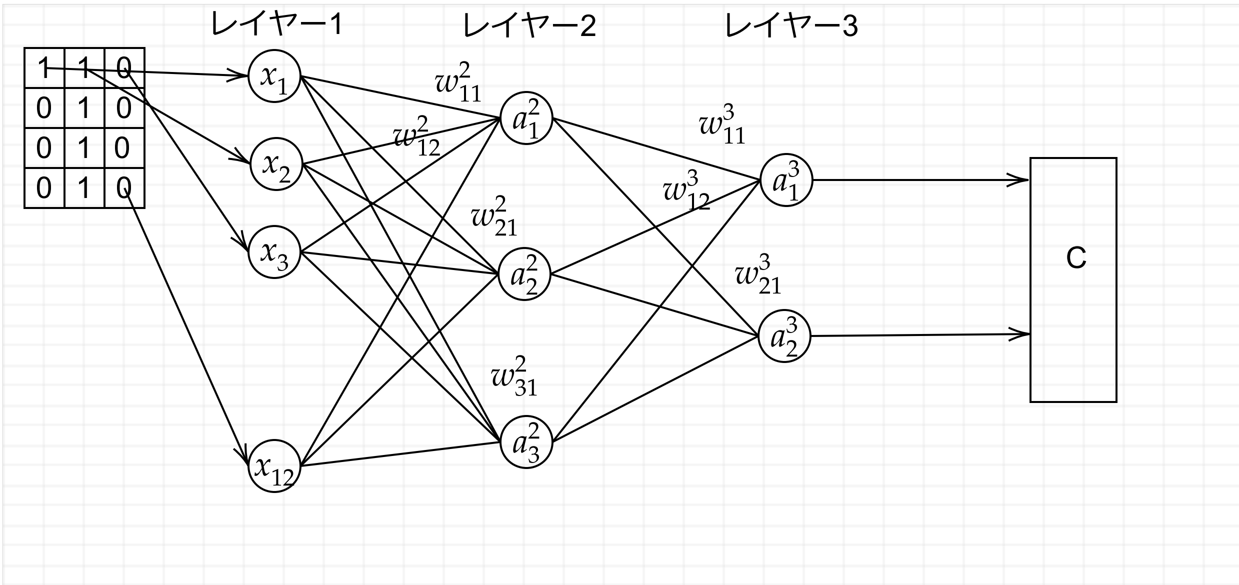
ディープラーニングの計算式

1. 構成



2. Forwardの計算方法

・レイヤー1の入力ユニット: $\overrightarrow{x^1}$

$$\overrightarrow{x^1} = \left[x^1_1\ x^1_2\ x^1_3\ \dots x^1_{12}\right] \tag{1}$$

・レイヤー1の出力ユニット: $\overrightarrow{a^1}$

$$\overrightarrow{a^1} = \overrightarrow{x^1} \tag{2}$$

・レイヤー2の重み: $\overrightarrow{w^2}$

$$\overrightarrow{w^2} = \begin{bmatrix} w^2_{11} & w^2_{12} & w^2_{13} & \dots & w^2_{112} \\ w^2_{21} & w^2_{22} & w^2_{23} & \dots & w^2_{212} \\ w^2_{31} & w^2_{32} & w^2_{33} & \dots & w^2_{312} \end{bmatrix} \tag{3}$$

・レイヤー2のバイアス: $\overrightarrow{b^2}$

$$\overrightarrow{b^2} = \left[b^2_1\ b^2_2\ b^2_3\right] \tag{4}$$

・レイヤー2の入力ユニット: $\overrightarrow{x^2}$

$$\overrightarrow{x^2} = \left[x^2_1\ x^2_2\ x^2_3\right] \tag{5}$$

$$\overrightarrow{x^2} = \overrightarrow{w^2}\,\overrightarrow{x^1} + \overrightarrow{b^2} \tag{6}$$

・レイヤー2の出力ユニット: $\overrightarrow{a^2}$

$$\overrightarrow{a^2} = \left[a_1^1\ a_2^1\ a_3^1\right] \tag{7}$$

$$\overrightarrow{a^2} = \sigma\left(\overrightarrow{x^2}\right) \tag{8}$$

・レイヤー3の重み: $\overrightarrow{w^3}$

$$\overrightarrow{w^3} = \begin{bmatrix} w_{11}^3 & w_{12}^3 & w_{13}^3 \\ w_{21}^3 & w_{22}^3 & w_{23}^3 \end{bmatrix} \tag{9}$$

