Lösung CSP.03: Kantenkonsistenz mit AC-3

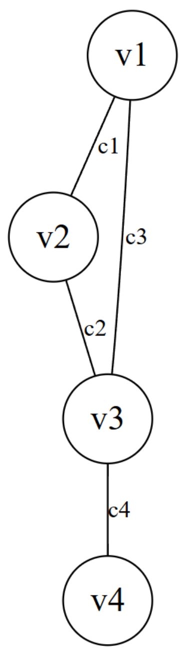
Gegeben sei $D = \{0, \dots, 5\}$ und das CSP

$$\langle\{v_1, v_2, v_3, v_4\}, \{D_{v_1} = D_{v_2} = D_{v_3} = D_{v_4} = D\}, \{c_1, c_2, c_3, c_4\}\rangle$$

mit

$$\begin{aligned}
c_1 &= ((v_1, v_2), \{(x, y) \in D^2 \mid x + y = 3\}),\\
c_2 &= ((v_2, v_3), \{(x, y) \in D^2 \mid x + y \leq 3\}),\\
c_3 &= ((v_1, v_3), \{(x, y) \in D^2 \mid x \leq y\}),\\
c_4 &= ((v_3, v_4), \{(x, y) \in D^2 \mid x \neq y\}).
\end{aligned}$$

1. Constraint-Graph



2. AC-3 Handsimulation

Anfangszustand der Domänen:

$$D_1 = D_2 = D_3 = D_4 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}.$$

Die Queue enthält alle gerichteten Kanten:

$$Q_0 = [(v_1, v_2), (v_2, v_1), (v_2, v_3), (v_3, v_2), (v_1, v_3), (v_3, v_1), (v_3, v_4), (v_4, v_3)].$$

Im Folgenden jeweils: bearbeiteter Bogen, Wirkung von `ARC_Reduce` und neue Domänen.

1. Bogen (v_1, v_2), Constraint $c_1 : x + y = 3$.

   Für $x = 4$ und $x = 5$ gibt es kein $y \in D_2$ mit $x + y = 3$.

   $$D_1 = \{0, 1, 2, 3\}, \quad D_2 = D_3 = D_4 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}.$$

   Queue: $(v_2, v_1), (v_2, v_3), (v_3, v_2), (v_1, v_3), (v_3, v_1), (v_3, v_4), (v_4, v_3)$.

2. Bogen (v_2, v_1), Constraint c_1 (andere Richtung).

   Für $x = 4$ und $x = 5$ gibt es kein $y \in D_1 = \{0, 1, 2, 3\}$ mit $x + y = 3$.

   $$D_2 = \{0, 1, 2, 3\}, \quad D_1 = \{0, 1, 2, 3\}, \quad D_3 = D_4 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}.$$

   Queue: $(v_2, v_3), (v_3, v_2), (v_1, v_3), (v_3, v_1), (v_3, v_4), (v_4, v_3)$.

3. Bogen (v_2, v_3), Constraint $c_2 : x + y \leq 3$.

   Für jedes $x \in D_2 = \{0, 1, 2, 3\}$ gibt es ein $y \in D_3$ mit $x + y \leq 3$. Keine Änderung.

   $$D_1 = \{0, 1, 2, 3\}, \; D_2 = \{0, 1, 2, 3\}, \; D_3 = D_4 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}.$$

4. Bogen (v_3, v_2), Constraint c_2 (andere Richtung).

   Für $x = 4$ und $x = 5$ gibt es kein $y \in D_2 = \{0, 1, 2, 3\}$ mit $x + y \leq 3$.

   $$D_3 = \{0, 1, 2, 3\}, \quad D_1 = D_2 = \{0, 1, 2, 3\}, \quad D_4 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}.$$

   Queue: $(v_1, v_3), (v_3, v_1), (v_3, v_4), (v_4, v_3)$.

5. Bogen (v_1, v_3), Constraint $c_3 : x \leq y$.

   Für jedes $x \in D_1 = \{0, 1, 2, 3\}$ gibt es ein $y \in D_3 = \{0, 1, 2, 3\}$ mit $x \leq y$. Keine Änderung.

6. Bogen (v_3, v_1), Constraint c_3 in Gegenrichtung.

   Für jedes $x \in D_3 = \{0, 1, 2, 3\}$ gibt es ein $y \in D_1$ mit $y \leq x$. Keine Änderung.

7. Bogen (v_3, v_4), Constraint $c_4 : x \neq y$.

   Für jedes $x \in D_3 = \{0, 1, 2, 3\}$ gibt es ein $y \in D_4$ mit $x \neq y$. Keine Änderung.

8. Bogen (v_4, v_3), Constraint c_4 in Gegenrichtung.

   Für jedes $x \in D_4 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ gibt es ein $y \in D_3 = \{0, 1, 2, 3\}$ mit $x \neq y$. Keine Änderung. Queue nun leer.

Endergebnis der Domänen nach AC-3

$$D_1 = \{0, 1, 2, 3\}, \quad D_2 = \{0, 1, 2, 3\}, \quad D_3 = \{0, 1, 2, 3\}, \quad D_4 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}.$$

Die Kanten c_1 und c_2 haben die Domänen von v_1, v_2, v_3 auf Werte ≤ 3 eingeschränkt, die Domäne von v_4 bleibt unverändert.