# Predicción del precio del activo financiero

Andrés Olvera, Alejandro Hermosillo, Ramiro Ruiz, Salvador Mendoza

Escuela de Ingeniería y Ciencias
Tecnológico Monterrey
Campus Guadalajara

## I. Introducción

### I-A. *Nociones básicas*

*I-A.1. Modelo dinámico para un activo:* Definimos a un modelo matemático como aquel modelo que basado en la lógica matemática, compuesto principalmente de funciones, variables y sus respectivas relaciones representadas como ecuaciones y operadores lógicos. Un modelo matemático aplicado en la economía es significativo en casos financieros del mundo real para los cuales no es posible experimentar con la realidad, presentando un rango de opciones para evaluar las alternativas de decisiones y sus respectivas consecuencias [1].

*I-A.2. Modelo Black and Scholes:* El modelo de Black and Scholes basado en los procesos estocásticos, modela variaciones de precios de específicos activos financieros. Este modelo de matemática financiera considera información reciente que afecta a los activos financieros [2].

La ecuación diferencial del modelo de Black and Scholes requiere de cinco variables de entrada; precio de ejercicio de opción, precio actual de las acciones, tiempo de vencimiento, tasa libre de riesgo y volatilidad [3].

El modelo concluye:

$$d_{1,2} = \frac{\ln(\frac{S}{K}) + (r \pm \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

*I-A.3. Método de Montecarlo:* La simulación de Montecarlo se basa en los muestreos aleatorios repetidos y del análisis estadístico requerido para su ejecución de resultados. Montecarlo está muy relacionado a los experimentos aleatorios, de los cuales no se conocen los posibles resultados que se pueden obtener [4].

El método comprende la siguiente secuencia de pasos.

- Generación del modelo estático: Se empieza por la creación de un modelo determinista que simule el problema de la mejor manera según sus respectivas necesidades. Para esto se hace uso de las relaciones matemáticas las cuales usan los valores de las variables de entrada y son transformadas al valor de salida requerido [5].
- Identificación de la distribución de las entradas: Ya que el modelo determinista se adapta bien, se añaden los riesgos a la simulación, así como encontrar la distribución, de haber una, de las variables de entrada [5].
- Generación de variables aleatorias: Una vez teniendo la distribución que mejor describa el comportamiento de las variables de entrada, sigue generar un conjunto de datos aleatorios, variables con las que se realizarán las simulaciones, este conjunto de datos aleatorios tienen que ser generado utilizando la función de distribución de las variables de entrada originales [5].
- Análisis y toma de decisiones: El último paso consiste en realizar un análisis estadístico con los resultados obtenidos con una simulación, utilizando los conjuntos de variables aleatorias, y con base en este análisis se toman las decisiones requeridas [5].

## II. Metodología

### II-A. *Estimación de parámetros*

Para poder aplicar el modelo Black and Scholes es necesario de dos parámetros fundamentales, $\mu$ y $\sigma$ los cuales se calculan con la siguientes fórmulas:

$$\hat{\mu}_n = \frac{\bar{x}}{h} + \frac{s_x^2}{2h} \tag{1}$$

$$\hat{\sigma}_n = \frac{s_x}{\sqrt{h}} \tag{2}$$

Para obtener dichos valores, a su vez, se requiere de dos parámetros, siendo $\bar{x}$ y $s_x$ los cuales se obtienen de las siguientes fórmulas:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \tag{3}$$

$$s_x^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2, \tag{4}$$

en donde $x_i$ [6]

### II-B. *Aplicación de Black and Scholes*

Black and Scholes

$$C(t,s) = s\mathcal{N}(d_1) - Ke^{-r(T-t)}\mathcal{N}(d_2) \tag{5}$$

Para calcular $d_1$ y $d_2$ se tienen las formulas:

$$d_1 = \frac{\ln(s/K) + r\tau + \sigma^2\tau/2}{\sigma\sqrt{\tau}} \tag{6}$$

$$d_2 = \frac{\ln(s/K) + r\tau - \sigma^2\tau/2}{\sigma\sqrt{\tau}} \tag{7}$$

[6]

### II-C. Aplicación de Montecarlo

Una vez aplicado el modelo de Black and Scholes se prosiguió con la simulación de Montecarlo. Primero se genera una lista de números aleatorios que sigan una distribución normal estándar y a esta se le aplicó el movimiento Browniano Geométrico el cual tomó como parámetros los obtenidos anteriormente a partir de la base de datos. Después de aplicar el movimiento Browniano se toman los últimos valores de las listas y estos se insertaron en otra lista aparte, la cual sería la lista con los $n$ resultados obtenidos por la simulación, siendo $n$ el número de iteraciones para la simulación. Al final se obtuvo el promedio ponderado de esta lista y ese valor representa entonces la estimación del precio del activo en el tiempo escogido.

