

# IEL – protokol k projektu

## Augustin Machyňák

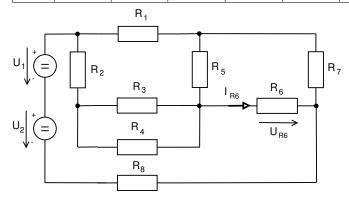
#### 22. března 2022

## Obsah

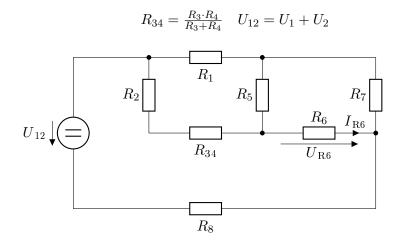
1	Příklad 1	<b>2</b>
2	Příklad 2	6
3	Příklad 3	9
4	Příklad 4	12
5	Příklad 5	15
6	Shrnutí výsledků	17

Stanovte napětí  $U_{R6}$  a proud  $I_{R6}$ . Použijte metodu postupného zjednodušování obvodu.

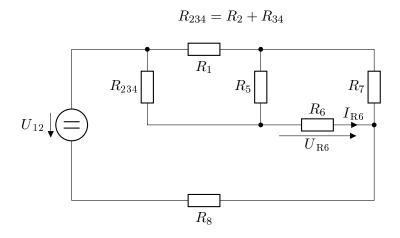
sk.	$U_1$ [V]	$U_2$ [V]	$R_1 [\Omega]$	$R_2 [\Omega]$	$R_3 [\Omega]$	$R_4 [\Omega]$	$R_5 [\Omega]$	$R_6 [\Omega]$	$R_7 [\Omega]$	$R_8 [\Omega]$
D	105	85	420	980	330	280	310	710	240	200



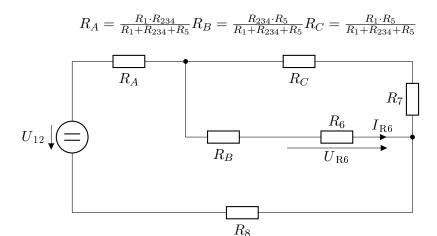
Zdroje  $U_1$  a  $U_2$  jsou sériově zapojené.  $R_3$  a  $R_4$  jsou paralelně zapojené. Upravíme tedy na:



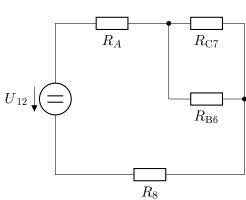
 $R_2$  a  $R_{34}$  jsou sériově zapojené. Upravíme tedy na:



Provedeme transfiguraci trojúhelník - hvězda u rezistorů  $R_{234},\,R_1$  a  $R_5$  následovně:

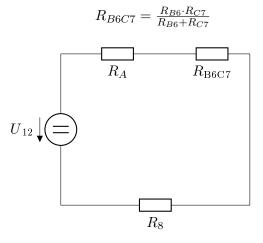


 $R_C$ s  $R_7$ a  $R_B$ s  $R_6$ jsou sériově zapojeny:



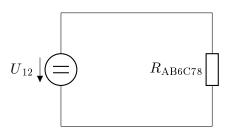
 $R_{C7} = R_C + R_7$   $R_{B6} = R_B + R_6$ 

 $R_{C7}$  a  $R_{B6}$  jsou paralelně zapojeny:



 $R_A, R_{B6C7}$  a  $R_8$  jsou sériově zapojeny:

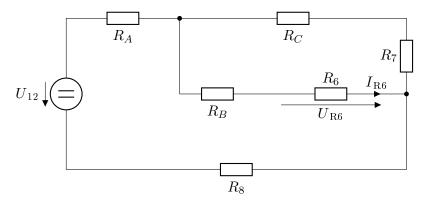
$$R_{AB6C78} = R_A + R_{B6C7} + R_8$$



$$I_{AB6C78} = \frac{U_{12}}{R_{AB6C78}}$$

Nyní víme, že proud procházející obvodem je  $I_{AB6C78}.$ 

Vrátíme se k obvodu po úpravě transfigurace trojúhelník - hvězda.



