
Starrkörpersimulation

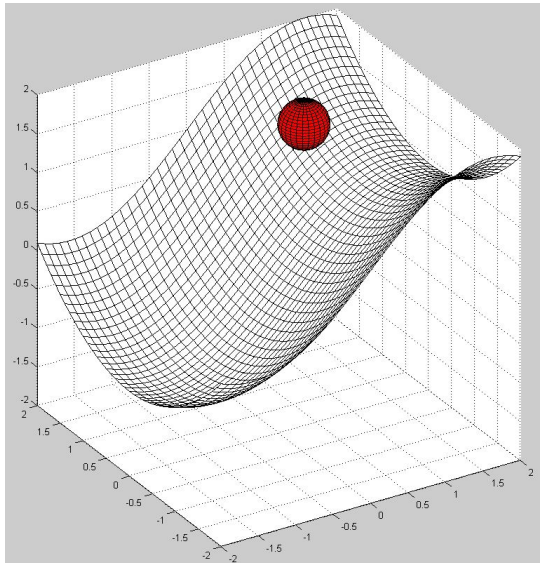
Kugel in glatter Landschaft

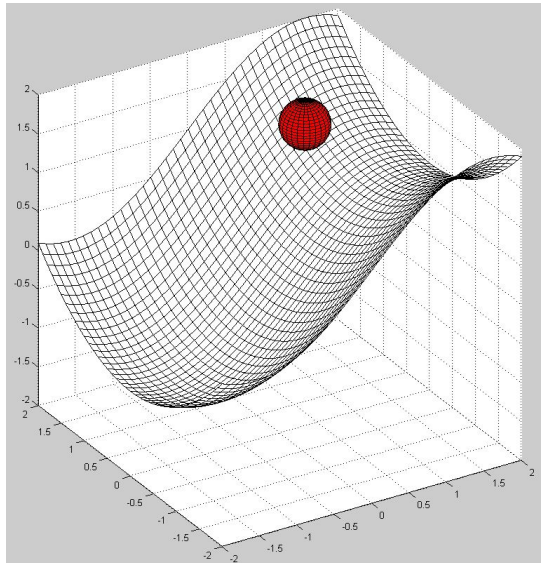
Alexander Artiga Gonzalez

Universität Konstanz

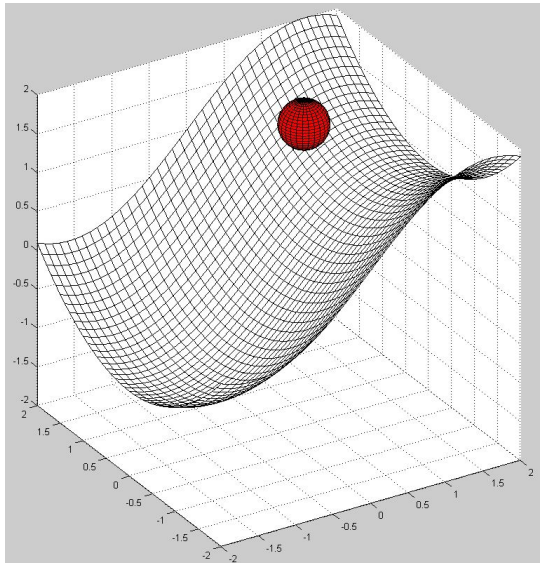
Februar 2011

1. Problemstellung
2. Starrkörperbewegungen
3. Differentialgleichungen
4. Programmierung
5. Munte-Kaas

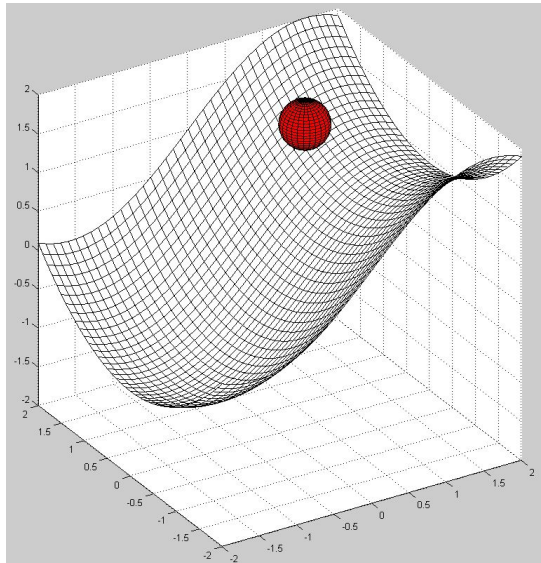




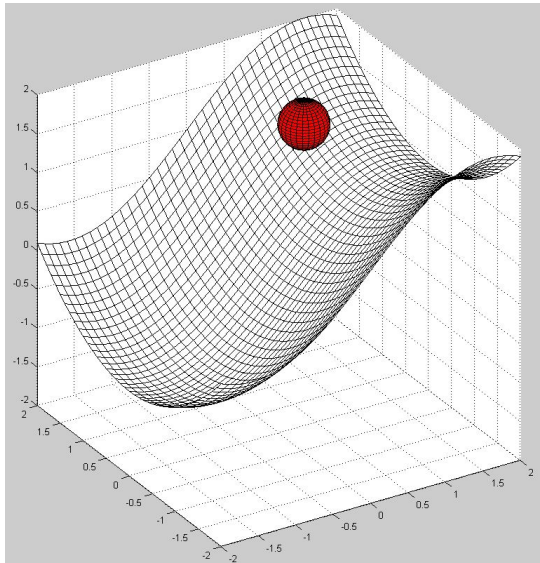
- Glatte Landschaftsoberfläche



- ▶ Glatte Landschaftsoberfläche
- ▶ Kugel kann nicht rutschen



- ▶ Glatte Landschaftsoberfläche
- ▶ Kugel kann nicht rutschen
- ▶ Keine Reibung



- ▶ Glatte Landschaftsoberfläche
- ▶ Kugel kann nicht rutschen
- ▶ Keine Reibung
- ▶ Kugel ist ein Starrkörper

Abstandserhaltend:

