Laurea Triennale e Magistrale in Informatica

Calcolo Numerico e Matematica Computazionale 3

SVD
(esercizi facoltativi da svolgere in Matlab)

1. Si consideri la matrice $m \times 3$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_m & x_m^2 \end{pmatrix}$$

dove $x_i = i/m$ per $i = 1, \ldots, m$, con $m = 10$.
- Usando la funzione Matlab "svd", calcolare e confrontare le decomposizioni ai valori singolari di A e A^t.
- Confrontare i valori singolari di A con gli autovalori di AA^t e A^tA. Cosa si può osservare?
- Usando la funzione Matlab "orth", confrontare l'immagine di A (risp. A^t) con la matrice dei vettori singolari sinistri di A (risp. A^t).
- Usando la funzione Matlab "null", confrontare il nucleo di A (risp. A^t) con la matrice dei vettori singolari destri di A (risp. A^t).

2. Si consideri, per valori di n crescenti, la matrice triangolare superiore B di ordine n i cui elementi sono

$$b_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad i = j \\ -1 & \text{se} \quad i < j \\ 0 & \text{se} \quad i > j \end{cases}$$

- Calcolare i valori singolari.
- Studiare l'andamento, rispetto ad n, del valore singolare massimo, del valore singolare minimo e del condizionamento in norma 2.
- Perturbare l'elemento $b_{n,1}$ della quantità -2^{2-n} e calcolare gli autovalori (funzione "eig", si noti che la perturbazione dipende dalla dimensione n della matrice).
- Osservando che un autovalore diventa quasi nullo, fare considerazioni legate ai valori singolari ed al rango della matrice B

3. Si consideri la matrice A dell'es. 1. Posto

$$y = \begin{pmatrix} \sin x_1 \\ \vdots \\ \sin x_m \end{pmatrix}$$

si determini la soluzione ai minimi quadrati del sistema $Ac = y$
- per mezzo della decomposizione ai valori singolari calcolata all'es. 1;
- per mezzo della decomposizione QR (funzione "qr");
- per mezzo delle equazioni normali $A^tAc = A^ty$;
- per mezzo del comando Matlab $c = A\backslash y$;

confrontare tra loro le soluzioni ottenute.