**河北省衡水中学2023届上学期高三年级四调考试**

**数 学**

**本试卷分第Ⅰ卷（选择题）和第Ⅱ卷（非选择题）两部分。共4页，总分150分，考试时间120分钟。**

**第Ⅰ卷（选择题 共60分）**

**一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。**

1．已知，则在复平面内对应的点位于

A．实轴上 B．虚轴上

C．第一、三象限的角平分线上 D．第二、四象限的角平分线上

2．已知向量满足则向量在向量上的投影向量的坐标为

A． B． C． D．

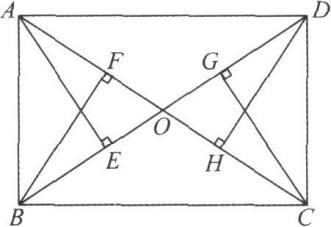
3．在中，，则

A． B． C． D．

4．已知为平面内任意三点，则“与的夹角为钝角”是“”的

A．必要不充分条件 B．充分不必要条件

C．充要条件 D．既不充分也不必要条件

5．2 000多年前，古希腊雅典学派的第三大算学家欧道克萨斯首先提出黄金分割，所谓黄金分割点，指的是把一条线段分割为两部分，使其中一部分与全长之比等于另一部分与这部分之比，黄金分割比为．如图，在矩形中，与相交于点，，且点为线段的黄金分割点，则

A． B．

C． D．

6．已知复数*z*满足，则实数的取值范围是

A． B． C． D．

7．已知点是所在平面内一点，有下列四个等式：

①；②；

③；④

如果只有一个等式不成立，则该等式为

A．① B．② C．③ D．④

8．对于给定的正整数，设集合，，且∅．记为集合中的最大元素，当取遍的所有非空子集时，对应的所有的和记为，则

A． B．

C． D．

**二、选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分。**

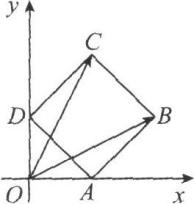
9．设非零向量的夹角为为任意非零向量，定义运算，则下列结论正确的是

A．若，则 B．

C． D．若，则的最大值为1

10．已知复数满足，则下列结论正确的是

A．若，则 B．

 C．若，则 D．

11．如图放置的边长为1的正方形的顶点，分别在轴的正半轴、

轴的非负半轴上滑动，则的值可能是

A． B． C． D．

12．已知函数及其导函数的定义域均为***R***．若对任意的，都有，则下列结论正确的是

A． B．

C．若，则 D．必为奇函数

**第Ⅱ卷（非选择题 共90分）**

**三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。**

13．已知，则的虚部是\_\_\_\_\_\_\_．

14．若函数的图象关于直线对称，则实数\_\_\_\_\_\_\_．

15．在中，，是线段上的动点，有下列三个结论：

①；②；③．

则所有正确结论的序号是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

16．已知向量满足，则向量与的夹角的最大 值是\_\_\_\_\_\_\_．

**四、解答题：本题共6小题，共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。**

17．（10分）

设复数，其中．

(1)若复数为实数，求的值；

(2)求的取值范围．

18．（12分）

记的内角的对边分别是，已知的外接圆半径，

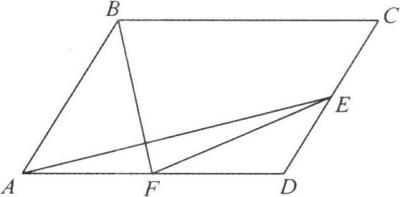
且

(1)求和的值；

(2)求面积的最大值．

19．（12分）

如图，在平行四边形中，，为的中点，



(1)若，求实数的值；

(2)求的取值范围．

20．（12分）

已知函数为奇函数，且在区间上单调递增，在区间上单调递减．

(1)求的解析式；

(2)若过点可作曲线的三条切线，求实数*m*的取值范围．

21．（12分）

治理垃圾是某市改善环境的重要举措．2021年该市产生的垃圾量为200万吨，通过扩大宣传、环保处理等一系列措施，预计从2022年开始，连续5年，每年的垃圾排放量比上一年减少20万吨，从第6年开始，每年的垃圾排放量为上一年的75%．

(1)写出该市从2022年开始的年垃圾排放量与治理年数的表达式；

(2)设*An*为从2022年开始年内的年平均垃圾排放量．如果年平均垃圾排放量呈逐年下降趋势，则认为现有的治理措施是有效的；否则，认为无效．试判断现有的治理措施是否有效，并说明理由．

22．（12分）

已知函数．

(1)证明：；

(2)设函数，若在区间上存在最大值，求实数的取值范围．

**数学参考答案**

**一、选择题**

1．C【解析】因为，所以在复平面内对应的点的坐标为，位于第一、三象限的角平分线上．

2．B【解析】由，得，则，即，则，所以向量在向量上的投影向量的坐标为

3．A【解析】因为为直角三角形，且，，所以，且，所以

4．B【解析】设与的夹角为，当为钝角时，，所以；当时，，所以，即，故，所以，所以“与的夹角为钝角”是“”的充分不必要条件．

1. D【解析】由题意得，显然，，所以，故，因为，所以.
2. D【解析】设，，则，整理得，所以即．因为此方程有实根，所以，解得.

7．B【解析】对于①，设的中点为，连接，则 又，所以，所以，故点为的重心；对于②，由，得，故，即为直角三角形；对于③，由点到三个顶点的距离相等，得点为的外心；对于④，由，得，同理可得，所以，，即点为的垂心，当为等边三角形时，重心、外心、垂心重合，此时①③④均成立，②不成立，满足要求；当②成立时，其他三个均不一定成立．

8．D【解析】根据题意知为集合的非空子集，满足的集合只有1个，即；满足的集合有2个，即{2}，{1，2}；满足的集合有4个，即{3}，{1，3}，{2，3}，{1，2，3}；……；满足的集合有个，所以，则，两式相减得，所以，所以.

