

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования  
УРАЛЬСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
имени первого Президента России Б. Н. Ельцина

ИНСТИТУТ ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК И МАТЕМАТИКИ

Кафедра вычислительной математики и компьютерных наук

**МНОГОМЕРНЫЙ АЛГОРИТМ ОВЫПУКЛЕНИЯ РОЯ ТОЧЕК,  
НАХОДЯЩИХСЯ В НЕОБЩЕМ ПОЛОЖЕНИИ**

Направление  
09.04.03 «Прикладная информатика»

Допустить к защите:

Магистерская  
диссертация

Зав. кафедрой:

**Корабельников  
Алексей Алексеевич**

Нормоконтролер:

Научный руководитель:  
к.ф.-м.н. доц. С. С. Кумков

Екатеринбург  
2020

# РЕФЕРАТ

Корабельников А. А. МНОГОМЕРНЫЙ АЛГОРИТМ ОВЫПУКЛЕНИЯ РОЯ ТОЧЕК, НАХОДЯЩИХСЯ В НЕОБЩЕМ ПОЛОЖЕНИИ, выпускная квалификационная работа: стр. 22, рис. 7, библи. 6 назв.

Ключевые слова: ВЫПУКЛАЯ ОБОЛОЧКА, МНОГОМЕРНОЕ ЕВКЛИДОВО ПРОСТРАНСТВО, НЕОБЩЕЕ ПОЛОЖЕНИЕ ТОЧЕК.

Целью работы является разработка и реализация алгоритма построения выпуклой оболочки многомерного роя точек в случае их необщего положения. Под необщим положением точек подразумевается ситуация, когда в  $(d - 1)$ -мерной гиперплоскости пространства  $R^d$  лежит больше, чем  $d$  точек. Процедура реализует метод заворачивания подарка. Особенностью предлагаемой версии алгоритма является то, что после нахождения плоскости очередной гиперграни проводится построение выпуклой оболочки подроя точек, попавших в аффинное пространство этой гиперплоскости. Этот рекурсивный переход в пространство меньшей размерности проводится тогда, когда точек слишком много, чтобы образовать симплициальную гипергрань. В процессе построения гиперграни накапливается информация о её гиперрёбрах, необходимая для перехода к соседним граням. В целом, алгоритм заворачивания подарка реализует поиск в ширину в графе, в котором вершины соответствуют граням конструируемой выпуклой оболочки, а рёбра соединят вершины, соответствующие граням, имеющим общее гиперребро. Предложенный алгоритм реализован в виде программы на языке C# для среды исполнения .NetCore.

# ABSTRACT

Korabelnikov A. A. MULTIDIMENSIONAL ALGORITHM FOR CONVEXIFICATION OF NON-GENERALLY LOCATED COLLECTION OF POINTS, master's dissertation: 22 pages, 7 figures, 6 references.

Keywords: CONVEX HULL, MULTIDIMENSIONAL EUKLIDEAN SPACE, NON-GENERALLY LOCATED POINTS.

The aim of the work is to work out and realize an algorithm for convexification of a multidimensional collection of non-generally located points. Non-general location assumes that in a  $(d - 1)$ -dimensional hyperplane of the space  $R^d$ , there are more than  $d$  points. The suggested procedure is based on the gift wrapping method. The peculiarity of the algorithm is that after finding the hyperplane of a next hyperface, one convexifies the subcollection of the points, which are located in the affine space of this hyperplane. This recursive transition into a subspace of a smaller dimension is applied at the situations, when the hyperface can be non-simplicial. During its construction, one accumulates information about its hyperedges, which is necessary for passing to neighbor hyperfaces. In general, the gift wrapping algorithm uses a breadth-first search in the graph, which vertices correspond to the hyperfaces of the convex hull and edges of the graph join vertices, which correspond to neighbor hyperfaces. The algorithm is realized as a computer program written in C# for the environment .NetCore..

# СОДЕРЖАНИЕ

<b>Введение</b>	<b>3</b>
<b>1 Основная часть</b>	<b>6</b>
1.1 Базовые определения и обозначения . . . . .	6
1.2 Алгоритм Джавриса на плоскости . . . . .	6
1.2.1 Алгоритм заворачивания подарка в многомерном про- странстве в случае общего положения точек . . . . .	10
1.2.2 Алгоритм заворачивания подарка в многомерном про- странстве в случае необщего положения точек . . . . .	13
1.3 Схема предлагаемого алгоритма . . . . .	15
1.4 Программная реализация . . . . .	17
1.4.1 Хранение выпуклой оболочки . . . . .	17
1.4.2 Классы построения выпуклой оболочки . . . . .	18
1.4.3 Вспомогательные классы . . . . .	19
1.4.4 Тестирование реализации . . . . .	19
<b>Заключение</b>	<b>21</b>
<b>Список литературы</b>	<b>22</b>

# Введение

Одной из важных проблем вычислительной геометрии является построение выпуклой оболочки конечного набора точек. При этом, очевидно, выпуклая оболочка является многогранником соответствующей размерности. На текущий момент существует множество алгоритмов, весьма эффективно решающих эту проблему на плоскости (см., например, [1, 2, 3, 4]). Эти алгоритмы широко применяются для решения задач в геометрическом моделировании, распознавании образов, экономике, статистике, теории управления, дифференциальных играх и во многих других областях.

Однако переход в пространства более высокой размерности резко усложняет ситуации. Основная проблема при этом — необщее положение точек в овыпукляемом рою. Если в  $(d - 1)$ -мерной гиперплоскости пространства  $R^d$  лежит больше, чем  $d$  точек обрабатываемого роя, то положение называют необщим.

