



Rapport de Projet de Fin d'Etude  
ENSEA - 3ème Année Option Systèmes Multimédia

---

# Estimation des paramètres d'un modèle physique dans le formalisme des Systèmes Hamiltoniens à Ports : application au haut-parleur électrodynamique

---

*Auteur*

Antoine DESCHAMPS

*Encadrants*

Antoine FALAIZE-SKRZEK

Thomas HELIE

*Laboratoire : IRCAM - Equipe Analyse-Synthèse*

*2 Mars 2015 - 31 Août 2015*

# Résumé

Ce rapport traite la problématique de l'estimation des paramètres d'un modèle physique décrivant le comportement d'un système réel non linéaire. Cette question est préalable à toute élaboration de contrôleurs qui ne sauraient être efficaces sans avoir une bonne connaissance du modèle aux observations. Les modèles considérés sont donnés dans le formalisme des Systèmes Hamiltoniens à Ports qui permet de garantir la passivité du système à temps continu et la stabilité des simulations à temps discret pour un schéma numérique adapté. La méthode proposée repose sur une estimation au maximum de vraisemblance des paramètres qui, dans le cas non linéaire et non gaussien, nécessite de construire un observateur de l'état du système : l'algorithme d'espérance-maximisation est donc associé au filtrage particulaire, le tout en exploitant la structure des Systèmes Hamiltoniens à Ports. La méthode est présentée et testée sur un modèle-jouet, en vue d'être appliquée au haut-parleur électrodynamique.

**Mots-clés :** estimation de paramètres, non-linéarités, Systèmes Hamiltoniens à Ports, algorithme espérance-maximisation, filtrage particulaire, haut-parleur électrodynamique

# Abstract

This report tackle the issue of the parameters estimation of a physical model describing the behaviour of a real nonlinear system. This is the preliminary work to the elaboration of every controller which wouldn't be efficient without having a good knowledge of the model from the observations. The models that are considered are given in the Port-Hamiltonian Systems formalism which allows to ensure the passivity of the continuous time system and the stability of the discrete time simulations for a suitable numerical scheme. The proposed method relies on a maximum likelihood estimation of the parameters which, in the nonlinear and nongaussian case, requires the building of a system state observer : the expectation-maximization algorithm is thus associated with the particle filter, exploiting the structure of the Port-Hamiltonian Systems. The method is introduced and tested on a toy-model, with a view to be applicated to the electrodynamical loudspeaker.

**Keywords :** parameters estimation, nonlinearities, Port-Hamiltonian Systems, expectation-maximization algorithm, particle filter, electrodynamical loudspeaker

# Remerciements

Je tiens à remercier avant tout mes encadrants de stage, Antoine FALAIZE-SKRZEK et Thomas HELIE, pour leur disponibilité, leur patience, leurs explications et leurs conseils.

Mon stage s'inscrivant dans la continuité de celui de Nicolas PAPAZOGLOU, je remercie ce dernier d'avoir laissé des traces de son travail et du contexte du projet car cela m'a permis de travailler sur de bonnes bases.

Je remercie enfin toute personne de l'IRCAM dont j'ai pu ou non croiser le chemin durant mes six mois de stage car elles participent activement à la vie de cet institut et à la bonne ambiance qui y règne.

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Physique du haut-parleur électrodynamique</b>	<b>5</b>
1.1	Description et principe général . . . . .	5
1.2	Le modèle de Thiele & Small . . . . .	7
1.3	Prise en compte de phénomènes réalistes . . . . .	9
1.3.1	Inventaire des phénomènes . . . . .	9
1.3.2	Les phénomènes prépondérants . . . . .	9
1.4	Le modèle retenu . . . . .	12
<b>2</b>	<b>Le formalisme des Systèmes Hamiltoniens à Ports</b>	<b>13</b>
2.1	Encodage de la passivité . . . . .	13
2.1.1	Encodage des lois constitutives . . . . .	13
2.1.2	Encodage des échanges de puissance . . . . .	15
2.1.3	Systèmes Hamiltoniens à Ports non linéaires . . . . .	16
2.2	Exemple illustratif et modèle-jouet . . . . .	17
2.3	Implémentation numérique . . . . .	18
2.3.1	Discrétisation . . . . .	18
2.3.2	Algorithme de Newton-Raphson . . . . .	20
2.4	Application des Systèmes Hamiltoniens à Ports au haut-parleur . . . . .	22
2.4.1	Détermination de la structure Systèmes Hamiltoniens à Ports . . . . .	22
2.4.2	Simulation . . . . .	23
<b>3</b>	<b>Estimation paramétrique</b>	<b>25</b>
3.1	Introduction : présentation du modèle stochastique . . . . .	25
3.1.1	Modèle initial paramétrique . . . . .	25
3.1.2	Prise en compte des incertitudes . . . . .	25
3.2	Théorie de l'estimation et maximum de vraisemblance . . . . .	26
3.3	Algorithme espérance-maximisation . . . . .	27
3.4	Filtrage particulière . . . . .	28
3.5	Application du filtrage particulière au circuit RC . . . . .	31
3.6	Estimation paramétrique sur le RLC non linéaire . . . . .	35

# Introduction

## Contexte et état de l'art

Les haut-parleurs électrodynamiques sont des transducteurs qui présentent des non-linéarités responsables de distorsions audibles. Celles-ci peuvent être désirées (et même réhaussées comme dans les amplificateurs de guitare) mais aussi gênantes (c'est le cas de la restitution audio "haute fidélité"). Ces non-linéarités sont liées aux différents éléments constituant le haut-parleur, particulièrement à la force de rappel de la suspension, au comportement magnétique du moteur et à la variation des propriétés électriques et mécaniques des matériaux due à l'échauffement. Leur étude a donné lieu à de nombreux travaux ([9] et [13] par exemple). Un haut-parleur est donc un système complexe dont la modélisation complète est difficile. Pour pallier ce problème, il faut travailler avec un formalisme permettant de modéliser les systèmes physiques tout en garantissant leur passivité afin que les simulations soient stables. Une solution est le formalisme des Systèmes Hamiltoniens à Ports (SHP). Ce formalisme préserve naturellement le comportement énergétique (stockant, dissipatif) des composants élémentaires et le bilan de leurs échanges de puissance. Ceci reste vrai dans le cas non linéaire, garantissant la passivité du modèle. Cette passivité peut être portée dans le domaine numérique, assurant la stabilité des simulations à temps discret.

L'équipe Analyse/Synthèse de l'IRCAM a donc adopté ce formalisme ([10]). Les SHP ont déjà permis de traiter les non-linéarités de la suspension et du circuit magnétique. En effet, les travaux menés par l'équipe ont permis d'élaborer un modèle à temps continu du transducteur (incluant les parties électrique, magnétique, mécanique et une charge de rayonnement acoustique simplifiée) et de simuler ce système en garantissant un bilan de puissance discret. Enfin, l'effet des non-linéarités a pu être rejeté en réalisant du contrôle par platitude (voir [9] et [14]) validé sur système simulé. Nous désirons désormais travailler sur un système réel. Nous avons donc besoin d'un modèle réaliste et dont le comportement en simulation correspond aux mesures. Pour cela, nous allons estimer précisément les paramètres physiques intervenant dans le modèle considéré.

## Sujet et objectifs

Dans ce stage, nous nous intéressons à un système réel. Le premier objectif est de s'approprier la théorie (physique du haut-parleur électrodynamique, formalisme des SHP et leur encodage structural du bilan de puissance) et les méthodes de travail de l'équipe (le modèle du haut-parleur en SHP, la simulation numérique) à partir d'une étude bibliographique et des derniers travaux menés dans l'équipe. Le deuxième objectif consiste à étudier et élaborer une méthode d'estimation des paramètres du modèle, en s'appuyant sur des méthodes existantes de la littérature ([16]) à étudier et adapter, afin de bénéficier de la structure passive du système et de la stabilité des simulations. Cette procédure d'estimation sera appliquée lors des futurs travaux de l'équipe sur un système réel, l'intérêt de bénéficier de la structure des SHP étant que l'on peut appliquer la méthode à différents systèmes tout en gardant la même structure. Ainsi ce stage s'inscrit dans la continuité des travaux de l'équipe. L'outil d'estimation des paramètres est prototypé en langage Python et s'approprier ce langage est donc aussi l'un des objectifs du stage, ainsi que l'apprentissage de notions en LaTeX pour la rédaction du rapport.

## Organisation du document

Ce document s'organise en trois grandes problématiques : la physique du haut-parleur, les SHP et l'estimation paramétrique.

Nous commençons par une description de la physique du haut-parleur qui est divisée en trois points : le modèle de Thiele & Small que l'on retrouve dans la littérature (voir [4] et [5]), l'étude des phénomènes non-linéaires du haut-parleur et enfin le choix des phénomènes retenus pour le modèle.

Nous présentons ensuite la structure des SHP et montrons comment elle garantit l'encodage du bilan de puissance et la passivité du système pour enfin appliquer les SHP à notre modèle-jouet, le circuit RLC. Puis nous donnons une méthode de discrétisation, appliquons le modèle SHP au haut-parleur avec la prise en compte des non-linéarités et nous simulons l'ensemble.

Après avoir parlé de la théorie de l'estimation, nous présentons l'algorithme espérance-maximisation et le filtrage particulaire, lequel est illustré par des résultats. Nous proposons ensuite notre méthode qui est d'associer ces deux algorithmes, tout en exploitant la structure SHP, toujours pour garantir la passivité du système et la stabilité de la simulation, réalisée d'abord sur le modèle-jouet, puis sur le modèle de haut-parleur.

Nous finissons ensuite en présentant les contributions que ce stage a apportées au sein de l'équipe et quelques perspectives quant aux futurs travaux à mener.

## Notation

Dans l'ensemble du document, les vecteurs seront typographiés en gras (à moins qu'ils ne soient explicitement désignés en tant que vecteurs). Par exemple,  $x$  désignera un scalaire et  $\mathbf{x}$  un vecteur.

# 1 Physique du haut-parleur électrodynamique

Le haut parleur est un transducteur électro-acoustique qui permet de générer une onde sonore à partir d'une source électrique. Il en existe plusieurs types, selon leur principe de fonctionnement (voir [15, Chapitre 6]) :

- Le plus commun est le haut-parleur électrodynamique dont le principe de fonctionnement est l'induction électromagnétique appliquée à une bobine plongée dans un champ magnétique constant (généré par un aimant permanent).
- Les haut-parleurs magnétostatiques utilisent également ce principe, mais en remplaçant la bobine par des bandes ou des rubans de métal.
- Certains haut-parleurs fonctionnent selon le principe de la magnétostriction (déformation d'un matériau ferromagnétique lors de l'aimantation).
- D'autres fonctionnent avec un cristal piézoélectrique qui convertit le signal électrique qu'on lui applique en force mécanique.
- Dans les haut-parleurs électrostatiques, la membrane chargée est mise en mouvement par un champ électrique.
- Dans d'autres haut-parleurs, c'est un diaphragme flexible qui est mis en mouvement.

Pour leur efficacité supérieure et leur faible coût de fabrication, environ 90% des haut-parleurs du marché sont électrodynamiques et nous décrivons ce type de haut-parleur dans la partie suivante.

## 1.1 Description et principe général

Le haut-parleur électrodynamique fonctionne selon le principe de l'induction électromagnétique : une bobine mobile, parcourue par un courant électrique, est plongée dans un champ magnétique généré par un aimant permanent et est donc mise en mouvement par force de Laplace. Solidaire de la membrane, elle l'entraîne avec elle dans son déplacement selon l'axe de révolution du haut-parleur. Elle est maintenue selon cet axe et rappelée en position d'équilibre par un système de suspensions (spider et suspension externe). Le mouvement de la membrane induit alors une surpression du milieu fluide environnant. La propagation de cette surpression, communément appelée "son" constitue l'image acoustique du signal électrique appliqué à la bobine. La figure 1.1 reprend les différents éléments cités précédemment en les situant sur la photographie d'un haut-parleur réel et sur un schéma en coupe. Quant au principe de fonctionnement, il est illustré dans le schéma synoptique de la figure 1.2. Ce schéma met en évidence les interactions entre les différents domaines physiques (électrique, magnétique, mécanique et acoustique) et les différents composants. Ces derniers sont identifiés sur le schéma par un label que l'on retrouve dans le texte explicatif de la partie suivante pour une meilleure compréhension du principe de fonctionnement.

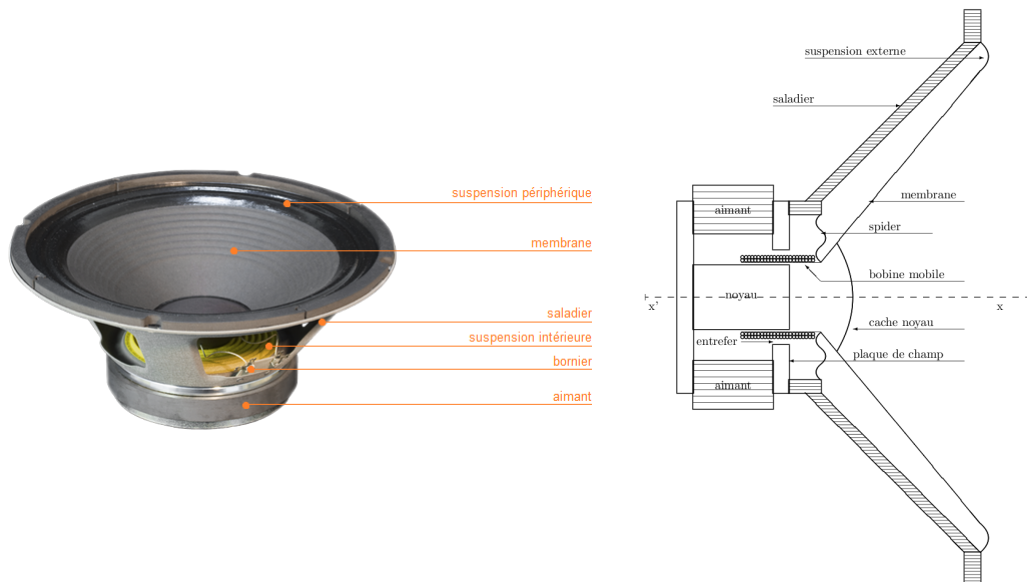


FIGURE 1.1 - Photographie ([1]) et schéma en coupe ([4]) d'un haut-parleur

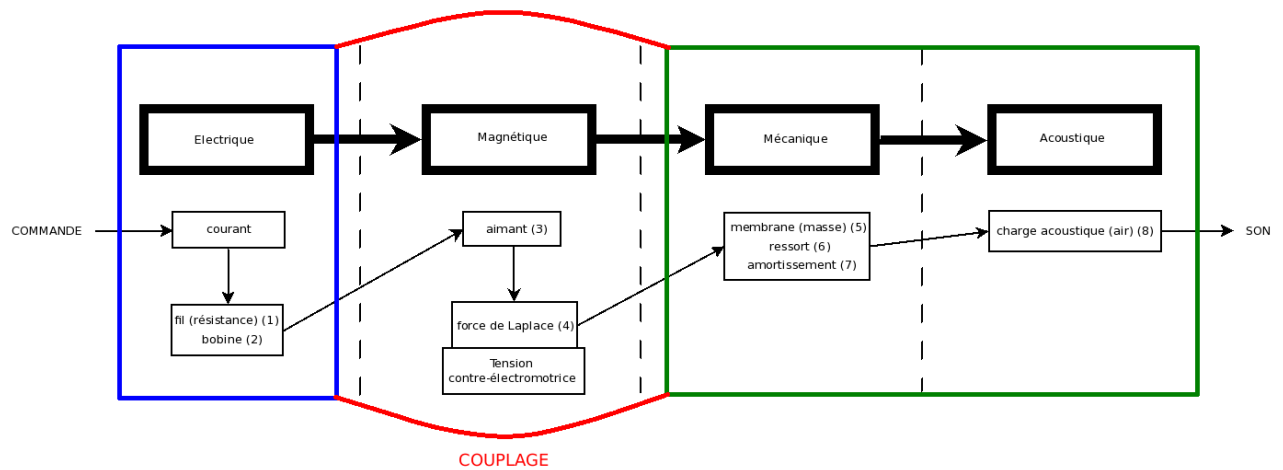


FIGURE 1.2 - Schéma synoptique du haut-parleur

## 1.2 Le modèle de Thiele & Small

Nous reprenons ici les éléments du schéma synoptique et les modélisons de la façon la plus simple : c'est le modèle de Thiele & Small. Rappelons les différents composants électriques :

- résistance du fil (1) ;
- inductance de la bobine (2),

et les composants mécaniques et acoustique :

- masse mobile (5) ;
- compliance du ressort (6) ;
- frottements visqueux (7) ;
- surface de la membrane ;
- charge acoustique (8).

