Autovalori

AUTORI:	*Alberti Nicolo'*	*matr. 4086006*
	Canepa Andrea	*matr. 4185248*

INDICE:

Laboratorio n° 4 di Calcolo Numerico
Anno accademico 2016/2017

Esercizio 1 – Confronto Autovalori

Abbiamo confrontato le matrici A e B (cioe' la matrice A perturbata in una sua entrata) in norma 2 con il comando *norm()* e abbiamo ottenuto il valore 5.0565×10^{-11} , che ci suggerisce che la perturbazione dell'ordine di 10^{-10} sulla matrice porta ad un incremento dell'errore in output dell'ordine di 10^{-11} . Il confronto degli autovalori in norma 2 ci da come risultato 0.1000, infatti notiamo che il vettore di autovalori della matrice perturbata differisce da quello degli autovalori della matrice di partenza di piu' o meno un decimo.

Se consideriamo le matrici A'A e B'B invece otteniamo un risultato interessante: il confronto tra le due matrici in norma 2 ci ha restituito il risultato 2.5568×10^{-11} e la discussione e' analoga al caso precedente. Tuttavia il confronto in norma 2 degli autovalori e' pari a 8.3224×10^{-12} difatti i due vettori VA'A e VB'B non presentano variazioni percepibili: nell'output del nostro programma abbiamo stampato a video fino alla quarta cifra decimale e non abbiamo notato alcuna differenza.

Esercizio 2 - Grafo e Matrice di Google

Nel nostro elaborato abbiamo deciso di confrontare due autovettori, quelli corrispondenti all'autovalore massimo delle matrici Ag e G (calcolata come $Ag*D^{-1}$).

EW massimo di G = 1

EV di G (1^ colonna):

0.6124
0.5271
0.1021
0.1590
0.2041
0.2165
0.3062
0.3580
0.4082
0.4690
0.3062
0.3861
0.1021
0.1590
0.3062
0.2837
0.1021
0.0856
0.3062
0.1906
0.1021
0.0575

EW massimo di Ag = 3.3152

EV di Ag (10^ colonna):

Da entrambi possiamo vedere come funziona il *pageranking* utilizzato nei motori di ricerca sul web: la componente m-esima dell'autovettore di modulo dominante ci da l'importanza di un nodo in internet. Ricordiamo che una pagina viene considerata importante se ha tanti collegamenti, inoltre la sua importanza aumenta se le pagine con cui e' in connessione sono, a loro volta, importanti. Mentre la matrice Ag e' composta da soli 1 e 0, essendo quella di adiacenza (1 se c'e' un arco tra due nodi, 0 altrimenti, non essendo orientato il grafo essa e' simmetrica), la matrice G e' stocastica per colonne: un fatto interessante da notare e' che esse pur essendo diverse (differendo di una scalatura) producono risultati molto simili e significativi. L'autovettore generato da 1 ci da un'importanza in numero di link e, a nostro parere, non aggiunge informazioni rispetto a quelle ricavabili dalla matrice diagonale D, invece quello generato da 3.3152 tiene conto anche del peso delle pagine a cui un nodo e' collegato. Essendo che le proporzioni sono mantenute entrambi i modi di implementare il pageranking di un motore di ricerca risultano accettabili e coerenti.

Esercizio 3 - Metodo Potenze e Potenze Inverse

Abbiamo osservato che il metodo delle potenze applicato al vettore [3,10,4] e' piu' veloce ad approssimare l'autovalore massimo, cioe' 5, rispetto al vettore [1,1,1], questo lo possiamo dedurre dalle velocita' con cui il metodo converge: nel primo caso, con V1, otteniamo 3.8004×10^{-15} mentre, nel secondo, con V2, abbiamo 1.4555×10^{-31} e questo lo si puo' notare anche dal numero di iterazioni che effettuano i cicli, 65 e 139. Da questi dati possiamo concludere che quanto piu' la velocita' di convergenza e' piccola, tanto piu' rapidamente il metodo converge.

Il discorso relativo alle velocita' di convergenza e' analogo per quanto riguarda il metodo delle potenze inverse; osservando i risultati possiamo dire che la scelta dello shift e' fondamentale per l'applicazione del metodo. Nel nostro caso vogliamo approssimare l'autovalore di modulo massimo che ricordiamo essere 5, percio' dobbiamo scegliere un shift > 4 (nei test effettuati abbiamo scelto shift = 4.6). Un valore troppo grande dello shift, in termini di ordine di grandezza, invaliderebbe il peso che ha l'autovalore approssimato all'interno del ciclo for e le operazioni perderebbero di significato producendo risultati erronei: infatti in questo scenario il metodo delle potenze inverse non potrebbe essere applicato in quanto viene meno l'ipotesi per cui $|\lambda_j - p| < |\lambda_k - p|$. In generale, l'ordine di grandezza di p deve essere paragonabile a quello di λ e in questo caso al crescere di p saranno necessari piu' cicli per ottenere una migliore approssimazione dell'autovalore a cui vogliamo convergere.