大学数学实验

实验10 整数规划

清 华 大 学 数 学 科 学 系

基本内容

整数规划: Integer Programming (IP)

1. 实例及其数学模型
2. 基本原理与解法
   - 分枝定界法
   - 动态规划法
3. LINGO软件的使用

实例1：选课问题

校规：学生每学期选修的总学分不能少于20，任选课学分不能少于总学分的1/6，也不能超过总学分数的1/3

限选课课号	1	2	3	4	5	6	7	8		
学分	5	5	4	4	3	3	3	2		
同时选修要求					1		2			
任选课课号	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
学分	3	3	3	2	2	2	1	1	1	1
同时选修要求	8	6	4	5	7	6				

本学期必修课只有一门（2学分）；限选课有8门，任选课有10门，最少应该选几门课？

决策变量：x_i（=1选修课程i，=0不选修课程i）

目标函数：选修课程之和

约束条件：选修课程 i 时必须选修课程 j： $x_j \ge x_i$

$y1$，$y2$ 分别表示选修的限选课、任选课的学分数，y 表示总学分数

$$Min \sum_{i=1}^{18} x_i$$

$$s.t. \quad y_1 = 5x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 4x_4 + 3x_5 + 3x_6 + 3x_7 + 2x_8$$

$$y_2 = 3x_9 + 3x_{10} + 3x_{11} + 2x_{12} + 2x_{13} + 2x_{14} + x_{15} + x_{16} + x_{17} + x_{18}$$

$$y = y_1 + y_2 + 2, \quad y \ge 20, \quad y \le 6y_2, \quad y \ge 3y_2$$

$$x_1 \ge x_5, \quad x_2 \ge x_7, \quad x_8 \ge x_9, \quad x_6 \ge x_{10}$$

$$x_4 \ge x_{11}, \quad x_5 \ge x_{12}, \quad x_7 \ge x_{13}, \quad x_6 \ge x_{14}$$

$$x_i \in \{0,1\}$$

0-1规划(一种特殊整数规划)

$$y_1 = 5x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 4x_4 + 3x_5 + 3x_6 + 3x_7 + 2x_8$$

$$y_2 = 3x_9 + 3x_{10} + 3x_{11} + 2x_{12} + 2x_{13} + 2x_{14} + x_{15} + x_{16} + x_{17} + x_{18}$$

$$y = y_1 + y_2 + 2, \quad y \ge 20, \quad y \le 6y_2, \quad y \ge 3y_2$$

$$x_1 \ge x_5, \quad x_2 \ge x_7, \quad x_8 \ge x_9, \quad x_6 \ge x_{10}$$

$$x_4 \ge x_{11}, \quad x_5 \ge x_{12}, \quad x_7 \ge x_{13}, \quad x_6 \ge x_{14}$$

$x_i \in \{0,1\}$ ➡ $0 \le x_i \le 1$ LP松弛问题 演示：course101lin.lg4

线性规划（LP）最优解：（其他 x_i 为0）

$x_1 = x_2 = x_4 = x_{11} = 1$，$x_3 = 0.0833$，$x_6 = x_{10} = 0.1111$

- 四舍五入，选4门课程 1/2/4/11，共19个学分，太少；
- 向上取整，选7门(加 3/6/10)，共27个学分，太多？

整数规划一般不能通过解LP松弛问题得到最优解

实例2：钢管下料(cutting stock)问题

客户需求（成品）

原料钢管：每根19米

4米50根　　6米20根　　8米15根

问题1. 如何下料最节省？　节省的标准是什么？

问题2. 客户增加需求：　5米10根

如果采用不同切割模式太多，会增加生产和管理成本；

现规定切割模式不能超过3种，如何下料最节省？

钢管下料　切割模式

按照客户需要在一根原料钢管上安排切割的一种组合。

4米1根　6米1根　8米1根　余料1米

4米1根　6米1根　6米1根　余料3米

8米1根　8米1根　余料3米

合理切割模式的余料应小于客户需要钢管的最小尺寸

假设：切割中没有损耗

钢管下料问题1　合理切割模式

模式	4米钢管根数	6米钢管根数	8米钢管根数	余料(米)
1	4	0	0	3
2	3	1	0	1
3	2	0	1	3
4	1	2	0	3
5	1	1	1	1
6	0	3	0	1
7	0	0	2	3

为满足客户需要，按照哪些合理切割模式，每种模式切割多少根原料钢管，最为节省？

两种标准

1. 总余料：原料钢管剩余总余量最小
2. 总根数：所用原料钢管总根数最少

主观题 2分　设置

以上两个最小化的目标函数（总余料、总根数），

你觉得假设分别是什么（分别适合于什么情形）？

正常使用主观题需2.0以上版本雨课堂

作答

决策变量

x_i~按第i种模式切割的原料钢管根数(i=1,2,…7)

