

## H2. Bouwstenen consumentengedrag

Dirk Van de gaer

12 september 2024

## 1 Inleiding

## 2 Preferenties

- Basisaxioma's en fundamenteel theorema
- Monotoniciteitsaxioma's
- Convexiteitsaxioma's
- Indifferentiecurven en substitutie
- Constructie van een nutsfunctie

## 3 Nutsfuncties

- Eigenschappen van nutsfuncties
- Nutsfunctie in driedimensionele ruimte
- Voorbeelden van nutsfuncties

## 4 Budgetbeperking

- Definitie
- Veranderingen in de budgetbeperking

## 2.1 Inleiding

Consumenten beslissen ...

De vraag die in dit deel wordt behandeld is: hoe beslist de consument welke goederen hij koopt?

- De beslissingsvariabele:

$$\mathbf{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_k\} \in \mathbb{R}_+^k,$$

waarbij  $x_i \geq 0$  de endogene geconsumeerde hoeveelheid van goed  $i$  voorstelt.

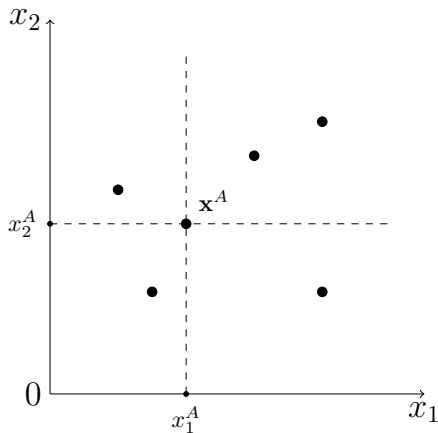
- De prijs:

$$\mathbf{p} = \{p_1, p_2, \dots, p_k\} \in \mathbb{R}_+^k,$$

waarbij  $p_i \geq 0$  de exogene prijs van goed  $i$  voorstelt.

- Exogeen inkomen van de consument  $Z \in \mathbb{R}_{++}$ .

Figuur: Consumptiebundels in 2 dimensies



## 2.2 Preferenties

### 2.2.1 Basisaxioma's en fundamenteel theorema

De consument heeft

- preferenties over de bundels  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^k$ ;
- weergegeven door de preferentierelatie  $\succeq$ ;
- $\mathbf{x} \succeq \mathbf{y}$  betekent dat  $\mathbf{x}$  ten minste even goed is als  $\mathbf{y}$ .

De relatie definiëert een *totale orde* op  $\mathbb{R}_+^k$ : ze heeft de volgende 2 eigenschappen:

**Axioma: Volledigheid.**

De preferentierelatie  $\succeq$  is volledig als en slechts als  $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}_+^k$  :

$$\mathbf{x} \succeq \mathbf{y} \text{ of } \mathbf{y} \succeq \mathbf{x}.$$

Opmerking: Als een preferentierelatie volledig is, dan is ze ook reflexief: elke bundel is ten minste even goed als zichzelf.

Bewijs.

Neem in de definitie van volledigheid  $\mathbf{y} = \mathbf{x}$ . Dan zegt de definitie  $\mathbf{x} \succeq \mathbf{x}$  of  $\mathbf{x} \succeq \mathbf{x}$ , zodat we dus altijd hebben dat  $\mathbf{x} \succeq \mathbf{x}$ .  $\square$

Axioma: Transitiviteit.

De preferentierelatie  $\succeq$  is transitief als en slechts als  $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}_+^k$  :  
 $\mathbf{x} \succeq \mathbf{y}$  en  $\mathbf{y} \succeq \mathbf{z}$  impliceert  $\mathbf{x} \succeq \mathbf{z}$ .

Gegeven een preferentierelatie  $\succeq$  die een totale orde definieert op  $\mathbb{R}_+^k$ , kunnen we de strikte preferentierelatie  $\succ$  en de indifferentie relatie  $\sim$  definiëren:

**Definitie: Strikte preferentierelatie.**

$\mathbf{x} \succ \mathbf{y}$  betekent dat het niet is dat  $\mathbf{y} \succeq \mathbf{x}$ .

Als  $\mathbf{x} \succ \mathbf{y}$  is  $\mathbf{x}$  strikt beter dan  $\mathbf{y}$ .

**Definitie: Indifferentierelatie.**

$\mathbf{x} \sim \mathbf{y}$  betekent dat  $\mathbf{x} \succeq \mathbf{y}$  en  $\mathbf{y} \succeq \mathbf{x}$ .

Als  $\mathbf{x} \sim \mathbf{y}$  is  $\mathbf{x}$  precies even goed als  $\mathbf{y}$ .

Het transitiviteitsaxioma is cruciaal. Het vereist dat het keuzegedrag consistent is.

Het volgende gedachtenexperiment met 2 personen,  $P_1$  en  $P_2$ , wordt beschouwd als een belangrijk argument voor transitiviteit van preferenties.

- $P_1$  heeft goederenbundel **b**,  $P_2$  heeft twee bundels, **a** en **c**.
- $P_1$  zijn preferentierelatie is niet transitief:

$$\mathbf{a} \succ \mathbf{b} \text{ en } \mathbf{b} \succ \mathbf{c} \text{ maar } \mathbf{c} \succ \mathbf{a},$$

waarbij  $\mathbf{x} \succ \mathbf{y}$  betekent dat  $\mathbf{x}$  strikt beter is dan  $\mathbf{y}$ .

Vervolgens zal  $P_2$  ruilvoorstellen doen aan  $P_1$ .

- Ruil 1:  $P_2$  stelt  $P_1$  voor om **a** en **b** te ruilen als  $P_1$  hem 1 euro geeft. Omdat **a**  $\succ$  **b** aanvaardt  $P_1$  deze ruil.
- Ruil 2: Vervolgens stelt  $P_2$  aan  $P_1$  voor om **c** en **a** te ruilen als  $P_1$  hem 1 euro geeft. Omdat **c**  $\succ$  **a** aanvaardt  $P_1$  deze ruil.
- Ruil 3: Tot slot stelt  $P_2$  aan  $P_1$  voor om **b** en **c** te ruilen als  $P_1$  hem 1 euro geeft. Omdat **b**  $\succ$  **c** aanvaardt  $P_1$  deze ruil.

Resultaat: We zijn terug in de uitgangssituatie. Alleen heeft  $P_2$  nu 3 euro meer en  $P_1$  3 euro minder.

Maar het eindigt daar niet:

- Vervolgens stelt  $P_2$  opnieuw ruil 1, dan ruil 2, en ruil 3 voor, waarna hij opnieuw ruil 1 voorstelt en zo verder.

Op deze manier wordt  $P_1$  een geldpomp. Het is niet rationeel om zich zo te laten misbruiken (en bij elke stap een bundel te krijgen die men verkiest).

Dit argument tegen niet transitieve preferenties werd eerst gesuggereerd door F.P. Ramsey (1926), en later ontwikkeld door Davidson et al (1995). Het staat bekend als het *money-pump argument*.

Gegeven een preferentierelatie  $\succeq$  die een totale orde definieert op  $\mathbb{R}_+^k$  en een willekeurig gekozen goederenbundel  $\mathbf{x}^A$ , kunnen we de volgende verzamelingen definiëren.

# Preferenties

Definitie: Betere verzameling.

$$B(\mathbf{x}^A) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}_+^k : \mathbf{y} \succeq \mathbf{x}^A\}.$$

Definitie: Slechtere verzameling.

$$S(\mathbf{x}^A) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}_+^k : \mathbf{x}^A \succeq \mathbf{y}\}.$$

Definitie: Indifferentie verzameling.

$$I(\mathbf{x}^A) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}_+^k : \mathbf{y} \sim \mathbf{x}^A\}.$$

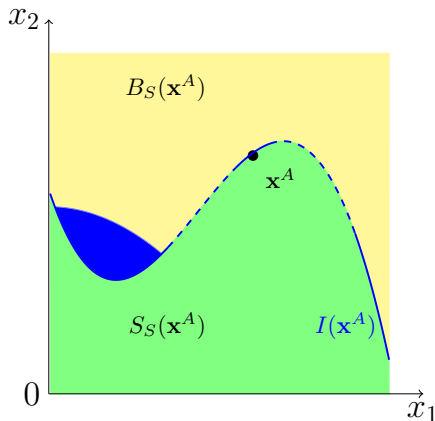
Definitie: Strikt betere verzameling.

$$B_S(\mathbf{x}^A) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}_+^k : \mathbf{y} \succ \mathbf{x}^A\}.$$

Definitie: Strikt slechtere verzameling.

$$S_S(\mathbf{x}^A) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}_+^k : \mathbf{x}^A \succ \mathbf{y}\}.$$

**Figuur:** Preferenties die voldoen aan volledigheid en transitiviteit



Een bijkomende veronderstelling die vaak aan preferenties wordt opgelegd is continuïteit.

## Axioma: Continuïteit.

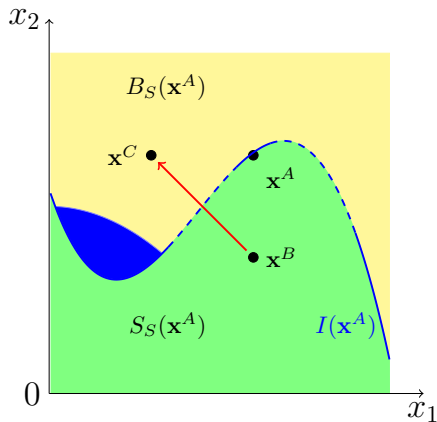
De preferentierelatie  $\succeq$  is continu als en slechts als  $\forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}_+^k$  :

$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^k : \mathbf{x} \succeq \mathbf{y}\}$  en  $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^k : \mathbf{x} \preceq \mathbf{y}\}$  gesloten verzamelingen zijn.

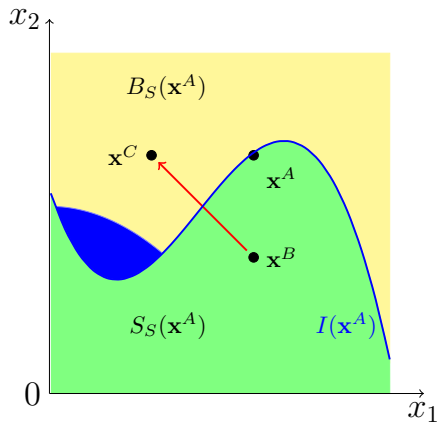
Continuïteit betekent dat de overgang van de strikt slechtere naar de strikt betere verzameling verloopt via de indifferentieverzameling.