При необщем положении точек роя может получиться так, что в гиперплоскости очередной гиперграницы находится слишком много точек. Соответственно, требуется выяснение того, какие из этих точек являются вершинами выпуклой оболочки, а какие нет. Кроме того, важной информацией при работе алгоритмов овыпукления является соседство граней, которое выражается через информацию о гиперребрах, общих для тех или иных пар граней. Соответственно, в случае, когда грань не является симплексом соответствующего пространства, нахождение её гиперребер также требует дополнительных усилий.

В случае плоскости эти проблемы не возникают. В этом случае размерность гиперграницы равна 1, грани являются отрезками, и несимплициальные грани возникнуть в принципе не могут. Если на грани — на отрезке — оказывается несколько точек, то очень легко выяснить, какие из них являются концами отрезка, а какие нет. Также многоугольник на плоскости имеет весьма эффективное представление в виде списка вершин, перечисленных в порядке обхода многоугольника по или против часовой стрелки. Эти обстоятельства и обеспечивают эффективность алгоритмов, производящих овыпукление на плоскости [1, 2, 3].

В трёхмерном пространстве ситуация несколько ухудшается, поскольку появляются описанные проблемы. Однако на помощь приходит естествен-

ная идея: после получения плоскости очередной грани, в которой лежит больше трёх точек, можно произвести овыпукление подроя точек, попавшего в эту плоскость. При этом используются алгоритмы для работы на плоскости, поэтому, в целом, процедура получается достаточно простой и по-прежнему эффективной [4].

Однако если и дальше увеличивать размерность, то гиперграни уже в свою очередь имеют размерность 3 или выше и не допускают удобную работу с ними.

Если наложить на овыпукляемый рой условие общности положения, это снимет указанные проблемы: все гиперграни выпуклой оболочки гарантированно будут гиперсимплексами, не нужны будут никакие дополнительные вычисления для их получения и получения их гиперребер. Такие алгоритмы реализованы в современных популярных библиотеках алгоритмов вычислительной геометрии CGAL (бесплатная) и LEDA (платная). Библиотеки реализованы для языка C++. Но эти процедуры неприменимы в случае, когда в плоскости какой-либо гиперграни находится слишком много точек. В этом случае работа алгоритмов происходит некорректно, даже если грани реально являются гиперсимплексами.

Вследствие этого актуальной задачей является разработка эффективной процедуры построения выпуклой оболочки роя точек многомерного пространства, находящихся в необщем положении.

Традиционно для реализации алгоритмов, нацеленных на работу в многомерном пространстве, выбирается алгоритм Джарвиса, алгоритм заворачивания подарка, как наименее использующий специфику плоскости. Однако его нужно адаптировать для случая необщего положения точек, добавив определение ситуации потенциально несимплициальной гиперграни и рекурсивный вызов в подпространстве меньшей размерности для обработки таких ситуаций. Кроме того, в случае наличия несимплициальных граней, которые в свою очередь могут иметь несимплициальные гиперребра и т.д., нужны нетривиальные структуры данных для хранения все информации об этих гипергранях и их соседстве.

В рамках выпускной квалификационной работы была поставлена цель разработать алгоритм построения выпуклой оболочки конечного набора точек в многомерном пространстве, находящихся в необщем положении,

а также сопутствующие структуры данных для хранения результатов его работы. Также была запланирована программная реализация созданной процедуры.

# 1 Основная часть

## 1.1 Базовые определения и обозначения

**Определение 1 ([5])** *Выпуклой оболочкой* множества  $P \subset R^d$  называется пересечение всех выпуклых подмножеств пространства  $R^d$ , содержащих  $P$ . Выпуклая оболочка множества  $P$  будет обозначаться  $CH(P)$  (от английского «convex hull», «выпуклая оболочка»)

Пусть  $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\} \subset R^d$ ,  $d \geq 2$  — конечное множество точек в  $d$ -мерном евклидовом пространстве. Несложно понять, что выпуклой оболочкой  $CH(P)$  будет замкнутый многогранник в пространстве  $R^d$  или, если  $P$  вложено в какое-то аффинное подпространство, в этом подпространстве.

**Определение 2** Из двух точек пространства  $R^d$  точка  $p_1$  считается меньше точки  $p_2$  в *лексикографическом порядке*, если найдется индекс  $1 \leq i^* \leq d$  такой, что  $p_{1,i^*} < p_{2,i^*}$  и для всех  $1 \leq i < i^*$  имеем  $p_{1,i} = p_{2,i}$ . Здесь и далее символ  $p_{k,i}$  означает  $i$ -ю координату точки  $p_k$ .

Символом  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  будет обозначаться скалярное произведение в евклидовом пространстве  $R^d$ . Символом  $|\vec{n}|$  будет обозначаться длина вектора  $\vec{n}$ :  $|\vec{n}| = \sqrt{\langle \vec{n}, \vec{n} \rangle}$ .

Для ненулевого вектора  $\vec{n}$  обозначим через  $\vec{n}_0$  вектор, сонаправленный с  $\vec{n}$  и имеющий единичную длину:  $\vec{n}_0 = \vec{n}/|\vec{n}|$ .

## 1.2 Алгоритм Джавриса на плоскости

Пусть дано множество точек  $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\} \subset R^2$ . Требуется указать точки роя  $P$ , являющиеся вершинами многоугольника  $CH(P)$ .

