考试课程　　数学实验　　　2001.01.05

班级__________　　　　姓名______________　　　　学号______________

说明：（1）第 1，2，3 题每题 10 分，直接将答案填在试题纸上；

（2）第 4 题 20 分，将简要解题过程和结果写在试题纸上。

1. 给定方程 $x-\sin^2 x-1=0$。用迭代公式 $x_{k+1}=\sin^2 x_k+1$ 求该方程在区间[0，2]内的解，则迭代是___1___阶收敛的。若取迭代初值为 $x_0=0$，则 $x_{50}=$______1.8971943063______（精确到 10 位小数）。该方程的 Newton 迭代公式是：

x(k+1)=x(k)-(x(k)-sin^2(x(k))-1)/(1-sin(2*x(k)))

迭代是____2___阶收敛的。

判敛法：(先大致估计 x*取值)

1)对于任意迭代公式 x(k+1)=f(x(k))，其不动点为 x*

收敛的充要条件(局部收敛性定理)：f(x)在 x*的一个邻域内连续、可微，且 $|f'(x^*)|<1$，则对于该邻域内任意初值 x0，序列{xk}均收敛于 x*

2)若已判断其收敛，则将 f(x)在 x*作泰勒展开，若 f'(x*)=f''(x*)=……=$f^{(p-1)}$(x*); $f^{(p)}$ (x*)≠0，则此迭代公式为 p 阶收敛

```
x0=0;
x(1)=x0;
for j=1:49
    x(j+1)=sin(x(j))^2+1;
end;
j
x(j+1)
```

NEWTON 法(2 阶收敛):

对于方程 f(x)=0，其牛顿法迭代公式为：

$$\varphi(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)}$$

x(k+1)=x(k)-(x(k)-sin^2(x(k))-1)/(1-sin(2*x(k)))

2. 设 $y''(x)-y'(x)\sin x+ye^x=0,\ y(0)=1,\ y'(0)=0,$ 用数值解法算出 $y(1)$=__0.2714___（精确到 4 位小数），你用的方法是___龙格-库塔方法_____，调用的 Matlab 命令是_____ode45(@ff, ts,y0)____，算法精度为___4 阶_______。

```
%待解常微分方程组函数 M 文件源程序：
function dy=ff (x,y)
dy=[y(2);y(2)*sin(x)-y(1)*exp(x)];
%应用欧拉方法和龙格-库塔方法求解该常微分方程：
ts=0:0.1:1;
y0=[1,0];
[x,y]=ode45(@ff, ts,y0); %龙格-库塔方法求数值解
[x, y(:,1)]
```

输出结果：

1.000000000000000　　0.271423374882902

3. 假定取 95%置信水平。从甲种汽油抽取 5 桶的含硫量为（%）：1.2, 1.5, 0.9, 0.8 1.3, 甲种汽油含硫量的置信区间为（精确到 4 位小数）______[0.7823，1.4977]_____；从乙种汽油抽取 4 桶的含硫量为（%）：1.2, 0.8, 1.5, 1.7, 要检验：甲的含硫量小于乙，作的零假设是 __

H0：$\mu_{甲}<\mu_{乙}$，用的 Matlab 命令是 ttest2(x,y) ，检验结果是 接受 H0 ，作这个检验的前提是 数据来自正态总体，相互独立。

1)

x=[1.2 1.5 0.9 0.8 1.3]

[mux sigmax mucix sigmacix]=normfit(x)

输出结果：

mucix = 0.782280071552989

1.497719928447011

2)

x=[1.2 1.5 0.9 0.8 1.3]

y=[1.2 0.8 1.5 1.7]

[h,sig,ci]=ttest2(x,y,[],-1)

输出结果：

h=0

4. 某厂用甲、乙两种原料添加填充剂制成一种新型材料，经实验知道，新型材料的强度 y 主要取决于单位体积内原料甲的含量 x_1(千克) 和原料乙的含量 x_2(千克)，并得到以下数据：

y	105	150	128	125	131	129	146	129	161	138
x_1	13.2	21.9	20.0	14.1	18.4	20.7	16.0	18.5	20.8	15.0
x_2	15.0	20.9	13.7	19.3	17.8	14.1	24.0	18.2	25.0	25.0

在投入正式生产时得知，每千克原料甲含有毒物质 5 克，每千克原料乙含有毒物质 1 克，而单位体积新型材料中规定有毒物质不得超过 100 克；每千克原料甲售价 300 元，每千克原料乙售价 400 元，而生产单位体积新型材料用于购买甲、乙两种原料的成本预算限额为 12,000 元；由于技术原因，单位体积新型材料中原料乙的含量不得超过 25 千克。(精确到 4 位小数)

