大学数学实验

大学数学实验

实验8 线性规划

(LP: Linear Programming)

清 华 大 学 数 学 科 学 系

大学数学实验

优化问题的一般形式

优化问题三要素：决策变量；目标函数；约束条件

$$\min \quad f(x)$$

$$s.t.$$

$$g_i(x) \le 0,\ i = 1,\dots,m$$

$$x \in \Omega \subseteq R^n$$

目标函数

约束条件

决策变量

当最优解在可行域边界上取得时
不能用无约束优化方法求解

大学数学实验

约束优化的分类

$$\min \quad f(x)$$

$$s.t. \quad g_i(x) \le 0$$

$$x \in \Omega \subseteq R^n$$

连续优化

- 线性规划(LP) 目标和约束均为线性函数
- 非线性规划(NLP) 目标或约束中存在非线性函数
  - ✓ 二次规划(QP) 目标为二次函数、约束为线性

离散优化

- 整数规划(IP) 决策变量(全部或部分)为整数
  - ✓ 整数线性规划(ILP)
  - ✓ 整数非线性规划(INLP)
  - ✓ 0-1规划 整数决策变量只取 0 或 1
  - ✓纯整数规划(PIP)、混合整数规划(MIP)

大学数学实验

本实验基本内容

1. **实例及其数学模型**
2. **基本原理和算法**
3. **MATLAB实现**
4. **LINGO实现**

大学数学实验

实例1: 食谱问题

背景 营养需求 / 人 / 天 → 50g蛋白质 4000IU维生素A 1000mg钙

食物	单位	蛋白质(g)	维生素A (IU)	钙(mg)	价格(美分)
苹果	个（138g）	0.3	73	9.6	10
香蕉	个（118g）	1.2	96	7	15
胡萝卜	个（72g）	0.7	20253	19	5
枣汁	杯（178g）	3.5	890	57	60
鸡蛋	个（44g）	5.5	279	22	8

确定每种食物的用量，以最小费用满足营养需求

- A的需求增加1单位，是否改变食谱？成本增加多少？
- 胡萝卜价格增1美分，是否改变食谱？成本增加多少？

大学数学实验

实例1: 食谱问题

决策变量 5种食物数量: x_1, x_2, x_3, x_4, x_5

$x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^T$

$c = (10, 15, 5, 60, 8)^T$

$b = (50, 4000, 1000)^T$

目标函数 费用 $Min \ z = 10x_1 + 15x_2 + 5x_3 + 60x_4 + 8x_5$

约束条件 满足需求

$$0.3x_1 + 1.2x_2 + 0.7x_3 + 3.5x_4 + 5.5x_5 \ge 50$$

$$73x_1 + 96x_2 + 20253x_3 + 890x_4 + 279x_5 \ge 4000$$

$$9.6x_1 + 7x_2 + 19x_3 + 57x_4 + 22x_5 \ge 1000$$

非负约束 $x_1, \cdots, x_5 \ge 0$

LP

$$A = \begin{pmatrix} 0.3 & 1.2 & 0.7 & 3.5 & 5.5 \\ 73 & 96 & 20253 & 890 & 279 \\ 9.6 & 7 & 19 & 57 & 22 \end{pmatrix}$$

