大学数学实验

实验6 非线性方程求解

清 华 大 学 数 学 科 学 系

"一元一次方程太贵"

什么叫方程（组）？

方程：包含未知数（或/和未知函数）的等式

方程组：包含未知数（或/和未知函数）的一组等式

不包含未知函数的方程组的一般形式： F(x)=0

$x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)^T$, $F(x)=(f_1(x),f_2(x),\ldots,f_m(x))^T$ （一般m=n）

满足方程（组）的未知数（即"元"）的取值，称为方程（组）的解，或称为F(x)的零点。

单变量方程(一元方程)：f(x)=0, "解"也称为"根"

非线性方程的特点

方程分类：

- 代数方程：$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n=0$ （n=1: 线性, 特别）
- 超越方程：包含超越函数(如sin$x$, e^x, ln$x$)的方程
- 非线性方程：$n(\geq2)$次代数方程和超越方程

（一元）方程：根的特点

- n次代数方程有且只有n个根(包括复根、重根)
- 5次以上的代数方程无求根公式
- 超越方程有无根，有几个根通常难以判断

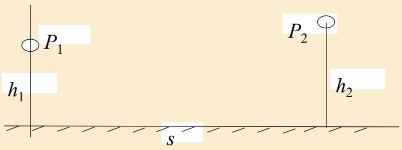
实验6的基本内容

1. 非线性方程 $f(x)=0$ 的数值解法：
   - 迭代方法的基本原理；
   - 牛顿法；拟牛顿法；
   - 收敛性
2. 推广到解非线性方程组
3. 实际问题中非线性方程的数值解
4. 非线性差分方程与分岔及混沌现象

实例1 路灯照明

道路两侧分别安装路灯，在漆黑的夜晚，当两只路灯开启时，两只路灯连线的路面上最暗的点和最亮的点在哪里？

- 如果P_2的高度可以在3米到9米之间变化，如何使路面上最暗点的亮度最大？
- 如果两只路灯的高度均可以在3米到9米之间变化呢？



s=20(米)

P_1=2, P_2=3(千瓦)

h_1=5, h_2=6(米)

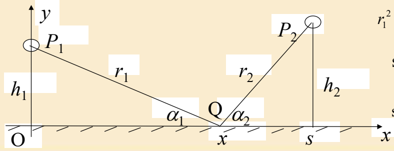
实例1 路灯照明

建立坐标系如图，两个光源在点$Q(x,0)$的照度分别为

$$I_1 = k\frac{P_1\sin\alpha_1}{r_1^2},\quad I_2 = k\frac{P_2\sin\alpha_2}{r_2^2}$$

(**k**是由量纲单位决定的比例系数，不妨记**k=1**)

点**Q**的照度 $C(x)=\frac{P_1h_1}{\sqrt{(h_1^2+x^2)^3}}+\frac{P_2h_2}{\sqrt{(h_2^2+(s-x)^2)^3}}$



$$r_1^2=h_1^2+x^2,\quad r_2^2=h_2^2+(s-x)^2$$

$$\sin\alpha_1=\frac{h_1}{r_1}=\frac{h_1}{\sqrt{h_1^2+x^2}}$$

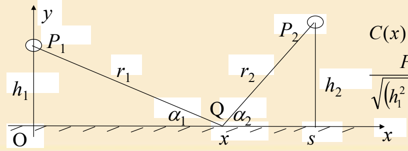
$$\sin\alpha_2=\frac{h_2}{r_2}=\frac{h_2}{\sqrt{h_2^2+(s-x)^2}}$$

实例1 路灯照明

为求最暗点和最亮点，先求$C(x)$的驻点

$$C'(x)=-3\frac{P_1h_1x}{\sqrt{(h_1^2+x^2)^5}}+3\frac{P_2h_2(s-x)}{\sqrt{(h_2^2+(s-x)^2)^5}}$$

令$C'(x)=0$：解析解是难以求出，需数值求解



$$C(x)=\frac{P_1h_1}{\sqrt{(h_1^2+x^2)^3}}+\frac{P_2h_2}{\sqrt{(h_2^2+(s-x)^2)^3}}$$

实例2 均相共沸混合物的组分

均相共沸混合物（homogeneous azeotrope）是由两种或两种以上物质组成的液体混合物，当在某种压力下被蒸馏或局部汽化时，在气体状态下和在液体状态下保持相同的组分（比例）

给定几种物质，如何确定它们构成均相共沸混合物时的比例？

模型建立

设该混合物由n个可能的物质组成，物质i所占的比例为x_i

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1,\quad x_i \ge 0$$

实例2 均相共沸混合物的组分

均相共沸混合物应该满足稳定条件，即共沸混合物的每个组分在气体和液体状态下具有相同的化学势能。在压强P不大的情况下，这个条件可以表示为：$P=\gamma_i P_i,\quad i=1,\cdots,n$

P_i是物质i的饱和汽相压强，与温度T有关，可以如下确定：

$$\ln P_i = a_i - \frac{b_i}{T+c_i},\quad i=1,\cdots,n \quad (a_i, b_i, c_i \text{是常数})$$

γ_i是组分i的液相活度系数，可以根据如下表达式确定：

$$\ln\gamma_i = 1-\ln\left(\sum_{j=1}^{n}x_jq_{ij}\right)-\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{x_jq_{ji}}{\sum_{k=1}^{n}x_kq_{jk}}\right),\quad i=1,\cdots,n$$

