Линейная алгебра 1 семестр Экзамен

Студенты ИС'а

время последней сборки: 6 января 2023 г.
13:39

"Спасибо всем за вклад в написание билетов".

Содержание

1 Поле комплексных чисел.

Множество — совокупность объектов с общим свойством.

Существуют бинарные и унарные операции над множествами. Бинарная принимает два аргумента и возвращает один результат, унарная аналогично принимает один аргумент и возвращает один результат.

Алгебраическая операция на множестве X — соответствие, при котором каждой паре элементов из множества X соответствует единственный элемент этого же множества.

Алгебраическая структура (Алгебраическая система в википедии) — называется объект, являющийся совокупностью непустого множества Aи непустого набора **алгебраических операций** $f_1, f_2, \ldots, f_k, \ldots$.

Из определения следует, что множество N с операцией $-$ не является алгебраической структурой, так как $-$ на таком множестве не замкнутая операция.

Алгебраические структуры далее классифицируются так:

- **Группой** $(G, \oplus)$ называется алгебраическая система с одной бинарной алгебраической операцией

  1. Определена бинарная операция.

     Например, сложение или умножение, поэтому обычно говорят, что "группа по сложению"или "группа по умножению"
  2. Операция является ассоциативной.
  3. Существует нейтральный элемент для данной операции в данном множестве.

     Для сложение $\mathbb{0}$, так как $\forall a \in G\ \mathbb{0} + a = a \in G$.

     Для умножения $\mathbb{1}$, так как $\forall a \in G\ \mathbb{1} \cdot a = a \in G$.
  4. Каждый элемент множества имеет обратный. Для структуры по сложению: $\forall a \in G\ \exists a' \in G\ a' + a = \mathbb{0}$

  Группа называется **абелевой**, если операция в ней коммутативна, т.е.

  $$\forall x, y \in G\ x \oplus y = y \oplus x$$

- **Кольцом** называется непустое множество R с двумя заданными на нём бинарными операциями $+$ (сложение) и $\cdot$ (умножение), которые обладают следующими свойствами:

  * Разумеется $+$ и $\cdot$ это просто обозначения некоторых операций, что-бы не писать операция 1.

  1. относительно сложения $+$ множество R образует **абелеву** группу, называемую аддитивной группой кольца; нейтральный элемент этой группы называется нулём и обозначается $\mathbb{0}$
  2. умножение $\cdot$ дистрибутивно относительно сложения: для любых $a, b, c \in R$ имеют место соотношения

  $$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c, c \cdot (a + b) = c \cdot a + c \cdot b$$

  Если операция умножения коммутативна (ассоциативна), то кольцо называется коммутативным (ассоциативным).

- **Полем** называется коммутативное ассоциативное кольцо с единицей, в котором любой ненулевой элемент обратим.

1.1 Поле комплексных чисел

Поле комплексных чисел — множеств упорядоченных пар $\mathbb{C} = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{R}\}$
Пусть $z_1 = (x_1, y_1), z_2 = (x_2, y_2)$.

- Введём $+$:

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

- Введём $\cdot$:

$$z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1 = (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2, x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1)$$

- Пусть

$$\mathbb{0}_{\mathbb{C}} = (0, 0), \mathbb{1}_{\mathbb{C}} = (1, 0)$$

Множество $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ **является полем.**
Пусть

$$i = (0, 1)$$

Тогда любое комплексное число можно обозначать так $z = (a, b) == a + ib$

$$i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = \cdots = -1$$

Отсюда получаем $i = \sqrt{-1}$ — мнимая единица.

2 Линейное пространство арифметических векторов. Определение, проверка аксиом.

3 Линейное пространство направленных отрезков с общим началом. Определение, проверка аксиом.

4 Матрицы. Определение. Арифметика матриц.

5 Определители. Свойства.

Определитель (детерминант) — скалярная величина (число) характеризующая квадратную матрицу.

