Sistemi Lineari

AUTORI:	*Alberti Nicolo'*	*matr. 4086006*
	Canepa Andrea	*matr. 4185248*

INDICE:

Laboratorio n° 3 di Calcolo Numerico
Anno accademico 2016/2017

Esercizio 1 - Norme

Output:

Il numero di matricola considerato e' 4185248 percio' avremo d0 = 8 e d1 = 4

La norma infinita di matrix1 e' 14
La norma infinita di matrix2 e' 8
La norma infinita della matrice di Pascal e' 92378
La norma infinita della matrice tridiagonale di dimensione 58 e' 4

/**/

Abbiamo calcolato la norma infinito delle matrice suggerite dall'esercizio: i risultati sono stati ottenuti utilizzando variabili di tipo float (precisione singola) poiche' sufficientemente accurate per descrivere i valori. Abbiamo osservato che la norma infinita della matrice di Pascal, proprio per la sua particolare forma, dipende unicamente dalla sua dimensione in quanto la otteniamo sommando in valore assoluto le entrate dell'ultima riga. Il valore di ritorno della funzione fact() e' double per una maggiore elasticita' nel caso si volessero aumentare le dimensioni delle matrici. Per quanto riguarda la matrice tridiagonale possiamo dedurre che la sua norma infinita sara' sempre 4 tranne nel caso in cui l'ordine della matrice diventa minore di 3, anche questa supposizione e' stata effettuata studiando la composizione della matrice: questo caso non e' contemplato in questo laboratorio.

Esercizio 2 – Riduzione di Gauss

Output:

Vuoi inserire matrici (1), utilizzare quelle gia' predefinite(2) o uscire(0)?

Matrice A :

3	1	-1	0
0	7	-3	0
0	-3	9	-2
0	0	4	-10

Il termine noto della Matrice A e':

3
4
4
-6

La Matrice A ridotta e':

3	0	0	0	|	3
0	7	0	0	|	7
0	0	7.71429	0	|	7.71429
0	0	0	-8.96296	|	-8.96296

Matrice B :

2	4	-2	0
1	3	0	1
3	-1	1	2
0	-1	2	1

Il termine noto della Matrice B e':

4
5
5
2

La Matrice B ridotta e':

3	0	0	0	|	3
0	4.66667	0	0	|	4.66667
0	0	1.57143	0	|	1.57143
0	0	0	-0.454545	|	-0.454545

Matrice di Pascal :

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	3	6	10	15	21	28	36	45	55
1	4	10	20	35	56	84	120	165	220
1	5	15	35	70	126	210	330	495	715
1	6	21	56	126	252	462	792	1287	2002
1	7	28	84	210	462	924	1716	3003	5005
1	8	36	120	330	792	1716	3432	6435	11440
1	9	45	165	495	1287	3003	6435	12870	24310
1	10	55	220	715	2002	5005	11440	24310	48620

Il termine noto della matrice di Pascal e':

10
55
220
715
2002
5005
11440
24310
48620
92378

La Matrice di Pascal ridotta e':

1	0	0	0	0	5.96046e-08	0	0	0	0	0.889048
0	9	0	0	0	-0.00012207	0	0	0	-0.00390625	18.1405
0	0	-10	0	0	0	0	0	0	-0.00195312	29.5964
0	0	0	6.99999	0	0	0	0	0	0	68.6667
0	0	0	0	-5.99997	0	0	0	-0.00012207	0	68.6561
0	0	0	0	0	1.86665	0	0	0	0	23.574
0	0	0	0	0	0	1.16789	0	0	1.52588e-05	-7.25759
0	0	0	0	0	0	0	0.287185	0	0	1.11151
0	0	0	0	0	0	0	0	-0.0496559	0	-0.0166106
0	0	0	0	1.19209e-07	0	0	0	0	-0.0176224	-0.0188306

Poiche' la matrice ha dimensione 58X58 non la stampo a video.