目标1（总余量） $Min\ Z_1 = 3x_1 + x_2 + 3x_3 + 3x_4 + x_5 + x_6 + 3x_7$

模式	4米根数	6米根数	8米根数	余料
1	4	0	0	3
2	3	1	0	1
3	2	0	1	3
4	1	2	0	3
5	1	1	1	1
6	0	3	0	1
7	0	0	2	3
需求	50	20	15	

约束　满足需求

$4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 \ge 50$

$x_2 + 2x_4 + x_5 + 3x_6 \ge 20$

$x_3 + x_5 + 2x_7 \ge 15$

整数约束：x_i为整数

钢管下料问题1

当满足需求外的成品没有用处（也看成“余料”）时，通常以总根数最少为目标

目标2（总根数） $Min\ Z_2 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7$

约束条件不变

$4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 \ge 50$

$x_2 + 2x_4 + x_5 + 3x_6 \ge 20$

$x_3 + x_5 + 2x_7 \ge 15$

x_i为整数

以上两个模型均是一般整数线性规划

钢管下料问题2

增加一种需求：5米10根；切割模式不超过3种。

现有4种需求：4米50根，5米10根，6米20根，8米15根，用枚举法确定合理切割模式，过于复杂。

对大规模问题：通过模型的约束条件界定合理模式

决策变量

x_i~按第i种模式切割的原料钢管根数(i=1,2,3)

$r_{1i}, r_{2i}, r_{3i}, r_{4i}$~第$i$种切割模式下，每根原料钢管生产4米、5米、6米和8米长的（成品）钢管的数量

钢管下料问题2

目标函数（总根数） $Min\ \ x_1 + x_2 + x_3$

约束条件

满足需求

$$r_{11}x_1 + r_{12}x_2 + r_{13}x_3 \ge 50$$
$$r_{21}x_1 + r_{22}x_2 + r_{23}x_3 \ge 10$$
$$r_{31}x_1 + r_{32}x_2 + r_{33}x_3 \ge 20$$
$$r_{41}x_1 + r_{42}x_2 + r_{43}x_3 \ge 15$$

模式合理：每根余料不超过3米

$$16 \le 4r_{11} + 5r_{21} + 6r_{31} + 8r_{41} \le 19$$
$$16 \le 4r_{12} + 5r_{22} + 6r_{32} + 8r_{42} \le 19$$
$$16 \le 4r_{13} + 5r_{23} + 6r_{33} + 8r_{43} \le 19$$

整数约束： $x_i, r_{1i}, r_{2i}, r_{3i}, r_{4i}$ $(i=1,2,3)$ 为整数

整数非线性规划

实例3： 饮料的生产批量(lot-sizing)问题

饮料厂使用同一条生产线轮流生产多种饮料。

若某周开工生产某种饮料, 需支出生产准备费3千元。

某种饮料4周的需求量

周次	需求量(千箱)
1	2
2	3
3	2
4	4
合计	11

生产成本（可变成本）：

50元/箱 (50千元/千箱)

存 贮 费:

每周每千箱饮料1千元

- 安排生产计划, 满足每周的需求, 使4周总费用最小。

生产批量问题的一般提法

c_t~时段t生产费用(元/件)；

h_t~时段t(末)库存费(元/件)；

s_t~时段t生产准备费(元)；

d_t~时段t市场需求(件)；

（以上参数非负）

假设初始库存为0

制订生产计划，满足需求, 并使T个时段的总费用最小。

决策变量

x_t~时段t生产量；

I_t~时段t(末)库存量；

y_t=1 ~时段t开工生产（y_t=0 ~不开工）。

目标

$$\min\ z = \sum_{t=1}^{T} (s_t y_t + c_t x_t + h_t I_t)$$

约束

$$I_{t-1} + x_t - I_t = d_t$$
$$y_t = \begin{cases} 1, & x_t > 0, \\ 0, & x_t = 0, \end{cases}$$
$$I_0 = I_T = 0,\ x_t, I_t \ge 0$$

生产批量问题的一般提法

$$\min\ z = \sum_{t=1}^{T} (s_t y_t + c_t x_t + h_t I_t)$$
$$I_{t-1} + x_t - I_t = d_t$$
$$y_t = \begin{cases} 1, & x_t > 0, \\ 0, & x_t = 0, \end{cases}$$
$$I_0 = I_T = 0,\ x_t, I_t \ge 0$$

整数线性规划？

整数非线性规划？

混合整数非线性规划

混合0-1（整数）非线性规划

主观题 2分 设置

$$\min\ z = \sum_{t=1}^{T} (s_t y_t + c_t x_t + h_t I_t)$$
$$I_{t-1} + x_t - I_t = d_t$$
$$y_t = \begin{cases} 1, & x_t > 0, \\ 0, & x_t = 0, \end{cases}$$
$$I_0 = I_T = 0,\ x_t, I_t \ge 0$$

这个问题能够线性化吗?