(q_{ij}表示组分i与组分j的交互作用参数，可以通过实验近似得到)

实例2 均相共沸混合物的组分

$$P=\gamma_iP_i \qquad \ln P_i = a_i-\frac{b_i}{T+c_i} \qquad \ln\gamma_i = 1-\ln\left(\sum_{j=1}^{n}x_jq_{ij}\right)-\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{x_jq_{ji}}{\sum_{k=1}^{n}x_kq_{jk}}\right)$$

$$\Rightarrow\quad \frac{b_i}{T+c_i}+\ln\left(\sum_{j=1}^{n}x_jq_{ij}\right)+\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{x_jq_{ji}}{\sum_{k=1}^{n}x_kq_{jk}}\right)-1-a_i+\ln P=0$$

只有当物质i参与到该共沸混合物中时才需要满足上式，故得到

$$x_i\left(\frac{b_i}{T+c_i}+\ln\left(\sum_{j=1}^{n}x_jq_{ij}\right)+\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{x_jq_{ji}}{\sum_{k=1}^{n}x_kq_{jk}}\right)-1-a_i+\ln P\right)=0$$

$$\sum_{i=1}^{n}x_i=1,\quad x_i\ge 0,\qquad i=1,2,\ldots,n$$

解析解是难以求出，需数值求解

（一元）非线性方程的基本解法

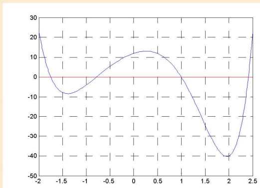
解方程$f(x)=0$第一步——确定根的大致范围

- 图形法：作$f(x)$图形, 观察$f(x)$与x轴的交点
- 根的隔离：二分法

图形法

$$x^6-2x^4-6x^3-13x^2+8x+12=0$$

Exam0600.m



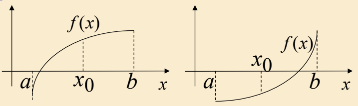
有4个根分别位于

x= -1.75, -0.75, 1.00，2.40附近

非线性方程的基本解法

二分法的原理 若对于 $a<b$，有 $f(a)\cdot f(b)<0$，则在 (a,b) 内 $f(x)$ 至少有一个零点，即 $f(x)=0$ 至少有一个根。

二分法的实现



$f(a)<0$
$f(b)>0$
$x_0:(a,b)$中点

$f(x_0)>0 \Rightarrow a_1=a,\ b_1=x_0$　　$f(x_0)<0 \Rightarrow a_1=x_0,\ b_1=b$

$(a,b)\Rightarrow(a_1,b_1)\Rightarrow\cdots\Rightarrow(a_n,b_n)\Rightarrow\cdots$

区间每次缩小一半，n足够大时，可确定根的范围（或近似解）

不足　收敛速度较慢

单选题　2分　设置

已知方程 $x^3-2x-5=0$ 在区间$[2,3]$存在唯一正根，若用二分法计算，至少迭代（　　）次可以保证误差不超过 $\frac{1}{2}\times10^{-3}$?

- A 8
- B 10
- C 12
- D 13
- E 以上都不对

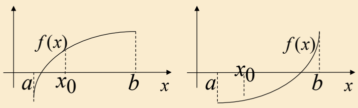
提交

非线性方程的基本解法

0.618法　（黄金分割法？）

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2}\approx 0.618$$

$f(a)<0$
$f(b)>0$



$f(x_0)>0 \Rightarrow a_1=a,\ b_1=x_0$　　$f(x_0)<0 \Rightarrow a_1=x_0,\ b_1=b$

$(a,b)\Rightarrow(a_1,b_1)\Rightarrow\cdots\Rightarrow(a_n,b_n)\Rightarrow\cdots$

问题　收敛速度优于二分法吗？

投票　最多可选1项　设置

上述0.618法与二分法相比，你觉得哪个更好？

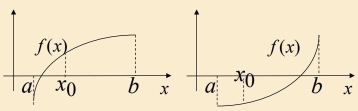
- A 0.618法
- B 二分法
- C 不分伯仲
- D 我不知道，不能草率下结论

提交

非线性方程的基本解法

0.618法　（黄金分割法？）

$f(a)<0$
$f(b)>0$



假设概率各为1/2(合理吗?)，则区间长度缩短到

期望值：$p * 1/2 + (1-p) * 1/2 = 1/2$　（p=0.618）

假设零点均匀分布，则区间长度缩短到

期望值：$p^2 + (1-p)^2 >= 1/2$　(二分法更好)

非线性方程迭代法的基本思想

将原方程 $f(x)=0$ 改写成容易迭代的形式 $x=\varphi(x)$，选合适的初值 x_0，进行迭代：$x_{k+1}=\varphi(x_k)$　$(k=0,1,2,\cdots)$

迭代函数

单步法

线性方程组的迭代法：迭代函数为线性

(迭代法) 相容性：　$f(x)=0 \Leftrightarrow x=\varphi(x)$

二分法是迭代法吗？　迭代法函数是什么？

多步（两步）法？---- 需要给定两个（多个）初值

非线性方程迭代法的基本思想

将原方程 $f(x)=0$ 改写成容易迭代的形式 $x=\varphi(x)$，选合适的初值 x_0，进行迭代：$x_{k+1}=\varphi(x_k)$ $(k=0,1,2,\cdots)$