# Preferenties

Figuur: Niet continue preferentierelatie



Figuur: Continue preferentierelatie



Voorbeeld van een preferentierelatie die niet continu is: de lexicografische preferentierelatie.

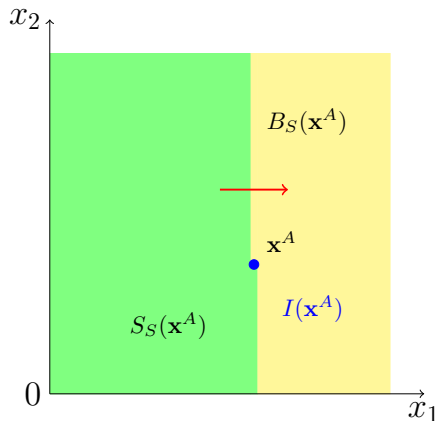
Indien  $k = 2$ , dan wordt deze als volgt gedefiniëerd.

**Definitie: Lexicografische preferentierelatie.**

$$\mathbf{x}^A \succ_{Lex} \mathbf{x}^B \Leftrightarrow \begin{cases} x_1^A > x_1^B \\ \text{of} \\ x_1^A = x_1^B \text{ en } x_2^A > x_2^B. \end{cases}$$

De volgende figuur geeft, voor een lexicografische preferentierelatie en een willekeurig punt  $\mathbf{x}^A$ , de volgende verzamelingen:  $B_S(\mathbf{x}^A)$ ,  $I(\mathbf{x}^A)$  en  $I_S(\mathbf{x}^A)$ .

Figuur: Lexicografische preferentierelatie



Als de preferentierelatie  $\succeq$  continu is, dan zijn  $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^k : \mathbf{x} \succeq \mathbf{y}\}$  en  $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^k : \mathbf{x} \preceq \mathbf{y}\}$  gesloten verzamelingen. Bijgevolg is

- $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^k : \mathbf{x} \sim \mathbf{y}\}$  een gesloten verzameling,
- $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^k : \mathbf{x} \succ \mathbf{y}\}$  een open verzameling,
- $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^k : \mathbf{x} \prec \mathbf{y}\}$  een open verzameling.

Continuïteit is een hele krachtige eigenschap: als continuïteit wordt toegevoegd aan volledigheid en transitiviteit dan verkrijgen we het volgende, fundamentele theorema.

## Fundamenteel theorema: Bestaan nutsfunctie.

Als een preferentierelatie  $\succeq$  volledig, transitief en continu is, dan bestaat er een continue nutsfunctie die deze preferentierelatie weerspiegelt, dit wil zeggen: er bestaat een continue functie  $u$ ,

$$u : \mathbb{R}_+^k \rightarrow \mathbb{R} : \mathbf{x} \succ \mathbf{y} \Leftrightarrow u(\mathbf{x}) > u(\mathbf{y}).$$

Deze nutsfunctie is niet uniek! Beschouw de volgende definitie.

## Definitie: Monotone transformatie.

De functie  $h : \mathbb{R}_+^k \rightarrow \mathbb{R} : h(\mathbf{x}) = f(u(\mathbf{x}))$  is een monotone transformatie van de functie  $u : \mathbb{R}_+^k \rightarrow \mathbb{R}$  op voorwaarde dat de functie  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  strikt stijgend is, wat wil zeggen dat  $\forall a, b \in \mathbb{R} : a > b \Rightarrow f(a) > f(b)$ .

## Theorema: Ordinaliteit van nutsfuncties.

Als de functie  $u : \mathbb{R}_+^k \rightarrow \mathbb{R}$  de preferentierelatie  $\succeq$  weerspiegelt, dan zal elke monotone transformatie van  $u$  dezelfde preferentierelatie weerspiegelen.

## Bewijs.

Indien de functie  $u(\cdot)$  de preferentierelatie  $\succeq$  weerspiegelt, dan geldt dat  $\mathbf{x} \succ \mathbf{y}$  als en slechts als  $u(\mathbf{x}) > u(\mathbf{y})$ . Gegeven  $u(\mathbf{x}) > u(\mathbf{y})$  geldt voor elke monotone transformatie  $h(\cdot)$  dat  $h(\mathbf{x}) = f(u(\mathbf{x})) > h(\mathbf{y}) = f(u(\mathbf{y}))$  omdat  $f(\cdot)$  een strikt stijgende functie is. Bijgevolg weerspiegelt de functie  $h(\cdot)$  eveneens de preferentierelatie  $\succeq$ . □

Theorema bestaan van nutsfunctie  $\Rightarrow$

- We kunnen de beste consumptiebundel die een consument kan bereiken vinden door, rekening houdend met de beperkingen waarmee hij geconfronteerd wordt, een nutsfunctie te maximeren die zijn preferentierelatie weerspiegelt.
- We passen standaard optimaliseringstechnieken onder nevenvoorwaarden (Lagrange technieken) toe.

Theorema Ordinaliteit van nutsfunctie  $\Rightarrow$

- Het maakt niet uit welke nutsfunctie in de optimalisering wordt gebruikt, zolang ze maar de preferentieordening weerspiegelt.

## 2.2.2 Monotoniceitsaxioma's

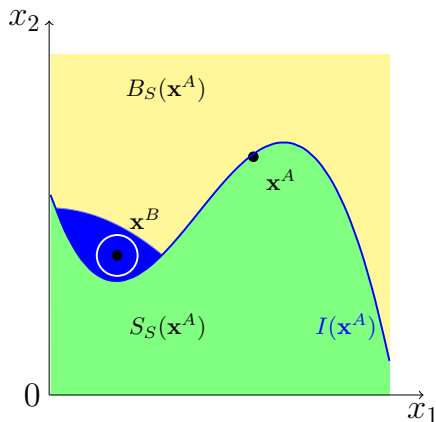
Er bestaan 3 klassieke manieren waarop monotoniceit wordt geformuleerd. We beginnen met de zwakste manier.

**Axioma: Lokale niet-saturatie.**

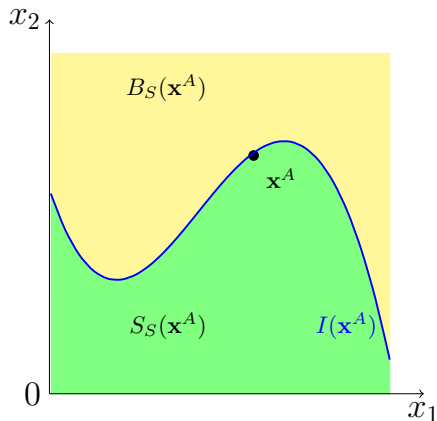
De preferentierelatie  $\succeq$  voldoet aan lokale niet-saturatie als en slechts als  $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^k$  en  $\forall \epsilon > 0 : \exists \mathbf{y} \in \mathbb{R}_+^k$  met  $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < \epsilon : \mathbf{y} \succ \mathbf{x}$ .

# Preferenties

**Figuur:** Voldoet niet aan lokale niet-saturatie



**Figuur:** Voldoet aan lokale niet-saturatie



Preferentierelatie voldoet aan lokale niet-saturatie

⇒ de indifferentieverzameling wordt een curve. Een curve is gelijkaardig aan een lijn, maar hoeft geen rechte te zijn. Intuïtief kan een curve gezien worden als het spoor dat ontstaat indien je een punt beweegt. De formele definitie van een indifferentiecurve in het geval met 2 goederen ( $k = 2$ ) is als volgt.

## Definitie: Indifferentiecurve.

Gegeven een preferentierelatie die voldoet aan lokale niet-saturatie is de indifferentiecurve die door een willekeurige goederenbundel  $\mathbf{x}^A$  gaat de impliciete curve

$$I^A(x_1) : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}_+ : (x_1, I^A(x_1)) \sim \mathbf{x}^A.$$

$I^A(x_1)$  geeft weer hoe  $x_2$  moet veranderen als  $x_1$  verandert terwijl de consument indifferent blijft met de bundel  $\mathbf{x}^A$ .

Een andere, niet locale manier om uit te drukken dat meer consumptie beter is wordt gegeven door volgend axioma.

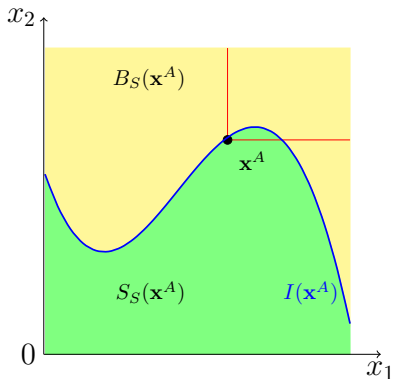
## Axioma: Zwakke monotoniciteit.

De preferentierelatie  $\succeq$  voldoet aan zwakke monotoniciteit als en slechts als  $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}_+^k : \mathbf{x} \geq \mathbf{y} \Rightarrow \mathbf{x} \succeq \mathbf{y}$ .

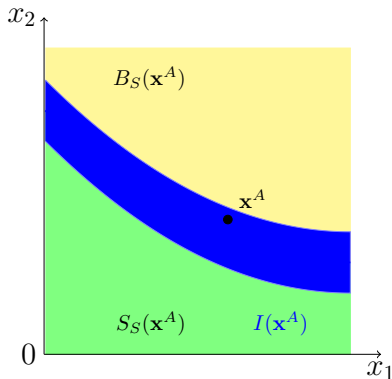
- zwakke monotoniciteit  $\nRightarrow$  locale niet-saturatie;
- locale niet-saturatie  $\nRightarrow$  zwakke monotoniciteit.

# Preferenties

**Figuur:** Preferentierelatie die voldoet aan lokale niet-saturatie maar niet aan zwakke monotoniciteit



**Figuur:** Preferentierelatie die voldoet aan zwakke monotoniciteit maar niet aan lokale niet-saturatie



Laatste fig (linkerpaneel): zwakke monotoniteit  $\Rightarrow$  de indifferentiecurven geassocieerd met de preferentierelatie zijn niet-stijgend.

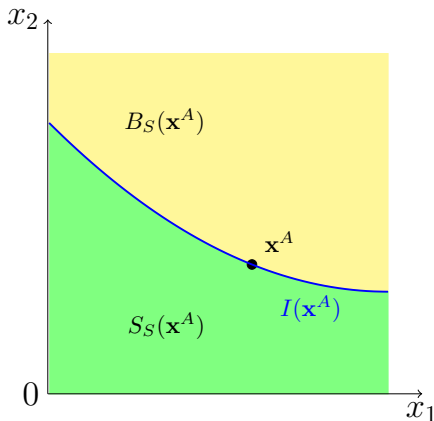
De sterkste manier om uit te drukken dat meer consumptie beter is wordt gegeven door volgend axioma.