即能否转化为等价的混合0-1（整数）线性规划?

如果可以，怎么转化?

正常使用主观题需2.0以上版本雨课堂

作答

生产批量问题的一般提法

$$\min\ z = \sum_{t=1}^{T} (s_t y_t + c_t x_t + h_t I_t)$$
$$I_{t-1} + x_t - I_t = d_t$$
$$y_t = \begin{cases} 1, & x_t > 0, \\ 0, & x_t = 0, \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} x_t - My_t \le 0 \\ y_t \in \{0,1\} \end{array}}$$
$$I_0 = I_T = 0,\ x_t, I_t \ge 0$$

M是一个充分大的正数(本例可取M=11)

混合0-1非线性规划？

混合0-1线性规划

Lot-sizing problem (生产批量问题)

整数规划问题一般形式

$$\min_{x \in Z^n} \quad f(x)$$
$$s.t. \quad h_i(x) = 0,\ i = 1, \dots, m$$
$$g_j(x) \le 0,\ j = 1, \dots, l$$

分 类

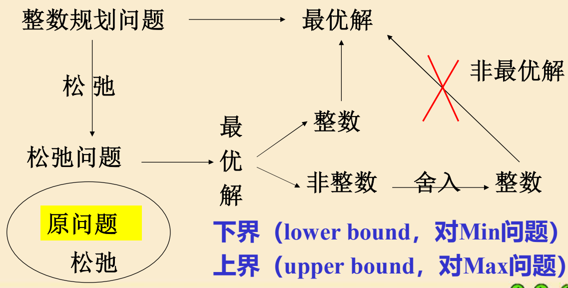
- 整数线性规划(ILP)　目标和约束均为线性函数
- 整数非线性规划(INLP) 目标或约束中存在非线性函数

- 纯(全)整数规划(PIP)　决策变量均为整数
- 混合整数规划(MIP)　决策变量有整数，也有实数

- 0-1规划　决策变量只取0或1

整数规划问题对应的松弛问题

取消整数规划中变量为整数的限制(松弛: Relaxation)，对应的连续优化问题称为原问题的松弛问题

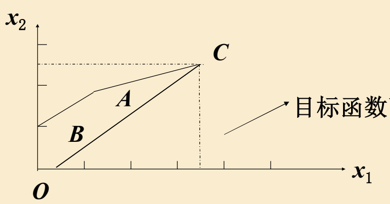


下界（lower bound，对Min问题）

上界（upper bound，对Max问题）

整数规划问题对应的松弛问题

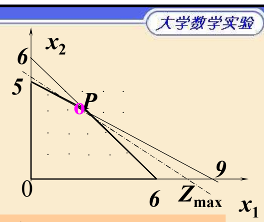
对松弛问题的最优解（分量）舍入为整数，得到的往往不是原整数规划问题的最优解（甚至不是可行解）



IP可行解对应于整点A(2, 2)和B(1, 1)，而最优解为A点.

但LP松弛的最优解为C(3.5, 2.5)

$$\max \quad z = 5x_1 + 8x_2$$
$$s.t. \quad x_1 + x_2 \le 6$$
$$5x_1 + 9x_2 \le 45$$
$$x_1, x_2 \ge 0 \text{ 且为整数}$$



去掉整数限制后，可行域为点（0,0), (6,0), (0,5), P (2.25,3.75) 围成的4边形

LP 最优解 P	P 的舍入解	最靠近 P 的可行解	IP 最优解
（2.25，3.75） z=41.25	（2，4） 不可行	（2，3） z=34	（0，5） z=40

从LP最优解经过简单的“移动”不一定得到IP最优解

整数规划的分枝定界法
(BB: Branch and Bound)

基本思想：隐式地枚举一切可行解（“分而治之”）

所谓分枝，就是逐次对解空间（可行域）进行划分；

所谓定界，是指对于每个分枝（或称子域），要计算原问题的最优解的下界（对极小化问题）.

这些下界用来在求解过程中判定是否需要对目前的分枝进一步划分，也就是尽可能去掉一些明显的非最优点，避免完全枚举.

对于极小化问题，在子域上解LP，其最优值是IP限定在该子域时的下界；IP任意可行点的函数值是IP的上界

线性IP

$$\min \quad z = c^T x$$
$$s.t. \quad Ax = b,\ x \ge 0 \qquad (P0)$$
$$A \in Z^{m \times n},\ m \le n$$

线性规划松弛定界

若在某一时刻，得到一个全整数解的费用为z_m，则z_m为原问题的一个上界；

否则得该分枝的一个下界，继续分枝.