Spočítáme napětí na  $R_8$  a  $R_A$ :

$$U_{R_8} = R_8 \cdot I_{AB6C78} \quad U_{R_A} = R_A \cdot I_{AB6C78}$$

Následně tuto hodnotu odečteme od celkového napětí a dostaneme napětí na  $R_C$ ,  $R_7$  a  $R_B$ ,  $R_6$  (2. k.z.):

$$U_{R_{B6}} = U_{12} - U_{R_A} - U_{R_8} \quad I_{R_{B6}} = I_{R_6} = I_{R_B}$$

Proud  $R_6$  je potom roven:

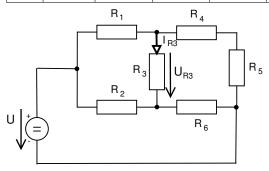
$$I_{R_6} = \frac{U_{R_{B6}}}{R_{B6}} \quad U_{R_6} = I_{R_6} \cdot R_6$$

#### Dosadíme a vypočítáme:

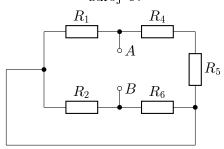
$$\begin{array}{c} U_{12} = 105 + 85 & U_{12} = 190V \\ R_{34} = \frac{330 \cdot 280}{330 + 280} & R_{34} = 151, 475409836\Omega \\ R_{234} = 980 + 151, 475409836 & R_{234} = 1131, 475409836\Omega \\ R_{1} + R_{234} + R_{5} = 1861, 475409836 \\ R_{234} = \frac{420 \cdot 1131 \cdot 475409836}{1861 \cdot 475409836} & R_{4} = 255, 291941875\Omega \\ R_{B} = \frac{1131 \cdot 475409836}{1861 \cdot 475409836} & R_{B} = 188, 429766622\Omega \\ R_{C} = \frac{420 \cdot 310}{1861 \cdot 475409836} & R_{C} = 69, 944517833\Omega \\ R_{B6} = 188, 429766622 + 710 & R_{B6} = 898, 429766622\Omega \\ R_{C7} = 69, 944517833 + 240 & R_{C7} = 309, 944517833\Omega \\ R_{B6C7} = \frac{898 \cdot 429766622 + 309 \cdot 944517833}{898 \cdot 429766622 + 309 \cdot 944517833} & R_{B6C7} = 230, 444643191\Omega \\ R_{AB6C78} = 255, 291941875 + 230, 444643191 + 200 & R_{AB6C78} = 685, 736585066\Omega \\ I_{AB6C78} = \frac{190}{685 \cdot 7365855066} & I_{AB6C78} = 0, 277074322A \\ U_{R_{8}} = 200 \cdot 0, 277074322 & U_{R_{8}} = 55, 4148644V \\ U_{R_{A}} = 255, 291941875 \cdot 0, 277074322 & U_{R_{8}} = 63, 850293893V \\ I_{R_{6}} = \frac{63.850293893}{898 \cdot 429766622} & I_{R_{6}} = 0, 071068764A \\ U_{R_{6}} = 0, 071068764 \cdot 710 & U_{R_{6}} = 50, 45882244V \\ \end{array}$$

Stanovte napětí  $U_{R3}$  a proud  $I_{R3}$ . Použijte metodu Théveninovy věty.

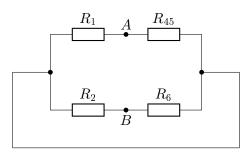
sk.	U [V]	$R_1 [\Omega]$	$R_2 [\Omega]$	$R_3 [\Omega]$	$R_4 [\Omega]$	$R_5 [\Omega]$	$R_6 [\Omega]$
С	200	70	220	630	240	450	300



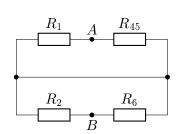
Prvně si spočítáme hodnotu odporu, který bude v našem náhradním zapojení. Odpojíme zátěž  $R_3$  a zdroj U.