Идея алгоритма Джавриса (алгоритма заворачивания подарка) заключается в следующем:

- 1) находится какое-нибудь ребро многоугольника выпуклой оболочки и объявляется текущим;
- 2) с текущего ребра переходим к следующему, пока не будет достигнуто начальное ребро. После этого  $CH(p)$  считается построенной.

Для построения начального ребра проделываются следующие действия. Находится точка из роя  $P$ , минимальная в лексикографическом порядке.



Пусть это точка  $p_1$ . Через неё проводится прямая, параллельная оси  $Oy$ . Иными словами, прямая, перпендикулярная оси  $Ox$ . Затем эта прямая поворачивается вокруг точки  $p_1$  против часовой стрелки, пока она коснется одной или нескольких других точек. Самая дальняя от  $p_1$  точка из тех, которых коснулась прямая, назначается вторым концом начального ребра. Пусть это точка  $p_2$ .

Пусть имеется текущее ребро с концами в точках  $p_i$  и  $p_{i+1}$ , причём точка  $p_{i+1}$  была найдена после точки  $p_i$ . Тогда поворачиваем прямую  $(p_i p_{i+1})$  вокруг точки  $p_{i+1}$  против часовой стрелки, пока она не коснется одной или нескольких других точек. Самая дальняя от  $p_{i+1}$  точка из тех, которых коснулась прямая, назначается вторым концом нового ребра. Пусть это точка  $p_{i+2}$ .

Если ребро  $[p_{i+1} p_{i+2}]$  — это начальное ребро  $[p_1 p_2]$ , алгоритм заканчивает работу, а найденные точки  $p_1, p_2, \dots, p_i$  являются вершинами многоугольника выпуклой оболочки  $CH(P)$ , перечисленными против часовой стрелки.

Видно, что центральным местом данного алгоритма является процедура поворота прямой вокруг заданной её точки до тех пор, пока она не коснется других точек из набора. Формализуем эту процедуру.

Пусть вектор  $l_i$  — это единичный вектор, противоположно направленный вектору  $\overrightarrow{p_i p_{i+1}}$  (то есть  $l_i = (\overrightarrow{p_{i+1} p_i})_0$ ). Тогда нужные точки  $\{p_1^i, p_2^i, \dots, p_{k_i}^i\}$  роя  $P$  — это точки, на которых достигается минимум скалярного произведения  $\langle l_i, (\overrightarrow{p_i, p_j})_0 \rangle$ , то есть такие точки, что угол между  $l_i$  и  $\overrightarrow{p_i, p_j}$  максимален среди всех точек роя.

При построении начального ребра считаем, что  $l_0$  — это орт положительного направления оси  $Oy$ .

Тогда выбор первого ребра можно схематично представить шагами, изображёнными на рис. 1–4. Красная точка на рис. 1 — это  $p_1$ , лексикографически минимальная точка роя  $P$ . На рис. 2 проведена прямая, параллельная оси  $Oy$ , и выбран вектор  $l_0$  (красная стрелка). На рис. 3 схематично показан перебор точек роя в поисках второй вершины исходного ребра. Рис. 4 демонстрирует окончание этого процесса.

Действия, направленные на поиск следующего ребра выпукло оболочки схематично показаны на рис. 5, 6. На рис. 5 левая красная точка — это

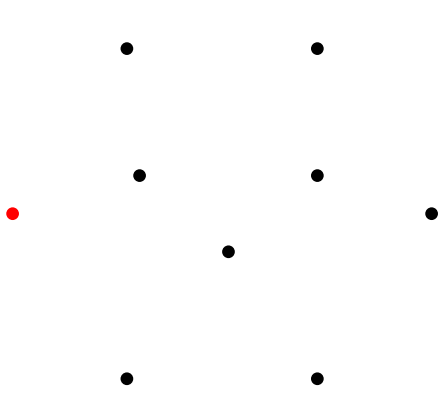


Рис. 1: Поиск начального ребра: выбор лексикорграфически минимальной точки выпукляемого роя; красным выделена точка  $p_1$

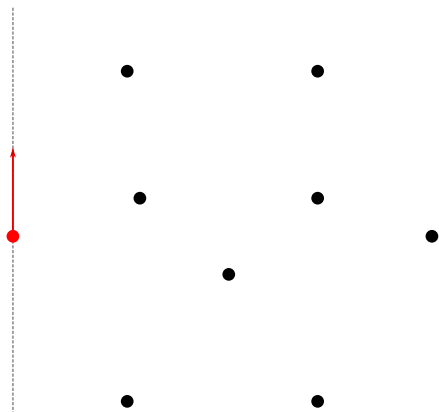


Рис. 2: Поиск начального ребра: приближение к прямой начального ребра — вертикальная прямая

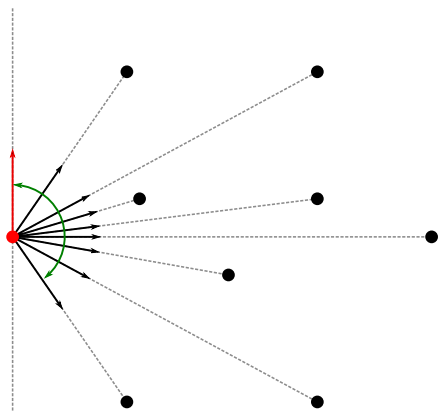


Рис. 3: Поиск начального ребра: перебор точек в поисках тех, направление на которые от  $p_1$  даёт максимальный угол с  $l_0$

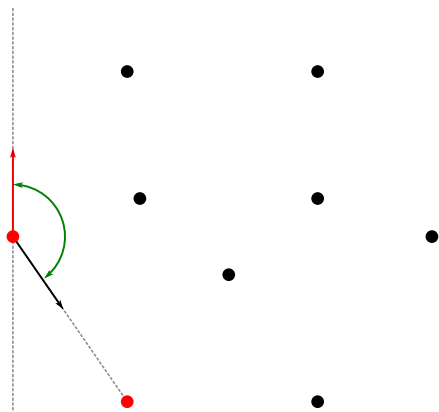


Рис. 4: Поиск начального ребра: вторая красная точка —  $p_2$ , второй конец начального ребра

начало  $p_i$  текущего ребра, правая красная точка — конец  $p_{i+1}$  текущего ребра. Перебираются точки роя, в поисках тех, направление на которые от точки  $p_{i+1}$  даёт максимальный угол с вектором  $l_i$  (красная стрелка). Рис. 6 показывает окончание этого процесса.