例1 $f(x)=x^2+x-14=0$ $\Rightarrow x=\varphi(x)$

$f(3)=-2,\ f(4)=6$ 存在根 $x\in(3,4)$

$x=\varphi_1(x)=14-x^2$，迭代公式：$x_{k+1}=14-x_k^2$

$x=\varphi_2(x)=14/(x+1)$，迭代公式：$x_{k+1}=14/(x_k+1)$

$x=\varphi_3(x)=x-(x^2+x-14)/(2x+1)$，

迭代公式：$x_{k+1}=x_k-(x_k^2+x_k-14)/(2x_k+1)$

非线性方程的迭代法（例）

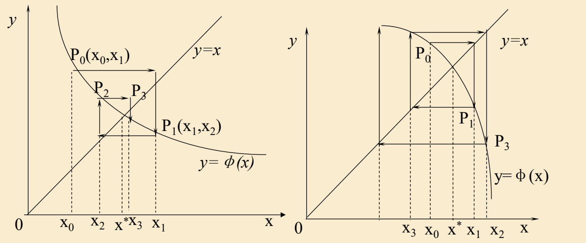
	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
φ_1	3.0000	5.0000	-11.0000	-107.0000		
φ_2	3.0000	3.5000	3.1111	3.4054	3.1779	3.3510
φ_3	3.0000	3.2857	3.2749	3.2749	3.2749	3.2749

$x_{1,2}=(-1\pm\sqrt{1+14\times4})/2,\ x^*=(-1+\sqrt{57})/2\approx3.2749$

φ_1 根本不收敛；φ_2 虽呈现收敛趋势，但很慢；φ_3 收敛很快。

迭代法的几何解释

$x_{k+1}=\varphi(x_k),\quad k=0,1,\cdots$ 不动点 $x^*=\varphi(x^*)$



$\{x_k\}$收敛于x^*

取决于曲线 $\varphi(x)$的斜率

$\{x_k\}$不收敛于x^*

迭代法的收敛性

设 $y=\varphi(x)$ 在 $a\le x\le b$ 可微，且 $a\le y\le b$，若存在 $L<1$ 使 $|\varphi'(x)|\le L$，则 $x=\varphi(x)$ 在 $a\le x\le b$ 有唯一解 x^*，且

1）对于 $x_0\in(a,b)$，迭代公式 $x_{k+1}=\varphi(x_k)$ $(k=0,1,2\cdots)$ 产生的序列 $\{x_k\}$ 收敛于 x^*；

大范围收敛(全局收敛)

2）$|x_{k+1}-x^*|\le L|x_k-x^*|$，$|x_k-x^*|\le\dfrac{L^k}{1-L}|x_1-x_0|$。

L不易确定 ⇨ 放宽定理条件，缩小初值范围

局部收敛性：只要 $\varphi(x)$ 在 x^* 的一个邻域可微且 $|\varphi'(x^*)|<1$，则对于该邻域内的任意初值 x_0，序列 $\{x_k\}$ 就收敛于 x^*。

迭代法的收敛速度（收敛阶）

记 $e_k=x_k-x^*$，若 $\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{e_{k+1}}{e_k^p}=c\ne0$（$p$ 为一正数） $c=0$：超p阶收敛

称序列 $\{x_k\}$ p 阶收敛。显然，p 越大收敛越快。

$$\varphi(x_k)=\varphi(x^*)+\varphi'(x^*)(x_k-x^*)+\cdots+\frac{\varphi^{(p)}(x^*)}{p!}(x_k-x^*)^p+\cdots$$

⇨ $e_{k+1}=\varphi'(x^*)e_k+\cdots+\dfrac{\varphi^{(p)}(x^*)}{p!}e_k^p+\cdots$

$\varphi'(x^*)\ne0$，$\{x_k\}$ 1阶收敛(线性收敛)

$\varphi'(x^*)=\cdots=\varphi^{(p-1)}(x^*)=0,\quad \varphi^{(p)}(x^*)\ne0$，$\{x_k\}$ p阶收敛

迭代法的收敛速度（例）

例题 $f(x)=x^2+x-14=0$ $\varphi_2(x)=14/(x+1)$

$\varphi_2'(x)=\dfrac{-14}{(x+1)^2},\ \varphi_2'(x^*)\ne0\Rightarrow\{x_k\}$ 1阶收敛

$$\varphi_3(x)=x-(x^2+x-14)/(2x+1)$$

$\varphi_3'(x)=\dfrac{2(x^2+x-14)}{(2x+1)^2},\ \varphi_3'(x^*)=0,$

$\varphi_3''(x^*)\ne0\Rightarrow\{x_k\}$2阶收敛

结论：$\varphi(x)$的构造决定收敛速度

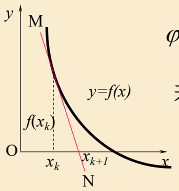
牛顿（切线）法

$f(x)$ 在 x_k 作 Taylor 展开，去掉2阶及2阶以上项得

$$f(x)=f(x_k)+f'(x_k)(x-x_k)$$

设 $f'(x_k)\neq 0$，用 x_{k+1} 代替右端的 x，由 $f(x)=0$ 得

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)},\quad \text{即令}\quad \varphi(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)}$$



$$\varphi'(x^*)=\frac{f(x^*)f''(x^*)}{f'(x^*)^2},\quad \varphi''(x^*)=\frac{f''(x^*)}{f'(x^*)}$$

