24.10.2022

Лабораторная 2

Варианты 5 и 2

Задачи

№1 (вариант 5)

$X_1, \ldots, X_n \sim U[0;\Theta]$

$\Theta \sim Pareto(x_0, \alpha)$, $x_0; \alpha > 0$ (конкретно в этой задаче, $x_0 = \alpha = 1$)

$\pi(\Theta) = \frac{\alpha x_0^\alpha}{\Theta^{\alpha+1}}$ – априорная плотность (закон Парето) $f_\Theta(x) = \frac{1}{\Theta} \cdot [x \in [0,\Theta]]$

$f(X|\Theta) = \prod\limits_{i=1}^{n} f_\Theta(x_i) = \frac{1}{\Theta^n}[x \in [0,\Theta]]$ В примерах это было просто $\sum\limits_{k=1}^{n} X_k$,

[redacted] !

1) Запишем апостериорную плотность:

$$\pi(\Theta|X) = \frac{f(X|\Theta) \cdot \pi(\Theta)}{\int f(X|\Theta) \cdot \pi(\Theta) d\Theta}$$

Сначала поймём, что значит каждое ~~обозначение~~ выражение в этой формуле:

- $f(X|\Theta) = \prod\limits_{i=1}^{n} f_\Theta(X_i) = \prod\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{\Theta} \cdot [X_i \in [0,\Theta]] = \frac{1}{\Theta^n} \cdot [X_i \in [0,\Theta]] = \frac{[X_{(n)} \in [0;\Theta]]}{\Theta^n}$

~~Это~~ Т.е. $f(X|\Theta)$ – это ф-я правдоподобия.

- $\pi(\Theta) = \frac{\alpha x_0^\alpha}{\Theta^{\alpha+1}} \cdot [\Theta \geqslant x_0]$

- $f(X|\Theta) \cdot \pi(\Theta) = \frac{[X_{(n)} \leq \Theta]}{\Theta^n} \cdot \frac{\alpha x_0^\alpha}{\Theta^{\alpha+1}} \cdot [\Theta \geqslant x_0] = \frac{[X_{(n)} \leq \Theta, \Theta \geqslant x_0]}{\Theta^{n+\alpha+1}} \cdot \alpha x_0^\alpha$

- $\int\limits_{\Theta} f(X|\Theta) \cdot \pi(\Theta) \, d\Theta = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{[X_{(n)} \leq \Theta, \Theta \geqslant x_0]}{\Theta^{n+\alpha+1}} \cdot \alpha x_0^\alpha \, d\Theta = \alpha x_0^\alpha \int\limits_{x_0}^{+\infty} \frac{[X_{(n)} \leq \Theta]}{\Theta^{n+\alpha+1}} d\Theta =$

$\cancel{= \alpha x_0^\alpha \int\limits_{x_0}^{+\infty} \frac{d\Theta}{\Theta^{n+\alpha+1}} = -\alpha x_0^\alpha (n+\alpha) \int\limits_{x_0}^{+\infty}} = \alpha x_0^\alpha \int\limits_{\max(X_{(n)}, x_0)}^{+\infty} \frac{d\Theta}{\Theta^{n+\alpha+1}} = -\alpha x_0^\alpha \cdot (n+\alpha)^{-1} \left[\frac{1}{\Theta^{n+\alpha}}\right]_{\max(X_{(n)}, x_0)}^{+\infty} \ominus$

~~т.к. $n \geq 1$ и $\alpha > 0$~~, то

$$\ominus\; -\alpha x_0^{\alpha}(n+\alpha)^{-1}\cdot\left(0 - \frac{1}{\max(x_0, X_{(n)})^{n+\alpha}}\right) = +\frac{\alpha x_0^{\alpha}(n+\alpha)^{-1}}{\max(x_0, X_{(n)})^{n+\alpha}}$$