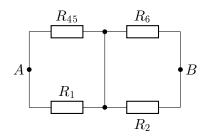


 $R_4$  a  $R_5$  jsou zapojené sériově.  $R_{45} = R_4 + R_5$ 



Obvod můžeme trochu upravit následovně.





Nyní je zřejmé, že  $R_{45}$  s  $R_1$  a  $R_6$  s  $R_2$  jsou zapojeny paralelně.

$$R_{145} = \frac{R_1 * R_{45}}{R_1 + R_{45}} \quad R_{26} = \frac{R_2 * R_6}{R_2 + R_6}$$

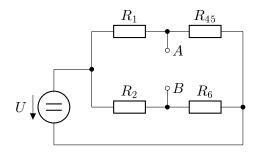
$$A \circ \longrightarrow B$$

 $R_{145}$ a  $R_{26}$ jsou zapojeny sériově. Výsledný odpor je roven odporu  $R_i$ v náhradním zapojení.

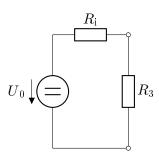
$$R_i = R_{145} + R_{26}$$

Nyní spočítáme hodnotu napětí na prázdno. Opět sečteme sériově zapojené  $R_4$  a  $R_5$  Napětí mezi A a B můžeme spočítat následovně (dělič napětí):

$$U_0 = U \cdot \frac{R_6}{R_6 + R_2} - U \cdot \frac{R_{45}}{R_{45} + R_1}$$



Náhradní zapojení vypadá následovně:



Nyní zbývá výpočet  ${\cal I}_{R_3}$  a  ${\cal U}_{R_3}$  v náhradním obvodu

$$I_0 = \frac{U_0}{R_i + R_3}$$
  $U_{R_3} = U_0 - (I_0 \cdot R_i)$   $I_{R_3} = \frac{U_{R_3}}{R_3}$ 

Dosadíme a vypočítáme:

$$R_{45} = 240 + 450 R_{45} = 690\Omega$$

$$R_{145} = \frac{70*690}{70+690}$$
  $R_{145} = 63,552631578\Omega$ 

$$R_{26} = \frac{220*300}{220+300} \qquad \qquad R_{26} = 126,923076923\Omega$$

$$R_i = 63,552631578 + 126,923076923$$
  $R_i = 190,475708501\Omega$ 

$$U_0 = 200 \cdot \frac{300}{300 + 220} - 200 \cdot \frac{690}{690 + 70}$$
 
$$U_0 = -66,194331983V$$

$$I_0 = \frac{-66,194331983}{190,475708501+630} \qquad I_0 = -0,080677991A$$

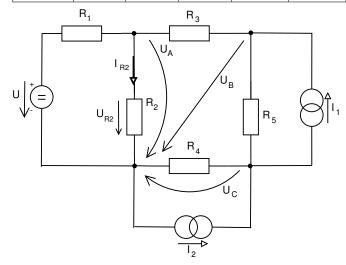
$$U_{R_3} = -66,194331983 - (-0,080677991 \cdot 190,475708501)$$
  $U_{R_3} = -50,827134486V$ 

$$I_{R_3} = \frac{-50,827134486}{630}$$
  $I_{R_3} = -0,080677991A$ 

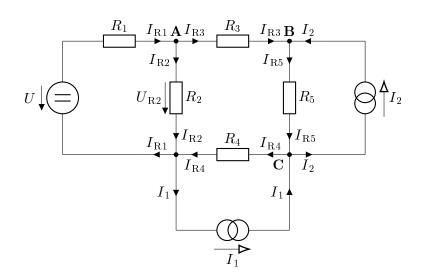
$$U_{R_3} = -50,8271V$$
  $I_{R_3} = -80,6779mA$ 

Stanovte napětí  $U_{R2}$  a proud  $I_{R2}$ . Použijte metodu uzlových napětí  $(U_A,\,U_B,\,U_C)$ .

_		-					·/	-, -,
sk.	U [V]	$I_1$ [A]	$I_2$ [A]	$R_1 [\Omega]$	$R_2 [\Omega]$	$R_3 [\Omega]$	$R_4 [\Omega]$	$R_5 [\Omega]$
Н	130	0.95	0.50	47	39	58	28	25



Začneme tím, že si vyznačíme směry proudů například následovně.