若x^*为单根 $f(x^*)=0,\ f'(x^*),\ f''(x^*)\neq 0$

$\Rightarrow\ \varphi'(x^*)=0,\ \varphi''(x^*)\neq 0$

➔牛顿切线法（至少）2阶收敛

若x^*为重根 $f(x^*)=f'(x^*)=0\ \Rightarrow\ \varphi'(x^*)\neq 0$

牛顿切线法1阶收敛（线性）

如何证明？基本思路？

$$f(x)=(x-x^*)^m g(x),\ g(x^*)\neq 0.\quad m\geq 2$$

$$\varphi(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)} \rightarrow \varphi'(x)=\ ?$$

$$\rightarrow \varphi'(x^*)=\ ?\quad 1-\frac{1}{m}$$

重数越高，收敛越慢

多选题 2分 设置

当牛顿切线法满足收敛条件时，则

- A 收敛阶至少为2
- B 收敛阶至少为1.618
- C 收敛阶至少为1
- D 收敛阶与所求的根是单根还是重根有关
- E 我不知道，不能草率下结论

提交

主观题 4分 设置

你有什么思路，可以改进迭代办法，提高求解重根方程的收敛阶吗？

正常使用主观题需2.0以上版本雨课堂

作答

重根问题：修正到二阶收敛

方法1：

$$\varphi(x)=x-\frac{m f(x)}{f'(x)}$$

方法2：

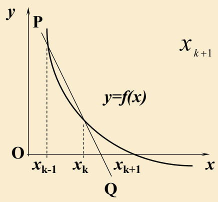
令 $\mu(x)=f(x)/f'(x)$，由x*是f(x)的m重零点，所以，x*是 $\mu(x)$ 的单零点.

$$\varphi(x)=x-\frac{\mu(x)}{\mu'(x)}=x-\frac{f(x)f'(x)}{[f'(x)]^2-f(x)f''(x)}$$

牛顿割线法

用差商 $\dfrac{f(x_k)-f(x_{k-1})}{x_k-x_{k-1}}$ 代替 $f'(x_k)$

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)(x_k-x_{k-1})}{f(x_k)-f(x_{k-1})}$$



收敛速度比牛顿切线法稍慢

x^*为单根时收敛阶数是 1.618

思考：你有思路证明其至少线性收敛吗？（证明1.618较难）

补充：Newton法简化、割线法推广

简化Newton法：线性收敛

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_0)} \quad 或 \quad x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{D}$$

抛物线法（Muller法）：收敛阶为1.839

$$x_{k+1}=x_k-\frac{2f(x_k)}{\omega_k+\mathrm{sgn}(\omega_k)\sqrt{\omega_k^2-4f(x_k)f[x_k,x_{k-1},x_{k-2}]}}$$

$$\omega_k=f[x_k,x_{k-1}]+(x_k-x_{k-1})f[x_k,x_{k-1},x_{k-2}]$$

单选题 2分 设置

上述牛顿切线法、割线法中的收敛性，一般是指

- A 局部收敛性
- B 全局收敛性
- C 两者均对
- D 全局收敛性（切线法）；局部收敛性（割线法）
- E 我不知道，不能草率下结论

提交

解非线性方程组的牛顿法

解方程 $f(x)=0$ 的牛顿切线法

$$f(x^{k+1})=f(x^k)+f'(x^k)(x^{k+1}-x^k)$$

$$x^{k+1}=x^k-\frac{f(x^k)}{f'(x^k)}$$

推广到解方程组

$$F(x)=0,\ x=[x_1,\cdots x_n]^T,\ F(x)=[f_1(x),\cdots f_n(x)]^T$$

$$f_i(x^{k+1})=f_i(x^k)+\frac{\partial f_i(x^k)}{\partial x_1}(x_1^{k+1}-x_1^k)$$

$$+\cdots+\frac{\partial f_i(x^k)}{\partial x_n}(x_n^{k+1}-x_n^k),\quad i=1,2,\cdots n$$

解非线性方程组的牛顿法

$$F(x)=0,\ x=[x_1,\cdots x_n]^T,\ F(x)=[f_1(x),\cdots f_n(x)]^T$$

$$F'(x)=\left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right]_{n\times n}=\begin{bmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots\cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}\\ \cdots\cdots & & \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots\cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}\end{bmatrix}$$

解方程 $f(x)=0$

$$f(x^{k+1})=f(x^k)+f'(x^k)(x^{k+1}-x^k)$$

$$x^{k+1}=x^k-\frac{f(x^k)}{f'(x^k)}$$

$$F(x^{k+1})=F(x^k)+F'(x^k)(x^{k+1}-x^k)$$

$$x^{k+1}=x^k-[F'(x^k)]^{-1}F(x^k)$$

$$\Rightarrow\ F'(x^k)\Delta x^k=-F(x^k) \qquad x^{k+1}=x^k+\Delta x^k$$

拟牛顿法(Quasi-Newton)