## Axioma: Sterke monotoniteit.

De preferentierelatie  $\succeq$  voldoet aan sterke monotoniteit als en slechts als  $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}_+^k : \mathbf{x} \succeq \mathbf{y}$  en  $\mathbf{x} \neq \mathbf{y} \Rightarrow \mathbf{x} \succ \mathbf{y}$ .

Sterke monotoniteit  $\Rightarrow$  de indifferentiecurven geassocieerd met de preferentierelatie zijn strikt dalend.

**Figuur:** Een preferentierelatie die voldoet aan sterke monotoniciteit



Opmerkingen:

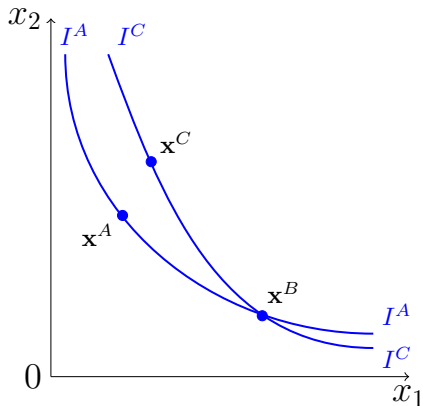
- sterke monotoniteit  $\Rightarrow$  zwakke monotoniteit;
- sterke monotoniteit  $\Rightarrow$  locale niet-saturatie.

**Theorema: Niet-snijdende indifferentiecurven.**

Als de preferentierelatie  $\succeq$  volledig, transitief en continu is en voldoet aan sterke monotoniteit, dan kunnen indifferentiecurven elkaar niet snijden.

We bewijzen dit theorema op de volgende slide.

# Preferenties



- $x^A \sim x^B \sim x^C$ .
- Bijgevolg  $x^A \sim x^C$ .
- Maar sterke monotoniteit:  
 $x^C \succ x^A$ .
- Contradictie!

## 2.2.3 Convexiteitsaxioma's

Convexiteitsaxioma's  $\Rightarrow$  de vraag van de consument heeft aantrekkelijke eigenschappen.

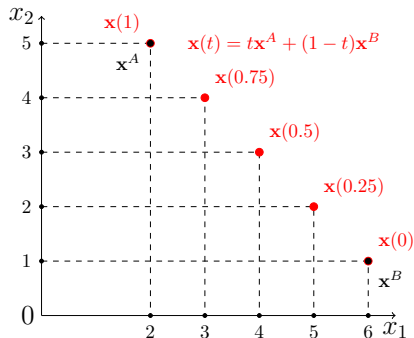
**Definitie:** Gewogen gemiddelde van twee goederenbundels.

Het gewogen gemiddelde van  $\mathbf{x}^A, \mathbf{x}^B \in \mathbb{R}_+^k$ , met gewicht  $t$ ,  $0 \leq t \leq 1$  voor  $\mathbf{x}^A$  en  $1 - t$  voor  $\mathbf{x}^B$  is

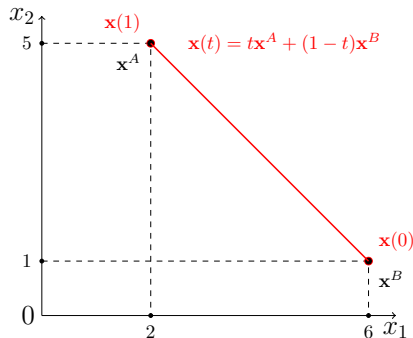
$$\mathbf{x}(t) = t\mathbf{x}^A + [1 - t]\mathbf{x}^B.$$

Uiteraard is  $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}_+^k$ . De grafische interpretatie voor  $k = 2$  wordt gegeven in de volgende figuur, voor verschillende waarden van  $t$ .

Figuur: Discrete illustratie



Figuur: Continue illustratie



De volgende stap is de definitie van een convexe verzameling.

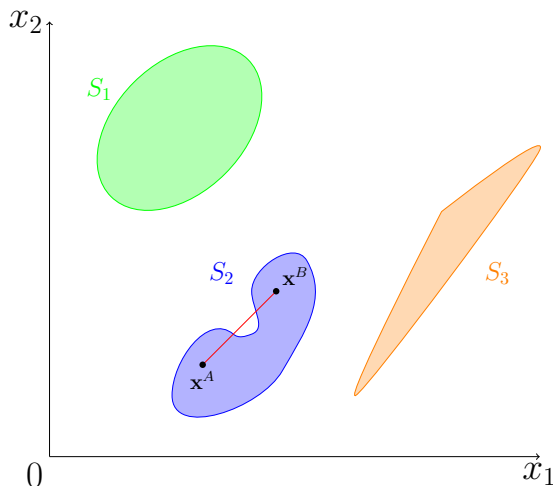
## Definitie: Convexe verzameling.

Een verzameling  $S \subseteq \mathbb{R}_+^k$  is convex als en slechts als  $\forall \mathbf{x}^A, \mathbf{x}^B \in S$  en  $0 \leq t \leq 1$ :

$$\mathbf{x}(t) = t\mathbf{x}^A + [1 - t]\mathbf{x}^B \in S.$$

Een verzameling  $S$  is convex als en slechts als het gewogen gemiddelde van 2 vectoren die tot  $S$  behoren zelf ook tot  $S$  behoort.

Figuur: Convexe en niet convexe verzamelingen



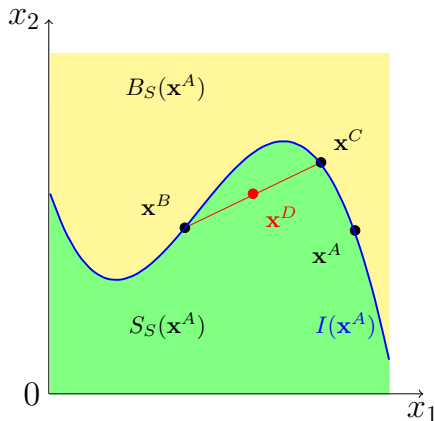
We kunnen convexiteit en strikte convexiteit van preferentierelaties definiëren.

## Definitie: Convexe preferentierelatie.

De preferentierelatie  $\succeq$  is convex als en slechts als  $\forall \mathbf{x}^A, \mathbf{x}^B, \mathbf{x}^C \in \mathbb{R}_+^k$  zodanig dat  $\mathbf{x}^B, \mathbf{x}^C \in B(\mathbf{x}^A)$ , geldt  $t\mathbf{x}^B + [1 - t]\mathbf{x}^C \in B(\mathbf{x}^A) \forall 0 \leq t \leq 1$ .

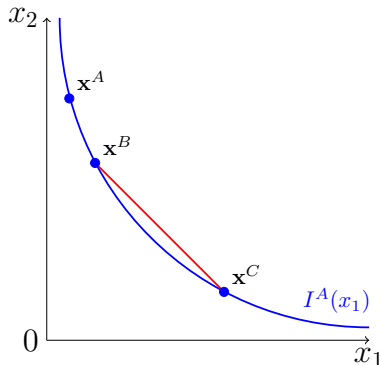
De volgende figuur geeft een voorbeeld van een preferentierelatie die niet convex is in  $\mathbb{R}_+^2$ .

Figuur: Niet convexe preferentierelatie

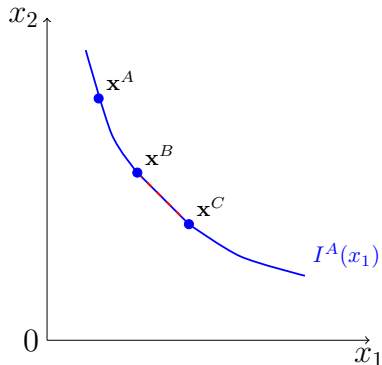


Sterke monotoniteit + convexiteit  
⇒ volgende vorm voor indifferentieverzameling:

Figuur: Strikt convex



Figuur: Convex, niet strikt convex



Vorige figuur, rechterpaneel: convexe preferentierelatie kan lineaire segmenten in de indifferentieverzameling hebben.

Om dit uit te sluiten wordt vaak opgelegd dat de preferentierelatie strikt convex is.

## Definitie: Strikt convexe preferentierelatie.

De preferentierelatie  $\succeq$  is strikt convex als en slechts als  $\forall \mathbf{x}^A, \mathbf{x}^B, \mathbf{x}^C \in \mathbb{R}_+^k$  zodanig dat  $\mathbf{x}^B, \mathbf{x}^C \in B(\mathbf{x}^A)$ , geldt  $t\mathbf{x}^B + [1 - t]\mathbf{x}^C \in B_S(\mathbf{x}^A) \forall 0 < t < 1$ .

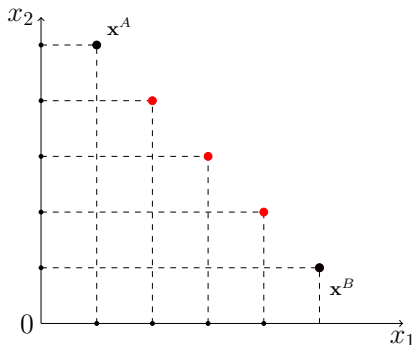
- strikte convexiteit  $\Rightarrow$  convexiteit;
- convexiteit  $\nRightarrow$  strikte convexiteit.

2 motivaties voor convexiteit van de preferentierelatie.

## Motivatatie 1 voor (strikte) convexiteit van preferentierelaties.

Convexiteit + sterke monotoniciteit  $\Rightarrow$  voorkeur voor minder extreme goederenbundels.

**Figuur:** Convexiteit en extreme bundels



- Neem  $x^A \sim x^B$ .
- $x^A$  en  $x^B$  zijn extreme bundels: ze bevatten veel van 1 goed en weinig van het andere.
- De rode bundels zijn minder extreem.
- Als de preferentierelatie (strikst) convex is dan zijn deze minder extreme bundels (strikst) beter dan de extreme.

## Motivatie 2 voor strikte convexiteit van preferentierelaties.

Basisidee: naarmate de consument meer heeft van een goed neemt zijn bereidheid tot betalen voor dit goed af.

