大学数学实验

实验3 插值与数值积分

清 华 大 学 数 学 科 学 系

英国著名数值分析学家 Higham (1998):

Can you count on your computer?

计算机会算吗（靠得住吗）？

例：把4开方n次，再平方n次，结果是4 ???

$$\left(\left(\cdots\sqrt{\sqrt{4}}\right)^2\cdots\right)^2=?$$

n=55左右：结果变成1

浮点运算：舍入误差

精确计算：	近似计算：	计算功效＝
解析结果	数值结果	计算工具＊
(Analytical)	(Numerical)	计算方法(算法)

实验3的基本内容

一. 示例

二. 插值的基本原理；

三种插值方法：拉格朗日插 值，分段线性插值，三次样条插值。

三. 插值的 MATLAB 实现及插值的应用。

四. 数值积分

梯形公式、辛普森公式和高斯公式。

五. 数值积分的 MATLAB 实现及数值积分的应用。

一. 示例

什么是插值(Interpolation)？从查函数表说起

标准正态分布函数表 $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-t^2/2}dt$

x	0	1	2	…
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	…
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	…
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	…
⋮	⋮	⋮	⋮	

求 Φ (1.114)

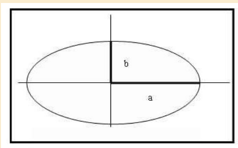
Φ(1.114)=0.8665+ (0.8686–0.8665)×0.4=0.8673 **插值**

插值在图像处理/数控加工/外观设计等领域有重要应用

数值积分的应用

已知参数a和b，

如何计算椭圆弧长？



$x=a\cos t, y=b\sin t$

$(0\le t\le 2\pi)$

$$L=4\int_0^{\pi/2}(a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t)^{1/2}dt$$

椭圆积分：无法用解析方法计算，数值积分可以处理。

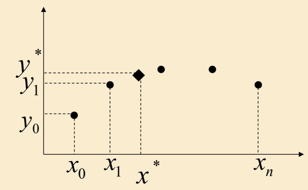
二. 插值的基本原理

1. 拉格朗日插值
2. 分段线性插值
3. 三次样条插值

插值问题的提法

已知 n+1个节点(x_j, y_j)（$j=0,1,\cdots n$,其中 x_j 互不相同，不妨设 $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$),

求任一插值点 $x^*(\neq x_j)$处的插值 y^*.



节点可视为由 $y=g(x)$产生,

g表达式复杂,甚至无表达式

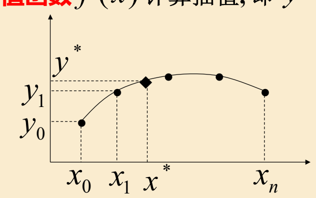
(被插函数)

求解插值问题的基本思路

构造一个(相对简单的)函数 $y=f(x)$, 通过全部节点, 即

$$f(x_j)=y_j \quad (j=0,1,\cdots n)$$

再用**插值函数** $f(x)$ 计算插值, 即 $y^* = f(x^*)$.



1. 拉格朗日(Lagrange)多项式插值

1.1. 插值多项式

$$L_n(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0 \quad (1)$$

$$L_n(x_j)=y_j \ (j=0,1,\cdots n)$$

$$X=\begin{bmatrix} x_0^n & x_0^{n-1} & \cdots & 1 \\ \cdots & & & \\ x_n^n & x_n^{n-1} & \cdots & 1 \end{bmatrix}, \quad A=\begin{bmatrix} a_n \\ \vdots \\ a_0 \end{bmatrix}, \quad Y=\begin{bmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

求 $a_i \Rightarrow XA=Y \quad (2) \quad \because \det(X)\neq 0$ (在什么条件下)

$\therefore$ (2)有唯一解

$$L_n(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0 \quad (1)$$

1.2. 拉格朗日插值多项式

$$XA=Y \quad (2)$$

$$L_n(x)=\sum_{i=0}^{n} y_i l_i(x) \quad (3)$$

若 $l_i(x_j)=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}$ 则 $L_n(x_j)=y_j$

$l_i(x)$ 基函数

$$l_i(x)=\frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}, \quad i=0,1\cdots n$$

