# 回転行列

## 1. 概要

- 回転行列と二次元平面上のベクトル の積を求めることで、そのベクトルを回転させたベクトルを求めることができる。

## 2. 説明

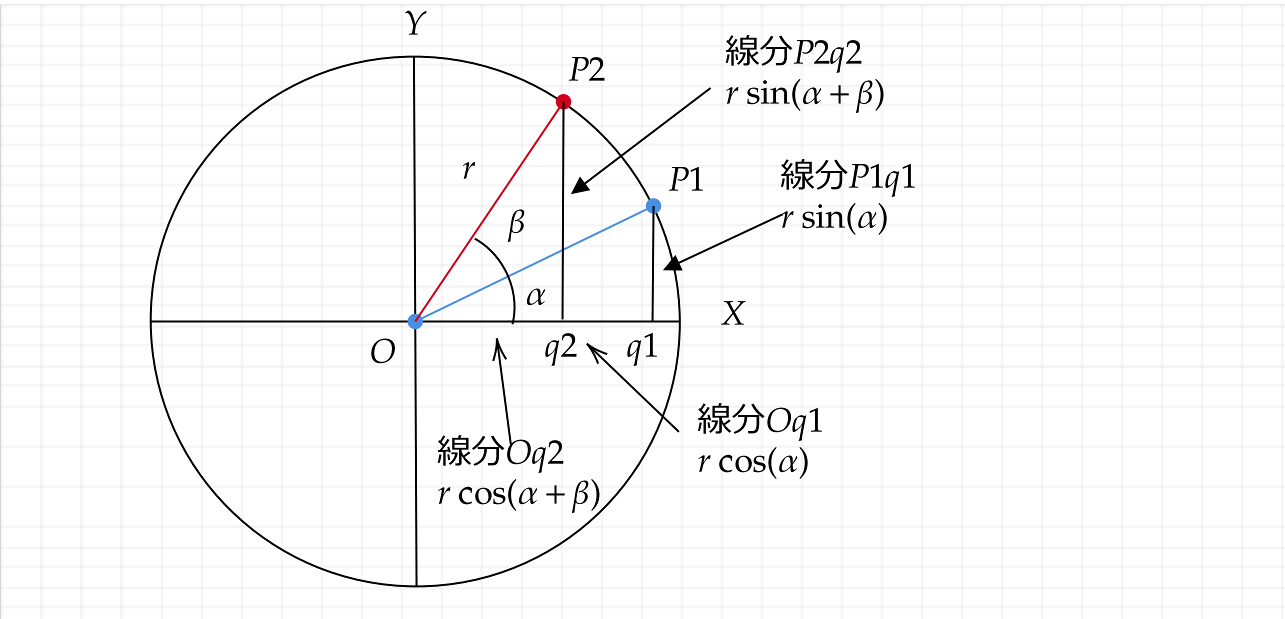
- 下記(1)が回転行列。
- (2)の右辺が、ベクトル(x,y)を$\theta$度回転させたベクトル。

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \tag{1}$$

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x\cos\theta - y\sin\theta \\ x\sin\theta + u\cos\theta \end{bmatrix} \tag{2}$$

## 3. 証明

以下の図より点P1、P2の座標を求められる。




$$P1\text{の座標}(x, y) = (r\cos\alpha, r\sin\alpha) \tag{3}$$

$$P2\text{の座標}\left(x', y'\right) = (r\cos(\alpha+\beta), r\sin(\alpha+\beta)) \tag{4}$$

P1とP2の関係を知りたい。まずはP2の座標を求める。
P2の座標$\left(x', y'\right)$は加法定理より以下のように展開できる。

$$x' = r\cos(\alpha+\beta) = r\left(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta\right) \tag{5}$$

$$y' = r\sin(\alpha+\beta) = r(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta) \tag{6}$$

ここでP1の座標を$(x, y)$とおき、(5)、(6)に代入すると以下になる。

$$\begin{aligned} x' &= r\left(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta\right) \\ &= r\cos\alpha\cos\beta - r\sin\alpha\sin\beta \\ &= x\cos\beta - y\sin\beta \end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned} y' &= r(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta) \\ &= r\sin\alpha\cos\beta + r\cos\alpha\sin\beta \\ &= y\cos\beta + x\sin\beta \end{aligned} \tag{8}$$

よって、回転行列とベクトルの積が、ベクトルを回転させたベクトルであることがわかる。

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x\cos\beta - y\sin\beta \\ x\sin\beta + y\cos\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$