SVD

AUTORI:	*Alberti Nicolo'*	*matr. 4086006*
	Canepa Andrea	*matr. 4185248*

INDICE:

(1) *Presentazione*
(2) Esercizio 1 --- > *SVD, Nuclei e Immagini*
(3) Esercizio 2 --- > *Autovalori e Valori Singolari*
(4) Esercizio 3 --- > *Sistemi Lineari*

Laboratorio n° 3 di Calcolo Numerico
Anno accademico 2016/2017

Esercizio 1 – SVD, Nuclei e Immagini

Valori singolari di A:

3.8863	0	0
0	1.1213	0
0	0	0.1515
0	0	0
0	0	0
0	0	0
0	0	0
0	0	0
0	0	0
0	0	0

Autovalori di AA^t:

15.1032 + 0.0000i
1.2572 + 0.0000i
0.0229 + 0.0000i
0.0000 + 0.0000i
-0.0000 + 0.0000i
-0.0000 + 0.0000i
0.0000 + 0.0000i
-0.0000 + 0.0000i
-0.0000 - 0.0000i
-0.0000 + 0.0000i

Autovalori di A^tA:

0.0229
1.2572
15.1032

Come si puo' vedere i valori singolari di AA^t e A^tA sono il quadrato di quelli della matrice A per una proprieta' algebrica della decomposizione ai valori singolari che afferma che se σ_j e' valori singolare di A allora σ_j^2 e' autovalore sia di AA^t che di A^tA.

Immagine di A:

-0.2183	0.4742	0.5879
-0.2335	0.4151	0.2279
-0.2507	0.3441	-0.0459
-0.2697	0.2612	-0.2335
-0.2906	0.1664	-0.3349
-0.3133	0.0598	-0.3500
-0.3379	-0.0588	-0.2790
-0.3643	-0.1892	-0.1218
-0.3926	-0.3315	0.1216
-0.4227	-0.4857	0.4513

Matrice dei valori singolari sinistri (UA):

-0.2183	0.4742	0.5879	-0.0485	0.0256	0.0382	-0.0107	-0.1210	-0.2929	-0.5261
-0.2335	0.4151	0.2279	0.0075	0.1493	0.2617	0.3448	0.3984	0.4226	0.4174
-0.2507	0.3441	-0.0459	-0.3976	-0.4474	-0.4266	-0.3354	-0.1737	0.0584	0.3610
-0.2697	0.2612	-0.2335	0.8653	-0.1388	-0.1304	-0.1097	-0.0764	-0.0307	0.0274
-0.2906	0.1664	-0.3349	-0.1628	0.8167	-0.1841	-0.1654	-0.1270	-0.0690	0.0087
-0.3133	0.0598	-0.3500	-0.1631	-0.1941	0.7955	-0.1943	-0.1635	-0.1121	-0.0401
-0.3379	-0.0588	-0.2790	-0.1357	-0.1712	-0.1915	0.8037	-0.1859	-0.1600	-0.1188
-0.3643	-0.1892	-0.1218	-0.0805	-0.1148	-0.1451	-0.1716	0.8059	-0.2128	-0.2276
-0.3926	-0.3315	0.1216	0.0024	-0.0246	-0.0654	-0.1199	-0.1883	0.7295	-0.3665
-0.4227	-0.4857	0.4513	0.1130	0.0992	0.0477	-0.0415	-0.1684	-0.3330	0.4647

Immagine di A^t:

-0.7960	0.5847	0.1566
-0.4860	-0.4632	-0.7411
-0.3608	-0.6661	0.6528

Matrice dei valori singolari sinistri (UA^t):

-0.7960	0.5847	0.1566
-0.4860	-0.4632	-0.7411
-0.3608	-0.6661	0.6528

indice

Come si puo' vedere dall'output del nostro programma i vettori singolari sinistri che corrispondono ai valori singolari non nulli costituiscono l'immagine delle matrici A e A^t (base ortonormale). Dato che la matrice UA^t ha solo tre colonne sara' esattamente uguale all'immagine.

Nucleo di A:

Il nucleo di A e' vuoto.

Matrice dei valori singolari destri (VA):

-0.7960	0.5847	0.1566
-0.4860	-0.4632	-0.7411
-0.3608	-0.6661	0.6528

Nucleo di A^t:

-0.0485	0.0256	0.0382	-0.0107	-0.1210	-0.2929	-0.5261
0.0075	0.1493	0.2617	0.3448	0.3984	0.4226	0.4174
-0.3976	-0.4474	-0.4266	-0.3354	-0.1737	0.0584	0.3610
0.8653	-0.1388	-0.1304	-0.1097	-0.0764	-0.0307	0.0274
-0.1628	0.8167	-0.1841	-0.1654	-0.1270	-0.0690	0.0087
-0.1631	-0.1941	0.7955	-0.1943	-0.1635	-0.1121	-0.0401
-0.1357	-0.1712	-0.1915	0.8037	-0.1859	-0.1600	-0.1188
-0.0805	-0.1148	-0.1451	-0.1716	0.8059	-0.2128	-0.2276
0.0024	-0.0246	-0.0654	-0.1199	-0.1883	0.7295	-0.3665
0.1130	0.0992	0.0477	-0.0415	-0.1684	-0.3330	0.4647