Подставим в ур-е для $\pi(\theta|X)$:

$$\pi(\theta|X) = [X_{(n)} \leq \theta,\ x_0 \leq \theta]\cdot \cancel{\alpha x_0^{\alpha}}\cdot\frac{1}{\theta^{n+\alpha+1}}\cdot\frac{\max(x_0, X_{(n)})^{n+\alpha}}{\alpha x_0^{\alpha}(n+\alpha)^{-1}} =$$

$$= [\max(X_{(n)}, x_0) \leq \theta]\cdot\frac{(n+\alpha)\max(x_0, X_{(n)})^{(n+\alpha)}}{\theta^{(n+\alpha)+1}} \sim Pareto(\max(X_{(n)}, x_0), (n+\alpha))$$

апостериорное распределение

2) Вычислим матожидание апостериорного распределения:

$$\cancel{E\pi(\theta|X) = \int_{-\infty}^{+\infty}\theta\cdot\frac{(n+\alpha)\max(x_0, X_{(n)})^{(n+\alpha)}}{\theta^{(n+\alpha)+1}}\ldots[\max(X_{(n)}, x_0)}$$

Посчитаем матожидание распр-я Парето при $\alpha' = (n+\alpha)$ и $x_0' = \max(X_{(n)}, x_0)$.

$$E\pi(\theta|X) = \int_{-\infty}^{+\infty}\theta\cdot\frac{\alpha' x_0'^{\alpha'}}{\theta^{\alpha'+1}}[\theta \geq x_0']\,d\theta =$$

$$= \alpha' x_0'^{\alpha'}\int_{x_0'}^{+\infty}\frac{d\theta}{\theta^{\alpha'}} = -\frac{\alpha' x_0'^{\alpha'}}{\alpha'-1}\cdot\left[\frac{1}{\theta^{\alpha'-1}}\right]_{x_0'}^{+\infty} = +\frac{\alpha' x_0'^{\alpha'}}{\alpha'-1}\cdot\frac{1}{x_0'^{\alpha'-1}} = \frac{\alpha'}{\alpha'-1}\cdot x_0'$$

сходится т.к. $\alpha' > 1$ ($n \geq 1$, $\alpha > 0$)

Подставим настоящие значения и получим: $\frac{n+\alpha}{n+\alpha-1}\cdot\max(X_{(n)}, x_0) = T^*$

матожидание (+ байесовская оценка)

По утверждению, к-е доказывали, $T^* = E(\theta|X)$

~~3) Смещение оценки~~

Т.е. кроме того, что это матожидание апостериорного распределения, это ещё и байесовская оценка.

3) Смещение оценки – это $E_\theta(T^*) - \theta$ – ~~оно должно быть равно~~ если оно равно нулю, то оценка T^* – несмещённая.

θ фиксировано

$$E_\theta(T^*(X)) = \int_{\mathbb{R}^n} E(\theta|X)\,\underbrace{f(X)}_{\text{совместная плотность } X_1,\ldots,X_n}\,dX = \int_{\mathbb{R}^n}\frac{n+\alpha}{n+\alpha-1}\cdot\max(X_{(n)}, x_0)\cdot\frac{1}{\theta^n}\cdot[0 \leq X_i \leq \theta]\,dX \ominus$$

$$\stackrel{\circ}{=} \frac{n+\alpha}{n+\alpha-1}\cdot\frac{1}{\Theta^n}\cdot\int\limits_{[0;\Theta]^n}\max(x_0,x_1,\dots,x_n)\,dx_1\dots dx_n$$

Научимся считать $\int\limits_{[0;\Theta]^n}\max(x_0,x_1,\dots,x_n)\,dx_1\dots dx_n$.

