Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ «Информатика и системы управления»

КАФЕДРА «Программное обеспечение ЭВМ и информационные технологии»

Лабораторная работа № 4

Тема Построение и программная реализация алгоритма наилучшего среднеквадратичного приближения.

Студент Алахов А.Г.

Группа ИУ7-42Б

Оценка (баллы) _______________

Преподаватель Градов В.М.

Москва.
2021 г

Цель работы. Получение навыков построения алгоритма метода наименьших квадратов с использованием полинома заданной степени при аппроксимации табличных функций с весами.

1 Исходные данные

1. Таблица функции с весами ρ i с количеством узлов N. Сформировать таблицу самостоятельно со случайным разбросом точек.

   Сформированная таблица:

X	Y	Вес
0	0	1
1	-1,5	1
2	-1	1
3	2,5	1
4	6	1
5	8	1
6	7	1
7	5	1
8	5	1
9	7,5	1
10	11,5	1

   Предусмотреть в интерфейсе удобную возможность изменения пользователем весов в таблице.

2. Степень аппроксимирующего полинома - n.

2 Код программы

Код программы представлен на листингах 1-2.

Листинг 1. functions.py

```
from math import fabs
import matplotlib.pyplot as plt


def least_squares_method(table, n):
    n += 1
    matr = [[0] * (n + 1) for i in range(n)]
    coefs = []
```

```
    for i in range(n):
        for j in range(i, n):
            summ = 0
            for k in range(len(table)):
                summ += table[k][2] * table[k][0] ** (i + j)
            matr[i][j] = matr[j][i] = summ

        summ = 0
        for k in range(len(table)):
            summ += table[k][2] * table[k][1] * table[k][0] ** i
        matr[i][n] = summ

    for i in range(n - 1, 0, -1):
        tmp = matr[i][i]
        for j in range(n + 1):
            matr[i][j] /= tmp

        for j in range(i):
            tmp = matr[j][i]
            for k in range(n + 1):
                matr[j][k] -= matr[i][k] * tmp
    matr[0][n] /= matr[0][0]

    for i in range(n):
        summ = matr[i][n]
        for j in range(len(coefs)):
            summ -= coefs[j] * matr[i][j]
        coefs.append(summ)

    dots = []
    x = table[0][0]
    while x <= table[len(table) - 1][0]:
        y = 0
        for j in range(len(coefs)):
            y += coefs[j] * x ** j
        dots.append(y)
        x += 0.1

    return dots
```