Она нужна, например, для получения обратной матрицы или для понятия обратима ли матрица, при решение СЛАУ и для много чего ещё, что мы даже не прошли.

Перестановка называется **четной**, если она содержит четное число инверсий элементов. Нечетная перестановка содержит нечетное число инверсий.

Инверсия — пара элементов, которые находятся вне их естественного порядка. $(i < j \wedge a_i > a_j)$

$(j_1, j_2, \dots, j_n)$ перестановка чисел от 1 до n

$$det(A) = \sum_{(j_1,j_2,\dots,j_n)} (-1)^{N(j_1,j_2,\dots,j_n)} \cdot a_{1,j_1} \cdot a_{2,j_2} \cdot \dots \cdot a_{n,j_n} = \sum_{(j_1,j_2,\dots,j_n)} \left((-1)^{N(j_1,j_2,\dots,j_n)} \cdot \prod_{i=1}^{i \leqslant n} a_{i,j_i} \right)$$

Где $N(j_1, j_2, \dots, j_n)$ — количество инверсий перестановки. (в лекции говорили что берём $+$ если чётная и $-$ если не чётная, что собственно одно и тоже)

Говоря человеческим языком, по всем перестановкам номеров столбцов берём сумму от произведения чётности перестановки помноженную на произведение всех элементов матрицы с номерами a_{i,j_i} (номер столбца выбираем из перестановки под номером равным номеру строки).

Вычисление определителя которое все использует, так как предыдущее требует порядка $\mathcal{O}(n! \cdot n)$ операций.

Формула разложением по строке:

$A = \begin{pmatrix} a_{11} \end{pmatrix} = a_{11}$

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

$$det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1,j} M_{1,j}$$

$M_{i,j}$ минор элемента $a_{i,j}$ — это определитель полученный вычёркиванием i-ой строки и j-го столбца матрицы A при сохранение порядка остальных элементов.

Для фиксированного i (строки) $det(A) = \sum\limits_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{1,j} M_{i,j}$

Свойства с доказательствами:

1. Если в матрице есть нулевая строка, то определитель равен 0.

   Посчитаем определитель по строке там где находятся нули, и тогда у нас получается сумма 0 по формуле.

2. $det(A) = det(A^T)$

   Докажем по индукции: пусть $det(A) = det(A^T)$ для матриц порядка $n-1$ — верно.

Докажем для матрицы порядка n:

Помогите, я реально не понимаю, что за логика в вики написанная.

3. Перестановка строк местами меняет только знак определителя.

   Для $n = 1$ не имеет смысла, далее докажем по индукции: База $n = 2$ выполняется по определению, пусть мы доказали для $n - 1$ выполняется утверждение. Пусть i, j номера строк, тогда B матрица полученная из A если поменять строки i и j местами, а k номер строки отличный от i и j. Тогда распишем определитель по строке k : $det(B) = (-1)^{k+1}b_{k,1} \cdot det(B_{k,1}) + (-1)^{k+2}b_{k,2} \cdot det(B_{k,2}) + \cdots + (-1)^{k+n}b_{k,n} \cdot det(B_{k,n}) =$

   Воспользуемся двумя простыми утверждениями:

   - $b_{k,z} = a_{k,z}$ так как мы не изменяли данную строку.
   - $det(B_{k,z})$ это определитель матрицы размера $(n-1)$ на $(n-1)$, содержащий строки i и j, по индукции уже знаем, что $det(B_{k,z}) = -det(A_{k,z})$.

   Получаем, что $= (-1)^{k+1}b_{k,1} \cdot -det(A_{k,1}) + (-1)^{k+2}b_{k,2} \cdot -det(A_{k,2}) + \cdots + (-1)^{k+n}b_{k,n} \cdot -det(A_{k,n}) =$ $= -det(A)$.

4. Определитель матрицы, которая содержит две одинаковые строки, равен 0.

