CSP.04: Forward Checking und Kantenkonsistenz

Gegeben sei wieder das CSP aus CSP.03 mit

$$D = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}, \quad v_1, \ldots, v_4$$

und den Constraints

$$\begin{aligned} c_1 &: (v_1, v_2),\ x + y = 3, \\ c_2 &: (v_2, v_3),\ x + y \leq 3, \\ c_3 &: (v_1, v_3),\ x \leq y, \\ c_4 &: (v_3, v_4),\ x \neq y. \end{aligned}$$

Wir betrachten die partielle Belegung

$$\alpha = \{v_1 \mapsto 2\}.$$

1. Kantenkonsistenz in α:

Ausgangsdomänen

Belegte Variable: nur der zugewiesene Wert. Unbelegte Variablen: volle Domäne.

$$D_1 = \{2\}, \quad D_2 = D_3 = D_4 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}.$$

Nun stellen wir per Hand Kantenkonsistenz her (keine formale AC-3-Ausführung, nur logisches Ableiten).

Aus $c_1 : v_1 + v_2 = 3$ **und** $v_1 = 2$ Es muss $v_2 = 1$ gelten. Also

$$D_2 = \{1\}.$$

Aus $c_3 : v_1 \leq v_3$ **und** $v_1 = 2$ Es gilt $v_3 \geq 2$, also zunächst

$$D_3 = \{2, 3, 4, 5\}.$$

Aus $c_2 : v_2 + v_3 \leq 3$ **mit** $v_2 = 1$ Es muss $1 + v_3 \leq 3$ gelten, also $v_3 \leq 2$. Zusammen mit $v_3 \geq 2$ bleibt nur

$$D_3 = \{2\}.$$

Aus $c_4 : v_3 \neq v_4$ **mit** $v_3 = 2$ Wert 2 ist in D_4 nicht erlaubt, also

$$D_4 = \{0, 1, 3, 4, 5\}.$$

Weitere Einschränkungen ergeben sich nicht mehr.

Endergebnis Kantenkonsistenz

$$D_1 = \{2\}, \quad D_2 = \{1\}, \quad D_3 = \{2\}, \quad D_4 = \{0, 1, 3, 4, 5\}.$$

2. Forward Checking in α :

Forward Checking schaut nur auf Constraints, an denen bereits *zugewiesene* Variablen beteiligt sind. Bei $\alpha = \{v_1 = 2\}$ sind das die Kanten zu v_1:

- c_1 zwischen v_1 und v_2,
- c_3 zwischen v_1 und v_3.

Startdomänen wie oben:

$$D_1 = \{2\}, \quad D_2 = D_3 = D_4 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}.$$

Constraint $c_1 : v_1 + v_2 = 3$ **mit** $v_1 = 2$ Nur $v_2 = 1$ ist erlaubt:

$$D_2 = \{1\}.$$

Constraint $c_3 : v_1 \leq v_3$ **mit** $v_1 = 2$ Es muss $v_3 \geq 2$ gelten:

$$D_3 = \{2, 3, 4, 5\}.$$

Forward Checking stoppt hier. Die Constraints c_2 und c_4 werden noch nicht ausgewertet, weil dort keine bereits belegte Variable beteiligt ist (in beiden sind sowohl v_2 als auch v_3 bzw. v_3 und v_4 noch unbelegt).

Endergebnis Forward Checking

$$D_1 = \{2\}, \quad D_2 = \{1\}, \quad D_3 = \{2, 3, 4, 5\}, \quad D_4 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}.$$

3. Vergleich der Beiden:

- Kantenkonsistenz (Arc Consistency) propagiert die Einschränkungen weiter über alle Kanten und reduziert dadurch zusätzlich die Domänen von v_3 und v_4.
- Forward Checking schaut nur einen Schritt weit (von bereits belegten Variablen zu ihren Nachbarn) und ist daher schwächer: D_3 und D_4 bleiben größer.