Введём обозначение: $I_n^{\Theta}(x_0)=\int\limits_{[0;\Theta]^n}\max(x_0,x_1,\dots,x_n)\,dx_1\dots dx_n$

$$J_n(y)=\int\limits_{[0,y]^n}\max(x_1,\dots,x_n)\,dx_1\dots dx_n$$

Посчитаем $J_n(y)$: разобьём $[0,y]^n$ на n дизъюнктных множеств:

$$\begin{cases} x_1>\max(x_2,\dots,x_n)=A_1 \\ x_2>\max(x_1,x_3,\dots,x_n)=A_2 \\ \dots \\ x_n>\max(x_1,\dots,x_{n-1})=A_n \end{cases}$$

~~[illegible]~~, Заметим, что $\mu_n([0,y]^n\setminus(\bigcup A_i))=0$. Поэтому можем записать интеграл $J_n(y)$, как сумму интегралов по этим множествам:

$$J_n(y)=\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{A_i}\max(x_1,\dots,x_n)\,d\mu_n=\sum_{i=1}^{n}\int_0^y x_i\,dx_i\int\limits_{[0,x_i]^{n-1}}\underbrace{dx_1\dots dx_n}_{\text{нет } dx_i}=\sum_{i=1}^{n}\int_0^y x_i^n\,dx_i=$$

$$=n\cdot\frac{y^{n+1}}{n+1}=\frac{n}{n+1}y^{n+1}$$

Теперь выразим $I_n^{\Theta}(x_0)$ через $J_n(y)$:

$$I_n^{\Theta}(x_0)=\int\limits_{[0;x_0]^n}\max(x_0,\dots,x_n)\,d\mu_n+\int\limits_{[0;\Theta]^n\setminus[0;x_0]^n}\max(x_0,x_1,\dots,x_n)\,d\mu_n=\int\limits_{[0;x_0]^n}x_0\,d\mu_n+\int\limits_{[0;\Theta]^n\setminus[0;x_0]^n}\max(x_1,\dots,x_n)$$

$$=x_0^{n+1}+J_n(\Theta)-J_n(x_0)=x_0^{n+1}+\frac{n}{n+1}\Theta^{n+1}-\frac{n}{n+1}x_0^{n+1}=\frac{x_0^{n+1}}{n+1}+\frac{n}{n+1}\Theta^{n+1}$$

Продолжим наши вычисления:

$$\frac{n+\alpha}{n+\alpha-1}\cdot\frac{1}{\Theta^n}\cdot\int\limits_{[0;\Theta]^n}\max(x_0,\dots,x_n)\,d\mu_n=\frac{n+\alpha}{n+\alpha-1}\cdot\frac{1}{\Theta^n}\cdot\left(\frac{x_0^{n+1}}{n+1}+\frac{n}{n+1}\Theta^{n+1}\right)=$$

$$=\underbrace{\frac{n+\alpha}{n+\alpha-1}\cdot\frac{1}{\Theta^n}\cdot\frac{x_0^{n+1}}{n+1}+\frac{n+\alpha}{n+\alpha-1}\cdot\frac{n}{n+1}\cdot\Theta}_{\text{матожидание оценки}}-\Theta\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

~~[illegible]~~ матожидание оценки

Смещение

02.11.2022

Лабораторная 2 (продолжение)

Варианты 5 и 2

№1 (вариант 5, продолжение)

4) Дисперсия оценки:

$$\mathcal{D}T^*(X) = E(T^*(X))^2 - (\underbrace{ET^*(X)}_{\text{уже посчитали}})^2$$

$$E(T^*(X))^2 = \int_{\mathbb{R}^n} (E(\theta|X))^2 \cdot f(X)\,dX = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{n+\alpha}{n+\alpha-1}\cdot \max(X_{(n)}, x_0)\right)^2 \cdot \frac{1}{\theta^n}\cdot [0 \le X_i \le \theta]\,dX =$$

$$= \left(\frac{n+\alpha}{n+\alpha-1}\right)^2 \cdot \frac{1}{\theta^n} \int_{[0,\theta]^n} (\max(x_0, x_1, \ldots, x_n))^2 dx_1 \ldots dx_n \ \circleddash$$

