计算方法（数学实验）试题（第 1 组） 2000.6.22

班级__________ 姓名______________ 学号______________

说明：（1）1，2 题必做，答案直接填在试题纸上；

（2）3，4 题任选 1 题，将简要解题过程和结果写在试题纸上；

（3）解题程序以网络作业形式提交，文件名用英文字母。

1．A 工人 5 天的生产能力数据和 B 工人 4 天的生产能力数据如下：A 87 85 80 86 80；

B 87 90 87 84。要检验：A 的生产能力不低于 85，你作的零假设是__H_0: $\mu_0 \geqslant 85$___，用的 Matlab 命令是__ttest(x,85,0.05,-1)__，检验结果是_______接受原假设__________。

x=[87 85 80 86 80];

[h,sig,ci] =ttest(x,85,0.05,-1)

h =0

要检验：A 工人和 B 工人的生产能力相同，你作的零假设是__H_0：$\mu_1=\mu_2$___，用的 Matlab 命令是_ttest2(x,y)_，检验结果是_接受原假设。作以上检验的前提是__数据来自正态总体，相互独立___。

x=[87 85 80 86 80];

y=[87 90 87 84];

[h,sig,ci]=ttest2(x,y)

h = 0

2．用电压 V=14 伏的电池给电容器充电，电容器上 t 时刻的电压满足：

$$v(t)=V-(V-V_0)\exp(-\frac{t}{\tau}),$$

其中 V_0 是电容器的初始电压，τ 是充电常数。试用下列数据确定 V_0 和 τ。

t（秒）	0.3	0.5	1.0	2.0	4.0	7.0
$v(t)$	5.6873	6.1434	7.1633	8.8626	11.0328	12.6962

你用的方法是__最小二乘法__，结果是 V_0 =__4.9711__，τ =___3.5869___。

```
%最小二乘拟合基函数函数 M 文件：
function y=voltage(x,t,v)
y=14-(14-x(1))*exp(-t/x(2)) –v;          %x(1),x(2),分别代表V0, τ
%最小二乘拟合源程序：
x0=[3,1];                                %初值
t=[0.3 0.5 1.0 2.0 4.0 7.0];
v=[5.6873 6.1434 7.1634 8.8626 11.0328 12.6962];
opt1=optimset('Largescale','off','MaxfunEvals',1000);      %缺省为LM法
[x,norm,res,ef,out]=lsqnonlin(@voltage,x0,[],[],opt1,t,v)
```

X=   4.971139136686568   3.586871320681099

3. 小型火箭初始质量为 900 千克，其中包括 600 千克燃料。火箭竖直向上发射时燃料以 15 千克/秒的速率燃烧掉，由此产生 30000 牛顿的恒定推力。当燃料用尽时引擎关闭。设火箭上升的整个过程中，空气阻力与速度平方成正比，比例系数为 0.4（千克/米）。重力加速度取 9.8 米/秒 ^{2}.

A. 建立火箭升空过程的数学模型（微分方程）;

B. 求引擎关闭瞬间火箭的高度、速度、加速度，及火箭到达最高点的时间和高度。

解：

一定要分段求解常微分方程！！！

根据题意可知，在此模型中火箭始终沿竖直方向运动，设重力加速度不随高度变化而变化，其值恒为 $g=9.8m/s^2$。初始状态时，h=0，v=0，a=（30000−900×9.8）/900=23.523m/s^2，故可应用牛顿第二定律对火箭运行情况进行如下分析（以下各物理量均为 SI 制）。

火箭质量 m 随时间 t 的变化关系函数为：

$$m=\begin{cases}900-15t(t\le 40)\\300(t>40)\end{cases}$$

火箭在时刻 t 所受合外力 F 为：

$$F=\begin{cases}F_0-f-mg=21180+147t-0.4v^2(t\le 40)\\-f-mg=-2940-0.4v^2(t>40,v\ge 0)\\f-mg=-2940+0.4v^2(t>40,v<0)\end{cases}$$

