

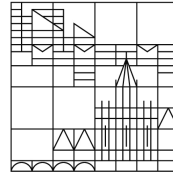
# Lokale Meinungsdynamiken

Fixpunkt- und Konvergenzanalyse

## Diplomarbeit

Alexander Artiga Gonzalez

Universität  
Konstanz



Fachbereich Mathematik

Betreuer: Sven Kosub

Konstanz, 2013

# Inhaltsverzeichnis

<b>1. Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2. Modelle der Meinungsdynamiken</b>	<b>4</b>
2.1. Allgemeines Modell . . . . .	4
2.2. Klassisches Modell . . . . .	4
2.3. Basismodell . . . . .	5
2.4. Bounded Confidence Modell . . . . .	6
2.5. Relative Agreement Modell . . . . .	7
<b>3. Modell der lokalen Meinungsdynamiken</b>	<b>10</b>
3.1. Gruppen von Agenten . . . . .	18
3.2. Fixpunkte . . . . .	22
3.2.1. Unbeeinflusste Gruppen . . . . .	24
3.2.2. Beeinflusste Gruppen . . . . .	33
3.3. Konvergenz . . . . .	36
3.3.1. Konvergenzgeschwindigkeit . . . . .	38
3.4. Simulation . . . . .	41
<b>4. Fazit</b>	<b>46</b>
<b>A. Anhang</b>	<b>48</b>
A.1. Graphentheorie . . . . .	48
A.2. Konvergenzgeschwindigkeit . . . . .	50
A.2.1. Programmcode für Matlab . . . . .	50
A.2.2. Ergebnisse . . . . .	52
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>55</b>
<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>57</b>
<b>Abkürzungsverzeichnis</b>	<b>58</b>

# 1. Einleitung

Meinungsdynamiken beschreiben die Entstehung und Veränderungen von Meinungen einer Gruppe von Personen. Ziel ist es, ein besseres Verständnis dafür zu bekommen, warum es Meinungen gibt, die sich in bestimmten Personengruppen durchsetzen, von anderen Gruppen aber abgelehnt werden, oder zu verstehen, warum es möglich ist, dass extreme Meinungen einer Minderheit eine große Gruppe überzeugen können und wie dieser Vorgang abläuft. Es gibt viele Beispiele die zeigen, dass wenige Personen mit extremen Meinungen diese populär machen und verbreiten können: die NS-Ideologie in den 30er Jahren in Deutschland oder - weniger einschneidend - Modetrends, Deffuant u. a. (2002). Nicht immer aber verbreiten sich extreme Meinungen, oft bildet sich ein gemischtes Meinungsbild. Oder die Personen mit extremen Meinungen nehmen gemäßigte Meinungen an. Auch ist es möglich, dass das Meinungsbild sich mit der Zeit immer weiter verändert und kein stabiler Zustand gefunden wird.

Um Entstehung und Verlauf von Meinungen zu modellieren, muss festgelegt werden, was Meinungen genau sind und wie diese beschrieben werden können. Meinung bezeichnet hier die Haltung einer Person zu einer bestimmten Sache. Einen Ansatz, um Meinungen zu beschreiben, bietet ein binäres Modell mit zwei Zuständen (ja-nein, dafür-dagegen) wie zum Beispiel in Kacperski u. Holyst (2000). Ein großer Nachteil der binären Modelle ist, dass sie nur extreme Meinungen zulassen. Moderate Meinungen sind nicht möglich, Deffuant u. a. (2002). Personen, die ihre Meinung wechseln, ändern sie von einem Extrem ins andere. Dies ist in der Realität häufig nicht so.

Ein anderer Ansatz, der hier nicht weiter verfolgt wird, ist eine diskrete Erweiterung der binären Modelle. Ein Beispiel für die diskrete Erweiterung eines binären Modells ist die Erweiterung der Meinungen  $\{0, 1\}$  auf die Meinungen  $\{0, \frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \dots, 1\}$ .

Die meinungskontinuierlichen Modelle, die in dieser Arbeit betrachtet werden, haben wiederum einen anderen Ansatz und können die Veränderungen von Meinungen genauer beschreiben, als binäre Modelle, die Meinungen meist als  $\{0, 1\}$  oder  $\{-1, 1\}$  definieren. Bei meinungskontinuierlichen Modellen verwendet man  $\mathbb{R}$  oder Teilmengen von  $\mathbb{R}$ , deren Intervallgrenzen die extremen Meinungen beschreiben. Beispiele hierfür sind  $[0, 1] \subset \mathbb{R}$  oder  $[-1, 1] \subset \mathbb{R}$ .

Ein wichtiger Faktor der Meinungsbildung ist die Zeit. Um eine Meinungsänderung zu betrachten, benötigt man mindestens zwei Zeitpunkte und die Meinungen zu diesen Zeitpunkten. In den hier verwendeten Modellen wird eine Folge von Zeitschritten betrachtet und mit jedem Zeitschritt werden die Meinungen neu bestimmt. Die Modelle sind zeitdiskret.

Zudem stellt sich die Frage, wie genau die Meinungen in jedem Zeitschritt bestimmt werden. Hierzu gibt es unterschiedliche Ansätze. Eine Gemeinsamkeit der im Folgenden vorgestellten Modelle ist, dass sich die Meinung einer Person nur aufgrund von äußeren Einflüssen, die auf diese Person wirken, verändert. Um die Meinung einer Person im nächsten Zeitschritt zu bestimmen, genügen Informationen aus dem Umfeld der Person: Umweltfaktoren sowie andere Personen, zu denen ein Kontakt besteht. Die Meinungsänderung einer Person basiert auf lokalen Einflüssen, ohne dass eine Kenntnis aller Meinungen notwendig ist. Dies wird auch *agentenbasierte Modellierung* genannt. Statt Person wird oft die Bezeichnung Agent verwendet. Die agentenbasierte Modellierung hat häufig den Vorteil, dass die Modelle und die darauf beruhenden Simulationen einfacher sind. So können mit agentenbasierter Modellierung komplexe nichtlineare Systeme vereinfacht modelliert und simuliert werden, Kosub (2012).

Im Rahmen dieser Arbeit wird ein Modell entwickelt, das den Meinungsverlauf unter Berücksichtigung vorgegebener Beziehungen zwischen den Agenten beschreibt. Dabei soll sich die Meinung eines Agenten nur durch lokale Einflüsse, also nur durch direkt verbundene Agenten, ändern. Zudem soll es auch möglich sein, dass ein Agent die Meinung eines anderen Agenten ablehnt. Dabei beachtet ein Agent alle lokalen Einflüsse unabhängig von seiner Meinung oder der Meinung der beeinflussenden Agenten. Zur Beschreibung der Beziehungen zwischen den Agenten wird ein Graph<sup>1</sup> verwendet.

Ziel der Arbeit ist es, das Modell auf seine Eigenschaften hin zu untersuchen, wobei die Existenz von Meinungsprofilen, die sich im weiteren Zeitverlauf nicht mehr ändern, die sogenannten Fixpunkte, und die Konvergenz gegen diese Fixpunkte einen Schwerpunkt bilden. Existieren Fixpunkte und konvergieren die Meinungsprofile gegen diese, dann ist es möglich, Aussagen darüber zu treffen, in welche Richtung sich die Meinungen entwickeln. Gibt es keine Konvergenz, dann verändern sich Meinungen kontinuierlich und dann ist es im Allgemeinen nicht möglich, genaue Aussagen über die Meinungen in der Zukunft zu treffen.

Von Interesse ist dabei auch die Zusammensetzung der Meinungen im Fixpunkt. So stellt sich die Frage, ob es einen Konsens gibt, also alle Agenten dieselbe Meinung vertreten, und wie dieser aussieht, oder ob die Agenten unterschiedliche Meinungen besitzen, also eine Meinungsfragmentierung vorliegt.

Die Arbeit ist wie folgt gegliedert:

Auf diese Einleitung folgt im nächsten Kapitel eine ausführliche Beschreibung bekannter und wichtiger Modelle aus dem Bereich der Meinungsdynamiken.

Im dritten Kapitel wird das im Rahmen dieser Arbeit entwickelte Modell behandelt. Zuerst wird das Modell definiert.

Der nächste Abschnitt beschäftigt sich mit der Frage, ob es möglich ist, anhand der Graphstruktur den Meinungsverlauf von bestimmten Agenten oder Gruppen von Agenten vorherzusagen oder zu bestimmen, ohne den Meinungsverlauf aller Agenten bestimmen zu müssen. Auch wird untersucht, ob sich mit Hilfe der Graphstruktur

---

<sup>1</sup>Wichtige Definitionen der Begriffe aus der Graphentheorie finden sich in A.1.

Aussagen über die Wichtigkeit bestimmter Agenten oder Gruppen von Agenten für den Meinungsverlauf treffen lassen.

Der darauf folgende Abschnitt behandelt die Existenz von Fixpunkten. Es wird untersucht, ob diese existieren und wie sie aussehen, falls sie existieren. Auch die Frage, ob im Fixpunkt Konsense oder Meinungsfragmentierungen vorliegen, wird behandelt.

Gibt es solche Fixpunkte, dann bedeutet dies noch nicht, dass der Meinungsverlauf auch in einem Fixpunkt endet. Ob die Meinungen gegen einen Fixpunkt konvergieren oder ob sie divergieren, wird im vorletzten Abschnitt untersucht.

Im letzten Abschnitt des dritten Kapitels wird ein im Rahmen dieser Arbeit entwickeltes Programm zur Simulation des Meinungsverlaufs vorgestellt und die Funktionsweise und die Einstellungsmöglichkeiten des Programms beschrieben. Anhand eines Beispiels wird gezeigt, dass die Ergebnisse aus Abschnitt 3.1 bis Abschnitt 3.3 in der Praxis wirklich eintreten.

Im vierten Kapitel folgt eine Zusammenfassung der Ergebnisse dieser Arbeit und ein Ausblick.

## 2. Modelle der Meinungsdynamiken

In diesem Kapitel werden gängige Modelle aus dem Bereich der Meinungsdynamiken erläutert. Das erste Modell beschreibt die allgemeine Form für Modelle, bei denen die neuen Meinungen der Agenten zu jedem Zeitpunkt simultan bestimmt werden. Die Modelle 2.2 bis 2.4 sind Spezialfälle des ersten Modells. Etwas anders ist Modell 2.5. Dort werden in jedem Zeitschritt die Meinungen zweier zufällig gezogener Agenten aktualisiert. Die meist verwendeten Modelle sind die Modelle 2.4 und 2.5.

### 2.1. Allgemeines Modell

Beim *allgemeinen Modell* von Hegselmann u. Krause (2002) beschreibt eine Matrix  $A$  die Veränderung der Meinungen in einem Zeitschritt von  $t$  nach  $t + 1$ , mit  $t \in \mathbb{N}_0$ . Die neuen Meinungen entstehen jeweils durch eine gewichtete Kombination der alten Meinungen der Agenten, wobei die Matrix die Gewichtungen vorgibt. Wie die Matrix aussieht bzw. die Meinungen kombiniert werden, hängt vom Zeitpunkt  $t$  und von den Meinungen  $x(t)$  zu diesem Zeitpunkt ab. Für die Matrix  $A$  gelten die folgenden Einschränkungen:  $a_{ij} \geq 0$  und  $\sum_j a_{ij} = 0$ .  $A$  ist also eine zeilenstochastische Matrix. Formal lässt sich dies wie folgt beschreiben:

$$x(t+1) = A(t, x(t)) x(t) \quad (\text{GM}) \quad (2.1)$$

Hegselmann und Krause beschäftigen sich hauptsächlich mit der Frage, wie das Meinungsprofil  $x(t)$  für Anfangsmeinungen  $x(0)$  im Grenzwert  $t \rightarrow \infty$  aussieht. Laut Hegselmann und Krause ist es nicht möglich, diese Frage für das allgemeine Modell (GM) zu beantworten.<sup>1</sup>

### 2.2. Klassisches Modell

Das *klassische Modell* besitzt dieselbe Form wie das allgemeine Modell, allerdings ist die Matrix  $A$  unabhängig vom Zeitpunkt  $t \in \mathbb{N}_0$  und den im Zeitpunkt  $t$  herrschenden Meinungen  $x(t)$ . Dies vereinfacht die Analyse des Grenzwerts für Anfangsmeinungen  $x(0)$  und  $t \rightarrow \infty$ . Für das klassische Modell gilt

$$x(t+1) = Ax(t) \quad (\text{CM}) \quad (2.2)$$

mit  $a_{ij} \geq 0$  und  $\sum_j a_{ij} = 0$ .

---

<sup>1</sup>„In this generality, however, one cannot hope to get an answer, neither by mathematical analysis nor by computer simulations“, Hegselmann u. Krause (2002), S.3.

Für dieses Modell lässt sich die Existenz von Grenzwerten für Meinungen  $x(t)$  nachweisen. Hierbei ist es von Vorteil, dass  $A$  eine zeilenstochastische Matrix ist.  $A$  kann daher als Übergangsmatrix einer Markov-Kette betrachtet werden, die einen Schritt beschreibt (vgl. DeGroot (1974)). Dies ermöglicht die Anwendung bereits bekannter Grenzwertsätze für Markov-Ketten.

Es lässt sich zeigen, dass der Grenzwert  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = c$  für beliebige Anfangsmeinungen  $x(0)$  existiert. Eine Übereinstimmung der Meinungen  $x(t) = c$  zum Zeitpunkt  $t$  wird *Konsens* genannt. Beim klassischen Modell liegt ein Konsens vor, genau dann, wenn es ein  $t_0 \in \mathbb{N}_0$  gibt, so dass  $A^{t_0}$  mindestens eine strikt positive Spalte enthält (vgl. Hegselmann u. Krause (2002)). Bei der Analyse von Meinungsdynamiken ist es wichtig, zu bestimmen, wann ein Konsens im Grenzwert auftritt.

Eine Fragmentierung der Meinung im Grenzwert tritt beim klassischen Modell nur auf, wenn unabhängige Untergruppen von Agenten existieren (vgl. DeGroot (1974) und Hegselmann u. Krause (2002)). Dies ist offensichtlich ein Nachteil des Modells, da in der Realität Personen einer Gruppe, die sich gegenseitig beeinflussen, durchaus zu unterschiedlichen Meinungen finden können.

### 2.3. Basismodell

Friedkin u. Johnsen (1990) gehen bei ihrem Modell davon aus, dass es exogene und endogene Bedingungen gibt, die die Meinungsbildung beeinflussen. Exogene Bedingungen sind unabhängig von den Meinungen und dem Verhalten anderer Agenten. Die Beeinflussung durch andere Agenten wird als endogener Faktor verstanden. Für eine Gruppe von  $n \in \mathbb{N}$  Agenten gilt folgendes Gleichgewicht zum Zeitpunkt  $t = 2, 3, 4, \dots$

$$Y_t = \alpha_t W_t Y_{t-1} + \beta_t X_t B_t, \quad (2.3)$$

wobei  $Y_t$  ein  $n \times 1$  Vektor der Meinungen zum Zeitpunkt  $t$  ist. Die  $n \times n$  Matrix  $W_t$  beschreibt den endogenen Einfluss der Meinungen anderer Agenten.  $X_t$  ist eine  $n \times k$  Matrix, die die  $k$  exogenen Faktoren im  $k \times 1$  Vektor  $B_t$  bewertet.  $\alpha_t$  und  $\beta_t$  gewichten den endogenen und den exogenen Summanden. Im Zeitpunkt  $t = 0$  sind die Meinungen der Agenten noch unbekannt. Hier gilt  $Y_1 = X_1 B_1$ .

Ohne eine weitere Einschränkung der Parameter  $\alpha_t$ ,  $\beta_t$ ,  $X_t$ ,  $B_t$ , und  $W_t$  lassen sich kaum Aussagen bezüglich des Meinungsverlaufs treffen. Für eine empirische oder theoretische Interpretation ist es notwendig, das Modell weiter zu vereinfachen. Für ihr *Basismodell* verwenden Friedkin und Johnsen daher die zeitunabhängigen Parameter  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $X$ ,  $W$ . Zusätzlich muss gelten  $0 \leq w_{ij} \leq 1$ ,  $\sum_j w_{ij} = 1$  und  $\beta = 1 - \alpha$ .  $W$  ist also eine zeilenstochastische Matrix. Zusammen mit der Einschränkung für  $\beta$  garantiert dies ein stabiles System und die Existenz eines Grenzwerts für  $Y_\infty$ .

Diese Einschränkungen ähneln denen von Hegselmann und Krause für ihr allgemeines Modell. Daher lässt sich auch das Basismodell von Friedkin und Johnsen in der von Hegselmann und Krause verwendeten Form schreiben. Für  $t \in \mathbb{N}_0$  gilt

$$x(t+1) = Gx(0) + (I - G)Ax(t). \quad (\text{FJ}) \quad (2.4)$$

Auch für dieses Modell beschreiben Hegselmann und Krause, wann ein Grenzwert existiert. Dort bildet sich im Allgemeinen kein Konsens. Ein Konsens ist nur möglich, wenn bereits die Anfangsmeinungen  $x(0)$  übereinstimmen (vgl. Friedkin u. Johnsen (1990), Hegselmann u. Krause (2002)). Obwohl hier im Gegensatz zum klassischen Modell (CM) auch andere Ergebnisse als ein Konsens möglich sind, können die starken Einflüsse der Anfangsmeinungen bzw. der exogenen Faktoren als Nachteile gesehen werden.

## 2.4. Bounded Confidence Modell

Ein weiteres Modell, das Hegselmann und Krause untersuchen, ist das *Bounded Confidence Modell*. Hier wird ein anderer Ansatz verfolgt, um Konsensbildung zu vermeiden. Im Bounded Confidence Modell werden Agenten lediglich von anderen Agenten beeinflusst, deren Meinung höchstens um einen bestimmten Vertrauensgrad  $\epsilon_i$  abweicht. Für einen Agenten  $i$  und ein Meinungsprofil  $x = (x_1, \dots, x_n)$  ist die Menge der Agenten  $i$  beeinflussenden Agenten wie folgt definiert:

$$I(i, x) = \{1 \leq j \leq n \mid |x_i - x_j| \leq \epsilon_i\}$$

Ändern sich die Meinungsprofile  $x(t)$  mit der Zeit, dann ist es möglich, dass sich auch die Menge  $I(i, x(t))$ , die aus den Agenten besteht, die Agent  $i$  zum Zeitpunkt  $t$  beeinflussen, verändert. Für die Meinung eines Agenten zum Zeitpunkt  $t \in T$ ,  $T = \{0, 1, 2, \dots\}$  gilt:

$$x_i(t+1) = |I(i, x(t))|^{-1} \sum_{j \in I(i, x(t))} x_j(t) \quad (\text{BC}) \quad (2.5)$$

Das Bounded Confidence Modell ist nicht mehr linear, da sich die Zuordnungen  $I$  in jedem Zeitschritt abhängig von den Meinungen der Agenten ändern können. Dennoch lässt sich auch für das Bounded Confidence Modell bestimmen, wann ein Meinungsprofil zu einem Konsens führt und wann eine Fragmentierung der Meinungen vorliegt.

Für zwei Agenten  $i, k \in \{1, \dots, n\}$  und zwei Zeitpunkte  $s, t \in T$  heißt eine Folge  $(i_0, i_1, \dots, i_{t-s})$  von Agenten *Vertrauenskette von  $i$  nach  $k$*  für  $(s, t)$ , wenn gilt  $i_0 = i$ ,  $i_{t-s} = k$  und  $i_j \in I(i_{j-1}, x(t-j))$  für  $j = 1, 2, \dots, t-s$ .

Ein Konsens wird in endlicher Zeit für ein Meinungsprofil erreicht, wenn es ein  $h \geq 1$  gibt, so dass für alle  $m \in \mathbb{N}$  gilt: Für zwei beliebige Agenten  $i$  und  $j$  gibt es eine dritte Person  $k$ , so dass es eine Vertrauenskette von  $i$  nach  $k$  und von  $j$  nach  $k$  für  $((m-1)h, mh)$  gibt. (Hegselmann u. Krause (2002), Appendix, Theorem 5)

Gilt diese Aussage nicht für alle Agenten, lässt sich die Fragmentierung der Meinungen beschreiben, indem Gruppen von Agenten gebildet werden, die untereinander zu einem Konsens gelangen: Für beliebige Anfangsmeinungen, für die es  $t^* \in T$ , natürliche Nummern  $1 < n_1 < \dots < n_k < n$  und nicht-negative Nummern  $c_j$  mit



$0 \leq j \leq k$  gibt, gilt für alle  $t \geq t^*$  und alle  $j$ :  $x_i(t) = c_j$  falls  $n_j \leq i \leq n_{j+1}$  ( $n_0 = 1$ ,  $n_{k+1} = n$ ). (Hegselmann u. Krause (2002), Appendix, Theorem 6)

Durch Anpassen von  $\epsilon$  ist es mit dem Bounded Confidence Modell möglich, unterschiedliche Meinungsverläufe zu erhalten und zu analysieren. Hierbei ist es auch möglich, dass extreme Meinungen erhalten bleiben. Eine Erweiterung bieten asymmetrische Vertrauensgrade  $[\epsilon_{i_l}, \epsilon_{i_r}]$ .