Les différents paramètres, associés à ces composants, que nous allons introduire dans la partie qui suit sont appelés les paramètres de Thiele & Small.

Les domaines électrique et mécanique sont couplés par la force de Laplace (4) et la tension contre-électromotrice. En effet, ces dernières font apparaître le facteur de force,  $Bl$ , produit de la norme du champ magnétique dans l'entrefer du circuit magnétique chargé par l'aimant (3) et de la longueur de fil plongée dans le champ magnétique. En appelant  $i$  le courant circulant dans la bobine (2) et  $v$  la vitesse (dérivée en fonction du temps du déplacement par rapport à la position d'équilibre) de la masse mobile, composée de la membrane (5) et de la bobine (2), on a :

$$\text{Force de Laplace (4) : } F_L = B.l.i$$

$$\text{Tension contre-électromotrice : } e = B.l.v$$

Ainsi en séparant d'un côté force et vitesse pour la partie mécanique et tension et courant pour la partie électrique, on peut modéliser ce couplage électro-mécanique par un gyrateur de rapport de transformation  $Bl$  ([5, 11.5]) :

$$\begin{pmatrix} F_L \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & Bl \\ \frac{1}{Bl} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e \\ i \end{pmatrix}$$

Cette tension contre-électromotrice se retrouve donc dans la modélisation de la partie électrique, tout comme la force de Laplace (4) se retrouve dans celle de la partie mécanique.

Ainsi le circuit électrique se constitue d'une résistance  $R_{DC}$  modélisant la résistance du fil (1), en série avec l'inductance  $L$  de la bobine (2) et la tension contre-électromotrice  $e$ . Ce circuit est alimenté par un amplificateur audio, modélisé par un générateur de tension  $v_{in}$ .

Pour le couplage mécano-acoustique, on modélise le haut-parleur par un piston plan de section  $S$  (la surface de la membrane (5)). Les différentes variables décrivant les milieux mécanique et acoustique donnent lieu à des relations simples. Avec  $F_P$  la résultante des forces de pression exercées à l'avant et à l'arrière de la membrane (5),  $p$  la différence de pression,  $u$  le débit acoustique et  $v$  la vitesse de la membrane (5), on a donc ([5, 11.5]) :

$$F_P = p.S$$

$$u = S.v$$



On peut à nouveau séparer les variables de chaque domaine et on peut modéliser cette fois le couplage un transformateur de rapport de transformation  $S$  :

$$\begin{pmatrix} p \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{S} & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_p \\ v \end{pmatrix}$$

Pour ce qui est du domaine mécanique, le spider et la suspension sont modélisés par un ressort (6) de raideur  $k$  ou de compliance  $C = 1/k$ . La masse mobile (5+2)  $m$  est donc soumise à une force de rappel  $F_k$ , mais aussi à une force de frottements fluides  $F_f$  (7), sans oublier la force de Laplace  $F_L$  (4) vue précédemment. Le poids de la membrane (5) (gravité) peut être négligé. Pour que l'on puisse schématiser le haut-parleur sous la forme d'un circuit électrique, nous allons utiliser les analogies électro-mécaniques, rappelées ci-dessous :

- force  $\equiv$  tension
- vitesse  $\equiv$  courant
- ressort (6)  $\equiv$  condensateur
- compliance  $\equiv$  capacité
- masse (5)  $\equiv$  inductance
- amortissement (7)  $\equiv$  résistance

Avec ces analogies, la partie acoustique du haut-parleur peut être modélisée par deux impédances acoustiques en série (8) : celle perçue par l'avant du haut-parleur en champ libre et celle perçue par l'arrière du haut-parleur en charge close, la première ( $Z_{ray}$  sur le schéma qui suit) se modélisant par un circuit R-L ([6, éq. 12.126]) et la deuxième par une capacité ([5, éq. 11.51]). En pratique, la suppression au niveau de la face avant du haut-parleur entraîne une dépression égale sur la face arrière, annulant le champ acoustique par un phénomène de court-circuit acoustique. Cela est évité en plaçant l'arrière du haut-parleur dans une enceinte acoustique (la charge close) ce qui découple les deux faces.

A partir des équations des différentes parties du haut-parleur, nous arrivons donc au modèle général illustré sur la figure 1.3 suivante :

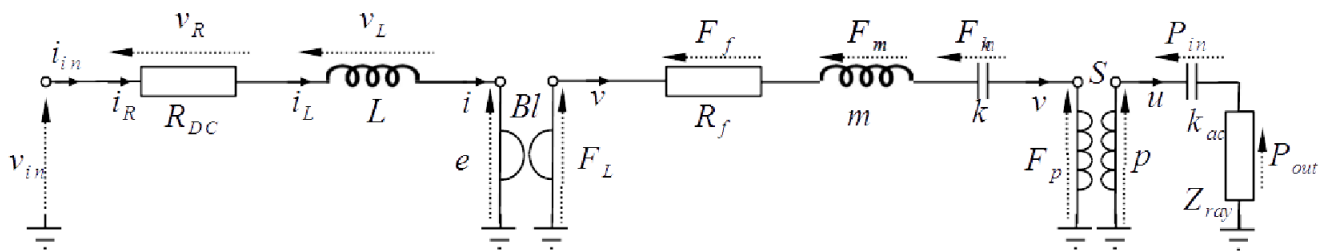


FIGURE 1.3 - Schéma général du haut-parleur : modèle de Thiele & Small ([14])

### 1.3 Prise en compte de phénomènes réalistes

Les haut-parleurs électrodynamiques sont des transducteurs non idéaux et incluent des non-linéarités responsables de dysfonctionnements. En effet, le modèle de Thiele & Small est valide pour des petits niveaux d'excitation. Les non-linéarités qui apparaissent à fort niveau se traduisent par des distorsions audibles (ajout de composantes spectrales qui n'existent pas dans le signal d'entrée), une limitation du niveau de sortie ou un comportement instable du haut-parleur. Les causes de ces non-linéarités, liées à la géométrie et aux propriétés des matériaux des différents éléments du haut-parleur, sont inventoriées ci-après. Le modèle de haut-parleur considéré ne retient que les plus dominantes.

#### 1.3.1 Inventaire des phénomènes

Il existe divers phénomènes dans le haut-parleur qui causent des effets non désirés :

- La force de rappel n'est pas une simple raideur et est une fonction non linéaire de la position.
- Le facteur de force varie avec la position de la bobine dans l'entrefer.
- L'inductance de la bobine est une fonction de sa position.
- La rigidité du diaphragme varie avec le module d'Young du matériau.
- La géométrie des composants du haut-parleur est changée par les vibrations mécaniques.
- L'effet Doppler se traduit par de la distorsion de phase lors de la propagation des vibrations.
- La vitesse du son dépend de la pression du milieu.

#### 1.3.2 Les phénomènes prépondérants

Les deux non-linéarités prépondérantes dans un haut-parleur sont la raideur de la suspension et le comportement magnétique du moteur (représenté par le facteur de force,  $Bl$ ), qui varient selon la position de la bobine dans l'entrefer.

##### Force de rappel de la suspension :

Le haut-parleur dispose d'un système de suspensions pour deux raisons : d'une part, pour maintenir la bobine dans l'axe de révolution du haut-parleur (spider) et d'autre part, pour rappeler la membrane à sa position d'équilibre (suspension externe). La figure 1.4 situe ces suspensions sur un schéma en coupe de haut-parleur et fournit la courbe non linéaire de la force de rappel en fonction du déplacement. La figure 1.5 montre la courbe de non-linéarité de la force de rappel des différentes suspensions.

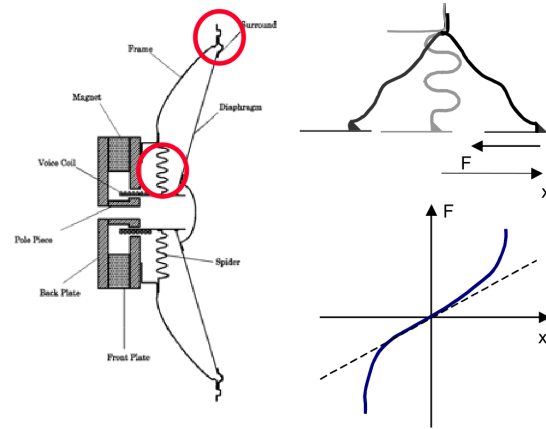


FIGURE 1.4 - Schéma en coupe d'un haut-parleur avec ses suspensions et courbe de non-linéarité de la suspension ([13])

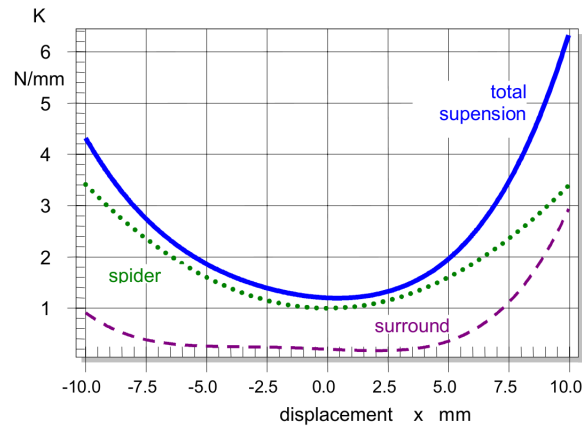


FIGURE 1.5 - Courbe de non-linéarité de la raideur des suspensions (spider, externe et totale) en fonction du déplacement ([13])

Ce que l'auteur Klippel appelle "raideur" ici est en fait la force de rappel normalisée par le déplacement. C'est donc bien la force de rappel qui est non linéaire et non la raideur. Cette non-linéarité de la force de rappel s'interprète physiquement : l'élongation maximale de la suspension avant rupture doit forcément être finie, dans le cas contraire on aurait dégradation de la membrane. C'est pourquoi arrivé à cette élongation maximale, la force de rappel devient infinie de sorte qu'il faudrait une énergie infinie pour aller plus loin. Cela explique l'allure des courbes de non-linéarité, notamment les valeurs soudainement plus élevées de la "raideur" lorsque le déplacement  $x$  augmente (figure 1.5) et l'infinité de la force de rappel pour une certaine valeur de  $x$  (figure 1.4).

### Facteur de force :

Comme vu précédemment, le facteur de force  $Bl$  décrit le couplage entre les parties électrique et mécanique du haut-parleur. Il est fonction de la longueur de conducteur plongé dans le champ magnétique  $B$  et donc dépend de la position. C'est pourquoi si la bobine quitte l'entrefer, ce facteur diminue. La figure 1.6 illustre la structure du moteur d'un haut-parleur et donc le déplacement de la bobine dans l'entrefer, avec leurs tailles respectives. La figure 1.6 montre, selon les tailles de la bobine et de l'entrefer, l'évolution du facteur de force en fonction du déplacement de la bobine.

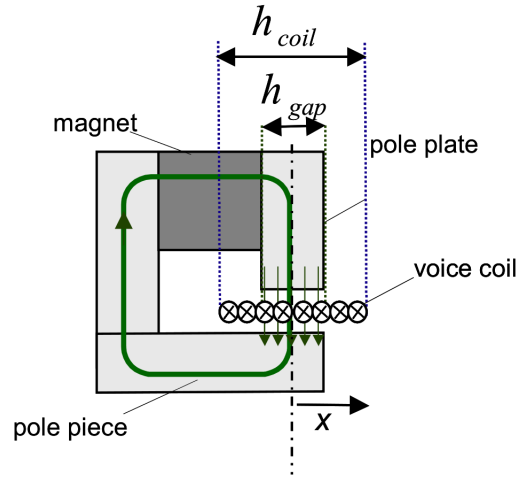


FIGURE 1.6 - Schéma de la position de la bobine dans l'entrefer ([13])

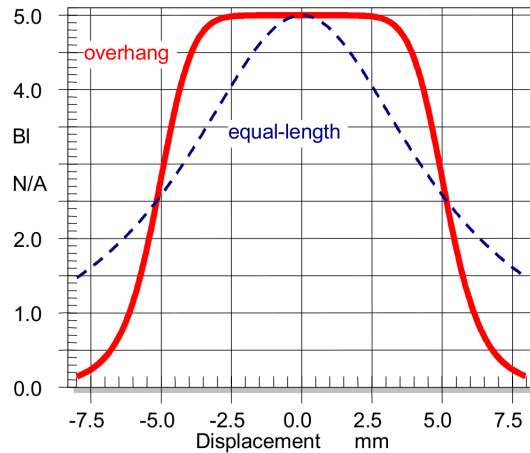


FIGURE 1.7 - Courbes de non-linéarité du facteur de force en fonction du déplacement ([13])

La valeur du facteur de force diminue si la bobine se déplace et quitte l'entrefer. Dans le cas où la bobine est plus grande que l'entrefer, il faut un certain déplacement de la bobine avant que  $Bl$  diminue (tant que la limite de la bobine n'a pas atteint l'entrefer, il y a toujours autant d'enroulements dans l'entrefer), alors que dans le cas où ils ont la même taille, le facteur de force diminue au moindre déplacement de la bobine qui entraîne une diminution du nombre d'enroulements dans l'entrefer. Cela explique l'allure des courbes et notamment la présence d'un palier sur celle illustrant le premier cas.

## 1.4 Le modèle retenu

On veut pour le contrôle un modèle simple, descriptif des phénomènes observés en pratique et donc incluant les non-linéarités. D'après Klippel, le modèle de Thiele et Small avec la partie acoustique intégrée dans la partie mécanique et une capacité non linéaire pour modéliser la force de rappel suffit. Le modèle retenu est illustré en figure 1.8.

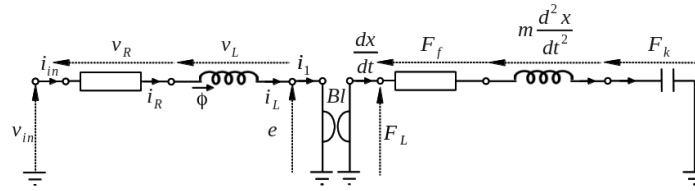


FIGURE 1.8 - Modèle de Thiele & Small retenu

## 2 Le formalisme des Systèmes Hamiltoniens à Ports

### 2.1 Encodage de la passivité

Un Système Hamiltonien à Ports (SHP) est une représentation d'état structurée par rapport aux transferts d'énergie et aux échanges de puissance. Il permet d'encoder le bilan de puissance et garantit la passivité du système.

#### 2.1.1 Encodage des lois constitutives

Un SHP comprend des composants stockant de l'énergie, des composants dissipant une puissance et des sources de puissance.