Il termine noto della matrice tridiagonale e':

1
0

.
. 56 zeri
.

0
1

/***/

Il programma calcola il termine noto b di un sistema nella forma Ax=b e poi riduce le matrici tramite l'algoritmo di Gauss. Ora vediamo nel dettaglio il comportamento di alcune matrici utilizzate per fare i test:

--------> ***<u>Matrice A</u>***

Il risultato ottenuto e' coerente con quello che ci saremmo aspettati: la matrice A dopo essere stata ridotta con l'algoritmo di Gauss la troviamo in forma diagonale, inoltre i valori che troviamo sulla diagonale sono esattamente gli stessi che troviamo nel termine noto; questo ci indica che il vettore soluzione e' composto da soli 1, proprio come abbiamo scelto in partenza.

--------> ***Matrice B***

In questo caso la discussione e' analoga a quella effettuata per la matrice precedente, l'unico fatto degno di nota e' che si puo' notare una lieve divergenza nella soluzione dell'ordine di 10e-8 in una delle entrate del vettore soluzione rispetto a quello iniziale, anche se essa puo' essere considerata nulla rispetto all'ordine di grandezza con cui abbiamo effettuato i calcoli. Il risultato e' comunque attendibile e nella stampa video la soluzione e' coerente.

--------> ***Matrice di Pascal***

La matrice in questione e' la piu' interessante. Gia' dalla sua riduzione possiamo dire che l'algoritmo di Gauss non funziona correttamente su di essa in quanto non tutte gli elementi, tranne quelli della diagonale, diventano nulli. Questo e' dovuto a una propagazione dell'errore nei vari passi dell'algoritmo: questo ce lo potevamo aspettare dato che il condizionamento della matrice di Pascal e' molto alto; l'unico modo per ovviare a questo inconveniente e' aumentare la precisione con cui la macchina effettua i calcoli. Se utilizzassimo delle variabili long double i risultati ottenuti sarebbero ragionevolmente corretti mentre lavorando in precisione singola la soluzione sarebbe soggetta a delle variazioni causate dalla rappresentazione dei numeri.

--------> ***Matrice Tridiagonale***

Di questa matrice non abbiamo riportato le stampe a video a causa delle dimensioni notevoli (58x58). In questo caso l'algoritmo ha funzionato correttamente producendo un termine noto corretto, a meno di alcune lievi perturbazioni dell'ordine di 10e-8 circa che sono praticamente impercettibili dal momento che stiamo lavorando in singola precisione. I valori che otteniamo sulla diagonale della matrice ridotta coincidono con quelli che abbiamo a termine noto e percio' possiamo concludere che il risultato e' ragionevolmente corretto.

Il programma da noi proposto gestisce dinamicamente le matrici di qualunque dimensione e da la possibilita' all'utente di inserire i dati; per la risoluzione dei sistemi lineari abbiamo deciso di adottare la tecnica della riduzione di Gauss con pivoting parziale e la "riduzione di Gauss all'indietro". I valori sono stati calcolati in singola precisione (float).

Esercizio 3 – Sistemi Lineari Perturbati

Output:

Vuoi inserire matrici (1), utilizzare quelle gia' predefinite(2) o uscire(0)?

Matrice A :

3	1	-1	0
0	7	-3	0
0	-3	9	-2
0	0	4	-10

Il termine noto e':
3
4
4
-6

La norma del vettore b:
|| b || = 6

Il vettore perturbazione e':
-0.06
0.06
-0.06
0.06

Il termine noto perturbato e':
2.94
4.06
3.94
-5.94

La matrice ridotta e':

3	0	0	0	|	2.9276
0	7	0	0	|	7.03992
0	0	7.71429	0	|	7.66264
0	0	0	-8.96296	|	-8.88519

La soluzione perturbata del sistema e':
0.975868
1.0057
0.993306
0.991322

Errore sulla soluzione del sistema:
0.0241323
-0.0057025
0.0066942
0.00867772

Matrice B :