(P1)
$$\min c^T x$$
$$s.t. \quad Ax = b$$
$$x \ge 0$$
$$x_i \ge \lfloor x_i^0 \rfloor + 1$$
$$x \in Z^n$$

(P2)
$$\min c^T x$$
$$s.t. \quad Ax = b$$
$$x \ge 0$$
$$x_i \le \lfloor x_i^0 \rfloor$$
$$x \in Z^n$$

分枝定界算法 – 例

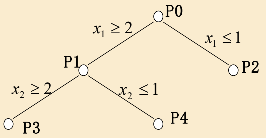
$$\min z = -x_1 - x_2$$

$$\text{(P0)}\quad s.t.\quad \begin{cases} 2x_1 - x_2 \ge \frac{1}{2} \\ 2x_1 + x_2 \le \frac{11}{2} \\ x_2 \ge \frac{1}{2} \\ x_1, x_2 \in Z^+ \end{cases}$$

该问题的LP松弛解为 $x^0 = (\frac{3}{2}, \frac{5}{2})^T$, 不是整数解, 最优值为 z_0=−4.

(P1)：(P0)加上 $x_1 \ge 2$ ；

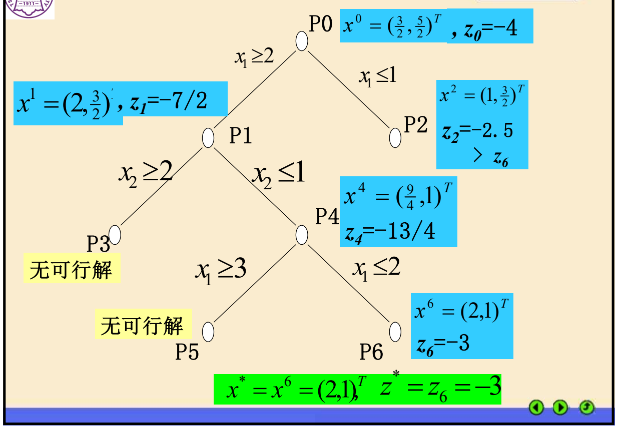
(P2)：(P0)加上 $x_1 \le 1$.



问题(P1)的LP松弛解为 $x^1 = (2, \frac{3}{2})^T$, 不是整数解, 最优值为 z_1=−3.5

(P3)：(P1)加上 $x_2 \ge 2$ ；

(P4)：(P1)加上 $x_2 \le 1$.



分枝定界算法(Min问题)

STEP0. 令activeset={0}(原问题); 上界 $U=\infty$； currentbest=0.

STEP1. 如果 activeset=∅, 则已经得到原问题的最优解, 结束; 否则从活跃分枝点集合 activeset 中选择一个分枝点 k； 将 k 从activeset中去掉, 继续STEP2.

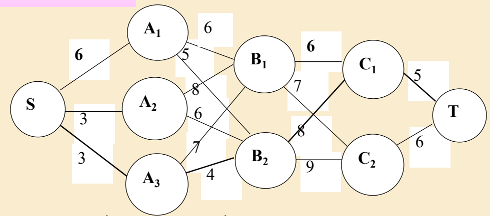
STEP2. 生成 k 的各分枝 i=1,2,…,n_k 及其对应的下界 z_i.

STEP3.对分枝 i=1,2,…,n_k ： 如果分枝 i 得到的是全整数解且 $z_i<U$, 则令 $U=z_i$ 且 currentbest=i； 如果分枝 i 得到的不是全整数解且 $z_i<U$, 则把 i 加入activeset中.

STEP4. 转STEP1.

整数规划的动态规划法

例：最短路问题　　求各点到T的最短路



$$L(i) = \min_{(i,j)\in A} \left(c_{ij} + L(j)\right)$$ 节点 i 到节点 T 的最短路长

$$L(T) = 0$$ 递推计算

最优化原理

“全过程的最优策略具有这样的性质：不管该最优策略上某状态以前的状态和决策如何，对该状态而言，余下的诸决策必定构成最优子策略. ”即：最优策略的任一后部子策略都是最优的.

这只是最优性定理的一个推论，即最优策略的必要条件.

最优子结构（Optimal Substructure）:

An optimal solution to the problem contains within it optimal solutions to subproblems.

建立动态规划模型的基本过程

（1） 正确划分阶段，选择阶段变量k.

（2） 对每个阶段，正确选择状态变量x_k. 选择状态变量时应当注意两点：一是要能够正确描述受控过程的演变特性，二是要满足无后效性.

（3） 对每个阶段，正确选择决策变量u_k.

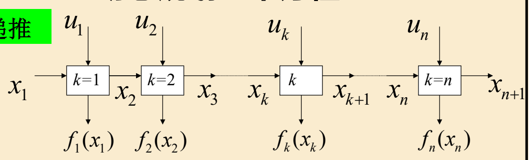
（4） 列出相邻阶段的状态转移方程： $x_{k+1}= T_k(x_k, u_k)$.

