=1$,

则以AB为直径的圆的方程为:$(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0$,

即:$x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2+y^2-(y_1+y_2)y+y_1y_2=0$,

代入得:$x^2-(4m^2+2)x+y^2-4my-3=0$,

过焦点F且垂直于l的直线为:$y=-m(x-1)$,

联立方程$\begin{cases}x^2-(4m^2+2)x+y^2-4my-3=0\\y=-m(x-1)\end{cases}$得:$(m^2+1)x^2-2(m^2+1)x-3(m^2+1)=0$

即:$x^2-2x-3=0$,解得:$x=-1$或3,

所以过焦点F且垂直于l的直线与以AB为直径的圆的交点分别在定直线$x=-1$和$x=3$上.

……………………………………………………………………………（12分）

22.(1)当$a=1$时,令$\varphi(x)=f(x)-g(x)=e^x-\dfrac{x^2}{4}-1-\ln(x+1)$,

$\varphi'(x)=e^x-\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{x+1}$,$\varphi''(x)=e^x-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{(x+1)^2}$,

当$x\geqslant 0$时，$e^x\geqslant 1$，当$-1<x<0$时，$\dfrac{1}{(x+1)^2}>1$，$\therefore\ \varphi''(x)>0$

得$\varphi'(x)$在$(-1,+\infty)$内单调递增，由$\varphi'(0)=0$，

得当$-1<x<0$时，$\varphi'(x)<0$，$\varphi(x)$在$(-1,0)$内单调递减，

当$x>0$时，$\varphi'(x)>0$，$\varphi(x)$在$(0,+\infty)$内单调递增，

$\therefore\ \varphi(x)\geqslant\varphi(0)=0$，即$f(x)\geqslant g(x)$ ……………………………………………………（5分）

（2）$h(x)=f(x)-g(x)=e^x-\dfrac{x^2}{4}-1-a\ln(x+1)$，

当$a\leqslant 1$时，由$x>0$，得$\ln(x+1)>0$，$\therefore\ \ln(x+1)\geqslant a\ln(x+1)$，

由（1）可得$h(x)\geqslant\varphi(x)>\varphi(0)=0$；

当$a>1$时$h'(x)=e^x-\dfrac{x}{2}-\dfrac{a}{x+1}$，$h''(x)=e^x-\dfrac{1}{2}+\dfrac{a}{(x+1)^2}$，

由$x>0$得$h''(x)>0$，$\therefore\ h'(x)$在$(0,+\infty)$内单调递增

由$h'(0)=1-a<0$，$h'(a)=e^a-\dfrac{a}{2}-\dfrac{a}{a+1}>a+1-\dfrac{a}{2}-\dfrac{a}{a+1}=\dfrac{a}{2}+\dfrac{1}{a+1}>0$

$\therefore\exists x_0\in(0,a)$，使得$h'(x_0)=0$，

则当$0<x<x_0$时，$h'(x)<0$，$h(x)$在$(0,x_0)$内单调递减，

当$x_0<x$时，$h'(x)>0$，$h(x)$在$(x_0,+\infty)$内单调递增，

由$h(0)=0$得$h(x_0)<0$，

$h(2a)=e^{2a}-a^2-1-a\ln(2a+1)>4a^2-a^2-1-2a^2=a^2-1>0$，

$\therefore\exists x_0\in(0,2a)$，使得$h(x_0)=0$，

综上，当$a\leqslant 1$时$h(x)$在$(0,+\infty)$内无零点；

当$a>1$时$h(x)$在$(0,+\infty)$内有一个零点；……………………………………………（12分）