2	4	-2	0
1	3	0	1
3	-1	1	2
0	-1	2	1

Il termine noto e':

4
5
5
2

La norma del vettore b:

|| b || = 5

Il vettore perturbazione e':

-0.05
0.05
-0.05
0.05

Il termine noto perturbato e':

3.95
5.05
4.95
2.05

La matrice ridotta e':

3	0	0	0	|	2.85
0	4.66667	0	0	|	4.73667
0	0	1.57143	0	|	1.57929
0	0	0	-0.454545	|	-0.479545

La soluzione perturbata del sistema e':

0.95
1.015
1.005
1.055

Errore sulla soluzione del sistema:

0.0499999
-0.015
-0.00500011
-0.0549997

Matrice di Pascal :

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	3	6	10	15	21	28	36	45	55
1	4	10	20	35	56	84	120	165	220
1	5	15	35	70	126	210	330	495	715
1	6	21	56	126	252	462	792	1287	2002
1	7	28	84	210	462	924	1716	3003	5005
1	8	36	120	330	792	1716	3432	6435	11440
1	9	45	165	495	1287	3003	6435	12870	24310
1	10	55	220	715	2002	5005	11440	24310	48620

Il termine noto e':

10
55
220
715
2002
5005
11440
24310
48620
92378

La norma del vettore b:

|| b || = 92378

Il vettore perturbazione e':

-923.78
923.78
-923.78
923.78
-923.78
923.78
-923.78
923.78
-923.78
923.78

Il termine noto perturbato e':

-913.78
978.78
-703.78
1638.78
1078.22
5928.78
10516.2
25233.8
47696.2
93301.8

La matrice ridotta e':

1	0	0	0	0	5.96046e-08	0	0	0	0	| 328563
0	9	0	0	0	-0.00012207	0	0	0	-0.00390625	| -2.78691e+07
0	0	-10	0	0	0	0	0	0	-0.00195312	| -1.24257e+08
0	0	0	6.99999	0	0	0	0	0	0	| -1.99407e+08
0	0	0	0	-5.99997	0	0	0	-0.00012207	0	| -2.48825e+08
0	0	0	0	0	1.86665	0	0	0	0	| -7.45594e+07
0	0	0	0	0	0	1.16789	0	0	1.52588e-05	| 2.98137e+07
0	0	0	0	0	0	0	0.287185	0	0	| -3.0039e+06
0	0	0	0	0	0	0	0	-0.0496559	0	| -123966
0	0	0	0	1.19209e-07	0	0	0	0	-0.0176224	| 4664.21

La soluzione perturbata del sistema e':

328563
-3.09656e+06
1.24257e+07
-2.84868e+07
4.14711e+07
-3.99429e+07
2.55278e+07
-1.04598e+07
2.4965e+06
-264676

Errore sulla soluzione del sistema:

-328562
3.09656e+06
-1.24257e+07
2.84868e+07
-4.14711e+07
3.99429e+07
-2.55278e+07
1.04598e+07
-2.4965e+06
264677

Il termine noto della matrice tridiagonale e':

1
0

.
. 56 zeri
.

0
1

La norma del vettore b:

|| b || = 1

Il vettore perturbazione e':

-0.01
0.01
-0.01
0.01
-0.01
0.01
-0.01
0.01
-0.01
0.01
-0.01
0.01
-0.01
0.01
-0.01
0.01
-0.01
0.01
-0.01
0.01
-0.01
0.01
-0.01
0.01
-0.01
0.01
-0.01
0.01
-0.01
0.01
-0.01
0.01
-0.01
0.01
-0.01
0.01
-0.01
0.01
-0.01
0.01
-0.01
0.01
-0.01
0.01
-0.01
0.01
-0.01
0.01
-0.01
0.01
-0.01
0.01
-0.01
0.01

-0.01
0.01
-0.01
0.01

Il termine noto perturbato e':
0.99
0.01
-0.01

.
.
.