Eine Abbildung $L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ heißt abstandserhaltend, falls für alle $x, y \in \mathbb{R}^3$ gilt:

$$\|L(x) - L(y)\|_2 = \|x - y\|_2$$

Abstandserhaltend:

Eine Abbildung $L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ heißt abstandserhaltend, falls für alle $x, y \in \mathbb{R}^3$ gilt:

$$\|L(x) - L(y)\|_2 = \|x - y\|_2$$

Winkelerhaltend:

Eine Abbildung $L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ heißt winkelerhaltend, falls für alle $x, y \in \mathbb{R}^3$ gilt:

$$\|L(x)\|_2 \|L(y)\|_2 \langle L(x), L(y) \rangle = \|x\|_2 \|y\|_2 \langle x, y \rangle$$

Abstandserhaltend:

Eine Abbildung $L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ heißt abstandserhaltend, falls für alle $x, y \in \mathbb{R}^3$ gilt:

$$\|L(x) - L(y)\|_2 = \|x - y\|_2$$

Winkelerhaltend:

Eine Abbildung $L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ heißt winkelerhaltend, falls für alle $x, y \in \mathbb{R}^3$ gilt:

$$\|L(x)\|_2 \|L(y)\|_2 \langle L(x), L(y) \rangle = \|x\|_2 \|y\|_2 \langle x, y \rangle$$

Orientierungserhaltend:

Eine Abbildung $L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ heißt orientierungserhaltend, falls für alle $x_0, x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}^3$ gilt:

$$O(L(x_0), L(x_1), L(x_2), L(x_3)) = O(x_0, x_1, x_2, x_3) \text{ mit} \\ O(x_0, x_1, x_2, x_3) := \text{sign}(\det(x_1 - x_0, \dots, x_3 - x_0))$$

Lemma 1

Sei $L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ abstandserhaltend mit $L(0) = 0$. Dann ist L winkelerhaltend.



Lemma 1

Sei $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ abstandserhaltend mit $L(0) = 0$. Dann ist L winkelerhaltend.

Beweis:

Für $x, y \in \mathbb{R}^3$ gilt:

$$\begin{aligned}\|L(x) - L(y)\|_2^2 &= \langle L(x) - L(y), L(x) - L(y) \rangle = \\ &= \|L(x)\|_2^2 + \|L(y)\|_2^2 - 2 \langle L(x), L(y) \rangle\end{aligned}$$

Lemma 1

Sei $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ abstandserhaltend mit $L(0) = 0$. Dann ist L winkelerhaltend.

Beweis:

Für $x, y \in \mathbb{R}^3$ gilt:

$$\begin{aligned}\|L(x) - L(y)\|_2^2 &= \langle L(x) - L(y), L(x) - L(y) \rangle = \\ &= \|L(x)\|_2^2 + \|L(y)\|_2^2 - 2 \langle L(x), L(y) \rangle\end{aligned}$$

$$\|x - y\|_2^2 = \langle x - y, x - y \rangle = \|x\|_2^2 + \|y\|_2^2 - 2 \langle x, y \rangle$$

Lemma 1

Sei $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ abstandserhaltend mit $L(0) = 0$. Dann ist L winkelerhaltend.

Beweis:

Für $x, y \in \mathbb{R}^3$ gilt:

$$\begin{aligned}\|L(x) - L(y)\|_2^2 &= \langle L(x) - L(y), L(x) - L(y) \rangle = \\ &= \|L(x)\|_2^2 + \|L(y)\|_2^2 - 2 \langle L(x), L(y) \rangle\end{aligned}$$

$$\|x - y\|_2^2 = \langle x - y, x - y \rangle = \|x\|_2^2 + \|y\|_2^2 - 2 \langle x, y \rangle$$

$$L \text{ abstandserhaltend} \implies \|L(x) - L(y)\|_2 = \|x - y\|_2$$

Lemma 1

Sei $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ abstandserhaltend mit $L(0) = 0$. Dann ist L winkelerhaltend.

Beweis:

Für $x, y \in \mathbb{R}^3$ gilt:

$$\begin{aligned}\|L(x) - L(y)\|_2^2 &= \langle L(x) - L(y), L(x) - L(y) \rangle = \\ &= \|L(x)\|_2^2 + \|L(y)\|_2^2 - 2 \langle L(x), L(y) \rangle\end{aligned}$$

$$\|x - y\|_2^2 = \langle x - y, x - y \rangle = \|x\|_2^2 + \|y\|_2^2 - 2 \langle x, y \rangle$$

L abstandserhaltend $\implies \|L(x) - L(y)\|_2 = \|x - y\|_2$

Sei $y = 0$, da $L(0) = 0$ folgt: $\|L(x)\|_2 = \|x\|_2$ für alle $x \in \mathbb{R}^3$

Lemma 1

Sei $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ abstandserhaltend mit $L(0) = 0$. Dann ist L winkelerhaltend.

Beweis:

Für $x, y \in \mathbb{R}^3$ gilt:

$$\begin{aligned}\|L(x) - L(y)\|_2^2 &= \langle L(x) - L(y), L(x) - L(y) \rangle = \\ &= \|L(x)\|_2^2 + \|L(y)\|_2^2 - 2 \langle L(x), L(y) \rangle\end{aligned}$$

$$\|x - y\|_2^2 = \langle x - y, x - y \rangle = \|x\|_2^2 + \|y\|_2^2 - 2 \langle x, y \rangle$$

$$L \text{ abstandserhaltend} \implies \|L(x) - L(y)\|_2 = \|x - y\|_2$$

Sei $y = 0$, da $L(0) = 0$ folgt: $\|L(x)\|_2 = \|x\|_2$ für alle $x \in \mathbb{R}^3$
 $\implies \langle L(x), L(y) \rangle = \langle x, y \rangle \implies L$ ist winkelerhaltend.

Lemma 2

Sei $L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ abstands- und winkelerhaltend. Dann ist L linear.



Lemma 2

Sei $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ abstands- und winkelerhaltend. Dann ist L linear.

