

به نام پروردگار
دانشگاه صنعتی امیرکبیر (پلی تکنیک تهران)
دانشکده مهندسی کامپیوتر



درس جبر خطی کاربردی

تمرین سری چهارم

توضیحات:

- پاسخ به تمرین ها باید به صورت انفرادی صورت گیرد و در صورت مشاهده هرگونه تقلب نمره صفر برای کل تمرین منظور خواهد شد.
- خوانایی و مرتب بودن پاسخ ها از اهمیت زیادی برخوردار است.
- مهلت ارسال پاسخ ها ساعت 23:59 روز جمعه 4 تیر ماه می باشد.
- مدت زمان تاخیر مجاز 6 روز می باشد، و به ازای هر روز تاخیر 10 درصد جریمه در نظر گرفته می شود.
- پاسخ هر سوال بخش تئوری را (چه به صورت دستی و اسکن شده یا چه به صورت تایپ شده) در زیر سوال مربوطه در فایل docx موجود قرار دهید.
- در صورت وجود هرگونه ابهام در ارتباط با سوالات از طریق linearalgebral.spring2021@gmail.com سوال خود را بپرسید.
- فایل doc پاسخ های خود را PDF کرده و به همراه کد (فایل .py) و نتایج تمرینات (اسکرین شات های) بخش شبیه سازی، در قالب یک فایل zip به صورت الگوی زیر آپلود کنید:

HW4_StudentNumber_StudentName_StudentLastName.zip

(به عنوان مثال، HW4_9731505_Arash_Harirpoosh.zip)

❖ بخش اول – مباحث تئوری و مسائل تشریحی

1. درستی یا نادرستی عبارات زیر را تعیین کنید و برای پاسخ خود دلیل مناسب بیاورید.

- a. هر بردار ویژه ماتریس معکوس پذیر A بردار ویژه ماتریس A^{-1} نیز می باشد.
- b. اگر v_1 و v_2 بردارهای ویژه مستقل خطی باشند، آنگاه مقادیر ویژه متناسب با هر یک از این بردارها متفاوت می باشد.
- c. ماتریس مربعی A معکوس پذیر است اگر و تنها اگر یک سیستم مختصات وجود داشته باشد که در آن تبدیل $x \mapsto Ax$ توسط یک ماتریس قطری نمایش داده شده باشد.
- d. اگر A و B ماتریسهای معکوس پذیر $n \times n$ باشند، آنگاه AB مشابه با BA می باشد.
- e. اگر A یک ماتریس معکوس پذیر و مشابه¹ ماتریس B باشد، آنگاه ماتریس B معکوس پذیر است و ماتریس A^{-1} مشابه ماتریس B^{-1} می باشد.
- f. برای یک ماتریس $A_{m \times n}$ بردارهایی که در $\text{Nul } A$ وجود دارند، بر بردارهایی که در فضای سطری A قرار دارند عمود هستند.
- g. اگر A یک ماتریس مربعی باشد، بردارهای درون $\text{Col } A$ بر بردارهای درون $\text{Nul } A$ متعامد² خواهند بود.
- h. تصویر متعامد y روی زیر فضای W یعنی \hat{y} ، گاهی وابسته به پایه متعامدی از W که برای محاسبه \hat{y} استفاده می شود می باشد.

2. به سوالات زیر پاسخ دهید.

a. مقادیر ویژه ماتریس A را بدست آورده و سپس بردارهای ویژه آن را مشخص کنید.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

b. ماتریس A را قطری سازی کرده (ماتریسهای P و D را در $A = P^{-1}DP$ بدست آورید) و سپس صحت جواب خود را بدون محاسبه P^{-1} بررسی کنید.

¹ Similar

² Orthogonal

3. در صورتی که A یک ماتریس $n \times n$ و c یک عدد مختلط باشد.

a. نشان دهید که برای هر مقدار ویژه λ در ماتریس A ، مقدار $\lambda + c$ نیز یک مقدار ویژه برای ماتریس

$A + cI$ می باشد، که در آن I ماتریس همانی³ می باشد.

b. نشان دهید که چندگانگی⁴ مقدار ویژه λ در ماتریس A با چندگانگی مقدار ویژه $\lambda + c$ در ماتریس

$A + cI$ برابر است.