$$\min \quad z = c^T x$$

$$s.t. \quad Ax \ge b$$

$$x \ge 0$$

清华大学 大学数学实验

实例2: 奶制品生产销售计划

1桶牛奶 或 12小时 → 3千克 A_1 → 获利12元/千克；1千克，2小时,1.5元 → 0.8千克 B_1 → 获利22元/千克

1桶牛奶 或 8小时 → 4千克 A_2 → 获利8元/千克；1千克，2小时,1.5元 → 0.75千克 B_2 → 获利16元/千克

50桶牛奶, 480小时

至多100公斤 A_1　　**制订生产计划，使每天净利润最大**

- 15元可增加1桶牛奶，应否投资？
- 聘用临时工人增加劳动时间，工资最多每小时几元？
- B_1，B_2的获利经常有10%的波动，对计划有无影响？

清华大学 大学数学实验

1桶牛奶 或 12小时 → 3千克 A_1 → 获利12元/千克；1千克，2小时,1.5元 → 0.8千克 B_1 → 获利22元/千克

1桶牛奶 或 8小时 → 4千克 A_2 → 获利8元/千克；1千克，2小时,1.5元 → 0.75千克 B_2 → 获利16元/千克

决策变量　出售 x_1 千克 A_1, x_2 千克 A_2，x_3 千克 B_1, x_4 千克 B_2

x_5 千克 A_1 加工 B_1，x_6 千克 A_2 加工 B_2　LP

目标函数　利润　$Max\ z = 12x_1 + 8x_2 + 22x_3 + 16x_4 - 1.5x_5 - 1.5x_6$

约束条件

原料供应　$\dfrac{x_1+x_5}{3} + \dfrac{x_2+x_6}{4} \le 50$

劳动时间　$4(x_1+x_5) + 2(x_2+x_6) + 2x_5 + 2x_6 \le 480$

加工能力　$x_1 + x_5 \le 100$

附加约束　$x_3 = 0.8x_5$，$x_4 = 0.75x_6$

非负约束　$x_1, \cdots, x_6 \ge 0$

清华大学 大学数学实验

实例3：供应与选址

某公司有6个建筑工地，位置坐标为(a_i, b_i) (单位：公里)，水泥日用量d_i (单位：吨）

i	1	2	3	4	5	6
a	1.25	8.75	0.5	5.75	3	7.25
b	1.25	0.75	4.75	5	6.5	7.75
d	3	5	4	7	6	11

现有 2 料场，位于 A (5, 1), B (2, 7)，记(x_j,y_j),j=1,2，日储量 e_j 各有 20 吨。

假设： 料场和工地之间有直线道路

目标： 制定每天的供应计划，即从 A，B 两料场分别向各工地运送多少吨水泥，使总的吨公里数最小。

清华大学 大学数学实验

决策变量：c_{ij} (料场j到工地i的运量）~12维

$$\min \sum_{j=1}^{2}\sum_{i=1}^{6} c_{ij}[(x_j-a_i)^2+(y_j-b_i)^2]^{1/2}$$

$$s.t. \quad \sum_{j=1}^{2} c_{ij} = d_i, \quad i=1,\ldots,6$$

$$\sum_{i=1}^{6} c_{ij} \le e_j, \quad j=1,2$$

$$c_{ij} \ge 0, \quad i=1,\ldots,6;\ j=1,2$$

线性规划(LP)模型

清华大学 大学数学实验

求解线性规划(LP)的基本原理

基本模型

$$\max\ (or\ \min)\ z = c^T x,\ x \in R^n$$

$$s.t. \quad Ax \le b,\ x \ge 0$$

$$c \in R^n,\ A \in R^{m\times n},\ b \in R^m$$

- 二维线性规划的图解法
- 一般线性规划的单纯形算法
- 线性规划的敏感性分析*
- 线性规划的对偶问题*
- 线性规划的其他算法

清华大学 大学数学实验

二维线性规划的图解法

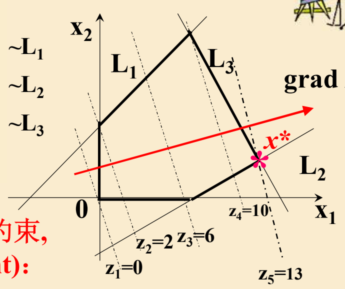
$$\max \quad z = 3x_1 + x_2$$

$$s.t. \quad x_1 - x_2 \ge -2 \quad \sim L_1$$

$$x_1 - 2x_2 \le 2 \quad \sim L_2$$

$$3x_1 + 2x_2 \le 14 \quad \sim L_3$$

$$x_1, x_2 \ge 0$$



起作用约束(积极约束，紧约束, active/tight)：L_2;L_3

最优解（4，1），最优值z_{max}=13

LP的约束和目标函数均为线性函数

⇩

	2维	n维
可行域	线段组成的凸多边形	超平面组成的凸多面体
目标函数	等值线为直线	等值线是超平面
最优解	凸多边形的某个顶点	凸多面体的某个顶点

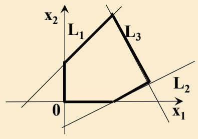
求解LP的基本思想

从可行域的某一顶点开始，只需在有限多个顶点中一个一个找下去，一定能得到最优解

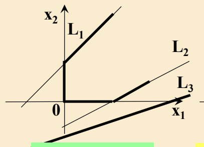
算法：怎样从一点转到下一点，尽快找到最优解

求解LP的特殊情形

$$\max\ z = 3x_1 + x_2$$
$$s.t.\quad x_1 - x_2 \ge -2 \quad \sim L_1$$
$$x_1 - 2x_2 \le 2 \quad \sim L_2$$
$$3x_1 + 2x_2 \le 14 \quad \sim L_3$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

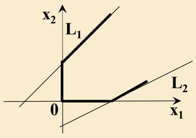


$-3x_1 + 2x_2 \ge 14 \sim L_3$



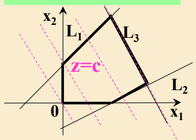
无可行解

无 L_3



无最优解(无界)