Beweis:

Sei $k \in \mathbb{N}$ beliebig. Dann gilt für beliebige $\alpha_i \in \mathbb{R}$ und $x_i \in \mathbb{R}^3$,
 $i = (1, \dots, k)$:

$$\begin{aligned} & \left\langle L\left(\sum_{i=1}^k \alpha_i x_i\right) - \sum_{i=1}^k \alpha_i L(x_i), L(u) \right\rangle = \\ &= \left\langle L\left(\sum_{i=1}^k \alpha_i x_i\right), L(u) \right\rangle - \sum_{i=1}^k \alpha_i \langle L(x_i), L(u) \rangle \\ &= \left\langle \sum_{i=1}^k \alpha_i x_i, u \right\rangle - \sum_{i=1}^k \alpha_i \langle x_i, u \rangle = 0 \end{aligned}$$

für beliebige $u \in \mathbb{R}^3 \implies L\left(\sum_{i=1}^k \alpha_i x_i\right) = \sum_{i=1}^k \alpha_i L(x_i)$

L linear.

Lemma 3

Sei $L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ eine abstands- und orientierungserhaltende lineare Abbildung. Dann gilt $L \in SO(3)$.

Lemma 3

Sei $L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ eine abstands- und orientierungserhaltende lineare Abbildung. Dann gilt $L \in SO(3)$.

Beweis:

Es gilt:

$$O(0, Le_1, Le_2, Le_3) = \text{sign}(\det(L) \cdot O(0, e_1, e_2, e_3))$$

$$\text{Da } O(0, e_1, e_2, e_3) = \pm 1 \Rightarrow \text{sign}(\det L) = 1$$

$$\Rightarrow L \in SO(3)$$

Starrkörperbewegung in einem festen Zeitpunkt:



Starrkörperbewegung in einem festen Zeitpunkt:

Sei $M : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $x \mapsto M(x)$ abstands- und orientierungserhaltend.

Sei $L(x) := M(x) - M(0) \implies M(x) = L(x) + M(0)$.

Starrkörperbewegung in einem festen Zeitpunkt:

Sei $M : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $x \mapsto M(x)$ abstands- und orientierungserhaltend.

Sei $L(x) := M(x) - M(0) \implies M(x) = L(x) + M(0)$.

\implies Eine Starrkörperbewegung $M(x)$ lässt sich als Rotation ($L(x)$) und Translation ($M(0)$) beschreiben.

Starrkörperbewegung in einem festen Zeitpunkt:

Sei $M : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $x \mapsto M(x)$ abstands- und orientierungserhaltend.

Sei $L(x) := M(x) - M(0) \implies M(x) = L(x) + M(0)$.

\implies Eine Starrkörperbewegung $M(x)$ lässt sich als Rotation ($L(x)$) und Translation ($M(0)$) beschreiben.

Starrkörperbewegung:

Starrkörperbewegung in einem festen Zeitpunkt:

Sei $M : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $x \mapsto M(x)$ abstands- und orientierungserhaltend.

Sei $L(x) := M(x) - M(0) \implies M(x) = L(x) + M(0)$.

\implies Eine Starrkörperbewegung $M(x)$ lässt sich als Rotation ($L(x)$) und Translation ($M(0)$) beschreiben.

Starrkörperbewegung:

Eine Abbildung $M : (t, x) \mapsto M(t, x) := M_t(x)$ wird als Starrkörperbewegung bezeichnet, falls sie für alle $t \in [0, T]$ abstands- und orientierungserhaltend ist. $M_t(x)$ gibt also die Position von x zum Zeitpunkt t an.

Starrkörperbewegung in einem festen Zeitpunkt:

Sei $M : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $x \mapsto M(x)$ abstands- und orientierungserhaltend.

Sei $L(x) := M(x) - M(0) \implies M(x) = L(x) + M(0)$.

\implies Eine Starrkörperbewegung $M(x)$ lässt sich als Rotation ($L(x)$) und Translation ($M(0)$) beschreiben.

Starrkörperbewegung:

Eine Abbildung $M : (t, x) \mapsto M(t, x) := M_t(x)$ wird als Starrkörperbewegung bezeichnet, falls sie für alle $t \in [0, T]$ abstands- und orientierungserhaltend ist. $M_t(x)$ gibt also die Position von x zum Zeitpunkt t an.

Zu solch einer Abbildung M existieren eine Abbildung $R : [0, T] \rightarrow SO(3)$ und eine Abbildung $C : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^3$, so dass gilt: $M_t(x) = R(t)x + c(t)$.

$$M_t(x) = R(t)x + c(t) \implies \frac{d}{dt} M_t(x) = \dot{R}x + \dot{c}$$

$$M_t(x) = R(t)x + c(t) \implies \frac{d}{dt} M_t(x) = \dot{R}x + \dot{c}$$

$$R \in SO(3) \implies RR^T = I$$

$$\frac{d}{dt} RR^T = 0$$

$$\implies \dot{R}R^T + R\dot{R}^T = \dot{R}R^T + (\dot{R}R^T)^T = 0$$

$$\implies \dot{R}R^T = -(\dot{R}R^T)^T$$



$$M_t(x) = R(t)x + c(t) \implies \frac{d}{dt} M_t(x) = \dot{R}x + \dot{c}$$

$$R \in SO(3) \implies RR^T = I$$

$$\frac{d}{dt} RR^T = 0$$

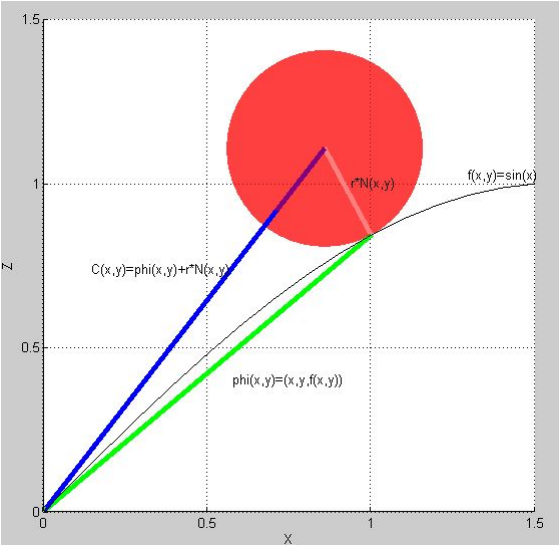
$$\implies \dot{R}R^T + R\dot{R}^T = \dot{R}R^T + (\dot{R}R^T)^T = 0$$