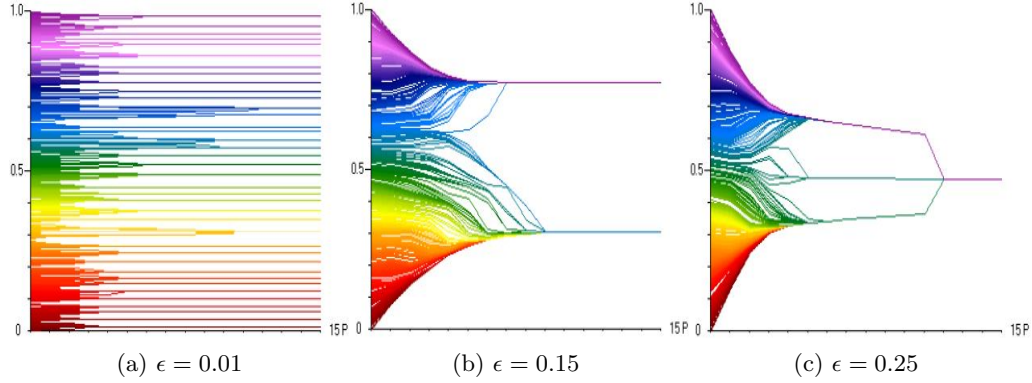


Abbildung 2.1.: Bounded Confidence Modell (symmetrisch), Hegselmann u. Krause (2002)

Abbildung 2.1 zeigt, wie die Meinungsverläufe beim symmetrischen Bounded Confidence Modell variieren, wenn  $\epsilon$  sich ändert. Die Meinungsverteilung am Anfang ist bei den drei Durchläufen identisch und umfasst 625 zufällig erzeugte Meinungen. Alle Meinungsverläufe ändern sich bereits nach 15 Zeitschritten nicht mehr.

Für  $\epsilon = 0,01$  gibt es am Ende noch 38 verschiedene Meinungen, die sich fast über das gesamte Spektrum von 0 bis 1 erstrecken. Erhöht man den Vertrauensgrad auf  $\epsilon = 0.15$ , dann gibt es am Ende nur noch zwei unterschiedliche Meinungen und bei  $\epsilon = 0.25$  liegt am Ende ein Konsens vor.

Trotz der guten Möglichkeiten zur Analyse von Konsens und Meinungsfragmentierung hat das Bounded Confidence Modell auch einen Nachteil gegenüber dem Basismodell (GM) oder dem klassischen Modell (CM), die beide die Möglichkeit bieten über die Matrix  $A$  die Beziehungen zwischen den Agenten zu modellieren. Dies ist unabhängig von der Meinung der Agenten. Beim Bounded Confidence Modell hingegen hängt es von den Meinungen der Agenten ab, welche Agenten sich beeinflussen.

## 2.5. Relative Agreement Modell

Ein weiteres Standardmodell im Bereich der Meinungsdynamiken ist das *Relative Agreement Modell* von Deffuant u. a. (2002). Das Relative Agreement Modell ist eine Erweiterung des Bounded Confidence Modells. Dabei gibt es zwei große Unterschiede.

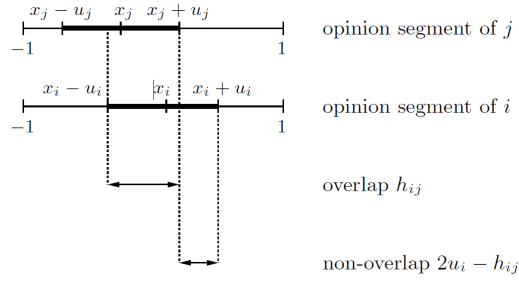


Abbildung 2.2.: Meinungssegmente, Kosub (2012)

Im Gegensatz zum Bounded Confidence Modell und auch den anderen bisher vorgestellten Modellen werden beim Relative Agreement Modell zum Bestimmen von neuen Meinungen immer nur zwei zufällige Agenten betrachtet („*random pair interactions*“, Deffuant u. a. (2002), 2.2).

Der zweite Unterschied betrifft die Art und Weise der Beeinflussung. Beim Relative Agreement Modell besitzt jeder Agent  $i$ , ähnlich wie beim Bounded Confidence Modell, zusätzlich zu seiner Meinung  $x_i$  auch noch einen weiteren Wert  $u_i$  für seine *Unsicherheit*. Das Intervall  $[x_i - u_i, x_i + u_i]$  wird als Meinungssegment des Agenten  $i$  bezeichnet.

Die Änderung der Meinung eines Agenten  $j$  unter Beeinflussung eines Agenten  $i$  ist proportional zur Überlappung der Meinungssegmente beider Agenten geteilt durch den Unsicherheitswert des beeinflussenden Agenten. Dieser Quotient aus Überlappung der Meinungssegmente („Agreement“) und Unsicherheitswert des beeinflussenden Agenten gibt dem Modell seinen Namen: Relative Agreement Modell.

Für die Überlappung der Meinungssegmente zweier Agenten  $i$  und  $j$  gilt:

$$h_{ij} = \min(x_i + u_i, x_j + u_j) - \max(x_i - u_i, x_j - u_j)$$

Ist  $i$  der beeinflussende Agent, dann ist die relative Übereinstimmung gegeben durch:

$$\frac{h_{ij} - (2u_i - h_{ij})}{u_i} = \frac{2(h_{ij} - u_i)}{u_i} = \frac{h_{ij}}{u_i} - 1$$

Agent  $j$  wird nur von Agent  $i$  beeinflusst, wenn gilt  $h_{ij} > u_i$ . Daraus folgt folgende Regel zur Aktualisierung der Meinung von Agent  $j$ :

$$x_j \leftarrow \begin{cases} x_j + \mu \left( \frac{h_{ij}}{u_i} - 1 \right) \cdot (x_i - x_j) & h_{ij} > u_i \\ x_j & h_{ij} \leq u_i \end{cases}$$

$$u_j \leftarrow \begin{cases} u_j + \mu \left( \frac{h_{ij}}{u_i} - 1 \right) \cdot (u_i - u_j) & h_{ij} > u_i \\ u_j & h_{ij} \leq u_i \end{cases}$$

(vgl. Deffuant u. a. (2002); Kosub (2012))

Dabei ist  $\mu$  eine Konstante, um die Geschwindigkeit, mit der die Meinungen sich verändern, zu kontrollieren.

Deffuant u. a. (2002) geben drei wesentliche Vorteile ihres Modells an:

1. Während der Interaktion zweier Agenten werden zusätzlich zu ihren Meinungen auch ihre Unsicherheitswerte beeinflusst.
2. Die Beeinflussung ist nicht symmetrisch. Selbstbewusste Agenten mit geringen Unsicherheitswerten beeinflussen eher als unsichere Agenten.
3. Die Beeinflussung variiert stetig.

Im Gegensatz dazu variiert beim Bounded Confidence Modell die Beeinflussung nicht stetig, sondern ist nach dem Überschreiten des Vertrauensgrads auf Null reduziert. Dies entspricht nicht dem normalen Verhalten von Personen. Auch Punkt zwei beschreibt ein bekanntes Verhalten, das so auch in der Realität zu beobachten ist.

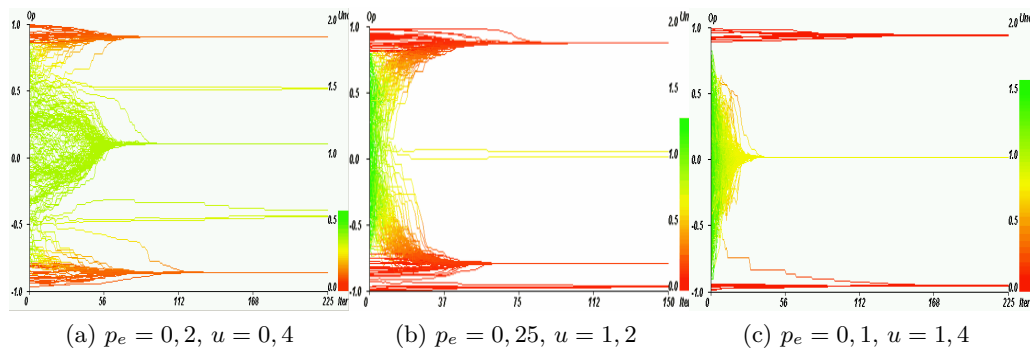


Abbildung 2.3.: Relative Agreement Modell,  $N = 200$ ,  $\mu = 0, 5$ ,  $u_e = 0, 1$ ,  
Deffuant u. a. (2002)

Abbildung 2.3 zeigt Beispiele für die Meinungsentwicklung beim Relative Agreement Modell. Der Proportionalitätsfaktor  $p_e$  gibt an, wie viele Agenten als Extremisten betrachtet werden. Als Extremisten werden die Agenten mit den höchsten ( $\rightarrow 1$ ) und niedrigsten Meinungen ( $\rightarrow -1$ ) gewählt. Dabei gibt es genauso viele positive wie negative Extremisten. Sie bekommen den Unsicherheitswert  $u_e$  zugewiesen. Die übrigen, moderaten Agenten besitzen den Unsicherheitswert  $u$ . Gibt es genug Extremisten und ist der Unterschied zwischen  $u_e$  und  $u$  groß genug, wobei  $u_e \leq u$  ist, dann ist es möglich, dass sich die extremen Meinungen durchsetzen (vgl. Abbildung 2.3b).

Genau wie beim Bounded Confidence Modell ist es auch beim Relative Agreement Modell nicht möglich, Beziehungen zwischen bestimmten Agenten mit einfließen zu lassen. Beim Bounded Confidence Modell kann ein Agent nur von Agenten beeinflusst werden, deren Meinungen höchstens um seinen Vertrauensgrad von seiner Meinung abweichen. Beim Relative Agreement Modell kann ein Agent nur von einem Agenten beeinflusst werden, wenn die Überlappung der Meinungssegmente größer als die Unsicherheit des beeinflussenden Agenten ist. Zusätzlich kommt beim Relative Agreement Modell hinzu, dass immer nur jeweils zwei zufällig bestimmte Agenten miteinander interagieren.

### 3. Modell der lokalen Meinungsdynamiken

Im Folgenden wird das im Rahmen dieser Arbeit entwickelte Modell vorgestellt. Dieses besitzt im Vergleich zu den bisher betrachteten Modellen zwei Besonderheiten.

1. Ein gewichteter Digraph beschreibt die Beziehungen zwischen den Agenten. Die Agenten stellen dabei die Knoten des Digraphen dar und der Meinungsaustausch zwischen den Agenten wird durch gewichtete Kanten beschrieben.
2. Es ist möglich, dass ein Agent von einem anderen Agenten negativ beeinflusst wird, dessen Meinung also ablehnt. Um eine solche Beziehung zu verdeutlichen, werden negative Kantengewichte verwendet.

Die Verwendung eines gewichteten Digraphen zur Modellierung führt dazu, dass ein Agent nur direkt von anderen Agenten, die eine Kante zu ihm besitzen, beeinflusst wird. Jeder Agent besitzt also ein *lokales* Umfeld von Agenten, die ihn beeinflussen. Um die Meinungen eines bestimmten Agenten zu bestimmen, muss man nur dessen lokales Umfeld kennen. Dieses Modell basiert auf Vorarbeiten von Sven Kosub<sup>1</sup>.

Es genügt, schwach zusammenhängende Digraphen<sup>2</sup> zu betrachten. Ist der Digraph nicht schwach zusammenhängend, dann gibt es mindestens zwei nicht leere Teilgraphen des Digraphen, zwischen denen es keine Kanten und somit auch keinen Meinungsaustausch gibt. Die Meinungsbildung auf diesen Teilgraphen ist unabhängig von den anderen Teilgraphen. Daher werden im Folgenden für die Meinungsbildung nur schwach zusammenhängende gewichtete Digraphen betrachtet.

Zusätzlich zu der durch den Digraphen gegebenen Struktur wird jedem Agenten ein Trägheitswert zugeordnet, der angibt, wie stark ein Agent auf seiner Meinung beharrt bzw. sich von anderen Agenten beeinflussen lässt.

**Definition 3.0.1.** (Netzwerk)

Ein *Netzwerk*  $N = (D, \lambda)$  besteht aus einem schwach zusammenhängenden gewichteten Digraphen  $D = (V, E, \mu)$  mit  $V = (v_1, \dots, v_n)$ , einem Vektor  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in [0, 1]^n$  und der Gewichtsfunktion  $\mu : E \rightarrow [-1, 1]$ <sup>3</sup>.

Zur Vereinfachung wird für zwei Knoten  $v_i, v_j \in V$  statt  $\mu(v_j, v_i)$  auch die Schreibweise  $\mu(j, i)$  verwendet, und statt  $(v_j, v_i) \in E$  auch  $(j, i) \in E$ .

---

<sup>1</sup>Sven Kosub, Privatdozent, Fachbereich Informatik & Informationswissenschaft, Universität Konstanz, Persönliche Kommunikation

<sup>2</sup>Definition in Anhang A.1.8

<sup>3</sup>Alle in dieser Arbeit verwendeten Intervalle sind Teilmengen der reellen Zahlen.

- Jeder Knoten  $v_i \in V$  beschreibt einen Agenten mit der Trägheit  $\lambda_i$ .
- Ein Trägheitswert von  $\lambda_i = 1$  bedeutet, dass  $v_i$  auf seine Meinung besteht, während ein Agent mit Trägheitswert von  $\lambda_i = 0$  sich der Meinung der umgebenden Agenten anschließen wird.
- Eine Kante  $(j, i) \in E$  mit  $v_j, v_i \in V$  beschreibt die Beeinflussung von  $v_i$  durch  $v_j$ . Die Stärke der Beeinflussung entspricht dabei dem Kantengewicht  $\mu(j, i) \in [-1, 1]$ .
- Ein Kantengewicht von  $\mu(j, i) = 1$  bedeutet, dass  $v_i$  der Meinung von  $v_j$  beipflichtet, während  $\mu(j, i) = -1$  bedeutet, dass  $v_i$  die Meinung von  $v_j$  ablehnt.
- Schleifen  $(j, j) \in E$  sind nur mit einem Kantengewicht  $\mu(j, j) = 0$  erlaubt, da diese dann keine Auswirkung auf die Meinungsbildung haben. Eine Ablehnung der eigenen Meinung ist nicht vorgesehen. Der Trägheitswert  $\lambda_i$  gibt an, inwieweit der Agent auf der eigenen Meinung besteht oder die eigene Meinung ignoriert und sich dem Umfeld anpasst.

Es kann durchaus vorkommen, dass es in einem Digraphen zwischen zwei Knoten  $v_j, v_i \in V$  eine Kante  $(j, i) \in E$  gibt, deren Kantengewicht  $\mu(j, i) = 0$  ist.  $v_i$  stimmt  $v_j$  nicht zu, lehnt seine Meinung aber auch nicht ab.  $v_i$  wird also von der Meinung von  $v_j$  nicht beeinflusst. Kanten mit Kantengewicht  $\mu(j, i) = 0$  haben keine Auswirkung auf die Meinungsbildung von  $v_i$  und können ignoriert werden.

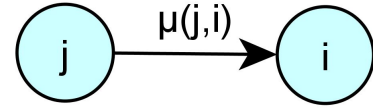


Abbildung 3.1.:  $j$  beeinflusst  $i$

*Bemerkung 3.0.2.* Für die Meinungsbildung gilt:  $\mu(j, i) = 0 \iff (j, i) \notin E$

- Existiert eine Kante von  $v_j$  nach  $v_i$  mit  $\mu(j, i) = 0$ , dann kann diese ohne Beeinflussung der Meinungsbildung aus dem Digraphen entfernt werden.
- Existiert keine Kante von  $v_j$  nach  $v_i$ , dann kann ohne Beeinflussung der Meinungsbildung eine Kante  $(j, i)$  mit dem Kantengewicht  $\mu(j, i) = 0$  eingefügt werden. Insbesondere kann eine Kante  $(j, j)$  mit dem Kantengewicht  $\mu(j, j) = 0$  eingefügt werden.

Dieses Resultat ist hilfreich für die weiteren mathematischen Formulierungen, da es erlaubt, jeden Digraphen zu einem vollständigen Digraphen zu erweitern. Somit kann ohne Einschränkung die Summe  $\sum_{j=1}^n \mu(j, i)$  verwendet werden.

Andererseits ist es für Untersuchungen, die die Graphstruktur betrachten, sinnvoll Kanten mit dem Kantengewicht  $\mu(j, i) = 0$  zu entfernen. Dies ist zum Beispiel bei der Betrachtung von Meinungsentwicklungen auf Zusammenhangskomponenten in Abschnitt 3.1 der Fall.

Dennoch ist es für die Interpretation der Beziehungen zwischen Agenten sinnvoll, Kanten mit dem Kantengewicht  $\mu(j, i) = 0$  zuzulassen. So symbolisiert eine solche Kante, dass es eine Verbindung von  $v_j$  zu  $v_i$  gibt, aber  $v_i$  nicht durch die Meinung von  $v_j$  beeinflusst wird.  $(j, i) \neq E$  bedeutet, dass keine Verbindung existiert und somit  $v_i$  nicht von  $v_j$  beeinflusst werden kann.

Ein Netzwerk beschreibt die Beziehungen der Agenten und ihre Trägheit, nicht aber ihre Meinungen. Werden den Agenten Meinungen zugeordnet, entsteht ein System.

**Definition 3.0.3.** (System)

Ein *System*  $S = (N, O)$  besteht aus einem Netzwerk  $N = (D, \lambda)$  und einem Zustandsvektor  $O = (o_1, \dots, o_n) \in [-1, 1]^n$ .  $o_i$  ist die Meinung des durch den Knoten  $v_i$  repräsentierten Agenten  $i$ .  $o = 1$  bedeutet maximale Zustimmung,  $o = -1$  maximale Ablehnung.

Wie schon zuvor bei den Kantengewichten werden auch hier nur Meinungen auf  $[-1, 1]$  verwendet. Dies stellt keine Einschränkung dar, da sich beliebige, endliche Intervalle auf  $[-1, 1]$  reduzieren lassen. Liegen die Meinungen oder Kantengewichte auf einem Intervall  $[a, b]$  vor, genügt die Multiplikation mit  $\frac{1}{\max(|a|, |b|)}$ . Je nachdem, wie die Daten erhoben werden, kann es notwendig sein, die Werte zuvor zu verschieben. Steht beispielsweise bei der Datenerhebung 0 für maximale Ablehnung und 7 für maximale Zustimmung und ist  $x \in [0, 7]$ , dann erhält man die Meinung  $o$  durch  $o = \frac{(x - \frac{7}{2})}{\frac{7}{2}}$ . Stünde 0 andererseits für Gleichgültigkeit und gäbe es keine Möglichkeit,

um Ablehnung anzugeben, dann wäre die Multiplikation mit  $\frac{1}{7}$  ausreichend:  $o = \frac{1}{7} \cdot x$ . Meinungen und/oder Kantengewichte können immer normiert werden. Um Fehlinterpretationen zu vermeiden, muss beachtet werden, wie die Daten erhoben werden.

*Bemerkung 3.0.4.* Die Normierung der Gewichtsfunktion und des Zustandsvektors auf den Wertebereich  $[-1, 1]$  bzw.  $[-1, 1]^n$  ist ohne Einschränkung der Allgemeinheit möglich.

Wie bereits in Kapitel 1 dargestellt ist der Vorteil von agentenbasierter Modellierung, dass es ausreicht zu beschreiben, wie ein Agent seine Meinung ändert. In diesem Modell sollen dazu die Informationen des Netzwerks verwendet werden. Der Trägheitswert bestimmt dabei, wie sehr der Agent auf seine eigene Meinung beharrt, während die Kanten des Digraphen die Beeinflussung durch andere Agenten darstellen. Die Update-Funktion setzt sich aus den einzelnen Funktionen für jeden Agenten zusammen und führt von einem beliebigen Zustand in den nächsten.

**Definition 3.0.5.** (globale Update-Funktion)

Die *globale Update-Funktion*  $\Phi : [-1, 1]^n \mapsto [-1, 1]^n$  beschreibt die Änderung der Meinungen  $O$  in einem Zeitschritt. Für  $t \in \mathbb{N}$  gilt:

$$O_{t+1} = \Phi(O_t) = \begin{pmatrix} g(o_1) \\ \vdots \\ g(o_n) \end{pmatrix}$$

mit

$$g(o_i) := \begin{cases} f_g(o_i) & \sum_{j=1}^n |\mu(j, i)| > 0 \\ o_i & \sum_{j=1}^n |\mu(j, i)| = 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

und

$$f_g(o_i) := \lambda_i o_i + (1 - \lambda_i) \frac{\sum_{j=1}^n (\mu(j, i) \cdot o_j)}{\sum_{j=1}^n |\mu(j, i)|} \quad (3.2)$$

Entscheidend hier ist die Gleichung 3.2, die Update-Funktion für einen Agenten. Sie setzt sich aus der eigenen Meinung und der normierten Summe der gewichteten Meinungen der beeinflussenden Agenten zusammen. Beeinflussende Agenten sind dabei alle Agenten  $j \in [1, \dots, n]$ , die eine Kante mit Kantengewicht  $\mu(j, i) \neq 0$  besitzen. Ihre Meinungen  $o_j$  werden mit  $\mu(j, i)$  gewichtet und mit  $\left(\sum_{j=1}^n |\mu(j, i)|\right)^{-1}$  normiert. Für die Meinung  $o_{b_i}$  der beeinflussenden Agenten gilt:

$$o_{b_i} = \frac{\sum_{j=1}^n (\mu(j, i) \cdot o_j)}{\sum_{j=1}^n |\mu(j, i)|}$$

Liegt  $o_{b_i}$  wieder im Intervall  $[-1, 1]$ , so gilt auch für das Ergebnis der Konvexkombination  $(\lambda_i o_i + (1 - \lambda_i) \cdot o_{b_i}) \in [-1, 1]$ .