**Les composants stockants** (par exemple les condensateurs, inductances, masses, ressorts,...) :

Les composants stockants sont définis par un état  $x_n$  et une fonction de stockage (d'énergie, d'entropie,...)  $h_n(x_n)$  dont les propriétés sont les suivantes :

- $h_n(x_n) \geq 0 \forall x_n$  (semi-définie positive)
- Elle ne comporte qu'un seul minimum :  $h_n(x_n = 0) = 0$
- $\frac{\partial^2 h_n(x_n)}{\partial x_n^2} > 0 \forall x_n$  (définie positive,  $\simeq h$  convexe)

$h_n$  est l'énergie associée au composant  $n$ . L'énergie stockée dans le composant  $n$  à l'instant  $t$  est l'énergie associée à l'état  $x_n$  au travers de  $h_n$  :

$$E_n \equiv h_n \Leftrightarrow E_n(t) = h_n(x_n(t))$$

$$\frac{dE(t)}{dt} = \frac{d}{dt}[h_n(x_n(t))] = h'_n(x_n) \cdot \frac{dx_n(t)}{dt}$$

avec :

$\frac{dE(t)}{dt}$  la puissance reçue par le composant  $n$  (par définition  $\frac{dE}{dt} = P_n$ )

$h'_n(x_n)$  le gradient de l'énergie en  $x_n = x_n(t)$

$\frac{dx_n(t)}{dt}$  la variation de l'état.

La puissance peut s'écrire comme le produit de deux variables :

$$\frac{dE_n}{dt} = P_n = e_n \cdot f_n$$

avec  $e_n$  l'effort et  $f_n$  le flux.

Ces deux variables de puissance existent dans tous les domaines physiques :

	e	f
électrique	tension	courant
mécanique	force	vitesse
magnétique	force magnéto-motrice	variation de flux magnétique
acoustique	pression	débit acoustique

Selon le type de composant stockant, on a  $e_n = \frac{dx}{dt}$  ou  $\frac{dh}{dx}$  et  $f_n = \frac{dh}{dx}$  ou  $\frac{dx}{dt}$ .

$P = e.f$  est la puissance reçue *i.e.*  $e$  et  $f$  sont définies en convention récepteur.

Pour exprimer l'énergie totale, on introduit une fonction de stockage totale : le Hamiltonien  $H(\mathbf{x})$  du système. Comme par définition l'énergie est une quantité extensive, l'énergie totale est égale à la somme des énergies locales et donc :

$$H(\mathbf{x}) = \sum_{n=1}^N h_n(x_n)$$

La puissance reçue au total s'écrit :

$$\frac{dE_{totale}}{dt} = \frac{dH}{dt} = \nabla H(\mathbf{x})^\top \cdot \frac{d\mathbf{x}}{dt} \quad (1)$$

### Les ports :

Les ports permettent d'échanger de la puissance avec l'extérieur et de contrôler le système. Pour chaque port  $S$  (source) on définit un couple de variables de puissance  $(e_s, f_s)$ .

On choisit une des variables comme étant l'entrée  $u_s$  et l'autre comme la sortie  $y_s$  de sorte que la puissance reçue par le système sur le port  $S$  soit  $P_s = e_s.f_s = u_s.y_s$ .

Si  $n_s > 1$ ,

$$P_{s_{totale}} = \sum_{s=1}^{n_s} u_s.y_s = \mathbf{u}^\top \cdot \mathbf{y}$$

### Les composants dissipatifs (les résistances, diodes, transistors, frottements visqueux,...) :

Ces composants dissipent une puissance  $P_{dissipée}(t) = P_d(t)$  (pour le composant  $d$ ). Comme pour les composants stockants et les ports, cette puissance est exprimée comme le produit d'une variable de flux  $f_d$  et d'une variable d'effort  $e_d$  telles que :

$$P_d(t) = e_d(t).f_d(t)$$

La puissance dissipée est semi-définie positive :  $P_d \geq 0$ . Il n'y a donc pas de création spontanée d'énergie. On introduit une variable de dissipation  $w_d$  et on exprime la puissance dissipée à partir de  $w_d$  :

$$P_d(t) = D_d(w_d(t)) \geq 0$$

On cherche une factorisation de  $D_d$  telle que :

$$D_d(w_d) = e_d.f_d$$

avec  $e_d = w_d$  ou  $f_d = w_d$ .

Alors on introduit la fonction de dissipation  $z_d(w_d)$  de sorte que :

$$P_d \equiv D_d(w_d) = e_d.f_d = w_d.z_d(w_d)$$

Si  $n_d > 1$ ,

$$P_{d_{totale}} = \sum_{d=1}^{n_d} w_d.z_d(w_d) = \mathbf{z}(\mathbf{w})^\top \cdot \mathbf{w}$$

### 2.1.2 Encodage des échanges de puissance

Selon la nature du système, on peut appliquer les SHP à différents cas. Les cas les plus simples (sans composants dissipatifs ou sans sources) sont détaillés en Annexe 1 et expliquent la genèse de la structure. Le cas le plus complet est le cas dissipatif et ouvert qui est traité ci-dessous.

- Nombre de sources :  $n_s$
- Nombre de dissipatifs :  $n_d$
- Nombre de stockants :  $n_x$

Si le système reçoit plus (respectivement moins) de puissance des sources qu'il n'y a de puissance dissipée, alors l'énergie augmente (respectivement diminue).

$$P_s > P_d \Rightarrow E \text{ augmente} \Rightarrow \frac{dE}{dt} > 0$$

$$P_s < P_d \Rightarrow E \text{ diminue} \Rightarrow \frac{dE}{dt} < 0$$

$$\Rightarrow \frac{dE}{dt} \text{ est du signe de } P_s - P_d$$

D'où le bilan de puissance à encoder :

$$\frac{dE_{totale}}{dt} = P_{s_{totale}} - P_{d_{totale}}$$

On pose donc :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{d\mathbf{x}}{dt} \\ \mathbf{w} \\ -\mathbf{y} \end{pmatrix}}_{\mathbf{a}} = J. \underbrace{\begin{pmatrix} \nabla H(\mathbf{x}) \\ z(\mathbf{w}) \\ \mathbf{u} \end{pmatrix}}_{\mathbf{b}}$$

avec  $J$  antisymétrique *i.e.*  $J^T = -J$  *i.e.*  $\forall \chi, \chi^T J \chi = 0$ .

On a donc :

$$\mathbf{b}^T \cdot \mathbf{a} = \underbrace{\nabla H(\mathbf{x})^T \cdot \frac{d\mathbf{x}}{dt}}_{\frac{dE}{dt}} + \underbrace{z(\mathbf{w})^T \cdot \mathbf{w}}_{P_{d_{totale}}} - \underbrace{\mathbf{u}^T \cdot \mathbf{y}}_{P_{s_{totale}}} = 0$$

On exprime  $J = \begin{pmatrix} J_x & -K & -G_x \\ K^T & J_w & -G_w \\ G_x^T & G_w^T & J_y \end{pmatrix}$  et la structure générale des SHP est :

$$\begin{pmatrix} \frac{d\mathbf{x}}{dt} \\ \mathbf{w} \\ -\mathbf{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_x & -K & -G_x \\ K^T & J_w & -G_w \\ G_x^T & G_w^T & J_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \nabla H(\mathbf{x}) \\ z(\mathbf{w}) \\ \mathbf{u} \end{pmatrix} \quad (2)$$

Le système consomme de l'énergie et n'en produit pas (en dehors des sources). Le bilan de puissance est bien encodé et ainsi le formalisme des SHP garantit la passivité du système qui, lors de la discrétisation temporelle, garantira la stabilité des simulations pour un schéma préservant la structure (2).



### 2.1.3 Systèmes Hamiltoniens à Ports non linéaires

On se trouve dans un cas linéaire si les conditions suivantes sur les fonctions d'énergie des composants sont respectées :

- Le Hamiltonien  $H$  est quadratique :  $H(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \cdot \mathbf{x}^\top \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{x}$  avec  $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^\top > 0$  et donc  $\nabla H(\mathbf{x}) = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{x}$  est bien linéaire.
- $z$  est linéaire :  $z(\mathbf{w}) = R \cdot \mathbf{w}$  avec  $R > 0$ .

Sinon, on se trouve dans un cas non-linéaire. On peut faire apparaître des non-linéarités sur les composants  $R$  et  $C$ . Par exemple, en remplaçant la résistance par une diode parcourue par un courant  $I_{diode} = I_{sat} \cdot (e^{\frac{V_{diode}}{V_T}} - 1)$  :

$$z(w) = R \cdot w \text{ devient } z(w) = V_T \cdot \ln\left(\frac{w}{I_{sat}} + 1\right)$$

avec  $w \equiv i$ ,  $I_{sat}$  le courant de saturation propre à la diode,  $V_T = \frac{k \cdot T}{q}$ ,  $k$  la constante de Boltzmann,  $T$  la température et  $q$  la charge de l'électron.

Les non-linéarités de la capacité s'expriment dans sa fonction d'énergie :

$$H(q) = \frac{q^2}{2C} \text{ devient par exemple } H(q) = \frac{q_0^2}{C} \cdot (\ln(ch(\frac{q}{q_0}))) \text{ ou } H(q) = \frac{q_0^2}{C} \cdot (ch(\frac{q}{q_0}) - 1)$$

Ces fonctions d'énergies non-quadratiques sont pratiques car en passant au gradient elles traduisent un assouplissement ou un raidissement du ressort en fonction de l'élongation que l'on peut constater sur la figure 2.1 suivante :

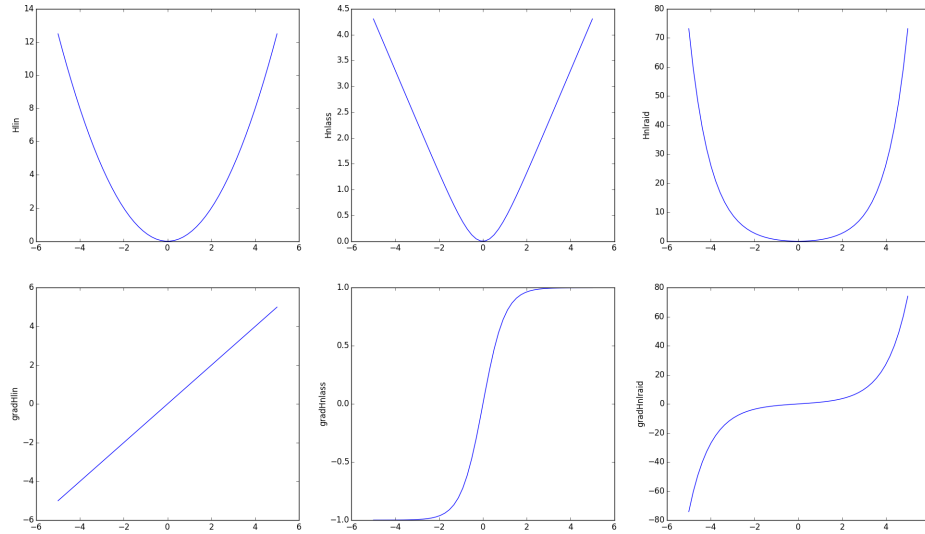


FIGURE 2.1 - Fonctions d'énergie de la capacité (du ressort) et leurs gradients dans les cas linéaire, non-linéaire assouplissant et non-linéaire raidissant

La force des SHP réside dans le fait que quels que soient les composants présents dans le système et quelle que soit la non-linéarité que l'on choisit de leur appliquer, la structure SHP reste la même.

## 2.2 Exemple illustratif et modèle-jouet

Nous disposons du circuit représenté sur la figure 2.2, sur lequel nous voulons appliquer le formalisme SHP :

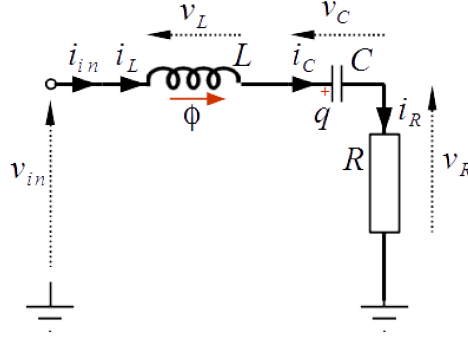


FIGURE 2.2 - Schéma de notre modèle-jouet : circuit RLC série ouvert

Ce système a trois composants :

- Une inductance  $L$  traversée par un courant  $i_L$  et d'état  $\phi$ , le flux magnétique de la bobine
- Une capacité  $C$  traversée par un courant  $i_C$  et d'état  $q$ , sa charge
- Une résistance  $R$  traversée par un courant  $i_R$

Puisque ce système comporte un port (une source), un composant dissipatif et deux composants stockants, nous nous trouvons dans le cas dissipatif / ouvert traité précédemment.

**Composants stockants :**

Soit le vecteur d'état  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \phi \\ q \end{pmatrix}$ , on a alors  $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{d\phi}{dt} \\ \frac{dq}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_L \\ i_C \end{pmatrix}$ .

De même, la fonction de stockage d'énergie s'exprime sous forme de vecteur des énergies associées à chaque composant stockant :

$$H(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} H_L(\phi) \\ H_C(q) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\phi^2}{2L} \\ \frac{q^2}{2C} \end{pmatrix} \text{ et donc } \nabla H(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{dH_L(\phi)}{d\phi} \\ \frac{dH_C(q)}{dq} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\phi}{L} \\ \frac{q}{C} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_L \\ v_C \end{pmatrix}$$

**Composant dissipatif :**

On pose  $w = i_R$  et on a la fonction de dissipation  $z(w) = R.w = R.i_R = v_R$

**Port :**

On pose  $y = i_{in}$  et  $u = v_{in}$

Dans le formalisme des SHP, on écrit :

$$\begin{pmatrix} \frac{d\mathbf{x}}{dt} \\ w \\ -y \end{pmatrix} = J. \begin{pmatrix} \nabla H(\mathbf{x}) \\ z(w) \\ u \end{pmatrix}$$

Donc dans notre cas :

$$\begin{pmatrix} v_L \\ i_C \\ i_R \\ -i_{in} \end{pmatrix} = J. \begin{pmatrix} i_L \\ v_C \\ v_R \\ v_{in} \end{pmatrix}$$

Et on détermine J avec les lois de Kirchhoff :

$$v_L = v_{in} - v_C - v_R$$

$$i_C = i_L$$

$$i_R = i_L$$

$$-i_{in} = -i_L$$

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

J est bien antisymétrique, avec  $J_x = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $K = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $G_x = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $J_w = 0$ ,  $G_w = 0$  et  $J_y = 0$ .

## 2.3 Implémentation numérique

### 2.3.1 Discrétisation

La simulation du SHP (2) implique sa discrétisation par rapport au temps. La détermination de la solution  $\mathbf{x}(t)$  de ce SHP quel que soit  $t$  correspond au problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = f(\mathbf{x}(t), t) & (dynamique) \\ \mathbf{x}(t = t_0) = \mathbf{x}_0 & (condition\ initiale) \end{cases}$$

Les méthodes standard travaillent sur  $\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt}$ . En effet, on s'intéresse surtout à l'état  $\mathbf{x}(t)$  et l'on intègre  $f(\mathbf{x}(t), t)$  pour l'obtenir, pour tout  $t$ . Mais hormis pour quelques cas d'écoles, l'intégration  $\mathbf{x}(t) = \int_0^t f(\mathbf{x}(\tau), \tau).d\tau + \mathbf{x}_0$  n'a pas de solution analytique. On procède donc à une intégration numérique de proche en proche. Ici nous voulons un bilan de puissance :

$$\frac{dH}{d\mathbf{x}}^\top \cdot \frac{d\mathbf{x}}{dt} = P_s - P_d$$

Le terme de gauche correspond à  $\frac{dE}{dt}$  (cf (1)) qui est une dérivée de composée de fonctions dont nous voulons trouver un équivalent discret. Ainsi nous devons aussi travailler sur  $f(\mathbf{x}(t), t)$  pour garantir le bilan de puissance à temps discret suivant :

$$\frac{\delta E_k}{\delta t} = P_{s,k} - P_{d,k}$$

Depuis la structure SHP, on voit :

$$\frac{\delta H_k}{\delta \mathbf{x}_k} \cdot \frac{\delta \mathbf{x}_k}{\delta t} = \frac{\delta E_k}{\delta t}$$

avec  $\frac{\delta H_k}{\delta \mathbf{x}_k}$  l'approximation discrète du gradient du Hamiltonien, l'indice  $k$  signifiant que l'on prend la grandeur à l'instant  $t_k = k.T$  avec  $T$  la période d'échantillonnage et  $k$  un entier positif.