4. اگر معادله مشخصه ماتریس قطری A برابر $f_A(\lambda) = \lambda^2(\lambda - 3)(\lambda + 2)^3(\lambda - 4)^3$ باشد:

a. ابعاد ماتریس A را چقدر است؟

b. ابعاد فضای ویژه مربوط به مقدار ویژه $\lambda = 4$ که با E_4 نمایش داده می شود چقدر است؟

c. ابعاد فضای تهی⁵ ماتریس A چقدر است؟

5. P_1 فضای برداری چند جمله ای حقیقی درجه یک یا کمتر می باشد. تبدیل خطی $T: P_1 \rightarrow P_1$ به ازای هر

$ax + b \in P_1$ به صورت زیر می باشد:

$$T(ax + b) = (3a + b)x + a + 3$$

a. ماتریس تبدیل خطی T را با توجه به پایه $B = \{1, x\}$ بیابید.

b. پایه B' از فضای برداری P_1 را که در آن ماتریس T نسبت به B' یک ماتریس قطری می باشد

بیابید.

c. تابع $f(x) = 5x + 3$ را به صورت یک ترکیب خطی از بردارهای پایه B' بنویسید.

6. اگر F و H ماتریس های $n \times n$ باشند که رابطه $HF - FH = -2F$ در آن ها برقرار است:

a. مجموع مقادیر ویژه⁶ ماتریس F را محاسبه کنید. (راهنمایی: مجموع مقادیر ویژه در دو طرف معادله

داده شده را محاسبه کنید.)

b. اگر λ مقدار ویژه ماتریس H و v بردار ویژه متناظر با λ باشد. نشان دهید که یک عدد مثبت صحیح

N وجود دارد که $F^N v = 0$ شود. (راهنمایی: با نشان دادن اینکه اگر $F^k v \neq 0$ باشد آنگاه تعداد

زیادی مقدار ویژه وجود دارد یک تناقض را نشان دهید)

³ Identity Matrix

⁴ Multiplicity

⁵ Null space

⁶ trace

7. فرض کنید ماتریس $U_{n \times n}$ یک ماتریس orthogonal باشد.

a. نشان دهید سطرهای $U_{n \times n}$ یک basis orthonormal برای \mathbb{R}^n می باشد.

b. اگر $V_{n \times n}$ نیز یک ماتریس متعامد باشد، نشان دهید که UV یک ماتریس متعامد خواهد بود یا

خیر.

8. فرض کنید $v_1 = \begin{bmatrix} x-1 \\ 1 \\ x-2 \end{bmatrix}$ و $v_2 = \begin{bmatrix} x \\ x-3 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$ و ماتریس $y = \begin{bmatrix} x \\ x-3 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$ می توان نشان داده که y در زیر

فضایی که $S\{v_1, v_2\}$ پوشش می دهند، قرار ندارد. یک بردار غیر صفر مانند u را در فضای \mathbb{R}^4 بیابید که بر

$Span(S)$ عمود باشد. آیا این بردار یکتا خواهد بود؟ (راهنمایی: ابتدا از خاصیت orthogonally برای

بدست آوردن x استفاده کنید)

9. فرض کنید $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

a. یک پایه متعامد⁷ برای فضای پوچ A بیابید.

b. rank ماتریس A را بیابید.

c. یک پایه متعامد برای فضای سطری A بیابید.

❖ بخش دوم – مسائل پیاده سازی و شبیه سازی

در این قسمت ما قصد داریم یک پیاده سازی ساده از نحوه ی محاسبه ی eigenvalue و eigenvector های یک ماتریس داشته باشیم و سپس کاربرد آن را در الگوریتم page rank بررسی کنیم.

بخش اول:

در این بخش شما به پیاده سازی ساده شده ی الگوریتم page rank می پردازید. همانطور که می دانید page rank برای اعتبار سنجی صفحات وب مورد استفاده قرار می گیرد و الگوریتم های متفاوت و پیچیده ای دارد که یکی از آنها الگوریتم google pageRank می باشد. خروجی این الگوریتم یک بردار می تواند باشد که هر درایه ی آن اعتبار یا rank یک صفحه ی وب را مشخص می کند.