**Lemma 3.0.6.** Sei  $O \in [-1, 1]^n$ . Dann gilt  $f_g(o_i) \in [-1, 1]$ .

*Beweis.* Der Nachweis erfolgt durch Abschätzung nach oben und unten.

$$\begin{aligned} f_g(o_i) &:= \lambda_i o_i + (1 - \lambda_i) \frac{\sum_{j=1}^n (\mu(j, i) \cdot o_j)}{\sum_{j=1}^n |\mu(j, i)|} \\ &\leq \lambda_i o_i + (1 - \lambda_i) \frac{\sum_{j=1}^n (\mu(j, i) \cdot 1)}{\sum_{j=1}^n |\mu(j, i)|} \\ &\leq \lambda_i \cdot 1 + (1 - \lambda_i) \cdot 1 = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_g(o_i) &:= \lambda_i o_i + (1 - \lambda_i) \frac{\sum_{j=1}^n (\mu(j, i) \cdot o_j)}{\sum_{j=1}^n |\mu(j, i)|} \\
&\geq \lambda_i o_i + (1 - \lambda_i) \frac{\sum_{j=1}^n (\mu(j, i) \cdot (-1))}{\sum_{j=1}^n |\mu(j, i)|} \\
&\geq \lambda_i \cdot (-1) + (1 - \lambda_i) \cdot (-1) = -1
\end{aligned}$$

□

Offensichtlich lassen sich mit  $f_g$  nur neue Meinungen für Agenten  $i$  bestimmen, wenn diese mindestens durch einen anderen Agenten beeinflusst werden, also eine eingehende Kante  $(j, i)$  mit dem Kantengewicht  $\mu(j, i) \neq 0$  haben. Dann gilt für Agent  $i$  in Gleichung 3.2, dass  $\sum_{j=1}^n |\mu(j, i)| > 0$  ist. Agenten, die keine eingehende Kante  $(j, i)$  mit dem Kantengewicht  $\mu(j, i) \neq 0$  haben, repräsentieren Agenten, die nicht von anderen Agenten beeinflusst werden und daher ihre Meinung nicht ändern. Auch Agenten  $i$  mit einer Trägheit von  $\lambda_i = 1$  ändern ihre Meinung nicht:

$$\lambda_i = 1 \implies f(o_i) = o_i + 0 = o_i$$

**Definition 3.0.7.** (träger Agent)

Ein Agent  $i \in \{1, \dots, n\}$  wird als träger Agent bezeichnet, wenn eine der folgenden Aussagen zutrifft:

- $\sum_{j=1}^n |\mu(j, i)| = 0$
- $\lambda_i = 1$

Da die trägen Agenten ihre Meinung nicht ändern, ist es nicht notwendig, sie in der Update-Funktion zu berücksichtigen. Ohne die trägen Agenten wird in der Update-Funktion die Fallunterscheidung (Gleichung 3.1) nicht mehr benötigt.

**Definition 3.0.8.** (Update-Funktion)

Gegeben sei ein Netzwerk  $(D = (V, E), O' = (o_1, \dots, o_n), \lambda)$  mit  $k \in \mathbb{N}$  nicht trägen Agenten. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit kann angenommen werden, dass  $v_i \in V$  mit  $i \in \{1, \dots, k\}$  nicht träge Agenten sind und  $v_s \in V$  mit  $s \in \{k+1, \dots, n\}$  träge Agenten sind. Dazu sind  $O = (o_1, \dots, o_k)$  die sich ändernden Meinungen der nicht trägen Agenten und  $O_s = (o_{k+1}, \dots, o_n)$  die festen Meinungen der trägen Agenten. Die *Update-Funktion* ist dann für einen Zeitschritt  $t \in \mathbb{N}$  wie folgt definiert:

$$O_{t+1} = \phi(O_t) + c = \begin{pmatrix} f(o_1) \\ \vdots \\ f(o_k) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_k \end{pmatrix}$$



mit

$$f(o_i) := \lambda_i o_i + (1 - \lambda_i) \frac{\sum_{j=1}^k (\mu(j, i) \cdot o_j)}{\sum_{j=1}^n |\mu(j, i)|} \quad (3.3)$$

und

$$c_i := (1 - \lambda_i) \frac{\sum_{s=k+1}^n (\mu(s, i) \cdot o_s)}{\sum_{j=1}^n |\mu(j, i)|}.$$

*Bemerkung 3.0.9.*  $c$  ist unabhängig von  $t$ .

Es lässt sich leicht zeigen, dass  $\phi$  eine lineare Abbildung ist.

**Lemma 3.0.10.**  $\phi$  ist ein Endomorphismus von  $\mathbb{R}^k$ .

*Beweis.* Seien  $x, y \in \mathbb{R}^k$  und  $a \in \mathbb{R}$ . Es gilt

$$\begin{aligned} f(ax_i + y_i) &= \lambda_i(ax_i + y_i) + (1 - \lambda_i) \frac{\sum_{j=1}^k (\mu(j, i) \cdot (ax_j + y_j))}{\sum_{j=1}^n |\mu(j, i)|} \\ &= a\lambda_i x_i + a(1 - \lambda_i) \frac{\sum_{j=1}^k (\mu(j, i) \cdot x_j)}{\sum_{j=1}^n |\mu(j, i)|} \\ &\quad + \lambda_i y_i + (1 - \lambda_i) \frac{\sum_{j=1}^k (\mu(j, i) \cdot y_j)}{\sum_{j=1}^n |\mu(j, i)|} \\ &= af(x_i) + f(y_i) \end{aligned}$$

und damit auch

$$\phi(ax + y) = \begin{pmatrix} f(ax_1 + y_1) \\ \vdots \\ f(ax_k + y_k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} af(x_1) + f(y_1) \\ \vdots \\ af(x_k) + f(y_k) \end{pmatrix} = a\phi(x) + \phi(y).$$

□

Dann lässt sich  $\phi$  auch als Matrix schreiben.

**Definition 3.0.11.** (Abbildungsmatrix  $F$ )

Zu einem gegebenen Netzwerk  $(D, O', \lambda)$  mit  $k \in \mathbb{N}$  nicht trägen Agenten seien  $\Lambda$ ,  $N$  und  $A$  wie folgt definiert:

- $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$
- $N = \text{diag}(\eta_1, \dots, \eta_k)$ , mit  $\eta_i := \left( \sum_{j=1}^n |\mu(j, i)| \right)^{-1}$
- $A = \text{adj}(G[\{v_1, \dots, v_k\}])^T$

Dann gilt für die Abbildungsmatrix  $F$  zur linearen Abbildung  $\phi$  mit

$$F = \Lambda + (I_k - \Lambda)NA \quad (3.4)$$

auch

$$O_{t+1} = FO_t + c.$$

Bleibt zu zeigen, dass  $F$  die Abbildungsmatrix zu  $\phi$  ist.

*Behauptung 3.0.12.* Sei  $k \in \mathbb{N}$ ,  $O \in [-1, 1]^k$ . Dann gilt:  $FO = \phi(O)$ .

*Beweis.*

$$\Lambda O = \begin{pmatrix} \lambda_1 o_1 \\ \vdots \\ \lambda_k o_k \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} (I_k - \Lambda)NAO &= \text{diag} \left( (1 - \lambda_1) \left( \sum_{j=1}^n |\mu(j, 1)| \right)^{-1}, \dots, (1 - \lambda_k) \left( \sum_{j=1}^n |\mu(j, k)| \right)^{-1} \right) \\ &\quad \cdot AO \\ &= \text{diag} \left( (1 - \lambda_1) \left( \sum_{j=1}^n \|\mu(j, 1)\| \right)^{-1}, \dots, (1 - \lambda_k) \left( \sum_{j=1}^n |\mu(j, k)| \right)^{-1} \right) \\ &\quad \cdot \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^k \mu(j, 1) o_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^k \mu(j, k) o_j \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (1 - \lambda_1) \frac{\sum_{j=1}^k (\mu(j, 1) \cdot o_j)}{\sum_{j=1}^n |\mu(j, 1)|} \\ \vdots \\ (1 - \lambda_k) \frac{\sum_{j=1}^k (\mu(j, k) \cdot o_j)}{\sum_{j=1}^n |\mu(j, k)|} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
FO &= (\Lambda + (I_k - \Lambda)NA)O \\
&= \Lambda O + (I_k - \Lambda)NAO \\
&= \begin{pmatrix} \lambda_1 o_1 \\ \vdots \\ \lambda_k o_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (1 - \lambda_1) \frac{\sum_{j=1}^k (\mu(j,1) \cdot o_j)}{\sum_{j=1}^k |\mu(j,1)|} \\ \vdots \\ (1 - \lambda_k) \frac{\sum_{j=1}^k (\mu(j,k) \cdot o_j)}{\sum_{j=1}^k |\mu(j,k)|} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \lambda_1 o_1 + (1 - \lambda_1) \frac{\sum_{j=1}^k (\mu(j,1) \cdot o_j)}{\sum_{j=1}^k \|\mu(j,1)\|} \\ \vdots \\ \lambda_k o_k + (1 - \lambda_k) \frac{\sum_{j=1}^k (\mu(j,k) \cdot o_j)}{\sum_{j=1}^k \|\mu(j,k)\|} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} f(o_1) \\ \vdots \\ f(o_k) \end{pmatrix} = \phi(O)
\end{aligned}$$

□

In der Matrixschreibweise zeigen sich die Ähnlichkeiten zum Modell von Friedkin und Johnsen (Gleichung 2.3). Die Matrix  $F$  beschreibt den endogenen Einfluss der Meinungen der anderen nicht trägen Agenten  $O_t$  und  $c$  stellt die exogenen Faktoren, die Meinungen der trägen Agenten dar.

Für die globale Update-Funktion  $\Phi$  zu einem Netzwerk  $(D, O', \lambda)$  mit  $n \in \mathbb{N}$  Agenten erhält man analog die Matrix  $F_g = \Lambda + (I_n - \Lambda)NA$  mit

$$\begin{aligned}
\Lambda &= \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \\
N &= \text{diag}(\eta_1, \dots, \eta_n) \text{ mit } \eta_i := \left( \sum_{j=1}^n |\mu(j, i)| \right)^{-1} \\
A &= \text{adj}(D)^T
\end{aligned}$$

Es gilt:

$$O_{t+1} = \Phi(O_t) = F_g O_t$$

Die Form  $O_{t+1} = F_g O_t$  entspricht dem klassischen Modell (Gleichung 2.2) von Hegselmann u. Krause (2002), mit dem Unterschied, dass in  $F_g$  auch negative Werte möglich sind, während im Modell von Hegselmann und Krause die Matrix zeilenstochastisch ist.

Um zu bestimmen, wie sich die Meinungen der Agenten über mehrere Zeitschritte hinweg verhalten, muss die Update-Funktion wiederholt ausgeführt werden. Dieser Vorgang wird im weiteren Verlauf als Simulation bezeichnet.

**Definition 3.0.13.** (Simulation)

Als *Simulation* wird die wiederholte Ausführung der Update-Funktion auf einem Netzwerk  $(D, O', \lambda)$  bezeichnet. Die Simulation liefert eine Folge aus Meinungsvektoren  $(O'_t)_{t \in \mathbb{N}_o}$ , wobei  $O'_0 = O'$  ist.  $t$  entspricht der Anzahl der Ausführungen der Update-Funktion.

Häufig ist nur die Folge der Meinungen der nicht trägen Agenten  $(O_t)_{t \in \mathbb{N}_o}$  interessant.

### 3.1. Gruppen von Agenten

Bei der Analyse des Meinungsverlaufs stellt sich die folgende Frage:

Gibt es Gruppen von Agenten (diese können auch aus nur aus einem Agenten bestehen), die unabhängig vom Rest der Agenten des Graphen oder nur in Abhängigkeit von bestimmten anderen Gruppen ihre Meinung bilden?

Solche Gruppen zu finden hat mehrere Vorteile:

- Um die Meinung einer solchen Gruppe zu bestimmen, ist es nicht notwendig, eine Simulation über den gesamten Graphen laufen zu lassen.
- Das gesamte Meinungsbild zu einem Zeitpunkt  $t \in \mathbb{N}$  lässt sich mit weniger Aufwand berechnen, wenn solche Gruppen gefunden und ihre Meinungen sukzessive bestimmt werden.
- Die Netzwerkstruktur wird dadurch vereinfacht, dass Gruppen wie ein Agent betrachtet werden.

Im weiteren Verlauf wird davon ausgegangen, dass es mindestens einen nicht trägen Agenten gibt und der Digraph schwach zusammenhängend ist. Gibt es nur träge Agenten, ist keine nähere Betrachtung notwendig. Ist der Digraph nicht schwach zusammenhängend, können die schwachen Zusammenhangskomponenten separat untersucht werden.

**Definition 3.1.1.** (Gruppe)

Eine *Gruppe* ist eine Menge von Knoten  $U \subseteq V$  eines Digraphen  $D = (V, E)$ , die sich gegenseitig beeinflussen, aber nur eingeschränkt Knoten außerhalb der Gruppe beeinflussen oder von diesen beeinflusst werden:

Zu je zwei Knoten einer Gruppe  $u_1, u_2 \in U$  mit  $u_1 \neq u_2$  gibt es mindestens einen Zyklus<sup>4</sup>  $Z$  in  $U$  mit  $u_1, u_2 \in Z$ .

Es gibt keinen Zyklus in  $V$  mit einem Knoten  $u \in U$  und einem Knoten  $v \in V$ . Es kann aber einen Weg von  $u$  nach  $v$  oder von  $v$  nach  $u$  geben.

*Bemerkung 3.1.2.* Sei  $D = (V, E)$  ein Digraph und  $U \subseteq V$  eine Gruppe. Dann ist der induzierte Teilgraph  $D[U]$  eine starke Zusammenhangskomponente von  $D$ .

---

<sup>4</sup>Definition in Anhang A.1.3



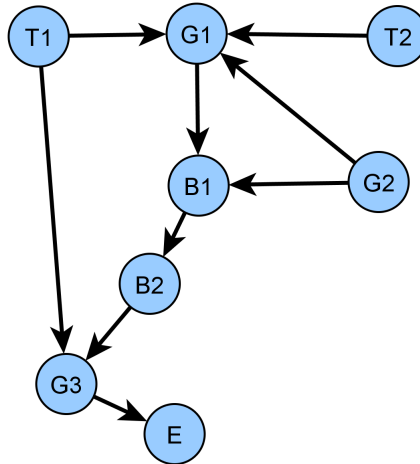


Abbildung 3.3.: Äquivalenzklassen

Abbildung 3.3 zeigt den azyklischen Äquivalenzklassen Digraphen, der aus den Gruppen des Digraphen in Abbildung 3.2 entsteht. Da Digraphen mit zwei oder mehr Gruppen einen azyklischen Graphen bilden, eine Beeinflussung zwischen den Gruppen also nur in eine Richtung möglich ist, muss es mindestens eine Gruppe geben, die nicht von anderen Gruppen beeinflusst wird. In Abbildung 3.3 gibt es drei solcher Gruppen:  $T1$ ,  $T2$  und  $G2$ .  $T1$  und  $T2$  sind träge Agenten mit feststehender Meinung, da sie nur aus jeweils einem Knoten ohne eingehende Kanten bestehen. Interessant ist die Gruppe  $G2$ , die keine eingehenden Kanten aus dem übrigen Netzwerk besitzt. Die Meinungen auf  $G2$  sind unabhängig vom Rest des Netzwerks. Es ist daher möglich, den Meinungsverlauf auf  $G2$  zu bestimmen, ohne dass es notwendig ist, den Meinungsverlauf auf dem restlichen Netzwerk zu kennen bzw. die Meinungen auch für den Rest des Netzwerks zu bestimmen.

Ähnliches gilt für  $G1$ . Zwar besitzt  $G1$  eingehende Kanten aus dem restlichen Netzwerk, aber diese Kanten stammen nur von trägen Knoten, deren Meinungen unveränderlich sind und somit während des Zeitverlaufs nicht neu bestimmt werden müssen. Es ist also auch möglich, die Meinungen von Gruppen zu bestimmen, die nur von trägen Agenten beeinflusst werden, ohne dass weitere Meinungen des Netzwerks bestimmt werden müssen.

**Definition 3.1.4.** (unabhängige Gruppe)

Eine *unabhängige Gruppe* ist eine Gruppe, die keine eingehenden Kanten von anderen Gruppen besitzt, mit Ausnahme von Gruppen, die nur aus einem trägen Knoten bestehen.

**Lemma 3.1.5.** *Jeder Digraph hat mindestens eine unabhängige Gruppe.*

*Beweis.* Gibt es nur eine Gruppe, ist diese immer unabhängig, da es keine weiteren eingehenden Kanten geben kann. Gibt es zwei oder mehr Gruppen, dann bilden deren Äquivalenzklassen einen azyklischen Graphen. Daher muss es mindestens eine Gruppe geben, die nur abgehende Kanten besitzt.  $\square$

*Bemerkung 3.1.6.* Der Meinungsverlauf von Netzwerken lässt sich effizient berechnen, indem mit den unabhängigen Gruppen begonnen wird. Um die Meinungen der Agenten einer unabhängigen Gruppe zu bestimmen, genügt es, die Agenten der unabhängigen Gruppe und träge Agenten, die die Gruppe beeinflussen, zu betrachten. Sind die Meinungen der unabhängigen Gruppe bestimmt, wirken die Agenten mit abgehenden Kanten auf andere Gruppen wie träge Agenten.

Unter den Gruppen, deren Meinungen noch nicht bestimmt sind, muss es dann nach Lemma 3.1.5 wiederum eine oder mehrere unabhängige Gruppe geben. Deren Meinungen können unabhängig von den restlichen, bisher noch nicht bestimmten Meinungen des Netzwerks, berechnet werden können. Dieses Verfahren lässt sich wiederholen, bis für alle Agenten die Meinungen bestimmt sind.

Mit Hilfe des in Bemerkung 3.1.6 beschriebenen Verfahrens lässt sich die Bestimmung der Meinungen für alle nicht stark zusammenhängenden Digraphen optimieren. Hierbei ist zu beachten, dass dieses Verfahren nur möglich ist, wenn die Meinungen der Gruppen nach einem bestimmten Zeitpunkt  $t^* \in \mathbb{N}$  einen Zustand erreichen, der sich nicht mehr verändert. Dies wird genauer in Abschnitt 3.2 definiert.

Zudem ist eine Vorabanalyse auf Basis der Graphstruktur möglich. So lassen sich sowohl einzelne Knoten als auch Gruppen aus mehreren Knoten in unterschiedliche Kategorien einteilen. Einzelne Knoten lassen sich in drei unterschiedliche Kategorien einteilen. Hierbei werden nur einzelne Knoten betrachtet, die nicht zu größeren Gruppen gehören.

- Bei den Knoten gibt es die bereits bekannten *trägen Knoten*. Diese beeinflussen die Meinungsbildung durch eine oder mehrere abgehende Kanten, ändern ihre Meinung aber nie. Beispiele hierfür sind *T1* und *T2* aus Abbildung 3.2.
- Das genaue Gegenteil der trägen Knoten sind die *Endknoten*. Diese Knoten besitzen nur eingehende Kanten. Ihre Meinung passt sich der Meinung der beeinflussenden Knoten an. Sie selbst haben aber keinen Einfluss auf die Meinungsbildung der anderen Knoten. Der Knoten *E* aus Abbildung 3.2 ist ein solcher *Endknoten*.

- Die dritte Sorte von Knoten, die sogenannten *Brückenknoten*, besitzen sowohl eingehende als auch ausgehende Kanten. Größere Gruppen bestehen nur aus Brückenknoten. Für die Analyse des Meinungsflusses sind hier nur einzelne Brückenknoten interessant, die nicht zu größeren Gruppen gehören. Brückenknoten bündeln und gewichten die Meinungen der beeinflussenden Knoten und verteilen diese dann weiter. Auch mehrere aufeinanderfolgende Brückenknoten sind möglich. In Abbildung 3.2 gibt es zwei separate Brückenknoten:  $B1$  und  $B2$ .  $B1$  wird von je einem Knoten aus  $G1$  und  $G2$  beeinflusst, bildet daraus seine Meinung und gibt diese dann an  $B2$  weiter.  $B2$  wiederum bewertet nur die Meinung  $o_{B1}$  von  $B1$  und nimmt dann, je nachdem, ob die beeinflussende Kante positiv oder negativ ist,  $o_{B1}$  oder  $-o_{B1}$  als Meinung an. Diese Vorgänge benötigen im Allgemeinen mehrere Zeitschritte. Abhängig von der Struktur des Graphen können Brückenknoten wichtige Knotenpunkte sein, die hilfreich bei ersten Analysen sind. So kann die Gewichtung der eingehenden Kanten verraten, welche Meinungen wichtig für den weiteren Meinungsverlauf unterhalb des Brückenknotens sind und welche weniger wichtig sind.

Eine ähnliche Kategorisierung ist für größere Gruppen mit mindestens zwei Knoten möglich. So gibt es Gruppen, die nicht von anderen Gruppen beeinflusst werden ( $G2$ , Abbildung 3.2), Gruppen, die nur von trägen Knoten beeinflusst werden ( $G1$ , Abbildung 3.2), Gruppen, die andere Gruppen beeinflussen ( $G2$ , Abbildung 3.2) und Gruppen, die nur beeinflusst werden, oder auch eine Kombination der genannten Eigenschaften.