Nous choisissons la variation élémentaire suivante :

$$\frac{\delta \mathbf{x}_k}{\delta t} = \frac{\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k}{T}$$

et donc :

$$\delta \mathbf{x}_k = \mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k$$

Il faut également garantir que  $E(t_{k+1}) - E(t_k)$  soit du signe de  $P_s(t_k) - P_d(t_k)$ .

Une solution est de choisir le gradient discret tel que :

$$\nabla^d H(\mathbf{x}) = \frac{H(\mathbf{x}_{k+1}) - H(\mathbf{x}_k)}{\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k}$$

car

$$E(t_k) = H(\mathbf{x}(t_k))$$

et donc

$$\frac{\delta E_k}{\delta t} = \frac{H(\mathbf{x}_{k+1}) - H(\mathbf{x}_k)}{\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k} \cdot \frac{\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k}{T} = \frac{H(\mathbf{x}_{k+1}) - H(\mathbf{x}_k)}{T} = \frac{E_{k+1} - E_k}{T}$$

La discrétisation du système (2) rappelé ci-dessous

$$\begin{pmatrix} \frac{d\mathbf{x}}{dt} \\ \mathbf{w} \\ -\mathbf{y} \end{pmatrix} = J \cdot \begin{pmatrix} \nabla H(\mathbf{x}) \\ z(\mathbf{w}) \\ \mathbf{u} \end{pmatrix}$$

revient à remplacer  $\frac{d\mathbf{x}}{dt}$  par  $\frac{\delta \mathbf{x}}{\delta t}$  et  $\nabla H$  par  $\nabla^d H$  :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\delta \mathbf{x}}{\delta t} \\ \mathbf{w}_k \\ -\mathbf{y}_k \end{pmatrix}}_{\mathbf{a}_k} = J \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \nabla^d H(\mathbf{x}) \\ z(\mathbf{w}_k) \\ \mathbf{u}_k \end{pmatrix}}_{\mathbf{b}_k}$$

Puisque  $J$  est toujours antisymétrique, on a alors :

$$\mathbf{b}_k^\top \cdot \mathbf{a}_k = \nabla^d H^\top \cdot \frac{\delta \mathbf{x}}{\delta t} + z(\mathbf{w}_k)^\top \cdot \mathbf{w}_k - \mathbf{u}_k^\top \cdot \mathbf{y}_k = \frac{\delta E_k}{\delta t} + P_{d,k} - P_{s,k} = 0$$

Donc on a une passivité discrète et le bilan de puissance est bien garanti.

### 2.3.2 Algorithme de Newton-Raphson

D'après la partie précédente, la discrétisation nous donne :

$$\frac{\delta E_k}{\delta t} \triangleq \frac{E_{k+1} - E_k}{T}$$

$$\frac{\delta \mathbf{x}_k}{\delta t} \triangleq \frac{\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k}{T} = \frac{\delta \mathbf{x}_k}{T} \quad (3)$$

$$\frac{\delta H(\mathbf{x}_k, \delta \mathbf{x}_k)}{\delta \mathbf{x}_k} = \frac{H(\mathbf{x}_k + \delta \mathbf{x}_k) - H(\mathbf{x}_k)}{\delta \mathbf{x}_k} \quad (4)$$

Les équations du SHP continu sont :

- L'équation dynamique sur  $\mathbf{x}(t)$  paramétrée par  $\mathbf{w}(t)$  et  $\mathbf{u}(t)$  :

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = J_x(\mathbf{x}(t)).\nabla H(\mathbf{x}(t)) - K(\mathbf{x}(t)).z(\mathbf{w}(t)) + G_x(\mathbf{x}(t)).\mathbf{u}(t)$$

- L'équation statique ou algébrique sur  $\mathbf{w}(t)$  paramétrée par  $\mathbf{x}(t)$  et  $\mathbf{u}(t)$  :

$$\mathbf{w}(t) = K^\top(\mathbf{x}(t)).\nabla H(\mathbf{x}(t)) + J_w(\mathbf{x}(t)).z(\mathbf{w}(t)) + G_w(\mathbf{x}(t)).\mathbf{u}(t)$$

- L'équation d'observation :

$$\mathbf{y}(t) = G_x^\top(\mathbf{x}(t)).\nabla H(\mathbf{x}(t)) + G_w^\top(\mathbf{x}(t)).z(\mathbf{w}(t)) + J_y(\mathbf{x}(t)).\mathbf{u}(t)$$

Pour obtenir les équations du SHP discret, il suffit de remplacer (3) et (4) dans les équations du SHP continu, ce qui donne :

$$\frac{\delta \mathbf{x}_k}{T} = J_x(\mathbf{x}_k). \frac{\delta H(\mathbf{x}_k, \delta \mathbf{x}_k)}{\delta \mathbf{x}_k} - K(\mathbf{x}_k).z(\mathbf{w}_k) + G_x(\mathbf{x}_k).\mathbf{u}_k \quad (5)$$

$$\mathbf{w}_k = K^\top(\mathbf{x}_k). \frac{\delta H(\mathbf{x}_k, \delta \mathbf{x}_k)}{\delta \mathbf{x}_k} + J_w(\mathbf{x}_k).z(\mathbf{w}_k) + G_w(\mathbf{x}_k).\mathbf{u}_k \quad (6)$$

On connaît les différentes matrices du formalisme SHP pour tout  $k$  (c'est notre modèle) et on connaît  $\mathbf{x}_k$  quel que soit  $k$ . Cependant, on ne connaît ni  $\delta \mathbf{x}_k = \mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k$ , ni le  $\mathbf{w}_k$  qui satisfait la contrainte.

Posons donc  $X_k = \begin{pmatrix} \delta \mathbf{x}_k \\ \mathbf{w}_k \end{pmatrix}$  et réécrivons (5) et (6) comme :

$$F(X_k) = 0 \quad (7)$$

Pour obtenir  $\delta \mathbf{x}_k$  et  $\mathbf{w}_k$  à chaque instant, nous devons résoudre l'équation (7), à chaque instant. Or, comme nous avons affaire à un problème non-linéaire, cette équation est implicite. Nous utilisons l'algorithme de Newton-Raphson (voir [12]) qui est une méthode itérative : étant donné une initialisation  $X_{k,0}$  au temps  $k$ , la solution est successivement approchée par l'itération  $X_{k,n+1} = f(X_{k,n}, F)$  jusqu'à convergence (décidée par un critère d'arrêt). L'ensemble de l'algorithme est repris sur la page suivante, à l'instant  $k$  et où  $n$  désigne l'itération.

(i) Initialisation :  $X_{k,n=0} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{w}_{k-1} \end{pmatrix}$

(ii) Affiner  $X_{k,n+1} = X_{k,n} - [J_F(X_{k,n})]^{-1} \cdot F(X_{k,n})$ , qui est la solution fournie par l'algorithme à l'instant  $k$  et à l'itération  $n + 1$

avec  $J_F$  la Jacobienne de  $F$ , définie par :  $J_F(X_k) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\partial F_1}{\partial x_{n_x}} \\ \cdot & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & \frac{\partial F_j}{\partial x_i} & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \frac{\partial F_{n_x}}{\partial x_1} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\partial F_{n_x}}{\partial x_{n_x}} \end{pmatrix}$

En pratique on veut annuler la fonction suivante :

$$F(\delta \mathbf{x}_k, \mathbf{w}_k) = \begin{pmatrix} \frac{\delta \mathbf{x}_k}{T} \\ \mathbf{w}_k \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} J_x & -K \\ K & J_w \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\delta H(\mathbf{x}_k, \delta \mathbf{x}_k)}{\delta \mathbf{x}_k} \\ z(\mathbf{w}_k) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} G_x \\ G_w \end{pmatrix} \cdot \mathbf{u}_k \stackrel{?}{=} 0$$

avec  $\frac{\delta H(\mathbf{x}_k, \delta \mathbf{x}_k)}{\delta \mathbf{x}_k} = \begin{cases} \text{diag}(\frac{\delta \mathbf{x}_k}{\delta t})^{-1} \cdot [H(\mathbf{x}_k + \delta \mathbf{x}_k) - H(\mathbf{x}_k)] & \text{si } |\delta \mathbf{x}_k| > \text{eps} \\ \nabla H(\mathbf{x}_k) & \text{sinon} \end{cases}$  (test à faire coordonnée

par coordonnée, car si  $\delta \mathbf{x}_k$  est nul, le gradient discret n'est pas défini).

La Jacobienne est :

$$J_F(\delta \mathbf{x}_k, \mathbf{w}_k) = \begin{pmatrix} \frac{Id(n_x)}{T} & 0_{n_x n_w} \\ 0_{n_w n_x} & Id(n_w) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} J_x & -K \\ K & J_w \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} J_{\partial_x H}(\mathbf{x}_k, \delta \mathbf{x}_k) & 0 \\ 0 & J_z(\mathbf{w}_k) \end{pmatrix}$$

avec

$$J_z(\mathbf{w}_k) = \text{diag}(\frac{\delta z(\mathbf{w}_k)}{\delta \mathbf{w}_k})$$

et si  $|\delta x_{i,k}| > 0$ ,

$$J_{\partial_x H}(\mathbf{x}_k, \delta \mathbf{x}_k) = \text{diag}(\delta \mathbf{x}_k^{-1}) \cdot \text{diag}(\frac{\partial H_i}{\partial x_i}(x_{i,k} + \delta x_{i,k})) - \text{diag}(\delta \mathbf{x}_k^{-2}) \cdot (H(\mathbf{x}_k + \delta \mathbf{x}_k) - H(\mathbf{x}_k))$$

(et nulle sinon)

(3) Critères d'arrêt :

- soit le nombre d'itération maximum, fixé au préalable, est atteint
- soit  $|F(X_{k,n})| < \text{seuil}$

## 2.4 Application des Systèmes Hamiltoniens à Ports au haut-parleur

### 2.4.1 Détermination de la structure Systèmes Hamiltoniens à Ports

Nous allons suivre la même méthode que pour le modèle-jouet. Dans le cas du modèle de Thiele & Small rappelé en figure 2.3, on ne fait qu'ajouter des états puisqu'il y a plus de composants.

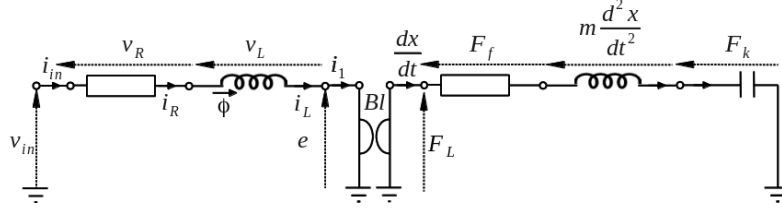


FIGURE 2.3 - Modèle de Thiele & Small

La difficulté ajoutée se trouve essentiellement dans le gyrateur et le transformateur symbolisant les différents couplages. Précisons donc les relations imposées à ces endroits du système :

Pour le gyrateur symbolisant le couplage électromécanique :

$$\begin{pmatrix} F_L \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & Bl \\ \frac{1}{Bl} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e \\ i \end{pmatrix}$$

Fort de cela et en appliquant les lois de Kirchhoff à notre modèle, on obtient la structure SHP suivante

$$\begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ v_L \\ m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} \\ i_R \\ \frac{dx}{dt} \\ -i_{in} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -Bl & -1 & 0 & 1 \\ -1 & Bl & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_k \\ i_L \\ \frac{dx}{dt} \\ V_R \\ F_f \\ v_{in} \end{pmatrix}$$

La matrice obtenue est bien antisymétrique, et on a :

$$J_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -Bl \\ -1 & Bl & 0 \end{pmatrix}, J_w = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, J_y = 0, K = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} G_x = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } G_w = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

### 2.4.2 Simulation

On excite le système avec un signal sinusoïdal. La non-linéarité appliquée au ressort est de type raidissante (cf figure 2.1). Les autres composants stockants (masse et inductance) sont gardés linéaires. On observe les différentes caractéristiques de ces composants sur les figures 2.4 et 2.5.

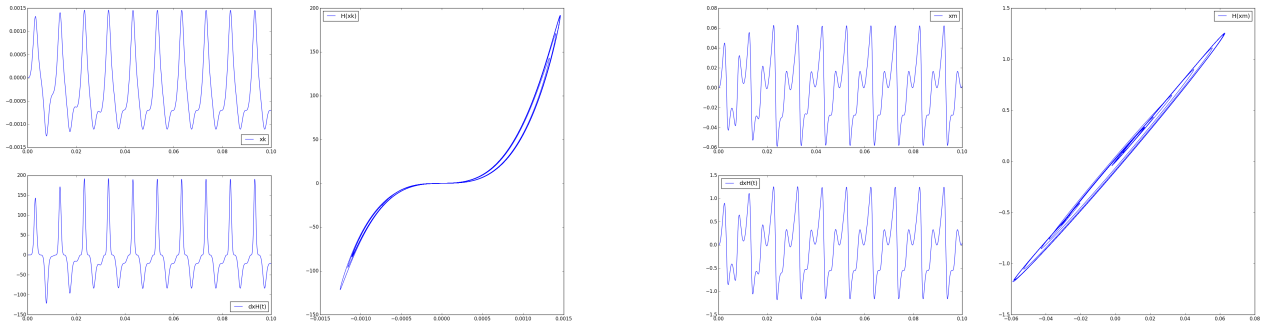


FIGURE 2.4 - Variation de l'état en fonction du temps, fonction d'énergie et gradient pour le ressort (à gauche) et la masse (à droite)

Les allures fortement non sinusoïdales des états de la masse et du ressort alors que l'on envoie un sinus en entrée attestent de la présence de non-linéarités prononcées dans le système.

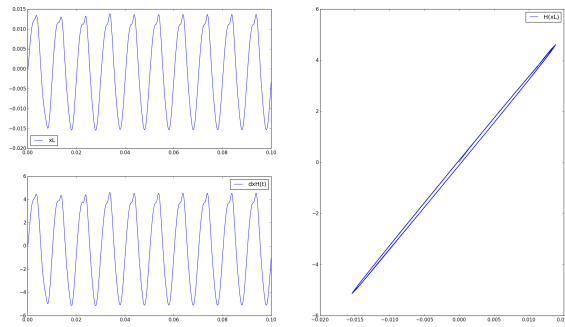


FIGURE 2.5 - Variation de l'état en fonction du temps, fonction d'énergie et gradient pour l'inductance

Nous pouvons vérifier que le bilan de puissance est bien garanti sur la figure 2.6.