火箭在时刻 t 的加速度 a 为：

$$a=\frac{dv}{dt}=\frac{d^2h}{dt^2}=\begin{cases}\dfrac{21180+147t-0.4v^2}{900-15t}(t\le 40)\\\dfrac{-2940-0.4v^2}{300}(t>40,v\ge 0)\\\dfrac{-2940+0.4v^2}{300}(t>40,v<0)\end{cases}$$

分别用 MATLAB 计算并作图，为便于编程，令 x（1）=h，x（2）=x(1)’=v，x（2）’=a,程序如下：

分段编程：

%火箭运行情况模型常微分方程组函数 M 文件源(加速阶段)程序：

```
function dx=rocket1(t,x)
dx=[x(2);(21180+147*t-0.4*(x(2)^2))/(900-15*t)];
```

%火箭加速度函数 M 文件(加速阶段)源程序：

```
function y=a1(ts,x)
for i=1:length(ts)
        y(i)=(21180+147*ts(i)-0.4*(x(i)^2))./ (900-15*ts(i));
end
```

%应用龙格–库塔方法对火箭运行情况模型的常微分方程组求数值解(加速阶段)：

```
ts=0: 1:40;
x0=[0,0];
[t,x]=ode45(@rocket1,ts,x0);                    %火箭运行高度与速度情况
y= a1(ts', x(:,2)');                             %火箭运行加速度情况
[ts', x(:,1),x(:,2),y']
a=(-2940-0.4*x(2)^2)/300
```

输出结果：

0.040000000000000   8.322961712149750   0.258982232154038   0.000770937904683

引擎关闭瞬间火箭的高度 8323 米，速度 259 米/秒，加速度 0.7709 米/秒 ^{2}， –96.9943 米/秒 ^{2}；

标准答案：引擎关闭瞬间火箭的高度 8323 米，速度 259 米/秒，加速度 0.7709 米/秒 2（关闭前）

引擎关闭瞬间加速度需列式求解：

```
v=258.982232154038;
a=(-2940-0.4*v^2)/300
```

输出结果：

a =-99.229062095317403

加速度－99.2291 米/秒 2（关闭后）

标准答案：加速度－99.2291 米/秒 2（关闭后）；

%火箭运行情况模型常微分方程组函数 M 文件源(减速阶段)程序：

```
function dx=rocket2(t,x)
dx=[x(2);(-2940-0.4*x(2)^2)/300];
```

%火箭加速度函数 M 文件(减速阶段)源程序：

```
function y=a2(ts,x)
for i=1:length(ts)
        y(i)=( -2940-0.4*x(i)^2)/300;
end
```

%应用龙格–库塔方法对火箭运行情况模型的常微分方程组求数值解(减速阶段)：

```
ts=0: 1:20;
x0=[8323,259];
[t,x]=ode45(@rocket2,ts,x0);                    %火箭运行高度与速度情况
y= a2(ts', x(:,2)');                             %火箭运行加速度情况
[ts', x(:,1),x(:,2),y']
```

输出结果：

0.011000000000000   9.191957319558366   -0.000478059137027   -0.009800304720718

最高点时间：11+40=51s；最高点高度：9192m

标准答案：到达最高点的时间 51 秒，高度 9192 米。

结果：

！若将分段函数和并求解则结果误差较大，下面是和并求解的结果：
引擎关闭瞬间火箭的高度 8322 米，速度 260 米/秒，加速度 0.1898 米/秒 ^{2}， –96.9943 米/秒 ^{2}；到达最高点的时间 51 秒，高度 9211 米。

4. 种群的数量（为方便起见以下指雌性）因繁殖而增加，因自然死亡和人工捕获而减少。记 $x_k(t)$为第 t 年初 k 岁（指满 k-1 岁，未满 k 岁，下同）的种群数量，b_k 为 k 岁种群的繁殖率（1 年内每个个体繁殖的数量），d_k 为 k 岁种群的死亡率（1 年内死亡数量占总量的比例），h_k 为 k 岁种群的捕获量（1 年内的捕获量）。今设某种群最高年龄为 5 岁（不妨认为在年初将 5 岁个体全部捕获），$b_1=b_2=b_5=0$，$b_3=2$，$b_4=4$，$d_1=d_2=0.3$，$d_3=d_4=0.2$，$h_1=400$，$h_2=200$，$h_3=150$，$h_4=100$。