Ein wichtiges Ergebnis dieses Abschnitts ist, dass es genügt, sequenziell die Meinungen für einzelne Gruppen zu bestimmen. Dies ist nur möglich, wenn die Meinungen für einzelne Gruppen stabile Zustände erreichen und sich nicht weiter verändern. Es muss daher ermittelt werden, ob es nach einer bestimmten Zeit für beliebige Gruppen ein Meinungsprofil gibt, das sich nicht mehr verändert, und wie dieses aussieht.

## 3.2. Fixpunkte

Im letzten Abschnitt wurde gezeigt, dass es genügt, die Meinungsbildung für eine Gruppe zu betrachten, da sich jeder Graph in Gruppen zerlegen lässt und deren Meinungen dann separat nacheinander bestimmt werden können. Dies ist allerdings nur möglich, wenn die Gruppen nach einer bestimmten Zeit  $t^* \in \mathbb{N}$  ein stabiles Meinungsprofil erreichen, auch Fixpunkt genannt.

**Definition 3.2.1.** (Fixpunkt)

Ein Zustandsvektor bzw. ein Meinungsprofil  $O = (o_1, \dots, o_n)$  wird Fixpunkt eines Netzwerks  $N$  genannt, wenn gilt:

$$\Phi(O) = O$$



**Lemma 3.2.2.** *Gibt es zu einem Zeitpunkt  $t^* \in \mathbb{N}$  einen Fixpunkt  $O_{t^*}$ , dann gilt auch für alle  $t \in \mathbb{N}$  mit  $t \geq t^*$ , dass  $O_t = O_{t^*}$ .*

*Beweis.* (Induktion)

Induktionsanfang:  $O_{t^*+1} = \Phi(O_{t^*}) = O_{t^*}$

Induktionsvoraussetzung: Für  $n \in \mathbb{N}$  gilt  $\Phi(O_{t^*+n}) = O_{t^*}$

Induktionsschritt:  $O_{t^*+n+1} = \Phi(O_{t^*+n}) = \Phi(O_{t^*}) = O_{t^*}$  □

Aus Abschnitt 3.1 ist bekannt, dass unterschiedliche Arten von Gruppen existieren. Um Fixpunkte bestimmen zu können, muss zwischen zwei Arten unterschieden werden: Gruppen, die nicht von außen beeinflusst werden und Gruppen, die beeinflusst werden. Dabei ist es unerheblich, ob die Beeinflussung durch einen trägen Agenten erfolgt oder durch einen Agenten einer anderen Gruppe, dessen Meinung zuvor bestimmt werden kann und somit durch die sequenzielle Bestimmung der Meinungen des Netzwerks feststeht. Die Beeinflussung durch Agenten anderer Gruppen kann wie die Beeinflussung durch träge Agenten betrachtet werden.

Es genügt also, Meinungsbildung auf Gruppen ohne Beeinflussung und auf Gruppen mit Beeinflussung durch träge Agenten zu untersuchen.

**Lemma 3.2.3.** *Lässt sich für ein Netzwerk mit  $n \in \mathbb{N}$  Gruppen sequenziell, wie in Bemerkung 3.1.6 beschrieben, für jede Gruppe ein Fixpunkt  $O_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  bestimmen, dann ist der Zustandsvektor  $O = (O_1, \dots, O_n)$  ein Fixpunkt des Netzwerks.*

*Beweis.* Es genügt Gruppen zu betrachten, die aus nicht trägen Agenten bestehen. Gruppen, die aus einem trägen Agenten bestehen, ändern ihre Meinung nicht. Somit sind deren Meinungen bereits ein Fixpunkt. Um die Meinungen der anderen Gruppen zu bestimmen, wird die Update-Funktion wie in Definition 3.0.8 angepasst. Dabei werden alle Agenten außerhalb einer Gruppe wie träge Agenten behandelt. Die Meinungen von nicht trägen Agenten außerhalb der Gruppe, die die Gruppe beeinflussen, müssen dabei bereits bestimmt worden sein. Existiert nun für jede Gruppe ein Fixpunkt, dann bildet der zusammengesetzte Zustandsvektor  $O = (O_1, \dots, O_n)$  einen Fixpunkt des Netzwerks. □

**Bemerkung 3.2.4.** Gibt es für jede Gruppe einen Fixpunkt, dann gibt es auch für jedes Netzwerk einen Fixpunkt.

Im Fixpunkt gilt für einen beliebigen, nicht trägen Agenten  $i$  eines Netzwerks mit  $n \in \mathbb{N}$  Agenten:

$$o_i = \lambda_i o_i + (1 - \lambda_i) \frac{\sum_{j=1}^n (\mu(j, i) \cdot o_j)}{\sum_{j=1}^n |\mu(j, i)|} \iff o_i = \frac{\sum_{j=1}^n (\mu(j, i) \cdot o_j)}{\sum_{j=1}^n |\mu(j, i)|}$$

Da Agent  $i$  nicht träge ist, gilt  $\lambda_i \neq 1$  und somit  $(1 - \lambda_i) \neq 0$ . Dies erlaubt es  $\lambda_i$  zu eliminieren. Offensichtlich hat die Trägheit der nicht trägen Agenten keine Auswirkung auf die Art und Existenz eines Fixpunkts.

Die Bedingungen im Fixpunkt für die nicht trägen Agenten lassen sich als Gleichungssystem schreiben. Für ein Netzwerk mit  $n \in \mathbb{N}$  nicht trägen Agenten mit den Meinungen  $O = (o_1, \dots, o_n)$  und  $k \in \mathbb{N}$  trägen Agenten mit den Meinungen  $O_s = (o_{n+1}, \dots, o_{n+k})$  muss im Fixpunkt das folgende lineare Gleichungssystem gelten:

$$\begin{aligned} o_1 &= \frac{\sum_{j=1}^n (\mu(j, 1) \cdot o_j)}{\sum_{j=1}^{n+k} |\mu(j, 1)|} + \frac{\sum_{j=n+1}^{n+k} (\mu(j, 1) \cdot o_j)}{\sum_{j=1}^{n+k} |\mu(j, 1)|} \\ &\vdots \\ o_n &= \frac{\sum_{j=1}^n (\mu(j, n) \cdot o_j)}{\sum_{j=1}^{n+k} |\mu(j, n)|} + \frac{\sum_{j=n+1}^{n+k} (\mu(j, n) \cdot o_j)}{\sum_{j=1}^{n+k} |\mu(j, n)|} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Wie bereits erwähnt genügt es, Fixpunkte für Gruppen mit Beeinflussung und für Gruppen ohne Beeinflussung durch träge Agenten zu bestimmen.

### 3.2.1. Unbeeinflusste Gruppen

Ohne träge Agenten fallen die konstanten Terme mit ihren Meinungen in Gleichung 3.5 weg. Man erhält das folgende lineare Gleichungssystem für eine Gruppe mit  $n \in \mathbb{N}$  nicht trägen Agenten mit den Meinungen  $O = (o_1, \dots, o_n)$ :

$$\begin{aligned} o_1 &= \frac{\sum_{j=1}^n (\mu(j, 1) \cdot o_j)}{\sum_{j=1}^n |\mu(j, 1)|} \\ &\vdots \\ o_n &= \frac{\sum_{j=1}^n (\mu(j, n) \cdot o_j)}{\sum_{j=1}^n |\mu(j, n)|} \end{aligned} \quad (3.6)$$

**Lemma 3.2.5.** *Die triviale Lösung  $O = (0, \dots, 0)$  ist immer ein Fixpunkt.*

*Beweis.* Einsetzen in Gleichung 3.6 ergibt für alle Agenten  $0 = 0$ . □

Auf einer Gruppe ohne äußere Einflüsse durch träge Agenten existiert also immer mindestens ein Fixpunkt. Die triviale Lösung ist ein Konsens, der bedeutet, dass alle Agenten keine Meinung haben oder das Thema ihnen gleichgültig ist. Wünschenswert wäre die Existenz einer Fragmentierung der Meinungen oder eines Konsens abseits der trivialen Lösung, da es realitätsfern ist, dass alle Agenten aus beliebigen unbeeinflussten Gruppen zu beliebigen Themen keine Meinung besitzen oder gleichgültig sind.

Um herauszufinden, ob ein Agent  $i$  immer die Meinung  $o_i = 0$  annimmt, ist es hilfreich sich zu verdeutlichen, wie sich ein Agent seine Meinung unter Berücksichtigung seiner Umgebung bildet. Hierbei lassen sich Aussagen darüber treffen, welche Meinung ein Agent maximal bzw. minimal annehmen kann.

**Definition 3.2.6.** (Umgebung)

Sei  $i$  ein beliebiger Agent einer Gruppe bestehend aus  $n \in \mathbb{N}$  nicht trägen Agenten. Dann ist die Menge  $U(i)$  definiert als die Menge der Agenten, die Agent  $i$  beeinflussen:

$$U(i) := \{k \in \{1, \dots, n\} \mid \mu(k, i) \neq 0\}$$

Nun kann die betragsmäßig größte Meinung aus der Umgebung eines Agenten, inklusive seiner eigenen Meinung, bestimmt werden.

**Definition 3.2.7.** (lokales Maximum)

Sei  $i$  ein beliebiger Agent einer Gruppe bestehend aus  $n \in \mathbb{N}$  nicht trägen Agenten. Da es nur endlich viele Agenten gibt, existiert ein Agent  $j \in U(i) \cup \{i\}$ , für den für alle  $k \in U(i) \cup \{i\}$  gilt  $|o_k| \leq |o_j|$ .

$$m_i := \max_{j \in U(i) \cup \{i\}} |o_j|$$

ist ein *lokales Maximum* von Agent  $i$ .

Wie sich die Meinung eines Agenten  $i$  entwickelt, lässt sich dann in Bezug zum lokalen Maximum wie folgt abschätzen.

**Lemma 3.2.8.** *Sei  $m_i$  ein lokales Maximum vom Agenten  $i$  mit Meinung  $o_i$ . Dann gilt im nächsten Zeitschritt:  $|f(o_i)| \leq m_i$*

*Beweis.*

$$\begin{aligned} |f(o_i)| &= \left| \lambda_i o_i + (1 - \lambda_i) \frac{\sum_{j=1}^n (\mu(j, i) \cdot o_j)}{\sum_{j=1}^n |\mu(j, i)|} \right| \\ &\leq \lambda_i m_i + (1 - \lambda_i) \frac{\sum_{j=1}^n |\mu(j, i)| \cdot m_i}{\sum_{j=1}^n |\mu(j, i)|} = m_i \end{aligned}$$

□

Der Betrag der Meinung eines Agenten wird nie größer als das lokale Maximum. Es lässt sich leicht zeigen, dass das lokale Maximum  $m_i$  nur von Agent  $i$  angenommen werden kann, wenn zwei Bedingungen erfüllt sind. Für alle Agenten  $k$ , die Agent  $i$  beeinflussen, muss gelten  $|o_k| = m_i$  und für Agent  $i$  muss entweder  $|o_i| = m_i$  oder  $\lambda_i = 0$  gelten. Die nächsten zwei Lemmata zeigen, dass Agent  $i$  im nächsten Zeitschritt eine betragsmäßig kleinere Meinung annimmt, wenn die Bedingungen nicht erfüllt sind.

**Lemma 3.2.9.** Sei  $m_i$  ein lokales Maximum vom Agenten  $i$  mit Meinung  $o_i$  und gibt es ein  $k \in U(i)$  mit  $|o_k| < m_i$ . Dann gilt im nächsten Zeitschritt:  $|f(o_i)| < m_i$

*Beweis.*

$$\begin{aligned} |f(o_i)| &= \left| \lambda_i o_i + (1 - \lambda_i) \frac{\sum_{j=1}^n (\mu(j, i) \cdot o_j)}{\sum_{j=1}^n |\mu(j, i)|} \right| \\ &\leq \lambda_i |o_i| + (1 - \lambda_i) \frac{\sum_{j=1}^n (|\mu(j, i)| \cdot |o_j|)}{\sum_{j=1}^n |\mu(j, i)|} \\ &< \lambda_i m_i + (1 - \lambda_i) \frac{\sum_{j=1}^n (|\mu(j, i)| \cdot m_i)}{\sum_{j=1}^n |\mu(j, i)|} = m_i \end{aligned}$$

□

**Lemma 3.2.10.** Sei  $m_i$  ein lokales Maximum vom Agenten  $i$  mit Meinung  $|o_i| < m_i$  und Trägheit  $\lambda_i > 0$ . Dann gilt im nächsten Zeitschritt:  $|f(o_i)| < m_i$

*Beweis.* Der Beweis folgt aus derselben Abschätzung wie im Beweis zu Lemma 3.2.9.

□

Man beachte, dass für  $\lambda_i = 0$  und  $|o_k| = m_i$  für  $k \in U(i)$  gelten würde

$$\begin{aligned} |f(o_i)| &= \left| (1 - \lambda_i) \frac{\sum_{j=1}^n (\mu(j, i) \cdot o_j)}{\sum_{j=1}^n |\mu(j, i)|} \right| \\ &= \frac{\sum_{j=1}^n (|\mu(j, i)| \cdot |m_i|)}{\sum_{j=1}^n |\mu(j, i)|} = m_i. \end{aligned}$$

Es genügt bereits ein Agent mit einer abweichender Meinung in der Umgebung von Agent  $i$  um den Betrag der Meinung des Agenten  $i$  nicht das lokale Maximum erreichen zu lassen. Dann gilt aber ebenso für einen Agenten  $j$ , der das Maximum in seiner Umgebung repräsentiert, dass im nächsten Zeitschritt seine Meinung nicht mehr dem Maximum entspricht, wenn ein Agent in seiner Umgebung eine betragsmäßig kleinere Meinung hat. Diese Überlegungen können auf die gesamte Gruppe übertragen werden. Das Maximum auf einer Gruppe wird wie folgt definiert.

**Definition 3.2.11.** ((globales) Maximum)

Für eine Gruppe mit  $n \in \mathbb{N}$  Agenten ist das (*globale*) Maximum zum Zeitpunkt  $t \in \mathbb{N}$ ,  $M_t$ , definiert als

$$M_t = \max_{i \in \{1, \dots, n\}} |o_{i_t}|.$$

Wie das lokale Maximum für die Umgebung nimmt auch das globale Maximum ab, wenn es Agenten auf der Gruppe gibt, die eine betragsmäßig kleinere Meinung besitzen.

**Lemma 3.2.12.** *Sei  $M_t$  das Maximum einer Gruppe mit  $n \in \mathbb{N}$  nicht trägen Agenten zum Zeitpunkt  $t \in \mathbb{N}$  und  $k = \max_{i,j \in \{1, \dots, n\}} d(i, j)$  der längste kürzeste Weg<sup>5</sup> zwischen zwei Agenten der Gruppe. Zudem muss für alle Agenten  $i \in \{1, \dots, n\}$  gelten, dass  $\lambda_i > 0$  ist. Gibt es dann einen Agenten  $i$  mit  $|o_{i_t}| < M_t$ , dann gilt für das Maximum nach spätestens  $k$  Zeitschritten:*

$$M_{t+k} < M_t.$$

*Beweis.* Ohne Einschränkung der Allgemeinheit kann angenommen werden, dass alle Agenten außer Agent  $i$  die Meinung  $M_t$  besitzen. Im ersten Zeitschritt reduziert Agent  $i$  die Meinung aller Agenten  $k \in \{1, \dots, n\}$  mit  $i \in U(k)$  so, dass gilt  $|o_{k_{t+1}}| < M_t$  (Lemma 3.2.9). Hierbei ist es notwendig, dass  $\lambda_i > 0$  ist, damit Agent  $i$  nicht wiederum die Meinung  $|o_{i_{t+1}}| = M_t$  annehmen kann (Lemma 3.2.10). Im nächsten Zeitschritt reduzieren die Agenten, deren Meinungen bereits reduziert wurden, wiederum die Meinung aller Agenten, die von ihnen beeinflusst werden. Da die Agenten zu einer Gruppe gehören, gibt es von Agent  $i$  einen Weg der Beeinflussung zu jedem anderen Agenten. Dieser Weg ist maximal  $k$  Kanten lang. Nach spätestens  $k$  Zeitschritten wird daher auch die Meinung des letzten Agenten auf einen betragsmäßig kleineren Wert als  $M_t$  reduziert und es gibt ein neues Maximum  $M_{t+k}$  mit  $M_{t+k} < M_t$ .  $\square$

Diese Aussage lässt sich noch weiter konkretisieren.

**Lemma 3.2.13.** *Sei eine Gruppe mit  $n \in \mathbb{N}$  Agenten ohne Beeinflussung von außen gegeben. Dann bildet die Folge  $(M_t)_{t \in \mathbb{N}}$  der globalen Maxima eine monoton fallende Folge auf dem Intervall  $[0, 1]$ , die für  $t \rightarrow \infty$  gegen*

$$M = \lim_{t \rightarrow \infty} M_t$$

*konvergiert.*

*Beweis.* Lemma 3.2.12 zeigt, dass die Maxima eine monoton fallende Folge bilden, falls es keine Agenten  $i \in \{1, \dots, n\}$  gibt, mit  $\lambda_i = 0$ . Gibt es Agenten  $i \in \{1, \dots, n\}$  mit  $\lambda_i = 0$ , dann ist es möglich, dass diese Agenten nach jedem Zeitschritt das vorherige Maximum annehmen. Nach Lemma 3.2.8 ist es aber nicht möglich, dass diese Agenten nach einem Zeitschritt eine betragsmäßig größere Meinung als das vorherige Maximum annehmen. Es gilt daher in jedem Fall für beliebige  $t \in \mathbb{N}$ , dass  $M_{t+1} \leq M_t$  ist.  $(M_t)_{t \in \mathbb{N}}$  ist eine monoton fallende Folge. Nach Lemma 3.0.6 gilt für eine beliebige Meinung  $o_i$  zu einem beliebigen Zeitpunkt  $t \in \mathbb{N}$  immer  $o_{i_t} \in [-1, 1]$  und damit  $0 \leq M_t \leq 1$ . Eine monoton fallende Folge reeller Zahlen konvergiert auf einem beschränkten Intervall gegen einen Grenzwert  $M = \lim_{t \rightarrow \infty} M_t$ .  $\square$

Da sich in einem Fixpunkt die Meinungen der Agenten nicht mehr verändern, ändert sich auch das Maximum der Meinungen nicht mehr. Im Fixpunkt wird daher der Grenzwert  $M$  für die Folge  $(M_t)_{t \in \mathbb{N}}$  erreicht.

---

<sup>5</sup>Definition im Anhang A.1.4

**Satz 3.2.14.** *Auf einer Gruppe mit  $n \in \mathbb{N}$  nicht trägen Agenten kann nur ein Fixpunkt vorliegen, wenn zu einem Zeitpunkt  $t^* \in \mathbb{N}$  für alle Agenten  $i \in \{1, \dots, n\}$  gilt  $|o_{i_{t^*}}| = M_{t^*} = M$ .*

*Beweis.* Ein Fixpunkt kann nur vorliegen, wenn es ein  $t^* \in \mathbb{N}$  gibt, so dass für alles  $t \geq t^*$  gilt  $M_t = M_{t^*}$ . Solange sich  $M_t$  verändert, hat sich auch die Meinung mindestens eines Agenten, dessen Meinung das vorherige Maximum war, geändert. Nur wenn sich  $M_t$  nicht mehr verändert, ist es möglich, dass sich die Meinungen der Agenten auch nicht mehr ändern. Es könnte daher ein Fixpunkt vorliegen.  $M_t$  kann nur unveränderlich sein, wenn kein Agent mit einer betragsmäßig kleineren Meinung existiert (Lemma 3.2.12) oder es Agenten mit  $\lambda = 0$  gibt. Gibt es Agenten mit  $\lambda = 0$ , ist es möglich, dass abweichende Meinungen erhalten bleiben (vgl. Beispiel 3.3.1). Da diese Agenten in jedem Zeitschritt die Meinung ihrer Umgebung annehmen und somit mindestens einer von ihnen seine Meinung ändern muss, liegt kein Fixpunkt vor. Gibt es keine Agenten mit  $\lambda = 0$ , dann muss für alle Agenten  $i \in \{1, \dots, n\}$  gelten  $|o_{i_t}| = M_t$ . Es muss dennoch kein Fixpunkt vorliegen, da für einen Agenten  $i$   $|o_{i_t}| = |o_{i_{t+1}}|$  nicht bedeutet, dass auch  $o_{i_t} = o_{i_{t+1}}$  gelten muss.  $\square$

Satz 3.2.14 ermöglicht weitere Aussagen darüber, wie ein Fixpunkt aussehen kann. Offensichtlich ist entweder ein Konsens möglich oder eine Aufteilung auf zwei entgegengesetzte Meinungen, die betragsmäßig gleich sind.

*Bemerkung 3.2.15.* Für eine Gruppe mit  $n \in \mathbb{N}$  nicht trägen Agenten gibt es zwei mögliche Meinungsverteilungen im Fixpunkt.

- Für alle  $i, j \in \{1, \dots, n\}$  gilt  $o_i = o_j$  (*Konsens*).
- Für alle  $i, j \in \{1, \dots, n\}$  gilt  $|o_i| = |o_j|$  und es gibt mindestens eine Kombination aus  $i$  und  $j$  für die gilt  $o_i \neq o_j$  (*Bi-Konsens*).

Abbildung 3.4 zeigt mögliche Meinungsverteilungen auf einer kreisförmig angeordneten Gruppe von Agenten. Die Meinungen und Kantengewichte werden dabei durch Farben dargestellt. Blau entspricht 1 und gelb  $-1$ . 0 ist grau. Eine genauere Erklärung der Farben/Farbverläufe findet sich in Abschnitt 3.4.