Посчитаем интеграл по аналогии с тем, что делали в следующем:

$$\int_{[0,\theta]^n} (\max(x_0, x_1, \ldots, x_n))^2 dx_1 \ldots dx_n = \int_{[0;x_0]^n} x_0^2\, d\mu_n + \int_{[0,\theta]^n} (\max(x_1, \ldots, x_n))^2 d\mu_n - \int_{[0;x_0]^n} (\max(x_1, \ldots, x_n))^2 d\mu_n$$

$$\int_{[0,y]^n} (\max(x_1, \ldots, x_n))^2 d\mu_n = \sum_{i=1}^{n} \int_0^y x_i^2\, dx_i \int_{[0,x_i]^{n-1}} dx_1 \ldots dx_n = \sum_{i=1}^{n} \int_0^y x_i^{n+1}\, dx_i = \frac{n}{n+2}\, y^{n+2}$$

Получаем $\int_{[0,\theta]^n} (\max(x_0, \ldots, x_n))^2 d\mu_n = x_0^{n+2} + \frac{n}{n+2}\theta^{n+2} - \frac{n}{n+2}x_0^{n+2}$

$$\circleddash\ \cancel{\left(\frac{n+\alpha}{n+\alpha-1}\right)^2 \cdot \frac{1}{\theta^n} \cdot \frac{n}{n+2}\cdot \theta^{n+2} = \left(\frac{n+\alpha}{n+\alpha-1}\right)^2 \cdot \frac{n}{n+2}\cdot \theta^2}\ \circleddash \left(\frac{n+\alpha}{n+\alpha-1}\right)^2 \frac{1}{\theta^n}\cdot\left(x_0^{n+2} + \frac{n}{n+2}\theta^{n+2} - \frac{n}{n+2}x_0^{n+2}\right)$$

Подставим в уравнение дисперсии: $\cancel{\mathcal{D}T^*(X) = \left(\frac{n+\alpha}{n+\alpha-1}\right)^2\left(\frac{1}{\theta^n}\frac{x_0^{n+1}}{n+1} + \frac{n}{n+1}\theta\right)^2 + \left(\frac{n+\alpha}{n+\alpha-1}\right)^2 \cdot \frac{n}{n+2}\cdot\theta^2 =}$

$$\cancel{= \left(\frac{n+\alpha}{n+\alpha-1}\right)^2\left(-\frac{1}{\theta^{2n}}\frac{x_0^{2n+2}}{(n+1)^2} - \frac{2n\, x_0^{n+1}}{\theta^{n-2}(n+1)^2} - \left(\frac{n}{n+1}\right)^2\theta^2 + \frac{n}{n+2}\theta^2\right)}$$

~~дисперсия~~

$$\frac{n}{n+1}\left(\frac{n}{n+2} - 1\right) = \frac{n}{n+2} \cdot \frac{-2}{n+1}$$

$$\mathcal{D}(T^*(X)) = \left(\frac{n+\alpha}{n+\alpha-1}\right)^2\left(\frac{1}{\theta^n}\left(x_0^{n+2} + \frac{n}{n+2}\theta^{n+2} - \frac{n}{n+2}x_0^{n+2}\right) - \left(\frac{1}{\theta^n}\cdot\frac{x_0^{n+1}}{n+1} + \frac{n}{n+1}\cdot\theta\right)^2\right) =$$

$$= \left(\frac{2x_0^{n+2}}{\theta^n(n+2)} - \frac{x_0^{2n+2}}{\theta^{2n}(n+1)^2} + \frac{\theta^2 n}{(n+2)(n+1)^2} + \frac{2n\,x_0^{n+1}}{\theta^{n-1}(n+1)^2}\right)\cdot\left(\frac{n+\alpha}{n+\alpha-1}\right)^2$$

