一次不定方程式の解法

このドキュメントでは、一次不定方程式の整数解の存在条件、特殊解の求め方、一般解の導出、その例について詳しく解説します。

1. 方程式と整数解の存在条件

一次不定方程式は

$$ax + by = c$$

の形をしており、ここで a, b, c は既知の整数、x と y は未知数です。この方程式に整数解が存在するための必要条件は、

$$\gcd(a, b) \mid c$$

すなわち、a と b の最大公約数が c を割り切ることです。
理由：
任意の整数 x と y に対して $ax + by$ は必ず $\gcd(a, b)$ の倍数になるため、もし c が $\gcd(a, b)$ の倍数でなければ解は存在しません。

計算例 1: $3x + 5y = 1$ の場合

1. $\gcd(3, 5) = 1$ なので、1 は 1 の倍数です。よって解は存在します。

2. 特殊解の求め方（拡張ユークリッドの互除法）

解が存在するとき、拡張ユークリッドの互除法を用いると、

$$ax_0 + by_0 = \gcd(a, b)$$

を満たす整数 x_0 と y_0 を求められます。
もし $d = \gcd(a, b)$ で c が d の倍数、すなわち $c = dk$ と表せるなら、

$$x = x_0 k, \quad y = y_0 k$$

は方程式

$$ax + by = c$$

の**特殊解**となります。

計算例 1（続き）: $3x + 5y = 1$

- 拡張ユークリッドの互除法を用いると、

  $$3 \cdot 2 + 5 \cdot (-1) = 6 - 5 = 1,$$

  よって特殊解として $x_0 = 2, y_0 = -1$ が得られます。
- $c = 1$ は $\gcd(3, 5) = 1$ の 1 倍なので、$k = 1$ として、

$$x = 2 \cdot 1 = 2, \quad y = (-1) \cdot 1 = -1.$$

この結果、特殊解 $(x, y) = (2, -1)$ が得られます。

計算例 2: $12x + 18y = 30$ の場合

1. まず、$\gcd(12, 18) = 6$ です。
2. 30 は 6 の倍数で、$30 = 6 \cdot 5$ よって $k = 5$ となります。
3. 拡張ユークリッドの互除法で 12 と 18 の最大公約数を表す係数を求めます。
   例として、

   $$12 \cdot (-1) + 18 \cdot 1 = 6,$$

   とすると、特殊解として $x_0 = -1, y_0 = 1$ が得られます。
4. これに $k = 5$ を掛けると、

   $$x = -1 \cdot 5 = -5, \quad y = 1 \cdot 5 = 5.$$

5. 確認: $12(-5) + 18(5) = -60 + 90 = 30$ となり、正しいことがわかります。

3. 一般解の導出

特殊解 (x_0, y_0) が求まった後、すべての解はこの特殊解に同次方程式

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$$

の解を加えることで表されます。
この同次方程式の整数解は、

$$x - x_0 = \frac{b}{d}t, \quad y - y_0 = -\frac{a}{d}t \quad (t \in \mathbb{Z})$$

となるため、**一般解**は

$$x = x_0 + \frac{b}{d}t, \quad y = y_0 - \frac{a}{d}t \quad (t \in \mathbb{Z})$$

と表されます。

計算例 1（続き）: $3x + 5y = 1$ の一般解

- ここで $d = \gcd(3, 5) = 1$ なので、

  $$x = 2 + 5t, \quad y = -1 - 3t, \quad (t \in \mathbb{Z})$$

  これが $3x + 5y = 1$ の全ての整数解を表す一般解です。

計算例 2（続き）: $12x + 18y = 30$ の一般解

- $d = \gcd(12, 18) = 6$ のため、特殊解 $(x_0, y_0) = (-5, 5)$ に対して、

  $$x = -5 + \frac{18}{6}t = -5 + 3t, \quad y = 5 - \frac{12}{6}t = 5 - 2t, \quad (t \in \mathbb{Z})$$

  これが $12x + 18y = 30$ の全ての整数解を表す一般解です。

4. まとめ

1. **整数解の存在条件：**
   一次不定方程式

$$
ax + by = c
$$

に整数解が存在するためには、

$$
\gcd(a, b) \mid c
$$

すなわち、a と b の最大公約数が c の倍数でなければなりません。

2. **特殊解の求め方：**
   拡張ユークリッドの互除法を用いて

$$
ax_0 + by_0 = \gcd(a, b)
$$

   を求め、c をその倍数（$c = d\,k$）として、

$$
x = x_0 k, \quad y = y_0 k
$$

   で特殊解が得られます。
   - 例: $3x + 5y = 1$ の特殊解は $(2, -1)$。
   - 例: $12x + 18y = 30$ の特殊解は $(-5, 5)$。
3. **一般解の導出：**
   特殊解 (x_0, y_0) に対し、任意の解との差

$$
\Delta x = x - x_0, \quad \Delta y = y - y_0
$$

   は同次方程式

$$
a\Delta x + b\Delta y = 0
$$

   の解となります。
   この同次方程式の整数解は、

$$
\Delta x = \frac{b}{d}\,t, \quad \Delta y = -\frac{a}{d}\,t \quad (t \in \mathbb{Z})
$$

   と表されるため、全体の一般解は

$$x = x_0 + \frac{b}{d}\,t, \quad y = y_0 - \frac{a}{d}\,t \quad (t \in \mathbb{Z})$$

となります.

- 例: $3x + 5y = 1$ の一般解は $x = 2 + 5t, y = -1 - 3t$.
- 例: $12x + 18y = 30$ の一般解は $x = -5 + 3t, y = 5 - 2t$.

このように、特殊解と同次方程式の解を組み合わせることで、一次不定方程式の全ての整数解を求めることができます。