۱.

a. درست، فرض می‌کنیم بردار $\vec v$، بردار ویژه A باشد داریم:

$$A\vec v = \lambda \vec v \xrightarrow{\times A^{-1}} \underbrace{A^{-1}(A}_{I}\vec v) = A^{-1}(\lambda \vec v) \Rightarrow \vec v = \lambda (A^{-1}\vec v)$$

$$\xrightarrow[\lambda \neq 0]{\times \frac{1}{\lambda}} \quad \frac{1}{\lambda}\vec v = A^{-1}\vec v \longrightarrow \text{درست}$$

بنابراین $\vec v$ بردار ویژه A^{-1} نیز هست با این تفاوت که مقدار ویژه مربوط به آن $\frac{1}{\lambda}$ خواهد بود

b. نادرست، می‌تواند یک مقدار ویژه با چندگانگی ۲ یا بالاتر باشد، لزومی ندارد که حتما دو مقدار ویژه متفاوت باشد.

مثال نقض: (Example 3 جزوه)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & -5 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

بردارهای $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ هر دو بردار ویژه مستقل خطی اند که مقدار ویژه‌ی متناسب با هر دوی آنها $\lambda = -2$ است.

c. درست

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "A"] \arrow[d] & Ax \\ {[x]_B} \arrow[r, "D"] & {[Ax]_B} \arrow[u] \end{tikzcd}$$

ماتریس قطری

سیستم مختصات

چون D قطری است پس معکوس‌پذیر است همچنین P و P^{-1} هم معکوس‌پذیرند $\longrightarrow A = PDP^{-1} \longrightarrow$

و ضرب چند ماتریس معکوس‌پذیر، ماتریسی معکوس‌پذیر می‌شود $\longleftarrow$ A is Invertible

d. درست، زیرا:

$$AB \xrightarrow{\times A^{-1}} A^{-1}(AB) \xrightarrow{\times A} \underbrace{A^{-1}(AB)A}_{IBA}$$

$$\hookrightarrow \underbrace{BA = A^{-1}(AB)A}_{\text{مشابه}}$$

e. درست، زیرا:

$$A = P^{-1}BP \longrightarrow B = PAP^{-1}$$

چون P و A معکوس پذیرند ←

ضرب آنها نیز معکوس پذیر است که یعنی B معکوس پذیر است و وارون B برابر است با:

$$B^{-1} = (PAP^{-1})^{-1} = (P^{-1})^{-1}A^{-1}P^{-1} = PA^{-1}P^{-1}$$

$$A = P^{-1}BP \xrightarrow{\times A^{-1}} A \times A^{-1} = (P^{-1}BP)\times A^{-1} \rightarrow I = P^{-1}BPA^{-1}$$

$$\xrightarrow{P\times} P \times I = \underbrace{P\times(P^{-1}}_{I}BPA^{-1}) \rightarrow P = BPA^{-1}$$

$$\xrightarrow{B^{-1}\times} B^{-1}\times P = B^{-1}\times B(PA^{-1}) \rightarrow B^{-1}P = PA^{-1}$$

$$\xrightarrow{\times P^{-1}} B^{-1}P\times P^{-1} = PA^{-1}P^{-1} \rightarrow \underbrace{B^{-1} = PA^{-1}P^{-1}}_{\text{مشابه}}$$

f. درست، زیرا:

حکم: $(\text{Row } A)^{\perp} = \text{Nul } A$

ماتریس A را برحسب سطرهایش اینگونه تصور کنید: $A = \begin{bmatrix} a_1^T \\ a_2^T \\ \vdots \\ a_n^T \end{bmatrix}$

$$\text{Nul } A \rightarrow Ax = 0 \longrightarrow \begin{bmatrix} a_1^T \\ a_2^T \\ \vdots \\ a_n^T \end{bmatrix} x = 0 \longrightarrow \begin{bmatrix} a_1^T x \\ a_2^T x \\ \vdots \\ a_n^T x \end{bmatrix} = 0 \; \begin{cases} a_1 \cdot x = 0 \\ a_2 \cdot x = 0 \\ \vdots \\ a_n \cdot x = 0 \end{cases}$$

پس برای x هایی که در فضای پوچ A هستند بر سطرهای A عمودند و چون Row A از span سطرهای A تشکیل می‌شود پس $(\text{Row } A)^{\perp} = \text{Nul } A$ ← حکم اثبات شد

g. نادرست، بردارهای درون $Col\ A$ بر بردارهای درون فضای پوچ ترانهاده‌ی A عمود خواهد بود نه A، با استفاده از اثبات در قسمت قبل می‌توان این نتیجه را گرفت چون:

اثبات کردیم $\longrightarrow (Row\ A)^{\perp} = Nul\ A \xrightarrow[A^T]{\text{به جای } A} (\underbrace{Row\ A^T}_{Col\ A}) = Nul\ A^T$

h. نادرست، گاهی نه همیشه $\hat{y}$ به پایه‌های متعامد زیرفضای W وابسته است و از ترکیب خطی آن پایه‌ها بدست می‌آید:

orthogonal basis of $W = \{u_1, \dots, u_p\}$

$$\hat{y} = \underbrace{\frac{y \cdot u_1}{u_1 \cdot u_1}}_{c_1} u_1 + \cdots + \underbrace{\frac{y \cdot u_p}{u_p \cdot u_p}}_{c_p} u_p$$

-۲

a) $Ax=\lambda x \to (A-\lambda I)x=0$

معادله مشخصه $\longrightarrow \det(A-\lambda I)=0$

$$\begin{vmatrix} 0-\lambda & 0 & -2 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(2-\lambda)(3-\lambda) - 2(\lambda-2) = 0$$

$$(\lambda-2)(3\lambda-\lambda^2-2)=0$$

$\to (\lambda-2)(\lambda-2)(1-\lambda)=0 \longrightarrow \lambda=2 \longrightarrow$ با چندگانگی $\underline{2}$

$\lambda=1 \longrightarrow$ با چندگانگی $\underline{1}$

بردار ویژه: $\lambda=1 \to (A-I)x=0$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right] \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\to x_1=-2x_3$

$x_2=x_3 \longrightarrow \begin{bmatrix} -2x_3 \\ x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

x_3 is free

پس هر ضریبی از $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ بردار ویژه‌ی $\lambda=1$ حساب می‌شود.

$\lambda=2 \to (A-2I)x=0$

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{جواب}} \begin{bmatrix} -x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_2\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

پس هر ترکیب خطی از $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ بردار ویژه‌ی $\lambda=2$ حساب می‌شود

b)

ادامه ۲-

چون بعد فضای ویژه برای هر مقدار ویژه برابر چندگانگی آن بود پس ماتریس A قابل قطری‌سازی شدن است و ماتریس P، ستون هایش برابر است با پایه های فضاهای ویژه و درایه های روی قطر ماتریس D نیز برابر با مقادیر ویژه است:

$$P = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} , D \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

برای بررسی صحت کافی است ببینیم آیا $PD \overset{?}{=} AP$ $(A = PDP^{-1} \xrightarrow{\times P} AP = PD)$

$$PD = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$|||$$

$$AP = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

مشاهده می‌کنیم جواب درست بود.

۳- a. $Ax = \lambda x \xrightarrow{+cx}$ به دو طرف برابر cx را اضافه می‌کنیم

$$Ax + cx = \lambda x + cx$$

$$\xrightarrow{\text{فاکتور}} (A + cI)x = (\lambda + c)x \longrightarrow$$ حکم اثبات شد

b. برای این کار کافی است نشان دهیم معادله مشخصه هردو باهم برابرند:

$$\det(A - \lambda I) \overset{?}{=} \det(\underbrace{(A + cI) - (\lambda + c)I}_{})$$

$$A + \cancel{cI} - \lambda I - \cancel{cI} = \underline{A - \lambda I} \checkmark$$

۴- a. ابعاد ماتریس برابر درجه معادله مشخصه است : $2+1+3+3 = \underline{9} \xrightarrow{\text{یعنی}} A_{9\times 9}$

می‌توان ماتریس A را اینگونه نشان داد :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & & & & & & & & & \\ & 0 & & & & & & 0 & & \\ & & 3 & & & & & & & \\ & & & 3 & & & & & & \\ & & & & -2 & & & & & \\ & & & & & -2 & & & & \\ & & 0 & & & & -2 & & & \\ & & & & & & & 4 & & \\ & & & & & & & & 4 & \\ & & & & & & & & & 4 \end{bmatrix}_{9\times 9}$$

b.

ابعاد فضای ویژه مربوط به $\lambda = 4$ برابر است با چندگانگی آن یعنی $\underline{3}$ زیرا :

$$(A-4I)x = 0 \longrightarrow \begin{bmatrix} -4 & & & & & & & & & \\ & -4 & & & & & 0 & & & \\ & & -1 & & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & & \\ & & & & -6 & & & & & \\ & & & & & -6 & & & & \\ & & 0 & & & & -6 & & & \\ & & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & & 0 & \\ & & & & & & & & & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow$$

۳ متغیر آزاد

↓

۳ پایه

↓

بعد فضای ویژه = $\underline{3}$

c.