- Abbildung 3.4a zeigt einen klassischen Konsens. Alle Agenten besitzen die Meinung 1 und stimmen den sie beeinflussenden Agenten voll zu ( $\mu = 1$ ).
- Abbildung 3.4b zeigt eine Aufteilung der Agenten auf zwei Lager:  $-0,33$  und  $0,33$ .
- Abbildung 3.4c zeigt einen speziellen Konsens, die triviale Lösung, bei der alle Agenten die Meinung 0 besitzen.

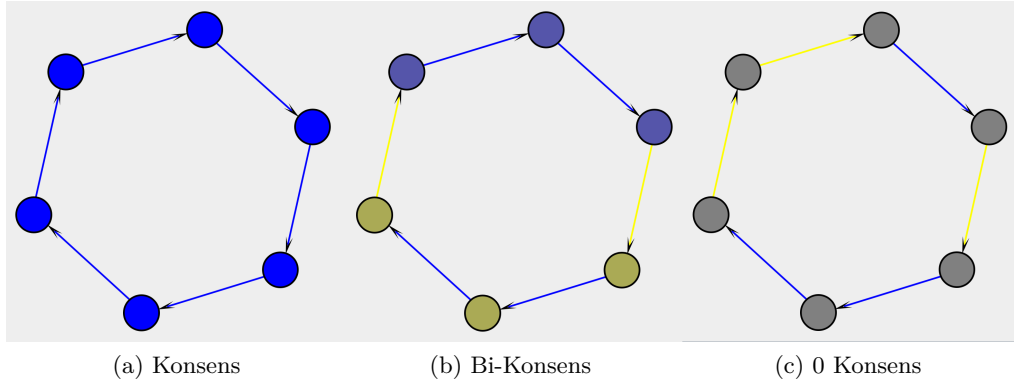


Abbildung 3.4.: Meinungsbildung auf einer Gruppe ohne träge Agenten

Nach Lemma 3.2.5 ist die triviale Lösung immer eine mögliche Lösung. Sie wäre daher auch eine mögliche Lösung für (a) oder (b). Es gibt offensichtlich für manche Graphen mehr als eine Lösung. Für den Graphen aus Abbildung 3.4a ist jedes Meinungsprofil mit  $o_i = o_j$  für alle  $i, j \in \{0, \dots, n\}$  ein Fixpunkt. Auch für den Graphen aus Abbildung 3.4b ist es möglich, direkt weitere Fixpunkte anzugeben. Knoten einer Farbe müssen dieselbe Meinung besitzen. Zwischen diesen Knoten gibt es nur positive Kanten. Knoten, die negativ beeinflusst werden, müssen die betragsmäßig gleiche, gegenteilige Meinung vertreten. Ordnet man einem der unteren drei Knoten also eine Meinung  $o \in [-1, 1]$  zu, müssen die anderen beiden unteren Knoten dieselbe Meinung und die oberen drei Knoten die Meinung  $-o$  besitzen.

Für die Graphen aus Abbildung 3.4 ist eine Vorhersage der Fixpunkte einfach. Komplizierter wird es, wenn die Knoten stärker miteinander verbunden sind und sowohl negativ als auch positiv von anderen Knoten beeinflusst werden.

Etwas spezieller ist auch der Graph aus Abbildung 3.4c. Um hier eine nichttriviale Lösung zu finden, wählt man, wie bei den anderen beiden Graphen, für einen beliebigen Knoten einen Startwert. Den Knoten, die über eine blaue Kante verbunden sind, weist man denselben Wert und den Knoten, die über eine gelbe Kante verbunden sind, den betragsmäßig gleichen, negativen Wert zu. Dann entsteht beim letzten Knoten ein Widerspruch. Zum Beispiel erhält man, wenn der unterste Knoten auf 1 gesetzt wird und man im Uhrzeigersinn vorgeht die Folge  $(1, 1, -1, 1, 1, -1)$ . Der letzte Knoten mit dem Wert  $-1$  ist aber wiederum mit dem ersten Knoten mit dem Wert 1 über eine blaue Kante, die Zustimmung bedeutet, verbunden. Der erste Knoten würde daher im nächsten Zeitschritt seinen Wert ändern. Offensichtlich ist es nicht möglich, auf diesem Graphen einen stabilen Bi-Konsens anzugeben. Ein Konsens, der nicht 0 ist, ist aufgrund der gelben, negativen Kanten auch nicht möglich.

Dieses Problem gibt es immer, wenn es einen Zyklus gibt, auf dem das Produkt der Kantengewichte negativ ist.

**Vermutung 3.2.16.** *Die triviale Lösung ist der einzige Fixpunkt, genau dann, wenn es einen Zyklus gibt, bei dem das Produkt der Kantengewichte negativ ist.*

Der Beweis dieser Vermutung steht noch aus. Die Idee dahinter lässt sich anhand eines Beispiels zeigen.

**Beispiel 3.2.17.**

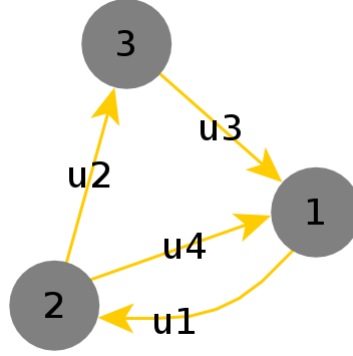


Abbildung 3.5.: Unbeeinflusste Gruppe

3.5 zeigt einen Graphen mit drei Agenten und zwei Zyklen. Für den Graphen aus Abbildung 3.5 gilt im Fixpunkt folgendes Gleichungssystem:

$$o_1 = \frac{\mu_4}{|\mu_3| + |\mu_4|} o_2 + \frac{\mu_3}{|\mu_3| + |\mu_4|} o_3 \quad (3.7)$$

$$o_2 = \frac{\mu_1}{|\mu_1|} o_1 \quad (3.8)$$

$$o_3 = \frac{\mu_2}{|\mu_2|} o_2 = \frac{\mu_1 \mu_2}{|\mu_1 \mu_2|} o_1 \quad (3.9)$$

Für  $o_1$  erhält man durch Einsetzen und Umformen folgende Gleichung:

$$\begin{aligned} 0 &= (2 \left| \mu_1^2 \mu_2 \mu_3 \mu_4 \right| - \mu_1 \mu_4 |\mu_1 \mu_2 \mu_3| - \mu_1 \mu_2 \mu_3 |\mu_1 \mu_4| \\ &\quad + \left| \mu_1^2 \mu_2 \mu_3^2 \right| - \mu_1 \mu_2 \mu_3 |\mu_1 \mu_3| \\ &\quad + \left| \mu_1^2 \mu_2 \mu_4^2 \right| - \mu_1 \mu_4 |\mu_1 \mu_2 \mu_4|) o_1 \end{aligned} \quad (3.10)$$

Es gibt zwei Möglichkeiten für  $o_1$ . Ist

$$\begin{aligned} &(2 \left| \mu_1^2 \mu_2 \mu_3 \mu_4 \right| - \mu_1 \mu_4 |\mu_1 \mu_2 \mu_3| - \mu_1 \mu_2 \mu_3 |\mu_1 \mu_4| \\ &\quad + \left| \mu_1^2 \mu_2 \mu_3^2 \right| - \mu_1 \mu_2 \mu_3 |\mu_1 \mu_3| + \left| \mu_1^2 \mu_2 \mu_4^2 \right| - \mu_1 \mu_4 |\mu_1 \mu_2 \mu_4|) = 0, \end{aligned}$$

dann ist  $o_1$  beliebig wählbar, da  $0 = 0 \cdot o_1$  für beliebige  $o_1$  erfüllt ist.



Ist

$$\begin{aligned} & (2 \left| \mu_1^2 \mu_2 \mu_3 \mu_4 \right| - \mu_1 \mu_4 \left| \mu_1 \mu_2 \mu_3 \right| - \mu_1 \mu_2 \mu_3 \left| \mu_1 \mu_4 \right| \\ & + \left| \mu_1^2 \mu_2 \mu_3^2 \right| - \mu_1 \mu_2 \mu_3 \left| \mu_1 \mu_3 \right| + \left| \mu_1^2 \mu_2 \mu_4^2 \right| - \mu_1 \mu_4 \left| \mu_1 \mu_2 \mu_4 \right|) \neq 0, \end{aligned}$$

dann muss  $o_1 = 0$  gelten, da nur 0 die Gleichung  $0 = a \cdot o_1$  für beliebiges  $a \neq 0$  erfüllt.

$$\begin{aligned} & (2 \left| \mu_1^2 \mu_2 \mu_3 \mu_4 \right| - \mu_1 \mu_4 \left| \mu_1 \mu_2 \mu_3 \right| - \mu_1 \mu_2 \mu_3 \left| \mu_1 \mu_4 \right| \\ & + \left| \mu_1^2 \mu_2 \mu_3^2 \right| - \mu_1 \mu_2 \mu_3 \left| \mu_1 \mu_3 \right| + \left| \mu_1^2 \mu_2 \mu_4^2 \right| - \mu_1 \mu_4 \left| \mu_1 \mu_2 \mu_4 \right|) = 0 \end{aligned}$$

gilt genau dann, wenn  $\mu_1 \mu_4 > 0$  und  $\mu_1 \mu_2 \mu_3 > 0$  gilt. Dies sind genau die Produkte der Kantengewichte der Zyklen mit  $o_1$  als Ausgangspunkt.

Es genügt hierbei, nur einen Agenten zu betrachten, da nach Satz 3.2.14 im Fixpunkt die Werte der Agenten betragsmäßig übereinstimmen müssen. Muss daher für einen Agenten  $i$  gelten  $o_i = 0$ , dann müssen auch die anderen Agenten die Meinung 0 besitzen.

Durch Umformen und Einsetzen erhält man aus den Gleichungen 3.7 bis 3.9 die folgende Gleichung für  $o_2$ :

$$o_2 = \frac{\mu_1 \mu_4}{\left| \mu_1 \mu_3 \right| + \left| \mu_1 \mu_4 \right|} o_2 + \frac{\mu_1 \mu_3 \mu_2}{\left| \mu_1 \mu_3 \mu_2 \right| + \left| \mu_1 \mu_4 \mu_2 \right|} o_2$$

In den Zählern der Summanden stehen genau die Produkte der Kantengewichte der Zyklen von  $o_2$ . Durch weiteres Umformen erhält man dieselbe Gleichung wie für  $o_1$  (Gleichung 3.10).

Etwas anders sieht es bei  $o_3$  aus.  $o_3$  ist nur Teil eines Zyklus. Der zweite Zyklus des Graphen spielt dennoch eine Rolle, wird aber bereits beim Eliminieren von  $o_2$  in Gleichung 3.7 abgehandelt. Am Ende bleibt für  $o_3$  folgende Gleichung:

$$o_3 = \frac{\mu_1 \mu_2 \mu_3}{\left| \mu_1 \mu_2 \right| \left( 1 - \frac{\mu_1 \mu_4}{\left| \mu_1 \mu_3 \right| + \left| \mu_1 \mu_4 \right|} \right) (\left| \mu_3 \right| + \left| \mu_4 \right|)} o_3$$

Durch Umformen erhält man auch hier die Gleichung 3.10 mit  $o_3$  statt  $o_1$ . Auch für die Bestimmung von  $o_3$  sind somit beide Zyklen des Graphen berücksichtigt.

Das Beispiel bestätigt die Vermutung 3.2.16 und zeigt, wie verschachtelt die Gleichungen bereits für ein minimales Beispiel mit zwei Zyklen werden. Dies erschwert die Analyse für größere Gruppen mit vielen Zyklen.

Ein weiteres wichtiges Resultat, das sich aus dem Beispiel ablesen lässt, ist die folgende Vermutung.

**Vermutung 3.2.18.** *Es gibt für die Meinung eines Agenten  $i$  im Fixpunkt immer eine Gleichung  $0 = ao_i$ . Dabei ist  $a$  von der Form*

$$a = 1 - \frac{\text{Produkt der Kanten von Zyklus 1}}{\text{positiver Faktor 1}} - \frac{\text{Produkt der Kanten von Zyklus 2}}{\text{positiver Faktor 2}} - \dots$$

*Sind die Zähler alle positiv, dann gilt  $a = 0$ .*

Aus der Definition einer Gruppe (3.1.1) folgt, dass jeder Agent einer Gruppe Teil von mindestens einem Zyklus ist. Daher existiert für die Meinung jedes Agenten  $i \in \{1, \dots, n\}$  einer Gruppe eine Gleichung der Form  $0 = ao_i$  mit dem in Vermutung 3.2.18 beschriebenen Aufbau von  $a$ . Offen bleibt an dieser Stelle der Nachweis, dass  $a = 0$  genau dann gilt, wenn die Produkte der Kantengewichte der Zyklen positiv sind.

**Korollar 3.2.19.** *Sind alle Kantengewichte positiv, dann gibt es unendlich viele Fixpunkte und im Fixpunkt liegt ein Konsens vor.*

*Beweis.* Falls alle Kanten positiv sind, sind auch die Produkte der Kantengewichte aller Zyklen positiv. Dann gilt nach Vermutung 3.2.18 für die Meinung eines beliebigen Agenten  $i \in \{1, \dots, n\}$  im Fixpunkt die Gleichung  $0 = ao_i$  mit  $a = 0$ .  $o_i$  ist daher beliebig wählbar. Es gibt unendlich viele Möglichkeiten für  $o_i$  und somit auch unendlich viele Fixpunkte. Nach Satz 3.2.14 müssen alle anderen Agenten den betragsmäßig gleichen Wert annehmen. Da die Kantengewichte alle positiv sind, müssen alle Agenten den gleichen Wert annehmen.  $\square$

Zusammenfassend lässt sich sagen, es gibt für Gruppen mit  $n \in \mathbb{N}$  Agenten ohne äußere Beeinflussung drei mögliche Fälle:

1. Es gibt nur positive Kanten. Für alle  $i, j \in \{1, \dots, n\}$  ist also  $\mu(j, i) \geq 0$ . Dann gibt es unendlich viele Fixpunkte und in den Fixpunkten liegt ein Konsens vor.
2. Es gibt positive und negative Kanten und die Produkte der Kantengewichte der Zyklen sind positiv. Dann gibt es unendlich viele Fixpunkte und im Fixpunkt liegt entweder ein Bi-Konsens oder die triviale Lösung vor.
3. Es gibt positive und negative Kanten und mindestens ein Produkt der Kantengewichte der Zyklen ist negativ. Dann ist nur die triviale Lösung ein Fixpunkt.

### 3.2.2. Beeinflusste Gruppen

Gruppen mit Beeinflussung von außen verhalten sich anders als Gruppen ohne. So ist die in Satz 3.2.14 gemachte Abschätzung, die nur Konsense und Bi-Konsense erlaubt, nicht mehr möglich. Um die Meinungen der Agenten einer Gruppe mit Beeinflussung durch weitere träge Agenten abzuschätzen, müssen die beeinflussenden, träge Agenten mit betrachtet werden.

**Lemma 3.2.20.** *Sei eine Gruppe mit  $n \in \mathbb{N}$  nicht trügen Agenten mit Meinungen  $o_1, \dots, o_n$  gegeben, die durch  $k \in \mathbb{N}$  träge Agenten mit den Meinungen  $o_{n+1}, \dots, o_{n+k}$  beeinflusst wird. Dann gilt für das (globale) Maximum  $M$*

$$M = \max_{i \in \{0, \dots, k\}} |o_i|$$

*Beweis.* Aus Definition 3.1.1 folgt, dass zwischen je zwei nicht trügen Agenten einer Gruppe immer ein Weg existiert. Daher gibt es auch von jedem beeinflussenden trügen Agenten einen Weg zu jedem nicht trügen Agenten der Gruppe. Gilt zu einem Zeitpunkt  $t \in \mathbb{N}$  für einen nicht trügen Agenten  $i$ , dass  $|o_i| = M_t > M$ , dann wird die Meinung dieses Agenten durch die Meinung eines trügen Agenten  $j$ , für die gilt  $|o_j| \leq M$ , spätestens in  $l = d(j, i)$  Zeitschritten reduziert (Lemma 3.2.9). Dieser Vorgang setzt sich für alle nicht trügen Agenten solange fort, bis für alle nicht trügen Agenten  $i \in \{1, \dots, n\}$  gilt  $|o_i| \leq M$ .  $\square$

Es ist also möglich für Gruppen, die von trügen Agenten beeinflusst werden, anzugeben, über welchen Bereich  $[-M, M] \subseteq [-1, 1]$  die Meinungen verteilt sind. Dabei sind nur die Meinungen der trügen Agenten ausschlaggebend.

Ein weiterer Unterschied ist, dass die triviale Lösung im Allgemeinen kein Fixpunkt ist. Dies lässt sich gut bei Gruppen beobachten, bei denen nur ein Agent  $i$  durch träge Agenten beeinflusst wird. Dieser Agent hat im Fixpunkt eine Meinung, die nur auf den Meinungen der ihn beeinflussenden trügen Agenten beruht. Im Fixpunkt gilt für den Agenten  $i$ :

$$o_i = \frac{\sum_{j=1}^n (\mu(j, i) \cdot o_j)}{\sum_{j=1}^{n+k} |\mu(j, i)|} + \frac{\sum_{j=n+1}^{n+k} (\mu(j, i) \cdot o_j)}{\sum_{j=1}^{n+k} |\mu(j, i)|}$$

(Gleichung 3.5). Löst man das lineare Gleichungssystem mittels Einsetzungsverfahren nach  $o_i$  auf, erhält man eine Gleichung der Form

$$a o_i = \frac{\sum_{j=n+1}^{n+k} (\mu(j, i) \cdot o_j)}{\sum_{j=1}^{n+k} |\mu(j, i)|}, \quad (3.11)$$

wobei  $a$  die in Vermutung 3.2.18 beschriebene Form besitzt. Aber im Gegensatz zu Vermutung 3.2.18 gilt hier für  $a$  immer  $a > 0$ , da die Nenner durch die zusätzliche(n) Kante(n) von den trügen Agenten größer sind.

Damit ist  $o_i$  durch

$$o_i = \frac{1}{a} \frac{\sum_{j=n+1}^{n+k} (\mu(j, i) o_j)}{\sum_{j=1}^{n+k} |\mu(j, i)|}$$

immer genau bestimmt. Es existiert also nur ein möglicher Wert für  $o_i$  und somit auch nur höchstens ein Fixpunkt.

Auch in dem allgemeinen Fall, in dem beliebig viele Agenten von außen beeinflusst werden, gilt eine ähnliche Gleichung für die Meinung eines Agenten  $i$  im Fixpunkt. Dabei macht es keinen Unterschied, ob ein Agent direkt durch einen trägen Agenten beeinflusst wird oder indirekt über andere nicht träge Agenten. Da es zwischen allen Agenten einer Gruppe Wege gibt, wird auch die Beeinflussung über diese Wege weitergegeben. Für einen beliebigen Agenten  $i$  gilt im Fixpunkt daher immer eine Gleichung der Form

$$o_i = \frac{1}{a} b, \quad (3.12)$$

wobei  $a$  wie in Vermutung 3.2.18 aufgebaut ist, mit dem Unterschied, dass gilt  $a > 0$ , und  $b$  ein Faktor ist, der sich aus der Beeinflussung durch die nicht trägen Agenten ergibt. Im Allgemeinen sind  $a$  und  $b$  für jeden Agenten  $i$  unterschiedlich.

**Vermutung 3.2.21.** *Wird eine Gruppe durch mindestens einen Agenten von außen beeinflusst, dann gibt es genau einen Fixpunkt.*

Der Beweis dieser Vermutung steht noch aus. Die Idee dahinter folgt aus Gleichung 3.12 und lässt sich mal anhand eines Beispiels verdeutlichen.

**Beispiel 3.2.22.**

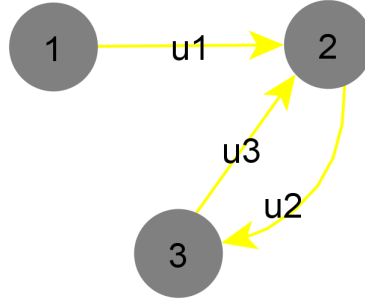


Abbildung 3.6.: Beeinflusste Gruppe

Abbildung 3.6 zeigt einen Graphen bestehend aus einer Gruppe mit zwei nicht trägen Agenten und einem trägen Agenten, der diese Gruppe beeinflusst. Für diesen Graphen gilt im Fixpunkt folgendes Gleichungssystem

$$\begin{aligned} o_2 &= \frac{\mu_1}{|\mu_1| + |\mu_3|} o_1 + \frac{\mu_3}{|\mu_1| + |\mu_3|} \\ o_3 &= \frac{\mu_2}{|\mu_2|} o_2 \end{aligned}$$

wobei die Meinung  $o_1$  des trägen Agenten frei wählbar ist.

Durch Umformen und Einsetzen erhält man für  $o_2$  folgende Gleichung:

$$\left( \left| \mu_1^2 \mu_2 \right| + 2 \left| \mu_1 \mu_2 \mu_3 \right| + \left| \mu_2 \mu_3^2 \right| - \mu_2 \mu_3 \left| \mu_1 \right| - \mu_2 \mu_3 \left| \mu_3 \right| \right) o_2 = (\mu_1 \left| \mu_1 \mu_2 \right| + \mu_1 \left| \mu_2 \mu_3 \right|) o_1$$

Für beliebige  $\mu_1, \mu_2, \mu_3 \in [-1, 1] \setminus \{0\}$  ist

$$\left( \left| \mu_1^2 \mu_2 \right| + 2 \left| \mu_1 \mu_2 \mu_3 \right| + \left| \mu_2 \mu_3^2 \right| - \mu_2 \mu_3 \left| \mu_1 \right| - \mu_2 \mu_3 \left| \mu_3 \right| \right) \neq 0$$

und

$$(\mu_1 \left| \mu_1 \mu_2 \right| + \mu_1 \left| \mu_2 \mu_3 \right|) \neq 0.$$

Somit ist  $o_2$  eindeutig durch  $o_1$  bestimmt.