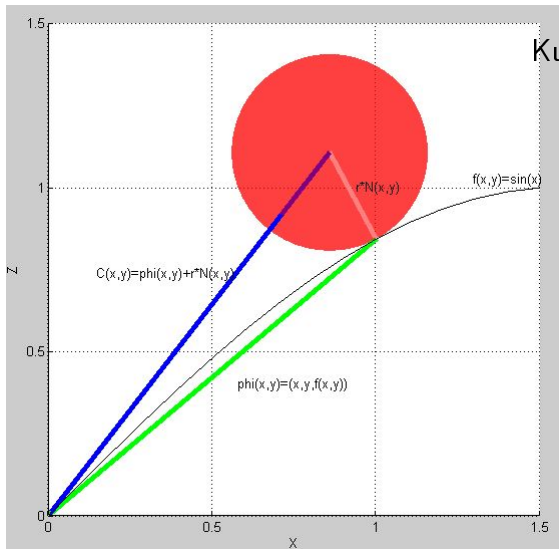
$$\implies \dot{R}R^T = -(\dot{R}R^T)^T$$

Sei $A = \dot{R}R^T$ dann folgt $A = -A^T \implies A$ ist schiefssymmetrisch und es gilt:

$$\dot{R}(t) = A(\omega(t))R(t)$$

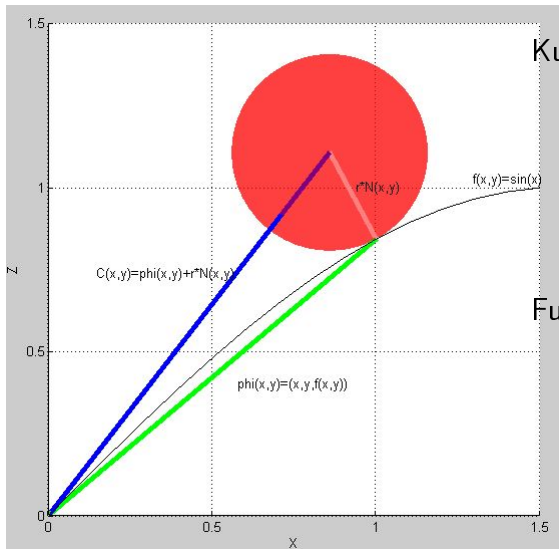
$$\text{mit } A(\omega) = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} \text{ schiefssymmetrisch.}$$





Kugel:

- ▶ Referenzkugel:
 $B = B_r(0), r > 0$
- ▶ Masse: $m(B) > 0$ (homogene Massenverteilung)
- ▶ Schwerpunkt: $\bar{x}(B) = 0$
- ▶ Trägheitstensor:
 $T_{\bar{x}}^*(B) = \frac{2}{5} \cdot m(B) \cdot r^2 \cdot I$



Kugel:

- ▶ Referenzkugel:
 $B = B_r(0), r > 0$
- ▶ Masse: $m(B) > 0$ (homogene Massenverteilung)
- ▶ Schwerpunkt: $\bar{x}(B) = 0$
- ▶ Trägheitstensor:
 $T_{\bar{x}}^*(B) = \frac{2}{5} \cdot m(B) \cdot r^2 \cdot I$

Funktionen:

- ▶ Glatte Landschaftsoberfläche:
 $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$
 $(x, y) \mapsto (x, y, f(x, y))$
- ▶ Normalenfeld: $N : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$
 $(x, y) \mapsto \frac{\partial_1 \varphi \times \partial_2 \varphi}{\|\partial_1 \varphi \times \partial_2 \varphi\|}$
- ▶ Mittelpunktssfunktion:
 $C : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$
 $(x, y) \mapsto \varphi(x, y) + rN(x, y)$

Bereits bekannt: $\dot{R}(t) = A(\omega)R(t)$



Bereits bekannt: $\dot{R}(t) = A(\omega)R(t)$

Koordinaten des Berührungspunktes: $\alpha(t) \in \mathbb{R}^2$

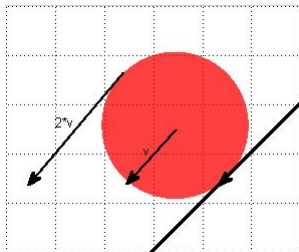
Gesucht: $\dot{\alpha}$



Bereits bekannt: $\dot{R}(t) = A(\omega)R(t)$

Koordinaten des Berührungspunktes: $\alpha(t) \in \mathbb{R}^2$

Gesucht: $\dot{\alpha}$



Schlupffreies Rollen:

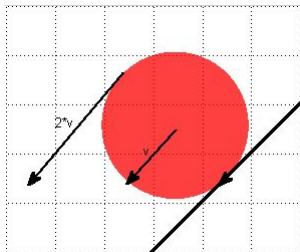
$$\Rightarrow \dot{M}_t(\alpha(t)) = \dot{R}(t)\alpha(t) + \dot{c}(t) = 0$$



Bereits bekannt: $\dot{R}(t) = A(\omega)R(t)$

Koordinaten des Berührungspunktes: $\alpha(t) \in \mathbb{R}^2$

Gesucht: $\dot{\alpha}$



Schlupffreies Rollen:

$$\Rightarrow \dot{M}_t(\alpha(t)) = \dot{R}(t)\alpha(t) + \dot{c}(t) = 0$$

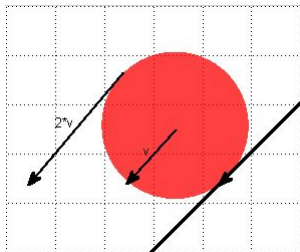
$$\begin{aligned} \dot{c}(t) &= -A(\omega(t))R(t)\alpha(t) = \\ &= -A(\omega(t))(b(t) - c(t)) = A(\omega(t))rN(t) \end{aligned}$$