$3x_1 + x_2 \le 14 \sim L_3$



最优解不唯一

多选题 2分 设置

对于线性规划，以下说法正确的是

- A 存在可行解时一定存在最优解
- B 如果存在最优解，则可行域一定有界
- C 如果存在最优解，则一定存在可行域的某个顶点是最优解
- D 如果存在最优解，则最优解一定是可行域的某个顶点
- E 如果可行域非空且有界，则一定有最优解

提交

线性规划的标准形和基本性质

标准形

$$\min\ z = c^T x$$
$$s.t.\quad Ax = b,\ x \ge 0$$
$$A \in R^{m\times n},\ m \le n$$

假设：

A行满秩：rank(A)=m

b非负：$b \ge 0$

$$\max\ z = 3x_1 + x_2 \qquad \min z = -3x_1 - x_2 + 0\cdot x_3 + 0\cdot x_4 + 0\cdot x_5$$
$$s.t.\quad x_1 - x_2 \ge -2 \qquad s.t.\quad -x_1 + x_2 + x_3 = 2,\quad x_3 \ge 0$$
$$x_1 - 2x_2 \le 2 \quad ⇨ \quad x_1 - 2x_2 + x_4 = 2,\quad x_4 \ge 0$$
$$3x_1 + 2x_2 \le 14 \qquad 3x_1 + 2x_2 + x_5 = 14,\ x_5 \ge 0$$
$$x_1, x_2 \ge 0 \qquad x_1, x_2 \ge 0$$

加入松弛变量/剩余变量将不等式变为等式

多选题 2分 设置

线性规划标准型满足

- A 所有决策变量非负
- B 所有线性约束都是等式约束
- C 所有线性约束的右端项非负
- D 线性约束的系数矩阵行满秩
- E 可行域非空

提交

对标准形求解

$$\min\ z = c^T x$$
$$s.t.\quad Ax = b,\ x \ge 0$$
$$A \in R^{m\times n},\ m \le n$$

$$\min z = -3x_1 - x_2 + 0\cdot x_3 + 0\cdot x_4 + 0\cdot x_5$$
$$s.t.\quad -x_1 + x_2 + x_3 = 2$$
$$x_1 - 2x_2 + x_4 = 2,$$
$$3x_1 + 2x_2 + x_5 = 14,$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0$$

先求可行解

满足

$Ax = b,\ x \ge 0$

$$-x_1 + x_2 + x_3 = 2$$
$$x_1 - 2x_2 + x_4 = 2,$$
$$3x_1 + 2x_2 + x_5 = 14,$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0$$

再在有限个可行解（多面体顶点）中寻找最优解

Ax=b

$-x_1+x_2+x_3=2$

$x_1-2x_2+x_4=2$

$3x_1+2x_2+x_5=14$

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & -2 & 0 & 1 & 0\\ 3 & 2 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=[p_1\ p_2\ p_3\ p_4\ p_5]$$

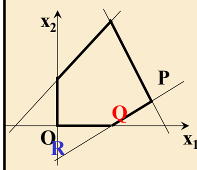
$A\Rightarrow[A_B,A_N]$, A_B可逆

$x^T\Rightarrow[x_B,x_N]^T$

$Ax=A_Bx_B+A_Nx_N=b$

$x_N=0\Rightarrow x_B=A_B^{-1}b$

A_B: 基(矩阵)　x: 基(本)解　x_B: 基变量　x_N: 非基变量



$A_B=[p_3\ p_4\ p_5]\Rightarrow x=(0,0,2,2,14)^T$ O点

$A_B=[p_1\ p_3\ p_5]\Rightarrow x=(2,0,4,0,8)^T$ Q点

$A_B=[p_2\ p_3\ p_5]\Rightarrow x=(0,-1,3,0,16)^T$ R点

$A_B=[p_1\ p_2\ p_3]\Rightarrow x=(4,1,5,0,0)^T$ P点

基(本)可行解x：$Ax=b,\ x\geq 0$ ($x_B\geq 0$，$x_N=0$)

LP基本性质

可行域存在时，必是凸多面体（可能无界）；
最优解存在时，必可在可行域的顶点取得；
基可行解对应于可行域的顶点。

基本解数量不超过 $\binom{n}{m}=\dfrac{n!}{m!(n-m)!}$

最优解只需在有限个可行解（基可行解）中寻找

LP的通常解法是单纯形法(G. B. Dantzig, 1947)

单纯形法的基本思路：“迭代法”

旋转(Pivot)：从一个顶点(基可行解)转换到另一个顶点
- 每一步转换只将一个非基变量（一个分量）变为基变量，称为进基；
- 同时，将一个基变量变为非基变量，称为出基；
- 使目标函数下降（至少不增加）。　(相邻顶点)