Für

$$\left( \left| \mu_1^2 \mu_2 \right| + 2 \left| \mu_1 \mu_2 \mu_3 \right| + \left| \mu_2 \mu_3^2 \right| - \mu_2 \mu_3 \left| \mu_1 \right| - \mu_2 \mu_3 \left| \mu_3 \right| \right) = (\mu_1 \left| \mu_1 \mu_2 \right| + \mu_1 \left| \mu_2 \mu_3 \right|)$$

folgt dann sogar  $o_2 = o_1$ . Dies ist genau dann der Fall, wenn  $\mu_2 \mu_3 > 0$  und  $\mu_1 > 0$  sind. Offensichtlich spielt auch hier der Zyklus des Graphen  $\mu_2 \mu_3$  eine wichtige Rolle. Ist  $\mu_2 \mu_3 > 0$  und  $\mu_1 < 0$ , dann gilt  $o_2 = -o_1$ .

Gilt Vermutung 3.2.21 und die Meinungen der Agenten lassen sich über eine Gleichung bestimmen, die das Format von Gleichung 3.12 hat, dann macht es für den Fixpunkt keinen Unterschied, welche Meinungen die Agenten der Gruppe zu Anfang besaßen. Entscheidend für die Meinungen im Fixpunkt sind nur die Meinungen der beeinflussenden trägen Agenten.

**Korollar 3.2.23.** *Die Meinungen im Fixpunkt sind nur abhängig von den Meinungen der beeinflussenden trägen Agenten.*

*Bemerkung 3.2.24.* Für Gruppen, die beeinflusst werden, lässt sich im Gegensatz zu den unbeeinflussten Gruppen, im Allgemeinen nicht vorhersagen, ob es im Fixpunkt einen Konsens, Bi-Konsens oder eine weiter gestreute Meinungsverteilung gibt. Abhängig von den Kantengewichten sind die Meinungen zwischen  $-M$  und  $M$  verteilt.

Ein Sonderfall sind Gruppen, bei denen alle Agenten, die beeinflusst werden, mit der gleichen Meinung beeinflusst werden, und auf denen nur positive Kanten existieren. In dem Fall nehmen alle Agenten diese Meinung an.

Es gibt Fixpunkte für Gruppen ohne und mit Beeinflussung. Aus diesen Gruppen lassen sich, wie in Abschnitt 3.1 beschrieben, alle Netzwerke zusammensetzen. Dann gibt es nach Lemma 3.2.3 auch für jedes beliebige Netzwerk einen Fixpunkt. Dieser muss nicht eindeutig sein. Damit bleibt die Frage offen, ob eine Simulation auf einem System für  $t \rightarrow \infty$  gegen einen Fixpunkt konvergiert, und falls ja, gegen welchen.

### 3.3. Konvergenz

Im letzten Abschnitt wurde gezeigt, dass vermutlich Fixpunkte für beliebige Netzwerke existieren. Diese Fixpunkte sind nicht unbedingt eindeutig und es ist bisher nicht bekannt, ob eine Simulation für ein beliebiges System<sup>6</sup> gegen einen Fixpunkt konvergiert.

Ein einfaches Beispiel belegt, dass es auch Systeme gibt, für die eine Simulation divergiert.

#### Beispiel 3.3.1.

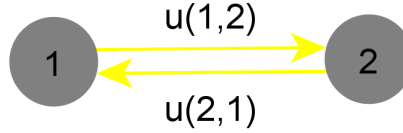


Abbildung 3.7.: Zwei Agenten

Sei der Graph aus Abbildung 3.7 mit den Agenten 1 und 2 gegeben und gelte  $\mu(1, 2) = \mu(2, 1) = 1$  und  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ . Die Update-Funktionen sind dann:

$$\begin{aligned} o_{1t+1} &= 0 \cdot o_{1t} + 1 \cdot \frac{1}{1} o_{2t} = o_{2t} \\ o_{2t+1} &= 0 \cdot o_{2t} + 1 \cdot \frac{1}{1} o_{1t} = o_{1t} \end{aligned}$$

Für das Meinungsprofil  $O_0 = (1, -1)$  liefert eine Simulation dann die Folge  $(O_t)_{t \in \mathbb{N}}$  mit  $O_t = ((-1)^t, (-1)^{t+1})$ . Diese Folge divergiert für  $t \rightarrow \infty$ . Die Simulation erreicht keinen Fixpunkt, obwohl für das Netzwerk mehrere Fixpunkte existieren.

Die beiden Agenten bilden eine unbeeinflusste Gruppe nur mit positiven Kantengewichten. Daher ist jedes Meinungsprofil  $O = (x, x)$  mit  $x \in [-1, 1]$  ein Fixpunkt. Verwendet man diese im Zeitpunkt  $O_0$  bleibt die Simulation im Fixpunkt und es gilt  $O_t = (x, x)$  für  $(O_t)_{t \in \mathbb{N}}$ .

Das System aus Beispiel 3.3.1 konvergiert nicht, da beide Agenten in jedem Update-Schritt die Meinung des jeweils anderen Agenten annehmen. Der Grund dafür sind die Trägheitswerte  $\lambda_0 = \lambda_1 = 0$ . Diese erlauben es den Agenten, die Meinungen zu tauschen, anstatt sich aufeinander zuzubewegen. Für  $\lambda_1, \lambda_2 > 0$  konvergiert das Beispiel. Da beide Agenten eingehende Kanten besitzen, wird angenommen, dass sie nicht träge sind, also auch  $\lambda_1, \lambda_2 \neq 1$  gilt. Für  $\lambda_1, \lambda_2 \in (0, 1)$  sehen die Update-Funktionen wie folgt aus:

$$\begin{aligned} o_{1t+1} &= \lambda_1 \cdot o_{1t} + (1 - \lambda_1) \cdot o_{2t} \\ o_{2t+1} &= \lambda_2 \cdot o_{2t} + (1 - \lambda_2) \cdot o_{1t} \end{aligned} \tag{3.13}$$

---

<sup>6</sup>Definition 3.0.3

Sowohl für  $o_{1_{t+1}}$  als auch für  $o_{2_{t+1}}$  gilt also

$$o_{1_{t+1}}, o_{2_{t+1}} \in (-\max(|o_{1_t}|, |o_{2_t}|), \max(|o_{1_t}|, |o_{2_t}|)),$$

außer wenn bereits  $o_{1_t} = o_{2_t}$  gilt. In dem Fall folgt  $o_{1_{t+1}} = o_{2_{t+1}} = o_{1_t} = o_{2_t}$ . Die Meinungen von Agent 1 und Agent 2 ändern sich dann auch für größere  $t$  nicht mehr. Ein Fixpunkt liegt vor und im Fixpunkt herrscht Konsens. Im anderen Fall bedeutet

$$o_{1_{t+1}}, o_{2_{t+1}} \in (-\max(|o_{1_t}|, |o_{2_t}|), \max(|o_{1_t}|, |o_{2_t}|)),$$

dass sich die Meinungen aufeinander zubewegen.

$$(\max(|o_{1_t}|, |o_{2_t}|))_{t \in \mathbb{N}}$$

ist eine streng monoton fallende Folge.

Dieses Ergebnis ist ein Spezialfall von Satz 3.2.14, da der Grenzwert

$$M = \lim_{t \rightarrow \infty} M_t = \lim_{t \rightarrow \infty} \max(|o_{1_t}|, |o_{2_t}|)$$

nur angenommen wird, wenn  $o_1 = o_2$  gilt, also ein Konsens vorliegt.

Für Gruppen ohne Beeinflussung von außen beschreibt Lemma 3.2.13 die Konvergenz des Maximums gegen einen Grenzwert und Satz 3.2.14 die Konvergenz der Meinungen gegen einen (Bi-)Konsens mit  $M = |o_i|$  für  $t \rightarrow \infty$  und  $i = 1, \dots, n$ , falls für  $i = 1, \dots, n$  auch gilt  $\lambda_i = 0$ . Beispiel 3.3.1 zeigt, dass für beliebige Trägheitswerte die Meinungen nicht konvergieren müssen.

Angenommen es gilt  $\lambda_i > 0$  für  $i = 1, \dots, n$  und die Meinungen konvergieren gegen einen Konsens oder einen Bi-Konsens, dann bedeutet dies noch nicht, dass die Meinungen auch den Grenzwert annehmen. Auch dies kann man anhand des Beispiels 3.3.1 sehen, in dem die Update-Funktionen aus Gleichung 3.13 umgeformt werden. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit kann angenommen werden, dass  $o_{1_t} \leq o_{2_t}$  ist.

$$\begin{aligned} o_{1_{t+1}} &= \lambda_1 \cdot o_{1_t} + (1 - \lambda_1) \cdot o_{2_t} = o_1 + (1 - \lambda_1)(o_2 - o_1) \\ o_{2_{t+1}} &= \lambda_2 \cdot o_{2_t} + (1 - \lambda_2) \cdot o_{1_t} = o_2 - (1 - \lambda_2)(o_2 - o_1) \end{aligned} \quad (3.14)$$

Offensichtlich kann für ein beliebiges  $t \in \mathbb{N}$   $o_{1_{t+1}} = o_{2_{t+1}}$  nur gelten, wenn bereits gilt  $o_{1_t} = o_{2_t}$  oder wenn gilt  $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ . Für  $\lambda_1, \lambda_2 \in (0, 1)$  mit  $\lambda_1 + \lambda_2 \neq 1$  kann der Fixpunkt  $o_1 = o_2$  nicht erreicht werden. Weiter zeigt die Gleichung, dass aus  $o_{1_t} < o_{2_t}$  und  $\lambda_1 + \lambda_2 < 1$  folgt  $o_{1_{t+1}} > o_{2_{t+1}}$  und dass aus  $o_{1_t} < o_{2_t}$  und  $\lambda_1 + \lambda_2 > 1$  folgt  $o_{1_{t+1}} < o_{2_{t+1}}$ . Nur für  $\lambda_1 + \lambda_2 > 1$  sind die Folgen der Meinungen  $(o_{1_t})_{t \in \mathbb{N}}$  und  $(o_{2_t})_{t \in \mathbb{N}}$  monoton.

Allgemein lässt sich für Gruppen ohne Beeinflussung von außen festhalten:

- Die Meinungen konvergieren nur sicher, sofern für alle Trägheitswerte  $\lambda_i$  gilt  $\lambda_i > 0$ .
- Konvergieren die Meinungen, dann konvergieren sie gegen einen Konsens oder einen Bi-Konsens.
- Der (Bi-)Konsens muss dabei nicht angenommen werden.
- Die Folge der Meinungen eines Agenten muss nicht monoton sein.

Gruppen mit Beeinflussung von außen durch träge Agenten oder Agenten anderer Gruppen konvergieren im Allgemeinen nicht gegen einen Konsens oder Bi-Konsens. Es ist nur möglich, das Intervall  $[-M, M]$  anzugeben, über das die Meinungen verteilt sind. Dabei ist  $M$  das betragsmäßige Maximum der beeinflussenden Agenten. Dennoch gelten einige Eigenschaften des Meinungsverlaufs aus Gruppen ohne äußere Beeinflussung auch für die Meinungen von Agenten einer Gruppe mit Beeinflussung von außen.

Ein einfaches Beispiel erhält man, indem in Gleichung 3.14  $\lambda_1 = 1$  gesetzt wird.  $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$  ist dann nur noch durch  $\lambda_2 = 0$  möglich. Für  $\lambda_2 > 0$  wird der Grenzwert nie angenommen. Für Gruppen mit Beeinflussung von außen stellen die Trägheitswerte  $\lambda_i = 0$  kein Problem dar. Sie erlauben eine schnellere Konvergenz und ein Erreichen des Grenzwerts.

### 3.3.1. Konvergenzgeschwindigkeit

Um die Konvergenzgeschwindigkeit einschätzen zu können, wurde ein Matlab<sup>7</sup> Programm<sup>8</sup> geschrieben, dass für zufällige Digraphen und Meinungsvektoren die Update-Funktion so oft ausführt, bis der Grenzwert erreicht wird. Es sind nur die Digraphen und Meinungsvektoren zufällig, nicht aber die Trägheitswerte. Zufällige Trägheitswerte erlauben keine genauere Auswertung, da einzelne Trägheitswerte, die nur geringfügig kleiner als 1 sind, die Konvergenz zu stark verzögern. Aus dem gleichen Grund werden die zufällig generierten Kantengewichte auf zwei Nachkommastellen gerundet, um zu starke Verzögerungen bei der Konvergenz durch zu kleine Kantengewichte zu vermeiden.

Die wichtigsten Faktoren, die angegeben werden können, sind die Anzahl der Agenten  $n$ , die Wahrscheinlichkeit  $p$ , mit der in der Adjazenzmatrix des Digraphen eine Kante zwischen zwei Knoten existiert, ein Trägheitswert  $\lambda$  für alle Agenten und ein Wert  $e \geq 0$  für die Konvergenzschwelle. Der Grenzwert gilt als erreicht, sobald  $(F_g O - O) \leq e$  erfüllt ist.  $F_g$  ist hierbei die Abbildungsmatrix zur globalen Update-Funktion  $\Phi$  (Definition 3.0.5) und  $O$  der Meinungsvektor im aktuellen Zeitpunkt. Es wird sich zeigen, dass  $e$  ausschlaggebend für die Anzahl der notwendigen Iterationen ist.

<sup>7</sup>Weitere Informationen zu Matlab finden sich unter <http://www.mathworks.de/products/matlab/>.

<sup>8</sup>Der Programmcode befindet sich im Anhang A.2.1.



	$e = 0,1$	$e = 0,01$	$e = 10^{-10}$	$e = 10^{-100}$
$n = 10$	4,88	11,71	75,32	801,98
$n = 100$	5,86	9,56	42,65	422,43
$n = 200$	6	9,96	40,49	393,86

Tabelle 3.1.: Durchschnittliche Anzahl an Update-Schritten für unterschiedliche  $e$  und  $n$  bei  $p = 0,5$  und  $\lambda = 0,5$

Weniger wichtige Faktoren sind die maximale Anzahl an Update-Schritten, nach der abgebrochen wird, auch wenn der Grenzwert noch nicht erreicht wurde, und die Anzahl der Durchläufe. Für jeden Durchlauf wird dabei eine neue, zufällige Adjazenzmatrix und ein neuer Meinungsvektor bestimmt. Die maximale Anzahl an Update-Schritten sollte, wenn möglich, so gewählt werden, dass sie nie oder nur selten erreicht wird. Solange die maximale Anzahl an Update-Schritten nicht erreicht wird, beeinflusst dieser Wert auch nicht die Ergebnisse. Die Anzahl der Durchläufe muss genügend groß gewählt werden, da ansonsten wenige ungünstig verteilte Zufallszahlen einen zu großen Einfluss auf die Ergebnisse haben. Werden diese beiden weniger wichtigen Faktoren genügend groß gewählt, haben sie keinen Einfluss auf die durchschnittlich benötigte Anzahl der Update-Schritte. Um die hier vorgestellten Ergebnisse zu erzielen, wurde die maximale Anzahl an Update-Schritten und die Anzahl der Durchläufe auf 100000 gesetzt.

Außer in einem Versuch mit  $\Lambda = 0$  wurde die maximale Anzahl an Update-Schritten nicht erreicht. Für  $\Lambda = 0$  war dies zu erwarten, da die Simulation auf stark zusammenhängenden Graphen mit  $\Lambda = 0$  nicht konvergieren muss. Die maximale Anzahl an Iterationen wurde in 25 der 100000 Durchläufe erreicht.

Tabelle 3.1 zeigt die durchschnittlich benötigte Anzahl an Update-Schritten für Netzwerke mit 10, 100, und 200 Agenten. Die Wahrscheinlichkeit für eine Kante zwischen zwei Agenten beträgt  $p = 0,5$  und alle Agenten besitzen die Trägheit  $\lambda = 0,5$ . Die Zahl der Update-Schritte steigt, je kleiner die Konvergenzschwelle wird. Dies spricht dafür, dass die Meinungen sich nur dem Grenzwert annähern, ihn aber im Allgemeinen nicht erreichen. Es genügen bereits wenige Update-Schritte um zu sehen, wie sich die Meinungen entwickeln, da bereits nach ungefähr zehn Update-Schritten  $(F_g O - O) \leq 0,01$  ist.

Dies ist ein gutes Ergebnis, da die Berechnung der Update-Schritte für Netzwerke mit vielen Agenten langsam ist. So gilt für die Berechnung von  $k \in \mathbb{N}$  Update-Schritten  $O_k = F_g^k O_0$  mit  $F \in [-1, 1]^{n \times n}$ .

Weiter sieht man in Tabelle 3.1, dass die größeren Netzwerke mit 100 und 200 Agenten bei den kleineren Konvergenzschwellen  $e = 10^{-10}$  und  $e = 10^{-100}$  wesentlich weniger Update-Schritte zum Erreichen des Grenzwertes benötigen als das Netzwerk mit 10 Agenten. Dennoch wird für die Untersuchung des Einflusses von  $p$  und von  $\lambda$  in Tabelle 3.2 die Konvergenzschwelle  $e = 10^{-10}$  verwendet, da bei einer größeren

	(b) $p = 0,5$			(c) $\lambda = 0,5$		
	$\lambda = 0,25$	$\lambda = 0,5$	$\lambda = 0,75$	$p = 0,1$	$p = 0,5$	$p = 0,9$
$n = 10$	49,25	75,32	154,00	87,57	75,32	55,17
$n = 100$	24,02	42,65	95,04	60,55	42,6	40,20
$n = 200$	22,16	40,49	91,34	50,46	40,49	38,96

Tabelle 3.2.: Durchschnittliche Anzahl an Update-Schritten für unterschiedliche  $p$  und  $\lambda$  bei  $e = 10^{-10}$

Zahl von Update-Schritten die Unterschiede durch Veränderungen von  $p$  und  $\lambda$  besser sichtbar sind.

Tabelle 3.2 zeigt, dass Systeme für kleine  $\lambda$  schneller konvergieren als für große  $\lambda$ . Dies war zu erwarten, da kleinere Trägheitswerte den Agenten erlauben, sich schneller anzupassen.

Nicht ganz so eindeutig sind die Ergebnisse für unterschiedliche  $p$ . Weniger dichte Graphen mit  $p = 0,1$  benötigen mehr Update-Schritte als Graphen mit  $p = 0,5$ . Zwischen  $p = 0,5$  und  $p = 0,9$  ist der Unterschied nicht mehr so groß. Wahrscheinlich gibt es einen Grenzwert an Kanten, ab dem ein Graph stark genug vernetzt ist, damit die Meinungen ähnlich schnell konvergieren. Für das kleine Netzwerk mit 10 Knoten scheint dieser Grenzwert erst bei einer größeren Anzahl von Kanten erreicht zu werden. Dies könnte auch der Grund für das deutlich langsamere Konvergenzverhalten des kleinen Netzwerks in Tabelle 3.1 sein.

In Anhang A.2.2 finden sich Tabellen mit weiteren Ergebnissen. Zusätzlich zu den hier bereits vorgestellten Ergebnissen wurde auch die Varianz der Update-Schritte bestimmt, um einen Eindruck von der Streuung um den Durchschnitt zu erhalten. Dabei zeigte sich, dass vor allem bei dem kleinen Netzwerk mit 10 Knoten die Ergebnisse stark streuen, während die größeren Netzwerke mit 100 und 200 Knoten wenig streuen, also jeweils ähnlich schnell konvergieren. Bei allen Netzwerken nimmt die Streuung ab, je dichter die Graphen sind, und zu, wenn  $e$  kleiner wird.

### 3.4. Simulation

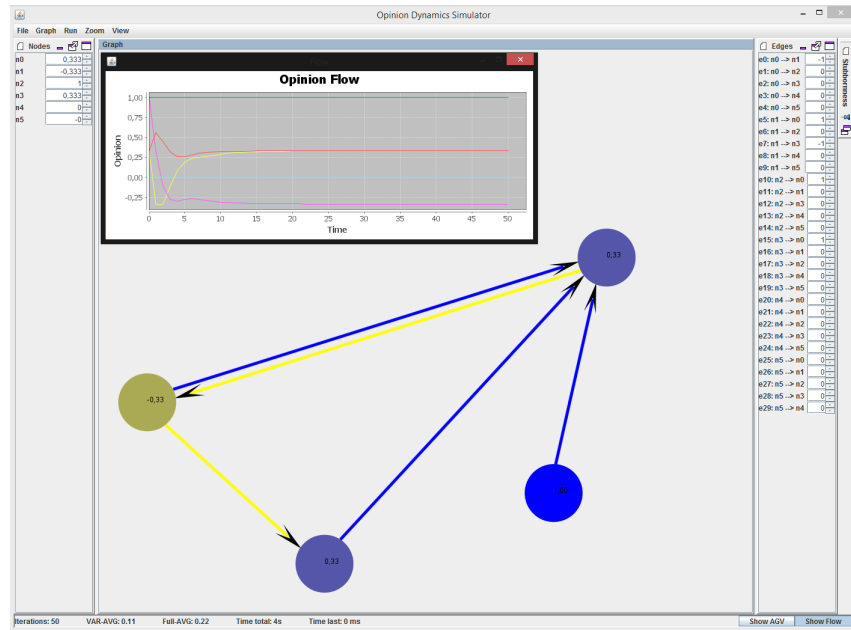


Abbildung 3.8.: Opinion Dynamics Simulator

Im Rahmen dieser Arbeit wurde ein Programm zur grafischen Darstellung des Meinungsflusses angefertigt. Das Programm ist in Java<sup>9</sup> geschrieben, und verwendet die Programmbibliotheken JFreeChart<sup>10</sup> für Diagramme und Docking Frames<sup>11</sup> für die grafische Benutzeroberfläche.