На рис. 7 показано окончание процесса построения выпуклой оболочки.

Сложность данного алгоритма, очевидно, равна  $O(hn)$ , где  $n$  — количе-

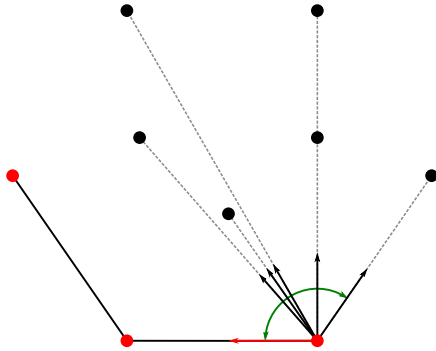


Рис. 5: Поиск очередного ребра: перебор точек в поисках тех, направление на которые от  $p_{i+1}$  даёт максимальный угол с  $l_i$

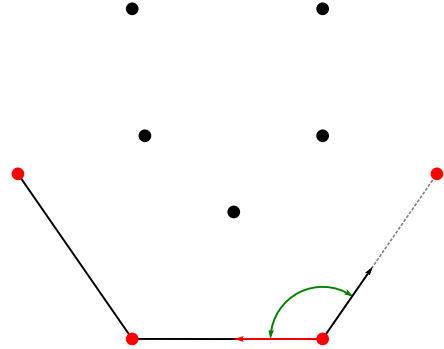


Рис. 6: Поиск очередного ребра: выбор точки  $p_{i+2}$ , второй вершины очередного ребра

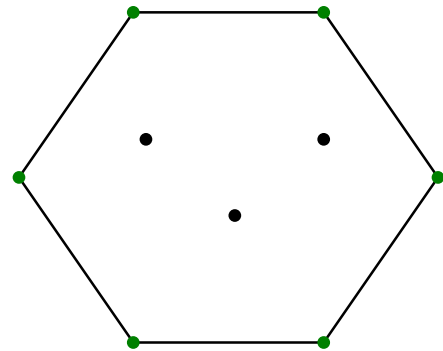
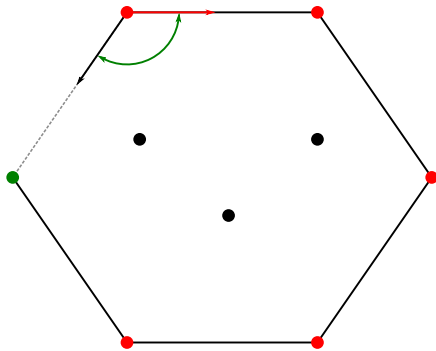


Рис. 7: Окончание процесса построения выпуклой оболочки

ство точек в рою  $P$ , а  $h$  — количество рёбер выпуклой оболочки. Сложность вытекает из того, что при построении каждого из  $h$  рёбер перебирается  $n-1$  точка рою (кроме точки, вокруг которой поворачивает прямая текущего ребра).

### 1.2.1 Алгоритм заворачивания подарка в многомерном пространстве в случае общего положения точек

В дальнейшем приставка *гипер-* будет опускаться, когда из контекста будет понятно, об объекте какой размерности идёт речь. То есть под *плоскостью* будет подразумеваться  $(d - 1)$ -мерная гиперплоскость в пространстве  $R^d$ , под *гранью*  $d$ -мерного многогранника будет подразумеваться  $(d - 1)$ -мерная гипергрань, а под *ребром* —  $(d - 2)$ -мерное гиперребро, или гипергрань (гипер)грани.

Пусть теперь базовое пространство, в котором находится рой  $P$ , имеет размерность  $d > 2$ . Кроме того, будем считать, что точки роя  $P$  находятся в общем положении.

Вследствие этого предположения можно утверждать, что выпуклая оболочка  $CH(P)$  есть многогранник с гранями, каждая из которых есть  $(d - 1)$ -мерный симплекс и задается  $d$  точками. При этом других точек роя в плоскости грани нет.

Тогда в алгоритм Джарвиса произойдут следующие изменения.

На этапе построения начальной грани теперь надо совершить не один поворот исходной плоскости, перпендикулярной первой координатной оси, а  $d - 1$  поворот, чтобы плоскость «легла» на  $d$  точек роя.