дисперсия

5) Среднеквадратичная ошибка

$$R(T,\theta) = E_\theta e(T,\theta) = E_\theta (T-\theta)^2 = \int\limits_{\mathbb{R}^n} (T^*(X) - \theta)^2 f(X)\, dX =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{n+\alpha}{n+\alpha-1} \cdot \max(X_{(n)}, x_0) - \theta\right)^2 \cdot \frac{1}{\theta^n} \cdot [0 \le X_i \le \theta]\, dX =$$

$$= \frac{1}{\theta^n} \int\limits_{[0,\theta]^n} \left(\frac{n+\alpha}{n+\alpha-1} \cdot \max(X_{(n)}, x_0) - \theta\right)^2 dX = \frac{1}{\theta^n} \int\limits_{[0,\theta]^n} \left(\frac{n+\alpha}{n+\alpha-1}\right)^2 (\max(X_{(n)}, x_0))^2 + \frac{1}{\theta^n} \int\limits_{[0,\theta]^n} \theta^2\, dX -$$

$$- \frac{2}{\theta^n} \int\limits_{[0,\theta]^n} \theta \cdot \frac{n+\alpha}{n+\alpha-1} \cdot \max(X_{(n)}, x_0)\, dX =$$

$$= \left(\frac{n+\alpha}{n+\alpha-1}\right)^2 \frac{1}{\theta^n} \int\limits_{[0,\theta]^2} (\max(x_0, \dots, x_n))^2 d\mu_n + \theta^2 - 2 \cdot \frac{n+\alpha}{n+\alpha-1} \cdot \frac{1}{\theta^{n-1}} \int\limits_{[0,\theta]^n} \max(x_0, \dots, x_n)\, d\mu_n =$$

Оба интеграла отсюда мы уже считали, подставим их значения:

$$= \left(\frac{n+\alpha}{n+\alpha-1}\right)^2 \frac{1}{\theta^n} \left(x_0^{n+2} + \frac{n}{n+2}\theta^{n+2} - \frac{n}{n+2} x_0^{n+2}\right) + \theta^2 - 2 \cdot \frac{n+\alpha}{n+\alpha-1} \cdot \frac{1}{\theta^{n-1}} \left(\frac{x_0^{n+1}}{n+1} + \frac{n}{n+1}\theta^{n+1}\right) =$$

$$= \left(\frac{n+\alpha}{n+\alpha-1}\right)^2 \cdot \frac{1}{\theta^n} \left(\frac{2x_0^{n+2}}{n+2} + \frac{n}{n+2}\theta^{n+2}\right) + \theta^2 - 2 \cdot \frac{n+\alpha}{n+\alpha-1} \cdot \frac{1}{\theta^{n-1}} \left(\frac{x_0^{n+1}}{n+1} + \frac{n}{n+1}\theta^{n+1}\right) =$$

среднеквадратичная ошибка

$$= \left(\frac{n+\alpha}{n+\alpha-1}\right)^2 \frac{2x_0^{n+2}}{\theta^n (n+2)} + \left(\frac{n+\alpha}{n+\alpha-1}\right)^2 \cdot \frac{n}{n+2} \cdot \theta^2 + \theta^2 - 2 \cdot \frac{n+\alpha}{n+\alpha-1} \cdot \frac{x_0^{n+1}}{\theta^{n-1}(n+1)} - 2 \cdot \frac{n+\alpha}{n+\alpha-1} \cdot \frac{n}{n+1} \cdot \theta^2 =$$

$$= \theta^2 \left(\left(\frac{n+\alpha}{n+\alpha-1}\right)^2 \cdot \frac{n}{n+2} + 1 - 2 \cdot \left(\frac{n+\alpha}{n+\alpha-1}\right) \cdot \frac{n}{n+1}\right) + \frac{x_0^{n}}{\theta^n} \left(\left(\frac{n+\alpha}{n+\alpha-1}\right)^2 \frac{2x_0^2}{n+2} - 2 \cdot \frac{n+\alpha}{n+\alpha-1} \cdot \frac{x_0 \theta}{n+1}\right)$$

~~асимптотическая~~ среднеквадратическая ошибка

Кстати, по Утв. 1 с лекции 5, оценка T^* получается состоятельной!