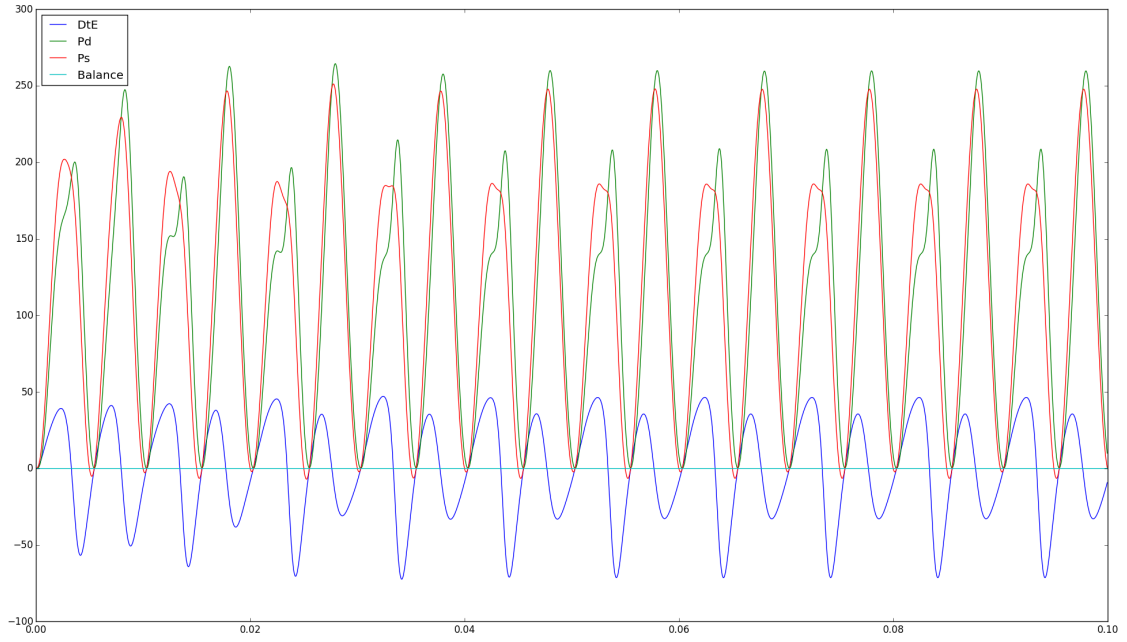


FIGURE 2.6 - Bilan de puissance du système

Ces figures illustrent bien la garantie du bilan de puissance numérique (en cyan) dans un cas non linéaire, car à tout moment la variation d'énergie (en bleu) est égale à la différence entre la puissance fournie par les sources (en rouge) et celle dissipée (en vert) : nous avons bien  $\frac{dE}{dt} + P_d - P_s = 0$  et  $P_d$  positive.

### 3 Estimation paramétrique

Pour traiter correctement les non-linéarités d'un système réel, on a besoin de connaître les valeurs de ses différents paramètres. Or nous n'avons pas accès aux paramètres d'un SHP par une mesure directe donc nous allons les estimer à partir de mesures réalisées sur les entrées/sorties du système. Ici, le système est non linéaire et pas nécessairement gaussien donc les méthodes standard ne s'appliquent pas. Nous avons choisi de combiner un algorithme espérance-maximisation qui estime les paramètres au sens du maximum de vraisemblance, avec du filtrage particulaire permettant de traiter les non-linéarités.

#### 3.1 Introduction : présentation du modèle stochastique

##### 3.1.1 Modèle initial paramétrique

Notre système SHP (2) peut être réduit par rapport à  $\mathbf{w}$  (voir Annexe 2) et cela nous fournit deux équations sur lesquelles nous allons nous reposer pour traiter notre problème d'estimation. Ce sont l'équation dynamique et l'équation de mesure qui suivent :

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{x}}{dt} = (J_\theta - R_\theta) \cdot \nabla H_\theta(\mathbf{x}) - G_\theta \cdot \mathbf{u} \\ \mathbf{y} = G_\theta^\top \cdot \nabla H_\theta(\mathbf{x}) + D_\theta \cdot \mathbf{u} \end{cases}$$

Rappelons le système SHP dans le cadre du problème d'estimation :

$$\begin{pmatrix} \frac{d\mathbf{x}}{dt} \\ \mathbf{w} \\ -\mathbf{y} \end{pmatrix} = S_\theta \cdot \begin{pmatrix} \nabla H_\theta(\mathbf{x}) \\ z(\mathbf{w}) \\ \mathbf{u} \end{pmatrix}$$

L'indice  $\theta$  indique la dépendance à  $\theta$ .  $\mathbf{x}$  est la variable cachée (on n'y a pas accès) et est donc inconnu,  $\mathbf{y}$  est la mesure,  $\theta$  est le vecteur des paramètres du problème et est ce que l'on cherche à estimer. Enfin,  $\mathbf{u}$  est le signal d'entrée que l'on impose et est donc connu et maîtrisé.

##### 3.1.2 Prise en compte des incertitudes

Les lois de Kirshhoff sont vraies tout le temps. Elles fournissent la matrice  $S_\theta$ , réseau d'échange des puissances, qui est toujours antisymétrique, mais on a des incertitudes sur les paramètres de  $S_\theta$  ainsi que sur les actionneurs. Afin de prendre en compte ces perturbations, nous faisons les hypothèses suivantes :

$$\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{u} + \mathbf{b}_u$$

$$\hat{S}_\theta = S_\theta + \delta S_\theta$$

avec  $\mathbf{b}_u \sim N(0, \sigma_u^2)$  le bruit de mesure et  $\delta S_\theta \sim N(0, \sigma_S^2)$  le bruit de modèle. Ce dernier doit être choisi antisymétrique puisque c'est la propriété essentielle de  $S_\theta$  et même après l'ajout de bruit le modèle doit encore être physiquement acceptable. On dit que  $\delta S_\theta$  est un bruit structuré.

L'objectif des parties suivantes va donc être de prendre en compte l'aspect stochastique du modèle apporté par les différents bruits et d'estimer  $\theta$  en conséquence.

### 3.2 Théorie de l'estimation et maximum de vraisemblance

L'objectif est de déterminer la valeur de  $\theta = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_p \end{pmatrix}$ , le vecteur des paramètres du modèle de notre

système ou tout au moins l'approcher par un estimateur  $\hat{\theta} = f(\mathbf{u}, \mathbf{y})$  avec  $f$  une fonction quelconque. Pour cela, nous disposons de plusieurs mesures de  $\mathbf{y}$ , constituant le vecteur d'observation, obtenues expérimentalement par le biais d'un ou plusieurs capteurs, à un ou plusieurs instants et qui nous fournissent un modèle aléatoire. Le fait de remonter aux paramètres du système à partir de ces observations  $\mathbf{y}$  et de l'entrée  $\mathbf{u}$  est appelé problème inverse (voir [18]).

On peut disposer de plusieurs informations sur le modèle aléatoire :

- La distribution de  $\mathbf{x}|\theta$  ("x sachant  $\theta$ "), notée  $p(\mathbf{x}|\theta)$ , est la probabilité d'obtenir  $\mathbf{x}$  lorsqu'on suppose que l'on a déjà  $\theta$ .
- L'information a priori  $p(\theta)$  est simplement la probabilité d'avoir  $\theta$ .

Un rappel sur les probabilités et les définitions des différentes notions utilisées dans la suite de ce chapitre sont donnés en Annexe 3.

Pour obtenir l'estimateur au sens du Maximum de Vraisemblance (MV), on a besoin de connaître la vraisemblance de  $\mathbf{x}$  étant donnée une estimation de  $\theta$ . Cette vraisemblance est définie comme la densité de probabilité conditionnelle  $p(\mathbf{x}|\theta)$ . Le maximum de vraisemblance se calcule alors :

$$\hat{\theta}_{MV} = \underset{\theta}{\operatorname{argmax}}(p(\mathbf{x}|\theta)) = \text{la valeur de } \theta \text{ qui maximise } p(\mathbf{x}|\theta) = \underset{\theta}{\operatorname{argmax}}(\ln(p(\mathbf{x}|\theta)))$$

Appliquer la fonction logarithme permet de se débarrasser des termes exponentiels (qui modélisent souvent les densités de probabilité, la gaussienne en particulier) et de transformer le produit en somme, ce qui simplifie les calculs, mais l'égalité reste vraie pour toute autre fonction monotone croissante.

Quand  $N \rightarrow +\infty$ ,  $\hat{\theta}_{MV}$  devient efficace (on dit que l'estimateur est efficace asymptotiquement).

Dans le cas particulier d'un modèle linéaire gaussien, si  $\mathbf{x} = A.\theta + \mathbf{b}$ , avec  $A$  une matrice et  $b$  un vecteur, alors :

$$\hat{\theta}_{MV} = (A^\dagger.\Gamma(\mathbf{b})^{-1}.A)^{-1}.A^\dagger.\Gamma^{-1}.\mathbf{x} = \text{fonction linéaire de } \mathbf{x}$$

Le symbole " $^\dagger$ " indique une transconjugaison, *i.e.* on transpose le vecteur et l'on conjugue ces composantes.

Or nous nous trouvons dans un cas non linéaire et pas nécessairement gaussien. Nous ne savons donc pas trouver le maximum de vraisemblance analytiquement et des résolutions numériques s'imposent, comme par exemple l'algorithme espérance-maximisation que nous allons traiter dans la partie suivante.

### 3.3 Algorithme espérance-maximisation

L'algorithme Espérance-Maximisation (EM) est un algorithme itératif qui permet de déterminer numériquement l'estimation d'un paramètre au sens du maximum de vraisemblance. Comme son nom l'indique, il est constitué de deux étapes :

- l'étape "espérance" où l'on calcule la vraisemblance et l'on établit la fonction d'espérance à partir de l'estimation du paramètre de l'itération précédente ;
- l'étape "maximisation" où l'on cherche la nouvelle valeur du paramètre qui maximise cette fonction.

A chaque itération, cette valeur obtenue se rapprochera de plus en plus de l'estimateur optimal.

L'essentiel de l'algorithme EM repose sur le postulat d'un ensemble de données cachées  $\mathbf{x}$  (ici il s'agira des états de nos composants) et l'observation d'un autre ensemble  $\mathbf{y}$  (les mesures associées à ces états). La fonction que l'on va chercher à maximiser est donc la fonction de vraisemblance jointe :  $L_\theta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \log(p_\theta(\mathbf{x}, \mathbf{y}))$  où l'indice  $\theta$  indique que la fonction a été déterminée avec une certaine valeur de  $\theta$ .

Comme  $\mathbf{x}$  n'est pas disponible, le principe de l'algorithme EM est d'approximer  $L_\theta(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  par une fonction  $Q(\theta, \theta_k)$ , où  $k$  désigne l'itération. Pour cela, on va estimer le minimum de la variance de  $L_\theta(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  sachant les observations disponibles  $\mathbf{y}$  et en supposant une valeur  $\theta_k$  de notre paramètre. Ainsi on a :

$$Q(\theta, \theta_k) \triangleq E_{\theta_k} \{L_\theta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) | \mathbf{y}\} = \int L_\theta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cdot p_{\theta_k}(\mathbf{x} | \mathbf{y}) \cdot d\mathbf{x}$$

Il est démontré dans [16, Partie 4] que déterminer  $\theta$  de telle sorte que  $Q(\theta, \theta_k)$  augmente, fait aussi augmenter la log-vraisemblance  $L_\theta(\mathbf{y})$ . L'algorithme EM exploite cela pour délivrer une séquence de vecteurs  $\theta_k (k = 1, 2, \dots)$  approximant de mieux en mieux l'estimateur au maximum de vraisemblance  $\hat{\theta} = \underset{\theta}{\operatorname{argmax}}(p_\theta(\mathbf{y}))$ . L'algorithme EM est récapitulé ci-dessous :

- (i) Soit  $k = 0$  et  $\theta_k$  initialisé de telle sorte que  $L_{\theta_k}(\mathbf{y})$  est finie
- (ii) Etape "Espérance" : on calcule  $Q(\theta, \theta_k)$
- (iii) Etape "Maximisation" : on calcule  $\theta_{k+1} = \underset{\theta}{\operatorname{argmax}}(Q(\theta, \theta_k))$

(iv) Si  $Q(\theta_k, \theta_k) - Q(\theta, \theta_k)$  est supérieur à un seuil prédéfini, l'algorithme ne converge pas encore : on incrémente  $k$  de 1 et on retourne à l'étape (ii)

Le calcul de  $Q(\theta, \theta_k)$  est simple dans le cas linéaire en faisant appel à un filtre de Kalman. Cependant, ce qui nous intéresse ici est de nous placer dans un cas non linéaire, c'est pourquoi le calcul de cette fonction est impossible sans une approche alternative. Encore une fois, [16, Partie 4] démontre que l'on peut écrire cette fonction sous la forme d'une somme de trois intégrales :

$$Q(\theta, \theta_k) = I_1 + I_2 + I_3$$

où les différentes intégrales dépendent de distributions que l'on ne connaît pas et qu'il nous est impossible de calculer analytiquement. Nous allons donc approximer numériquement ces dernières à l'aide du filtrage particulière.

### 3.4 Filtrage particulaire

L'objectif du filtrage particulaire est d'approximer une distribution de probabilité en utilisant un grand nombre de particules que l'on va propager dans le temps en les échantillonnant selon leur importance : c'est la méthode de Monte Carlo Séquentielle. Généralisation du filtrage de Kalman (moindres carrés séquentiels ne traitant que les cas linéaires) (voir [17]), le filtrage particulaire permet de traiter les problèmes non linéaires et non gaussiens, ce qui en fait un objet d'étude très prisé (voir [3, 7, 8, 11, 16, 17]). En effet, il est important de prendre en compte les non-linéarités pour modéliser correctement un système, c'est pourquoi nous allons utiliser cette méthode de filtrage dans le cadre de SHP non linéaires.

A la différence du filtre de Kalman étendu qui permet de linéariser localement le problème et donc d'appliquer les équations du filtre de Kalman classique, le filtrage particulaire traite les non-linéarités par l'emploi d'une simulation de Monte Carlo pour obtenir les estimations : il s'agit donc d'une méthode d'échantillonnage par génération aléatoire de particules et on ne modifie pas l'expression des fonctions du problème pour traiter les non-linéarités.

Pour la présentation du filtrage particulaire et pour des raisons de clarté, nous nous plaçons dans le cas scalaire. Ainsi nous manipulons à chaque instant un seul état, mais tout ce qui suit est généralisable à des vecteurs.

Grâce à l'approximation de la distribution obtenue par filtrage particulaire, on va pouvoir suivre l'état  $x$ . En effet, on obtient ce dernier à l'instant  $t+1$  à partir de l'état à l'instant  $t$  et des données du problème (notamment l'entrée  $u$  et les paramètres  $\theta$  qui seront à estimer) : c'est l'équation dynamique qui est non linéaire et dépendante du temps.

Pour commencer, on dispose donc de notre modèle non linéaire (notre SHP discret sous forme "Cauchy"), constitué d'une équation dynamique (mise à jour de l'état) et d'une équation de mesure (détermination de l'observation associée à l'état). Ces deux équations sont agrémentées de bruits de mesure (ajouté à l'entrée) et de modèle (ajouté aux coefficients des matrices qui constituent le modèle),  $v$  et  $e$ .

$$x_{t+1} = f_t(x_t, u_t, v_t, \theta) \text{ équation dynamique}$$

$$y_t = h_t(x_t, u_t, e_t, \theta) \text{ équation de mesure}$$

avec  $f$  et  $h$  des fonctions non linéaires en les paramètres et dépendantes du temps.