### II-D. Variables Antitéticas

Un aspecto importante en la implementación de los métodos de generación de variables aleatorias fue el uso del método de reducción de varianza, o bien el uso de variables antitéticas.

Dos variables aleatorias $X$, $Y$ se llaman antitéticas si tienen la misma distribución y están negativamente correlacionadas, es decir, $Cov(X,Y) < 0$.

Entoces se quierer usar simulación para estimar $\theta = E(X)$ y que hemos generado las variables aleatorias $X_1$ y $X_2$ idénticamente distribuidas con media $\theta$. Podemos obtener un estimador insesgado para $\theta : \frac{X_1+X_2}{2}$.

En este caso, para la generación de $X_1$ y $X_2$ se utilizan dos funciones inversas de la distribución deseada, una recibe un número aleatorio uniforme como parámetro y en la otra su complemento. Por ejemplo, si se desea calcular variables aleatorias que sigan una distribución exponencial se utiliza la siguiente función:

$$f(U) = -\frac{1}{\lambda} ln(U) \tag{8}$$

En donde $U$ es un número aleatorio uniforme. En este caso se utiliza una segunda función utilizando como parámetro $1-U$ como se muestra a continuación:

$$f(U) = -\frac{1}{\lambda} ln(1-U) \tag{9}$$

Ambas fórmulas se van intercalando por cada iteración de los algoritmos utilizados para generar variables aleatorias.

## III. Descripción de los datos

La base de datos se originó de la pagina oficial de Banxico, desde la sección de tasas y precios de referencias, en el cuadro de resumen CA51 "Tasas de interés representativas"se descarga la base de datos a utilizar. De esta misma se extrae la columna de "Tasa de Interés Interbancaria de Equilibrio (TIIE).en 28 días, esta tasa se determina por el Banco de México con base en cotizaciones presentadas por las instituciones de crédito, teniendo como fecha de inicio la de su publicación en el Diario Oficial de la Federación .

Limitando la cantidad de datos a utilizar, se mantienen datos de un año, como referencia el primer día del análisis de los datos, 11 de Octubre del 2021 hasta el 11 de Octubre del 2022.

## IV. Análisis de Datos y Resultados

### IV-A. Estimación de hiper parámetros

Siguiendo la metodología anteriormente establecida entonces se llevó a cabo primeramente la estimación de los hiper parámetros con los datos obtenidos de Banxico. Los valores obtenidos para la media $\mu$ y desviación estándar $\sigma$ fueron 0.64959 y 0.18797 respectivamente

### IV-B. Simulación de movimiento Browniano

Por medio del método de simulación de Montecarlo con el movimiento Browniano geométrico se realiza la simulación con diez mil muestras donde observamos el comportamiento de los activos a través del tiempo.

En la figura 1 se puede apreciar la gráfica de esta simulación.

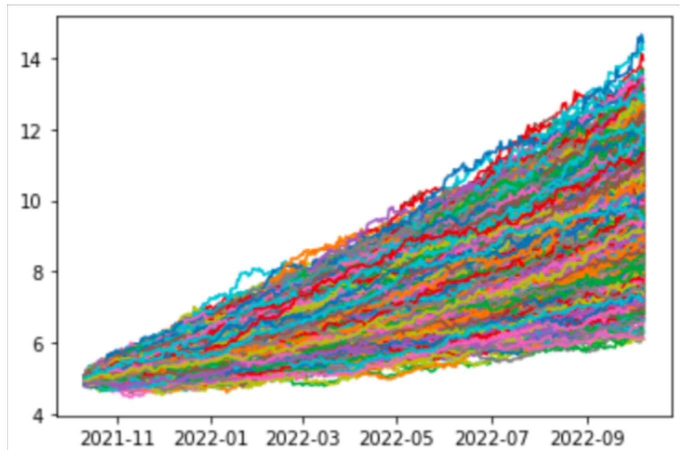


Fig. 1. Simulación de los activos a través del tiempo

Seguido de esto se analiza por medio de un histograma el tipo de distribución que siguen los valores de la acción estimados en la simulación de Montecarlo.

