Search.04: Beweis der Optimalität von A*

Problemverständnis:

In der Tree-Search-Variante merkt sich A* keine bereits besuchten zustände (keine Closed List). Wir nehmen an, dass keine Zyklen oder Wiederholungen auftreten, sodass der Zustandsraum als Baum gezeigt werden kann.

Eine Heuristik $h(n)$ heißt Zulässig und gültig, wenn sie die tatsächlichen Kosten bis zum Ziel niemals überschätzt:

$$h(n) \leq h^*(n) \quad \forall n,$$

wobei $h^*(n)$ die minimalen Restkosten von n bis zu einem Ziel beschreibt. Damit ist immer $f(n) = g(n) + h(n) \leq g(n) + h^*(n)$, also liefert $f(n)$ immer eine zu kleine oder richtige Schätzung der Gesamtkosten.

Behauptung: A* ist in der Tree-Search-Variante mit einer zulässigen Heuristik optimal. Das bedeutet, dass der erste gefundene Zielknoten immer einen Pfad mit minimalen Gesamtkosten beschreibt.

Beweis (Widerspruchsbeweis):

Nehmen wir an A* findet zuerst eine nicht optimale lösung Q mit Kosten C, obwohl es einen besseren Pfad P mit geringeren Kosten C* < C gibt. Auf diesem optimalen Pfad P gucken wir den ersten Knoten s, der beim Beenden des Algorithmus noch nicht erweitert wurde. Da alle Vorgänger von s auf P bereits bearbeitet wurden, befand sich s zu diesem Zeitpunkt noch in der offenen Liste.

Für diesen knoten gilt wegen der gültigkeit/zulässigkeit:

$$f(s) = g(s) + h(s) \leq g(s) + h^*(s) = C^*.$$

Da C* < C folgt f(s) < C. Da A* immer den Knoten mit dem kleinsten f-Wert aus der Ofennen List auswählt, hätte A* s (,oder einen anderen Knoten mit kleineren f) vor dem Ziel von Q expandieren müssen. Das steht im Widerspruch zur Annahme dass das Q zuerst gefunden wurde.

Folgerung: Kein suboptimaler Pfad kann zuerst gefunden werden. Daher hat der erste Zielknoten also:

$$g(\text{Ziel}) = C^*.$$

Ergebnis: A* ist in der Tree-Search-Variante bei verwendung einer zulässigen Heuristik **optimal**.