A. 建立 $x_k(t+1)$与 $x_k(t)$的关系（k=1,2,…5, t=0,1,…），如 $x_2(t+1)=x_1(t)-d_1x_1(t)-h_1$。为简单起见，繁殖量都按年初的种群数量 $x_k(t)$计算，不考虑死亡率。
B. 用向量 $x(t)=(x_1(t),\cdots x_5(t))^T$ 表示 t 年初的种群数量，用 b_k 和 d_k 定义适当的矩阵 L，用 h_k 定义适当的向量 h，将上述关系表成 $x(t+1)=Lx(t)-h$ 的形式。
C. 设 t=0 种群各年龄的数量均为 1000，求 t=1 种群各年龄的数量。又问设定的捕获量能持续几年。
D. 种群各年龄的数量等于多少，种群数量 $x(t)$才能不随时间 t 改变。
E. 记 D 的结果为向量 x^*，给 x^* 以小的扰动作为 $x(0)$，观察随着 t 的增加 $x(t)$是否趋于 x^*，分析这个现象的原因。

解：

A：

$$\begin{cases} b_1x_1(t) + b_2x_2(t) + b_3x_3(t) + b_4x_4(t) + b_5x_5(t) = x_1(t+1) \\ (1-d_1)x_1(t) = x_2(t+1) + h_1 \\ (1-d_2)x_2(t) = x_3(t+1) + h_2 \\ (1-d_3)x_3(t) = x_4(t+1) + h_3 \\ (1-d_4)x_4(t) = x_5(t+1) + h_4 \end{cases}$$

B：

$$\boldsymbol{L}=\begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ 1-d_1 & 0 & & & \\ & 1-d_2 & 0 & & \\ & & 1-d_3 & 0 & \\ & & & 1-d_4 & 0 \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{h}=\begin{bmatrix} 0 \\ h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ h_4 \end{bmatrix}$$

C：

```
x0= [1000,1000,1000,1000,1000]';
x=zeros(5,10);
h=[0,400,200,150,100]';
L=[0,0,2,4,0;
    0.7,0,0,0,0;
  0,0.7,0,0,0;
  0,0,0.8,0,0;
  0,0,0,0.8,0];
for i=1:10
x(:,1)=x0;
```

```
x(:,i+1)=L*x(:,i)-h;
end
x
```

输出结果：

$x(1)= (6000, 300, 500, 650，700)^T$

$x(2)= (3600, 3800, 10, 250, 420)^T$

$x(3)=(1020, 2120, 2460, -142, 100)^T$

第三年时年龄为四岁的中区出现负值，故只可以持续两年

D：

稳定时要求 $x_k(t+1)=x_k(t)$，据此使得种群数量 $x(t)$才能不随时间 t 改变的种群数量初始值 x*为如下方程的解：

$$
\begin{cases}
b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_4x_4 + b_5x_5 = x_1 \\
(1-d_1)x_1 = x_2 + h_1 \\
(1-d_2)x_2 = x_3 + h_2 \\
(1-d_3)x_3 = x_4 + h_3 \\
(1-d_4)x_4 = x_5 + h_4
\end{cases}
$$

整理为 $Lx = h$ 形式：

```
h=[0,400,200,150,100]';
L=[-1,0,2,4,0;
   0.7,-1,0,0,0;
  0,0.7,-1,0,0;
  0,0,0.8,-1,0;
  0,0,0,0.8,-1];
x=L\h
x =    1.0e+003 *
   2.000000000000000
   1.000000000000000
   0.500000000000000
   0.250000000000000
   0.100000000000000
```