又（2）有唯一解，故（3）与（1）相同。

1.3. 误差估计

$$R_n(x)=g(x)-L_n(x)=\frac{g^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{j=0}^{n}(x-x_j), \quad \xi\in(a,b)$$

$$\left|g^{(n+1)}(\xi)\right|\leq M_{n+1} \Rightarrow \left|R_n(x)\right|\leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\prod_{j=0}^{n}\left|x-x_j\right|$$

如何使误差 $|R_n(x)|$减小（粗略地看）

x 接近 x_j　　g 平缓　　n 增加

1.4. 拉格朗日插值多项式的振荡

三种插值方法

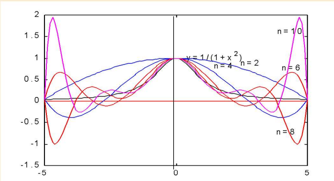
$$n\uparrow \Rightarrow L_n(x)? \Rightarrow |R_n(x)|\downarrow ?$$

$$g(x)=\frac{1}{1+x^2},\quad -5\le x\le 5$$

取n=2,4,6,8,10,计算$L_n(x)$, 画出图形

Matlab.lnk

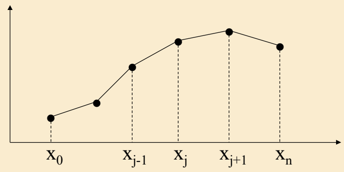
Runge.m



Runge现象 $\lim_{n\to\infty} L_n(x)=g(x),\ -3.63\le x\le 3.63$

三种插值方法

2. 分段线性插值



$$I_n(x)=\sum_{j=0}^{n} y_j l_j(x)$$

$$l_j(x)=\begin{cases}\dfrac{x-x_{j-1}}{x_j-x_{j-1}}, & x_{j-1}\le x\le x_j\\ \dfrac{x-x_{j+1}}{x_j-x_{j+1}}, & x_j\le x\le x_{j+1}\\ 0, & 其它\end{cases}$$

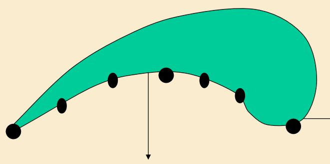
计算量与n无关；

n越大，误差越小.

$$\lim_{n\to\infty} I_n(x)=g(x),\ x_0\le x\le x_n$$

3. 三次样条插值

样条函数的由来



机翼下轮廓线

细木条：样条

飞机、船体、汽车外形等的放样（设计）

三次样条插值　　**数学样条（spline）**　　三种插值方法

$$S(x)=\{s_i(x), x\in[x_{i-1},x_i], i=1,\cdots n\}$$

1) $s_i(x)=a_ix^3+b_ix^2+c_ix+d_i\quad (i=1,\cdots n)$

2) $S(x_i)=y_i\quad (i=0,1,\cdots n)$

3) $S(x)\in C^2[x_0,x_n]$

$4n$个待定系数 a_i,b_i,c_i,d_i

3）$\Rightarrow$ $s_i(x_i)=s_{i+1}(x_i),\ s_i'(x_i)=s_{i+1}'(x_i)$

$s_i''(x_i)=s_{i+1}''(x_i)\qquad (i=1,n-1)$　　3'）

2），3'）共 4n-2个方程

三次样条插值确定$4n$个系数需增加 2个条件　　三次样条插值

4) $S''(x_0)=S''(x_n)=0$ (自然边界条件)

2) 3) 4) $\Rightarrow$ $a_i,b_i,c_i,d_i \Rightarrow S(x)$

$$\lim_{n\to\infty} S(x)=g(x).$$

思考　1）自然边界条件的几何意义是什么？

2）样条插值为什么普遍用3次多项式，而不是2或4次？

三种插值方法小结

- **拉格朗日插值（高次多项式插值）：**

曲线光滑；误差估计有表达式；收敛性不能保证。

用于理论分析，实际意义不大。

- **分段线性和三次样条插值（低次多项式插值）：**

曲线不光滑（三次样条插值已大有改进）；误差估计较难（对三次样条插值）；收敛性有保证。

简单实用，应用广泛。

- **其他：Hermite插值、分段三次插值、二维插值等**

根据需要，各取所需。

多选题 2分

设置

关于上述三种插值方法，以下哪些说法是正确的?