Формально процедура поворота плоскости вокруг ребра теперь выглядит следующим образом. Пусть имеется плоскость  $\alpha$ , задаваемая точками  $p_1^\alpha, p_2^\alpha, \dots, p_d^\alpha$ . Пусть мы желаем повернуть её относительно ребра, задаваемого точками  $p_2^\alpha, \dots, p_d^\alpha$ . Выполняются следующие действия:

1. Строим ортонормированный базис ребра, вокруг которого происходит поворот. Для этого проводим процедуру ортонормирования Грама–Шмидта (см., например, [6]) набора из  $d - 2$  векторов  $\overrightarrow{p_2 p_3}, \overrightarrow{p_2 p_4}, \dots, \overrightarrow{p_2 p_d}$ . Обозначим полученный ортонормированный набор векторов через  $N = \{\vec{n}_i\}, i = 1, \dots, d_2$ .
2. Построим вектор  $\vec{n}'$ , дополняющий набор  $N$  до базиса плоскости  $\alpha$ . Для этого сделаем шаг процедуры Грама–Шмидта для вектора  $\overrightarrow{p_2 p_1}$  на фоне набора  $N$ . Заметим, что в силу сути действий, производимых при шаге этой процедуры, вектор  $\vec{n}'$  будет направлен внутрь грани, задаваемой точками  $p_k$ .
3. Перебираем точки роя  $P$ , за исключением точек  $p_1^\alpha, \dots, p_d^\alpha$ . Для каж-

дой взятой точки  $p'_i$  строим вектор  $\vec{n}_i$ , дополняющий набор  $N$  до базиса плоскости, определяемой точками  $p'_i, p_2^\alpha, \dots, p_d^\alpha$ . Для этого делаем шаг процедуры Грама–Шмидта для вектора  $\vec{p}_i$  на фоне набора  $N$ . Опять имеем, что полученный вектор  $\vec{n}'_i$  направлен внутрь тетраэдра, задаваемого точками  $p'_i, p_2^\alpha, \dots, p_d^\alpha$ .

4. Перебирая точки  $p'_i$ , выбираем ту, для которой угол между векторами  $\vec{n}'$  и  $\vec{n}'_i$  наибольший, то есть для которых скалярное произведение  $\langle \vec{n}', \vec{n}'_i \rangle$  наименьшее. В силу предположения об общем положении роя  $P$  такая точка  $p^*$  будет единственной.
5. Точки  $p^*, p_2^\alpha, \dots, p_d^\alpha$  задают грань, имеющую общим ребро, задаваемое точками  $p_2^\alpha, \dots, p_d^\alpha$ , с гранью, задаваемой точками  $p_1^\alpha, p_2^\alpha, \dots, p_d^\alpha$ .

Заметим, что в случае построения начальной грани, плоскость, которую мы начинаем вращать, задаётся не набором точек. Действительно, мы проводим эту плоскость через точку  $p_1$ , лексикографически минимальную в наборе  $P$ , перпендикулярно первой координатной оси. То есть эта плоскость задаётся одной точкой  $p_1$  и своим базисом, который состоит координатных ортов  $e_2, e_3, \dots, e_d$ .

В этом случае мы поочередно выкидываем первый вектор из этого набора, второй, третий и т.д., рассматривая оставшиеся как базис ребра, вокруг которого поворачиваем, а после нахождения новой плоскости, задаваемой точкой  $p^*$ , вставляем в набор вектор  $\vec{p}_1$  взамен исключённого. Соответственно, перед каждым очередным поворотом требуется провести ортонормирование имеющегося базиса ребра.

Процедура перехода от начальной грани к соседним в отличие от случая на плоскости не имеет линейного характера, поскольку каждая грань уже имеет  $d$  соседей (поскольку  $(d - 1)$ -мерный симплекс, задаваемый  $d$  точками, имеет  $d$  рёбер, которые задаются каждым из  $d$  наборов из  $(d - 1)$ -й точки).

Для описания этой процедуры уместна графовая формализация.

Рассмотрим неориентированный граф, в котором вершины — это грани многогранника  $CH(P)$ . Две вершины  $v_i$  и  $v_j$  соединены ребром, если соответствующие им грани  $\alpha_i$  и  $\alpha_j$  имеют общее ребро. Наша задача — перебрать все вершины этого графа.

Этот перебор можно осуществить при помощи того или иного алгорит-

ма поиска по графу. Однако при этом следует иметь в виду, что традиционно используемая рекурсивная реализация поиска в глубину, использующая системный стек, может быть чересчур накладной, так как многогранник  $CH(P)$  может иметь достаточно большое количество граней. При «ручной» же организации сопутствующих структур данных более удобным оказывается поиск в ширину. Именно он и был выбран для реализации.

При работе алгоритма поиска на графе важной структурой данных является структура, определяющая, была ли ранее посещена та или иная вершина. В случае, когда вершины графа — натуральные числа от 1 до максимального номера вершины, в качестве такой структуры выступает массив логических значений. Однако в рассматриваемой ситуации вершины графа имеют более сложную природу. Поэтому вместо массива разумно рассматривать хэш-словарь, хранящий логические выражения.

Такой подход, в свою очередь, приводит к необходимости определения разумной хэш-функции грани. Рассматривались следующие варианты вычисления хэша:

1. упорядочиваем в лексикографическом порядке точки, определяющие грань, считаем их хэши и на основе полученного набора целых чисел считаем хэш грани;
2. упорядочиваем индексы точек, определяющих грань, и на основе полученного набора целых чисел считаем хэш грани;
3. уравнение плоскости, содержащей грань, и на основе коэффициентов уравнения строим хэш грани.

Первые два способа хорошо работают в случае общего положения точек. Однако, если рой  $P$  не общего положения, то после получения плоскости очередной грани и отсева точек, попавших в эту плоскость, непонятно, какие из них являются вершинами грани и на основе каких точек считать хэш.

Поэтому в рамках предлагаемой реализации используется именно третий подход. После выполнения шага процедуры заворачивания подарка в распоряжении имеется базис полученной плоскости. Поэтому нормаль к этой плоскости можно получить как внешнее произведение с имеющимся  $(d - 1)$ -м вектором.