Das Programm kann Graphen, die im GraphML<sup>12</sup> Format vorliegen, importieren (vgl. Abbildung 3.9). Dies erlaubt unter anderem den Import von in visone<sup>13</sup> erstellten oder bearbeiteten Graphen. Dabei kann ausgewählt werden, ob zusätzlich zu den Knoten und Kanten weitere in der GraphML Datei vorhandene Werte für die Knoten, Kanten oder Trägheit importiert werden sollen. Liegen die Werte für die Knoten oder Kanten noch nicht im Bereich  $[-1, 1]$  vor, ist es möglich, wie in Kapitel 3 auf Seite 12 beschrieben, eine untere und obere Grenze für die Normierung der Werte auf  $[-1, 1]$  anzugeben. Gibt es dennoch zu große oder zu kleine Werte, werden diese auf 1 bzw.  $-1$  gesetzt, um korrekte Simulationen zu gewährleisten.

<sup>9</sup>Weitere Informationen zu Java finden sich in Java ist eine Insel, Ullenboom (2007).

<sup>10</sup>Weitere Informationen zu JFreeChart finden sich in The JFreeChart Class Library, Gilbert (2008).

<sup>11</sup>Weitere Informationen zu Docking Frames finden sich in DockingFrames 1.1.1 - Common, Sigg (2012a) und in DockingFrames 1.1.1 - Core, Sigg (2012b).

<sup>12</sup>Graph Markup Language (GraphML), Tam (2013), Kapitel 16

<sup>13</sup>Weitere Informationen zu visone finden sich unter <http://visone.info/html/about.html>.

Die Farben der Kanten und Knoten entsprechen ihrem Wert. Dabei kann zwischen vier Farbschemata gewählt werden: Rot-Grün, Rot-Gelb, Gelb-Blau und Grau. Der Farbverlauf, der dem Wert der Knoten und Kanten entspricht, wird dabei dadurch erzeugt, dass ein oder mehrere RGB-Werte<sup>14</sup> sich abhängig vom Knoten- bzw. Kantenwert über das gesamte Spektrum oder auch nur einen Teil des Spektrums bewegen. Dabei können in Java die Werte für R, G und B auch zwischen 0.0 und 1.0 angegeben werden, anstatt wie häufig üblich zwischen 0 und 255.

In dieser Arbeit wird für die Grafiken das Gelb-Blau Farbschema verwendet. Hier gilt für einen Wert  $x$  die Formel  $(R, G, B) = (\frac{1-x}{2}, \frac{1-x}{2}, \frac{1+x}{2})$ . Für  $x = 0$  erhält man  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ . Sind bei RGB alle drei Komponenten gleich, gibt es einen Grau-Farbton. Für den Wert  $x = 0$  werden Knoten und Kanten daher grau. Für  $x = 1$  ist das Ergebnis  $(0, 0, 1)$ , es wird also nur die blaue Komponente verwendet. Knoten und Kanten mit  $x = 1$  werden daher blau eingefärbt. Für  $x = -1$  erhält man  $(1, 1, 0)$ . Es wird also die rote und die grüne Komponente verwendet. Das Mischen von Rot und Grün ergibt Gelb. Die Farben der Knoten und Kanten bewegen sich daher von Gelb über Grau nach Blau.

Je nach Farbschema sind bestimmte Werte nur schwer zu identifizieren oder unterscheiden. So kann es für große Graphen hilfreich sein, das Grauschema zu verwenden, bei dem der Farbverlauf von Weiß nach Schwarz über unterschiedlich helle Grautöne verläuft. Zusätzlich ist es möglich, die Werte der Knoten und Kanten im Graphen anzeigen zu lassen (Abbildung 3.10).

Um die Simulation beobachten zu können, kann angegeben werden, wie viele Millisekunden zwischen zwei Update-Schritten gewartet werden soll. Zudem kann die maximale Anzahl an Update-Schritten festgelegt werden. Ein vorzeitiger manueller Stopp ist jederzeit möglich.

Abbildung 3.10 zeigt einen stabilen Zustand des Graphen aus Abschnitt 3.1, der nach 35 Update-Schritten erreicht wurde. Die Meinungen haben sich zu einem Fixpunkt entwickelt, der genau die in Abschnitt 3.2 erarbeiteten Eigenschaften besitzt.

Die unbeeinflusste Gruppe  $G2$  besitzt sowohl positive als auch negative Kanten. Da die Produkte der Kantengewichte der Zyklen auf  $G2$  positiv sind, hat sich ein Bi-Konsens gebildet. Dabei haben Knoten, zwischen denen eine positive Kante existiert, jeweils denselben Wert. Knoten, zwischen denen eine negative Kante existiert, haben den betragsmäßig gleichen entgegengesetzten Wert.

Für die Gruppe  $G1$ , die von den trägen Knoten  $T$  und einem Knoten von  $G2$  beeinflusst wird, zeigt sich eine Meinungsfragmentierung auf vier unterschiedliche Meinungen. Auf der Gruppe  $G3$ , die von einem trägen Knoten und einem Brückenknoten beeinflusst wird, gibt es eine Meinungsfragmentierung auf drei unterschiedli-

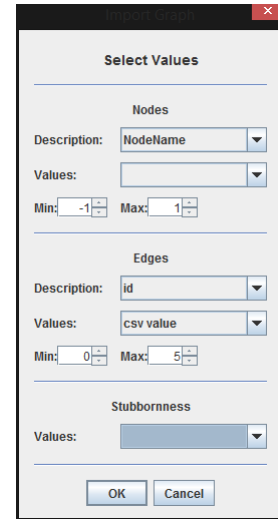


Abbildung 3.9.: Import

<sup>14</sup>Weitere Informationen zu RGB finden sich in color index, Krause (2010).

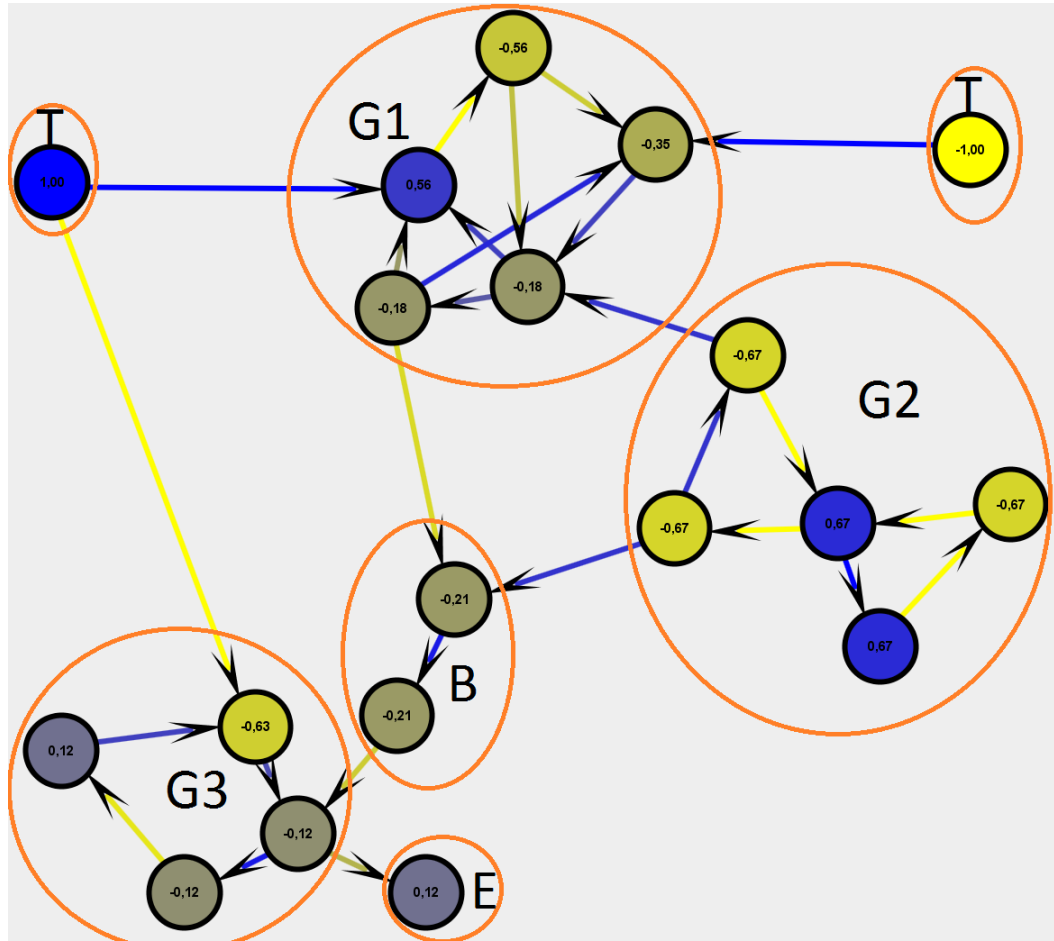


Abbildung 3.10.: Simulationsergebnis für den Graphen aus 3.1

che Meinungen. Hier ist es interessant zu sehen, dass Knoten einer Gruppe, die nicht von außen und nur von einem Knoten der Gruppe beeinflusst werden, bei einer positiven Kante genau dieselbe Meinung und bei einer negativen Kante die betragsmäßig gleiche entgegengesetzte Meinung annehmen.

Die Brückenknoten  $B$  verhalten sich wie erwartet. Der erste Knoten bildet seine Meinung auf Basis der Beeinflussung durch jeweils einen Knoten aus Gruppe  $G1$  und Gruppe  $G2$  und gibt diese Meinung dann an den zweiten Brückenknoten weiter, der durch die positive Kante zwischen beiden Brückenknoten genau die Meinung des ersten übernimmt. Der zweite Brückenknoten beeinflusst mit dieser Meinung dann wiederum Gruppe  $G3$ .

Zuletzt nimmt der Endknoten  $E$ , der durch einen Knoten aus Gruppe  $G3$  negative beeinflusst wird, dessen gegenteilige betragsmäßig gleiche Meinung an.

Zusätzlich zur Anzeige des Graphen gibt es im Programm auch die Möglichkeit den Meinungsverlauf anzuzeigen. Abbildung 3.11 zeigt den Meinungsverlauf bei der

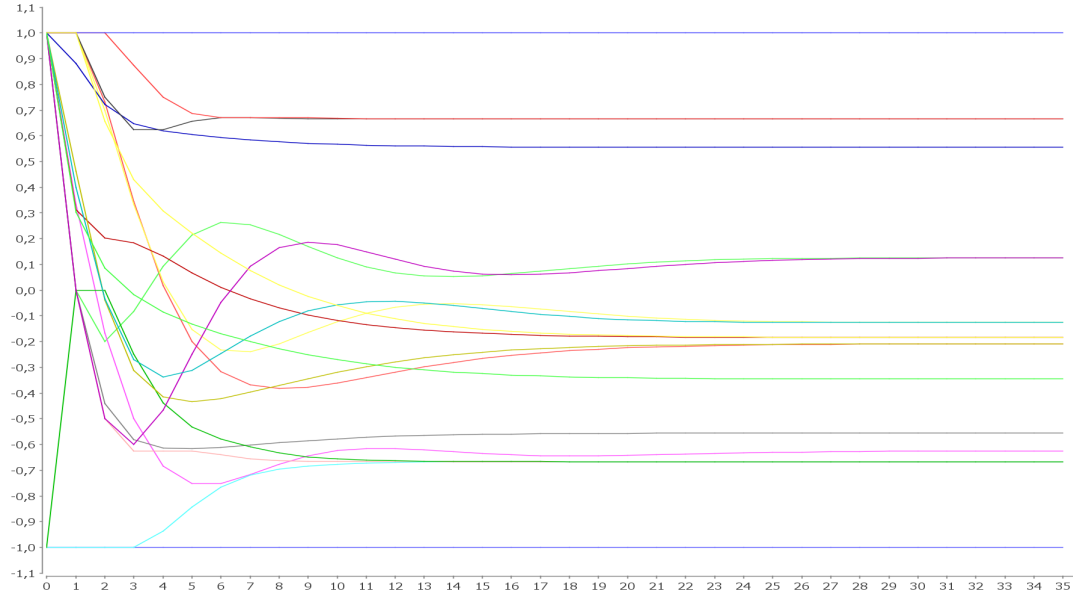


Abbildung 3.11.: Meinungsverlauf der Entstehung des Meinungsbildes in Abbildung 3.10

Entwicklung des stabilen Zustands in Abbildung 3.10.

Um einen aussagekräftigen Meinungsverlauf zu erhalten, wurde für alle Knoten ein Startwert mit Betrag 1 gewählt. Die trägen Knoten besitzen ihren Startwert im stabilen Zustand immer noch. Dies wird auch aus dem Plot durch die horizontalen Kurven bei  $-1$  und  $1$  ersichtlich.

Zwei weitere Knoten aus Gruppe  $G2$  bekamen den Startwert  $-1$  zugewiesen, da die Meinungen der Gruppe gegen  $0$  konvergieren, wenn alle Knoten der Gruppe den Startwert  $1$  besitzen.

Abbildung 3.11 zeigt, dass es einige Update-Schritte dauern kann, bis Meinungsänderungen weiter entfernte Knoten erreichen und diese ihre Meinung ändern. So weicht der letzte nicht träge Knoten erst im vierten Zeitschritt von  $-1$  ab.

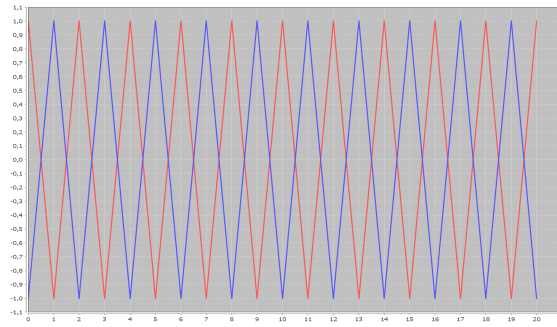
Auch ist ersichtlich, dass die einzelnen Meinungsverläufe im Allgemeinen nicht monoton sind.

Abbildung 3.12 zeigt, anhand des schon im Abschnitt 3.3 betrachteten Beispiels 3.3.1 mit zwei Agenten, Meinungsverläufe für unterschiedliche  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$ . Für die Kanten zwischen den Agenten gilt  $\mu(2, 1) = \mu(1, 2) = 1$ . Als Startwert werden  $o_1 = 1$  und  $o_2 = -1$  verwendet.

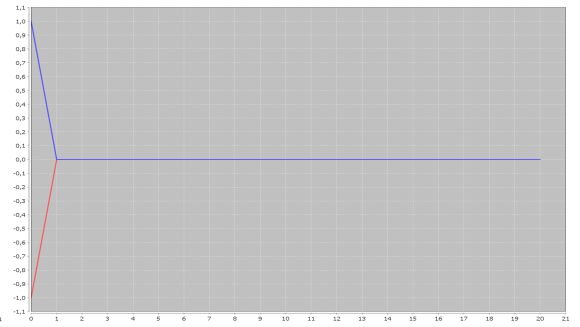
Wie erwartet divergieren die Meinungen für  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ , zu sehen in Abbildung 3.12a.

Abbildung 3.12b zeigt den Fall  $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ . Hier wird bereits im ersten Zeitschritt der Fixpunkt  $o_1 = o_2 = 0$  erreicht.

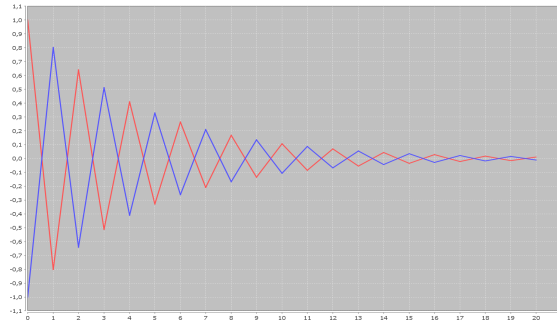
Abbildung 3.12c und Abbildung 3.12d zeigen ebenfalls Konvergenz gegen  $o_1 = o_2 = 0$ , da aber in beiden Fällen  $\lambda_1 + \lambda_2 \neq 1$  gilt, wird der Grenzwert nicht erreicht.



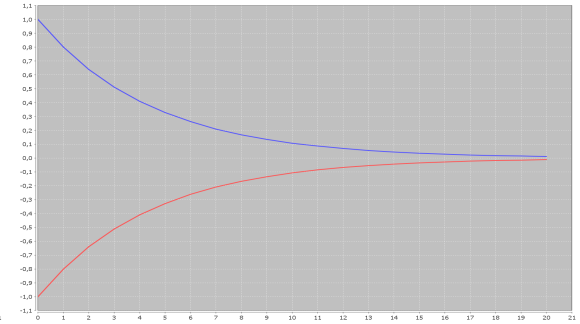
(a)  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$



(b)  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0,5$



(c)  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0,1$



(d)  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0,9$

Abbildung 3.12.: Zwei Agenten,  $\mu(1,2) = \mu(2,1) = 1$ ,  $o_1 = 1$ ,  $o_2 = -1$

In Abbildung 3.12c ist  $\lambda_1 + \lambda_2 = 0,2 < 1$ , daher ist der Meinungsverlauf von  $o_1$  und  $o_2$  nicht monoton.

In Abbildung 3.12d hingegen gilt  $\lambda_1 + \lambda_2 = 1,8 > 1$  und der Meinungsverlauf ist jeweils monoton.

Der Einfachheit halber wurden nur gleiche Trägheitswerte für  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  betrachtet. Werden für  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  unterschiedliche Werte verwendet, gelten dieselben Kriterien ( $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ ,  $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ ,  $\lambda_1 + \lambda_2 < 1$ ,  $\lambda_1 + \lambda_2 > 1$ ), aber der Fixpunkt ist im Allgemeinen nicht  $o_1 = o_2 = 0$ .

## 4. Fazit

In dieser Arbeit wurde ein Modell zur Beschreibung von lokalen Meinungsdynamiken vorgestellt, das eine Erweiterung des klassischen Modells<sup>1</sup> darstellt. Die mittels agentenbasierter Modellierung definierte Update-Funktion  $F_g$ , die die Meinungen der Agenten im nächsten Zeitschritt unter Berücksichtigung ihres lokalen Umfelds bestimmt, lässt sich als Matrix schreiben, und man erhält die Gleichung  $O_{t+1} = F_g O_t$ . Während die Matrix  $A$  des klassischen Modells zeilenstochastisch ist, sind im Gegensatz dazu in  $F_g$  negative Werte erlaubt, um Ablehnung zu modellieren. Das klassische Modell ist daher ein Spezialfall des hier vorgestellten Modells.

Für die Update-Funktion  $F$  der nicht trägen Agenten besitzt das hier behandelte Modell die Form  $O_{t+1} = FO_t + c$ . Diese erinnert an das Basismodell<sup>2</sup>. Auch hier gilt der Unterschied, dass in  $F$  negative Werte möglich sind, während  $A$  eine zeilenstochastische Matrix ist. Die Anfangsmeinungen  $x(0)$ , die einen starken Einfluss auf die Meinungsentwicklung beim Basismodell haben, entsprechen dem Vektor  $c$ , der den Einfluss der trägen Agenten beim hier vorgestellten Modell zeigt. Dies verdeutlicht nochmals den starken Einfluss der trägen Agenten auf die Meinungsbildung.

Aufgrund der beschriebenen Ähnlichkeiten gelten für das Modell die Eigenschaften des klassischen Modells und des Basismodells, falls das zugrunde liegende Netzwerk nur positiven Kanten besitzt.

Von den aktuellen Standardmodellen im Bereich der Meinungsdynamiken, dem Bounded Confidence und dem Relative Agreement Modell, unterscheidet sich das hier entwickelte Modell stark in seinen Eigenschaften. Betrachtet man den einfachen Fall einer Gruppe von Agenten, die von trägen Agenten beeinflusst wird, dann nehmen die Agenten dieser Gruppe für  $t \rightarrow \infty$  Meinungen an, die nur von den Anfangsmeinungen der trägen Agenten und den Kantengewichten abhängen. Die Anfangsmeinungen der nicht trägen Agenten spielen keine Rolle. Im Gegensatz dazu zählen beim Bounded Confidence Modell bzw. Relative Agreement Modell die Meinungen aller Agenten und ihr Vertrauensgrad bzw. Unsicherheitswert.

Es ist ebenfalls möglich, dass ein Agent durch die negativen Kanten die gegenteilige Meinung zu der des beeinflussenden Agenten annehmen kann. Beim Bounded Confidence Modell und beim Relative Agreement Modell hingegen nähern sich die Meinungen von beeinflussten und beeinflussenden Agenten an.

Diese Eigenschaften des hier vorgestellten Modells bewirken allerdings auch, dass sich extreme Meinungen nur auf speziellen Netzwerken durchsetzen können.

Es wurde gezeigt, dass bei Simulationen die Meinungen gegen Fixpunkte konvergieren können. Dabei wird zwischen zwei Fällen unterschieden: beeinflusste Grup-

---

<sup>1</sup>Das klassische Modell ist charakterisiert durch die Gleichung  $x(t+1) = Ax(t)$ .