A 插值节点都可以是非等距节点

B 拉格朗日插值的余项（误差）有解析式，有利于计算过程中控制计算精度

C 拉格朗日插值收敛性差，会出现Runge现象

D 分段线性插值收敛性好，且插值函数可微

E 三次样条插值收敛性好，且插值函数可微

提交

清华大学 大学数学实验

三. 插值的 MATLAB 实现及插值的应用

清华大学 大学数学实验

用MATLAB作插值计算

1. **拉格朗日插值:自编程序,如名为** `lagr.m` **的M文件,**
   第一行为 `function vq = lagr(x,v,xq)`
   输入:节点(x,v)，插值点xq（均为数组，长度自定义）
   输出:插值vq ---- 与xq同长度数组
2. **分段线性插值:已有程序** `vq=interp1(x,v,xq)`
   `vq=interp1(x,v,xq,'linear')`
3. **三次样条插值:已有程序** `vq=interp1(x,v,xq,'spline')`
   或 `vq=spline(x,v,xq)`

x 为向量；如果 v 为向量，则 length(x) 必须等于 length(v)；
如果 v 为矩阵，则 length(x) 必须等于 size(v,1)

清华大学 大学数学实验

一般用法：interp1 作一维插值计算

`vq = interp1(x,v,xq,method,extrap)`

• **当** `x = 1:n` **(n 与 v 维度相同)，可省略** `x`

`vq = interp1(v,xq,method,extrap)`

外插策略

'linear' (默认) | 'spline' |
'nearest' | 'next' | 'previous' |
'pchip' | 'cubic' | 'v5cubic' | 'makima'

'extrap' |
实数标量值

对于'spline' | 'pchip' | 'makima'：默认采用 'extrap'
其他方法：默认外插时返回 NaN (“非数”)

清华大学 大学数学实验

一般用法：spline 作三次样条插值

• `vq = spline(x,v,xq)`

• `pp = spline(x,v)`

返回分段多项式结构体，用于命令 ppval 和 unmkpp

【边界条件】若 |v|=|x|+2, 则为一阶边界条件：
v(1), v(end)分别给出min(x), max(x)的斜率；
否则为非扭结(Not-a-Knot)条件，即：
x(2), x(end-1)处插值充分光滑(三阶导相等)

【更多边界条件】可用样条插值命令csape等 (见下页)

清华大学 大学数学实验

一般用法：csape 作三次样条插值

• **csape命令：pp = csape(x,[e1,y,e2],conds)**

这里conds(边界条件类型)缺省与spline不同，可选：

‘clamped’ or ‘complete’ | ‘not-a-knot’ | ‘periodic’ | ‘second’ | ‘variational’ | 1-by-2 matrix (取值{0,1,2})

其中 ‘variational’ 对应自然边界条件（特殊的 ’second’）;
conds 缺省值：1阶条件；conds=[0,0]为周期条件；
e1 和 e2 的缺省值：1阶条件为Lagrange条件；否则为 0

甚至可要求：同一端点一、二阶导数满足一定条件

建议：查阅帮助文档，用不同边界条件计算几个例子，比较效果！

注：参见曲线拟合工具箱 (Curve Fitting Toolbox)

大学数学实验

用MATLAB作插值计算

以 $g(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$，$-5\le x\le 5$ 为例，作三种插值的比较

用n=11个节点，m=21个插值点，三种方法作插值，画图。

Matlab.lnk
chazhi1

x	y	y1	y2	y3
0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
0.5000	0.8000	0.8434	0.7500	0.8205
1.0000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000
1.5000	0.3077	0.2353	0.3500	0.2973
2.0000	0.2000	0.2000	0.2000	0.2000
2.5000	0.1379	0.2538	0.1500	0.1401
3.0000	0.1000	0.1000	0.1000	0.1000
3.5000	0.0755	-0.2262	0.0794	0.0745
4.0000	0.0588	0.0588	0.0588	0.0588
4.5000	0.0471	1.5787	0.0486	0.0484
5.0000	0.0385	0.0385	0.0385	0.0385

大学数学实验

插值的应用

数控机床加工零件

表1 x间隔0.2的加工坐标x,y（图1右半部的数据）

0.0,5.00	0.2,4.71	0.4,4.31	0.6,3.68	0.8,3.05
1.0,2.50	1.2,2.05	1.4,1.69	1.6,1.40	1.8,1.18
2.0,1.00	2.2,0.86	2.4,0.74	2.6,0.64	………