（1）确定新型材料的强度 y 与单位体积内原料甲的含量 x_1 和原料乙的含量 x_2 之间的关系，并求甲、乙两种原料的含量 x_1，x_2，在满足上述条件下使新型材料的强度 y 最大。

（2）如果购买甲、乙两种原料的成本预算限额增加 100 元，问可使新型材料的强度提高百分之几。

（3）讨论实验数据的随机误差对（1）的结果会有什么影响。

解：

(1)假设函数关系为 y=b0+b1*x1+b2*x2

多元线性回归：

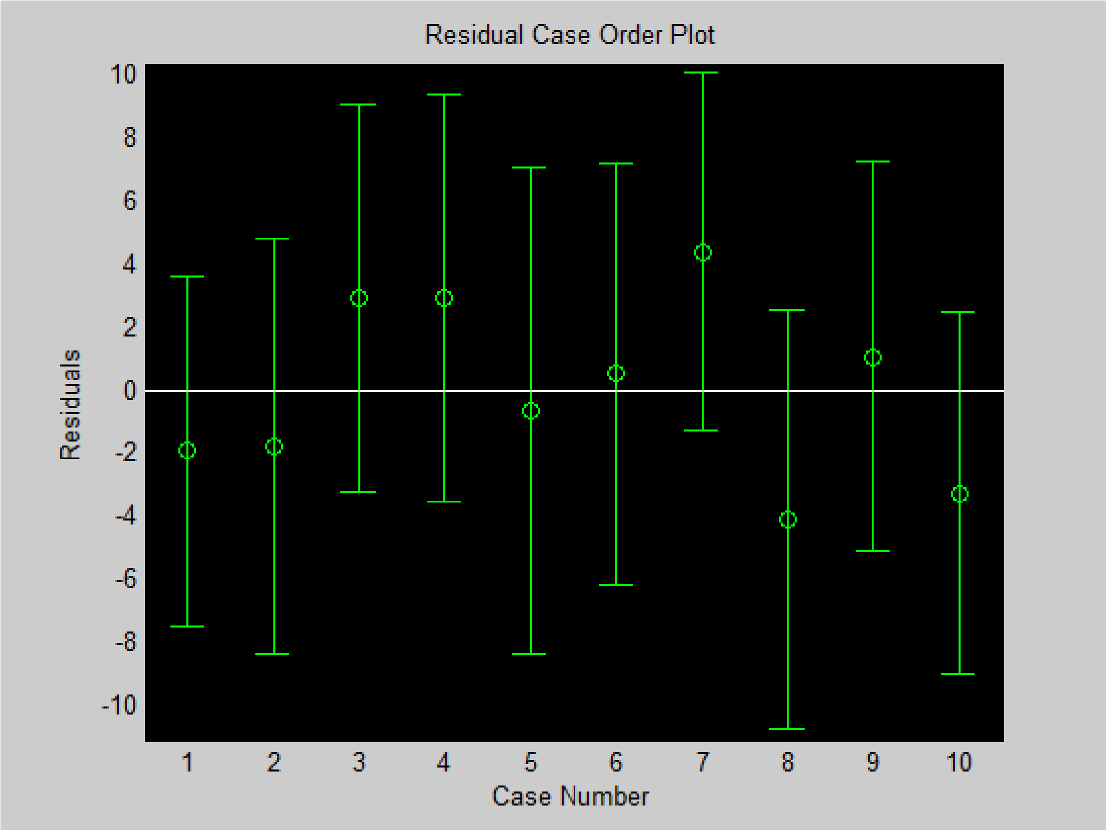
```
y=[105 150 128 125 131 129 146 129 161 138];
x1=[13.2 21.9 20.0 14.1 18.4 20.7 16.0 18.5 20.8 15.0];
x2=[15 20.9 13.7 19.3 17.8 14.1 24 18.2 25 25];
n=10;
m=2;
X=[ones(n,1),x1', x2']
[b,bint,r,rint,s]=regress(y',X)
rcoplot(r,rint)
```

