任意の整数 x と y に対する $ax+by$ が $\gcd(a,b)$ の倍数になる理由

このセクションでは、任意の整数 x と y に対して $ax+by$ がなぜ必ず $\gcd(a,b)$ の倍数になるのかを詳しく説明します。

1. 基本概念

まず、$\gcd(a,b)$（最大公約数）とは、a と b の共通の約数の中で最大のものです。ここで重要なのは、a と b はそれぞれ次のように書くことができるという事実です：

$$a = d \cdot a', \quad b = d \cdot b'$$

ただし、$d = \gcd(a,b)$ であり、a' と b' は互いに素、すなわち $\gcd(a',b') = 1$ となります。

2. $ax+by$ の形での線形結合

任意の整数 x と y を用いて線形結合 $ax+by$ を考えます。上記の表現を使うと、

$$ax + by = (d \cdot a')x + (d \cdot b')y = d\,(a'x + b'y)$$

となります。ここで注目すべき点は、右辺が d（すなわち $\gcd(a,b)$）でくくれる形になっていることです。つまり、**$ax+by$ は必ず d の倍数**となります。

3. なぜ d の倍数になるのか

3.1 分配法則の適用

数式の分配法則により、

$$ax + by = d\,(a'x + b'y)$$

と表せるため、$a'x+b'y$ は整数（なぜなら a', x, b', y はすべて整数）です。整数に d を掛けたものは明らかに d の倍数です。

3.2 例での確認

たとえば、$a=12$、$b=18$ の場合、$\gcd(12,18)=6$ です。
これを使って書き換えると、

- $12 = 6 \cdot 2$、$18 = 6 \cdot 3$ と表せるので、
- 任意の整数 x と y に対して、

$$12x + 18y = 6\,(2x + 3y)$$

となります。ここで $(2x+3y)$ は整数であるため、$12x+18y$ は常に 6 の倍数です。

4. 整数解が存在するための条件との関連

一次不定方程式

$$ax + by = c$$

において、もし c が $\gcd(a,b)$ の倍数でなければ、どんな整数 x と y を選んでも $ax + by$ は $\gcd(a,b)$ の倍数となるため、c と一致することはありえません。
したがって、**整数解が存在するためには、必ず c も $\gcd(a,b)$ の倍数でなければならない**という結論になります。

5. まとめ

- **分解による表現：**
  $a = d\,a', b = d\,b'$ と表すことで、
  $$ax + by = d\,(a'x + b'y)$$
  となり、必ず $d = \gcd(a,b)$ の倍数になる。
- **整数解の存在条件：**
  一次不定方程式 $ax + by = c$ に解が存在するためには、c も d の倍数でなければならない。
  すなわち、
  $$\gcd(a,b) \mid c$$
  である必要がある。

この理由から、任意の整数 x と y に対して $ax + by$ は必ず $\gcd(a,b)$ の倍数になり、もし c が $\gcd(a,b)$ の倍