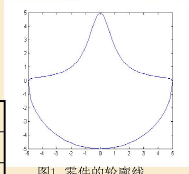


图1 零件的轮廓线（x间隔0.2）

加工时需要x每改变0.05时的y值

模型 将图1逆时针方向转90度，轮廓线上下对称，只需对上半部计算一个函数在插值点的值。

令$v=x$, $u=-y$

MATLAB 5.3.lnk
chazhi2

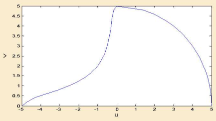


图2 逆时针方向转90度的结果

大学数学实验

四. 数值积分

1.梯形公式
2.辛普森公式
3.高斯公式

大学数学实验

数值积分

为什么要作数值积分

- **积分是重要的数学工具，是微分方程、概率论等的基础；在实际问题中有直接应用。**
- **许多函数"积不出来"，只能用数值方法，如**

$$\int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}}dx\ ,\quad \int_a^b \frac{\sin x}{x}dx$$

- **对于用离散数据或者图形表示的函数，计算积分只有求助于数值方法。**

大学数学实验

数值积分的基本思路

回忆定积分的定义

$$I=\int_a^b f(x)dx=\lim_{n\to\infty} I_n,\quad I_n=\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\frac{b-a}{n}$$

***n*充分大时*I_n*就是*I*的数值积分**

各种数值积分方法研究的是

ξ_k 如何取值，区间(a,b)如何划分，

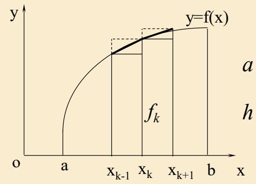
使得既能保证一定精度，计算量又小。

（计算功效：算得准，算得快）

大学数学实验

数值积分

1.梯形公式



$$a=x_0<x_1<\cdots x_k\cdots<x_n=b,$$

$$h=\frac{b-a}{n},\qquad f_k=f(x_k)$$

$$L_n=h\sum_{k=0}^{n-1} f_k \qquad (1)$$

$$R_n=h\sum_{k=1}^{n} f_k \qquad (2)$$

L_n, R_n 平均，得到

梯形公式 $$T_n = h\sum_{k=1}^{n-1} f_k + \frac{h}{2}(f_0+f_n) \quad (3)$$

非等距分割梯形公式

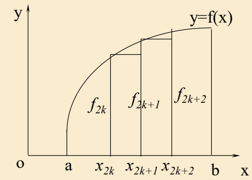
$$T_n = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f_k+f_{k+1}}{2}(x_{k+1}-x_k) \quad (4)$$

数值积分 **2.辛普森(Simpson)公式 (抛物线公式)**

梯形公式相当于用分段线性插值函数代替 $f(x)$

⇩

提高精度 分段二次插值函数 ⇨ 抛物线公式



每段要用相邻两小区间端点的三个函数值

区间数必须为偶数 $n=2m$

$(x_{2k},f_{2k}),(x_{2k+1},f_{2k+1}),(x_{2k+2},f_{2k+2})$

$k=0,1,\cdots,m-1$

2.辛普森(Simpson)公式（抛物线公式）

用$(x_{2k},f_{2k}),(x_{2k+1},f_{2k+1}),(x_{2k+2},f_{2k+2})$构造 二次插值函数$s_k(x)$

$$\Rightarrow \int_{x_{2k}}^{x_{2k+2}} s_k(x)dx = \frac{h}{3}(f_{2k}+4f_{2k+1}+f_{2k+2})$$

对**k**求和(共**m**段)，得（复合）辛普森公式：

$$S_m = \frac{h}{3}\left(f_0+f_{2m}+4\sum_{k=0}^{m-1} f_{2k+1}+2\sum_{k=1}^{m-1} f_{2k}\right), \quad h=\frac{b-a}{2m} \quad (5)$$

梯形公式的误差估计 $$T_n = h\sum_{k=1}^{n-1} f_k + \frac{h}{2}(f_0+f_n) \approx \int_a^b f(x)dx$$

$$R(f,T_n) = I - T_n = \int_a^b f(x)dx - T_n$$

梯形公式在每小段上是用线性插值函数$T(x)$代替 $f(x)$

$$f(x)=T(x)+\frac{f''(\xi_k)}{2}(x-x_k)(x-x_{k+1}), \quad \xi_k\in(x_k,x_{k+1})$$