Для вычисления внешнего произведения нужно решить недоопределен-

ную систему линейных уравнений ранга  $d - 1$ . Решение системы, например, методом Гаусса или методом Гаусса с поиском главного элемента, даст какой-то ненулевой вектор, ортогональный плоскости. Его после этого надо нормализовать и направить так, чтобы он был вектором внешней нормали, то есть давал бы положительное скалярное произведение с вектором от опорной точки плоскости к какой-нибудь точке роя, не лежащей в плоскости. Опорная точка плоскости выбирается из тех точек, которые определяют ребро, при «перекатывании» через которое плоскость была получена.

Как известно, координаты нормали являются коэффициентами линейного уравнения плоскости. Свободный член уравнения находится из скалярного произведения нормали и радиус-вектора опорной точки плоскости.

Однако числа с плавающей точкой, которыми являются полученные коэффициенты уравнения плоскости, сами по себе не очень пригодны для получения хэша, поскольку при разных путях вычисления одной и той же величины из-за округлений могут получаться вещественные числа, чуть-чуть отличающиеся на малую величину. Поэтому была взята следующая идея: все полученные вещественные коэффициенты умножаются на  $10^6$ , у результат отбрасывается дробная часть, и хэш вычисляется на основе полученного набора целых чисел. Есть надежда, что в этих знаках после запятой числа совпадают.

### **1.2.2 Алгоритм заворачивания подарка в многомерном пространстве в случае необщего положения точек**

Как говорилось выше, две основных проблемы, которые могут возникнуть при необщем положении точек роя — появление в плоскости грани дополнительных точек, не являющихся вершинами выпуклой оболочки, и появление у грани большого количества рёбер. И как тоже было сказано выше, естественным решением обеих проблем является рекурсивный запуск алгоритма овыпукления в аффинном подпространстве грани.

В результате этого запуска и отсеиваются лишние точки, и получается информация о рёбрах грани. При этом лишние точки можно пометить как несущественные и вообще не рассматривать в дальнейших операциях. Информация о рёбрах грани получается при соответствующем оформлении алгоритма, поскольку она необходима для процедура перехода через ребро

и, как следствие, генерируется алгоритмом; нужно лишь запоминать её.

Таким образом, модификация алгоритма Джарвиса в многомерном пространстве для случая необщего положения точек выглядит следующим образом.

Во-первых, в процедуре поворота плоскости может получиться так, что часть точек из тех, которые не рассматриваются как задающие ребро, всё-таки лежат в подпространстве этого ребра или совпадают с какими-то из точек, задающих ребро. В такой ситуации при ортонормировании очередного вектора  $\overrightarrow{p_1 p^*}$  получается нулевой вектор. Соответственно, такие точки должны пропускаться при переборе.

Во-вторых, может получиться так, что весь рой лежит в каком-то аффинном подпространстве меньшей размерности. В этом случае при построении начальной грани в какой-то момент не найдется ни одной точки, не лежащей вне очередной плоскости. В этом случае процесс построения начальной грани останавливается, точки роя пересчитываются в координаты этой грани, и алгоритм запускается в пространстве меньшей размерности.

В-третьих, после того, как установлена плоскость очередной грани, нужно выделить подрой точек, попавших в полученную плоскость. Если количество этих точек равно размерности пространства, то грань может быть лишь симплицальной и никаких дополнительных действий не требуется, вся нужная информация о грани получается тривиально. Если же количество точек этого подроя больше размерности пространства, то грань может быть несимплицальной, и требуется дополнительная его обработка для получения информации о её вершинах и рёбрах.

К этому моменту имеется ортонормированный аффинный базис плоскости: опорная точка и ортонормированный линейный базис. Точки подроя пересчитываются в координаты этого базиса, и алгоритм запускается рекурсивно на полученном рою в подпространстве размерности на единицу меньше. К концу работы алгоритма получаем выпуклую оболочку этого роя и полную информацию о её устройстве. Но при этом все точки и векторы выражены в координатах подпространства, а не исходного пространства. Та же проблема имеется и в ситуации, когда весь рой содержится в подпространстве меньше размерности.

Как следствие, требуется обратный пересчёт из координат подпростран-



ства в координаты исходного пространства. Пересчёт векторов проблемы не составляет, поскольку вектора базиса подпространства выражены в координатах исходного пространства. В принципе, таким же образом можно пересчитывать и точки, однако после пересчёта мы получим новые объекты, в то время как требуется привязаться к объектам точек, хранящимся в структуре роя.

Поэтому в первой и в третьей ситуации при проецировании точек в подпространство требуется запоминать ссылки на объекты исходных точек. При обратном пересчёте объекты точек в координатах подпространства заменяются на исходные объекты точки, получаемые по запомненным ссылкам.

Также алгоритм возвращает информацию о рёбрах полученной грани: это грани выпуклой оболочки, построенной в подпространстве.

### 1.3 Схема предлагаемого алгоритма

В результате был предложен алгоритм построения выпуклой оболочки, приведённый на листинге 1. В строке 1 происходит проверка, что точки являются двумерными. Если это так, то вызывается метод построения выпуклой оболочки в двухмерном пространстве и алгоритм заканчивает работу. Двумерный алгоритм описан в разделе 1.2.

В строке 8 производится поиск начальной гиперграни. Алгоритм описан в разделах 1.2.1 и 1.2.2. Начальная грань записывается в очередь граней на обработку, как того требует алгоритм поиска в ширину.