<sup>2</sup>Das Basismodell ist charakterisiert durch die Gleichung  $x(t+1) = Gx(0) + (I - G)Ax(t)$ .



pen und unbeeinflusste Gruppen. Auf unbeeinflussten Gruppen liegen im Fixpunkt Konsense oder Bi-Konsense vor. Ein spezieller Konsens ist die triviale Lösung, die immer ein Fixpunkt für Gruppen ohne Beeinflussung von außen ist. Für beeinflusste Gruppen existiert im Fixpunkt im Allgemeinen eine Fragmentierung der Meinungen. Diese Ergebnisse bieten die Möglichkeit, ausgehend von der Graphstruktur vorherzusagen, wie sich die Meinungen entwickeln können und auf welchen Gruppen eines Netzwerks Konsense, Bi-Konsense oder Meinungsfragmentierungen möglich sind.

Vorteilhaft ist ebenfalls die Modellierung mit Hilfe eines Digraphen, dessen Knoten die Agenten und dessen Kanten die Beziehungen zwischen den Agenten darstellen. Dadurch kann, wie in Abschnitt 3.4 gezeigt, der Meinungsverlauf schrittweise auf einem Digraphen dargestellt werden. Ein im Rahmen dieser Arbeit entwickeltes Programm ermöglicht diese Visualisierung. Dabei werden den Knoten und Kanten, ihren Meinungen bzw. Kantengewichten entsprechend, unterschiedliche Farben gegeben.

Die Ergebnisse zu den Gruppen (Abschnitt 3.1) und den Fixpunkten (Abschnitt 3.2) haben gezeigt, dass das Modell vor allem für Netzwerke interessant ist, die träge Agenten besitzen und/oder sich in Gruppen unterteilen lassen. Besteht das Netzwerk nur aus einer Gruppe und gibt es keine trägen Agenten, ist die triviale Lösung eine häufige, aber nicht wünschenswerte Lösung einer Simulation, da sie für Gleichgültigkeit aller Agenten steht. Häufig bestehen Netzwerke aber nur aus einer Gruppe, da zwischen zwei Personen meistens eine Beeinflussung in beide Richtungen existiert, auch wenn diese nicht in beide Richtungen groß sein muss. Hier kann es helfen, die Kantendichte zu reduzieren. Dies ist zum Beispiel möglich, indem erst Beeinflussungen ab einer bestimmten Stärke  $\epsilon$  zugelassen werden. Kanten mit  $\mu(j, i) \in [-\epsilon, \epsilon]$  werden auf 0 gesetzt. Zudem kann das Modell gut für Netzwerke verwendet werden, denen bereits hierarchische Digraphen zugrunde liegen.

Weiterführende Forschung wird zeigen, ob sich die Vermutung 3.2.21 bewahrheitet. Gilt die Vermutung 3.2.21, dann gibt es für beeinflusste Gruppen genau einen Fixpunkt, gegen den der Meinungsverlauf konvergiert und der direkt berechnet werden kann, indem man das lineare Gleichungssystem, das im Fixpunkt gilt, löst. Eine wiederholte Ausführung der Update-Funktion ist nicht notwendig.<sup>3</sup>

Es ist nicht absehbar, ob dies auch für die Meinungsentwicklung auf Gruppen ohne Beeinflussung möglich ist, sofern dort Fixpunkte abseits der trivialen Lösung existieren. Ein Zusammenhang zwischen den Anfangsmeinungen und dem Fixpunkt, gegen den das Modell dann konvergiert, wurde noch nicht entdeckt.

Offen ist auch, ob sich mit Hilfe der Zyklen des Digraphen herausfinden lässt, wann bei unbeeinflussten Gruppen im Fixpunkt ein Konsens oder Bi-Konsens abseits der trivialen Lösung existiert. Hierfür ist ein formaler Nachweis von Vermutung 3.2.18 notwendig.

Auch auf den Zusammenhang zwischen Konvergenz und Trägheitswerten bezogen gibt es noch offene Fragen. So lässt sich wahrscheinlich die Forderung, dass bei unbeeinflussten Gruppen für alle Trägheitswerte  $\lambda > 0$  gelten muss, abschwächen.

---

<sup>3</sup>Das Lösen des linearen Gleichungssystems entspricht vom Aufwand her ungefähr dem Ausführen von zwei Update-Schritten.

# A. Anhang

## A.1. Graphentheorie<sup>1</sup>

### Definition A.1.1. (Digraph)

Ein *gerichteter Graph* oder *Digraph*  $D$  ist ein Paar  $D = (V, E)$  bestehend aus einer nicht leeren endlichen Menge  $V$  und einer Menge  $E$  von geordneten Paaren  $(v, w)$  mit  $v, w$  aus  $V$ .

Die Elemente von  $V$  heißen *Knoten*, die Elemente von  $E$  heißen (*gerichtete*) *Kanten*.

### Definition A.1.2. (gewichteter Digraph)

Ein *gewichteter Digraph* ist ein Triple  $D = (V, E, \mu)$  bestehend aus einem Digraphen  $D = (V, E)$  und einer *Gewichtsfunktion*  $\mu : E \rightarrow \mathbb{R}$ , die jeder gerichteten Kante  $(v, w)$  zwischen zwei Knoten  $v, w \in V$  ein Kantengewicht  $\mu(v, w) \in \mathbb{R}$  zuordnet.

### Definition A.1.3. (Weg, Pfad, Zyklus)

Ein *Weg* ist eine wechselnde Folge  $W = v_1 e_1 v_2 \dots v_{k-1} e_{k-1} v_k$  von Knoten  $v_i \in V$  und Kanten  $e_i \in E$  eines Digraphen  $D = (V, E)$ , wobei gilt  $e_i = (v_i, v_{i+1})$ . Es genügt die Folge der Kanten  $(e_1, \dots, e_k)$  oder, bei einem gewichteten Digraphen, die Folge der Knoten  $(v_1, \dots, v_k)$ , anzugeben.

Ein *Pfad* ist ein Weg, bei dem alle Knoten paarweise verschieden sind.

Ein *Zyklus* ist ein Weg  $(v_1, \dots, v_k)$  mit  $v_1 = v_k$ .

### Definition A.1.4. (kürzester Weg)

Für zwei Knoten  $v_1, v_2$ , zwischen denen es mindestens einen Weg  $(v_1, \dots, v_2)$  gibt, ist  $d(v_1, v_2)$  die Länge des kürzesten Wegs zwischen beiden Knoten. Dabei entspricht  $d$  der Länge der passierten Kanten.

### Definition A.1.5. (Schleife)

Als Schleife wird eine Kante  $(i, i)$  von einem Knoten  $v_i$  zu sich selbst bezeichnet.

### Definition A.1.6. (Teilgraph)

Ein Digraph  $U = (V', E')$  ist ein *Teilgraph* vom Digraph  $D = (V, E)$ , wenn gilt  $V' \subseteq V$  und  $E' \subseteq E$  und für alle  $e \in E'$  mit  $e = (v, w)$  die Knoten  $v, w$  aus  $V'$  sind.

---

<sup>1</sup> Ähnliche Definitionen finden sich in *Digraphs Theory, Algorithms and Applications*, Bang-Jensen u. Gutin (2002) und *Graphen, Netzwerke und Algorithmen*, Jungnickel (1994).

**Definition A.1.7.** (induzierter Teilgraph)

Sei  $U = (V', E')$  ein *Teilgraph* des Digraphen  $D = (V, E)$ . Enthält  $U$  alle Kanten zwischen den Knoten von  $V'$ , die auch in  $D$  vorhanden sind, dann wird  $U$  als der durch  $V'$  *induzierte Teilgraph* von  $D$  bezeichnet. Eine übliche, hier auch verwendete, Notation ist:  $U = D[V']$

**Definition A.1.8.** ((schwach) zusammenhängend)

Ein Digraph  $D = (V, E)$  ist *schwach zusammenhängend*, falls der zugehörige ungerichtete Graph zusammenhängend ist. Daher existiert zu je zwei beliebigen Knoten  $v, w \in V$  ein Weg von  $v$  nach  $w$  auf dem ungerichteten Graphen  $G = (V, E')$ , der entsteht, wenn man jede gerichtete Kante aus  $D$  durch eine ungerichtete ersetzt.

**Definition A.1.9.** (stark zusammenhängend)

Ein Digraph  $D = (V, E)$  ist *stark zusammenhängend*, falls es zu beliebigen paarweise verschiedenen Knoten  $v, w \in V$  einen Weg von  $v$  nach  $w$  und einen Weg von  $w$  nach  $v$  gibt. Ein Digraph  $D$  mit nur einem Knoten ( $|V| = 1$ ) ist immer stark zusammenhängend.

**Definition A.1.10.** (starke Zusammenhangskomponente)

Als *starke Zusammenhangskomponente* eines Digraphen  $D$  wird ein maximaler, stark zusammenhängender Teilgraph  $U \subset D$  bezeichnet.

**Definition A.1.11.** (Dichte)

Sei  $D = (V, E)$  ein Digraph. Dann wird

$$\frac{|E|}{|V| \cdot |V - 1|}$$

als Dichte des Digraphen  $D$  bezeichnet.

## A.2. Konvergenzgeschwindigkeit

### A.2.1. Programmcode für Matlab<sup>2</sup>

```
1  clear all;
2
3  %% Konstanten
4  % Anzahl der Agenten
5  n = 200;
6  % Konvergenzschwelle
7  e = 0.1;
8  %e = 10^-100;
9  % Dichte Adjazenzmatrix
10 p = 0.5;
11 % Maximale Anzahl von Iterationen
12 maxIter = 100000;
13 % Trägheit
14 T = 0.5;
15 % Anzahl der Durchläufe
16 runs = 100000;
17
18 %% Simulation
19 x=zeros(runs,1);
20 for foo=1:runs
21     % A transponierte Adjazenzmatrix
22     A = zeros(n);
23     for i = 1:n
24         for j = 1:i-1
25             if rand<=p; A(i,j)=2*round(rand*100)/100-1; end;
26         end
27         for j=i+1:n
28             if rand<=p; A(i,j)=2*round(rand*100)/100-1; end;
29         end
30     end
31     % Trägheit
32     L = T*ones(n,1);
33     % Zufällige Trägheit
34     %L = round(rand(n,1).*100)/100; % rounding allows 0 and 1
35     % Meinungen (zufällig)
36     O = 2*rand(n,1)-ones(n,1);
37     % Normierungsfaktoren
38     for i = 1:n
```

---

<sup>2</sup><http://www.mathworks.de/products/matlab/>

```

39         if sum(abs(A(i,:))) == 0
40             eta(i) = 0;
41         else
42             eta(i) = 1/sum(abs(A(i,:)));
43         end
44     end
45     % Update Matrix
46     F = diag(L)+(eye(n)-diag(L))*diag(eta)*A;
47     % Zähler
48     i = 0;
49     % Abbruchbedingung
50     while norm(F*0-0) > e
51         0 = F*0;
52         i = i + 1;
53         % Update Schritte beschränken
54         if i > maxIter
55             disp('max iter reached');
56             break;
57         end
58     end
59     x(foo)=i;
60 end
61 % Ergebnis
62 disp([num2str(n) ' ', num2str(e) ' ', num2str(p) ' ', num2str(T)
63 ' ', num2str(mean(x)) ' ', num2str(var(x))]);

```

### A.2.2. Ergebnisse

Ergebnisse des Matlab Programms zur Konvergenz für maximal 100000 Iterationen und jeweils 100000 Durchläufe.

Tabelle A.1.:  $n = 10$

$n$	$e$	$p$	$\lambda$	$\oslash$	$\sigma^2$
10	0,1	0,5	0,5	4,8784	0,89326
10	0,1	0,5	0,5	4,8836	0,90873
10	0,01	0,5	0,25	8,7025	3,3999
10	0,01	0,9	0,5	9,4432	1,5304
10	0,01	0,5	0,5	11,7133	5,658
10	0,01	0,1	0,5	13,0349	27,3285
10	0,01	0,1	0,5	13,0273	27,765
10	0,01	0,5	0,75	19,5554	13,4574
10	$10^{-10}$	0,01	0,5	35,8351	19,4885
10	$10^{-10}$	0,01	0,5	35,8634	102,5538
10	$10^{-10}$	0,5	0,25	49,2521	365,1931
10	$10^{-10}$	1	0,5	53,1976	46,4573
10	$10^{-10}$	1	0,5	53,3361	46,7512
10	$10^{-10}$	0,9	0,5	55,1744	60,9766
10	$10^{-10}$	0,9	0,5	55,2049	61,3073
10	$10^{-10}$	0,5	0,5	75,3231	1075,1571
10	$10^{-10}$	0,1	0,5	87,5728	103253,679
10	$10^{-10}$	0,5	0,75	154,0014	4006,451
10	$10^{-100}$	0,5	0,5	801,9815	112296,2438

Tabelle A.2.:  $n = 100$ 

$n$	$e$	$p$	$\lambda$	$\oslash$	$\sigma^2$
100	0, 1	0, 5	0, 5	5, 8605	0, 12
100	0, 1	0, 5	0, 5	5, 8624	0, 11869
100	0, 01	0, 5	0, 25	5, 9909	0, 0090644
100	0, 01	1	0, 5	9, 0044	0, 004341
100	0, 01	0, 9	0, 5	9, 0137	0, 013562
100	0, 01	0, 5	0, 5	9, 5609	0, 24629
100	0, 01	0, 5	0, 5	9, 5588	0, 24657
100	0, 01	0, 1	0, 5	12, 4479	0, 39114
100	0, 01	0, 5	0, 75	18, 8234	0, 18522
100	$10^{-10}$	0, 5	0, 25	24, 0186	0, 25429
100	$10^{-10}$	1	0, 5	39, 8613	0, 28841
100	$10^{-10}$	0, 9	0, 5	40, 2028	0, 31291
100	$10^{-10}$	0, 5	0, 5	42, 6524	0, 52934
100	$10^{-10}$	0, 1	0, 5	60, 5486	7, 3407
100	$10^{-10}$	0, 5	0, 75	95, 0435	1, 8498
100	$10^{-10}$	0, 01	0, 5	113, 2545	51066, 2923
100	$10^{-100}$	0, 5	0, 5	422, 4308	38, 7557

Tabelle A.3.:  $n = 200$ 

$n$	$e$	$p$	$\lambda$	$\oslash$	$\sigma^2$
200	0, 1	0, 5	0, 5	6	0
200	0, 1	0, 5	0, 5	6	0
200	0, 01	0, 5	0, 25	5, 9988	0, 0012185
200	0, 01	0, 9	0, 5	9, 0137	0, 013562
200	0, 01	0, 5	0, 5	9, 9628	0, 035789
200	0, 01	0, 1	0, 5	11, 2804	0, 20198
200	0, 01	0, 5	0, 75	19, 6727	0, 22018
200	$10^{-10}$	0, 5	0, 25	22, 1604	0, 13498
200	$10^{-10}$	1	0, 5	38, 7833	0, 17089
200	$10^{-10}$	0, 9	0, 5	38, 9622	0, 058164
200	$10^{-10}$	0, 5	0, 5	40, 48	0, 25598
200	$10^{-10}$	0, 1	0, 5	50, 4556	0, 89031
200	$10^{-10}$	0, 5	0, 75	91, 3386	0, 52628
200	$10^{-10}$	0, 01	0, 5	163, 9112	28107, 5826
200	$10^{-100}$	0, 5	0, 5	393, 8589	6, 7598
200	$10^{-100}$	0, 5	0, 75	917, 0466	25, 6265



# Literaturverzeichnis

- [Tam 2013] TAMASSIA, Roberto (Hrsg.): *Handbook of Graph Drawing and Visualization*. <http://cs.brown.edu/~rt/gdhandbook/>. Version: 2013. – online version
- [Bang-Jensen u. Gutin 2002] BANG-JENSEN, Jørgen ; GUTIN, Gregory: *Digraphs Theory, Algorithms and Applications*. Springer, 2002. – I–XXII, 1–754 S. – ISBN 978–1–85233–611–0
- [Deffuant u. a. 2002] DEFFUANT, Guillaume ; AMBLARD, Frédéric ; WEISBUCH, Gérard ; FAURE, Thierry: How can extremism prevail? A study based on the relative agreement interaction model. In: *Journal of Artificial Societies and Social Simulation* 5 (2002), Nr. 4
- [DeGroot 1974] DEGROOT, Morris H.: Reaching a Consensus. In: *Journal of the American Statistical Association* 69 (1974), Nr. 345, pp. 118–121. <http://www.jstor.org/stable/2285509>. – ISSN 01621459
- [Friedkin u. Johnsen 1990] FRIEDKIN, Noah E. ; JOHNSEN, Eugene C.: Social Influence and Opinions. In: *Journal of Mathematical Sociology* 15 (1990), S. 193–205
- [Gilbert 2008] GILBERT, D.: *The JFreeChart class library version 1.0.9: Developer's guide*. Hertfordshire : Refinery Limited, 2008
- [Hegselmann u. Krause 2002] HEGSELMANN, Rainer ; KRAUSE, Ulrich: Opinion Dynamics and Bounded Confidence, Models, Analysis and Simulation. In: *Journal of Artificial Societies and Social Simulation* 5 (2002), Nr. 3, 2. <http://jasss.soc.surrey.ac.uk/5/3/2.html>
- [Jungnickel 1994] JUNGNICHEL, Dieter: *Graphen, Netzwerke und Algorithmen* (3. Aufl.). BI-Wissenschaftsverlag, 1994. – 1–704 S. – ISBN 978–3–411–14263–7
- [Kacperski u. Holyst 2000] KACPERSKI, Krzysztof ; HOLYST, Janusz A.: Phase transitions as a persistent feature of groups with leaders in models of opinion formation. In: *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 287 (2000), Nr. 3–4, 631 – 643. <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0378437100003988>
- [Kosub 2012] KOSUB, Sven: *Network Dynamics: Opinion Dynamics*. University Lecture. <http://www.inf.uni-konstanz.de/algo/lehre/ws12/nd/nd.pdf>. Version: 11 2012

- [Krause 2010] KRAUSE, J.: *Color Index - Revised Edition*. F+W Media, 2010 <http://books.google.de/books?id=q0MeQAAACAAJ>. – ISBN 9781440302626
- [Sigg 2012a] SIGG, Benjamin: *DockingFrames 1.1.1 - Common*. online. [http://dock.javaforge.com/dockingFrames\\_v1.1.1/common.pdf](http://dock.javaforge.com/dockingFrames_v1.1.1/common.pdf). Version: 7 2012
- [Sigg 2012b] SIGG, Benjamin: *DockingFrames 1.1.1 - Core*. online. [http://dock.javaforge.com/dockingFrames\\_v1.1.1/common.pdf](http://dock.javaforge.com/dockingFrames_v1.1.1/common.pdf). Version: 8 2012
- [Tarjan 1972] TARJAN, Robert: Depth-first search and linear graph algorithms. In: *SIAM Journal on Computing* 1 (1972), Nr. 2, S. 146–160
- [Ullenboom 2007] ULLENBOOM, Christian: *Java ist auch eine Insel*. 6., aktualisierte und erweiterte Auflage. Bonn : Galileo Computing, 2007 <http://www.galileocomputing.de/openbook/javainsel6/>

# Abbildungsverzeichnis

2.1. Bounded Confidence Modell, Hegselmann u. Krause (2002) . . . . .	7
2.2. Meinungssegmente, Kosub (2012) . . . . .	8
2.3. Relative Agreement Modell, Deffuant u. a. (2002) . . . . .	9
3.1. Beeinflussung zwischen zwei Agenten . . . . .	11
3.2. Gruppen eines Digraphen . . . . .	19
3.3. Äquivalenzklassen . . . . .	20
3.4. Meinungsbildung auf einer Gruppe ohne träge Agenten . . . . .	29
3.5. Unbeeinflusste Gruppe . . . . .	30
3.6. Beeinflusste Gruppe . . . . .	34
3.7. Konvergenzbeispiel mit zwei Agenten . . . . .	36
3.8. Opinion Dynamics Simulator . . . . .	41
3.9. GraphML Import . . . . .	42
3.10. Simulationsergebnis für den Graphen aus 3.1 . . . . .	43
3.11. Meinungsverlauf der Entstehung des Meinungsbildes in Abbildung 3.10	44
3.12. Meinungsverlauf für zwei Agenten . . . . .	45

# Abkürzungsverzeichnis

$F_g$	Abbildungsmatrix zu $\Phi$
$M$	Maximale Meinung einer Gruppe von Agenten
$m_i$	Lokales Maximum des Agenten $i$
$t$	Zeitschritt
$U(i)$	Umgebung eines Agenten $i$
$\Phi$	globale Update-Funktion
$f_g$	globale Update-Funktion für einen Agenten
$g$	Hilfsfunktion für die globale Update-Funktion
$\mu(j, i)$	Stärke der Beeinflußung von Agent $i$ durch Agent $j$
$D$	Digraph
$E$	Kantenmenge
$V$	Knotenmenge
$\lambda$	Trägheitsvektor mit den Trägheitswerten $\lambda_i$
$k$	Anzahl nicht träger Agenten
$O$	Meinungsvektor mit den Meinungen $o_i$
$O'$	Meinungsvektor der nicht trägen Agenten
$\phi$	variabler Anteil der Update-Funktion für nicht trägen Agenten
$c$	konstanter Anteil der Update-Funktion für nicht trägen Agenten
$f$	$\phi$ für einen Agenten
$\Lambda$	Trägheitsmatrix
$F$	Abbildungsmatrix zu $\phi$
$N$	Normierungsmatrix
$A$	transponierte Adjazensmatrix von $D$