Comme le principe du filtrage particulaire est d'introduire des incertitudes de modèle et de mesure, on passe dans un mode stochastique et on réexprime ces équations en tant que distributions qui suivent  $x_{t+1}$  et  $y_t$  : ainsi le premier suit une distribution de probabilité d'obtenir  $x_{t+1}$  sachant  $x_t$  et le second suit une distribution de probabilité d'obtenir  $y_t$  sachant  $x_t$ .

$$x_{t+1} \sim p(x_{t+1}|x_t)$$

$$y_t \sim p(y_t|x_t)$$

On suppose l'état initial  $x_0$  (qui est une première estimation de l'état réel) et on génère aléatoirement des particules selon une distribution initiale a priori (gaussienne) centrée sur cet état initial (c'est la simulation de Monte Carlo). Avec  $i$  l'indice de la particule et  $n_p$  le nombre de particules tirées, on a :

$$\{x_0^i\}_{i=1}^{n_p} \sim p(x_0)$$

Comme l'état change dans le temps, il faut ensuite procéder à des mises à jour. Cependant, on ne met pas à jour le modèle en fonction de l'erreur observée comme dans le cas de Kalman, mais l'état et les particules. On sait que notre système se comporte selon les équations dynamique et de mesure (déterminées par la méthode détaillée en Annexe 4). On met donc à jour l'état précédemment initialisé en le passant dans l'équation dynamique stochastique, le nouvel état ainsi obtenu étant prédit par le comportement du système. Puis on calcule l'observation réelle en appliquant cet état mis à jour dans l'équation de mesure également bruitée. De la même façon que pour les états et mesures réels, on calcule ensuite l'état mis à jour et l'observation à chaque instant pour chaque particule. Du point de vue des distributions de probabilité, cela s'écrit (un décalage d'indice a été effectué pour des raisons de commodités) :

$$\tilde{x}_t^i \sim p(\tilde{x}_t | x_{t-1}^i)$$

$$y_t^i \sim p(y_t | \tilde{x}_t^i)$$

pour  $i$  allant de 1 à  $n_p$  et où le symbole tilde désigne des prédictions issues des équations du système.

Maintenant que l'on observe les particules et que l'on a une idée de l'état réel, on va combiner ces dernières de telle façon qu'elles forment une distribution qui estime le mieux possible la valeur de la mesure réelle (gaussienne centrée sur cette valeur). A un instant donné, on va utiliser la valeur de l'état réel pour améliorer nos observations particulières, en se débarrassant, parmi les particules, des mauvaises valeurs d'observations et en gardant les bonnes, en se basant sur cette mesure réelle.

Nous allons donc procéder à une simple comparaison des observations particulières (simulées)  $y_t^i$  et de la valeur réelle de l'observation  $y_t$ . Pour une particule donnée, on va traduire sa distance à l'état réel en terme de probabilité : c'est la vraisemblance que chaque particule génère l'observation  $y_t$ . On lui assignera donc une forte probabilité dans le cas où sa valeur est proche et une probabilité d'autant plus faible que la valeur est éloignée. Cette probabilité est appelée le poids de la particule et est notée  $w_t^i$ .

On connaît notre bruit de mesure (lié à la précision du capteur donnée par le constructeur). Ici nous le prenons gaussien de variance  $\sigma^2$  et on va l'utiliser pour modéliser la vraisemblance d'observer la valeur réelle. Donc à chaque particule donnée est associée une distribution gaussienne qui va fournir une valeur de la probabilité d'obtenir notre valeur réelle. En effet chaque poids est basé sur la probabilité de l'observation réelle sachant l'observation de la particule donnée. Pour calculer cette vraisemblance, on va utiliser l'équation de la distribution gaussienne, appliquée à la particule, en y remplaçant la valeur de la moyenne par la valeur de l'observation réelle : on peut ainsi quantifier en quelque sorte la distance d'un point de vue probabiliste entre l'observation associée à la particule et l'observation réelle. Chaque particule se trouve alors pondérée par une valeur de probabilité (le poids). Chaque particule a un poids vis-à-vis de cette valeur réelle. Ainsi il est attribué un poids fort aux observations particulières proches de l'observation réelle et un poids plus ou moins faible aux autres.

$$w_t^i = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{(y_t^i - y_t)^2}{2\sigma^2}}$$

pour  $i$  allant de 1 à  $n_p$ .

Enfin, les poids sont normalisés pour former une distribution de probabilité (*i.e.* la somme est unitaire) et ils forment alors une nouvelle distribution gaussienne centrée sur la valeur réelle.

L'étape suivante est appelée "resampling" et sert à multiplier les particules qui ont un poids élevé et à négliger celles qui ont un poids faible. Le principe de cette étape est de tirer de nouvelles particules selon la distribution formée par la répartition des poids normalisés. Pour réaliser cela en pratique, on tire aléatoirement et uniformément une valeur entre 0 et 1 et on détermine l'antécédent de cette valeur par la fonction cumulative de la distribution formée par les poids. En effet la fonction cumulative d'une gaussienne présente une forte pente pour les indices de haute probabilité et on peut donc récupérer ces

indices en tirant la valeur entre 0 et 1. Grâce à la pente, on a plus de chance de tomber sur ces indices de haute probabilité et donc en moyenne de tirer les valeurs qui ont le poids le plus élevé (*i.e.* une forte probabilité d'être correct sachant l'observation réelle) et de négliger les valeurs qui ont un poids faible. L'estimation de l'état à un instant donné est obtenu en prenant la moyenne de ces particules issues du rééchantillonnage et elle est utilisée dans l'itération suivante. A chaque itération, ce nouvel ensemble de particules obtenu va donc se resserrer en moyenne sur la valeur réelle de l'observation, jusqu'à l'estimer parfaitement.

Par itération, on tire une nouvelle distribution centrée sur la moyenne obtenue à l'itération précédente et on met à jour ce nouvel ensemble de particules (l'état réel aussi) grâce à l'équation dynamique et les observations grâce à l'équation de mesure. On rééchantillonne et on a un nouvel estimateur de l'état et ainsi de suite.

Le processus du filtrage particulaire est résumé sur le diagramme de la figure 3.1, sur lequel les étoiles servent à identifier les états et observations réelles. Les autres sont liés aux particules et  $k$  désigne l'instant. On génère ici  $n_p$  particules, mais pour des raisons de clarté, seules trois particules apparaissent à chaque étape: la première (indice 1), la dernière (indice  $n_p$ ) et une particule quelconque (indice  $i$ ).

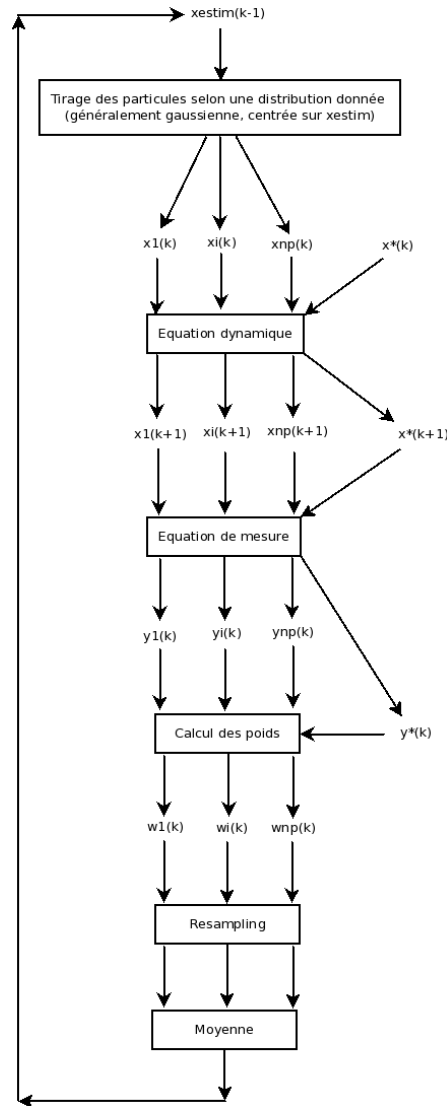


FIGURE 3.1 - Diagramme du processus du filtrage particulaire

### 3.5 Application du filtrage particulaire au circuit RC

Pour bien comprendre cet algorithme de filtrage particulaire, notamment grâce à des tracés, nous l'appliquons à un simple circuit RC, dans lequel on souhaite suivre l'état  $q$ , la charge électrique du condensateur. Ces tracés sont obtenus dans le cadre d'une implémentation simple du filtrage particulaire qui ne gère pas encore les non-linéarités. Il s'agit surtout de bien comprendre le principe et d'observer ce qu'on obtient aux différentes étapes. Ainsi les tracés suivants permettent de suivre l'évolution des particules (mise à jour, resampling,...) :

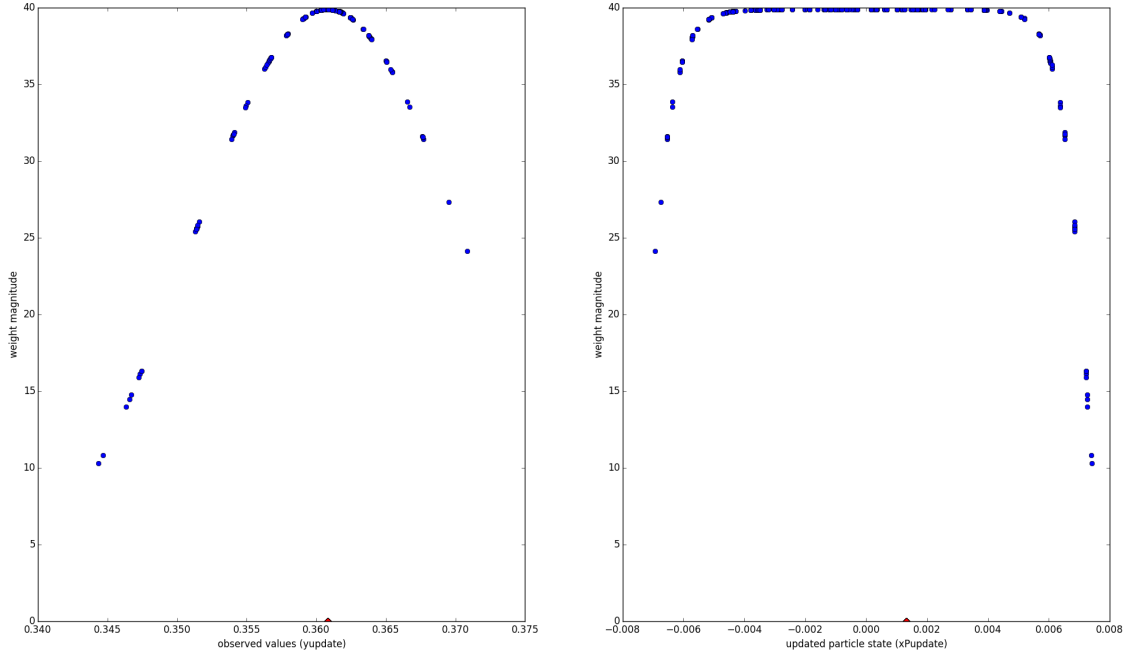


FIGURE 3.2 - Observations et états des particules à l'instant  $k=5$

Les tracés de la figure 3.2 ont été obtenus pour l'instant  $k=5$ , donc vers le début de l'algorithme. Sur la courbe de gauche, on observe les valeurs des observations pour chaque particule et leur poids associés, calculés comme expliqué précédemment, en comparaison avec la valeur de la mesure réelle. On remarque qu'il se forme une distribution en gaussienne centrée sur cette valeur réelle (le triangle rouge situé sur la ligne des abscisses). Sur la courbe de droite sont tracés les états associés à ces observations. On n'obtient plus de gaussienne, mais on observe bien là encore que les particules d'état dont les valeurs sont proches de la valeur réelle de l'état (le triangle rouge) associé à la mesure réelle ont un poids plus fort (courbe en palier). L'attribution des poids se fait donc convenablement.



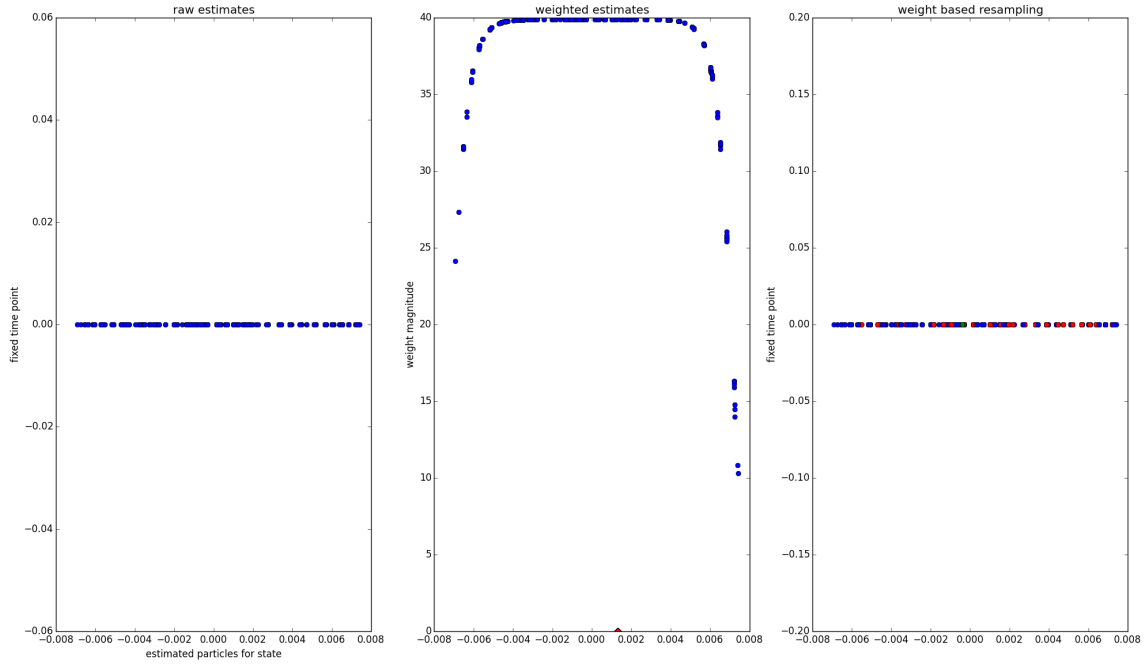


FIGURE 3.3 - Prédications et resampling à l'instant  $k=5$

Les courbes de la figure 3.3 ont été obtenues au même instant  $k=5$ . La courbe de gauche représente l'ensemble de particules issues des équations de mises à jours (les prédictions) dont les poids n'ont pas encore été attribués. Sur la courbe du milieu on retrouve ces particules pondérées, avec la même fonction en palier. La courbe de droite illustre le resampling : selon la distribution obtenue à partir de ces particules pondérées, on obtient un nouvel ensemble de particules dont les valeurs sont plus proches de la valeur réelle de l'état (le triangle rouge). Sur la courbe de droite, les particules bleues sont les particules avant le resampling et les particules rouges sont les particules resamplées. On remarque bien que l'on s'est débarrassé de quelques particules bleues sur les bords (correspondant aux particules qui ont un poids faible). On prend ensuite la moyenne de ce nouvel ensemble de particules qui est l'estimation de l'état (le point vert). A cet instant, on est au début de l'algorithme et l'état réel (le losange rouge, environ 0.001) et l'estimation de l'état (le point vert, environ 0) ne sont pas encore correctement alignés à la même valeur (la différence de 0.001 est importante ici car on a travaillé avec des petites valeurs de capacités, de l'ordre de  $10^{-9}$ ).