ابعاد فضای پوچ A برابر است با $\underline{2}$ زیرا همانطور که در $\underline{a}$ ماتریس A را می‌بینید اگر دو ردیف اول را به پایین انتقال دهیم فرم اشلون کاهشی بدست می‌آید و مشاهده می‌شود که $\underline{2}$ متغیر آزاد داریم (x_1 و x_2، ۲ ستون اول) بنابراین ۲ پایه برای فضای پوچ خواهیم داشت و در نتیجه:

$$\dim \text{Null space}(A) = \underline{2}$$

۵-

a.)

$$T(1) = (۳(۰)+۱)x + ۰ + ۳ = x+۳ = \begin{bmatrix} ۳ \\ ۱ \end{bmatrix}$$

$$T(x) = (۳(۱)+۰)x + ۱+۳ = ۳x+۴ = \begin{bmatrix} ۴ \\ ۳ \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow M = \begin{bmatrix} ۳ & ۴ \\ ۱ & ۳ \end{bmatrix}$$

b.)

می توانیم پایه های B' را همان $x+۳$ و $۳x+۴$ بگیریم زیرا از هم مستقل اند:

$$B' = \{x+۳ ,\ ۳x+۴\}$$

در این صورت $[T]_{B'} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} \rightarrow$ قطری

c.)

$$۵x+۳ = a(x+۳) + b(۳x+۴)$$

$$۵x+۳ = ax + ۳bx + ۳a + ۴b$$

$$\rightarrow a+۳b = ۵ \xrightarrow{\times -۳} -۳a - ۹b = -۱۵$$

$$۳a+۴b = ۳ \qquad ۳a + ۴b = ۳$$

$$-۵b = -۱۲$$

$$\rightarrow b = \frac{۱۲}{۵} = \underline{۲,۴}$$

$$B' = \left\{ \begin{bmatrix} ۳ \\ ۱ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ۴ \\ ۳ \end{bmatrix} \right\}$$

$$a = ۵ - \frac{۳۶}{۵} = \frac{-۱۱}{۵} = \underline{-۲,۲}$$

$$\rightarrow f(x) = \underline{-۲,۲}\begin{bmatrix} ۳ \\ ۱ \end{bmatrix} + \underline{۲,۴}\begin{bmatrix} ۴ \\ ۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳ \\ ۵ \end{bmatrix}$$

۷- تعریف : ماتریس $U_{n\times n}$ orthogonal $\longrightarrow U^{-1} = U^{T}$ (I) a.

$$\longrightarrow UU^{-1} = I \xrightarrow{\text{I}} UU^{T} = I$$

U را برحسب سطرهایش این گونه فرض کنید :

$$U = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$$

$(u_i = [x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n]_{1\times n})$

$$U^{T} = [u_1^T \quad u_2^T \quad \cdots \quad u_n^T] \longrightarrow UU^{T} = \begin{bmatrix} u_1^T u_1 & u_1^T u_2 & \cdots & u_1^T u_n \\ u_2^T u_1 & u_2^T u_2 & \cdots & u_2^T u_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_n^T u_1 & u_n^T u_2 & \cdots & u_n^T u_n \end{bmatrix} = I$$

بنابراین چون همه $u_i \cdot u_j = 0$ $(i \neq j)$ بنابراین یک orthogonal set هستند و چون $\|u_i\|^2 = 1$ بنابراین orthonormal نیز هستند.

9_

.a

$Ax = 0$

Nul space $\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} x_1 = -x_3 \\ x_2 = 0 \\ x_3 \text{ is free} \end{array}$

$\rightarrow x = \begin{bmatrix} -x_3 \\ 0 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{پایه فضای پوچ}}$

چون فضای پوچ فقط یک پایه دارد با برای همان را می‌توان به عنوان پایه متعامد در نظر گرفت

orthogonal basis $= \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

b.) rank ماتریس برابر است با بُعد فضای ستونی که چون A ۲ ستون محوری دارد بنابراین بُعد Col A برابر ۲ است:

$\dim \text{Col } A = 2 \longrightarrow \text{rank}(A) = \underline{2}$

c.)

basis for Row A $= \{(1,0,1), (0,1,0)\}$ or $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

الگوریتم گرام اشمیت

$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{\overset{0}{\cancel{x_2 \cdot v_1}}}{v_1 \cdot v_1} v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

پس orthogonal basis of Row A $= \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$