输出结果：

b = 21.628865150622616

3.217510807205672

2.855253462833373



故强度 y 与原料甲的含量 x_1(千克) 和原料乙的含量 x_2(千克)函数关系为：

$$y = 21.6289 + 3.2175x_1 + 2.8553x_2$$

约束优化问题：

决策变量：

料甲的含量 x1；原料乙的含量 x2

目标函数：

y=3.2175*x1+2.8553*x2+21.6289

约束条件：

$$5*x1+x2 \le 100$$
$$300*x1+400*x2 \le 12000$$
$$x2 \le 25$$
$$x1,x2 \ge 0$$

基本模型：

max(z)= 3.2175*x1+2.8553*x2

s.t.
$$5*x1+x2 \le 100$$
$$300*x1+400*x2 \le 12000$$
$$x2 \le 25$$
$$x1,x2 \ge 0$$

```
c=[3.2175    2.8553];
A1=[    5    1 ;
```

```
        300 400    ;
        0    1];
b1=[100;12000;25];
v1=[0 0];
[x,z,ef,out,lag]=linprog(-c,A1,b1,[],[],v1);
x
y1=-(z-21.6289)
```

输出结果：

```
x =    16.470588235294102
        17.647058823529388
y1 =    1.250106647058822e+002
```

优化方案：

甲：16.4706；乙：17.6471；

(2)

```
c=[3.2175    2.8553];
A1=[    5    1 ;
        300 400    ;
        0    1];
b1=[100;12100;25];
v1=[0 0];
[x,z,ef,out,lag]=linprog(-c,A1,b1,[],[],v1);
x
y2=-(z-21.6289)
dy=y2-y1
a=dy/y1
```

输出结果：

```
x =16.411764602561966
    17.941176435242152
y 2=1.256611936842900e+002
dy =0.650528978407806
a = 0.005203787852327
```

应该用 lag 乘子!! 更加正规!!

（3）实验数据的随机误差导致回归系数有置信区间：c_1（2.3947，4.0403），c_2（2.2707，3.4399）。 用置信区间的左右端点重新计算，发现当取 c_1=2.3947，c_2=3.4399 时，最优解改变为 x_1 =6.6667 ，x_2=25.0000，$y_{\max} = c_0 + c_1x_1 + c_2x_2$=123.5898，即实验数据的随机误差会影响最优解。

2001年1月5日计算方法（数学实验）考试

答案

1.　　1　　1.8971943063　　$x_{k+1}=x_k-\dfrac{x_k-\sin^2 x_k-1}{1-\sin 2x_k}$　　2

2.　　0.2713；　　龙格-库塔;　　ode23(‘f’,ts,x0);　　2~3 阶;

或：　0.2714；　　龙格-库塔;　　ode45(‘f’,ts,x0);　　4~5 阶

3.　[0.7823, 1.4977]；　　H_0: $\mu_1 < \mu_2$,　　h=ttest2(x,y,0.05,1)，　　接受 H_0，

数据来自正态总体，相互独立。

4.（1）作 x1~y, x2~y 散点图，近似线性关系。用数据拟合：$y=c_0+c_1x_1+c_2x_2$,并作假设：$H_0: c_0=c_1=c_2=0$。用回归分析，计算得：

c_0=21.6289　c_1=3.2175　c_2=2.8553,　　置信水平 0.95 下的置信区间为

c_0（2.2220　41.0357）　c_1（2.3947　4.0403）　c_2（2.2707　3.4399）

置信区间均不含零点，且 R^2= 0.9666　f=101.2543　p=0.0000，　拒绝 H_0.

残差置信区间均含零点，无异常数据，得

$$y=21.6289+3.2175\,x_1+2.8553\,x_2$$

以 $y=c_1x_1+c_2x_2$（去掉常数 c_0）为目标函数建立优化问题的数学模型：

$$\max_{x_1,x_2}\quad z=3.2175\mathrm{x}_1+2.8553\mathrm{x}_2$$

$$\begin{aligned} s.t.\quad & 5x_1+x_2\le 100\\ & 3x_1+4x_2\le 120\\ & x_2\le 25,\ \ x_1,x_2\ge 0 \end{aligned}$$

计算结果：x_1 =16.4706　x_2=17.6471,　lag= 0.2532　0.6505　0

$y_{\max}=c_0+c_1x_1+c_2x_2$=125.0100

甲乙两种原料的含量分别为 16.4706（千克）和 17.6471（千克）使新型材料的强度最大。

（2）由 1 的计算结果：lag（2）= 0.6505，可知购买甲乙两种原料的成本预算限额增加 100 元，新型材料的强度提高 0.6505，与上面结果 y=125.0100 相比，增加 0.52%.

（3）实验数据的随机误差导致回归系数有置信区间：c_1（2.3947，4.0403），c_2（2.2707，3.4399）。 用置信区间的左右端点重新计算，发现当取 c_1=2.3947，c_2=3.4399 时，最优解改变为 x_1 =6.6667 ，x_2=25.0000，$y_{\max}=c_0+c_1x_1+c_2x_2$=123.5898，即实验数据的随机误差会影响最优解。