0.01
-0.01
1.01

La soluzione perturbata del sistema e':
0.995085
1.00017
0.995254
1.00034
0.995423
1.00051
0.995593
1.00068
0.995762
1.00085
0.995931
1.00102
0.996101
1.00119
0.99627
1.00135
0.99644
1.00152
0.996609
1.00169
0.996778
1.00186
0.996948
1.00203
0.997117
1.0022
0.997287
1.00237
0.997456
1.00254
0.997626
1.00271
0.997796
1.00288
0.997965
1.00305
0.998134
1.00322
0.998304
1.00339
0.998473
1.00356
0.998642
1.00373
0.998811
1.0039
0.998981
1.00407
0.999151
1.00424

0.999321
1.00441
0.99949
1.00458
0.99966
1.00475
0.99983
1.00492

Errore sulla soluzione del sistema:
0.00491524
-0.000169396
0.0047459
-0.000338674
0.00457674
-0.000507951
0.00440735
-0.000677347
0.00423813
-0.000846624
0.00406861
-0.00101614
0.00389922
-0.00118566
0.0037297
-0.00135493
0.00356042
-0.00152445
0.00339091
-0.00169384
0.00322151
-0.00186324
0.00305212
-0.00203252
0.00288266
-0.00220215
0.00271308
-0.00237155
0.00254357
-0.00254118
0.00237399
-0.0027107
0.00220448
-0.0028801
0.00203508
-0.00304961
0.00186563
-0.00321889
0.00169647
-0.00338817
0.00152725
-0.00355732
0.00135803
-0.0037266
0.00118881
-0.00389612
0.00101912
-0.00406563
0.000849426
-0.00423551
0.000679493
-0.00440526
0.000509799
-0.00457513
0.000339866
-0.00474513
0.000169873
-0.00491512

Per discutere i risultati di questa esercitazione ci siamo serviti di un piccolo script in Matlab per calcolare il condizionamento delle matrici prese in esame. Lo scopo di questo esercizio e' quello di studiare come un errore viene propagato perturbando di una certa quantita' un sistema lineare: al solito discuteremo caso per caso.

--------> ***Matrice A***

Innanzitutto vediamo che il condizionamento di questa matrice e' molto basso, precisamente uguale a 4.4861, e percio' e' giusto notare che non vi e' un grande errore in output poiche' la matrice e' ben condizionata. Inoltre avevevamo appurato al punto precedente che l'algoritmo di Gauss funzionava su questo input e percio' la soluzione ottenuta e' corretta a meno di errori (piccoli) dovuti alla perturbazione.

--------> ***Matrice B***

Anche in questo caso l'algoritmo funziona, il condizionamento e' 27.3517, anche in questo caso molto basso, quindi ci aspettiamo un output non eccessivamente errato in quanto la perturbazione non influisce sulla soluzione di molto: l'errore e' dell'ordine di 10^{-2}, leggermente superiore a quanto riscontrato con la matrice A.

--------> ***Matrice di Pascal***

In questo caso non si puo' concludere niente in quanto il risultato e' fallato poiche' l'algoritmo di riduzione di Gauss non riduce completamente la matrice rendendola in forma triangolare superiore. Inoltre il condizionamento della matrice e' molto alto, $4.1552*10^{9}$, percio' l'errore sulla soluzione da noi calcolata sarebbe amplificato enormemente.

--------> ***Matrice Tridiagonale***

Il condizionamento di questa matrice e' $1.4101*10^{3}$ e' da considerarsi ancora non sufficiente per portare turbamenti alla soluzione del nostro sistema: abbiamo quindi notato che il condizionamento puo' essere indicativo di errori sulla soluzione quando esso si rivela essere maggiore di 10^{3}. Il risultato ottenuto e' abbastanza preciso, a meno di errori di al massimo 10^{-2}, il che ci porta a concludere che la perturbazione in input non ha scombussolato eccessivamente l'output.