最终结果为：$x^*=(2000, 1000, 500, 250, 100)^T$

E：加以微小扰动 dx=10

```
x0= [2010, 1010, 510, 260, 110]';
x=zeros(5,10);
h=[0,400,200,150,100]';
L=[0,0,2,4,0;
   0.7,0,0,0,0;
  0,0.7,0,0,0;
  0,0,0.8,0,0;
  0,0,0,0.8,0];
for i=1:10
```

```
x(:,1)=x0;
x(:,i+1)=L*x(:,i)-h;
end
x
```

输出结果：

```
x =

   1.0e+003 *
2.010000000000000    2.060000000000000    2.046000000000000    2.032200000000000
1.010000000000000    1.007000000000000    1.042000000000000    1.032200000000000
0.510000000000000    0.507000000000000    0.504900000000000    0.529400000000000
0.260000000000000    0.258000000000000    0.255600000000000    0.253920000000000
0.110000000000000    0.108000000000000    0.106400000000000    0.104480000000000
```

可以发现 x(t)逐渐偏离 x*。。。。。

原因：

求迭代方程 $x(t+1)=Lx(t)-h$ 中矩阵 L 的特征根：

```
L=[-1,0,2,4,0;
     0.7,-1,0,0,0;
   0,0.7,-1,0,0;
   0,0,0.8,-1,0;
   0,0,0,0.8,-1];
eig(L)
```

输出结果：

```
ans =

  -1.000000000000000
   0.298189908789247
  -1.195293934027596 + 1.136951613957869i
  -1.195293934027596 - 1.136951613957869i
  -1.907602040734057
```

由于其谱半径 $\rho(L)=\max(\lambda)>1$,所以此迭代方程不收敛。

计算方法（数学实验）试题（第 1 组）　　　　2000.6.22

答案

1.A 工人 5 天的生产能力数据和 B 工人 4 天的生产能力数据如下：A　87　85　80　86　80 (84　85　80　82　80)；B　87　90　87　84 (85　90　82　84)。要检验：A 的生产能力不低于 85，你作的零假设是 H_0: $\mu_0 \geq 85$，用的 Matlab 命令是 ttest(x,85,0.05，-1)，检验结果是接受（拒绝）H_0 。要检验：A 工人和 B 工人的生产能力相同，你作的零假设是 H_0： $\mu_1=\mu_2$，用的 Matlab 命令是 ttest2(x,y)，检验结果是接受 H_0。作以上检验的前提是数据来自正态

总体，相互独立。

2．用电压 V=14 伏的电池给电容器充电，电容器上 t 时刻的电压满足：

$$v(t) = V - (V - V_0)\exp(-\frac{t}{\tau}),$$

其中 V_0 是电容器的初始电压，τ 是充电常数。试用下列数据确定 V_0 和 τ 。

t（秒）	0.3	0.5	1.0	2.0	4.0	7.0
$v(t)$	5.6873	6.1434	7.1633	8.8626	11.0328	12.6962

你用的方法是线性最小二乘法，结果是 V_0 =5.0001， τ = 3.6165。

t（秒）	0.2	1.0	2.5	4.5	7.0	8.0	9.5
$v(t)$	2.5799	4.0570	5.9099	7.1921	8.2035	9.3203	9.6971

V=10 伏 结果是 V_0 =0.8550， τ = 3.1944。

$$\begin{aligned} &\min\ (c_{11}, c_{12}, \ldots, c_{mn})(x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{mn})^T \\ &s.t.\quad \sum_j x_{ij} \le a_m\ ,\quad i = 1, \ldots, m \\ &\qquad\ \sum_i x_{ij} = b_n,\quad j = 1, \ldots, n \\ &\qquad\ x_{ij} \ge 0,\quad i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(a_1, \cdots, a_m) &= (25, 25, 50) \\ (b_1, \cdots, b_n) &= (15, 20, 30, 35)\end{aligned} \quad (c_{ij}) = \begin{pmatrix} 10, 5, 6, 7 \\ 8, 2, 7, 6 \\ 9, 3, 4, 8 \end{pmatrix}$$，答案：$$(x_{ij}) = \begin{pmatrix} 0, & 0, & 0, 25 \\ 0, 15, & 0, 10 \\ 15, 5, 30, 0 \end{pmatrix}$$，535 元