Confrontons donc ces résultats en reprenant les mêmes courbes, mais vers la fin de l'algorithme, à l'instant  $k=100$  :

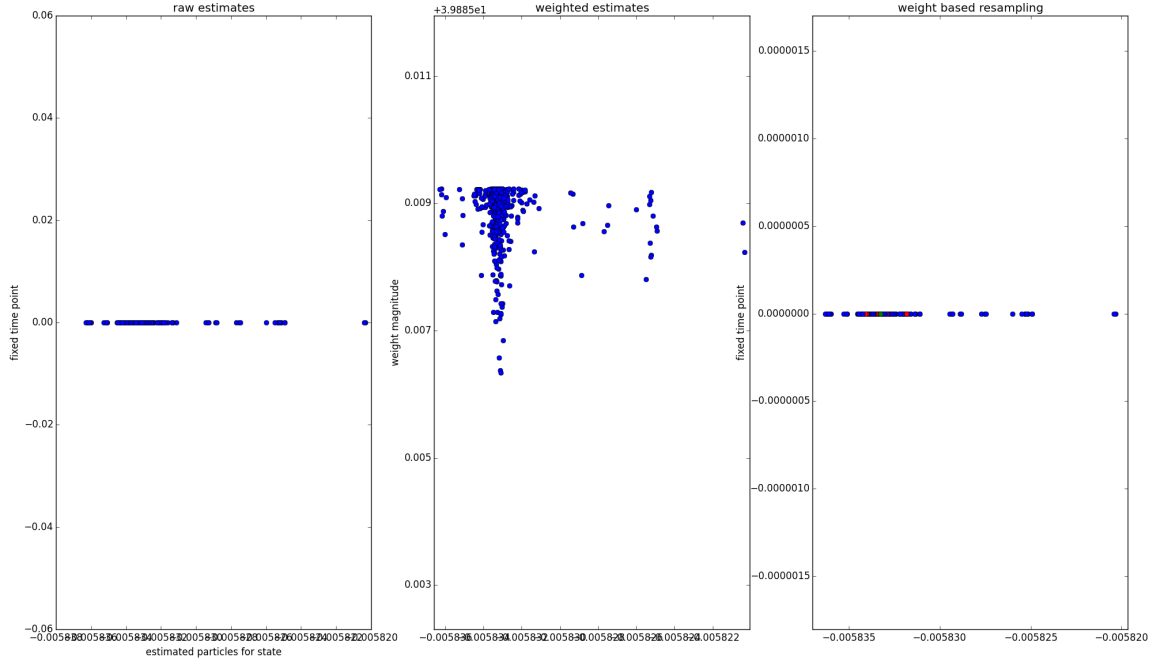


FIGURE 3.4 - Prédications et resampling à l'instant  $k=100$

A cet instant, la figure 3.4 illustre bien la convergence de l'algorithme. En effet, on remarque une accumulation des particules autour d'une valeur de l'état. Sur le tracé de droite, on voit que le resampling continue à être efficace, se débarrassant des particules bleues de faibles poids sur les bords. On constate que la valeur de l'estimateur (le point vert, environ -0.005827) est désormais très proche de la valeur de l'état réel (le triangle rouge, environ -0.005830), ce qui se traduit sur le tracé de la figure 3.5 par une superposition parfaite de la courbe représentant l'état réel et de celle représentant l'estimation.

Le tracé suivant représente l'efficacité de l'estimation puisqu'on y voit d'une part l'état réel et d'autre part l'estimation de l'état obtenue par filtrage particulaire :

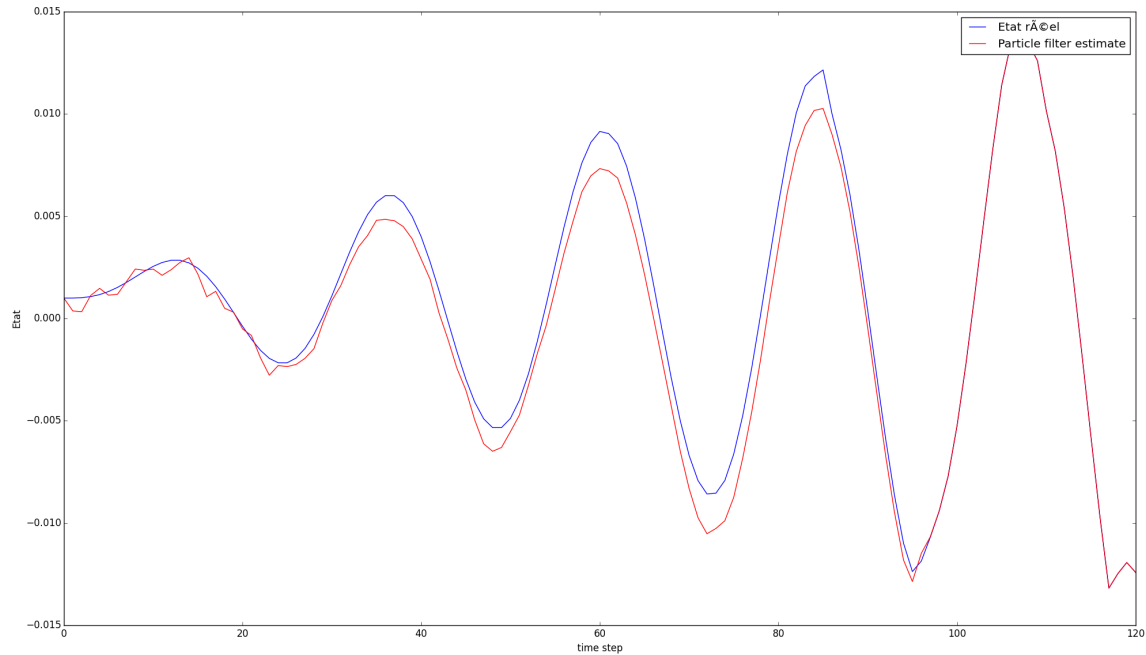


FIGURE 3.5 - Tracé de l'état réel (en bleu) et estimé (en rouge) au cours du temps pour 100 particules

Sur la figure 3.5, on remarque que, pour 100 particules et 120 itérations, on obtient une estimation acceptable dès la 30ème itération et l'estimation est parfaite à partir de la 100ème itération.

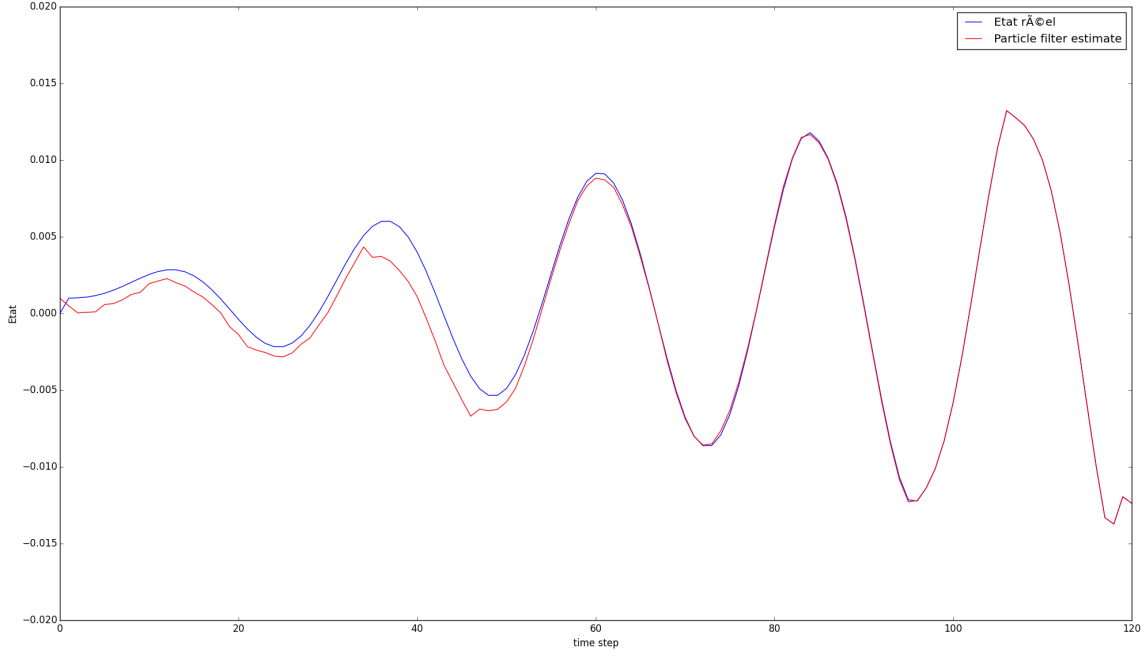


FIGURE 3.6 - Tracé de l'état réel (en bleu) et estimé (en rouge) au cours du temps pour 1000 particules

Sur la figure 3.6, pour 1000 particules, on converge plus vite, la superposition est parfaite dès la 70ème itération (à part aux extrema).

### 3.6 Estimation paramétrique sur le RLC non linéaire

Pour l'application à un cas non linéaire, nous avons utilisé la deuxième version, plus complexe, de notre algorithme de filtrage particulaire, traitant notamment les non-linéarités via l'algorithme de Newton-Raphson. Nous y avons associé l'algorithme espérance-maximisation tel qu'il est proposé dans [16]. Notre code se compose alors de cinq blocs principaux :

#### Le process

Il gère le modèle SHP (défini selon les matrices  $J_x$ ,  $J_w$ ,  $J_y$ ,  $K$ ,  $G_x$  et  $G_w$ ), le calcul du gradient discret des fonctions d'énergie et la résolution des équations non linéaires à l'aide de l'algorithme de Newton-Raphson. Ce process est appelé dans le bloc du filtrage particulaire et dans celui appelé "Vraisemblance dynamique" (ce sont les équations dynamique et de mesure).

#### Le filtrage particulaire

Il fournit les différentes particules, estimations de l'état et poids à partir du vecteur de paramètres à estimer, de l'entrée et des mesures.

### **Le bloc “vraisemblance dynamique”**

Il calcule la densité  $p(x_{j,t+1}|x_{i,t})$  à partir des particules issues du filtrage particulaire. Cette densité est utile pour le calcul des intégrales I1, I2 et I3.

### **Le “smoother”**

Alors que le filtrage particulaire permet d’estimer la distribution de l’état à un certain instant sachant toutes les observations précédentes jusqu’à cet instant, le “particle smoother” sert à estimer la distribution de ce même état, mais sachant toutes les observations précédentes, l’observation actuelle et quelques observations futures en plus (on procède en “backwards”). Ayant plus d’information à sa disposition, le “particle smoother” va donc générer un nouvel ensemble de poids, améliorés, à partir de ceux obtenus avec le filtrage particulaire. Ces poids améliorés sont eux aussi utiles pour le calcul des intégrales (voir [16] et [7] pour plus de détails).

### **Le bloc de calcul de la fonction Q**

On récupère les sorties des différents blocs précédents et on peut donc calculer la fonction à maximiser, Q, comme somme des trois intégrales I1, I2 et I3. On en obtient les valeurs des paramètres du système qui maximisent Q. Ces valeurs sont réinjectées au début de l’algorithme et on réitère l’ensemble de l’algorithme jusqu’à ce que ces valeurs de paramètres n’évoluent plus, obtenant ainsi une estimation optimale de ces paramètres.

### **Algorigramme**

L’ensemble de notre code se résume dans l’algorigramme de la figure 3.7, où les indices  $i$ ,  $j$  et  $k$  signifient que l’on manipule des particules, à chaque instant.

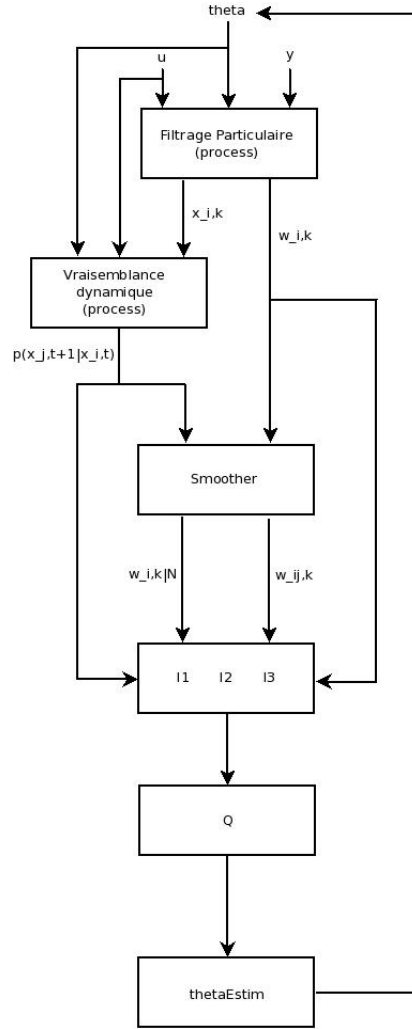


FIGURE 3.7 - Algorithme

## Résultats

A son exécution, le code n'affiche aucune erreur. Cependant, les temps de calculs sont élevés pour un nombre de particules suffisamment grand pour obtenir un résultat fiable. Pour 100 particules, l'algorithme réalise une itération de l'algorithme EM par heure environ. La valeur du vecteur  $\theta$  n'est jamais modifiée et la fonction  $Q$  n'est pas définie. Cela vient du fait que l'on a besoin d'inverser les vraisemblances dynamiques lors du calcul des poids du "smoother". Or, certaines de ces dernières sont nulles car nous n'avons pas encore assez de particules pour que toutes les classes des histogrammes calculés dans la fonction de vraisemblance dynamique soient non vides. Mais augmenter le nombre de particules augmenterait encore le temps de calcul. Le code est donc à optimiser pour être utilisable en pratique. Malgré tout, l'objectif est presque atteint puisque nous avons élaboré une procédure d'estimation nous fournissant une valeur des paramètres d'un système non linéaire à partir d'un modèle en SHP.

# Conclusion

## Contributions

Le travail réalisé pendant ce stage a fourni une méthode pour inclure les incertitudes dans la structure SHP en préservant la passivité qui est une propriété physique donc vérifiée pour tout paramètre et toute perturbation. Après une implémentation fructueuse du filtrage particulaire seul, un algorithme complet d'estimation incluant les SHP a été développé. Ce code est exécutable et tout à fait réutilisable.

## Compétences acquises

Le stage a permis une formation dans les domaines suivants :

- recherche bibliographique (articles scientifiques et livres) et mise en lien avec les cours dispensés à l'ENSEA ;
- physique (énergie, lois de conservation, systèmes passifs), méthodes numériques, automatique ;
- codage en langage Python ;
- travail d'équipe à travers des réflexions et des recherches communes ;
- appropriation du début d'un projet pour le continuer ainsi que des méthodes utilisées à l'IRCAM (SHP) ;
- restitution (en partie en LaTeX) d'un travail de six mois dans un rapport.

## Perspectives

Le travail fourni pourra être repris lors des futurs travaux de l'équipe en vue d'une validation sur système simulé, puis une application à un système réel (haut-parleur). On pourra tout d'abord résoudre le problème de la fonction  $Q$  qui n'est pas définie en interpolant les histogrammes calculés dans la fonction "vraisemblance dynamique" pour obtenir des densités continues et ainsi supprimer les valeurs nulles. On n'aura alors plus de division par 0. Il faudra aussi améliorer le temps de calcul des estimations afin que le contrôle du système se fasse en temps réel. Enfin, cette version temps réel pourra être implémentée sur Beagleboard ou FPGA afin de développer un système embarqué.

# Annexes

## Annexe 1 : encodage des échanges de puissance

### Cas conservatif / fermé :

- Nombre de sources : 0
- Nombre de dissipatifs : 0
- $n_x$  composants stockants :

$\mathbf{x} = [x_1 \dots x_{n_x}]^\top$  et  $H(\mathbf{x}) = \sum_{n=1}^{n_x} h_n(x_n) \Rightarrow \nabla H(\mathbf{x}) = [\partial_{x_1} h_1(x_1) \dots \partial_{x_{n_x}} h_{n_x}(x_{n_x})]^\top$   
Dans le cas fermé et conservatif, le bilan pour tout le système s'écrit :  $\frac{dE_{totale}}{dt} = 0$  .  
On veut donc garantir et encoder dans la structure la relation suivante :

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dH(\mathbf{x})}{dt} = \nabla H^\top \cdot \frac{d\mathbf{x}}{dt} = 0$$

Pour ce faire, on pose :

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = J \cdot \nabla H(\mathbf{x})$$

avec J antisymétrique *i.e.*  $J^\top = -J$  *i.e.*  $\forall \chi : \chi^\top \cdot J \cdot \chi = 0$ .