（5） 列出按阶段可分的准则函数$V_{1,n}$.

假设问题的目标是极小化

动态规划基本方程

逆序递推



$f_k(x_k)$表示第 k 阶段初始状态为x_k时，

k后部子过程(阶段$k,k+1,\ldots,n$)的最优准则函数

$$\begin{cases} f_k(x_k)=\min\limits_{u_k\in U_k}[v_k(x_k,u_k)+f_{k+1}(x_{k+1})] \\ f_{n+1}(x_{n+1})=0 \quad \text{(边界条件)} \end{cases} \qquad x_{k+1}=T_k(x_k,u_k)$$

应用动态规划方法的几个例子

资源分配问题： 某公司现有M台设备准备分配给该公司所属的N家工厂．当分配台u_k设备给工厂k时，工厂k利用这些设备为公司创造的利润（假设非负）为$g_k(u_k)$. 如何分配设备资源，使得公司总利润最大?

$$\max z=\sum_{k=1}^{N} g_k(u_k)$$

$$s.t. \quad \sum_{k=1}^{N} u_k = M$$

$$u_k \in Z^+$$

$g_k(u_k)$ 工厂 k / 设备数 u_k	1	2	3
0	0	0	0
1	4	2	3
2	6	5	5
3	7	6	7
4	7	8	8

可能是非线性整数规划，甚至$g_k(u_k)$没有显式表达式

共有N个工厂，可以把问题分解为N个阶段：

当阶段$k=N$时，把手中设备分配给工厂N;

当阶段$k=N-1$时，把手中设备分配给工厂$N-1$;

依次类推;

当阶段$k=1$时，把手中设备分配给工厂1.

状态变量x_k – 第k阶段初分配者手中拥有的设备台数.

由题意可知 $x_0=M$， $x_{N+1}=0$

决策变量u_k：第k阶段分配给工厂k的设备台数 $0\le u_k\le x_k$

状态转移方程 $x_{k+1}=x_k-u_k$

阶段的准则函数为 $v_k(x_k,u_k)=g_k(u_k)$

资源分配问题

用$f_k(x_k)$ 表示将手中资源x_k分配给工厂$k,k+1,\ldots,N$ 时的最大利润，原问题即为计算$f_1(M)$

$$\begin{cases} f_k(x_k)=\max\limits_{0\le u_k\le x_k}[g_k(u_k)+f_{k+1}(x_{k+1})], k=N,N-1,\cdots,1, \\ f_{N+1}(x_{N+1})=0. \end{cases}$$

具体计算（例）

M=4，N=3，边界条件 $f_4(x_4)=f_4(0)=0$

k=3时：$f_3(x_3)=\max\limits_{0\le u_3\le x_3}[g_3(u_3)+f_4(0)]=g_3(x_3)$ （增函数）

$f_3(0)=g_3(0)=0;\ f_3(1)=g_3(1)=3;\ f_3(2)=g_3(2)=5;$

$f_3(3)=g_3(3)=7;\ f_3(4)=g_3(4)=8$

资源分配问题

k=2时：$f_2(x_2)=\max\limits_{0\le u_2\le x_2}[g_2(u_2)+f_3(x_3)]=\max\limits_{0\le u_2\le x_2}[g_2(u_2)+f_3(x_2-u_2)]$

$$f_2(0)=\max_{0\le u_2\le 0}[g_2(u_2)+f_3(0-u_2)]=g_2(0)+f_3(0)=0+0=0;$$

$$f_2(1)=\max_{0\le u_2\le 1}[g_2(u_2)+f_3(1-u_2)]=\max\{g_2(0)+f_3(1),g_2(1)+f_3(0)\}$$
$$=\max\{0+3,2+0\}=3;$$

$$f_2(2)=\max_{0\le u_2\le 2}[g_2(u_2)+f_3(2-u_2)]=\max\{g_2(0)+f_3(2),g_2(1)+f_3(1),g_2(2)+f_3(0)\}$$
$$=\max\{0+5,2+3,5+0\}=5;$$

$$f_2(3)=\max_{0\le u_2\le 3}[g_2(u_2)+f_3(3-u_2)]$$
$$=\max\{g_2(0)+f_3(3),g_2(1)+f_3(2),g_2(2)+f_3(1),g_2(3)+f_3(0)\}$$
$$=\max\{0+7,2+5,5+3,6+0\}=8;$$

$$f_2(4)=\max_{0\le u_2\le 4}[g_2(u_2)+f_3(4-u_2)]$$
$$=\max\{g_2(0)+f_3(4),g_2(1)+f_3(3),g_2(2)+f_3(2),g_2(3)+f_3(1),g_2(4)+f_3(0)\}$$
$$=\max\{0+8,2+7,5+5,6+3,8+0\}=10;$$