解方程 $f(x)=0$ 的牛顿割线法

$$f(x^{k+1})=f(x^k)+a^k(x^{k+1}-x^k)$$

$$x^{k+1}=x^k-\frac{f(x^k)}{a^k} \qquad a^k=\frac{f(x^k)-f(x^{k-1})}{x^k-x^{k-1}}$$

解方程组的拟牛顿法——用A^k代替$F'(x^k)$

使A^k满足 $A^k(x^k-x^{k-1})=F(x^k)-F(x^{k-1})$

矩阵A^k(n^2个未知数)不能由这样的n个方程确定

用迭代方法$A^k=A^{k-1}+\Delta A^{k-1}$ (ΔA有不同的构造)计算A^k

再求 $x^{k+1}=x^k-(A^k)^{-1}F(x^k)$

MATLAB优化工具箱解非线性方程

fzero: 单变量方程 f(x)=0 求根(变号点)

最简形式 x= fzero(@f, x0)

必须输入: ’f’为f.m函数名，’ x0’是迭代初值(或有根区间)

输出: ’x’是变号点的近似值(函数不连续时不一定是根)

一般形式 [x, fv, ef, out] = fzero(@f, x0, opt, P1, P2, ...)

可选输入: “P1,P2,...”是传给f.m的参数(如果需要的话)

’opt’是一个结构变量，控制参数(如精度TolX)

opt可用optimset设定, 不指定或指定为’ [ ]’时将采用缺省值

如: opt=optimset(‘TolX’,1e-8)

输出: ’fv’是函数值; ’ef’是程序停止运行的原因(1,0,-1);

’out’是一个结构变量, 包含:

iterations(迭代次数), funcCount (函数调用次数), algorithm(所用算法)

演示: examFzero.m

单选题 2分 设置

若单变量方程f(x)=0有解, 则用Matlab的fzero命令求解时:

- A 一定求得方程的所有解
- B 一定求得方程的至少一个解
- C 求得的不一定是方程的解
- D 我不知道，不能草率下结论

提交

MATLAB优化工具箱解非线性方程组

fsolve: 多变量方程组F(x)=0求解

x= fsolve(@F, x0)   最简形式

[x, fv, ef, out, jac] = fsolve(@F, x0, opt, P1, P2, ...) 一般形式

输入 ---- 与fzero类似，但:

'x0'是迭代初值,

'opt'中控制参数更多(如MaxFunEvals, MaxIter等)

输出 ---- 与fzero类似，但:

'out'中还输出'firstorderopt', 即结果（x点）处梯度向量的范数(实际上是1-范数，即分量按绝对值取最大的值);

'jac'输出x点所对应的雅可比矩阵

注: solve函数也可求解(符号工具箱)

MATLAB优化工具箱解非线性方程

牛顿法

需自行编制程序，如对切线法编写名为 newton.m 的 m 文件

多项式求根

当 $f(x)$ 为多项式时可用

r=roots(c)	输入多项式的系数 c（按降幂排列），输出 r 为 $f(x)=0$ 的全部根;
c=poly(r)	输入 $f(x)=0$ 的全部根 r，输出 c 为多项式的系数（按降幂排列）;
df=polyder(c)	输入多项式的系数 c（按降幂排列），输出 df 为多项式的微分的系数。

求解$f(x)$=0的newton.m文件

```
function [y,z]=newton(fv,df,x0,n,tol)
x(1)=x0; b=1; k=1;
while or(k==1,abs(b)>tol*abs(x(k)))
   x(k+1)=x(k)-feval(fv,x(k))/feval(df,x(k));
   b=x(k+1)-x(k);
   k=k+1;
   if(k>n)
   error('Error: Reached maximum iteration times');break;
   end
end
y=x(k-1);
if nargout>1
   z=k-1;
end
```

Newton.m

newton_run.m

[xx,k]=newton(inline('x^3-2*x-5'), inline('3*x^2-2'),0.5,100,1e-6)

fv是f(x)的函数句柄，df是f '(x)的函数句柄

例2 解 $x_1^2+x_2^2=4,\ x_1^2-x_2^2=1$

$$F(x)=\begin{bmatrix}x_1^2+x_2^2-4\\ x_1^2-x_2^2-1\end{bmatrix},\quad F'(x)=2\begin{bmatrix}x_1 & x_2\\ x_1 & -x_2\end{bmatrix}$$

$$F'(x^k)\Delta x^k=-F(x^k),\quad x^{k+1}=x^k+\Delta x^k,\quad k=0,1,\cdots$$

取 $x^0=(1,1)^T$

演示 exam0602Newton.m; exam0602Fsolve.m; exam0602Solve.m

k	x^k
0	(1.000000, 1.000000)
1	(1.750000, 1.250000)
2	(1.589286, 1.225000)
3	(1.581160, 1.224645)
4	(1.581139, 1.224745)
5	(1.581139, 1.224745)

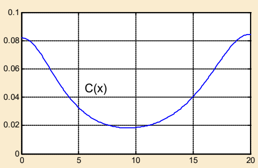
精确解 $x=(\sqrt{5/2},\sqrt{3/2})^T$

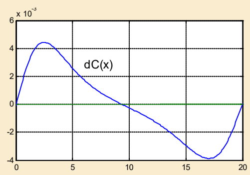
$=(1.58113883, 1.22474487)^T$

实例1 路灯照明

$$C(x)=\frac{P_1h_1}{\sqrt{(h_1^2+x^2)^3}}+\frac{P_2h_2}{\sqrt{(h_2^2+(s-x)^2)^3}}\qquad P_1=2,\ P_2=3\quad h_1=5,\ h_2=6,\ s=20$$

$$C'(x)=-3\frac{P_1h_1x}{\sqrt{(h_1^2+x^2)^5}}+3\frac{P_2h_2(s-x)}{\sqrt{(h_2^2+(s-x)^2)^5}}=0$$