Bereits bekannt: $\dot{R}(t) = A(\omega)R(t)$

Koordinaten des Berührungspunktes: $\alpha(t) \in \mathbb{R}^2$

Gesucht: $\dot{\alpha}$



Schlupffreies Rollen:

$$\Rightarrow \dot{M}_t(\alpha(t)) = \dot{R}(t)\alpha(t) + \dot{c}(t) = 0$$

$$\begin{aligned} \dot{c}(t) &= -A(\omega(t))R(t)\alpha(t) = \\ &= -A(\omega(t))(b(t) - c(t)) = A(\omega(t))rN(t) \end{aligned}$$

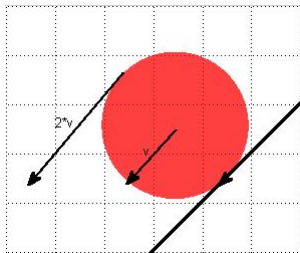
Außerdem: $c(t) = C(\alpha(t))$

$$\Rightarrow \dot{c}(t) = C'(\alpha(t))\dot{\alpha}(t)$$

Bereits bekannt: $\dot{R}(t) = A(\omega)R(t)$

Koordinaten des Berührungspunktes: $\alpha(t) \in \mathbb{R}^2$

Gesucht: $\dot{\alpha}$



Schlupffreies Rollen:

$$\Rightarrow \dot{M}_t(\alpha(t)) = \dot{R}(t)\alpha(t) + \dot{c}(t) = 0$$

$$\begin{aligned} \dot{c}(t) &= -A(\omega(t))R(t)\alpha(t) = \\ &= -A(\omega(t))(b(t) - c(t)) = A(\omega(t))rN(t) \end{aligned}$$

Außerdem: $c(t) = C(\alpha(t))$

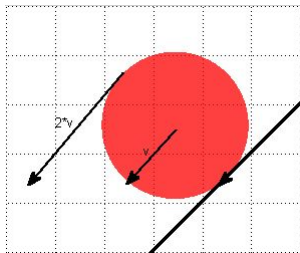
$$\Rightarrow \dot{c}(t) = C'(\alpha(t))\dot{\alpha}(t)$$

Sei $E(\alpha(t)) = C'(\alpha(t))^T C'(\alpha(t))$:

Bereits bekannt: $\dot{R}(t) = A(\omega)R(t)$

Koordinaten des Berührungspunktes: $\alpha(t) \in \mathbb{R}^2$

Gesucht: $\dot{\alpha}$



Schlupffreies Rollen:

$$\Rightarrow \dot{M}_t(\alpha(t)) = \dot{R}(t)\alpha(t) + \dot{c}(t) = 0$$

$$\begin{aligned} \dot{c}(t) &= -A(\omega(t))R(t)\alpha(t) = \\ &= -A(\omega(t))(b(t) - c(t)) = A(\omega(t))rN(t) \end{aligned}$$

Außerdem: $c(t) = C(\alpha(t))$

$$\Rightarrow \dot{c}(t) = C'(\alpha(t))\dot{\alpha}(t)$$

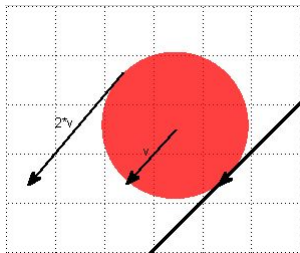
Sei $E(\alpha(t)) = C'(\alpha(t))^T C'(\alpha(t))$:

$$\Rightarrow C'(\alpha(t))^T C'(\alpha(t))\dot{\alpha}(t) = rC'(\alpha(t))^T A(\omega(t))N(\alpha(t))$$

Bereits bekannt: $\dot{R}(t) = A(\omega)R(t)$

Koordinaten des Berührungspunktes: $\alpha(t) \in \mathbb{R}^2$

Gesucht: $\dot{\alpha}$



Schlupffreies Rollen:

$$\Rightarrow \dot{M}_t(\alpha(t)) = \dot{R}(t)\alpha(t) + \dot{c}(t) = 0$$

$$\begin{aligned} \dot{c}(t) &= -A(\omega(t))R(t)\alpha(t) = \\ &= -A(\omega(t))(b(t) - c(t)) = A(\omega(t))rN(t) \end{aligned}$$

Außerdem: $c(t) = C(\alpha(t))$

$$\Rightarrow \dot{c}(t) = C'(\alpha(t))\dot{\alpha}(t)$$

Sei $E(\alpha(t)) = C'(\alpha(t))^T C'(\alpha(t))$:

$$\Rightarrow C'(\alpha(t))^T C'(\alpha(t))\dot{\alpha}(t) = rC'(\alpha(t))^T A(\omega(t))N(\alpha(t))$$

$$\Rightarrow \dot{\alpha}(t) = rE(\alpha(t))^{-1} C'(\alpha(t))^T A(\omega(t))N(\alpha(t))$$

Noch gesucht: ω um $\dot{R}(t) = A(\omega)R(t)$ zu lösen.



Noch gesucht: ω um $\dot{R}(t) = A(\omega)R(t)$ zu lösen.

Aus Impuls-/Drehimpuls folgt:

Noch gesucht: ω um $\dot{R}(t) = A(\omega)R(t)$ zu lösen.

Aus Impuls-/Drehimpuls folgt:

$$\begin{aligned} (T_{\alpha} \dot{\omega}) &= -m(B)A(R\dot{\alpha})A(\omega)R(\bar{x} - \alpha) \\ &\quad - m(B)A(R(\bar{x} - \alpha))(\dot{M}_t(\alpha)) + m(B)A(R(\bar{x} - \alpha))g \end{aligned}$$

Noch gesucht: ω um $\dot{R}(t) = A(\omega)R(t)$ zu lösen.