   Поменяем две равные строки. Тогда A и полученная A' не различимы, а следовательно по определению $det(A) = det(A')$. По свойству 3 получим, что $det(A) = -det(A')$. Итого получаем, что $det(A) = -det(A) = 0$.

5. Вынос константы у строки

   Распишем определитель по данной строке, вынесем константу за скобку.

6. Определитель матрицы, которая содержит две пропорциональные строки, равен 0.

   По свойству 5 выносим константу у одной из этих двух строк, чтобы получить равные строки, и по свойству 4 получаем что определитель равен $c \times 0 = 0$.

7. * не было на лекции *, но очень важное

   Если к строке k добавить последовательность чисел b длины n, то определитель будет равен сумме определителей исходной матрицы и матрицы у которой заменили k-ую строку на последовательность чисел.

   Расписывание определителя по k-ой строке.

   A'' матрица полученная из A прибавлением к строке k последовательности b.

$$
\begin{aligned}
det(A'') &= \sum_{j=1}^{n}(-1)^{k+j}(a_{k,j} + b_j)M_{k,j} = \\
&= \sum_{j=1}^{n}(-1)^{k+j}a_{k,j}M_{k,j} + \sum_{j=1}^{n}(-1)^{k+j}b_jM_{k,j} = \\
&= det(A) + det(A')
\end{aligned} \tag{1}
$$

   Где A' — в матрице A заменили k-ую строку на последовательность b.

8. * не было на лекции *, но очень важное

   Определитель не изменится, если к элементам любой его строки прибавить соответствующие элементы другой строки.

   Пусть A' матрица полученная из A путём замены данной строки на другую строку.

   Пусть A'' матрица полученная из A складывания одной строки с другой.

   По свойству 4 получаем, что $det(A') = 0$

   Из свойства 7 следует, что $det(A'') = det(A) + det(A') = det(A)$.

   Комбинируя свойства выше доказывается, что можно добавлять не только одну стоку один раз, но и любое произвольное количество раз, так как по свойству 6 в доказательстве выше $det(A') = 0$.

9. Если есть строка, которая является линейной комбинацией других двух строк, то определитель равен 0.

   $l_z = \alpha l_i + \sigma l_j$

   Из следствия свойства 8 получается что определитель такой матрицы будет таким-же как и определитель матрицы, в которой строка z равна αl_i + по свойству 4 получаем что определитель такой матрицы равен 0.

10. $det(A \cdot B) = det(A) \cdot det(B)$

    Это мы точно не умеем доказывать(((TODO напишите если умеете)

    link1

    link2

6 Обратная матрица. Существование и единственность.

7 Определение СЛАУ. Совместность, определенность. Теорема Крамера.

8 Линейная зависимость арифметических векторов. Линейная зависимость системы одного и двух векторов.

9 Теоремы о линейно зависимых и независимых системах векторов.

10 Базис. Определение, основные теоремы.

11 Ранг матрицы. Элементарные преобразования.

12 Метод Гаусса (приведение матрицы к ступенчатому виду). Вычисление ранга.

13 Теория СЛАУ. Теорема Кронекера-Капелли. Два случая совместности (определенные и неопределенные СЛАУ).

14 Решение однородной СЛАУ. Структура решения неоднородной СЛАУ.

15 Линейное координатное пространство. Базис, размерность.

16 Подпространство. Линейная оболочка.

17 Изоморфизм линейных пространств.

18 Пространство решений однородной СЛАУ. Фундаментальная система решений.

19 Преобразование базиса и координат.

20 Скалярное произведение и норма векторов. Ортонормированный базис.

21 Системы координат. Определение. Декартовы и полярная СК.

22 Геометрический вектор в координатном пространстве. Определение, характеристики.

23 Произведения векторов и их приложения.

24 Коллинеарность, компланарность, ортогональность векторов. Критерии.

25 Уравнения прямой на плоскости.

26 Уравнения плоскости в пространстве.