$C(x)$有3个驻点: (9,10)内的是最小点，0或20附近的是最大点

实例1 路灯照明

zhaoming_Run.m

```
function y=zhaoming(x)
y=2*5*x/(5^2+x^2)^(5/2)-3*6*(20-x)/(6^2+(20-x)^2)^(5/2);

x0=[0,10,20];
for k=1:3
        x(k)=fzero(@zhaoming,x0(k));
        c(k)=2*5/(5^2+x(k)^2)^(3/2)+3*6/(6^2+(20-x(k))^2)^(3/2);
end
[x;c]
```

zhaoming_sym.m

x	0	0.02848997	9.33829914	19.97669581	20
$C(x)$	0.08197716	0.08198104	0.01824393	0.08447655	0.08447468

x=9.3383是$C(x)$的最小值点，x=19.9767是$C(x)$的最大值点

实例1 路灯照明

问题：**P_2=3千瓦路灯的高度在3~9米变化，如何使路面上最暗点的照度最大?**

$$C(x，h_2)=\frac{P_1h_1}{\sqrt{(h_1^2+x^2)^3}}+\frac{P_2h_2}{\sqrt{(h_2^2+(s-x)^2)^3}}$$

$$\frac{\partial C}{\partial h_2}=\frac{P_2}{\sqrt{(h_2^2+(s-x)^2)^3}}-3\frac{P_2{h_2}^2}{\sqrt{(h_2^2+(s-x)^2)^5}}=0 \Rightarrow h_2=\tfrac{1}{\sqrt{2}}(s-x)$$

$$\frac{\partial C}{\partial x}=-3\frac{P_1h_1x}{\sqrt{(h_1^2+x^2)^5}}+3\frac{P_2h_2(s-x)}{\sqrt{(h_2^2+(s-x)^2)^5}}=0 \Rightarrow \frac{9\sqrt{3}P_1h_1x}{\sqrt{(h_1^2+x^2)^5}}-\frac{4P_2}{(s-x)^3}=0$$

用fzero命令解方程，得到的结果是：
x=9.5032，h_2=7.4224，$C(x, h_2)$= 0.018556(最暗点的最大照度)

实例1 路灯照明

问题：讨论两只路灯的高度均可以在3~9米之间变化的情况

$$C(x,h_1,h_2)=\frac{P_1h_1}{\sqrt{(h_1^2+x^2)^3}}+\frac{P_2h_2}{\sqrt{(h_2^2+(s-x)^2)^3}} \qquad \frac{\partial C}{\partial h_1}=0 \quad =0 \Rightarrow h_1=\tfrac{1}{\sqrt{2}}x$$

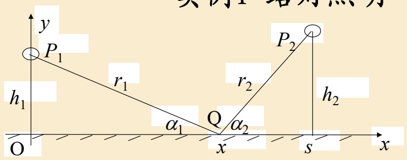
$$\frac{\partial C}{\partial h_2}=\frac{P_2}{\sqrt{(h_2^2+(s-x)^2)^3}}-3\frac{P_2{h_2}^2}{\sqrt{(h_2^2+(s-x)^2)^5}}=0 \Rightarrow h_2=\tfrac{1}{\sqrt{2}}(s-x)$$

$$\frac{\partial C}{\partial x}=-3\frac{P_1h_1x}{\sqrt{(h_1^2+x^2)^5}}+3\frac{P_2h_2(s-x)}{\sqrt{(h_2^2+(s-x)^2)^5}}=0 \Rightarrow \frac{P_1}{x^3}=\frac{P_2}{(s-x)^3}$$

$$x=\frac{\sqrt[3]{P_1}s}{\sqrt[3]{P_1}+\sqrt[3]{P_2}}$$

实际数据计算，得到x=9.3253, 最暗点的照度达到最大的路灯高度 h_1=6.5940, h_2=7.5482

实例1 路灯照明



$$h_1=\tfrac{1}{\sqrt{2}}x$$

$$h_2=\tfrac{1}{\sqrt{2}}(s-x)$$

$$x=\frac{\sqrt[3]{P_1}s}{\sqrt[3]{P_1}+\sqrt[3]{P_2}}$$

讨论1：若P_1=P_2, 则x=0.5s (中点)， 与直觉符合

讨论2：$tg\alpha_1=tg\alpha_2=\sqrt{2}/2$ $\quad \alpha_1=\alpha_2=35^\circ 16'$

（这个角度与路灯的功率和道路宽度均无关 ）

思考：2只以上路灯的情形（如篮球场四周安装照明灯）

实例2 均相共沸混合物的组分

$$x_i\left(\frac{b_i}{T+c_i}+\ln\left(\sum_{j=1}^{n}x_jq_{ij}\right)+\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{x_jq_{ji}}{\sum_{k=1}^{n}x_kq_{jk}}\right)-1-a_i+\ln P\right)=0$$

$$\sum_{i=1}^{n}x_i=1 \Rightarrow x_n=1-\sum_{i=1}^{n-1}x_i$$

***n*个变量：T, x_i**

给定n=3种物资：丙酮、乙酸甲脂、甲醇(分别记为1、2、3)

a_1=16.388, a_2=16.268, a_3=18.607；
b_1=2787.50, b_2=2665.54, b_3=3643.31；
c_1=229.66, c_2=219.73, c_3=239.73；