Pro uzly A, B a C poté musí platit následující:

 $A: I_{R1} - I_{R2} - I_{R3} = 0$   $B: I_{R3} + I_2 - I_{R5} = 0$   $C: I_{R5} + I_1 - I_{R4} - I_2 = 0$ 

Vyjádříme si proudy a dosadíme do rovnice:

$$\begin{split} I_{R1} &= \frac{U-U_A}{R_3} & \frac{U-U_A}{R_3} - \frac{U_A}{R_2} - \frac{U_A-U_B}{R_3} = 0 \\ I_{R2} &= \frac{U_A}{R_2} & \frac{U_A-U_B}{R_3} - 0.5 - \frac{U_B}{R_5} = 0 \\ I_{R3} &= \frac{U_A-U_B}{R_3} & \frac{U_B}{R_5} + 0.95 - \frac{U_C}{R_4} - 0.5 = 0 \\ I_{R4} &= \frac{U_C}{R_4} & \\ I_{R5} &= \frac{U_B}{R_5} & \frac{U_A}{39} + \frac{U_A}{47} + \frac{U_A}{58} - \frac{U_B}{58} = \frac{130}{47} \\ I_1 &= 0.95 & -\frac{U_A}{58} + \frac{U_B}{58} + \frac{U_B}{25} - \frac{U_C}{25} = \frac{19}{20} \\ I_2 &= 0.5 & \frac{U_B}{25} - \frac{U_C}{25} - \frac{U_C}{28} = \frac{9}{20} \end{split}$$

Zapíšeme do matice:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{39} + \frac{1}{47} + \frac{1}{58} & -\frac{1}{58} & 0 \\ -\frac{1}{58} & \frac{1}{58} + \frac{1}{25} & -\frac{1}{25} \\ 0 & \frac{1}{25} & -\frac{1}{25} - \frac{1}{28} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_A \\ U_B \\ U_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{130}{47} \\ \frac{19}{20} \\ \frac{9}{20} \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} \frac{6821}{106314} & -\frac{1}{58} & 0 \\ -\frac{1}{58} & \frac{83}{450} & -\frac{1}{25} \\ 0 & \frac{1}{25} & -\frac{53}{700} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_A \\ U_B \\ U_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{130}{47} \\ \frac{19}{20} \\ \frac{9}{20} \end{pmatrix}$$

Vzhledem k tomu, že je potřeba zjistit pouze  $U_A$ , tak můžeme použít Cramerovo pravidlo pro spočítání této hodnoty.

Spočítáme determinant matice:

$$|M| = \begin{vmatrix} \frac{6821}{106314} & -\frac{1}{58} & 0 \\ -\frac{1}{58} & \frac{83}{450} & -\frac{1}{25} \\ 0 & \frac{1}{25} & -\frac{53}{700} \end{vmatrix} = \left(\frac{6821}{106314} \cdot \frac{83}{450} \cdot -\frac{53}{700}\right) - \left(-\frac{1}{25} \cdot \frac{1}{25} \cdot \frac{6821}{106314}\right) - \left(-\frac{53}{700} \cdot -\frac{1}{58} \cdot -\frac{1}{58}\right)$$
$$|M| = -0,0001529...$$

$$|M_1| = \begin{vmatrix} \frac{130}{47} & -\frac{1}{58} & 0 \\ \frac{19}{20} & \frac{83}{450} & -\frac{1}{25} \\ \frac{9}{20} & \frac{1}{25} & -\frac{53}{700} \end{vmatrix} = (\frac{130}{47} \cdot \frac{83}{450} \cdot -\frac{53}{700}) + (\frac{9}{20} \cdot -\frac{1}{58} \cdot -\frac{1}{25}) - (-\frac{1}{25} \cdot \frac{1}{25} \cdot \frac{130}{47}) - (-\frac{53}{700} \cdot -\frac{1}{58} \cdot \frac{19}{20}) \\ |M_1| = -0,0084919...$$

