

# Chan–Vese Segmentation

## Équation de Hamilton–Jacobi

Anass El Yaagoubi, Victor Le Maistre, Simon Delecourt

Institut National des Sciences Appliquées de Rouen Normandie

19 novembre 2018

# Sommaire

- 1 Introduction
  - Segmentation d'image
  - Contours actifs paramétriques
  - Méthodes level-set
- 2 Formulation du problème
  - Modèle de Mumford-Shah
  - Modèle de Chan-Vese
- 3 Schéma numérique
- 4 Résultats
- 5 Conclusion
  - Perspectives d'évolutions
  - Apports du projets

# Sommaire

- 1 Introduction
  - Segmentation d'image
  - Contours actifs paramétriques
  - Méthodes level-set
- 2 Formulation du problème
  - Modèle de Mumford-Shah
  - Modèle de Chan-Vese
- 3 Schéma numérique
- 4 Résultats
- 5 Conclusion
  - Perspectives d'évolutions
  - Apports du projets

# Introduction

## Définition

La segmentation d'image est une opération de traitement d'images qui a pour but de rassembler des pixels entre eux suivant des critères pré-définis. Les pixels sont ainsi regroupés en régions, qui constituent un pavage ou une partition de l'image.

# Segmentation

## Exemple



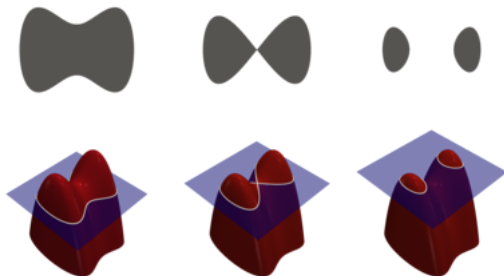
# Contours actifs paramétriques

## Exemple



# Level set

## Exemple



# Sommaire

- 1 Introduction
  - Segmentation d'image
  - Contours actifs paramétriques
  - Méthodes level-set
- 2 Formulation du problème
  - Modèle de Mumford-Shah
  - Modèle de Chan-Vese
- 3 Schéma numérique
- 4 Résultats
- 5 Conclusion
  - Perspectives d'évolutions
  - Apports du projets



# Modèle de Mumford-Shah

Modélisation du problème de segmentation :

$$f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{image à segmenter} \quad (1)$$

$$\hat{u} \approx f \quad \text{segmentation de l'image} \quad (2)$$

# Modèle de Mumford-Shah

Modélisation du problème de segmentation :

$$\begin{aligned} \hat{u} = \operatorname{argmin}_{u, C} \quad & \mu \cdot \operatorname{Length}(C) + \lambda \int_{\Omega} [f(x) - u(x)]^2 dx + \\ & \int_{\Omega \setminus C} |\nabla u(x)|^2 dx \\ & u \in \{ \text{fonctions lisses par morceaux} \} \end{aligned} \quad (3)$$

# Modèle de Chan-Vese

Modélisation du problème de segmentation :

$$u = \begin{cases} c_1 & \text{si } x \text{ à l'intérieur de } C \\ c_2 & \text{si } x \text{ à l'extérieur de } C \end{cases} \quad (4)$$

# Modèle de Chan-Vese

Modélisation du problème de segmentation :

$$\hat{u} = \underset{u, C}{\operatorname{argmin}} \quad \mu \cdot \text{Length}(C) + \nu \cdot \text{Area}(\text{Inside}(C)) + \lambda_1 \int_{\text{inside}(C)} [f(x) - c_1]^2 dx + \lambda_2 \int_{\text{outside}(C)} [f(x) - c_2]^2 dx \quad (5)$$