关键步骤
- 选取初始基可行解（顶点）*
- 检验：判断当前解是否最优
- 旋转：选择进基和出基变量
- 退化情形：防止迭代过程出现循环*

检验：基可行解$x^{(0)}$的最优性

$c=\begin{bmatrix}c_B\\ c_N\end{bmatrix}$

$x^{(0)}=\begin{bmatrix}x_B^{(0)}\\ x_N^{(0)}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_B^{-1}b\\ 0\end{bmatrix}$　　$z^{(0)}=c^Tx^{(0)}=c_B^Tx_B^{(0)}+c_N^Tx_N^{(0)}=c_B^TA_B^{-1}b$

可行解 $x=\begin{bmatrix}x_B\\ x_N\end{bmatrix}\geq 0$　　$Ax=A_Bx_B+A_Nx_N=b$

$\Rightarrow x_B=A_B^{-1}b-A_B^{-1}A_Nx_N$

$r=\begin{bmatrix}0\\ c_N-(A_B^{-1}A_N)^Tc_B\end{bmatrix}$

$$\begin{aligned}z&=c_B^T[A_B^{-1}b-A_B^{-1}A_Nx_N]+c_N^Tx_N\\ &=c_B^TA_B^{-1}b+[c_N^T-c_B^TA_B^{-1}A_N]x_N\\ &=z^{(0)}+r^Tx\end{aligned}$$

只与A,c有关, 与b无关

$r_k=c_k-(A_B^{-1}p_k)^Tc_B=c_k-c_B^TA_B^{-1}p_k$

- $r\geq 0$ ➔ $x^{(0)}$最优
- 否则，$x^{(0)}$非最优

Reduced cost;“检验数”

旋转：确定进基变量

$c=\begin{bmatrix}c_B\\ c_N\end{bmatrix}$

$x^{(0)}=\begin{bmatrix}x_B^{(0)}\\ x_N^{(0)}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_B^{-1}b\\ 0\end{bmatrix}$　　$r_q=c_q-(A_B^{-1}p_q)^Tc_B=c_q-c_B^TA_B^{-1}p_q<0$

考虑x_q从0开始增加（其他非基变量仍保持为0）所带来的影响 ➡ 可行解 $x^{(1)}=\begin{bmatrix}x_B^{(1)}\\ x_N^{(1)}\end{bmatrix}$

$\alpha=x_q^{(1)}$　　$d^q=\begin{bmatrix}-A_B^{-1}p_q\\ e_q\end{bmatrix}$

$$\begin{aligned}&Ax^{(1)}=A_Bx_B^{(1)}+A_Nx_N^{(1)}=b\\ &\Rightarrow x_B^{(1)}=A_B^{-1}b-A_B^{-1}A_Nx_N^{(1)}\\ &\qquad=x_B^{(0)}-x_q^{(1)}A_B^{-1}p_q\\ &\qquad=x_B^{(0)}+\alpha A_B^{-1}p_q\end{aligned}$$

e_q是一个n-m维向量，在对应变量x_q的位置上为1，其他非基变量对应的位置上为0

$x^{(1)}=x^{(0)}+\alpha d^q$

旋转：确定出基变量

$x^{(1)}=x^{(0)}+\alpha d^q$

$c^Td^q=\begin{pmatrix}c_B\\ c_N\end{pmatrix}^T\begin{bmatrix}-A_B^{-1}p_q\\ e_q\end{bmatrix}=c_q-c_B^TA_B^{-1}p_q=r_q<0$　　d^q: 下降方向

若$d^q\geq 0$, 则步长 $\alpha\to\infty$时$x^{(1)}$仍是可行解，问题无界

否则，要保证$x^{(1)}\geq 0$

$$\alpha\leq\alpha_{\max}=\underset{j\in J_B}{Min}\left[-\frac{x_j^{(0)}}{d_j^q}\middle|d_j^q<0\right]$$

J_B表示基变量的下标集合

使上式取最小值的基变量出基

非退化时：
$x_B^{(0)}>0$　d^q: 可行
$\alpha_{\max}>0$　下降方向

【思考】多个$r_q<0$时：如何选择“进基”？

多选题 2分 设置

关于线性规划标准型，下列说法正确的是

- A 基变量的取值一定大于0
- B 非基变量的取值一定等于0
- C 单纯形法迭代一次，目标函数值一定严格下降
- D 最优解存在时，最优解一定为基可行解
- E 最优解存在时，一定存在基可行解为最优解

提交

主观题 4分 设置

对以下两个问题，你有什么思路?

1) 如何找到第一个（初始的）基可行解?

2) 如何防止循环?