En la figura 2 aparece el histograma de distribución normal de los activos.

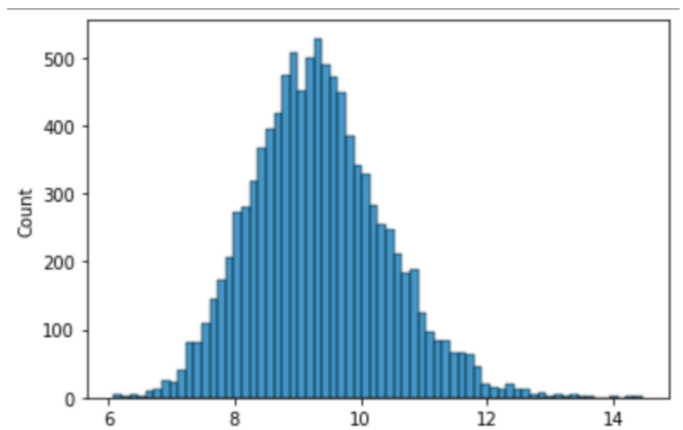


Fig. 2. Histograma de los datos

Se puede observar como estos siguen una distribución muy parecida a la normal gaussiana con media en nueve aproximadamente.

Al final se calculó el promedio ponderado de estas estimaciones y efectivamente fue nueve, más específicamente 9.3391, el cual es muy cercano al que se tiene en la base de datos original.

### IV-C. Opción europea

Modelando a través de un movimiento Browniano geométrico el precio del activo $S$, junto con la tasa libre de riesgo $r$ la cual se mantiene constante en el tiempo [0,T] se demuestra el valor en el tiempo $t$ de una opción de compra europea de precio acordado $K$ y vencimiento $T$ depende de la expresión; $S(t) = s$ y de la volatilidad $(\sigma)$ dado por:

$$C(t,s) = sN(d_1) - Ke^{r(T-t)}N(d_2) \tag{10}$$

Donde $N$ es la función de distribución de una variable gaussiana estándar y $d_1$ y $d_2$ están definidas por:

$$d_1 = \frac{ln(\frac{s}{k}) + r\tau + \sigma^2/2}{\sigma\sqrt{\tau}} \tag{11}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{\tau} \tag{12}$$

y $\tau = T - t$ es el tiempo hasta el periodo de vencimiento. //

*IV-C.1. Tasa libre de riesgo:* La tasa libre de riesgo $r$, para un periodo a corto plazo de vencimiento, se infiere por medio de la tasa de Libor junto con el vencimiento más cercano. La relación entre $r$ y el Libor esta dada por:

$$r = ln(1 + \frac{Libor}{100}) \tag{13}$$

[6]

## V. Conclusiones

Después de haber obtenido los resultados anteriores se puede concluir que el modelo de Black and Scholes es un predictor muy eficaz al momento de querer saber el valor aproximado de un activo de la bolsa de valores en una fecha específica, y más aún si se implementa junto con la simulación de Montecarlo. Esto se pudo comprobar al momento de comparar la aproximación obtenida con el valor original de la base de datos.

Por último es importante recalcar los beneficios de la utilización del método de variables antitéticas para la generación de números aleatorios para la implementación del movimiento Browniano, ya que este mostró mejorías en el tiempo de ejecución de código optimizando la obtención de resultados.

## References


[1] C. Juan, "IntroducciÓn a los modelos dinÁmicos," 2005. [Online]. Available: https://www.uv.es/olmos/Ecuaciones%20diferenciales.pdf

[2] F. Black and M. Scholes, "The pricing of options and corporate liabilities." *Journal of Political Economy*, pp. 637–654, 1973.

[3] C. G. M. Díaz and D. D. Ávila, "Modelo black-scholes-merton, para la toma de decisiones financieras." *UAEH*, 2008. [Online]. Available: https://www.uaeh.edu.mx/investigacion/icea/LI_EcoReg/Danae_Duana/modelo.pdf

[4] L. J. Rodrıguez-Aragón, "Simulación, método de montecarlo," *Recuperado de: https://previa. uclm. es/profesorado/licesio/docencia/mcoi/-tema4_guion. pdf*, 2011.

[5] S. Raychaudhuri, "Introduction to monte carlo simulation," *https://www.informs-sim.org/wsc08papers/012.pdf*, 2008.

[6] B. Rémillard, *Statistical Methods for Financial Engineering*, 1st ed. CRC Press, 2013.