Münze in glatter Landschaft

Formeln

Alexander Artiga Gonzalez

13. Juli 2015

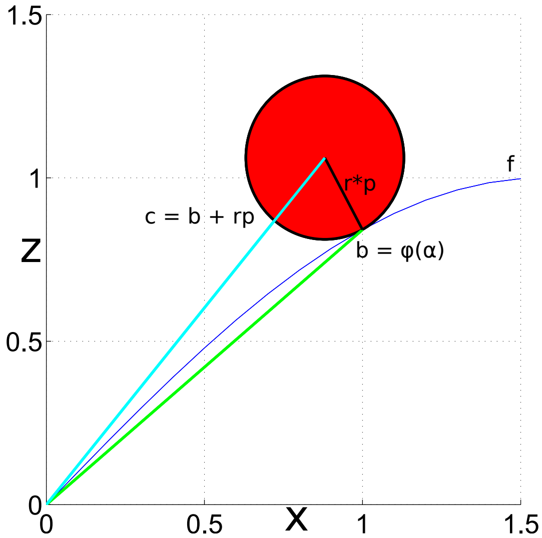
Inhaltsverzeichnis

1 Starrkörperbewegung

$$M(x) = Rx + c$$

R Rotationsmatrix, c Translationsvektor

2 Münze und Landschaft



Landschaftsfunktion:

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto f(x, y)$$

Landschaftsoberfläche:

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, (x, y) \mapsto (x, y, f(x, y))$$

Normalenfeld:

$$N : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, (x, y) \mapsto \frac{\partial_1\varphi \times \partial_2\varphi}{\|\partial_1\varphi \times \partial_2\varphi\|_2}$$

Trägheitstensor:

$$T^*_{\bar{x}}(B) = m(B)\frac{r^2}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_a = RT^*_{\bar{x}}R^T - mr^2A(p)$$

$$v = T_a\omega$$

$$v = Re_2 \Longrightarrow \dot{v} = \dot{R}e_2 = A(\omega)Re_2 = A(\omega)v$$

$$q(\alpha, v) = (I - vv^T)N(\alpha)$$

$$\eta(\alpha, v) = \frac{q(\alpha, v)}{\|q(\alpha, v)\|_2}$$

$$p = \eta(\alpha, v)$$

$$A(\omega) := \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}$$

3 Differentialgleichungen

3.1 Dynamische Zusammenhänge

Winkelgeschwindigkeit:

$$\dot{R} = A(\omega)R$$

Schlupffreiheit:

$$\dot{M}_t(b) = 0 \Longrightarrow \dot{c} = rA(\omega)p$$

Drehimpulsbilanz:

$$(\dot{T_a\omega}) = mrA(p)g - mr^2A(\dot{p})A(p)\omega$$

3.2 Gleichungen

Kontaktpunkt:

$$(\varphi'(\alpha) + r\frac{\partial}{\partial\alpha}\eta(\alpha, v))\dot{\alpha} = rA(\omega)p - r\frac{\partial}{\partial v}\eta(\alpha, v)\dot{v}$$

Mit $L = \varphi'(\alpha) + r\frac{\partial}{\partial\alpha}\eta(\alpha, v)$, $E = L^TL$,$l = r\frac{\partial}{\partial v}\eta(\alpha, v)$folgt:

$$\dot{\alpha} = E^{-1}L^T(rA(\omega)p - l\dot{v})$$

Geschwindigkeit:

$$\dot{v} = mrA(p)g - mr^2A(A(\omega)p - \frac{1}{r}\varphi'(\alpha)\dot{\alpha})A(p)\omega$$

Differentialgleichung:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} R \\ \alpha \\ v \end{pmatrix} = F(R, \alpha, v)$$

4 Munthe-Kaas Verfahren

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} u \\ \alpha \\ v \end{pmatrix} = F(u, \alpha, v)$$

mit $\dot{u} = (I - \frac{1}{12}A(u)(6I + A(u))\omega$ für RK4. Für R gilt:

$$R_{t+1} = exp(A(u_{t+1}))R_t$$

$$(Rodriguez - Formel)$$

Hinweise

Es sollte gelten

- $\varphi'(\alpha)\dot{\alpha} = \dot{b}\perp p$
- $\|p\|_2 = 1$