Aus Impuls-/Drehimpuls folgt:

$$\begin{aligned} (\dot{T}_\alpha \omega) &= -m(B)A(R\dot{\alpha})A(\omega)R(\bar{x} - \alpha) \\ &\quad - m(B)A(R(\bar{x} - \alpha))(\dot{M}_t(\alpha)) + m(B)A(R(\bar{x} - \alpha))g \end{aligned}$$

Mit $(\dot{M}_t(\alpha)) = 0$ (Schlupffreiheit) folgt:

$$(\dot{T}_\alpha \omega) = m(B)A(R(\bar{x} - \alpha))g - m(B)A(R\dot{\alpha})A(\omega)R(\bar{x} - \alpha)$$

Noch gesucht: ω um $\dot{R}(t) = A(\omega)R(t)$ zu lösen.

Aus Impuls-/Drehimpuls folgt:

$$\begin{aligned} (T_{\alpha}\dot{\omega}) &= -m(B)A(R\dot{\alpha})A(\omega)R(\bar{x} - \alpha) \\ &\quad - m(B)A(R(\bar{x} - \alpha))(\dot{M}_t(\alpha)) + m(B)A(R(\bar{x} - \alpha))g \end{aligned}$$

Mit $(\dot{M}_t(\alpha)) = 0$ (Schlupffreiheit) folgt:

$$(T_{\alpha}\dot{\omega}) = m(B)A(R(\bar{x} - \alpha))g - m(B)A(R\dot{\alpha})A(\omega)R(\bar{x} - \alpha)$$

Durch Rechnen erhält man:

$$R\dot{\alpha} = rA(\omega)N(\alpha) - rN'(\alpha) \text{ und } R(\bar{x} - \alpha) = rN(\alpha)$$

Noch gesucht: ω um $\dot{R}(t) = A(\omega)R(t)$ zu lösen.

Aus Impuls-/Drehimpuls folgt:

$$\begin{aligned} (T_{\alpha}\dot{\omega}) &= -m(B)A(R\dot{\alpha})A(\omega)R(\bar{x} - \alpha) \\ &\quad - m(B)A(R(\bar{x} - \alpha))(\dot{M}_t(\alpha)) + m(B)A(R(\bar{x} - \alpha))g \end{aligned}$$

Mit $(\dot{M}_t(\alpha)) = 0$ (Schlupffreiheit) folgt:

$$(T_{\alpha}\dot{\omega}) = m(B)A(R(\bar{x} - \alpha))g - m(B)A(R\dot{\alpha})A(\omega)R(\bar{x} - \alpha)$$

Durch Rechnen erhält man:

$$R\dot{\alpha} = rA(\omega)N(\alpha) - rN'(\alpha) \text{ und } R(\bar{x} - \alpha) = rN(\alpha)$$

$$\implies (T_{\alpha}\dot{\omega}) = m(B)rA(N(\alpha))g - m(B)r^2A(N'(\alpha)\dot{\alpha})A(N(\alpha))\omega$$

Mit $v(t) := T_{\alpha}(t)\omega(t)$ erhält man als dritte Differentialgleichung:

$$\dot{v}(t) = mrA(N(\alpha(t)))g - mr^2A(N'(\alpha(t))\dot{\alpha}(t))A(N(\alpha(t)))\omega(t)$$


Mit $v(t) := T_{\alpha}(t)\omega(t)$ erhält man als dritte Differentialgleichung:
 $\dot{v}(t) = mrA(N(\alpha(t)))g - mr^2A(N'(\alpha(t))\dot{\alpha}(t))A(N(\alpha(t)))\omega(t)$

Differentialgleichungen

- ▶ $\dot{v}(t) = mrA(N(\alpha(t)))g - mr^2A(N'(\alpha(t))\dot{\alpha}(t))A(N(\alpha(t)))\omega(t)$
- ▶ $\dot{\alpha}(t) = rE(\alpha(t))^{-1}C'(\alpha(t))^TA(\omega(t))N(\alpha(t))$
- ▶ $\dot{R}(t) = A(\omega)R(t)$

Mit $v(t) := T_{\alpha}(t)\omega(t)$ erhält man als dritte Differentialgleichung:
 $\dot{v}(t) = mrA(N(\alpha(t)))g - mr^2A(N'(\alpha(t))\dot{\alpha}(t))A(N(\alpha(t)))\omega(t)$

Differentialgleichungen

- ▶ $\dot{v}(t) = mrA(N(\alpha(t)))g - mr^2A(N'(\alpha(t))\dot{\alpha}(t))A(N(\alpha(t)))\omega(t)$
- ▶ $\dot{\alpha}(t) = rE(\alpha(t))^{-1}C'(\alpha(t))^TA(\omega(t))N(\alpha(t))$
- ▶ $\dot{R}(t) = A(\omega)R(t)$

- ▶ GUI-Elemente in Matlab
- ▶ Lösen der Differentialgleichungen mit Runge-Kutta
- ▶ Plotten
- ▶ Speichern/Laden

Mit Hilfe von GUI-Elemente lassen sich über die Oberfläche Daten eingeben und auswerten oder einfach nur Informationen anzeigen.

Iterationen	Total Time:
1000	0
<input type="radio"/> Euler	
Iterationen:	Time Last:
0	0
Funktion:	$\cos(x \cdot \pi + \pi) / 10 - y / 10$

```
ge.euler = uicontrol('sty','ra','ba','w','un','n','FontUnits','normalized',  
'FontSize',0.5,'position',[0 .60 .08 .05],'str','Euler','ca',@eulerChecked);
```