Nyní můžeme spočítat  $U_{R2}$  a  $I_{R2}$ :

$$U_A = \frac{|M_1|}{|M|}$$
  $U_A = \frac{-0,0001529...}{-0,0084919...}$   $U_A = 55,5378987V$ 

$$U_{R2} = U_A U_{R2} = 55,5378987V$$

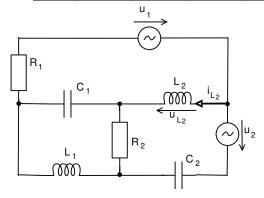
$$I_{R2} = \frac{U_A}{R_2}$$
  $I_{R2} = \frac{55,5378987}{39}$   $I_{R2} = 1,4240486A$ 

Pro napájecí napětí platí:  $u_1 = U_1 \cdot \sin(2\pi f t), \ u_2 = U_2 \cdot \sin(2\pi f t).$ 

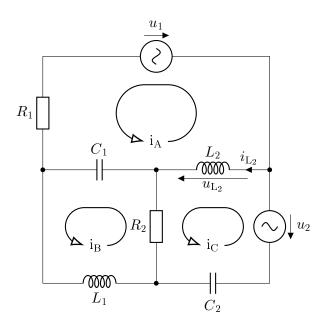
Ve vztahu pro napětí  $u_{L_2}=U_{L_2}\cdot\sin(2\pi ft+\varphi_{L_2})$  určete  $|U_{L_2}|$  a  $\varphi_{L_2}$ . Použijte metodu smyčkových proudů.

Pozn: Pomocné směry šipek napájecích zdrojů platí pro speciální časový okamžik  $(t = \frac{\pi}{2\omega})$ .

sk.	$U_1$ [V]	$U_2$ [V]	$R_1 [\Omega]$	$R_2 [\Omega]$	$L_1$ [mH]	$L_2 [mH]$	$C_1$ [ $\mu$ F]	$C_2$ [ $\mu$ F]	f [Hz]
D	45	50	13	15	180	90	210	75	85



Vyznačíme si smyčky například následovně



A sestavíme rovnice

$$i_A: R_1 \cdot I_A + Z_{C_1} \cdot (I_A - I_B) + Z_{L_2} \cdot (I_A - I_C) - U_1 = 0$$

$$\begin{aligned} i_A: \quad & R_1 \cdot I_A + Z_{C_1} \cdot (I_A - I_B) + Z_{L_2} \cdot (I_A - I_C) - U_1 = 0 \\ i_B: \quad & Z_{L_1} \cdot I_B + R_2 \cdot (I_B - I_C) + Z_{C_1} \cdot (I_B - I_A) = 0 \\ i_C: \quad & Z_{C_2} \cdot I_C + R_2 \cdot (I_C - I_B) + Z_{L_2} \cdot (I_C - I_A) - U_2 = 0 \end{aligned}$$

$$i_C: Z_{C_2} \cdot I_C + R_2 \cdot (I_C - I_B) + Z_{L_2} \cdot (I_C - I_A) - U_2 = 0$$

Zapíšeme do matice

$$\begin{pmatrix} R_1 + Z_{C_1} + Z_{L_2} & -Z_{C_1} & -Z_{L_2} \\ -Z_{C_1} & R_2 + Z_{C_1} + Z_{L_1} & -R_2 \\ -Z_{L_2} & -R_2 & R_2 + Z_{C_2} + Z_{L_2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_A \\ I_B \\ I_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_1 \\ 0 \\ U_2 \end{pmatrix}$$

Spočítáme impedanci a reaktanci jednotlivých cívek a kondenzátorů

Můžeme dosadit do matice

$$M = \begin{pmatrix} 13 - 8, 9...j + 48, 0...j & 8, 9...j & -48, 0...j \\ 8, 9...j & 15 - 8, 9...j + 96, 1...j & -15 \\ -48, 0...j & -15 & 15 - 24, 9...j + 48, 0...j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 + 39, 1501242895j & 8, 9162433104j & -48, 0663675999j \\ 8, 9162433104j & 15 + 87, 2164918894j & -15 \\ -48, 0663675999j & -15 & 15 + 23, 1008863306j \end{pmatrix}$$