Листинг 2. main.py

```
from functions import *

def main():

    func_table = [[0, 0, 1],
                  [1, -1.5, 1],
                  [2, -1, 1],
                  [3, 2.5, 1],
                  [4, 6, 1],
                  [5, 8, 1],
                  [6, 7, 1],
                  [7, 5, 1],
                  [8, 5, 1],
                  [9, 7.5, 1],
                  [10, 11.5, 1]]
    '''
    func_table = [[0, 0, 4],
                  [1, -1.5, 3],
```

```
                  [2, -1, 7],
                  [3, 2.5, 11],
                  [4, 6, 1],
                  [5, 8, 5],
                  [6, 7, 23],
                  [7, 5, 1],
                  [8, 5, 2],
                  [9, 7.5, 1],
                  [10, 11.5, 99]]
    '''
    print('Заданная таблица:\n\
| №| X |Y(x)|Вес|')
    for i in range(len(func_table)):
        print('|{:2d}|{:3d}|{:4.1f}|{:3d}|'.format(i + 1,
                                                   func_table[i][0],
                                                   func_table[i][1],
                                                   func_table[i][2]))

    print('\n1 - Изменить вес точки\n\
2 - Вывести таблицу\n\
3 - Вывести графики для разных степерей полинома\n\
4 - Вывести графики для текущей таблицы и аналогичной, с весом 1 у всех узлов\n\
0 - Выйти из меню\n\
Выбор: ', end = '')
    choice = int(input())

    while choice:
        if choice == 1:
            num = int(input('\nВведите номер точки: '))
            weight = int(input('\nВведите новый вес точки: '))
            func_table[num - 1][2] = weight
        elif choice == 2:
            print('Заданная таблица:\n\
| №| X |Y(x)|Вес|')
            for i in range(len(func_table)):
                print('|{:2d}|{:3d}|{:4.1f}|{:3d}|'.format(i + 1,
                                                   func_table[i][0],
                                                   func_table[i][1],
                                                   func_table[i][2]))
        elif choice == 3:
            graph(func_table)
        else:
            graph_compare(func_table)
        print('\n1 - Изменить вес точки\n\
2 - Вывести таблицу\n\
3 - Вывести графики для разных степерей полинома\n\
4 - Вывести графики для текущей таблицы и аналогичной, с весом p=1 для всех
узлов\n\
0 - Выйти из меню\n\
Выбор: ', end = '')
        choice = int(input())

def graph(func_table):
    dots = [[]]
    x = func_table[0][0]
    while x <= func_table[len(func_table) - 1][0]:
        dots[0].append(x)
        x += 0.1

    dots.append(least_squares_method(func_table, 1))
    dots.append(least_squares_method(func_table, 2))
    dots.append(least_squares_method(func_table, 4))
    dots.append(least_squares_method(func_table, 6))
```

```python
    funcs = ['p = 1',
             'p = 2',
             'p = 4',
             'p = 6',
             'Данные']

    fig, ax = plt.subplots()

    ax.plot(dots[0], dots[1],
            dots[0], dots[2],
            dots[0], dots[3],
            dots[0], dots[4])
    ax.scatter([i[0] for i in func_table], [i[1] for i in func_table],
               c = 'black')

    plt.legend(funcs, loc=2)
    plt.grid()

    ax.set_ylabel('Y')
    ax.set_xlabel('X')

    plt.show()

def graph_compare(func_table):
    dots = [[]]
    x = func_table[0][0]
    while x <= func_table[len(func_table) - 1][0]:
        dots[0].append(x)
        x += 0.1

    dots.append(least_squares_method(func_table, 1))
    dots.append(least_squares_method(func_table, 2))

    for i in range(len(func_table)):
        func_table[i][2] = 1
    dots.append(least_squares_method(func_table, 1))
    dots.append(least_squares_method(func_table, 2))

    funcs = ['p = 1 (вес точек различный)',
             'p = 2 (вес точек различный)',
             'p = 1 (вес точек равен 1)',
             'p = 2 (вес точек равен 1)',
             'Данные']

    fig, ax = plt.subplots()

    ax.plot(dots[0], dots[1],
            dots[0], dots[2],
            dots[0], dots[3],
            dots[0], dots[4])
    ax.scatter([i[0] for i in func_table], [i[1] for i in func_table],
               c = 'black')

    plt.legend(funcs, loc=2)
    plt.grid()

    ax.set_ylabel('Y')
    ax.set_xlabel('X')

    plt.show()

if __name__ == "__main__":
    main()
```

