Corso di Laurea in Informatica

Calcolo Numerico

Sistemi lineari

I seguenti esercizi vanno svolti in linguaggio C o C++, giustificando tutti i risultati ottenuti.

Attenzione: i dati dell'esercizio 1c) variano da gruppo a gruppo, come descritto di seguito. In fase di consegna, la relazione dovrà indicare chiaramente i componenti del gruppo in ordine alfabetico e i rispettivi numeri di matricola. *Qualunque discrepanza rispetto ai dati effettivamente usati comporterà una penalizzazione.*

1. Calcolare la norma ∞ delle seguenti matrici:

   a)
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 7 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 9 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & -10 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

   b) $A = P$, dove P è la matrice di Pascal $n \times n$ definita nel modo seguente:
$$(P)_{i,j} = \binom{i+j-2}{i-1} = \frac{(i+j-2)!}{(i-1)!(j-1)!} \qquad i,j = 1, ..., n$$
   con $n = 10$.

   c) $A = T$, dove T è la matrice tridiagonale $n \times n$ definita dalle formule
$$(T)_{i,j} = 2 \quad \text{se} \quad i = j, \qquad (T)_{i,j} = -1 \quad \text{se} \quad |i-j| = 1, \qquad (T)_{i,j} = 0 \quad \text{altrimenti},$$
   e n è fissato nel modo seguente: si consideri il numero di matricola dell'ultimo componente, in ordine alfabetico, del gruppo; si indichi con d_0 e d_1, rispettivamente, l'ultima e la penultima cifra di tale numero di matricola; si ponga $n = 10(d_1 + 1) + d_0$.

2. Data una matrice A ed un vettore b di dimensioni fissate, implementare in C un programma che risolva in precisione singola il sistema $Ax = b$ tramite l'algoritmo di eliminazione Gaussiana.
   Facoltativi:
   — considerare il pivoting parziale;
   — implementare un unico programma che funzioni per matrici di dimensioni arbitrarie (suggerimento: per passare le matrici alla funzione, utilizzare puntatori a puntatori o linearizzare le matrici)

   Assumendo nota la soluzione del sistema
$$\bar{x} = (1, 1, \ldots, 1)^t,$$
   per tutte le matrici definite al punto 1, calcolare il corrispondente termine noto dato dal prodotto
$$b = A \cdot \bar{x}$$
   e usando b così calcolato, verificare il corretto funzionamento dell'algoritmo di eliminazione Gaussiana.

3. Risolvere il sistema lineare
$$A\tilde{x} = b + \delta b$$
   con le stesse matrici dell'esercizio precedente, considerando per ogni termine noto b il vettore di perturbazioni
$$\delta b = \|b\|_\infty \cdot (-0.01, 0.01, -0.01, ..., 0.01)^t$$
   Confrontare le due soluzioni x e $\tilde{x}$ ottenute, corrispondenti ai rispettivi sistemi lineari con termine noto b e $b + \delta b$. Cosa si osserva? In base agli argomenti visti a lezione, come si possono giustificare i risultati ottenuti?