# Formulation Level-Set

Si  $\varphi$  est une fonction de distance alors :

$$C = \left\{ x \in \Omega : \varphi(x) = 0 \right\}$$

$$Length(C) = \int_{\Omega} \left| \nabla H(\varphi(x)) \right| dx = \int_{\Omega} \delta(\varphi(x)) \left| \nabla \varphi(x) \right| dx \quad (6)$$

$$Area(C) = \int_{\Omega} H(\varphi(x)) dx$$

# Formulation Level-Set

On a donc :

$$\begin{aligned} \hat{u} = \operatorname{argmin}_u & \mu \cdot \int_{\Omega} \delta(\varphi(x)) |\nabla \varphi(x)| dx + \nu \cdot \int_{\Omega} H(\varphi(x)) dx \\ & + \lambda_1 \int_{\Omega} [f(x) - c_1]^2 H(\varphi(x)) dx \\ & + \lambda_2 \int_{\Omega} [f(x) - c_2]^2 (1 - H(\varphi(x))) dx \end{aligned} \quad (7)$$

$$\operatorname{argmin}_{\varphi} J[\varphi] = \int_{\Omega} \mathcal{L}(x, \varphi, \nabla \varphi) dx \quad (8)$$

Equation d'Euler-Lagrange :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_{x_i}} \right) = 0 \quad (9)$$

# Formulation Level-Set

Par descente de gradient en  $\varphi$  :

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \delta_{\epsilon}(\varphi) \left[ \mu * \operatorname{div} \left( \frac{\nabla \varphi}{|\nabla \varphi|} \right) - \nu - \lambda_1 (f_{i,j} - c_1)^2 + \lambda_2 (f_{i,j} - c_2)^2 \right] \\ \frac{\delta_{\epsilon}(\varphi)}{|\nabla \varphi|} \frac{\partial \varphi}{\partial \hat{n}} = 0 \end{cases} \quad (10)$$

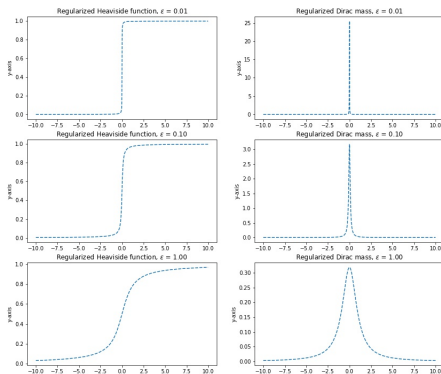
# Sommaire

- 1 Introduction
  - Segmentation d'image
  - Contours actifs paramétriques
  - Méthodes level-set
- 2 Formulation du problème
  - Modèle de Mumford-Shah
  - Modèle de Chan-Vese
- 3 Schéma numérique
- 4 Résultats
- 5 Conclusion
  - Perspectives d'évolutions
  - Apports du projets



# Fonction Heaviside et Masse de Dirac

Régularisation de  $H$  et de  $\delta$  :



# Schéma numérique

Le schéma numérique est construit en discrétisant  $\varphi$  en espace comme suit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_{i,j}}{\partial t} = & \delta_\epsilon(\varphi_{i,j}) \left[ \mu(\nabla_x^- \frac{\nabla_x^+ \varphi_{i,j}}{\sqrt{\eta^2 + (\nabla_x^+ \varphi_{i,j})^2 + (\nabla_y^0 \varphi_{i,j})^2}} \right. \\ & \left. + \nabla_y^- \frac{\nabla_y^+ \varphi_{i,j}}{\sqrt{\eta^2 + (\nabla_x^0 \varphi_{i,j})^2 + (\nabla_y^+ \varphi_{i,j})^2}}) - \nu \right. \\ & \left. - \lambda_1(f_{i,j} - c_1)^2 + \lambda_2(f_{i,j} - c_2)^2 \right] \end{aligned}$$

avec  $\nabla_x^+$  le schéma forward dans la direction  $x$ ,  $\nabla_x^-$  le schéma backward dans la direction  $x$  et  $\nabla_x^0 = (\nabla_x^+ + \nabla_x^-)/2$ .