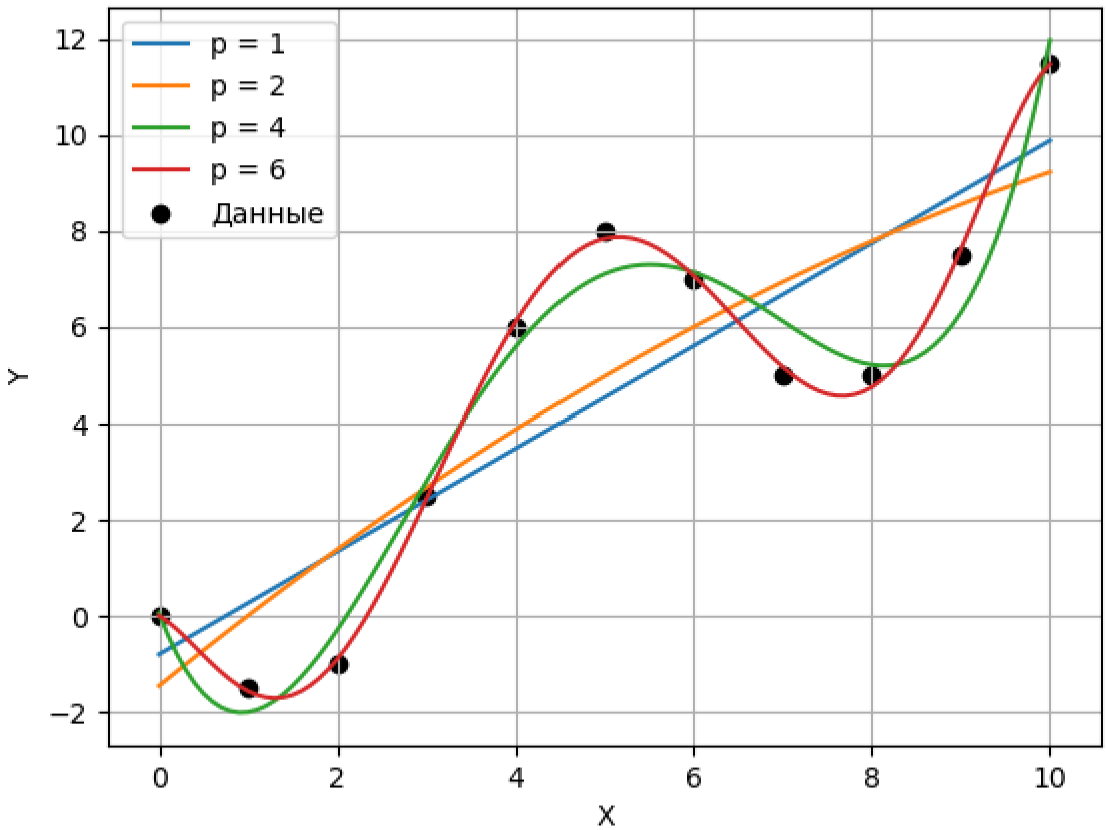
3 Результаты работы

Графики, построенные по аналогии с рис.1 в тексте Лекции №4: точки - заданная табличная функция, кривые - найденные полиномы. Обязательно приводить таблицы, по которым работала программа.

1. Веса всех точек одинаковы и равны, например, единице. Обязательно построить полиномы степеней n=1 и 2. Можно привести результаты и при других степенях полинома, однако, не загромождая сильно при этом рисунок.

Заданная таблица:

№	X	Y(x)	Вес
1	0	0.0	1
2	1	-1.5	1
3	2	-1.0	1
4	3	2.5	1
5	4	6.0	1
6	5	8.0	1
7	6	7.0	1
8	7	5.0	1
9	8	5.0	1
10	9	7.5	1
11	10	11.5	1



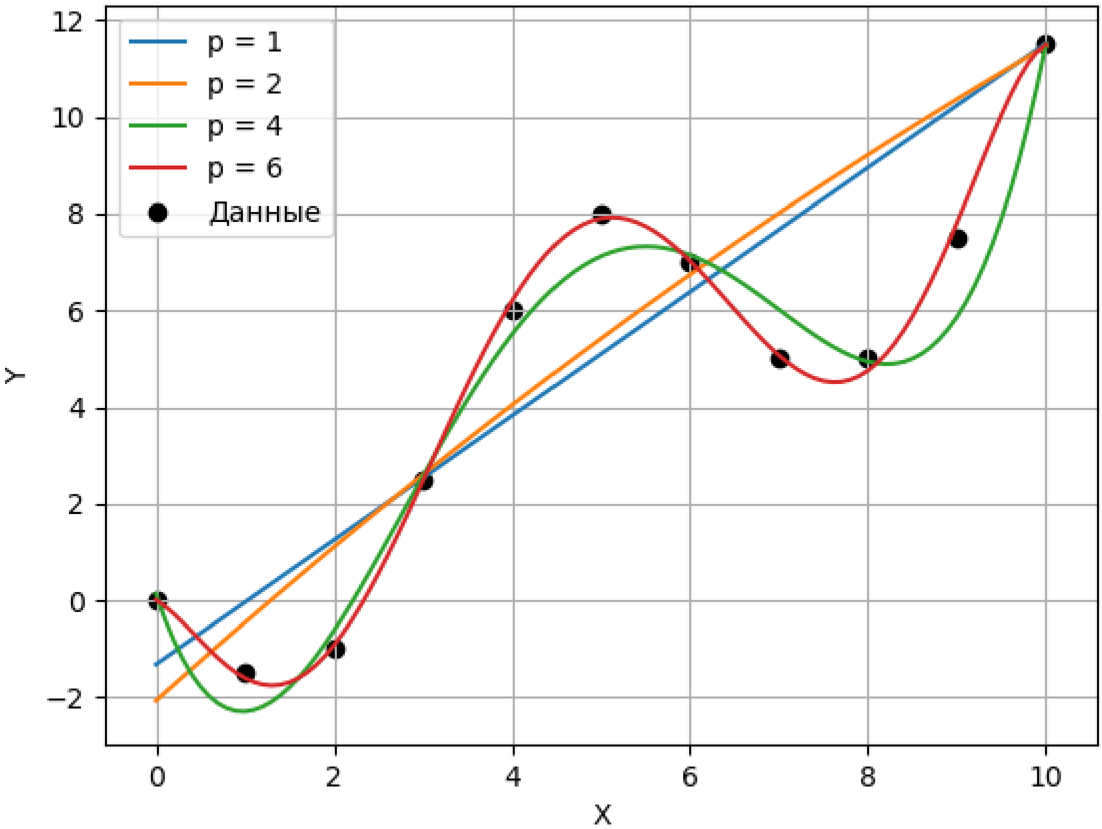
2. Веса точек разные. Продемонстрировать, как за счет назначения весов точкам можно изменить положение на плоскости прямой линии (полином первой степени), аппроксимирующей один и тот же набор точек (одну таблицу y(x)).