P=760（mmHg）

$$Q=\begin{bmatrix}1.0 & 0.48 & 0.768\\ 1.55 & 1.0 & 0.544\\ 0.566 & 0.65 & 1.0\end{bmatrix}$$

实例2 均相共沸混合物的组分

```
function f=azeofun(XT,n,P,a,b,c,Q)
x(n)=1;
for i=1:n-1
   x(i)=XT(i);
   x(n)=x(n)-x(i);
end
T=XT(n);
p=log(P);
for i=1:n
  d(i) = x * Q(i,1:n)';
  dd(i)=x(i)/d(i);
end
for i=1:n
   f(i)=x(i)*(b(i)/(T+c(i)) + log(x*Q(i,1:n)')
+ dd*Q(1:n,i) - a(i) - 1 + p);
end
```

```
n=3;
P=760;
a=[16.388,16.268,18.607]';
b=[2787.50,2665.54,3643.31]';
c=[229.66,219.73,239.73]';
Q=[1.0    0.48   0.768
   1.55   1.0    0.544
   0.566  0.65   1.0];
XT0=[0.333,0.333,50];
[XT,Y]=fsolve(@azeofun,XT
0,[],n,P,a,b,c,Q)
```

XT = [0.2740 0.4636 54.2560]
Y = 1.0e-006 *
[0.4195 -0.3112 0.2083]

实例2 均相共沸混合物的组分

初值	解			
XT0	x_1	x_2	x_3	T
[0.333, 0.333, 50]	0.2740	0.4636	0.2624	54.2560
[0, 0.5, 54]	0.0000	0.6766	0.3234	54.3579
[0.5, 0, 54]	0.7475	0.0000	0.2525	54.5040
[0.5, 0.5, 54]	0.5328	0.4672	0.0000	55.6764

非线性差分方程

实例3 离散形式的阻滞增长模型(Logistic模型)

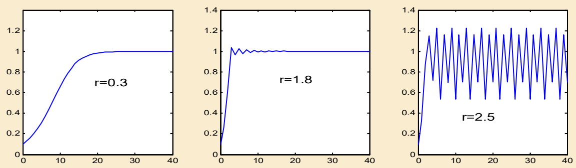
x_k ~某种群第k代的数量(k=0,1,2,…)

	连续形式	离散形式
指数增长模型	$\dot{x}(t)=rx$	$x_{k+1}-x_k=rx_k$ 线性方程
阻滞增长模型	$\dot{x}(t)=rx\left(1-\frac{x}{N}\right)$	$x_{k+1}-x_k=r\left(1-\frac{x_k}{N}\right)x_k$ 非线性方程
	$t\to\infty$, $x\to N$ (与r大小无关)	对于不同的r，研究 $k\to\infty$ 时x_k的趋势

实例3 离散形式的阻滞增长模型(Logistic模型)

x_k ~某种群第k代的数量 $x_{k+1}-x_k=r\left(1-\frac{x_k}{N}\right)x_k$

设N=1，取r=0.3, 1.8, 2.5, 初值x_0=0.1，



x_k单调地趋向N x_k振荡地趋向N x_k不收敛

分岔与混沌现象

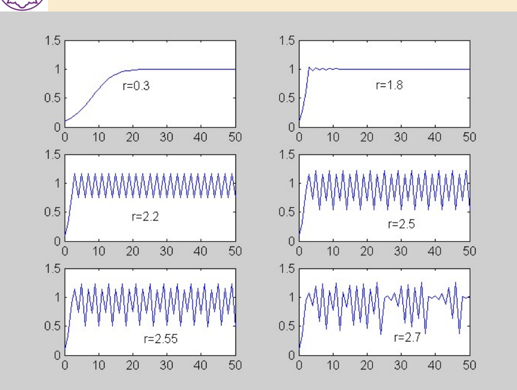
离散形式的阻滞增长模型: 非线性差分方程

$$x_{k+1}=x_k+r\left(1-\frac{x_k}{N}\right)x_k,\quad k=0,1,2,\cdots$$

(x_k是第k代的种群数量，r是固有增长率，N是种群最大容量)

问题：种群数量总是趋于稳定吗？

取N=1，r=0.3, 1.8, 2.2, 2.5, 2.55, 2.7，初值$x0$=0.1，按照迭代方程用MATLAB计算x_k，观察得到结果



分岔与混沌现象

实例3 离散形式的阻滞增长模型 结果分析

$$x_{k+1}-x_k=r\left(1-\frac{x_k}{N}\right)x_k \qquad x_{k+1}=x_k+r\left(1-\frac{x_k}{N}\right)x_k,\quad k=0,1,2,\cdots$$

差分方程的平衡点 $x=x+r\left(1-\frac{x}{N}\right)x$ 的根：$x=N$, $x=0$

若$x_k\to x$ ($k\to\infty$)，则平衡点x稳定；否则，x不稳定.