资源分配问题

k=1时： $f_1(x_1)=\max\limits_{0\le u_1\le x_1}[g_1(u_1)+f_2(x_2)]=\max\limits_{0\le u_1\le x_1}[g_1(u_1)+f_2(x_1-u_1)]$

$$f_1(4)=\max_{0\le u_1\le 4}[g_1(u_1)+f_2(4-u_1)]$$
$$=\max\{g_1(0)+f_2(4),g_1(1)+f_2(3),g_1(2)+f_2(2),g_1(3)+f_2(1),g_1(4)+f_2(0)\}$$
$$=\max\{0+10,4+8,6+5,7+3,7+0\}=12.$$

最优解 $u_1^*=1,u_2^*=2,u_3^*=1$，最大利润为 $z^*=f_1(4)=12$.

推广：非线性整数规划问题，如：

$$\min z=x_1^2+2x_2^2+4x_3^2-x_1-3x_2-5x_3$$
$$s.t. \quad x_1+x_2+x_3=4$$
$$x_1,x_2,x_3\in Z^+$$

M=4, N=3

$g_1(u_1)=u_1^2-u_1$

$g_2(u_2)=2u_2^2-3u_2$

$g_3(u_3)=4u_3^2-5u_3$

清华大学　大学数学实验

应用动态规划方法解整数规划

实例3：单产品、无能力限制的批量问题

$$\min z=\sum_{t=1}^{T}(s_t y_t + c_t x_t + h_t I_t)$$

$$\begin{aligned}
s.t.\quad & I_{t-1}+x_t-I_t=d_t, \qquad t=1,2,\cdots,T,\\
& y_t=\begin{cases}1, & x_t>0,\\ 0, & x_t=0,\end{cases} \qquad t=1,2,\cdots,T,\\
& I_0=0,\\
& x_t, I_t \ge 0, \qquad t=1,2,\cdots,T.
\end{aligned}$$

清华大学　大学数学实验

假设费用均非负，则在最优解中 $I_0=I_T=0$ ，即 $\sum_{t=1}^{T}x_t=\sum_{t=1}^{T}d_t$

可以证明：一定存在满足条件 $I_{t-1}x_t=0(1\le t\le T)$ 的最优解.

可以只考虑 $x_t\in\{0,d_t,d_t+d_{t+1},\cdots,d_t+d_{t+1}+\cdots+d_T\}$

用f_t表示当t时段初始库存为0时，从t时段到T 时段的子问题的最优费用值

$$\begin{cases} f_{T+1}=0,\\ f_t=\begin{cases} f_{t+1}, & d_t=0.\\ \min\limits_{t+1\le\tau\le T+1}[s_t+c_t\sum_{i=t}^{\tau-1}d_i+\sum_{i=t+1}^{\tau-1}d_i\sum_{j=t}^{i-1}h_j+f_\tau], & d_t>0,\end{cases} & 1\le t\le T.\end{cases}$$

最优值（费用）为 f_1.

清华大学　大学数学实验

$T=4, s_t=3$（千元），$c_t=50$（千元），$h_t=1$ （千元/千件）

$d_1=2\quad d_2=3\quad d_3=2\quad d_4=4$ （千件）

具体计算过程如下：

$f_5=0;\qquad f_4=3+50*4+0+0=203;$

$f_3=\min\{3+50(2+4)+1*4+0, 3+50*2+0+11\}=306;$

$f_2=\min\{3+50(3+2+4)+1(2+4)+1*4+0, 3+50(3+2)+1*2+11, 3+50*3+0+18\}=458;$

$f_1=\min\{3+50(2+3+2+4)+1(3+2+4)+1(2+4)+1*4+0, 3+50(2+3+2)+1(3+2)+1*2+11, 3+50(2+3)+1*3+18, 3+50*2+0+26\}=561$

X=(2,5,0,4), 最优值为561（千元）

多选题 2分　设置

对于这个问题，假设费用系数均大于0，以下说法正确的是

$$\min z=\sum_{t=1}^{T}(s_t y_t + c_t x_t + h_t I_t)$$

$$\begin{aligned}
s.t.\quad & I_{t-1}+x_t-I_t=d_t, \qquad t=1,2,\cdots,T,\\
& y_t=\begin{cases}1, & x_t>0,\\ 0, & x_t=0,\end{cases} \qquad t=1,2,\cdots,T,\\
& I_0=0,\\
& x_t, I_t \ge 0, \qquad t=1,2,\cdots,T.
\end{aligned}$$