Můžeme použít Cramerovo pravidlo - spočítáme determinant matice.

$$|M| = -67985, 2200145 + 145972, 438714j$$

Potřebujeme zjistit  $I_A$  a  $I_C$ , takže spočítáme ještě determinanty matice  $M_A$  a  $M_C$ .

$$|M_A| = \begin{vmatrix} 45 & 8,9162433104j & -48,0663675999j \\ 0 & 15 + 87,2164918894j & -15 \\ 50 & -15 & 15 + 23,1008863306j \end{vmatrix}$$

$$|M_A| = -300274,019935 + 103826,823516j$$

$$|M_C| = \begin{vmatrix} 13 + 39,1501242895j & 8,9162433104j & 45 \\ 8,9162433104j & 15 + 87,2164918894j & 0 \\ -48,0663675999j & -15 & 50 \end{vmatrix}$$

$$|M_C| = -345649, 953376 + 112479, 646847j$$

$$I_A$$
 a  $I_C$ je rovno podílu  $|M_A|$ s  $|M|$ a  $|M_C|$ s  $|M|\colon$ 

$$I_A = \frac{|M_A|}{|M|} = \frac{-300274,019935 + 103826,823516j}{-67985,2200145 + 145972,438714j} \quad I_C = \frac{|M_C|}{|M|} = \frac{-345649,953376 + 112479,646847j}{-67985,2200145 + 145972,438714j}$$

$$I_A = 1,3717751 + 1,418169j \qquad I_C = 1,5394564 + 1,6509258j$$

Nyní už je možné spočítat  $I_{L2}$ , tedy i  $|U_{L_2}|$  a  $\varphi_{L_2}$ .

$$\begin{split} I_{L_2} &= I_C - I_A \qquad I_{L_2} = 0,1676813 + 0,2327568j \\ U_{L_2} &= I_{L_2} \cdot Z_{L_2} \quad U_{L_2} = (0,1676813 + 0,2327568j) \cdot 48,0663675999j \\ U_{L_2} &= -11,1877739 + 8,059831j \end{split}$$

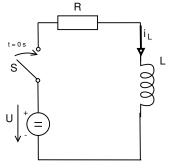
nacházíme se ve 2. kvadrantu, proto je nutné přičíst ještě 180° u  $\varphi_{L_2}$ 

$$|U_{L_2}| = \sqrt{-11, 1877739^2 + 8,059831^2}$$
  $|U_{L_2}| = 13,7886V$   
 $\varphi_{L_2} = \pi + \arctan \frac{8,059831}{-11,1877739}$   $\varphi_{L_2} = 144,2305^{\circ}$ 

V obvodu na obrázku níže v čase t = 0[s] sepne spínač S. Sestavte diferenciální rovnici popisující chování obvodu na obrázku, dále ji upravte dosazením hodnot parametrů. Vypočítejte analytické řešení  $i_L = f(t)$ . Proveď te kontrolu výpočtu dosazením do sestavené diferenciální rovnice.

Pozn: Pomocné směry šipek napájecích zdrojů platí pro speciální časový okamžik  $(t = \frac{\pi}{2\omega})$ .

sk.	U[V]	L [H]	$R\left[\Omega\right]$	$i_L(0)$ [A]
С	35	5	30	14



V obvodu platí dle 2. K.z.:

$$u_R + u_L - U = 0 \quad \rightarrow \quad u_L = U - u_R$$

a rovnice pro $i_L^\prime$ vypadá následovně:

$$i'_{L} = \frac{u_{L}}{L} \longrightarrow i'_{L} = \frac{U - u_{R}}{L}$$

$$i'_{L} = \frac{U - R \cdot i_{L}}{L} \longrightarrow L \cdot i'_{L} + R \cdot i_{L} = U$$

Očekávané řešení:  $i_L(t) = c(t) \cdot e^{\lambda \cdot t}$ 

Vytvoříme a vyřešíme charakteristickou rovnici:

$$5 \cdot \lambda + 30 = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda = \frac{-30}{5}$$
$$\lambda = -6$$