- 平衡点 x=0 不稳定；
- 平衡点 x=N 的稳定性与 r 有关.

研究非线性差分方程平衡点稳定的条件

非线性差分方程平衡点稳定的条件

非线性差分方程(*): $y_{k+1}=f(y_k),\quad k=0,1,2,\cdots$

平衡点~代数方程 **$y=f(y)$** 的根 **y^***

$|f'(y^*)|<1$ **y^*对非线性差分方程(*)是稳定平衡点.**

$|f'(y^*)|>1$ **y^*对非线性差分方程(*)是不稳定平衡点**

实例3 离散形式的阻滞增长模型 $x_{k+1}=x_k+r(1-\frac{x_k}{N})x_k$

变量和参数代换 $y_k=\frac{r}{(r+1)N}x_k,\quad b=r+1\qquad y_{k+1}=by_k(1-y_k)$

平衡点 **$x=N,\ x=0$**　　平衡点 **$y=1-1/b,\ y=0$**

$f(y)=by(1-y)\qquad f'(y)=b(1-2y)$

$f'(1-1/b)=2-b\qquad f'(0)=b>1$ **$y=0$不稳定**

平衡点 **$y^*=1-1/b$稳定的条件:** $|f'(y^*)|<1$ $1<b<3\ (0<r<2)$

若**$b>3$ (即$r>2$)**, 平衡点 **y^***不稳定

分岔与混沌现象

隔代收敛分析

$y_{k+2}=f(y_{k+1})=f(f(y_k))=f^{(2)}(y_k),\quad k=0,1,2,\cdots$

$y=f^{(2)}(y)=bby(1-y)[1-by(1-y)]$

平衡点(除**$y=y^*=1-1/b$** 外)　$y_{1,2}^*=\dfrac{b+1\mp\sqrt{b^2-2b-3}}{2b}$

$0<y_1^*<y^*<y_2^*<1,\quad y_1^*=f(y_2^*),\ y_2^*=f(y_1^*)$

平衡点 **$y_{1,2}$*稳定的条件是**　$|(f^{(2)}(y_{1,2}^*))'|<1$

$(f^{(2)}(y_{1,2}^*))'=f'(y_1^*)f'(y_2^*)=b^2(1-2y_1^*)(1-2y_2^*)$

$b<1+\sqrt{6}\approx 3.449\qquad r<2.449$

分岔与混沌现象

类似地可以得到：迭代方程有**4**个稳定平衡点的条件

$3.449<b<3.544\qquad 2.449<r<2.544$

记有**2^n**个收敛子序列的**b**的上限为**b_n**，上面的分析给出：

$b_0=3$，$b_1=3.449$，$b_2=3.544$

进一步研究表明：当**$n\to\infty$**时**$b_n\to3.57$**，若**$b>3.57$(即$r>2.57$)**，就不再存在任何**2^n**收敛子序列，序列**x_k**的趋势似乎呈现一片混乱，这就是所谓混沌现象（**Chaos**）。

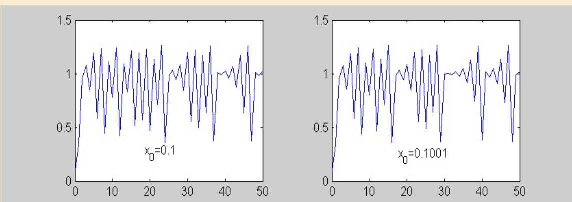
混沌现象实际上有其内在的规律性, 如 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_n-b_{n-1}}{b_{n+1}-b_n}=4.6692\cdots$

是普遍存在于不同混沌现象中的常数(费根鲍姆(**Feigenbaum**)常数)

分岔与混沌现象

混沌现象的一个典型特征是对初始条件的敏感性

- “差之毫厘，失之千里”
- 著名的“蝴蝶效应”



非线性迭代过程 ---- 混沌现象 ---- 非线性科学

分岔与混沌现象

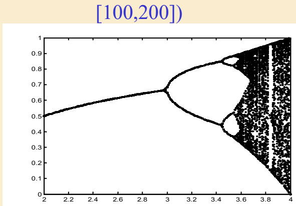
```
function chaos(iter_fun,x0,r,n)   % 该函数没有返回值；iter_fun是迭代函数（句柄）；x0是迭代初值；
kr=0;
for rr=r(1):r(3):r(2)
% 输入中[r(1),r(2)]是参数变化的范围，r(3) 是步长
   kr=kr+1;
   y(kr,1)=feval(iter_fun,x0,rr);
   for i=2:n(2)
%输入中n(2)是迭代序列的长度，但画图时前n(1)个迭代值被舍弃
      y(kr,i)=feval(iter_fun,y(kr,i-1),rr);
   end
end
plot([r(1):r(3):r(2)],y(:,n(1)+1:n(2)),'k.');
```

本例迭代函数为：

```
function y=iter01(x,r)
y=r*x*(1-x);
```

输入如下命令：

```
chaos(@iter01,0.5,[2,4,0.01],
      [100,200])
```



布置实验

目的　1) 用MATLAB软件掌握求解非线性方程的迭代法和牛顿法，并对结果作初步分析；

2) 通过实例练习用非线性方程求解的实际问题。

内容　**参见网络学堂**