Hypothese: de indifferentiecurve  $I^A(x_1)$  is een afleidbare functie. en geeft weer hoe  $x_2$  moet veranderen indien  $x_1$  verandert en de consument er nog even goed aan toe is als met bundel  $\mathbf{x}^A$ .

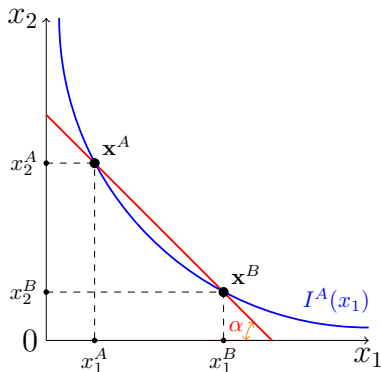
## Definitie: Substitutieverhouding

Wanneer we gaan van het punt  $\mathbf{x}^A = (x_1^A, x_2^A)$  naar een punt  $\mathbf{x}^B = (x_1^B, x_2^B)$  op de grafiek van een indifferentiecurve  $I^A(x_1) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ , dan is de substitutieverhouding in het punt  $A$ ,

$$SV_{1,2}(\mathbf{x}^A, \Delta x_1) = -\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1} = \frac{x_2^A - x_2^B}{x_1^B - x_1^A}.$$

De substitutieverhouding geeft weer, vertrekkend vanuit de bundel  $\mathbf{x}^A$ , hoeveel eenheden van  $x_2$  de consument wil opgeven teneinde  $\Delta x_1$  eenheden meer te krijgen van  $x_1$ . De volgende slide illustreert.

Figuur: Substitutieverhouding



- Van  $\mathbf{x}^A$  naar  $\mathbf{x}^B$ :
  - $\Delta x_1 = x_1^B - x_1^A > 0$
  - $\Delta x_2 = x_2^B - x_2^A < 0$
- Zodat de substitutieverhouding

$$\begin{aligned} SV_{1,2}(\mathbf{x}^A, \Delta x_1) &= -\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1} \\ &= \frac{x_2^A - x_2^B}{x_1^B - x_1^A}. \end{aligned}$$

De marginale substitutieverhouding in het punt  $\mathbf{x}^A$ : de  $SV_{1,2}(\mathbf{x}^A, \Delta x_1)$  waarbij  $\Delta x_1 \rightarrow 0$ .

## Definitie: Marginale substitutieverhouding

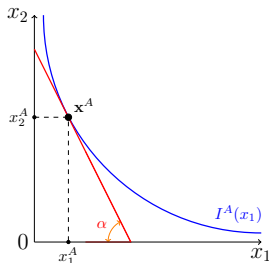
De marginale substitutieverhouding in het punt  $\mathbf{x}^A = (x_1^A, x_2^A)$  op een indifferentiecurve  $I^A(x_1) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  is

$$MSV_{1,2}(\mathbf{x}^A) = \lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} SV_{1,2}(\mathbf{x}^A, \Delta x_1) = \lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} - \frac{\Delta x_2}{\Delta x_1} = - \left. \frac{\partial I^A(x_1)}{\partial x_1} \right|_{x_1^A},$$

waarbij de afgeleide geëvalueerd wordt in het punt  $x_1^A$ .

$MSV_{1,2}(\mathbf{x}^A)$  geeft weer met hoeveel  $x_2$  moet veranderen indien  $x_1$  met een infinitesimale hoeveelheid verandert, en de consument een bundel krijgt die even goed is als  $\mathbf{x}^A$ . Dit is gelijk aan de absolute waarde van de richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan  $\mathbf{x}^A$ .

**Figuur:** Marginale substitutieverhouding

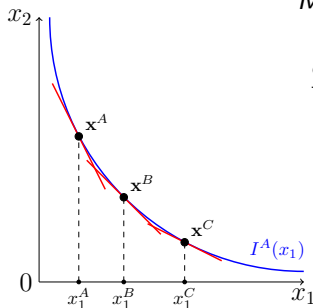


$$MSV_{1,2}(\mathbf{x}^A) = - \left. \frac{\partial I^A(x_1)}{\partial x_1} \right|_{x_1^A}.$$

# Preferenties

strikte convexiteit  $\Rightarrow$  de marginale substitutieverhouding neemt af, naarmate we ons op de indifferentiecurve naar beneden begeven.

**Figuur:** Dalende marginale substitutieverhouding



$$MSV_{1,2}(\mathbf{x}^A) > MSV_{1,2}(\mathbf{x}^B) > MSV_{1,2}(\mathbf{x}^C) > 0.$$

$$\left. \frac{\partial I^A(x_1)}{\partial x_1} \right|_{x_1^A} < \left. \frac{\partial I^A(x_1)}{\partial x_1} \right|_{x_1^B} < \left. \frac{\partial I^A(x_1)}{\partial x_1} \right|_{x_1^C} < 0.$$

$$\frac{\partial^2 I^A(x_1)}{(\partial x_1)^2} > 0.$$

**De marginale substitutieverhouding geeft, vertrekkend vanuit de bundel  $x^A$ , hoeveel eenheden van  $x_2$  de consument wil opgeven teneinde één eenheid meer te krijgen van  $x_1$ .**

**$\Rightarrow$  De marginale substitutieverhouding is de marginale bereidheid tot betalen voor goed 1 in termen van goed 2.**

Strikt convexe preferenties  $\Rightarrow$

- de marginale substitutieverhouding daalt naarmate de consument meer eenheden van het eerste goed heeft;
- de bereidheid tot betalen voor goed 1 in termen van goed 2 neemt af naarmate de consument meer eenheden van goed 1 heeft.

Dit is een intuïtief aantrekkelijke eigenschap.

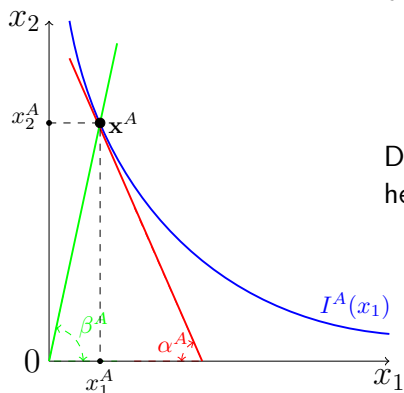
## 2.2.4 Indifferentiecurven en substitutie

Substitutie-elasticiteit: karakteriseert de substitutieverhouding tussen twee goederen in een bepaald punt.

⇒ bepaald door de vorm van de indifferentiecurve van de consument.

Volgende slide: elk punt  $(x_1^A, x_2^A)$  op een indifferentiecurve wordt gekenmerkt door twee verhoudingen.

**Figuur:** Kenmerken van een punt op de indifferentiecurve



De verhouding tussen de hoeveelheden van beide goederen in het punt:

$$\frac{x_2^A}{x_1^A}.$$

De marginale substitutieverhouding (min de helling van de indifferentiecurve) in dat punt,

$$MSV_{1,2}(\mathbf{x}^A) = - \left. \frac{\partial I^A(x_1)}{\partial x_1} \right|_{x_1^A}.$$

## Discrete substitutie-elasticiteit

De discrete substitutie-elasticiteit in een punt  $\mathbf{x}^A = (x_1^A, x_2^A)$  geeft de procentuele verandering in  $\frac{x_2}{x_1}$  ten gevolge van een procentuele verandering in de marginale substitutieverhouding langsheen de indifferentiecurve.

Mathematisch:

$$e_{MSV_{1,2}}^{x_2/x_1}(\mathbf{x}^A, \Delta MSV_{1,2}) = \frac{\frac{\Delta^*(x_2/x_1)}{(x_2^A/x_1^A)}}{\frac{\Delta MSV_{1,2}}{MSV_{1,2}(\mathbf{x}^A)}} = \frac{\Delta^*(x_2/x_1)}{\Delta MSV_{1,2}} \frac{MSV_{1,2}(\mathbf{x}^A)}{(x_2^A/x_1^A)}$$

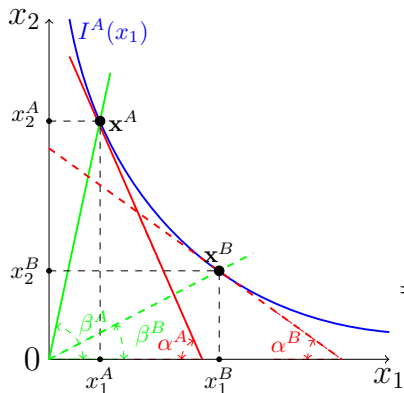
waarbij  $\Delta MSV_{1,2}$  de verandering in de  $MSV_{1,2}$  is, en  $\Delta^*(x_2/x_1)$  de corresponderende verandering in de verhouding  $x_2/x_1$  langsheen de indifferentiecurve.

Volgende slide: grafische interpretatie van de discrete substitutie-elasticiteit.

# Preferenties

Figuur: Discrete substitutie-elasticiteit

van  $\mathbf{x}^A$  naar  $\mathbf{x}^B$



$$\begin{aligned}
 e_{MSV_{1,2}}^{x_2/x_1}(\mathbf{x}^A, \Delta MSV_{1,2}) &= \frac{\frac{\Delta^*(x_2/x_1)}{(x_2^A/x_1^A)}}{\frac{\Delta MSV_{1,2}}{MSV_{1,2}(\mathbf{x}^A)}} \\
 &= \frac{\Delta^*(x_2/x_1)}{\Delta MSV_{1,2}} \frac{MSV_{1,2}(\mathbf{x}^A)}{(x_2^A/x_1^A)} \\
 &= \frac{\frac{x_2^B}{x_1^B} - \frac{x_2^A}{x_1^A}}{MSV_{1,2}(\mathbf{x}^B) - MSV_{1,2}(\mathbf{x}^A)} \frac{MSV_{1,2}(\mathbf{x}^A)}{(x_2^A/x_1^A)}
 \end{aligned}$$

Substitutie-elasticiteit in een bepaald punt:  $\Delta MSV_{1,2} \rightarrow 0$ .