$$\begin{aligned}(a_1, \cdots, a_m) &= (30, 30, 40) \\ (b_1, \cdots, b_n) &= (15, 20, 30, 35)\end{aligned} \quad (c_{ij}) = \begin{pmatrix} 10, 5, 6, 7 \\ 8, 2, 7, 6 \\ 9, 3, 4, 8 \end{pmatrix}$$，答案：$$(x_{ij}) = \begin{pmatrix} 0, & 0, & 0, 30 \\ 6.25, 18.75, & 0, 5 \\ 8.75, 1.25, & 30, 0 \end{pmatrix}$$，

530 元

3. 小型火箭初始质量为 900（1200）千克，其中包括 600（900）千克燃料。

模型分两段：

1） $m\ddot{x} = -k\dot{x}^2 + T - mg,\quad 0 \le t \le t_1,\quad x(0) = \dot{x}(0) = 0$

m=900-15t （m=1200-15t），t_1 =600/15=40 秒 (t_1=900/15=60 秒)为引擎关闭时刻。

2）. $m\ddot{x} = -k\dot{x}^2 - mg,\quad t_1 \le t,\quad x(t_1), \dot{x}(t_1)$由1的终值给出，$m$=300

引擎关闭瞬间火箭的高度 8323 米（13687.9 米），速度 259 米/秒（271.34 米/秒），加速度 0.7709 米/秒 ^{2}（0.8254 米/秒 ^{2} 关闭前）， –99.2291 米/秒 ^{2}（–132.5079 米/秒 ^{2} 关闭后）；

到达最高点的时间 51 秒（69.89 秒），高度 9192 米（14469.8 米）。

4．A.

$$x_1(t+1)=b_1x_1(t)+\cdots+b_5x_5(t)$$
$$x_2(t+1)=x_1(t)-d_1x_1(t)-h_1$$
$$\cdots\cdots$$
$$x_5(t+1)=x_4(t)-d_4x_4(t)-h_4$$

B. 记 $s_k=1-d_k$， $L=\begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_5 \\ s_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & & & \\ 0 & \cdots & s_4 & 0 \end{bmatrix}$， $h=\begin{bmatrix} 0 \\ h_1 \\ \cdots \\ h_4 \end{bmatrix}$，则 $x(t+1)=Lx(t)-h$

$b_1=b_2=b_5=0$，$b_3=2$，$b_4=4$，$d_1=d_2=0.3$，$d_3=d_4=0.2$，$h_1=400$，$h_2=200$，$h_3=150$，$h_4=100$。

C. $x(1)=(6000, 300, 500, 650, 700)^T$　　$x(2)=(3600, 3800, 10, 250, 420)^T$

$x(3)=(1020, 2120, 2460, -142, 100)^T$. 有负值，所以只能持续 2 年.

D. $x^*=(2000, 1000, 500, 250, 100)^T$

E. $x(t)$不趋于 x^*，因为 L 的特征根是 0　1.2982　-0.1953 + 1.1370i　-0.1953 - 1.1370i　-0.9076　谱半径大于 1。

$b_1=b_2=b_5=0$，$b_3=1$，$b_4=4$，$d_1=d_2=d_3=d_4=0.2$，$h_1=200$，$h_2=300$，$h_3=150$，$h_4=50$。

C. $x(1)=(5500, 680, 580, 730, 830)^T$　　$x(2)=(3500, 4200, 244, 314, 534)^T$

$x(3)=(1500\quad 2600\quad 3060\quad 45.2\quad 201.2)^T$

$x(4)=(3240.8, 1000, 1780, 2298, -13.8)^T$. 有负值，所以只能持续 3 年.

D. $x^*=(1500, 1000, 500, 250, 150)^T$

E. $x(t)$不趋于 x^*，因为 L 的特征根是 0　1.3029　-0.1118 + 1.2016i　-0.1118 - 1.2016i　-1.0793　谱半径大于 1。