# Schéma numérique

De façon à ne garder qu'une seule copie de  $\varphi$  en mémoire, le temps est discrétisé avec le schéma, semi-explicite, de Gauss-Seidel. En notant :

$$A_{i,j} = \frac{\mu}{\sqrt{\eta^2 + (\nabla_x^+ \varphi_{i,j})^2 + (\nabla_y^0 \varphi_{i,j})^2}} \quad (11)$$

$$B_{i,j} = \frac{\mu}{\sqrt{\eta^2 + (\nabla_x^0 \varphi_{i,j})^2 + (\nabla_y^+ \varphi_{i,j})^2}} \quad (12)$$

# Schéma numérique

Nous obtenons le schéma suivant :

$$\varphi_{i,j}^{n+1} \leftarrow \left[ \varphi_{i,j}^n + dt\delta_\epsilon(\phi_{i,j}^n) \left( A_{i,j}\varphi_{i+1,j}^n + A_{i-1,j}\varphi_{i-1,j}^{n+1} + B_{i,j}\varphi_{i,j+1}^n + B_{i,j-1}\varphi_{i,j-1}^{n+1} - \nu - \lambda_1(f_{i,j} - c_1)^2 + \lambda_2(f_{i,j} - c_2)^2 \right) \right] / \left[ 1 + dt\delta_\epsilon(\varphi_{i,j}^{n+1})(A_{i,j} + A_{i-1,j} + B_{i,j} + B_{i,j-1}) \right]$$

# Algorithme

```

Initialize  $\varphi$ 
for  $n = 1, 2, \dots$  do
    Compute  $c_1$  and  $c_2$  as the region averages
    Evolve  $\varphi$  with one semi-implicit timestep
    if  $\|\varphi^{n+1} - \varphi^n\|_2/|\Omega| \leq tol$  then stop
    (Optional) If  $n$  is divisible by  $N$ , reinitialize  $\varphi$ 
  
```

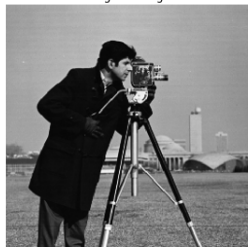
**Algorithm 1**

# Sommaire

- 1 Introduction
  - Segmentation d'image
  - Contours actifs paramétriques
  - Méthodes level-set
- 2 Formulation du problème
  - Modèle de Mumford-Shah
  - Modèle de Chan-Vese
- 3 Schéma numérique
- 4 Résultats
- 5 Conclusion
  - Perspectives d'évolutions
  - Apports du projets

# Résultats

Original Image



Skimage implementation - 103 iterations



Our implementation - 33 iterations



# Résultats

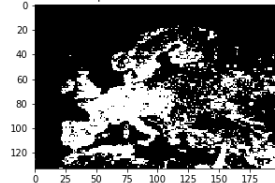
Original Image



Skimage implementation - 51 iterations

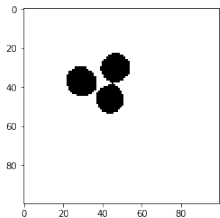


Our implementation - 32 iterations

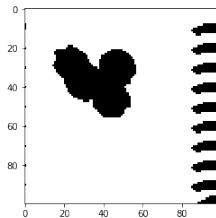




# Résultats



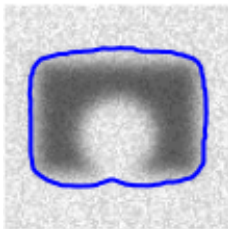
(a) Avec  $\mu = 0.2$



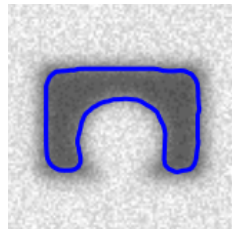
(b) Avec  $\mu = 0.8$

Figure – Variation de l'hyper-paramètre  $\mu$

# Résultats



(a) Avec  $\nu = -0.1$



(b) Avec  $\nu = 0.1$

Figure – Variation de l'hyper-paramètre  $\nu$

# Sommaire

- 1 Introduction
  - Segmentation d'image
  - Contours actifs paramétriques
  - Méthodes level-set
- 2 Formulation du problème
  - Modèle de Mumford-Shah
  - Modèle de Chan-Vese
- 3 Schéma numérique
- 4 Résultats
- 5 Conclusion
  - Perspectives d'évolutions
  - Apports du projets

## Perspectives d'évolution

- Prendre en charge des images en couleur
- Implémenter la méthode Narrow-Band

## Apports du projet

- Nouvelle technique de segmentation d'image
- Résolution numérique d'une équation de Hamilton-Jacobi