**二、选择题**

9．ACD【解析】对于A，因为，所以，解得或，所以，故选项A正确；对于B，不妨取，设与的夹角为，与的夹角为，则，此时，故选项B错误；对于C，，故选项C正确；对于D，当时，，当且仅当时取等号，所以，故选项D正确．

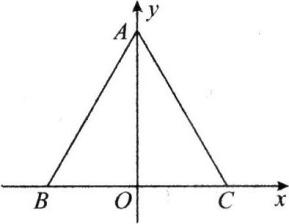
10．BD【解析】设则，不满足，也不满足，故选项AC错误；对于B，设在复平面内对应的向量分别为，且，由向量加法的几何意义知，故，故选项B正确；对于D，设，且，则，所以，，故选项D正确．

11．AC【解析】设，因为，所以，故，所以．同理可得，所以，所以．因为，所以，则，故的值可能是l，2．

12．BC【解析】对于A，令，由，得，故或，故选项A错误；对于B，令，则，故．因为，令，，所以，即，故选项B正确；对于C，令，则，若，则；令，则，即，所以；令，则，即，所以；令，则，即，所以；令，则，即，所以；令，则，即，所以；令，则，即，所以，……由此可得的值有周期性，且周期为6．又，所以，故选项C正确；对于D，令，则，当时，，即，则，即，所以为偶函数，故选项D错误．

**三、填空题**

13． 【解析】设，由，得，即，所以解得，所以，故z的虚部是．

14．【解析】因为函数的图象关于直线对称，所以在时取得最值，结合辅助角公式得，即，整理得，解得．

15．①【解析】因为，所以是等边三角形，取*BC*的中点为*O*，连接*AO*，以*O*为坐标原点*，BC*所在的直线为轴，*OA*所在的直线为*y*轴，建立平面直角坐标系如图．设，则，所以，所以，即，故①正确；，故②错误；，故③错误．

16．【解析】由，得．又由，得，则，即，即，所以，当且仅当时取等号，所以向量与的夹角的最大值是.

**四、解答题**

17．解：(1) （2分）

若复数为实数，则

故 （3分）

又，所以 （4分）

(2)因为

所以

（6分）

又，所以

所以 （8分）

则

即

故的取值范围是 （10分）

18．解：(1)因为，所以

即

故 （2分）

因为，所以

又，所以，因为，所以 （4分）

由正弦定理得，则 （6分）

(2)由余弦定理，得

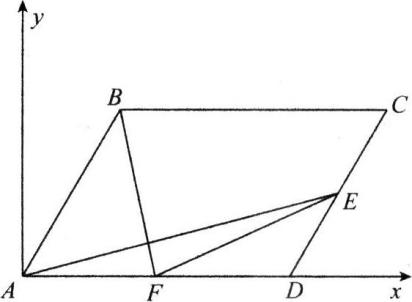
由基本不等式得，

当且仅当时取等号，

所以 （10分）

所以

故面积的最大值为 （12分）



19．解：(1)在平行四边形*ABCD*中，

，

建立如图所示的平面直角坐标系，

则 （2分）

又*E*为*CD*的中点，所以 则

因为，所以，则 （4分）

因为，所以

即，解得 （6分）

(2)由(1)知，则 （8分）

所以

因为，所以当时，取得最大值为；

当时，取得最小值为，

故的取值范围是 （12分）

20．解：(1)因为函数为**R**上的奇函数，

所以，即，所以

又

所以，则 （2分）

又在区间上单调递增，在区间上单调递减，

所以在处取得极大值，

因为，

所以，即，解得 （4分）

所以，经检验符合题意． （5分）

(2)由(1)知，所以点

不在曲线上，且

设切点为，则，

故切线的斜率满足，整理得

因为过点可作曲线的三条切线，

所以关于的方程有三个实根． （7分）

设，则

令，得；令，得或

所以在区间上单调递增，在区间上单调递减，

所以的极大值点为，极小值点为 （9分）

所以关于的方程有三个实根的必要条件是

解得 （10分）

此时

所以当时，关于的方程有三个实根．

故实数的取值范围是 （12分）

21．解：(1)设治理年后，该市的年垃圾排放量构成数列

当时，是首项为，公差为的等差数列，

所以 （2分）

当时，数列是以为首项，公比为的等比数列，

所以 （4分）

所以 （5分）

(2)现有的治理措施是有效的，理由如下：

设为数列的前项和，则

所以

（8分）

由(1)知当时，，所以为递减数列； （9分）

当时，，所以为递减数列，

且以，所以当时，为递减数列，

故

所以 （11分）

所以数列为递减数列，即年平均垃圾排放量呈逐年下降趋势，

故认为现有的治理措施是有效的． （12分）

22．(1)证明：要证明，只需证明

设，则 （1分）

令，得；令，得

所以在区间上单调递减，在区间上单调递增，

所以，即

即，故 （4分）

(2)解：由题意得，则

令，则 （5分）

当时，，在区间上单调递增，所以，

所以在区间上单调递增，无最大值，不符合题意； （6分）

当时，，在区间上单调递减，

所以，

所以在区间上单调递减，无最大值，不符合题意． （7分）

当时，由，得

当时，在区间上单调递增

当时，在区间上单调递减 （9分）

由(1)知

所以当时，

（10分）

取，则，且

又，所以由零点存在定理，得存在，使得

所以当时，，即；

当时，，即，

所以在区间上单调递增，在区间上单调递减，

所以在区间上存在最大值，符合题意，

综上，实数的取值范围是． （12分）