Ainsi, on a bien :

$$\nabla H^\top(\mathbf{x}) \cdot \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \nabla H^\top \cdot J \cdot \nabla H = 0 = \frac{dE(t)}{dt}$$

### Cas conservatif / ouvert :

- Nombre de sources :  $n_s \neq 0$
- Nombre de dissipatifs : 0
- Nombre de stockants :  $n_x$

stockage :  $\mathbf{x} = [x_1 \dots x_{n_x}]^\top$ ,  $H(\mathbf{x}) = \sum_{n=1}^{n_x} h_n(x_n)$

ports :  $\mathbf{u} = [u_1 \dots u_{n_s}]^\top$ ,  $\mathbf{y} = [y_1 \dots y_{n_s}]^\top$

Dans ce cas, la variation d'énergie totale correspond à la puissance reçue.

$$\frac{dE_{totale}}{dt} = P_{sources} = \mathbf{u}^\top \cdot \mathbf{y}$$

On veut donc encoder :

$$\frac{dE}{dt} = \nabla H^\top \cdot \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{u}^\top \cdot \mathbf{y}$$

Pour ce faire, on pose :

$$\begin{pmatrix} \frac{d\mathbf{x}}{dt} \\ -\mathbf{y} \end{pmatrix} = J \cdot \begin{pmatrix} \nabla H(\mathbf{x}) \\ \mathbf{u} \end{pmatrix}$$

avec J antisymétrique.



Ainsi on retrouve :

$$\underbrace{\nabla H(\mathbf{x})^\top \cdot \frac{d\mathbf{x}}{dt}}_{\frac{dE}{dt}} - \underbrace{\mathbf{u}^\top \cdot \mathbf{y}}_{P_{sources}} = 0$$

Ici on a  $J = \begin{pmatrix} J_x & G_x \\ -G_x^\top & -J_y \end{pmatrix}$ .

On obtient donc la structure SHP pour un système conservatif et ouvert :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = J_x \cdot \nabla H + G_x \cdot \mathbf{u} \\ \mathbf{y} = G_x^\top \nabla H + J_y \cdot \mathbf{u} \end{cases}$$

**Cas dissipatif / fermé :**

- Nombre de sources : 0
- Nombre de dissipatifs :  $n_d$
- Nombre de stockants :  $n_x$

Ici, la variation d'énergie correspond à la puissance dissipée (toute l'énergie perdue est dissipée).

$$\frac{dE}{dt} = -P_{d_{totale}}$$

Pour encoder cela, on pose :

$$\begin{pmatrix} \frac{d\mathbf{x}}{dt} \\ \mathbf{w} \end{pmatrix} = J \cdot \begin{pmatrix} \nabla H(\mathbf{x}) \\ z(\mathbf{w}) \end{pmatrix}$$

avec J antisymétrique.

Ainsi on obtient :

$$\underbrace{\nabla H^\top(x) \cdot \frac{d\mathbf{x}}{dt}}_{\frac{dE}{dt}} + \underbrace{z(\mathbf{w})^\top \cdot \mathbf{w}}_{P_{d_{totale}}} = 0$$

## Annexe 2 : réduction du système SHP par rapport à $\mathbf{w}$

Rappelons notre “Problème de Cauchy” :

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t)) & (\text{dynamique}) \\ x(t = t_0) = x_0 & (\text{condition initiale}) \end{cases} \quad (8)$$

Dans le cadre des SHP, il devient :

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = J_x \cdot \nabla H(\mathbf{x}(t)) - K \cdot z(\mathbf{w}(t)) + G_x \cdot \mathbf{u}(t) = f(t, \mathbf{x}(t))$$

Pour réduire le système par rapport à  $\mathbf{w}$ , nous allons supposer les dissipations linéaires :

$$z(\mathbf{w}) = R \cdot \mathbf{w}$$

avec  $R$  matrice diagonale contenant les  $R_i$  pour  $i$  allant de 1 à  $n_d$  avec  $n_d$  le nombre de composants dissipatifs.

Au niveau de la ligne des composants dissipatifs dans la structure SHP, on a :

$$\mathbf{w}(t) = K^\top \cdot \nabla H(\mathbf{x}(t)) + J_w \cdot z(\mathbf{w}(t)) + G_w \cdot \mathbf{u}(t)$$

$$\mathbf{w}(t) - J_w \cdot z(\mathbf{w}(t)) = (I_N - J_w \cdot R) \cdot \mathbf{w}(t) = K^\top \cdot \nabla H(\mathbf{x}(t)) + G_w \cdot \mathbf{u}(t)$$

d'où :

$$\mathbf{w}(t) = M_R \cdot K^\top \cdot \nabla H(\mathbf{x}(t)) + M_R \cdot G_w \cdot \mathbf{u}(t) \quad (9)$$

avec  $M_R = [I_N - J_w \cdot R]^{-1}$

On peut donc maintenant réinjecter l'expression (9) dans le problème (8) :

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} &= J_x \cdot \nabla H(\mathbf{x}(t)) + G_x \cdot \mathbf{u}(t) - K \cdot R \cdot (M_R \cdot K^\top \cdot \nabla H(\mathbf{x}(t)) + M_R \cdot G_w \cdot \mathbf{u}(t)) \\ \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} &= (J_x - \underbrace{K \cdot R \cdot M_R \cdot K^\top}_{R_x}) \cdot \nabla H(\mathbf{x}(t)) + \underbrace{(G_x - K \cdot R \cdot M_R \cdot G_w)}_{-G} \cdot \mathbf{u}(t) \end{aligned} \quad (10)$$

De même au niveau des ports :

$$-\mathbf{y} = -G_x^\top \cdot \nabla H(\mathbf{x}(t)) - J_y \cdot \mathbf{u}(t) - G_w^\top \cdot R \cdot (M_R \cdot K^\top \cdot \nabla H(\mathbf{x}(t)) + M_R \cdot G_w \cdot \mathbf{u}(t))$$

$$\mathbf{y} = \underbrace{(G_x^\top + G_w^\top \cdot R \cdot M_R \cdot K^\top)}_{G^\top} \cdot \nabla H(\mathbf{x}(t)) + \underbrace{(J_y + G_w^\top \cdot R \cdot M_R \cdot G_w)}_D \cdot \mathbf{u}(t)$$

## Annexe 3 : rappels de probabilités

Procédons à quelques rappels sur les probabilités ([2]). Dans ces rappels,  $X$  est une variable aléatoire,  $P$  désigne une probabilité et  $P_X$  la loi de probabilité suivie par  $X$ .  $x$  désigne une variable quelconque.

### Fonction de répartition :

Une fonction de répartition est une application  $F_X : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  vérifiant les propriétés suivantes :

1.  $F_X(x) = P(X \leq x) = P_X([-\infty, x])$
2.  $F_X$  est monotone croissante de 0 à 1.
3.  $F_X$  est continue à droite en tout point, admet une limite à gauche en tout point, avec  $F_X(x+) - F_X(x-) = P(X = x)$  (probabilité locale).

### Densité de probabilité :

La densité de probabilité est définie par  $f_X(x) = F'_X(x)$  (dérivée de la fonction de répartition) et vérifie les propriétés suivantes :

1.  $f_X(x) \geq 0$  et  $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x).dx = 1$
2.  $f_X(x).dx = P(x \leq X \leq x + dx)$  pour  $dx$  infinitésimal (interprétation locale de la densité)
3.  $P(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a) = \int_a^b f_X(x).dx$  avec  $a$  et  $b$  deux réels quelconques (interprétation globale de la densité)

### Espérance :

L'espérance est un outil mathématique qui permet de décrire un comportement en moyenne des quantités aléatoires dont on dispose. Elle s'exprime :

$$E(X) = \int_{\mathbb{R}} x.f_X(x).dx$$

Pour déterminer si l'on a un bon estimateur, on introduit la notion de biais :  $E[\hat{\theta}(\omega)] - \theta$ . Si cette quantité est nulle, l'estimateur  $\hat{\theta}$  est dit sans biais ou non biaisé et cela peut être suffisant pour déterminer si l'estimateur est bon ou pas. Cependant, si l'on dispose de deux estimateurs à comparer et qu'ils sont tous deux non biaisés, on peut les départager en comparant leurs variances.

### Variance :

$$\sum_{i=1}^p E[|\hat{\theta}_i(\omega) - E[\hat{\theta}_i(\omega)]|^2] = E[(\hat{\theta}(\omega) - E[\hat{\theta}(\omega)])^\dagger . (\hat{\theta}(\omega) - E[\hat{\theta}(\omega)])]$$

Le symbole " $\dagger$ " indique une transconjugaison, *i.e.* on transpose le vecteur et l'on conjugue ces composantes.

### Matrice de covariance :

$$\Gamma(\hat{\theta}) = E[(\hat{\theta}(\omega) - E[\hat{\theta}(\omega)])(\hat{\theta}(\omega) - E[\hat{\theta}(\omega)])^\dagger]$$

Pour remarque, en calculant la trace de la matrice de covariance, on retrouve la variance.

Les deux estimateurs peuvent alors être départagés en regardant leur convergence en moyenne quadratique : si  $\lim_{N \rightarrow +\infty} \text{Variance}(\hat{\theta}(\omega)) = 0$ , alors l'estimateur est satisfaisant.

D'autres outils sont également utiles pour déterminer l'efficacité d'un estimateur :

Si  $\hat{\theta}(\omega)$  est scalaire, sans biais,  $\theta$  déterministe (pas d'a priori sur  $\theta$ ) alors  $\text{Var}(\hat{\theta}(\omega)) \geq CR$ , la borne de Cramer-Rao, dont l'inverse s'exprime :

$$\frac{1}{CR} = -E\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\ln(p(x|\theta))\right]$$

Dans le cas vectoriel, avec  $\hat{\theta}$  non biaisé et  $\theta$  déterministe :

$$\Gamma(\hat{\theta}) \geq F^{-1}(\theta)$$

$$(A \geq B \Leftrightarrow A - B \geq 0 \Leftrightarrow \text{val}p(A - B) \geq 0 \Leftrightarrow u^\dagger.(A - B).u \geq 0 \forall A, B, \underline{u})$$

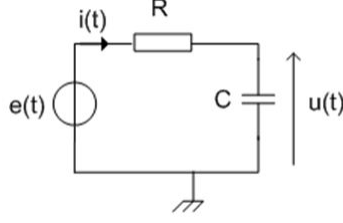
avec  $F(\theta)$  la matrice d'information de Fisher dont l'expression est :  $[F(\theta)]_{k,l} = -E\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta_k\partial\theta_l}\ln(p(x|\theta))\right]$

On dit qu'un estimateur  $\hat{\theta}$  est efficace quand  $\Gamma(\hat{\theta}) = F^{-1}(\theta)$ .

Ces résultats ont pour conséquence :  $\text{Var}(\hat{\theta}) = \text{Trace}(\Gamma(\hat{\theta})) \geq \text{Trace}(F^{-1}(\theta))$

## Annexe 4 : détermination de l'équation dynamique et de l'équation de mesure dans le cas du RC série ouvert

On a notre circuit RC série :



$$\text{Avec : } \begin{cases} e(t) = u \\ i(t) = y \\ i(t) = \frac{dq}{dt} \\ i(t) = z(w) = \frac{w}{R} \\ u(t) = \frac{dH}{dq} \end{cases}$$

Le formalisme des SHP sur ce système donne (sachant  $q = x$ ) :

$$\begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ w \\ -y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}}_J \cdot \begin{pmatrix} \frac{dH}{dx} \\ z(w) \\ u \end{pmatrix}$$

Ce qui donne :

$$w = -\frac{dH}{dx} + u$$

et donc :

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{R} \cdot \left( -\frac{dH}{dx} + u \right)$$

En discrétisant cette équation on obtient :

$$\frac{\delta x_k}{\delta t} = \frac{1}{R} \cdot \left( -\frac{dH}{dx} + u_k \right) = \frac{x_{k+1} - x_k}{T}$$

Finalement les équations sont donc :

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k + \frac{T}{R} \cdot [(u_k + br_k) - (1 + bn_k) \cdot \frac{dH}{dx}] & \text{Equation dynamique (mise a jour)} \\ y_k = \frac{1}{R} [(u_k + br'_k) - (1 + bn'_k) \cdot \frac{dH}{dx}] & \text{Equation de mesure} \end{cases}$$

avec  $br_k$  et  $br'_k$  des bruits de mesure et  $bn_k$  et  $bn'_k$  des bruits de modèle ajoutés aux coefficients de la matrice  $J$ .

## Références bibliographiques

- [1] <http://www.muzicosphere.fr/le-point-sur-le-rodage-des-haut-parleurs/>.
- [2] *Probabilités et Statistiques, Cours de Niveau 1, 2ème année ENSEA*. 2013-2014.
- [3] M Sanjeev Arulampalam, Simon Maskell, Neil Gordon, and Tim Clapp. A tutorial on particle filters for online nonlinear/non-gaussian bayesian tracking. *Signal Processing, IEEE Transactions on*, 50(2):174–188, 2002.
- [4] Francis BROUCHIER. Haut-parleurs et enceintes acoustiques. 2009.
- [5] Michel Bruneau. *Manuel d’acoustique fondamentale*. Hermes, 1998.
- [6] Antoine Chaigne and Jean Kergomard. Acoustique des instruments de musique. 2008.
- [7] Arnaud Doucet, Simon Godsill, and Christophe Andrieu. On sequential monte carlo sampling methods for bayesian filtering. *Statistics and computing*, 10(3):197–208, 2000.
- [8] Arnaud Doucet and Adam M Johansen. A tutorial on particle filtering and smoothing: Fifteen years later. *Handbook of Nonlinear Filtering*, 12:656–704, 2009.
- [9] Antoine Falaize, Nicolas Papazoglou, Thomas Hélie, and Nicolas Lopes. Compensation of loudspeaker’s nonlinearities based on flatness and port-hamiltonian approach. 2014.
- [10] Antoine Falaize-Skrzek and Thomas Hélie. Simulation of an analog circuit of a wah pedal: a port-hamiltonian approach. In *Audio Engineering Society Convention 135*. Audio Engineering Society, 2013.
- [11] Nicholas Kantas, Arnaud Doucet, Sumeetpal Sindhu Singh, and Jan Marian Maciejowski. An overview of sequential monte carlo methods for parameter estimation in general state-space models. In *15th IFAC Symposium on System Identification (SYSID), Saint-Malo, France.(invited paper)*, volume 102, page 117, 2009.
- [12] T KelleyC. Iterative methodsforlinearand nonlinear equations. *RaleighN. C.: NorthCarolinaStateUniversity*, 1995.
- [13] Wolfgang Klippel. Tutorial: Loudspeaker nonlinearities - causes, parameters, symptoms. *Journal of the Audio Engineering Society*, 54(10):907–939, 2006.
- [14] Nicolas PAPAZOGLU, Thomas Hélie, and Antoine Falaize. Linéarisation par asservissement d’un haut-parleur électrodynamique: approche par les systèmes hamiltoniens à ports. 2014.
- [15] Mario Rossi. *Electroacoustique and vol. XXI du Traité d" Electricité de l" EPFL*. Number LEMA-BOOK-1986-001. Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, 1986.
- [16] Thomas B Schön, Adrian Wills, and Brett Ninness. System identification of nonlinear state-space models. *Automatica*, 47(1):39–49, 2011.
- [17] Dan Simon. *Optimal state estimation: Kalman, H infinity, and nonlinear approaches*. John Wiley & Sons, 2006.
- [18] Albert Tarantola. *Inverse problem theory and methods for model parameter estimation*. siam, 2005.