A 这是一个NP难问题，不存在多项式算法

B 一定存在满足条件 $I_{t-1}x_t=0(1\le t\le T)$ 的最优解

C 可以在 $O(T^2)$ 时间内求解

D 最优解中可能 $I_T>0$

提交

多选题 2分　设置

关于整数规划问题的解法，下列说法正确的是

A **整数线性规划的分支定界法可以推广到求解整数非线性规划**

B **整数线性规划的分支定界法是多项式时间算法**

C **整数规划都可以采用动态规划法求解**

D **只有特殊的整数规划可用动态规划法求解**

E **以上都不对**

提交

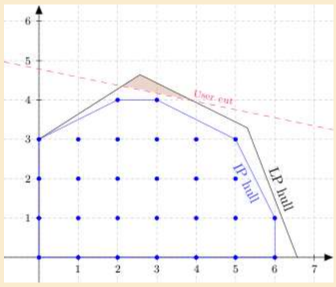
清华大学　大学数学实验

整数规划的割平面法

基本思想　　**割平面（cutting plane）**

增加的约束，
➔ 缩小了可行域

但是不改变：
原问题的最优解
如：只割去非整数点；
或非最优的整数点



MATLAB优化工具箱（OT：Optimization Toolbox）

另有GOT (Global OT)

- 连续优化
  - 无约束优化
    - 非线性极小 fminunc
    - 非光滑(不可微)优化 fminsearch
    - 非线性方程(组) fzero fsolve
    - 非线性最小二乘 lsqnonlin lsqcurvefit
    - 全局优化 GOT
  - 约束优化
    - 线性规划 linprog
    - 二次规划 quadprog
    - 非线性规划 fmincon fminimax fgoalattain fseminf
    - 约束线性最小二乘 lsqnonneg lsqlin
    - 上下界约束 fminbnd fmincon lsqnonlin lsqcurvefit
- 离散优化
  - 线性MIP: intlinprog
  - 非线性MIP (GOT)

MATLAB 求解混合整数线性规划(MILP)

$$\min\ z = c^T x$$

$$s.t.\ \ A_1 x \le b_1,\ A_2 x = b_2,\ v_1 \le x \le v_2$$

x：一些（可能全部）分量是整数

```
[x,fval,exitflag,output] =
intlinprog(c,ic,A1,b1,A2,b2,v1,v2,x0,opt)
```

输入：

ic ~ 整数变量下标集合

x0 ~ 非必须(提供需可行)

opt ~ 选项

中间缺项需补[]

输出：

没有Lagrange乘子

算法：

预处理、启发式算法、LP松弛、分支定界

optimoptions: intlinprog 的部分特殊选项

AbsoluteGapTolerance	上下界的绝对误差限(缺省0)
RelativeGapTolerance	上下界的相对误差限(缺省1e-4)
MaxTime	最大时间，缺省7200(秒)，2小时
MaxNodes	最大分支节点数（缺省1e7）
MaxFeasiblePoints	最大可行点数（缺省Inf）

以上为“stop”选项；以下不是“stop”选项

IntegerTolerance	整数的绝对误差限(缺省1e-5)
ConstraintTolerance	约束的绝对误差限(缺省1e-4)
ObjectiveImprovementThreshold	迭代改进阈值(缺省0)
ObjectiveCutOff	剪去下界超过此值的节点(缺省Inf)

optimoptions: intlinprog 的部分特殊选项

RootLPAlgorithm	{‘dual-simplex’} | ‘primal-simplex’
RootLPMaxIterations	求解LP的最大迭代数 缺省值：max(3e4,(约数+变量个数)*10)
LPOptimalityTolerance	进基变量最小检验数(缺省1e-7)
BranchRule	{‘reliability’} | strongpscost | ‘maxpscost’ | ‘mostfractional’ | ‘maxfun’
CutGeneration	‘none’ | {‘basic’} | ‘intermediate’ | ‘advanced’
CutMaxIterations	割的最大迭代次数（缺省10）
Heuristics	可行点的搜索算法(选项很多，缺省‘basic’)

……

MATLAB 求解混合整数线性规划(MILP)

实例3：单产品、无能力限制的批量问题

$$\min\ z = \sum_{t=1}^{T}(s_t y_t + c_t x_t + h_t I_t)$$

$$I_{t-1} + x_t - I_t = d_t$$

$$y_t = \begin{cases} 1, & x_t > 0, \\ 0, & x_t = 0, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{array}{l} x_t - M y_t \le 0 \\ y_t \in \{0,1\} \end{array}}$$

$$I_0 = I_T = 0,\ x_t, I_t \ge 0$$

*M*是一个充分大的正数（这里可取*M*= 11）

混合线性0-1规划

变量：(*x*,*y*,*I*)

整数0-1变量：*y*

约束：矩阵形式

演示：Shili1003.m

LINGO软件的求解过程

LINGO预处理程序 → 1. 确定常数 2. 识别类型

LP　QP　NLP　IP　全局优化(选)

分枝定界管理程序

ILP　IQP　INLP

线性优化求解程序：

1. 单纯形算法
2. 内点算法(选)