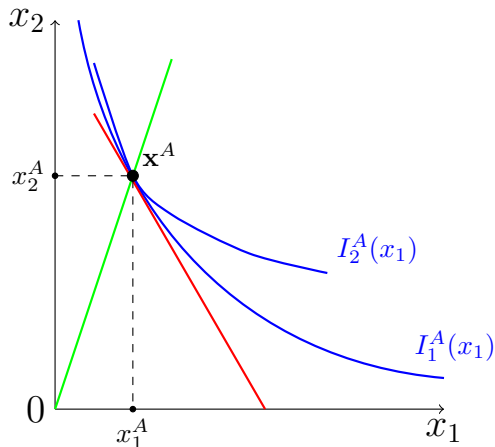
## Substitutie-elasticiteit in een bepaald punt

De substitutie-elasticiteit in een punt  $\mathbf{x}^A = (x_1^A, x_2^A)$  vertrekt van de discrete substitutie-elasticiteit in dat punt en laat vervolgens  $\Delta MSV_{1,2}$  oneindig klein worden:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{MSV_{1,2}}^{x_2/x_1}(\mathbf{x}^A) &= \lim_{\Delta MSV_{1,2} \rightarrow 0} e_{MSV_{1,2}}^{x_2/x_1}(\mathbf{x}^A, \Delta MSV_{1,2}) \\ &= \frac{d^*(x_2/x_1)}{dMSV_{1,2}} \frac{MSV_{1,2}(\mathbf{x}^A)}{(x_2^A/x_1^A)} \\ &= \frac{d^* \ln(x_2/x_1)}{d \ln MSV_{1,2}(\mathbf{x})}.\end{aligned}$$

Interpretatie: neem 2 indifferentiecurven doorheen hetzelfde punt. Degene met de grootste buiging heeft de kleinste substitutie-elasticiteit. (Bewijs: appendix). Zie volgende slide.

Figuur: Substitutie-elasticiteit en buiging



## 2.2.5 Constructie van een nutsfunctie

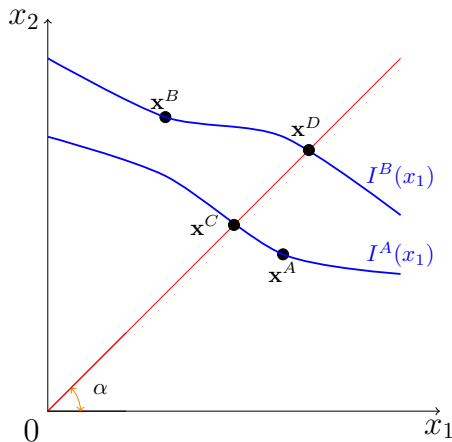
Fundamenteel theorema: als een preferentierelatie volledig, transitief en continu is, dan bestaat er een continue nutsfunctie die de preferentierelatie weerspiegelt.

+ sterke monotoniciteit  $\Rightarrow$  het wordt eenvoudig om een nutsfunctie te construeren.

Figuur: 2 bundels

- $\mathbf{x}^A$  op  $I(\mathbf{x}^A)$ ;
- $\mathbf{x}^B$  op  $I(\mathbf{x}^B)$ ;
- $I(\mathbf{x}^B)$  boven  $I(\mathbf{x}^A) \Rightarrow \mathbf{x}^B \succ \mathbf{x}^A$  (sterke monotoniciteit)

Figuur: Constructie van een nutsfunctie



Hoe kunnen we nu een nutsfunctie construeren voor deze preferentierelatie?

- Neem een voerstraal vanuit de oorsprong met een bepaalde hoek  $\alpha$ .
- Bepaal de consumptiebundel  $\mathbf{x}^C$  die op het snijpunt van de voerstraal en  $I(\mathbf{x}^A)$  ligt.
- Bepaal de consumptiebundel  $\mathbf{x}^D$  die op het snijpunt van de voerstraal en  $I(\mathbf{x}^B)$  ligt.
- Bepaal het nut van  $\mathbf{x}^A$  als  $d(\mathbf{x}^C, \mathbf{0})$ .
- Bepaal het nut van  $\mathbf{x}^B$  als  $d(\mathbf{x}^D, \mathbf{0})$ .
- Aangezien  $d(\mathbf{x}^D, \mathbf{0}) > d(\mathbf{x}^C, \mathbf{0})$  is de afstand die op deze manier bepaald wordt een nutsfunctie die de preferentierelatie weerspiegelt.

We kunnen duidelijk zien dat de nutsfunctie die we net hebben opgesteld, niet uniek is.

- Elke monotone transformatie van de afstand zal ervoor zorgen dat de preferentierelatie wordt weerspiegeld. We zouden bijvoorbeeld ...
- Bovendien hadden we om het even welke hoek kunnen nemen om van daar de voerstraal te trekken en de afstand te berekenen.

Dit bevestigt de ordinaliteit van de nutsfunctie.

## 2.3 Nutsfuncties

Het fundamentele theorema zegt ons dat, als een preferentierelatie volledig, transitief en continu is, er een continue nutsfunctie bestaat die de preferentierelatie weerspiegelt.

### 2.3.1 Eigenschappen van nutsfuncties

We vertalen de eigenschappen van de preferentierelatie naar eigenschappen van de nutsfunctie.

Beschouw eerst de 3 monotoniciteitsaxioma's.

## Definitie: Monotoniciteitsaxiomas voor nutsfuncties.

- (a) Een nutsfunctie (en de onderliggende preferentierelatie) voldoet aan lokale niet-saturatie als en slechts als  $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^k$  en  $\forall \epsilon > 0 : \exists \mathbf{y} \in \mathbb{R}_+^k$  met  $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < \epsilon : u(\mathbf{y}) > u(\mathbf{x})$ .
- (b) Een nutsfunctie (en de onderliggende preferentierelatie) is zwak monotoon als en slechts als  $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}_+^k : \mathbf{x} \geq \mathbf{y} \Rightarrow u(\mathbf{x}) \geq u(\mathbf{y})$ .
- (c) Een nutsfunctie (en de onderliggende preferentierelatie) is sterk monotoon als en slechts als  $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}_+^k : \mathbf{x} \geq \mathbf{y}$  en  $\mathbf{x} \neq \mathbf{y} \Rightarrow u(\mathbf{x}) > u(\mathbf{y})$ .

Vooraleer we de convexiteitsaxiomas beschouwen, definiëren we de begrippen quasi concave en strikt quasi concave functie.

**Definitie: Quasiconcave en strikt quasiconcave functie.**

- (a) Een functie  $f : \mathbb{R}_+^k \rightarrow \mathbb{R}$  is quasiconcaaf als,  $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^k$  en  $\forall \alpha \in \mathbb{R}$  de verzameling  $\{\mathbf{x} \mid f(\mathbf{x}) \geq \alpha\}$  convex is.
- (b) Een functie  $f : \mathbb{R}_+^k \rightarrow \mathbb{R}$  is strikt quasiconcaaf als,  $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^k$  en  $\forall \alpha \in \mathbb{R}$  de verzameling  $\{\mathbf{x} \mid f(\mathbf{x}) \geq \alpha\}$  strikt convex is.

Indien de nutsfunctie bestaat, dan is de onderliggende preferentierelatie (strikt) convex als en slechts als de nutsfunctie (strikt) quasiconcaaf is.

Voor het geval  $k = 2$ , kunnen we de indifferentiecurve eveneens definiëren door gebruik te maken van de nutsfunctie:

## Definitie: Indifferentiecurve.

Gegeven een willekeurige goederenbundel  $\mathbf{x}^A$  en een nutsfunctie  $u(x_1, x_2) : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}$  is de indifferentiecurve die door deze goederenbundel gaat de impliciete curve:

$$I^A(x_1) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+ : u(x_1, I^A(x_1)) = u(\mathbf{x}^A).$$

De indifferentiecurve doorheen de goederenbundel  $\mathbf{x}^A$  geeft weer hoe de hoeveelheid van  $x_2$  moet veranderen als  $x_1$  verandert, en de consument hetzelfde nut bereikt als in  $\mathbf{x}^A$ .

## Gevolgtrekking: Marginale substitutieverhouding.

Indien de preferentierelatie kan weerspiegeld worden door een differentieerbare nutsfunctie  $u(x_1, x_2) : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}$  en de indifferentiecurve  $I^A(x_1) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  door het punt  $A$  eveneens afleidbaar is, dan geldt voor de marginale substitutieverhouding in het punt  $A$

$$MSV_{1,2}(\mathbf{x}^A) = - \frac{\partial I^A(x_1)}{\partial x_1} \Big|_{x_1^A} = \frac{\frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_1} \Big|_{\mathbf{x}^A}}{\frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_2} \Big|_{\mathbf{x}^A}}.$$

Bewijs: impliciete functie theorema. Vertrek van de definitie

$$u(x_1, I^A(x_1)) = u(\mathbf{x}^A).$$

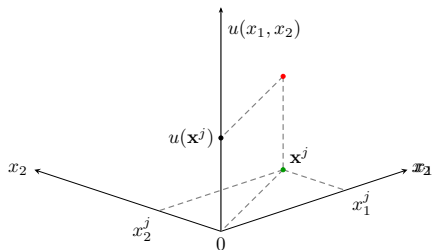
Deze identiteit afleiden m.b.t.  $x_1$  geeft

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_1} + \frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_2} \frac{\partial I^A(x_1)}{\partial x_1} &= 0 \\ \Leftrightarrow MSV_{1,2}(\mathbf{x}^A) &= - \frac{\partial I^A(x_1)}{\partial x_1} \Big|_{x_1^A} = \frac{\frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_1} \Big|_{\mathbf{x}^A}}{\frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_2} \Big|_{\mathbf{x}^A}}. \end{aligned}$$

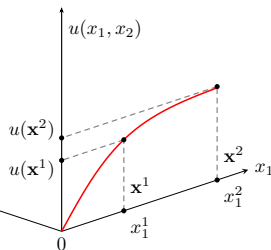
## 2.3.2 Nutsfunctie in driedimensionele ruimte

We kunnen de nutsfunctie  $u(x_1, x_2) : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}$  voorstellen in 3 dimensies.