正常使用主观题需2.0以上版本雨课堂

作答

大学数学实验

初始解：人工变量法

$$\min \ z = c^T x$$
$$s.t. \ \ Ax = b, \ x \ge 0$$
$$A \in R^{m\times n}, \ m \le n$$

人为构造一个基可行解

人工变量：x_{n+1}，…，x_{n+m}

$$\text{Min } z_a = x_{n+1} + \cdots + x_{n+m}$$
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots \ a_{1n}x_n + x_{n+1} & = b_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots \ a_{2n}x_n + \quad x_{n+2} & = b_2 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots \ a_{mn}x_n + \quad\quad x_{n+m} & = b_m \end{cases}$$
$$x_1, \cdots, x_n \ge 0, x_{n+1}, \cdots, x_{n+m} \ge 0$$

若 z_a 的最优值 > 0: 原问题不可行

否则可得到基可行解:

- 人工变量均非基变量
- 有人工变量为基变量

(退化)→出基（细节略）

大学数学实验

线性规划的敏感性分析

设最优基本解为 $x = \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_B^{-1}b \\ 0 \end{bmatrix}$ $\quad z = c_B^T A_B^{-1} b$

右端项变化 $b' = b + \Delta b$ $\quad$ **r** 不变：基不变，解变

$A_B^{-1}b' = A_B^{-1}(b+\Delta b) \ge 0$ $\quad$ 可行解: **Δb** 的范围可确定

$$z' - z = c_B^T A_B^{-1}\Delta b = \lambda^T \Delta b = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \Delta b_i$$

$\boxed{\lambda^T = c_B^T A_B^{-1}}$ 拉格朗日（Lagrange）乘子

影子价格、边际价格或对偶价格

大学数学实验

线性规划的敏感性分析

设最优基本解为 $x = \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_B^{-1}b \\ 0 \end{bmatrix}$ $\quad z = c_B^T A_B^{-1} b$

费用系数变化 $c_k' = c_k + \Delta c_k$ $\quad$ **b**不变：基不变，解不变

x_k为非基变量 $\quad r_k' = c_k' - c_B^T A_B^{-1} p_k = r_k + \Delta c_k \ge 0$

$\Rightarrow \Delta c_k \ge -r_k$ $\quad$ 仍为最优基、最优解

x_k为基变量 $\quad$ 需重新计算$r_j' = c_j' - (c_B')^T A_B^{-1} p_j \ge 0$,

确定Δc_k的范围 $\quad$ 最优值一般会改变

约束矩阵变化 / 多参数同时变化：类似，较复杂（略）

大学数学实验

线性规划的对偶问题

对于最优基A_B $\quad r_k = c_k - c_B^T A_B^{-1} p_k = c_k - \lambda^T p_k \ge 0$

$\boxed{\lambda^T = c_B^T A_B^{-1}}$ $\quad c^T - \lambda^T A \ge 0 \quad A^T \lambda \le c$

对应最优基本解x $\quad c^T x = c_B^T A_B^{-1} b = \lambda^T b = b^T \lambda$

设x只是可行解，向量λ也只是满足 $A^T \lambda \le c$

$$b^T \lambda = \lambda^T b = \lambda^T A x \le c^T x$$

对偶问题(D) $\quad \boxed{\begin{aligned} &\max \ b^T \lambda \\ &s.t. \ \ A^T \lambda \le c \end{aligned}}$ $\quad \boxed{\begin{aligned} &\min \ z = c^T x \\ &s.t. \ \ Ax = b, x \ge 0 \end{aligned}}$ 原(始)问题(P)

线性规划的对偶问题

对偶问题(D)

$$\max\ b^T\lambda \quad s.t.\ \ A^T\lambda \le c$$

$$\min\ z = c^T x \quad s.t.\ \ Ax = b, x \ge 0$$

原(始)问题(P)

定理： 原问题和对偶问题互为对偶问题，即：对偶问题的对偶问题就是原问题。

弱对偶定理: 如果x是原问题的可行解（原可行解），λ是对偶问题的可行解（对偶可行解），则 $b^T\lambda \le c^T x$

- 若x和λ还满足$b^T\lambda = c^T x$, 则分别是(P)和(D)的最优解
- 若原问题（P）无下界，则对偶问题（D）不可行
- 若对偶问题（D）无上界，则原问题（P）不可行

线性规划的对偶问题

对偶问题(D)

$$\max\ b^T\lambda \quad s.t.\ \ A^T\lambda \le c$$

$$\min\ z = c^T x \quad s.t.\ \ Ax = b, x \ge 0$$

原(始)问题(P)

强对偶定理:

- 若原问题、对偶问题中任何一个有有限的最优解，则另一个亦然，且最优值相等

若原问题的最优基为A_B，则对偶问题的最优解为$\lambda^T = c_B^T A_B^{-1}$

- 若原问题和对偶问题中任何一个无界，则另一个不可行（没有可行解）

线性规划的对偶问题

原(始)问题(P)

$$\min\ z = c^T x \quad s.t.\ \ Ax \ge b, x \ge 0$$

对偶问题(D)

$$\max\ b^T\lambda \quad s.t.\ \ A^T\lambda \le c, \lambda \ge 0$$

互补松弛条件： 若 x 是原问题的可行解 $s = Ax - b$

λ是对偶问题的可行解 $r = c - A^T\lambda$

则它们分别是原始、对偶问题最优解的充分必要条件是

$$r^T x = 0 = s^T\lambda.$$

$$\min\ z = c^T x \quad s.t.\ \ Ax = b, x \ge 0$$

$$\max\ b^T\lambda \quad s.t.\ \ A^T\lambda \le c$$

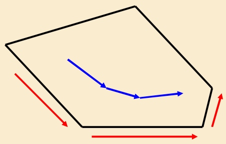
s=0=r^Tx(按r定义)

最优条件➔ r≥0

LP其他算法

内点算法(Interior point method)

- 1980年代人们提出的一类新的算法—内点算法
- 也是迭代法，但不再从可行域的一个顶点转换到另一个顶点，而是直接从可行域的内部逼近最优解。



有效集(Active Set)方法

- LP是QP的特例（只需令所有二次项为零即可）
- 可以用QP的算法解QP(如: 有效集方法，详见实验9)

MATLAB 求解 LP

$$\min\ z = c^T x$$

$$s.t.\ \ A_1 x \le b_1, A_2 x = b_2, v_1 \le x \le v_2$$

```
[x,fval,exitflag,output,lambda] =
linprog(c,A1,b1,A2,b2,v1,v2,x0,opt)
```

输入:

x0~初始解

opt ~ 控制参数

中间缺项需补[]

输出:

lambda ~ Lagrange乘子，维数等于约束个数，非零分量对应有效约束

- lambda.ineqlin: 对应 $A_1x \le b_1$
- lambda. eqlin : 对应 $A_2x = b_2$
- lambda. lower : 对应 $v_1 \le x$
- lambda. upper : 对应 $x \le v_2$

optimoptions：算法选择

```
optimoptions(@linprog,'Algorithm','alg')
```

其中 ‘alg’ 可以是以下五种算法之一：

- ‘interior-point-legacy’（传统的内点算法，缺省值）
- ‘interior-point’ （一种更有效的内点算法）
- ‘dual-simplex’ (对偶单纯形算法)
- ‘simplex’ (单纯形算法)
- ‘active-set’ (有效集方法 / 积极集方法)

前三个是大规模算法；后两个不是(将来不再提供);

只有有效集方法可由用户提供x0（其他算法忽略x0）

Exam0801.m Exam0802.m

大学数学实验

实例1: 食谱问题

Shili0801.m

食物	单位	蛋白质(g)	维生素A (IU)	钙(mg)	价格(美分)
苹果	个（138g）	0.3	73	9.6	10
香蕉	个（118g）	1.2	96	7	15
胡萝卜	个（72g）	0.7	20253	19	5
枣汁	杯（178g）	3.5	890	57	60
鸡蛋	个（44g）	5.5	279	22	8

x=(0，0，49.3827，0，2.8058)，最优值z0 =269.36：
每天吃49.3827个胡萝卜和2.8058个鸡蛋，成本269.36美分

- A的需求增加1单位，是否改变食谱？成本增加多少？
  lag.ineqlin =(0.4714; 0; 0.2458)　不改变；不增加
- 胡萝卜价格增1美分，是否改变食谱？成本增加多少？
  用MATLAB重新求解　　不改变；成本增加49.38

大学数学实验

实例2: 奶制品生产销售计划

$Max\ \ z=12x_1+8x_2+22x_3+16x_4-1.5x_5-1.5x_6$

$\frac{x_1+x_5}{3}+\frac{x_2+x_6}{4}\le 50$　$\Rightarrow 4x_1+3x_2+4x_5+3x_6\le 600$

$4(x_1+x_5)+2(x_2+x_6)+2x_5+2x_6\le 480$

$x_1+x_5\le 100$　$\Rightarrow 2x_1+x_2+3x_5+2x_6\le 240$

$x_3-0.8x_5=0$

$x_4-0.75x_6=0$

$x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6\ge 0$

Shili0802.m

x=(0, 168, 19.2, 0, 24, 0) ; z = -z0 =1730.4;
lag.ineqlin =(1.58; 3.26; 0.00) ; …