می دانیم برای آنکه رتبه ی هر صفحه را بدست بیاوریم باید از فرمول زیر استفاده کنیم (برای سادگی وزن هر نود یک در نظر گرفته شده است):

⁷ orthogonal Basis

$$r_j = \sum_{i \rightarrow j} \frac{r_i}{d_i}$$

که در اینجا r_j نشان دهنده ی نود j ام ، r_j نشاندهنده ی رتبه نود j ام و d_i نشاندهنده ی درجه ی نود i ام (تعداد لینک های خروجی آن) می باشد.

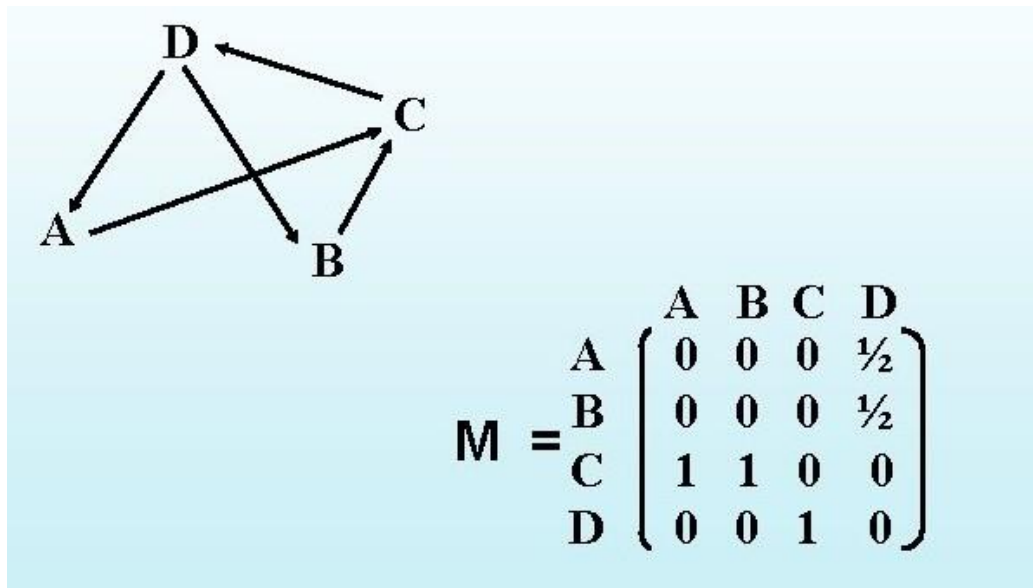
اما ما بجای این روش و محاسبه ی تک تک رتبه ها، میتوانیم از ضرب ماتریس کمک بگیریم و در واقع ماتریس همبستگی را به شکل زیر تعریف کنیم:

اگر M یک ماتریس $n \times n$ باشد، هر ستون آن برداری خواهد بود که درایه هایش وزن لینکی را نشان می دهند که یک نود به نودها می دهد. یعنی :

$$\text{If } i \rightarrow j, \text{ then } M_{ji} = \frac{1}{d_i} \text{ else } M_{ji} = 0$$

توجه کنید که جمع هر کدام از ستون های این ماتریس باید یک باشد و همچنین جمع بردار رتبه ی ما که هر درایه آن نظیر با رتبه ی یک صفحه می باشد نیز برابر یک می شود.

مثال از مطالب ذکر شده:

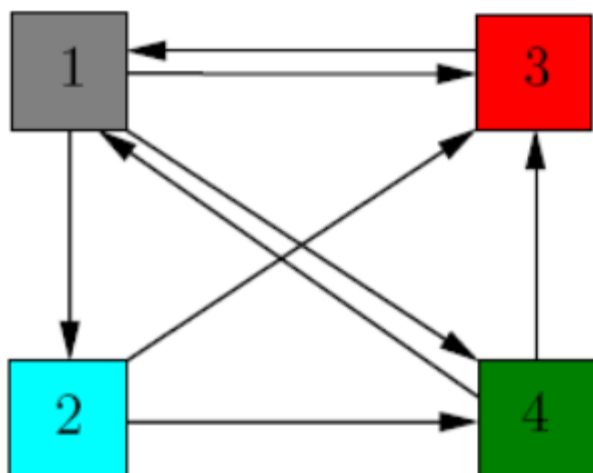


در نهایت برای بدست آوردن rank های جدید اینگونه عمل می کنیم:

$$r^{(t+1)} = Mr^t$$

که t نشاندهنده بردار r در زمان t می باشد.