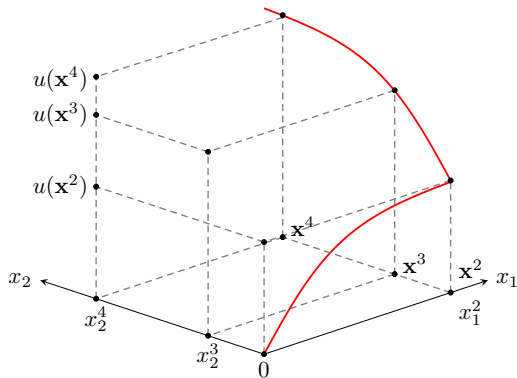
Figuur: (a) Coördinaten in 3 D



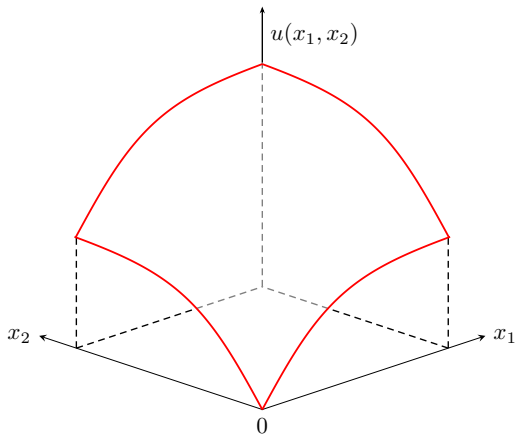
Figuur: (b) Nutsfunctie gegeven  $x_2 = 0$



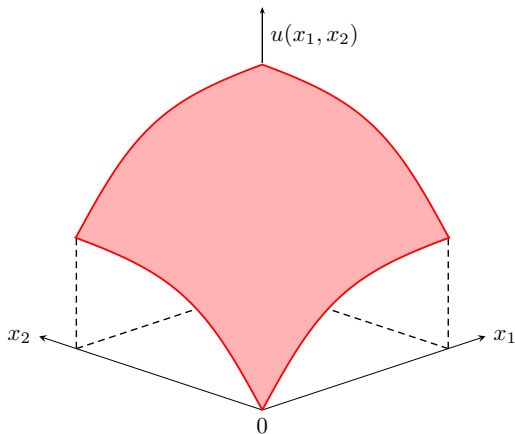
Figuur: Constructie nutsfunctie 1



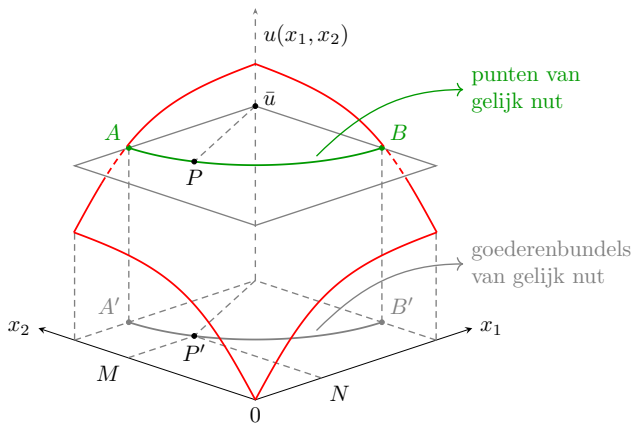
Figuur: Constructie nutsfunctie 2



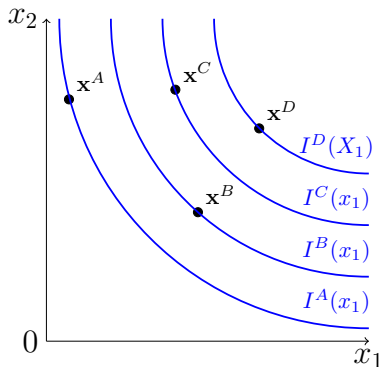
Figuur: Constructie nutsfunctie 3



Figuur: Constructie indifferentiecurve



Figuur: Indifferentiekaart

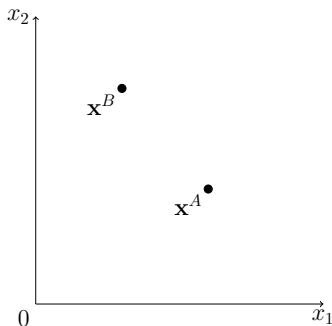


- Hoe hoger de doorsnede, hoe hoger het nut en hoe verder de indifferentiecurve van de oorsprong verwijderd is:

$$U^D > U^C > U^B > U^A.$$

- De indifferentiekaart is zoals een hoogtekaart.

Figuur: 2 bundels

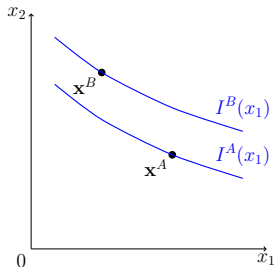


Welke goederenbundel,  $\mathbf{x}^A$  of  $\mathbf{x}^B$  heeft, onder de veronderstelling van sterke monotoniciteit, het hoogste nut?

Dit hangt af van de posities van de indifferencecurven!

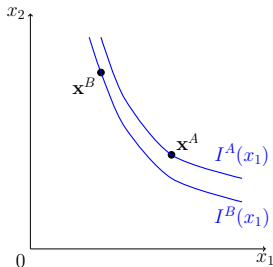
# Nutsfuncties

Figuur:  $\mathbf{x}^B \succ \mathbf{x}^A$



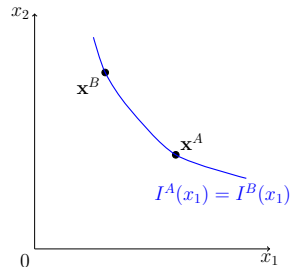
$$u(\mathbf{x}^B) > u(\mathbf{x}^A)$$

Figuur:  $\mathbf{x}^A \succ \mathbf{x}^B$



$$u(\mathbf{x}^A) > u(\mathbf{x}^B)$$

Figuur:  $\mathbf{x}^A \sim \mathbf{x}^B$



$$u(\mathbf{x}^A) = u(\mathbf{x}^B)$$

## 2.3.3 Voorbeelden van nutsfuncties

### Voorbeeld 2. Cobb Douglas nutsfunctie.

De Cobb Douglas nutsfunctie (met 2 goederen) wordt gedefinieerd als

$$u(x_1, x_2) = a \cdot x_1^b \cdot x_2^c,$$

waarbij  $a, b, c > 0$ . Definitie indifferentiecurve door een bepaald punt  $\mathbf{x}^A = (x_1^A, x_2^A)$ : de functie  $I^A(x_1) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  :

$$u(\mathbf{x}^A) = ax_1^b \left[ I^A(x_1) \right]^c.$$

We kunnen deze vergelijking oplossen om de expliciete uitdrukking voor de indifferentiecurve te vinden:

$$I^A(x_1) = \left[ \frac{u(\mathbf{x}^A)}{ax_1^b} \right]^{\frac{1}{c}} = \left[ u(\mathbf{x}^A) \right]^{\frac{1}{c}} a^{-\frac{1}{c}} x_1^{-\frac{b}{c}}.$$

Om de marginale substitutieverhouding te vinden leiden we deze functie af met betrekking tot  $x_1$ :

$$\begin{aligned}\frac{\partial I^A(x_1)}{\partial x_1} &= - \left[ u(\mathbf{x}^A) \right]^{\frac{1}{c}} a^{-\frac{1}{c}} \frac{b}{c} x_1^{-\frac{b}{c}-1} \\ &= -\frac{b}{c} \left[ u(\mathbf{x}^A) \right]^{\frac{1}{c}} a^{-\frac{1}{c}} x_1^{-\frac{b+c}{c}}.\end{aligned}$$

De marginale substitutieverhouding wordt gevonden door deze afgeleide van teken te veranderen en te evalueren in een bepaald punt  $\mathbf{x}^A$ :

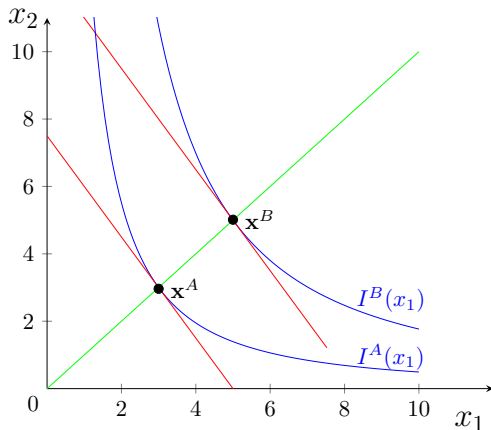
$$\begin{aligned}MSV_{1,2}(\mathbf{x}^A) &= \frac{b}{c} \left[ a(x_1^A)^b (x_2^A)^c \right]^{\frac{1}{c}} a^{-\frac{1}{c}} (x_1^A)^{-\frac{b+c}{c}} \\&= \frac{b}{c} a^{\frac{1}{c} - \frac{1}{c}} (x_2^A)^{\frac{c}{c}} (x_1^A)^{\frac{b}{c} - \frac{b}{c} - \frac{c}{c}} \\&= \frac{b}{c} \cancel{a^{\frac{1}{c} - \frac{1}{c}}} (x_2^A)^{\frac{c}{c}} (x_1^A)^{\frac{b}{c} - \frac{b}{c} - \frac{c}{c}} \\&= \frac{b}{c} \frac{x_2^A}{x_1^A}.\end{aligned}$$

De marginale substitutieverhouding van de Cobb Douglas nutsfunctie is een constante ( $b/c$ ) vermenigvuldigd met de verhouding  $\frac{x_2^A}{x_1^A}$ , en heeft de volgende eigenschappen:

- als  $x_2^A = x_1^A$ , dan is  $MSV_{1,2}(\mathbf{x}^A) = \frac{b}{c}$ ,
- $\lim_{x_1^A \rightarrow 0} MSV_{1,2}(\mathbf{x}^A) = \infty$ ,
- $\lim_{x_1^A \rightarrow \infty} MSV_{1,2}(\mathbf{x}^A) = 0$ .

Hier volgt een figuur van de indifferentiecurve, voor het geval  $a = 1$ ,  $b = 0.6$  en  $c = 0.4$ .

Figuur: Cobb Douglas indifferentiecurve



- de richtingscoëfficiënt van de groene lijn is 1;
- de richtingscoëfficiënt van de rode lijn door het punt  $x^A$  is, omdat  $x_1^A = x_2^A$ , gelijk aan  $(-b/c = -3/2)$ ;
- de richtingscoëfficiënt van de rode lijn door het punt  $x^B$  is, omdat  $x_1^B = x_2^B$ , gelijk aan  $(-b/c = -3/2)$ .