非线性优化求解程序：

1、顺序线性规划法(SLP)
2、广义既约梯度法(GRG) (选)
3、多点搜索(Multistart) (选)

清华大学 大学数学实验

实例1：选课问题

演示：
course101lin.lg4
course101bin.lg4
course101max.lg4

清华大学 大学数学实验

实例2：钢管下料(问题1)

目标1（总余量） $Min\ Z_1 = 3x_1 + x_2 + 3x_3 + 3x_4 + x_5 + x_6 + 3x_7$

$$4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 \ge 50$$
$$x_2 + 2x_4 + x_5 + 3x_6 \ge 20$$
$$x_3 + x_5 + 2x_7 \ge 15$$
x_i 为整数

演示：
cut01a.lg4

最优解：x_2=12, x_5=15，其余为0；
最优值：27

按模式2切割12根，按模式5切割15根，余料27米

清华大学 大学数学实验

实例2：钢管下料(问题1)

目标2（总根数） $Min\ Z_2 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7$

$$4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 \ge 50$$
$$x_2 + 2x_4 + x_5 + 3x_6 \ge 20$$
$$x_3 + x_5 + 2x_7 \ge 15$$
x_i 为整数

最优解：x_2=15, x_5=5, x_7=5, 其余为0；
最优值：25。

演示：
cut01b.lg4

按模式2切割15根，
按模式5切割5根，
按模式7切割5根，
共25根，余料35米

与目标1的结果“共切割27根，余料27米” 相比：
虽余料增加8米，但减少了2根

当余料没有用处时，通常以总根数最少为目标

清华大学 大学数学实验

实例2：钢管下料(问题2)

目标函数（总根数）

$$Min\ \ x_1 + x_2 + x_3$$

$$r_{11}x_1 + r_{12}x_2 + r_{13}x_3 \ge 50$$
$$r_{21}x_1 + r_{22}x_2 + r_{23}x_3 \ge 10$$
$$r_{31}x_1 + r_{32}x_2 + r_{33}x_3 \ge 20$$
$$r_{41}x_1 + r_{42}x_2 + r_{43}x_3 \ge 15$$

$$16 \le 4r_{11} + 5r_{21} + 6r_{31} + 8r_{41} \le 19$$
$$16 \le 4r_{12} + 5r_{22} + 6r_{32} + 8r_{42} \le 19$$
$$16 \le 4r_{13} + 5r_{23} + 6r_{33} + 8r_{43} \le 19$$

$x_i, r_{1i}, r_{2i}, r_{3i}, r_{4i}$ (i=1,2,3) 为整数

清华大学 大学数学实验

实例2：钢管下料(问题2)

增加约束，缩小可行域，便于求解

需求：4米50根，5米10根，6米20根，8米15根

每根原料钢管长19米

原料钢管总根数下界： $\left\lceil \dfrac{4\times50+5\times10+6\times20+8\times15}{19} \right\rceil = 26$

特殊生产计划：对每根原料钢管
模式1：切割成4根4米钢管，需13根；
模式2：切割成1根5米和2根6米钢管，需10根；
模式3：切割成2根8米钢管，需8根。
原料钢管总根数上界：31

$$26 \le x_1 + x_2 + x_3 \le 31$$

模式排列顺序可任定 $x_1 \ge x_2 \ge x_3$

清华大学 大学数学实验

实例2：钢管下料(问题2)

Local optimal solution found at iteration: 12211
Objective value: 28.00000

Variable	Value	Reduced Cost
X1	10.00000	0.000000
X2	10.00000	2.000000
X3	8.000000	1.000000
R11	3.000000	0.000000
R12	2.000000	0.000000
R13	0.000000	0.000000
R21	0.000000	0.000000
R22	1.000000	0.000000
R23	0.000000	0.000000
R31	1.000000	0.000000
R32	1.000000	0.000000
R33	0.000000	0.000000
R41	0.000000	0.000000
R42	0.000000	0.000000
R43	2.000000	0.000000

演示cut02a.lg4； cut02b.lg4

模式1：每根原料钢管切割成3根4米和1根6米钢管，共10根；

模式2：每根原料钢管切割成2根4米、1根5米和1根6米钢管，共10根；

模式3：每根原料钢管切割成2根8米钢管，共8根。

原料钢管总根数为28根。

大学数学实验

实例3：生产批量问题

演示：
lotsize.lg4

单选题 2分

设置

为了表明 x 是0-1整数变量、y是一般整数变量，
LINGO中对应的语句是

- A @bin(x); @bin(y);
- B @bin(x); @gin(y);
- C @gin(x); @bin(y);
- D @gin(x); @gin(y);
- E 以上都不对

提交

大学数学实验

布置实验

目的

1)掌握用Matlab和LINGO软件求解整数规划，并对结果作初步分析；

2) 通过实例练习用整数规划求解实际问题。

内容　　见网络学堂