Затем реализуется традиционный обход графа в ширину. На каждом шаге цикла, если очередь обрабатываемых граней непуста, из неё выбирается очередная грань. В цикле по её рёбрам производится переход через соответствующее ребро и, если новая грань еще не создавалась, она создаётся и записывается в результат и в очередь на обработку.

В строке 19 проверяется, задают ли точки  $P_g$ , лежащие в новой плоскости, симплекс. Если задают, то вызывается отдельный метод построения симплицеальной гиперграни. Иначе происходит пересчёт точек  $P_g$  в базис гиперплоскости и рекурсивный вызов метода для обработки множества точек  $P_g$  с последующим обратным пересчётом результата в координаты текущего пространства.

---

**Листинг 1:** Алгоритм построения выпуклой оболочки  $CH(P)$ 

---

**Входные данные:** Множество точек  $P = \{p_i\}_{i=1}^n \subset R^d$

**Результат:** Выпуклая оболочка  $CH(P)$ , заданная набором граней.

```
1  если  $P \in R^2$  тогда
2      Найти выпуклую оболочку  $CH_2$  на плоскости при помощи
        метода Джарвиса
3      Построить векторы рёбер полученного многоугольника
4      возвратить  $CH_2$ 
5  иначе
6      Инициализировать пустую выпуклую оболочку  $CH$ 
7      Инициализировать пустое множество использованных ребер  $H$ 
8      Найти исходную грань  $F_0$  выпуклой оболочки
9      Добавить  $F_0$  в очередь  $S$ 
10     Пометить  $F_0$  как уже создававшуюся
11     до тех пор, пока  $S \neq \emptyset$  выполнять
12         Изъять из головы  $S$  грань  $F$ 
13         цикл по рёбрам  $e$  из списка рёбер  $F$  выполнять
14             Добавить  $e$  в  $H$ 
15             Найти гиперплоскость  $g$ , содержащую  $CH(e \cup p)$ , где
                 $p \in P$ , и все точки  $p_i \in P$  принадлежат отрицательному
                полупространству плоскости  $g$ 
16             если плоскость  $g$  уже создавалась тогда
17                 | Перейти к следующему ребру  $e$ 
18             Найти множество точек  $P_g = \{p_i \in P \mid p_i \in g\}$ 
19             если  $|P_g| = n$  тогда
20                 | Построить симплицильную грань  $F'$ 
21             иначе
22                 | Пересчитать рой  $P_g$  в координаты плоскости  $g$ 
23                  $F' = CH(P_g)$ 
24                 | Пересчитать элементы  $F'$  в координаты исходного
                    пространства
25             если  $P = P_g$  тогда
26                 | возвратить  $F'$ 
27             Добавить грань  $F'$  в  $CH$ 
28             Пометить грань  $F'$  как уже создававшуюся
29 возвратить  $CH$ 
```

---

## 1.4 Программная реализация

В качестве языка программирования для тестовой реализации данного дипломного проекта был выбран C# — объектно-ориентированный язык программирования.

Реализация будет разработана на платформе .Net Core. Это платформа разработки общего назначения с открытым исходным кодом. На данной платформе можно реализовывать приложения под Windows, Linux и macOS с поддержкой процессоров x64, x86, ARM32 и ARM64. Платформа .Net Core поддерживает несколько языков программирования.

В результате дипломной работы была разработана реализация алгоритма построения выпуклой оболочки многомерного роя точек, находящихся в общем положении.

Далее будут рассмотрены классы и процедуры разработанной реализации. В конце главы, будут приведены замеры тестовых запусков алгоритма.

### 1.4.1 Хранение выпуклой оболочки

Основные свойства и методы выпуклой оболочки определяют интерфейсы ICell и IFace.

ICell определяет структуру  $d$ -мерной многогранника выпуклой оболочки. Многогранник должен хранить свое измерение и ссылку на объект класса Hyperplane. Также класс многогранника должен реализовывать метод GetPoints, для получения списка вершин.

ICell наследуется интерфейсом IFace, который, в свою очередь, дополняет структуру ICell свойствами и методами для  $d$ -мерной выпуклой оболочки. В отличие от многогранника, выпуклая оболочка должна хранить списки ребер и список соседних граней.

Классы ConvexHull, ConvexHull2d реализуют интерфейс IFace.

ConvexHull — класс для хранения выпуклой оболочки  $d$ -мерного пространства, где  $d > 2$ . В качестве ребер он хранит список реализаций интерфейса ICell.

ConvexHull2D — класс для хранения двухмерной выпуклой оболочки. Оболочку хранит как список точек, так же для дальнейших вычислений хранит список ребер, представленный списком экземпляров класса Edge.

Edge — класс для хранения информации о ребре двумерной выпуклой оболочки. Наследует интерфейс ICell. Хранит две точки и информацию о плоскости в виде экземпляра класса Hyperplane.

Для каждой грани выпуклой оболочки необходимо хранить данные о ее плоскости. Для этого был реализован класс Hyperplane.

Hyperplane хранит базис в виде массива векторов, опорную точку и нормаль плоскости. Класс Hyperplane имеет следующие методы:

1. IsPointInPlane — метод принимает точку и определяет лежит ли точка на плоскости. Результат булево значение;
2. ConvertPoint — переносит координаты точки на свой базис.
3. ConvertVector — переносит вектор на свой базис;
4. SetOrientationNormal — ориентирует нормаль по точке;

#### 1.4.2 Классы построения выпуклой оболочки

Полученный алгоритм был реализован в классе GiftWrappingAlgorithm. Данный класс содержит следующие методы:

1. FindConvexHull — основной метод, где реализован разработанный алгоритм. Принимает массив экземпляров класса PlanePoint. Возвращает экземпляр типа реализующий интерфейс IFace.
2. FindConvexHull2d — реализация алгоритма Джарвиса на плоскости. Принимает массив экземпляров класса PlanePoint. Возвращает экземпляр класса ConvexHull2D.
3. CreateSimplex — метод для построения симплекса. Принимает массив экземпляров класса PlanePoint. Возвращает экземпляр типа реализующий интерфейс IFace.