حال گرانی که ما روی آن کار خواهیم کرد، گراف زیر می باشد:



نود های این گراف با نشانه P_i و لینک های میان آنها با space نمایش داده شده اند.

مثلا اتصال نود P_1 به P_2 در فایل اینگونه آمده است:

$P_1 P_2$

برای پیاده سازی

1. شما ابتدا باید از فایل graph.txt، ارتباط میان نودها (صفحات وب) را خوانده،
 2. درجه یا لینک های خروجی هر نود را بدست آورده
 3. یک ماتریس همسایگی را باتوجه به لینک های ابتدایی و درجه ی نودها ساخته
 4. و در نهایت به وسیله ماتریس همسایگی و بردار رتبه را در هم ضرب کنید تا بردار رتبه جدید حاصل شود.
 5. این عمل را تا هفت مرتبه ادامه داده و نتیجه را به عنوان بردار رتبه ی نهایی در خروجی چاپ کنید.
- (شرط خاتمه را 7 قرار دهید)

بخش دوم:

در این بخش شما باید برنامه ای بنویسید که دو تابع اصلی دارد:

1. یک ماتریس را به عنوان ورودی بگیرد و مقادیر و بردارهای ویژه آن را به عنوان خروجی برگرداند.

برای این کار شما ابتدا باید توجه کنید که شما برای بدست آوردن مقادیر ویژه ی یک ماتریس مجاز به استفاده از توابع موجود در کتابخانه ها (مانند numpy) نمی باشید و به صورت دستی باید این قسمت را پیاده کنید. (البته برای ضرب ماتریس و بردار و محاسبه دترمینان استفاده از توابع آماده ممانعتی دارد)

برای محاسبه بردارهای ویژه نیز می توانید از برنامه ای که در تمرین اول نوشتید استفاده کنید و فایل آن را در فایل این برنامه import کنید. یا می توانید از تابع linesolve کتابخانه sympy پایتون استفاده کنید.

2. یک ماتریس را بگیرید، بررسی کند که آیا diagonalizable هست یا خیر.

پس از پیاده سازی موارد بالا، ماتریس همبستگی حاصل را که از بخش اول بدست آورده اید به توابع ساخته شده بدهید؛ و مقادیر و بردارهای ویژه را آن را بدست آوردید، در مقادیر ویژه باید مقدار 1 را مشاهده کنید؛ اگر λ را برابر با یک بگیریم برای این ماتریس، مشخص است که معادله آن یعنی $Ax = \lambda x$ برابر با $Ax = x$ خواهد شد. این معادله شما را به یاد چه چیزی می اندازد؟

$$r^{(t+1)} = Mr^t$$

سوال: نتیجه خروجی بخش اول را با خروجی این بخش مقایسه کنید. چه نتیجه ای می گیرید؟

امتیازی:

الگوریتم power method را پیاده کرده و برای مثال دوم بخش 5.8 کتاب اجرا کنید. بهترین K را که ما را به دقیق ترین جواب برای بزرگترین مقدار ویژه و بردار ویژه ی متناظر با آن می رساند را نیز مشخص کنید.

قوانین:

- 1) پیاده سازی تمرین های عملی به صورت انفرادی می باشد و در صورت مشاهده ی تقلب و شباهت چشمگیر، نمره ی آن تقسیم خواهد شد.
- 2) برای باز کردن و دریافت فایل می توانید از توابع open و read در پایتون استفاده کنید.
- 3) استفاده از توابع آماده برای حل هر دو تمرین شبیه سازی غیر مجاز می باشد و تنها مجاز به استفاده از توابع ساده ای چون numpy.array برای ساخت ماتریس و sympy برای حل معادلات ماتریسی با متغیر های ناشناخته می باشید.

شاد و بیروز باشید

تیم تدریس یاری جبر خطی

بهار 1400