Matrice dei valori singolari destri (VA^t):

-0.2183	0.4742	0.5879	-0.0485	0.0256	0.0382	-0.0107	-0.1210	-0.2929	-0.5261
-0.2335	0.4151	0.2279	0.0075	0.1493	0.2617	0.3448	0.3984	0.4226	0.4174
-0.2507	0.3441	-0.0459	-0.3976	-0.4474	-0.4266	-0.3354	-0.1737	0.0584	0.3610
-0.2697	0.2612	-0.2335	0.8653	-0.1388	-0.1304	-0.1097	-0.0764	-0.0307	0.0274
-0.2906	0.1664	-0.3349	-0.1628	0.8167	-0.1841	-0.1654	-0.1270	-0.0690	0.0087
-0.3133	0.0598	-0.3500	-0.1631	-0.1941	0.7955	-0.1943	-0.1635	-0.1121	-0.0401
-0.3379	-0.0588	-0.2790	-0.1357	-0.1712	-0.1915	0.8037	-0.1859	-0.1600	-0.1188
-0.3643	-0.1892	-0.1218	-0.0805	-0.1148	-0.1451	-0.1716	0.8059	-0.2128	-0.2276
-0.3926	-0.3315	0.1216	0.0024	-0.0246	-0.0654	-0.1199	-0.1883	0.7295	-0.3665
-0.4227	-0.4857	0.4513	0.1130	0.0992	0.0477	-0.0415	-0.1684	-0.3330	0.4647

Non avendo valori singolari nulli si puo' vedere come il nucleo della matrice A sia vuoto, o meglio, contiene solo la soluzione banale {0}, mentre il nucleo della matrice A^t è uguale alle colonne della matrice dei valori singolari destri corrispondenti ai valori singolari nulli (dalla 4 alla 10).

Questi risultati possono essere considerati delle prove empiriche del teorema seguente:

Sia $A = U\Sigma V^t$ *con* $\sigma_1 >= \dots >= \sigma_r > 0 = \sigma_{r+1} = \dots = \sigma_p = 0$ *allora* $r = Rank(A)$. $R(A) = <u_1, \dots, u_r>$ *e anche* $N(A) = <v_{r+1}, \dots, v_p>$.

Esercizio 2 – Autovalori e Valori Singolari

L'output del nostro programma prevede risultati per un unico valore di n: per eseguire i test e studiare i risultati al variare di n abbiamo modificato a mano il valore della suddetta costante di volta in volta; abbiamo preso in esame n = {5, 10, 20, 50, 100, 200}.

All'aumentare di n abbiamo notato come il valore singolare massimo della matrice presa in esame aumenta e, allo stesso modo, il valore singolare minimo diminuisce. Il condizionamento in norma 2 ($||.||_2$) del vettore Σ diventa sempre maggiore ma questo fatto era prevedibile per quanto detto precedentemente. E' interessante vedere come una minima perturbazione di un'entrata della matrice faccia si che gli autovalori diventino complessi (prima di essa erano tutti reali) poiche' il nuovo polinomio caratteristico avra' soluzioni complesse. Ricordiamo che per un noto teorema se un autovalore e' complesso e' un autovalore anche il suo coniugato. Questi risultati sono coerenti con il fatto che una minima perturbazione nella matrice possa portare a uno scompenso nella soluzione dipendente, appunto, dal condizionamento della matrice.

Il rango puo' essere influenzato da un errore nella percezione della macchina di valori che si avvicinanano alla precisione di macchina: se un valore singolare venisse considerato nullo il comando di matlab *rank()* per calcolare il rango di una matrice fallirebbe in quanto va a contare quanti sono i valori singolari maggiori di zero. In tal caso ci restituirebbe il rango geometrico e non quello reale.

Esercizio 3 – Sistemi Lineari

L'esercizio consiste nel risolvere lo stesso sistema con varie metodologie di calcolo: per quanto riguarda il metodo SVD abbiamo calcolato la decomposizione ai valori singolari della matrice A e successivamente abbiamo implementato il calcolo della pseudoinversa; successivamente abbiamo calcolato la soluzione al sistema con la fattorizzazione QR tramite l'algoritmo iterativo che ci era stato proposto a lezione; abbiamo anche visto la soluzione tramite la costruzione di un sistema di equazioni normali ricavandoci le matrici dei coefficienti (A'A) e il termine noto (A'y) e, infine, tramite il comando di Matlab per la risoluzione di sistemi lineari richiamato con il carattere '\' . Confrontando le soluzioni abbiamo notato che sono tutte uguali a meno di un errore confrontabile con la precisione di macchina e quindi trascurabile.

Soluzione ottenuta:

X =

-0.0127
1,1145
-0.2569