大学数学实验

实例2: 奶制品生产销售计划

$Max\ \ z=12x_1+8x_2+22x_3+16x_4-1.5x_5-1.5x_6$

$\frac{x_1+x_5}{3}+\frac{x_2+x_6}{4}\le 50$　$\Rightarrow 4x_1+3x_2+4x_5+3x_6\le 600 \to 601$

$4(x_1+x_5)+2(x_2+x_6)+2x_5+2x_6\le 480$

$x_1+x_5\le 100$

$x_3=0.8x_5$

$x_4=0.75x_6$

$x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6\ge 0$

z1=1731.98

z1-z = 1731.98=1730.4=1.58

影子价格 z1-z=lag.ineqlin(1)

x=(0,168,19.2,0,24,0) ; z = -z0 =1730.4
lag.ineqlin =(1.58; 3.26; 0.00) ; …

1.58*12=18.96>15

应该投资！

- 15元可增加1桶牛奶，应否投资？

大学数学实验

实例2: 奶制品生产销售计划

$Max\ \ z=12x_1+8x_2+22x_3+16x_4-1.5x_5-1.5x_6$

$\frac{x_1+x_5}{3}+\frac{x_2+x_6}{4}\le 50$　$\Rightarrow 4x_1+3x_2+4x_5+3x_6\le 600$

$4(x_1+x_5)+2(x_2+x_6)+2x_5+2x_6\le 480 \Rightarrow 2x_1+x_2+3x_5+2x_6\le 240$

$x_1+x_5\le 100$

$x_3=0.8x_5$

$x_4=0.75x_6$

$x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6\ge 0$

x=(0,168,19.2,0,24,0) ; z = -z0 =1730.4
lag.ineqlin =(1.58;3.26; 0.00) ; …

lag.ineqlin(2)=3.26，所以1小时劳动时间的影子价格应为3.26/2=1.63，即单位劳动时间增加的利润是1.63(元)

- 聘用临时工人增加劳动时间，工资最多每小时几元？

大学数学实验

实例2: 奶制品生产销售计划

$Max\ \ z=12x_1+8x_2+22x_3+16x_4-1.5x_5-1.5x_6$

$\frac{x_1+x_5}{3}+\frac{x_2+x_6}{4}\le 50$

$4(x_1+x_5)+2(x_2+x_6)+2x_5+2x_6\le 480$

$x_1+x_5\le 100$

$x_3=0.8x_5$

$x_4=0.75x_6$

$x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6\ge 0$

若每公斤B1的获利下降10%，应将目标函数中x_3的系数改为19.8，重新计算发现最优解和最优值均发生了变化

若B2的获利向上波动10%，原计划也不再是最优的

x=(0,168,19.2,0,24,0) ; z = -z0 =1730.4
lag.ineqlin =(1.58; 3.26; 0.00) ;

MATLAB没有给出这种敏感性分析的结果

- B_1，B_2的获利经常有10%的波动，对计划有无影响？

大学数学实验

实例3: 供应与选址

决策变量：c_{ij}（料场j到工地i的运量）~12维

$$\min \sum_{j=1}^{2}\sum_{i=1}^{6} c_{ij}[(x_j-a_i)^2+(y_j-b_i)^2]^{1/2}$$

$$s.t.\ \sum_{j=1}^{2} c_{ij}=d_i,\quad i=1,...,6$$

$$\sum_{i=1}^{6} c_{ij}\le e_j,\quad j=1,2$$

Shili0803lin.m

i	1	2	3	4	5	6
c_{i1}（料场 A）	3	5	0	7	0	1
c_{i2}（料场 B）	0	0	4	0	6	10

总吨公里数为136.2

LINDO 公司软件产品简要介绍

美国芝加哥(Chicago)大学的Linus Schrage教授于1980年前后开发, 后来成立 LINDO Systems Inc.（网址：http://www.lindo.com）

LINGO: Linear INteractive General Optimizer

⇧

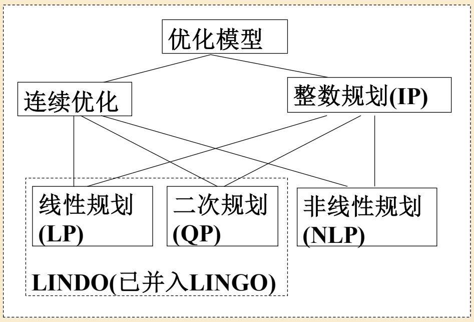
LINDO API: LINDO Application Programming Interface

⇩

What's Best!: (SpreadSheet e.g. EXCEL)