因为：$(x-x_k)(x-x_{k+1})$在(x_k, x_{k+1})不变号，所以：

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}}[f(x)-T(x)]dx = \frac{f''(\eta_k)}{2}\int_{x_k}^{x_{k+1}}(x-x_k)(x-x_{k+1})dx = -\frac{h^3}{12}f''(\eta_k)$$

$$|I-T_n| = \left|\int_a^b f(x)dx - T_n\right| = \left|\sum_{k=0}^{n-1}\left(\int_{x_k}^{x_{k+1}}[f(x)-T(x)]dx\right)\right| \le \frac{h^3}{12}\sum_{k=0}^{n-1}|f''(\eta_k)|$$

梯形公式的误差 $$|R(f,T_n)| \le \frac{h^3}{12}\sum_{k=0}^{n-1}|f''(\eta_k)|$$

估计 $M_2 = \max|f''(x)|, x\in(a,b)$ 因为 $n = \frac{b-a}{h}$

$$|R(f,T_n)| \le \frac{h^2}{12}M_2(b-a) \quad (6)$$

梯形公式T_n的误差是h^2阶的

辛普森公式的误差估计

同理可得：

$$|R(f,S_n)| \le \frac{h^4}{180}M_4(b-a) \quad (7)$$

其中 $M_4 = \max\left|f^{(4)}(x)\right|, \ x\in(a,b)$

辛普森公式S_n的误差是h^4阶的。

梯形公式和辛普森公式的收敛性

若对I某个数值积分I_n有 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{I-I_n}{h^p}=c$（非零常数）

则称 I_n是 p 阶收敛的。

$\Rightarrow$ 梯形公式 2 阶收敛，辛普森公式 4 阶收敛。

c=0: 至少p阶收敛（超p阶收敛）

积分步长的自动选取

选定数值积分公式后，如何确定步长h以满足给定的误差ε

梯形公式 $I-T_n\approx-\frac{h^2}{12}(f'(b)-f'(a))$ $\quad h\to h/2\ (n\to 2n)$

$$\boxed{I-T_{2n}\approx\frac{1}{4}(I-T_n)}\Rightarrow I-T_{2n}\approx\frac{1}{3}(T_{2n}-T_n)$$

用二分法只要 $|T_{2n}-T_n|\le\varepsilon \Rightarrow |I-T_{2n}|\le\varepsilon$

且T_{2n}可在T_n基础上计算 $T_{2n}=\frac{T_n}{2}+\frac{h}{2}\sum_{k=0}^{n-1}f_{k+1/2}$

其中$f_{k+1/2}$是原分点x_k,x_{k+1}的中点（记$x_{k+1/2}$）的函数值

3. 高斯(Gauss)求积公式

矩形公式(1)、(2)

梯形公式(3)

辛普森公式(5)

$$I_n=\sum_{k=1}^{n}A_kf(x_k)\quad(8)$$

Newton-Cotes方法

A_k是与f无关的常数

代数精度

设 $f(x)=x^k$，用(8)计算 $I=\int_a^b f(x)dx$，

若对于 $k=0,1,\cdots m$ 都有 $I_n=I$，

而当 $k=m+1$，$I_n\ne I$，则称I_n的代数精度为m.

梯形公式的代数精度（考察T_1）

k=1 f(x)=x

$$T_1=\frac{h}{2}[f(a)+f(b)]=\frac{(b-a)(a+b)}{2}$$

$$I=\int_a^b xdx=\frac{b^2-a^2}{2}\Rightarrow \boxed{T_1=I}$$

k=2 f(x)=x²

$$T_1=\frac{(b-a)(a^2+b^2)}{2}$$

$$I=\int_a^b x^2dx=\frac{b^3-a^3}{3}\Rightarrow \boxed{T_1\ne I}$$

梯形公式的代数精度为1　　辛普森公式的代数精度为3

高斯公式的思路

取消对节点的限制，按照代数精度最大的原则，同时确定节点x_k和系数A_k

对于 $I=\int_{-1}^{1}f(x)dx$ 　构造求积公式

$G_2=A_1f(x_1)+A_2f(x_2)$ 　使G_2的代数精度为3

$f(x)=1,x,x^2,x^3$ $\quad\int_{-1}^{1}f(x)dx=A_1f(x_1)+A_2f(x_2)$

确定 x_1,x_2,A_1,A_2

将f(x)代入计算得

$$\begin{aligned}A_1+A_2&=2\\A_1x_1+A_2x_2&=0\\A_1x_1^2+A_2x_2^2&=2/3\\A_1x_1^3+A_2x_2^3&=0\end{aligned}$$