Например, назначая веса узлам в таблице изменить знак углового коэффициента прямой. На графике в итоге должны быть представлены точки исходной функции и две аппроксимирующие их прямые линии. Одна отвечает значениям ρ i =1 для всех узлов, а другая- назначенным разным весам точек. Информацию о том, какие именно веса были использованы в расчете обязательно указать, чтобы можно было проконтролировать работу программы (лучше это сделать в виде таблицы).

Графики различных степеней полинома при разных весах точек:

Заданная таблица:

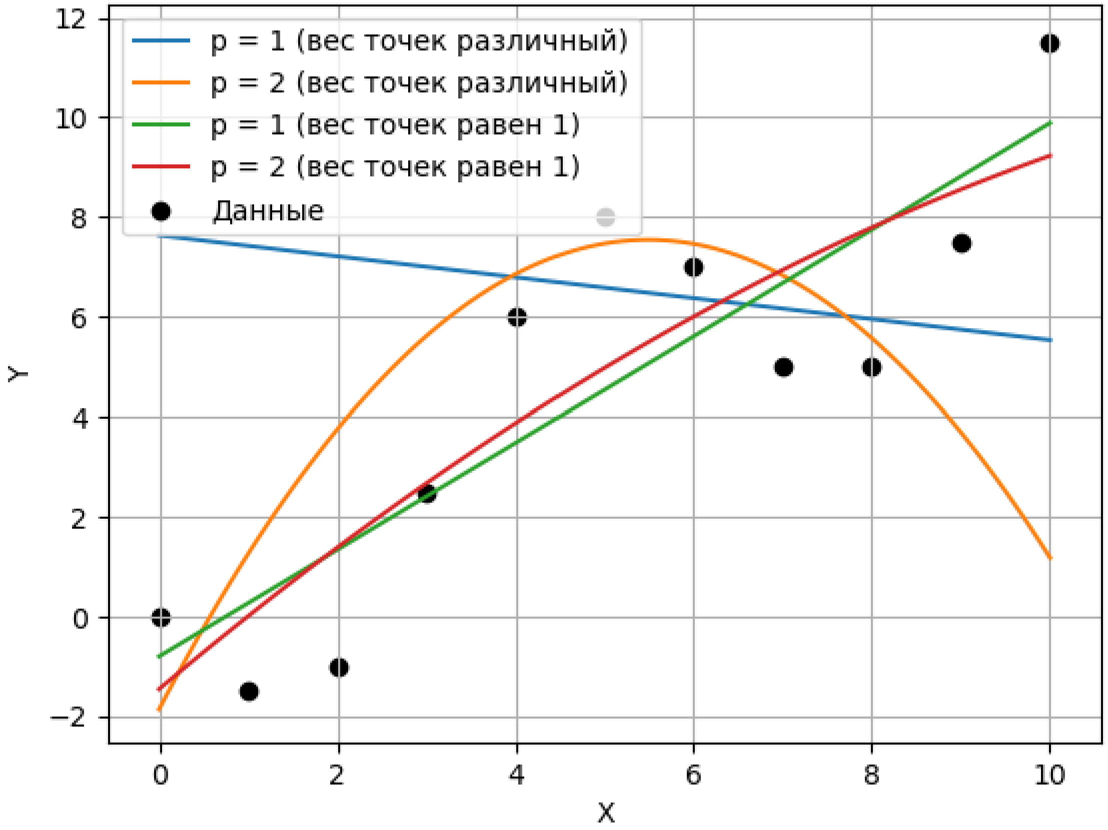
№	X	Y(x)	Вес
1	0	0.0	4
2	1	-1.5	3
3	2	-1.0	7
4	3	2.5	11
5	4	6.0	1
6	5	8.0	5
7	6	7.0	23
8	7	5.0	1
9	8	5.0	2
10	9	7.5	1
11	10	11.5	99