б) Байесовский риск

$$r(T) = ER(T,\theta) = \int_{\mathbb{R}} R(T,\theta)\cdot\pi(\theta)\,d\theta = \int_{\mathbb{R}} R(T,\theta)\cdot\frac{\alpha x_0^{\alpha}}{\theta^{\alpha+1}}\cdot(\theta > x_0)\,d\theta =$$

$$= \alpha x_0^{\alpha}\int_{x_0}^{+\infty} R(T,\theta)\cdot\frac{1}{\theta^{\alpha+1}}\,d\theta = \alpha x_0^{\alpha}\left(\left(\frac{n+\alpha}{n+\alpha-1}\right)^2\cdot\frac{n}{n+2}+1-2\left(\frac{n+\alpha}{n+\alpha-1}\right)\cdot\frac{n}{n+1}\right)\int_{x_0}^{+\infty}\frac{d\theta}{\theta^{\alpha-1}} +$$

$$+ \alpha x_0^{\alpha+n}\cdot\left(\left(\frac{n+\alpha}{n+\alpha-1}\right)^2\frac{2x_0^2}{n+2} - 2\cdot\frac{n+\alpha}{n+\alpha-1}\cdot\underbrace{\frac{x_0\theta}{n+1}\right)\cdot\int_{x_0}^{+\infty}\frac{d\theta}{\theta^{n+\alpha+1}}}_{}$$

тут ошибка, но это уже неважно, т.к. интеграл расходится

№ 2 (Вариант 2)

$X_1, \dots, X_n \sim Geom(\theta)$. С помощью метода моментов, нужно найти

1) матожидание; 2) смещение; 3) дисперсию; 4) среднеквадратичную ошибку;

5) нижнюю оценку границу для среднеквадратичной ошибки для оценок с данным смещением

$p_\theta(x) = (1-\theta)^{x-1}\cdot\theta$ — "x испытаний до первого успешного" (включая успешное), $x \in \mathbb{N}$

а) ~~Матожидание~~ Найдём оценку методом моментов для θ.

$\varphi_1(\hat\theta) = m_1$, где $\varphi_1(\theta) = E_\theta g_1(X)$, $m_1 = \overline{g_1(X)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g_1(X_i)$

Пусть $g_k = x^k$, тогда $m_1 = \overline{g_1(X)} = \overline{X}$. $\varphi_1(\theta) = E_\theta X = \frac{1}{\theta}$,

Получаем такое уравнение: $\frac{1}{\hat\theta} = \overline{X}$, т.е. оценка метода моментов: $\boxed{\hat\theta = \frac{1}{\overline{X}}}$

1) ~~Смещение~~ Посчитаем матожидание оценки:

~~$E_\theta\hat\theta - \theta = E_\theta\frac{1}{\overline{X}} - \theta =$~~

$\boxed{p=\theta,\ q=1-\theta}$

$$E_\theta\frac{1}{\overline{X}} = \sum_{k=n}^{\infty}\frac{n}{k}\cdot\underbrace{P(X_1+\dots+X_n=k)} = \sum_{k=n}^{\infty}\frac{n}{k}\cdot\binom{k-1}{n-1}\cdot q^{k-n}\cdot p^n =$$

шары и корзины + сколько $(1-\theta)$ зависит только от k!

$\binom{k-1}{n-1}\cdot q^{k-n}\cdot p^n$

$$= \left(\frac{p}{q}\right)^n\sum_{k=n}^{\infty}\frac{n}{k}\binom{k-1}{n-1}\cdot q^k = \left(\frac{p}{q}\right)^n\sum_{k=n}^{\infty}\frac{n}{k}\frac{\Gamma(k)}{\Gamma(k-n+1)\Gamma(n)}\cdot q^k = \frac{n}{\Gamma(n)}\left(\frac{p}{q}\right)^n\underbrace{\sum_{k=n}^{\infty}\frac{q^k}{k}\cdot\frac{\Gamma(k)}{\Gamma(k-n+1)}}$$

сходится, т.к. мажорируется $\sum_{k=1}^{\infty} q^k k^{n-2} = Li_{2-n}(q)$ полилогарифм