演示(试用)版、学生版、高级版、超级版、工业版、扩展版…（求解问题规模和选件不同）

LINGO软件能求解的优化模型



LINGO 求解 LP

输入：直接输入文本，非常简单

- 模型的目标函数以MAX=或MIN=开始定义
- 约束中 >（或<）与>=（或<=）功能相同
- 字母不区分大小写；空格、回车不起作用
- 每个语句以英文分号 ";"结束
- 除注释外，不能有任何全角符号、汉字符号
- 已假定所有变量非负（否则需用@free函数解除）
- LINGO将目标函数所在行作为第一行
- 使用集合（sets、endsets）定义数组和下标

输出：丰富

最优解、最优值；检验数；对偶价格；敏感性分析等

LINGO 求解 LP

例：

```
MAX = 3 * x1 + X2;
  X1 - x2 > -2;
  x1 -2 * X2 <= 2;
3 * x1 + 2* x2 <14;
```

Exam0801.lg4

Global optimal solution found.

Objective value: 13.00000

Total solver iterations: 2

Variable	Value	Reduced Cost
X1	4.000000	0.000000
X2	1.000000	0.000000

Row	Slack or Surplus	Dual Price
1	13.00000	1.000000
2	5.000000	0.000000
3	0.000000	0.3750000
4	0.000000	0.8750000

LINGO 求解 LP

```
MAX = 3 * x1 + X2;
  X1 - x2 > -2;
  x1 -2 * X2 <= 2;
3 * x1 + 2* x2 <14;
```

Ranges in which the basis is unchanged:

Objective Coefficient Ranges

Variable	Current Coefficient	Allowable Increase	Allowable Decrease
X1	3.000000	INFINITY	1.500000
X2	1.000000	1.000000	7.000000

输出：

敏感性分析

Righthand Side Ranges

Row	Current RHS	Allowable Increase	Allowable Decrease
2	-2.000000	5.000000	INFINITY
3	2.000000	2.666667	8.000000
4	14.00000	INFINITY	8.000000

实例1: 食谱问题

直接输入、求解（结果同前）

x=(0，0，49.3827，0，2.8058)，最优值269.36；

每天吃49.3827个胡萝卜和2.8058个鸡蛋，成本269.36美分

- A的需求增加1单位，是否改变食谱？成本增加多少？

  对偶价格　　　　不改变；不增加

- 胡萝卜价格增1美分，是否改变食谱？成本增加多少？

  无需重新求解：敏感性分析　不改变；成本增加49.38

定义集合输入、求解（结果同前）　Shili0801b.lg4

- 具有一般性，便于大规模问题输入

实例2: 奶制品生产销售计划

Shili0802.lg4　　结果同前！

- 15元可增加1桶牛奶，应否投资？　1.58*12 > 15 应该投资！
- 聘用临时工人增加劳动时间，工资最多每小时几元？　3.26/2=1.63
- B_1，B_2的获利经常有10%的波动，对计划有无影响？

Objective Coefficient Ranges

Variable	Current Coefficient	Allowable Increase	Allowable Decrease
X(3)	22.00000	9.875000	1.583333
X(4)	16.00000	1.013333	INFINITY

不变

变化

实例3: 供应与选址

定义集合输入、求解（结果同前）

- 具有一般性，便于大规模问题输入

Shili0803.lg4

结果同前！　　总吨公里数为136.2

多选题　2分　设置

在Lingo中输入线性规划模型时：

- A 决策变量默认非负
- B 目标函数只能以 MIN= 开始定义
- C < 与 <= 的意义相同
- D 说明语句以！开始，且必须以；结束
- E 决策变量可以用汉字命名

提交

主观题　3分　设置

以下数学规划是线性规划吗?
如果不是，有办法转化为线性规划吗?

$$\min z = |x1| + 2|x2| + 3|x3+5| + 4|x4-3|$$
s.t.
$$\begin{aligned} x1 - x2 - x3 + x4 &\le 0 \\ 2x1 - x2 + x3 - 3x4 &\le 1 \\ x1 - 2x2 - 2x3 + 2x4 &\le -3 \end{aligned}$$

正常使用主观题需2.0以上版本雨课堂

作答

含有绝对值的优化问题

Min |x1|+|x2|+…+|xn|
s.t. $Ax \le b$

$ui=(|xi|+xi)/2$　(≥ 0)
$vi=(|xi|-xi)/2$　(≥ 0)
→
$xi = ui-vi$
$|xi| = ui+vi$

Min $\sum$ (ui+vi)
s.t. $A(u-v) \le b$
u, v ≥ 0

布置实验内容

实验目的

- 掌握用MATLAB优化工具箱和LINGO解线性规划的方法；
- 练习建立实际问题的线性规划模型。

实验内容

见网络学堂