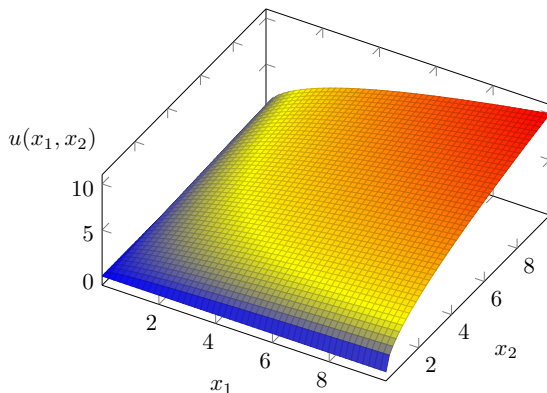
Omdat  $MSV_{1,2}(\mathbf{x}) = \frac{b}{c} \frac{x_2}{x_1}$ , is

$$\begin{aligned}\ln(MSV_{1,2}(\mathbf{x})) &= \ln\left(\frac{b}{c}\right) + \ln\left(\frac{x_2}{x_1}\right) \\ \Leftrightarrow \ln\left(\frac{x_2}{x_1}\right) &= \ln(MSV_{1,2}(\mathbf{x})) - \ln\left(\frac{b}{c}\right),\end{aligned}$$

zodat de substitutie-elasticiteit

$$\varepsilon_{MSV_{1,2}}^{x_2/x_1}(\mathbf{x}^A) = \frac{\partial \ln\left(\frac{x_2}{x_1}\right)}{\partial \ln(MSV_{1,2}(\mathbf{x}))} \bigg|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^A} = 1.$$

Figuur: Cobb Douglas nutsfunctie



## Voorbeeld 3. Leontief nutsfunctie.

De Leontief nutsfunctie (met 2 goederen) wordt gedefinieerd als

$$u(x_1, x_2) = \min \{a \cdot x_1, b \cdot x_2\},$$

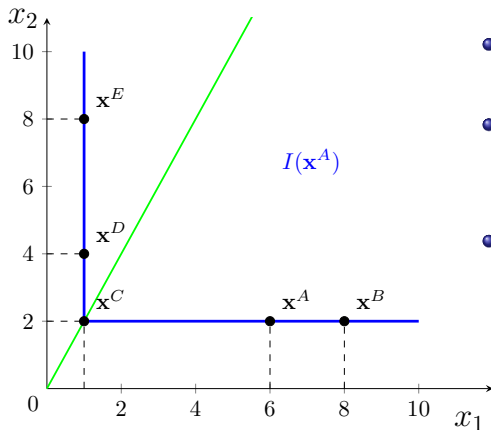
waarbij  $a, b > 0$ .

Deze nutsfunctie is niet afleidbaar  $\Rightarrow$  het impliciete functie theorema kan niet gebruikt worden om de helling van de indifferentiecurve te vinden.

We illustreren hoe de indifferentiecurve eruit ziet voor het geval  $a = 2$  en  $b = 1$  op de volgende slides, dwz voor de Leontief nutsfunctie:

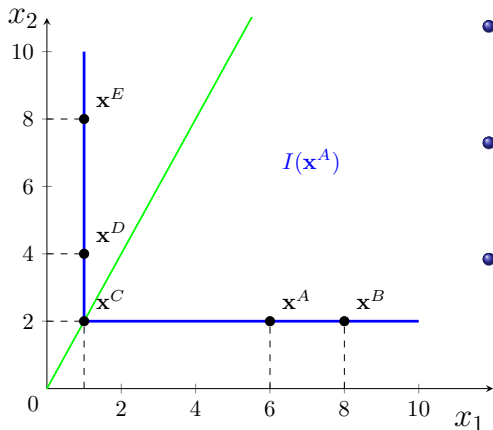
$$u(x_1, x_2) = \min \{2 \cdot x_1, 1 \cdot x_2\}.$$

Figuur: Leontief indifferentie verzameling



- $\mathbf{x}^A = (6, 2)$ :  
 $u(\mathbf{x}^A) = \min \{2 \cdot 6, 1 \cdot 2\} = 2$ ;
- $\mathbf{x}^B = (8, 2)$ :  
 $u(\mathbf{x}^B) = \min \{2 \cdot 8, 1 \cdot 2\} = 2$   
 $\Rightarrow u(\mathbf{x}^B) = u(\mathbf{x}^A)$ ;
- $\mathbf{x}^C = (1, 2)$ :  
 $u(\mathbf{x}^C) = \min \{2 \cdot 1, 1 \cdot 2\} = 2$   
 $\Rightarrow u(\mathbf{x}^C) = u(\mathbf{x}^A)$ ;

Figuur: Leontief indifferentie verzameling



- $\mathbf{x}^C = (1, 2)$ :  
 $u(\mathbf{x}^C) = \min \{2 \cdot 1, 1 \cdot 2\} = 2$   
 $\Rightarrow u(\mathbf{x}^C) = u(\mathbf{x}^A)$ ;
- $\mathbf{x}^D = (1, 4)$ :  
 $u(\mathbf{x}^D) = \min \{2 \cdot 1, 1 \cdot 4\} = 2$   
 $\Rightarrow u(\mathbf{x}^D) = u(\mathbf{x}^A)$ ;
- $\mathbf{x}^E = (1, 8)$ :  
 $u(\mathbf{x}^E) = \min \{2 \cdot 1, 1 \cdot 8\} = 2$   
 $\Rightarrow u(\mathbf{x}^E) = u(\mathbf{x}^A)$ .

De gevonden indifferentiecurve wordt wiskundig beschreven door de volgende uitdrukking:

$$I^A(x_1) = \begin{cases} 2 & \text{als } x_1 > 1 \\ [2, \infty] & \text{als } x_1 = 1 \\ \emptyset & \text{als } x_1 < 1. \end{cases}$$

De indifferentiecurve is geen functie, want met  $x_1 = 1$  wordt geen unieke waarde van  $x_2$  geassocieerd.

Het hoekpunt van de indifferentiecurve is het cruciale element om de indifferentiecurve te formuleren. We veralgemenen de procedure.

We zoeken de indifferentieverzameling voor een bepaald punt  $\mathbf{x}^A$ . Definieer

$$\bar{u} = \min \left\{ a \cdot x_1^A, b \cdot x_2^A \right\}.$$

Het hoekpunt van de indifferentiecurve  $(\hat{x}_1^A, \hat{x}_2^A)$  vinden we daar waar

$$\bar{u} = a \cdot \hat{x}_1^A = b \cdot \hat{x}_2^A,$$

zodat

$$\hat{x}_1^A = \frac{\bar{u}}{a} \text{ en } \hat{x}_2^A = \frac{\bar{u}}{b}.$$

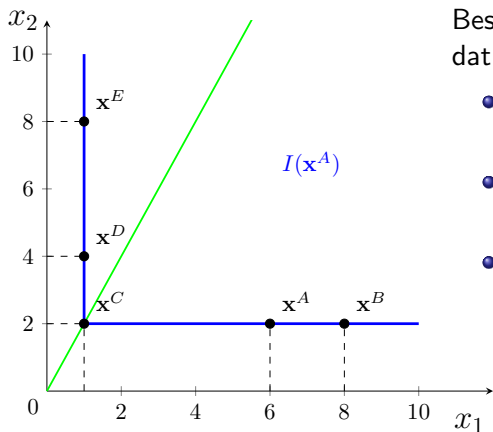
De indifferentieverzameling geassocieerd met de Leontief nutsfunctie met 2 goederen wordt gevonden als

$$I^A(x_1) = \begin{cases} \hat{x}_2^A & \text{als } x_1 > \hat{x}_1^A \\ [\hat{x}_2^A, \infty] & \text{als } x_1 = \hat{x}_1^A \\ \emptyset & \text{als } x_1 < \hat{x}_1^A. \end{cases}$$

De indifferentieverzameling is geen functie, want met  $x_1 = \hat{x}_1^A$  wordt geen unieke waarde van  $x_2$  geassocieerd.

De marginale substitutieverhouding van de Leontief nutsfunctie in een bepaald punt = minus de helling van de raaklijn aan de indifferentiecurve door dat punt. Zie volgende slide.

**Figuur:** Leontief indifferentie verzameling en MSV

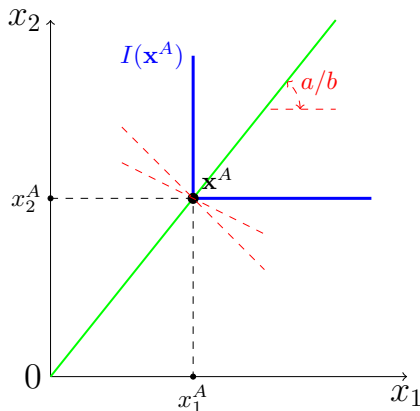


Beschouw punten op  $I(\mathbf{x}^A)$  zodanig dat

- $ax_1 > bx_2 : 2x_1 > x_2$ : rechts van  $\mathbf{x}^C$ :  $MSV_{1,2} = 0$ ;
- $ax_1 < bx_2 : 2x_1 < x_2$ : boven  $\mathbf{x}^C$ :  $MSV_{1,2} = \infty$ ;
- $ax_1 = bx_2 : 2x_1 = x_2$  in  $\mathbf{x}^C$ :  $MSV_{1,2}$  onbepaald.

# Nutsfuncties

**Figuur:** Substitutie-elasticiteit Leontief nutsfunctie



- Kleine verandering in  $MSV_{1,2} \Rightarrow x_2^A/x_1^A$  verandert niet
- $\Rightarrow$  substitutie-elasticiteit is 0.

## Voorbeeld 4. Lineaire nutsfunctie.

De lineaire nutsfunctie (met 2 goederen) wordt gedefinieerd als

$$u(x_1, x_2) = a \cdot x_1 + b \cdot x_2,$$

waarbij  $a, b > 0$ . De indifferentiecurve door een bepaald punt  $\mathbf{x}^A$ : die combinaties van  $x_1$  en  $x_2$  die nutsniveau  $u(\mathbf{x}^A)$  opleveren. Voor hen geldt

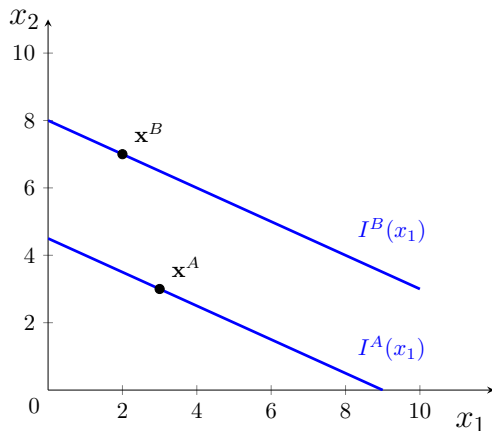
$$u(\mathbf{x}^A) = ax_1^A + bx_2^A.$$

Als we deze functie oplossen naar  $x_2$  bekomen we de indifferentiecurve:

$$I^A(x_1) = \frac{u(\mathbf{x}^A)}{b} - \frac{a}{b}x_1,$$

zodat de indifferentiecurve een rechte is met intercept  $u(\mathbf{x}^A)/b$  en richtingscoëfficiënt  $-a/b$ . De volgende figuur illustreert de vorm van de indifferentiecurve voor de lineaire nutsfunctie met  $a = 1$  en  $b = 2$ .

