

## ریاضی-فیزیک ۲

تمرین سری دوم - تبدیل فوریه و شرایط آن

### تمرین ۱

ثابت کنید که اگر  $\tilde{f}(k)$  تبدیل فوریه  $f(x)$  باشد،  $f(x)$  هم تبدیل فوریه  $\tilde{f}(k)$  است.

### تمرین ۲

با توجه به روابط زیر برای عملگر تبدیل فوریه رابطه بین تبدیل فوریه مشتق تابع و تبدیل فوریه خود تابع را بیابید.

$$\mathcal{F}[cf(x)] = c\mathcal{F}[f(x)], \quad \mathcal{F}[f(x+a)] = e^{-ika}\mathcal{F}[f(x)]$$

### تمرین ۳

رابطه زیر را برای عملگر تبدیل فوریه اثبات کنید

$$\mathcal{F}[f_1(x) * f_2(x)] = \mathcal{F}[f_1(x)]\mathcal{F}[f_2(x)]$$

### تمرین ۴

نشان دهید که تبدیل فوریه حافظ فاصله اقلیدسی است به عبارت دیگر داریم

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f_1(x) - f_2(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{f}_1(k) - \tilde{f}_2(k)|^2 dk$$

### تمرین ۵

معادله شرودینگر که به شکل زیر است را در نظر بگیرید.

$$i\hbar \frac{\partial \psi(\vec{r}, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(\vec{r}, t) + V(\vec{r})\psi(\vec{r}, t)$$

حال با استفاده از عملگر تبدیل فوریه آن را در فضای تکرانه و انرژی بازنویسی کنید. معادله به چه شکلی در می آید؟ فرض می کنیم که  $V(\vec{r})$  بست لورانی بر حسب  $\vec{r}$  دارد.

## تمرین ۶

برای هر تابع زیر خواسته های گفته شده را انجام دهید.

(آ) تبدیل فوریه تابع زیر را حساب کرده و بگویید که درباره مقدار تبدیل فوریه در نقطه صفر چه حکمی می توان داد؟

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & |x| \leq 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$$

(ب) فرض کنید  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  یک تبدیل خطی باشد و  $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$  تابع  $g$  را تعریف می کنیم  $g(x) = f(Ax)$  که  $x \in \mathbb{R}^n$  می باشد. اثبات کنید که اگر ماتریس  $A$  وارون پذیر باشد در آن صورت داریم  $g \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$  و تبدیل فوریه آن را محاسبه کنید.