<http://www.mathworks.com/help/techdoc/ref/uicontrol.html>

```

function getFunctions(varargin)
    r = str2double(get(ge.radius,'string'));
    landscape = eval(['@'(x,y)',get(ge.fun,'string')]);
    phi = eval(['@'(x,y)', '[x y landscape(x,y)]']);
    fx = diff(landscape(symx, symy), symx);
    FX = makefun(fx);
    fy = diff(landscape(symx, symy), symy);
    FY = makefun(fy);
    N = eval(['@'(x,y)', '[-FX(x,y) -FY(x,y) 1] ./sqrt((-FX(x,y))^2+(-FY(x,y))^2+1)']);
    C = eval(['@'(x,y)', 'phi(x,y)+r*N(x,y)']);
    dc = jacobian(C(symx, symy)+0*symx,[symx symy]);
    DC = makefun(dc);
    E = eval(['@'(x,y)', 'DC(x,y)' * DC(x,y)']);
    dn = jacobian(N(symx, symy)+0*symx,[symx symy]);
    DN = makefun(dn);
    ref();
end

function f = makefun(s)
[m,n]=size(s);
str = '';
for i=1:m
    for j = 1:n
        str = [str,char(s(i,j))',' ,'];
    end
    str(end)=' ';
end
str = [' ',str,'];
str = ['@'(symx,symy)',str];
f = eval(str);

```

```

%Startwerte hier initialisieren
%Mögliche Tableaus:
%TAB = [1 0 ; 0 1];
TAB = [0 0 0 0 0; 0.5 0.5 0 0 0; 0.5 0 0.5 0 0; 1 0 0 1 0; 0 1/6 1/3 1/3 1/6];
for i=2:n+1
    data(i,:)= data(i-1,:) + h*RKV(@f,data(i-1,:),h,TAB)';
    moveAndDisplData(data,i,t0,t);
end

function V = RKV(fhandel,yi,h,A)

%berechnet die Verfahrensfunktion V für ein RKV mit Tableau A an der Stelle
%yi von der Funktion f=fhandel mit Schrittweite h
%beachte: keine \explizites Auftreten der Zeit in f berücksichtigt!
yi = yi';
s = length(A(:,1))-1; %Stufe bestimmen

L(:,1) = fhandel(yi); %K1 initialisieren

for j = 2:s
    for i = 1:length(yi)
        z(i) = A(j,2:j)*L(i,:)';
    end
    L(:,j) = fhandel(yi+h*z'); %Iterationsschritt
end

for i = 1:length(yi)
    V(i) = A(s+1,2:s+1)*L(i,:)'; %Verfahrensfunktion
end
V=V';

```

```

function [ dx ] = f(x)
%f
global A r N E m g DC DN;
R = [x(1) x(2) x(3) ; x(4) x(5) x(6) ; x(7) x(8) x(9)];
v = [x(10) x(11) x(12)]';
alpha = [x(13) x(14)];
T = R*(2/5*m*r^2*eye(3))*R'-m*r^2*A(N(alpha(1),alpha(2)))^2;
w = T\v;
dR = (A(w)*R)';
dalpha = r*(E(alpha(1),alpha(2))\ (DC(alpha(1),alpha(2))'*A(w)*N(alpha(1),alpha(2)))');
dv = m*r*A(N(alpha(1),alpha(2)))*g-m*r^2*A(DN(alpha(1),alpha(2))*dalpha)*A(N(alpha(1),alpha(2)))*w;
dx = [(dR(:))' dv' dalpha']';
end

```

```
hold off;  
v = str2double(get(ge.smin,'string')):0.1:str2double(get(ge.smax,'string'));  
[X,Y] = meshgrid(v);  
Z = landscape(X, Y);  
mesh(X, Y, Z);  
hold on;  
NoV=26; %gerade!  
[Xs Ys Zs]=sphere(NoV);  
ge.ball=patch(surf2patch(Xs, Ys, Zs, Zs));  
ge.refvertices=get(ge.ball,'Vertices')';  
set(ge.ball,'Vertices',(r*R*ge.refvertices)'+ repmat(mid,size(ge.refvertices,2),1));
```

```
%save configuration
function saveConf(varargin)
    %write data to var
    var.r = get(ge.radius,'string');
%... fill v here
    var.max = get(ge.smax,'string');
    %save var to file
    uisave('var','examples/settings');
end

%load configuration
function loadConf(varargin)
    %load var
    [FileName,PathName] = uigetfile('examples/*.mat','Choose settings');
    file=[PathName FileName];
    load(file, 'var');
    %get data from var
    set(ge.radius,'string',var.r);
%... get all values here
    set(ge.smax,'string', var.max);
    %update Functions and Plot
    opengl();zbuffer();painters();
    getFunctions();
end
```

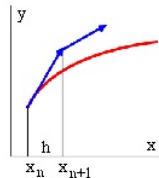

Rotationsmatrix ist nicht stabil. Es kann passieren, dass die Kugel sich verformt.
Grund?



Rotationsmatrix ist nicht stabil. Es kann passieren, dass die Kugel sich verformt.

Grund? - Die berechnete Matrix R ist nicht mehr in $SO(3)$.

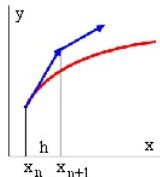
$$R(t_{n+1}) = R(t_n) + \Delta t A(\omega(t_n)) R(t_n) \\ = \underbrace{(I + \Delta t A(\omega(t_n)))}_{\text{Keine Drehung!}} R(t_n)$$



Rotationsmatrix ist nicht stabil. Es kann passieren, dass die Kugel sich verformt.

Grund? - Die berechnete Matrix R ist nicht mehr in $SO(3)$.

$$R(t_{n+1}) = R(t_n) + \Delta t A(\omega(t_n)) R(t_n) \\ = \underbrace{(I + \Delta t A(\omega(t_n)))}_{\text{Keine Drehung!}} R(t_n)$$

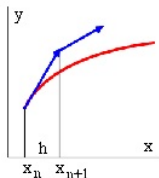


Lösungsidee: $(I + \Delta t A(\omega(t_n))) \approx \exp(\Delta t A(\omega(t_n))) \in SO(3)$

Rotationsmatrix ist nicht stabil. Es kann passieren, dass die Kugel sich verformt.