**Figuur:** Indifferentiecurve bij lineaire nutsfunctie



- De richtingscoëfficiënt van de indifferentiecurve door het punt  $x^A$  is  $-a/b = -1/2$ ;
- de richtingscoëfficiënt van de indifferentiecurve door het punt  $x^B$  is  $-a/b = -1/2$ ;
- $\forall x \in \mathbb{R}_+^2 : MSV_{1,2}(x) = 1/2$ .

## 2.4 Budgetbeperking

### 2.4.1 Definitie

Budgetbeperking: beschrijft uit welke goederenbundels de consument kan kiezen.

We veronderstellen dat dit de enige beperking is waarmee hij geconfronteerd wordt.

$Z$ : het exogeen inkomen dat hij kan besteden aan  $k$  goederen. De prijs van goed  $i$  wordt gegeven door  $p_i$ . Zijn totale uitgaven worden gegeven door

$$p_1x_1 + p_2x_2 + \cdots + p_kx_k = \sum_{i=1}^k p_ix_i.$$

# Budgetbeperking

De budgetbeperking zegt dat de totale uitgaven van de consument niet groter mogen zijn dan zijn inkomen:

$$\sum_{i=1}^k p_i x_i \leq Z.$$

De formele definitie van de budgetbeperking is als volgt.

## Definitie: Budgetverzameling.

Gegeven  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}_+^k$ , de prijsvector van de goederen die de consument kan kopen, en zijn inkomen,  $Z \in \mathbb{R}_{++}$ , is de budgetverzameling

$$B(\mathbf{p}, Z) = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^k : \sum_{i=1}^k p_i x_i \leq Z \right\}.$$

In het geval van 2 goederen vereist de budgetbeperking

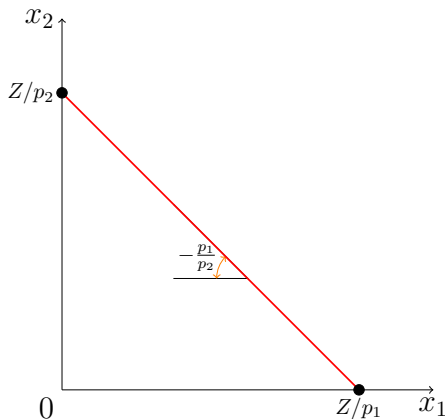
$$\begin{aligned} Z &\geq p_1x_1 + p_2x_2 \\ \Leftrightarrow x_2 &\leq \frac{Z}{p_2} - \frac{p_1}{p_2}x_1. \end{aligned}$$

Voor de interpretatie is het aangewezen om eerst te kijken naar het geval waar deze ongelijkheid houdt met gelijkheid:

$$\begin{aligned} Z &= p_1x_1 + p_2x_2 \\ \Leftrightarrow x_2 &= \frac{Z}{p_2} - \frac{p_1}{p_2}x_1. \end{aligned}$$

Deze vergelijking is grafisch een rechte, zoals geïllustreerd op de volgende slide.

Figuur: Budgetrechte

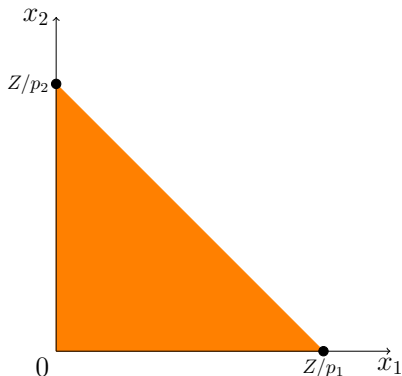


- Het intercept van de budgetrechte is  $Z/p_2$ ;
- het snijpunt met de  $x_1$ -as is  $Z/p_1$ ;
- de richtingscoëfficiënt van de budgetrechte is  $-\frac{p_1}{p_2} = \tan(\alpha)$ ;
- $Z$ ,  $p_1$  en  $p_2$  zijn allen exogeen, zodat ook  $Z/p_1$ ,  $Z/p_2$  en  $-p_1/p_2$  exogeen zijn.

# Budgetbeperking

De budgetverzameling bevat alle punten die voldoen aan de budgetbeperking: dit zijn alle punten die zich op of onder de budgetrechte bevinden.

Figuur: Budgetverzameling



Hoe de budgetverzameling verandert indien de exogenen  $Z$ ,  $p_1$  en  $p_2$  zich wijzigen wordt bepaald door hoe de budgetbeperking reageert op veranderingen in deze exogene variabelen.

## 2.4.2 Veranderingen in de budgetbeperking ten gevolge van veranderingen in de exogene variabelen.

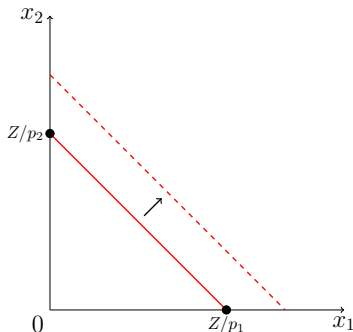
We hebben 3 exogene veranderlijken:

- het inkomen,  $Z$ ;
- de prijs van het eerste goed,  $p_1$ ;
- de prijs van het tweede goed,  $p_2$ .

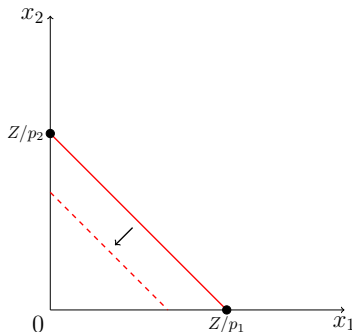
**2.4.2.1** We bestuderen in de volgende figuren hoe de budgetrechte verandert indien één van deze exogenen verandert.

$$x_2 = \frac{Z}{p_2} - \frac{p_1}{p_2}x_1$$

Figuur: (a)  $Z$  stijgt



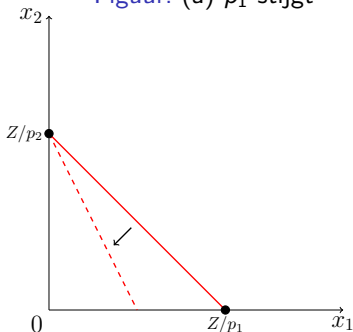
Figuur: (b)  $Z$  daalt



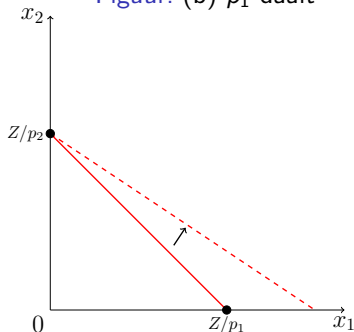
Een verandering in het inkomen leidt tot een parallelle verschuiving van de budgetrechte.

$$x_2 = \frac{Z}{p_2} - \frac{p_1}{p_2}x_1$$

Figuur: (a)  $p_1$  stijgt



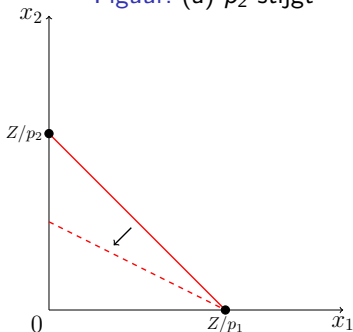
Figuur: (b)  $p_1$  daalt



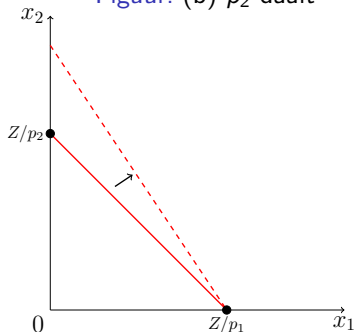
Een verandering in de prijs van het eerste goed leidt tot een rotatie van de budgetrechte in het punt  $(0, Z/p_2)$ .

$$x_2 = \frac{Z}{p_2} - \frac{p_1}{p_2}x_1$$

Figuur: (a)  $p_2$  stijgt



Figuur: (b)  $p_2$  daalt



Een verandering in de prijs van het tweede goed leidt tot een rotatie van de budgetrechte in het punt  $(Z/p_1, 0)$ .

**2.4.2.2** Beschouw nu wat er gebeurt indien de prijzen van beide goederen in dezelfde mate veranderen: beide prijzen worden vermenigvuldigd met een factor  $\lambda > 0$ . De oude budgetrechte

$$x_2 = \frac{Z}{p_2} - \frac{p_1}{p_2}x_1,$$

wordt nu vervangen door de budgetrechte

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{Z}{\lambda p_2} - \frac{\lambda p_1}{\lambda p_2} x_1 \\ &= \frac{Z}{\lambda p_2} - \frac{p_1}{p_2} x_1. \end{aligned}$$

De richtingscoëfficiënt van de nieuwe budgetrechte is identiek aan deze van de oude budgetrechte; alleen het intercept van de budgetrechte is veranderd:

- $\lambda > 1$ , dan daalt het intercept (en lijkt het alsof de consument minder inkomen heeft);
- als  $\lambda < 1$  dan stijgt het intercept, (en lijkt het alsof de consument meer inkomen heeft).

**2.4.2.3** Beschouw tenslotte wat er gebeurt indien de prijzen van beide goederen én het inkomen in dezelfde mate veranderen: beide prijzen en het inkomen worden vermenigvuldigd met een factor  $\lambda > 0$ . De oude budgetrechte

$$x_2 = \frac{Z}{p_2} - \frac{p_1}{p_2}x_1,$$

wordt nu vervangen door de budgetrechte

$$\begin{aligned}x_2 &= \frac{\lambda Z}{\lambda p_2} - \frac{\lambda p_1}{\lambda p_2}x_1 \\&= \frac{\cancel{\lambda}Z}{\cancel{\lambda}p_2} - \frac{\cancel{\lambda}p_1}{\cancel{\lambda}p_2}x_1 = \frac{Z}{p_2} - \frac{p_1}{p_2}x_1.\end{aligned}$$

De nieuwe budgetrechte valt samen met de oude budgetrechte. Bijgevolg zal het gedrag van de consument niet veranderen.