Задача 1. Предъявите доверительный интервал уровня $1-\alpha$ для указанного параметра при данных предположениях (с обоснованиями). Сгенерируйте 2 выборки объёма объёма 100 и посчитайте доверительный интервал. Повторить 1000 раз. Посчитайте, сколько раз 95-процентный доверительный интервал покрывает реальное значение параметра. То же самое сделайте для объема выборки 10000. Как изменился результат? Как объяснить?

Задача представлена в 3 вариантах. Везде даны две независимые выборки X, Y из нормальных распределений $\mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$, $\mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$ объема n, m соответственно. Сначала указывается оцениваемая функция, потом данные об остальных параметрах, затем параметры эксперимента и подсказки.

1. $\tau = \mu_1 - \mu_2$; σ_1^2, σ_2^2 известны; $\mu_1 = 2$, $\mu_2 = 1$, $\sigma_1^2 = 1$, $\sigma_2^2 = 0.5$; воспользуйтесь функцией

$$\frac{\overline{X} - \overline{Y} - \tau}{\sigma}, \quad \sigma^2 = \frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}.$$

2. $\tau = \mu_1 - \mu_2$; $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ неизвестна; $\mu_1 = 2$, $\mu_2 = 1$, $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = 1$; воспользуйтесь функцией

$$\sqrt{\frac{mn(m+n-2)}{m+n}} \frac{\overline{X} - \overline{Y} - \tau}{\sqrt{n\mathrm{Var}(X) + m\mathrm{Var}(Y)}},$$

где Var(.) – выборочная смещенная дисперсия. Смотрите в сторону распределения Стьюдента.

3. $\tau = \sigma_1^2/\sigma_2^2$; μ_1, μ_2 неизвестны; $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = 0$, $\sigma_1^2 = 2$, $\sigma_2^2 = 1$; воспользуйтесь функцией

$$\frac{n(m-1)\mathrm{Var}(X)}{m(n-1)\mathrm{Var}(Y)},$$

где Var(.) – выборочная смещенная дисперсия. Смотрите в сторону распределения Фишера.

Задача 2. Постройте асимптотический доверительный интервал уровня $1-\alpha$ для указанного параметра. Проведите эксперимент по схеме, аналогичной первой задаче.

Задача представлена в 4 вариантах. Сначала указывается класс распределений (однопараметрический) и оцениваемый параметр, затем параметры эксперимента и подсказки.

Вариант 1 $\mathrm{Exp}(\lambda)$; медиана; $\lambda = 1$; воспользуйтесь предельной теоремой об асимптотическом поведении среднего члена вариационного ряда.

Вариант 2 Распределение Лапласса с неизвестным параметром сдвига μ и единичным масштабирующим параметром; μ; $\mu = 2$; можно воспользоваться подсказкой для предыдущего варианта, хотя другие способы решения приветствуются.

Вариант 3 $U[-\theta, \theta]$; θ; $\theta = 5$; воспользуйтесь предельной теоремой об асимптотическом поведении крайних членов вариационного ряда.

Вариант 4 $\mathrm{Geom}(p)$; p; $p = 0.7$; тут рецепт стандартный)