Изменение знака углового коэффициента прямой с помощью изменения веса:

```
Заданная таблица:
| №| X |Y(x)|Вес|
| 1|  0| 0.0|  1|
| 2|  1|-1.5|  1|
| 3|  2|-1.0|  1|
| 4|  3| 2.5|  1|
| 5|  4| 6.0|  1|
| 6|  5| 8.0| 50|
| 7|  6| 7.0|  1|
| 8|  7| 5.0|  1|
| 9|  8| 5.0| 50|
|10|  9| 7.5|  1|
|11| 10|11.5|  1|

1 - Изменить вес точки
2 - Вывести таблицу
3 - Вывести графики для разных степеней полинома
4 - Вывести графики для текущей таблицы и аналогичной, с весом 1 для всех узлов
0 - Выйти из меню
Выбор: 4
```



4 Вопросы при защите лабораторной работы

1. Что произойдет при задании степени полинома n=N-1 (числу узлов таблицы минус 1)?

График полинома будет проходить через все точки, независимо от их веса.

2. Будет ли работать Ваша программа при n ≥ N ? Что именно в алгоритме требует отдельного анализа данного случая и может привести к аварийной остановке?

Программа будет работать, но результат работы программы будет некорректным. Аварийная ситуация может возникнуть из-за деления на ноль в процессе решения системы уравнений, т.к. система будет линейно зависимой. В данной программе аварийная ситуация не возникает из-за погрешности при работе с действительными числами.

3. Получить формулу для коэффициента полинома a0 при степени полинома n=0. Какой смысл имеет величина, которую представляет данный коэффициент?

$$a_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i}$$

Данный коэффициент будет являться взвешенным средним арифметическим ординат функции.

4. Записать и вычислить определитель матрицы СЛАУ для нахождения коэффициентов полинома для случая, когда n=N=2. Принять все ρ i =1.

Определитель матрицы: $\begin{vmatrix} 2 & x1 + x2 & x1^2 + x2^2 \\ x1 + x2 & x1^2 + x2^2 & x1^3 + x2^3 \\ x1^2 + x2^2 & x1^3 + x2^3 & x1^4 + x2^4 \end{vmatrix} = 0$

Так как определитель матрицы равен нулю, система не имеет решений.

5. Построить СЛАУ при выборочном задании степеней аргумента полинома $\varphi(x) = a_0 + a_1 x^m + a_2 x^n$, причем степени n и m в этой формуле известны.

$$\begin{cases} (x^0,\, x^0)a0 + (x^0,\, x^m)a1 + (x^0,\, x^n)a2 = (y,\, x^0) \\ (x^m,\, x^0)a0 + (x^m,\, x^m)a1 + (x^m,\, x^n)a2 = (y,\, x^m) \\ (x^n,\, x^0)a0 + (x^n,\, x^m)a1 + (x^n,\, x^n)a2 = (y,\, x^n) \end{cases}$$

6. Предложить схему алгоритма решения задачи из вопроса 5, если степени n и m подлежат определению наравне с коэффициентами ak , т.е. количество неизвестных равно.

Подобную систему можно решить методом перебора всех возможных значений n и m. Для каждой пары значений находят коэффициенты, а также ошибку. В качестве конечного результата выбирается пара с минимальной ошибкой.