Посчитаем для первых нескольких n:

$$n=1:\ E_\theta\frac{1}{\overline{X}} = \frac{p}{q}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{q^k}{k} = -\frac{p}{q}\cdot\ln(p) = -\frac{p\ln p}{q} = -\frac{\theta\ln\theta}{1-\theta}$$

$$n=2:\ E_\theta\frac{1}{\overline{X}} = 2\left(\frac{p}{q}\right)^2\sum_{k=2}^{\infty}\frac{q^k}{k}\cdot(k-1) = 2\left(\frac{p}{q}\right)^2\frac{-q+q\log(1-q)-\log(1-q)}{q-1} = -\frac{2p^2}{q(q-1)} + \frac{2p^2\log(1-q)}{q(q-1)} -$$

$$-\frac{2p^2\log(1-q)}{q^2(q-1)} = -\frac{2\theta^2}{\theta(\theta-1)} + \frac{2\theta^2\ln\theta}{\theta(\theta-1)} + \frac{2\theta^2\ln\theta}{(1-\theta)^2}$$

2) Посчитаем смещение : $E_\theta \frac{1}{\bar{X}} - \theta$

$$E_\theta \frac{1}{\bar{X}} - \theta = \underbrace{\frac{n}{\Gamma(n)} \cdot \left(\frac{p}{q}\right)^n \sum_{k=n}^{\infty} \frac{q^k}{k} \cdot \frac{\Gamma(k)}{\Gamma(k-n+1)} - \theta}_{\text{смещение}}$$

3) Посчитаем дисперсию : $D_\theta \frac{1}{\bar{X}} = E_\theta \frac{1}{\bar{X}^2} - \left(E_\theta \frac{1}{\bar{X}}\right)^2$

$$E_\theta \frac{1}{\bar{X}^2} = \frac{n}{\Gamma(n)} \cdot \left(\frac{p}{q}\right)^n \sum_{k=n}^{\infty} \underbrace{\frac{q^k}{k^2} \cdot \frac{\Gamma(k)}{\Gamma(k-n+1)}}_{\text{Мажорируется } \sum_{k\geq 1}^{\infty} q^k k^{n-3} = Li_{3-n}(q) \Rightarrow \text{сходится}}$$ – ан-но с ~~[illegible]~~ $E_\theta \frac{1}{\bar{X}}$

$$D_\theta \frac{1}{\bar{X}} = \underbrace{\frac{n}{\Gamma(n)} \cdot \left(\frac{p}{q}\right)^n \left(\sum_{k=n}^{\infty} \frac{q^k}{k^2} \cdot \frac{\Gamma(k)}{\Gamma(k-n+1)} - \left(\sum_{k=n}^{\infty} \frac{q^k}{k} \cdot \frac{\Gamma(k)}{\Gamma(k-n+1)} \right)^2 \cdot \frac{n}{\Gamma(n)} \cdot \left(\frac{p}{q}\right)^n \right)}_{\text{дисперсия}}$$

4) Посчитаем среднеквадратичную ошибку

$$R(T,\theta) = E_\theta\, e(T,\theta) = E_\theta (T-\theta)^2 = E_\theta \left(\frac{1}{\bar{X}} - \theta\right)^2 = E_\theta \frac{1}{\bar{X}^2} - 2E_\theta \frac{\theta}{\bar{X}} + E_\theta \theta^2 =$$

$$= E_\theta \frac{1}{\bar{X}^2} - 2\theta E_\theta \frac{1}{\bar{X}} + \theta^2 =$$

$$= \underbrace{\frac{n}{\Gamma(n)} \left(\frac{p}{q}\right)^n \sum_{k=n}^{\infty} \frac{q^k}{k^2} \frac{\Gamma(k)}{\Gamma(k-n+1)} - 2\theta \cdot \frac{n}{\Gamma(n)} \left(\frac{p}{q}\right)^n \sum_{k=n}^{\infty} \frac{q^k}{k} \frac{\Gamma(k)}{\Gamma(k-n+1)} - \theta^2}_{\text{среднеквадратичная ошибка}}$$

5) Нижняя оценка на $R(T,\theta)$ – не получилось