Для начала работы алгоритма необходимо найти плоскость начальной грани. Для этого был реализован класс PlaneFinder. Данный класс является статическим и имеет единственный публичный метод — FindFirstPlane, принимающий массив точек. Результатом работы метода является экземпляр класса Hyperplane.

При работе метод класса PlaneFinder находит только базис плоскости начальной грани. Для дальнейшего построения плоскости вызывается ме-

тод Create класса HyperplaneBulder. HyperplaneBulder содержит методы для построения плоскости по различным входным данным.

### 1.4.3 Вспомогательные классы

При работе алгоритма возникает потребность использовать методы вспомогательных классов.

Далее в этой главе будут рассмотрены вспомогательные классы.

В алгоритме необходимо выполнять вычисления с точками, векторами и матрицами. Для этого был взят уже готовые классы, разработанные научным руководителем диссертации С.С. Кумковым. Классы позволяют хранить данные точек, векторов и матриц и выполнять основные математические операции с ними.

При уходе в аффинное подпространство для построения выпуклой оболочки грани, необходимо сохранять связь между оригинальными точками и точками аффинного подпространства. Это необходимо для дальнейшей обработки граней. Для этого был разработан класс PlanePoint. Он позволяет сохранять ссылку на родительскую точку. В результате, после построения выпуклой оболочки аффинного подпространства, каждая точка грани будет хранить ссылку на оригинальную.

Для работы алгоритма необходимо вычислять нормаль плоскости для каждой грани. Чтобы найти нормаль, необходимо решить недоопределенную систему алгебраических линейных уравнений. С этой целью был разработан вспомогательный класс GaussWithChoiceSolveSystem, в котором реализован метод Гаусса.

В методе Гаусса используется перестановка столбцов и строк системы линейных уравнений. Явная реализация перестановки потребляет слишком много ресурсов. Поэтому для оптимальной работы метода Гаусса были созданы вспомогательные классы: IndexMap, IndexMatrix, IndexVector, LinearEquations, в которых перестановка объектов массива происходит при помощи массива индексов.

### 1.4.4 Тестирование реализации

В тестировании были охвачены следующие виды наборов точек:

1. точки в общем положении:
  - (a) в виде симплекса;
  - (b) в виде симплицированного многогранника;
2. точки в необщем положении:
  - (a) лишние точки лежат на гранях выпуклой оболочки;
  - (b) лишние точки лежат внутри выпуклой оболочки;

Для тестирования необщего положения использовались наборы точек правильных многогранников, дополненные лишними точками в количестве 100 штук.

В результате измерений были получены следующие данные:

Точки в общем положении:

1. 3-мерный тетраэдр с общим положением точек — 0ms (3770 ticks);
2. 4-мерный симплекс с общим положением точек — 1ms ;

Точки в необщем положении, все точки являются вершинами выпуклой оболочки:

1. 3-мерный куб — 2ms;
2. 4-мерный куб — 24ms.

Точки в необщем положении, имеются точки, лежащие внутри выпуклой оболочки:

1. 3-мерный тетраэдр — 22ms;
2. 4-мерный симплекс — 151ms ;
3. 3-мерный куб — 57 ms;
4. 4-мерный куб — 512ms.

Точки в необщем положении, имеются точки, лежащие на границе выпуклой оболочки, но не являющиеся вершинами:

1. 3-мерный тетраэдр — 18ms;
2. 4-мерный симплекс — 113ms ;
3. 3-мерный куб — 33ms;
4. 4-мерный куб — 365ms.

В результате тестирования можно сделать следующие выводы. Наиболее сильная нагрузка возникает от размерности точек. Чем больше размерность точек, тем больше время выполнения.

## Заключение

В данной работе был разработан алгоритм решение задачи построения выпуклой оболочки конечного набора точек в многомерном пространстве  $R^d$ , находящегося в необщем положении.

Предложенный алгоритм был реализован на языке C# и проведены тесты производительности.

Возможна последующая оптимизация как самого алгоритма, там и его программной реализации. Интерес также представляет создание реализации на языке C/C++, имеющем значительную популярность среди математиков-программистов.

## Список литературы

- [1] Preparata F. P., Shamos M. I. Computational Geometry. An Introduction. — New York: Springer, 1985. — 400 с.
- [2] Препарата Ф., Шеймос М. Вычислительная геометрия: Введение. пер. с англ. под ред. Банковского Ю. М. — М.: Мир, 1989. — 478 с.
- [3] de Berg M., Cheong O., van Kreveld M., Overmars M. Computational Geometry. Algorithms and Applications, 3rd Ed. — Berlin: Springer-Verlag, 2008. — 398 с.
- [4] Ивановский С. А., Преображенский А. С., Симончик С. К. Алгоритмы вычислительной геометрии. Выпуклые оболочки в трехмерном пространстве // Компьютерные инструменты в образовании. — 2007. — №3. — С. 3–17.
- [5] Kokichi S. Robust gift wrapping for the three-dimensional convex hull // Journal of Computer and System Sciences. — 1994. — Vol. 49, issue 2, pp. 391–407.
- [6] Беклемишев Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. — М.: Наука, 2005. — 308 с.