$\Rightarrow \boxed{x_1=-1/\sqrt{3},\quad x_2=1/\sqrt{3},\quad A_1=A_2=1}$

$\Rightarrow \boxed{G_2=f(-1/\sqrt{3})+f(1/\sqrt{3})}$

用n个节点，G_n的代数精度可达2n-1, 但是需解复杂的非线性方程组，实用价值不大。

常 用 的 高 斯 公 式

将(a, b)分小，把小区间变换为(−1，1)，再用G_2

$$\int_a^b f(x)dx \cong \frac{h}{2}\sum_{k=1}^{m}[f(z_k^{(1)})+f(z_k^{(2)})]$$

$$z_k^{(1)}=\frac{x_k+x_{k-1}}{2}+\frac{h}{2\sqrt{3}},\quad z_k^{(2)}=\frac{x_k+x_{k-1}}{2}-\frac{h}{2\sqrt{3}}$$

$$h=(b-a)/m,\ x_k=a+kh,\ k=0,1,\cdots m$$

代数精度为3　　节点加密时，原计算信息无法利用

改进的高斯公式

思路：将积分区间分小，在小区间上用n不太大的G_n。而在节点加密一倍时能够利用原节点的函数值，可以把区间的端点作为固定节点。

Gauss-Lobatto求积公式

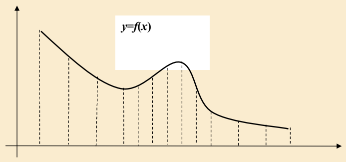
$$G_n = A_1 f(a)+\sum_{k=2}^{n-1}A_k f(x_k)+A_n f(b)$$

其中a, b为小区间的端点，$x_2,\cdots,x_{n-1},A_1,\cdots A_n$ 为$2n$-2个参数，

代数精度可达到$2n$-3

注意：实际计算中一般采用自适应方法确定步长

自适应方法：将函数变化较快的区间分得细一些，函数变化较慢的区间分得粗一些



实际的做法如在步长的自动选取的那样，对于给定的求积公式，找出n等分（加细）区间和m等分区间两次计算结果（记作Q_n和Q_m），区间的细分只对那些不满足误差要求的子区间进行

单选题　2分　　设置

梯形公式和辛普森公式分别是几阶收敛？分别具有几阶代数精度？

收敛阶 ， 代数精度

- A (1，2)， (3，4)
- B (2，3)， (1，2)
- C (2，3)， (2，3)
- D (2，4)， (1，3)
- E 以上都不对

提交

五. 数值积分的 MATLAB 实现及数值积分的应用

用MATLAB 作数值积分

矩形公式　$L_n = h\sum_{k=0}^{n-1} f_k$　　$R_n = h\sum_{k=1}^{n} f_k$

Sum(x)　输入数组x(即f_k), 输出x的和(数)

cumsum(x)　输入数组x, 输出x的依次累加和(数组)

梯形公式　$T_n = h\sum_{k=1}^{n-1} f_k + \frac{h}{2}(f_0+f_n)$

trapz(x)　输入数组x, 输出按梯形公式x的积分(单位步长)

trapz(x,y)　输入同长度数组 x,y, 输出按梯形公式y对x的积分(步长不一定相等)

清华大学　　大学数学实验

MATLAB 不建议再用quad, quadl

辛普森公式

$$S_n=\frac{h}{3}\left(f_0+f_{2m}+4\sum_{k=0}^{m-1}f_{2k+1}+2\sum_{k=1}^{m-1}f_{2k}\right),\quad h=\frac{b-a}{2m}$$

quad(@fun,a,b,tol,trace)
[I,fn]=quad(…)

用自适应辛普森公式计算
tol为绝对误差，缺省时为10^{-6}

Gauss-Lobatto公式 $G_n=A_1f(a)+\sum_{k=2}^{n-1}A_kf(x_k)+A_nf(b)$

quadl(@fun,a,b,tol,trace)
[I,fn]=quadl(…)

用自适应Gauss-Lobatto公式计算
tol为绝对误差，缺省时为10^{-6}

注意：fun.m中应以自变量为矩阵的形式输入(点运算)

清华大学　　大学数学实验

New：自适应计算数值积分

q = integral(fun,xmin,xmax)
q = integral(fun,xmin,xmax,Name,Value)

Name / Value 指定控制参数，如：

'AbsTol' 指定绝对误差，缺省为10^{-6}

'RelTol' 指定相对误差，缺省为10^{-10}

'ArrayValued' 指定多值函数，缺省为false (0)

'WayPoints' 指定使用的“点”，缺省为空

- 高维积分：integral2，integral3

多选题 2分　　设置

针对 integral 控制参数的大致含义，以下哪些说法正确?