・レイヤー3のバイアス

$$\overrightarrow{b^3} = \left[b_1^3\ b_2^3\right]$$

・レイヤー3の入力ユニット: $\overrightarrow{x^3}$

$$\overrightarrow{x^3} = \left[x_1^3\ x_2^3\right] \tag{10}$$

$$\overrightarrow{x^3} = \overrightarrow{w^3}\overrightarrow{a^2} + \overrightarrow{b^3}$$

・レイヤー3の出力ユニット: $\overrightarrow{a^3}$

$$\overrightarrow{a^3} = \sigma\left(\overrightarrow{x^3}\right) \tag{11}$$

・正解ラベル

$$\vec{t} = [t_1\ t_2]$$

・コスト関数(誤差二乗和)

$$C = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\left(a_j^3 - t_j\right)^2 \tag{12}$$

※ n=2(nはユニット数)

・シグモイド関数

$$\sigma(x) = \frac{1}{1+\exp(-x)} \tag{13}$$

3. Backpropagationの計算方法

・レイヤー3の出力ユニットの誤差

$$\frac{\partial C}{\partial a^3} = C'\left(a^3\right) = \overrightarrow{a^3} - \vec{t} \tag{14}$$

・求め方

$$C = \frac{1}{2}\left(\left(t_1 - a_1^3\right)^2 + \left(t_1 - a_1^3\right)^2\right) \tag{15}$$

Cをa_1^3について微分する。

$$\left[\frac{1}{2}\left(\left(t_1-a_1^3\right)^2+\left(t_1-a_1^3\right)^2\right)\right]' \tag{16}$$

$t_1-a_1^3$=μ とおく。

$$[\frac{1}{2}\left(\left(\mu^2+\left(t_1-a_1^3\right)^2\right)\right]' \tag{17}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 2\mu\cdot\left(t_1-a_1^3\right)' \tag{18}$$

$$=\mu\cdot(-1) \tag{19}$$

$$=-1\left(t_1-a_1^3\right) \tag{20}$$

$$=a_1^3-t_1 \tag{21}$$

・シグモイド関数の微分

合成関数の微分の公式を用いる。$\left(\frac{1}{f(x)}\right)'=\frac{f'(x)}{f^2(x)}$

結論は以下になる。

$$\sigma'(x)=\sigma(x)(1-\sigma(x)) \tag{22}$$

・レイヤー3の入力ユニットの誤差

$$\frac{\partial C}{\partial x^3}=\frac{\partial C}{\partial a^3}\frac{\partial a^3}{\partial x^3}=\left(\overrightarrow{a^3}-\vec{t}\right)\odot\sigma\left(\overrightarrow{x^3}\right)\left(1-\sigma\left(\overrightarrow{x^3}\right)\right) \tag{23}$$

・レイヤー3の重みの微分

$$\frac{\partial C}{\partial w^3}=\begin{bmatrix} a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \end{bmatrix}\odot\begin{bmatrix} \frac{\partial C}{\partial x_1^3} & \frac{\partial C}{\partial x_1^3} & \frac{\partial C}{\partial x_1^3} \\ \frac{\partial C}{\partial x_2^3} & \frac{\partial C}{\partial x_2^3} & \frac{\partial C}{\partial x_2^3} \end{bmatrix} \tag{24}$$

・レイヤー3のバイアスの微分

$$\frac{\partial C}{\partial b^3}=\frac{\partial C}{\partial x^3}=\begin{bmatrix} \frac{\partial C}{\partial x_1^3} & \frac{\partial C}{\partial x_2^3} \end{bmatrix} \tag{25}$$

・レイヤー2の出力ユニットの誤差

$$\frac{\partial C}{\partial a^2}=w^{3^T}\frac{\partial C}{\partial x^3} \tag{26}$$

・レイヤー2の入力ユニットの誤差

$$\frac{\partial C}{\partial x^2} = \frac{\partial C}{\partial a^2}\frac{\partial a^2}{\partial x^2} = \frac{\partial C}{\partial a^2} \odot \sigma\left(x^2\right)\left(1 - \sigma\left(x^2\right)\right) \tag{27}$$

・レイヤー2の重みの微分

$$\frac{\partial C}{\partial w^2} = \begin{bmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 & \cdots & a_{12}^1 \\ a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 & \cdots & a_{12}^1 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} \frac{\partial C}{\partial x_1^2} & \frac{\partial C}{\partial x_1^2} & \frac{\partial C}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial C}{\partial x_1^2} \\ \frac{\partial C}{\partial x_2^2} & \frac{\partial C}{\partial x_2^2} & \frac{\partial C}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial C}{\partial x_2^2} \end{bmatrix} \tag{28}$$

・レイヤー2のバイアスの微分

$$\frac{\partial C}{\partial b^2} = \frac{\partial C}{\partial x^2} \tag{29}$$