Grund? - Die berechnete Matrix R ist nicht mehr in $SO(3)$.

$$R(t_{n+1}) = R(t_n) + \Delta t A(\omega(t_n)) R(t_n) \\ = \underbrace{(I + \Delta t A(\omega(t_n)))}_{\text{Keine Drehung!}} R(t_n)$$

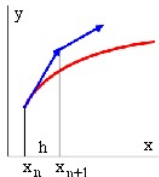


Lösungsidee: $(I + \Delta t A(\omega(t_n))) \approx \exp(\Delta t A(\omega(t_n))) \in SO(3)$
 $\exp(\Delta t A(\omega(t_n))) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (\Delta t A(\omega(t_n)))^k =$
 $I + \Delta t A(\omega(t_n)) + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!} (\Delta t A(\omega(t_n)))^k$

Rotationsmatrix ist nicht stabil. Es kann passieren, dass die Kugel sich verformt.

Grund? - Die berechnete Matrix R ist nicht mehr in $SO(3)$.

$$R(t_{n+1}) = R(t_n) + \Delta t A(\omega(t_n)) R(t_n) \\ = \underbrace{(I + \Delta t A(\omega(t_n)))}_{\text{Keine Drehung!}} R(t_n)$$



Keine Drehung!

Lösungsidee: $(I + \Delta t A(\omega(t_n))) \approx \exp(\Delta t A(\omega(t_n))) \in SO(3)$

$$\exp(\Delta t A(\omega(t_n))) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (\Delta t A(\omega(t_n)))^k =$$

$$I + \Delta t A(\omega(t_n)) + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!} (\Delta t A(\omega(t_n)))^k$$

$$\exp(A) \exp(A)^T = \exp(A) \exp(A^T) = \exp(A) \exp(-A) = \exp(0) =$$

$$I \implies \exp(A) \in SO(3)$$

Berechne $R(t_{n+1})$, $w(t_{n+1})$, $\alpha(t_n + 1)$ aus $R(t_n)$, $w(t_n)$, $\alpha(t_n)$

1. Schritt: Löse AWP auf $[t_n, t_{n+1}]$

- ▶ $\dot{u} = [I - \frac{1}{12}A(u)(6I + A(u))]\omega$
- ▶ $\dot{v} = mrA(N(\alpha)g - mr^2A(N'(\alpha)\dot{\alpha})A(N(\alpha))\omega$
- ▶ $\dot{\alpha} = rE(\alpha)^{-1}C'(\alpha)^T A(\omega)N(\alpha)$

mit Anfangswerten:

$u(t_n) = 0$, $v(t_n) = T_a(t_n)\omega(t_n)$, $\alpha(t_n)$ gegeben.

$(T_a = mr^2(\frac{2}{5}I - A(N(\alpha))^2))$

Berechne $R(t_{n+1})$, $w(t_{n+1})$, $\alpha(t_n + 1)$ aus $R(t_n)$, $w(t_n)$, $\alpha(t_n)$

1. Schritt: Löse AWP auf $[t_n, t_{n+1}]$

- ▶ $\dot{u} = [I - \frac{1}{12}A(u)(6I + A(u))]\omega$
- ▶ $\dot{v} = mrA(N(\alpha)g - mr^2A(N'(\alpha)\dot{\alpha})A(N(\alpha))\omega$
- ▶ $\dot{\alpha} = rE(\alpha)^{-1}C'(\alpha)^T A(\omega)N(\alpha)$

mit Anfangswerten:

$u(t_n) = 0$, $v(t_n) = T_a(t_n)\omega(t_n)$, $\alpha(t_n)$ gegeben.

$$(T_a = mr^2(\frac{2}{5}I - A(N(\alpha))^2))$$

2. Schritt:

$$w(t_{n+1}) = T_a(t_{n+1})^{-1}v(t_{n+1})$$

$$R(t_{n+1}) = \exp(A(u(t_{n+1})))R(t_n)$$

$\exp(A(z))$ lässt sich mit Hilfe der Rodriguez-Formel berechnen:

$$\exp(A(z)) = \cos(\|z\|)I + \sin(\|z\|)A\left(\frac{z}{(\|z\|)}\right) + \frac{1 - \cos(\|z\|)}{\|z\|^2}zz^T$$



$\exp(A(z))$ lässt sich mit Hilfe der Rodriguez-Formel berechnen:

$$\exp(A(z)) = \cos(\|z\|)I + \sin(\|z\|)A\left(\frac{z}{(\|z\|)}\right) + \frac{1 - \cos(\|z\|)}{\|z\|^2} zz^T$$

Beweis:

Für Potenzen von A gilt:

$$A(\omega)^2 = \omega\omega^T - \|\omega\|^2 I$$

$$A(\omega)^{2k+1} = (-1)^k \|\omega\|^2 k A(\omega), \quad (k \geq 0)$$

$$A(\omega)^{2k} = (-1)^{k-1} \|\omega\|^{2k-2} A(\omega), \quad (k \geq 1)$$

$\exp(A(z))$ lässt sich mit Hilfe der Rodriguez-Formel berechnen:

$$\exp(A(z)) = \cos(\|z\|)I + \sin(\|z\|)A\left(\frac{z}{(\|z\|)}\right) + \frac{1-\cos(\|z\|)}{\|z\|^2}zz^T$$

Beweis:

Für Potenzen von A gilt:

$$A(\omega)^2 = \omega\omega^T - \|\omega\|^2 I$$

$$A(\omega)^{2k+1} = (-1)^k \|\omega\|^2 k A(\omega), \quad (k \geq 0)$$

$$A(\omega)^{2k} = (-1)^{k-1} \|\omega\|^{2k-2} A(\omega), \quad (k \geq 1)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \exp(A(z)) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A(z)^k = \\ I + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(2j)!} A(z)^{2j} + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2j+1)!} A(z)^{2j+1} &= \\ 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{(2j)!} \|z\|^{2j-2} A(z)^2 + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j+1)!} \|z\|^{2j} A(z) &= \\ \frac{zz^T}{\|z\|^2} + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{(2j)!} \|z\|^{2j-2} A(z)^2 + \sin\|z\| A\left(\frac{z}{\|z\|}\right) &= \\ \cos(\|z\|)I + \sin(\|z\|)A\left(\frac{z}{(\|z\|)}\right) + \frac{1-\cos(\|z\|)}{\|z\|^2}zz^T \end{aligned}$$