A 'AbsTol'，1e-6表示计算结果有6位有效数字

B 'AbsTol'，1e-6表示计算结果精确到小数点后第6位

C 'RelTol'，1e-10 表示计算结果有10位有效数字

D 'RelTol'，1e-10 表示计算结果精确到小数点后第10位

E 以上都不对

提交

清华大学　　大学数学实验

广义积分、二重和三重积分

广义积分：
通过分析和控制误差，转换成普通积分

向量值积分：

quadv(@fun,a,b,tol,trace)

矩形域上计算二重积分的命令：

dblquad(@fun,xmin,xmax,ymin,ymax,tol)

长方体上计算三重积分的命令：

triplequad(@fun,xmin,xmax,ymin,ymax, zmin,zmax,tol)

注：fun是被积函数，本身可以有自己的参数

清华大学　　大学数学实验

用MATLAB作数值积分

例. 计算$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1-\sin x}dx$

1）矩形公式和梯形公式

将 (0，π/4) 100等分　　精确值为$\sqrt{2}$

2）辛普森公式和Gauss-Lobatto公式

精确、方便

Matlab.lnk　Jifen1a.m　Jifen1b.m

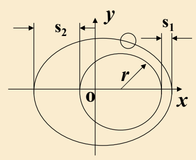
无法计算用数值给出的函数的积分

清华大学　　大学数学实验

数值积分的应用

实例

人造卫星轨道长度



近地点s_1=439km,远地点s_2= 2384km

地球半径r=6371km

a ~ 长半轴
b ~ 短半轴
由s_1, s_2, r决定

$x=a\cos t,\ y=b\sin t$
$(0\le t\le 2\pi)$

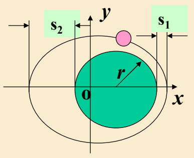
轨道长度

$$L=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,dt=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}\,dt$$

需要作数值积分

清华大学 大学数学实验

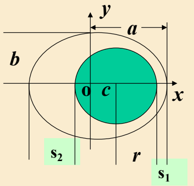
数值积分实例　人造卫星轨道长度



$$L = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}\, dt$$

a～长半轴, b～短半轴, 由s_1, s_2, r决定

s_1=439km, s_2= 2384km, r=6371km



$2a = 2r + s_2 + s_1$　$\boxed{a = r + \frac{s_2 + s_1}{2} = 7782.5}$

焦距$c = a - r - s_1$　$c = \frac{s_2 - s_1}{2}$

$\boxed{b = \sqrt{a^2 - c^2} = 7721.5}$

清华大学 大学数学实验

数值积分实例　人造卫星轨道长度

$$L = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}\, dt$$

用梯形公式和辛普森公式计算　Matlab.lnk　Jifen2.m

轨道长度 L=4.8707×10⁴千米

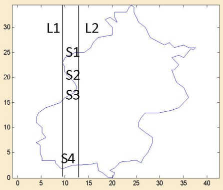
只将区间5等分，梯形公式就给出很好的结果

清华大学 大学数学实验

数值积分实例　面积估算

顺时针测量边界线各点坐标；

用**trapz**计算**S1**对应的数据段时，得到的是**S1**之下、*x*轴上的面积，符号为正；计算**S2**对应的数据段时，由于按顺时针标记坐标点，**S2**对应数据的两点的*x*坐标之差为负数，因此计算出**S2**之下、*x*轴上的面积，但符号为负。于是这两部分数值积分之和正好是**S1**之下**S2**之上部分的面积……



Matlab.lnk　mianji.m

面积估算为**16676km²**

清华大学 大学数学实验

布置实验

目的

1、掌握用**MATLAB**计算拉格朗日、分段线性、三次样条三 种插值的方法，改变节点的数目，对三种插值结果进行初步分析。

2、 掌握用**MATLAB**及梯形公式、辛普森公式计算数值积分。

3、 通过实例学习用插值和数值积分解决实际问题。

内容　实验练习（见网络学堂）