Dosadíme  $\lambda$  do očekáváného řešení rovnice:

$$\begin{split} i_L(t) &= c(t) \cdot e^{\lambda \cdot t} \quad \rightarrow \quad i_L(t) = c(t) \cdot e^{-6t} \\ i'_L(t) &= c'(t) \cdot e^{-6t} - 6 \cdot c(t) \cdot e^{-6t} \end{split}$$

Dosadíme 
$$i'_L$$
 do diferenciální rovnice: 
$$5 \cdot i'_L + 30 \cdot i_L = 35$$
 
$$5 \cdot (c'(t) \cdot e^{-6t} - 6 \cdot c(t) \cdot e^{-6t}) + 30 \cdot (c(t) \cdot e^{-6t}) = 35$$
 
$$(5 \cdot c'(t) \cdot e^{-6t}) - (30 \cdot c(t) \cdot e^{-6t}) + (30 \cdot c(t) \cdot e^{-6t}) = 35$$
 
$$5 \cdot c'(t) \cdot e^{-6t} = 35$$
 
$$c'(t) \cdot e^{-6t} = 7$$
 
$$c'(t) = 7 \cdot e^{6t}$$

je potřeba zbavit se derivace, tak integrujeme:

$$\int c'(t) = \int 7 \cdot e^{6t} \cdot dt$$

$$c(t) = 7 \cdot \int e^{6t} \cdot dt$$

$$c(t) = 7 \cdot \frac{1}{6} \cdot e^{6t} + K$$

$$c(t) = \frac{7}{6} \cdot e^{6t} + K$$

Dosadíme c(t) do očekáváného řešení:

$$i_L(t) = (\frac{7}{6} \cdot e^{6t} + K) \cdot e^{-6t}$$
  
 $i_L(t) = \frac{7}{6} + K \cdot e^{-6t}$ 

a vypočítáme K pomocí počáteční podmínky  $i_L(0) = 14$ :

$$i_L(0) = \frac{7}{6} + K \cdot e^{-6t}$$

$$14 = \frac{7}{6} + K \cdot e^{-6 \cdot 0}$$

$$\frac{84}{6} - \frac{7}{6} = K$$

$$K = \frac{77}{6}$$

Nyní už jen dosadíme K a máme výslednou rovnici:

$$i_L(t) = \frac{7}{6} + \frac{77}{6} \cdot e^{-6t}$$
 (nebo)  $i_L(t) = \frac{7}{6} \cdot (1 + 11 \cdot e^{-6t})$ 

Provedeme zkoušku:

$$5 \cdot i'_L + 30 \cdot i_L = 35$$

$$5 \cdot i'_L + 30 \cdot \frac{7}{6} \cdot (1 + 11 \cdot e^{-6t}) = 35$$

$$5 \cdot i'_L + 35 \cdot (1 + 11 \cdot e^{-6t}) = 35$$

$$5 \cdot i'_L + 35 + 385 \cdot e^{-6t} = 35$$

$$i'_L = -77 \cdot e^{-6t}$$

$$5 \cdot (-77) \cdot e^{-6t} + 30 \cdot \frac{7}{6} \cdot (1 + 11 \cdot e^{-6t}) = 35$$
$$-385 \cdot e^{-6t} + 35 \cdot (1 + 11 \cdot e^{-6t}) = 35$$
$$-385 \cdot e^{-6t} + 35 + 385 \cdot e^{-6t} = 35$$
$$0 = 0$$

## Shrnutí výsledků

Příklad	Skupina	Výsledky			
1	D	$U_{R6} = 50,458V$	$I_{R6} = 71,068mA$		
2	С	$U_{R3} = -50,827V$	$I_{R3} = -80,677mA$		
3	Н	$U_{R2} = 55,537V$	$I_{R2} = 1,424A$		
4	D	$ U_{L_2}  = 13,788V$	$\varphi_{L_2} = 144,23^{\circ}$		
5	С	$i_L(t) = \frac{7}{6}$	$+\frac{77}{6} \cdot e^{-6t}$		