大学数学实验

实验9 非线性规划

清 华 大 学 数 学 科 学 系

优化问题的一般形式

优化问题三要素：决策变量；目标函数；约束条件

$$\min \quad f(x)$$
$$s.t.$$
$$g_i(x) \le 0,\ i = 1,\ldots, m$$
$$x \in \Omega \subseteq R^n$$

目标函数

约束条件

决策变量

当目标或约束函数不全是线性（即存在非线性）函数时，该优化问题称为非线性规划（NLP）

本实验基本内容

LP

QP

NLP

1. 问题与模型
2. 基本原理和算法
3. MATLAB实现
4. LINGO实现

实例1：投资组合(portfolio)问题

- 投资人首先需要了解候选投资产品的历史业绩：

股票A、B、C，历史收益用随机变量描述：

A每股年期望收益5元(标准差2元)，目前市价20元；

B每股年期望收益8元(标准差6元)，目前市价25元；

C每股年期望收益10元(标准差10元)，目前市价30元；

股票A、B收益的相关系数为5/24;

股票A、C收益的相关系数为–1/2;

股票B、C收益的相关系数为–1/4.

- 50万元，应如何投资？

实例1：投资组合问题

国内股票通常以“一手”（100股）为最小单位出售

A、B、C每手(百股)的收益分别记为S_1, S_2和S_3(百元):

$ES_1=5,\ ES_2=8,\ ES_3=10$，

$DS_1=2^2,\ DS_2=6^2,\ DS_3=10^2$，

$r_{12}=5/24,\ r_{13}=-1/2,\ r_{23}=-1/4$

$$\mathrm{cov}(S_1,S_2)=r_{12}\sqrt{DS_1}\sqrt{DS_2}=25$$
$$\mathrm{cov}(S_1,S_3)=r_{13}\sqrt{DS_1}\sqrt{DS_3}=-10$$
$$\mathrm{cov}(S_2,S_3)=r_{23}\sqrt{DS_2}\sqrt{DS_3}=-15$$

决策变量

x_1、x_2和x_3：分别表示投资A、B、C的数量（手）

总收益(百元) $S=x_1S_1+x_2S_2+x_3S_3$：是一个随机变量

主观题 2分 设置

人们常说：“股市有风险，投资需谨慎”。

你认为投资的风险应该如何定量刻画?

作答

实例1：投资组合问题

Markowitz于1952年提出
(第一次华尔街革命;
1990年诺贝尔经济学奖)

假设：

1、收益的期望值作为衡量投资回报的基本指标

2、投资的风险通常用收益的方差或标准差衡量

3、基金不一定用完 (不用不计利息或贬值); 不借款

具体问题：

- 如期望今年得到至少20%的投资回报，应如何投资？
- 投资回报率与风险的关系如何？

实例1：投资组合问题

总收益 $S=x_1S_1+x_2S_2+x_3S_3$ ：是一个随机变量

总收益的数学期望

$$Z_1=ES= x_1ES_1+x_2ES_2+x_3ES_3=5x_1+8x_2+10x_3$$

投资风险（用总收益的方差表示）

$$\begin{aligned} Z_2 &= D(x_1S_1+x_2S_2+x_3S_3)=D(x_1S_1)+D(x_2S_2)+D(x_3S_3) \\ &\quad +2\operatorname{cov}(x_1S_1,x_2S_2)+2\operatorname{cov}(x_1S_1,x_3S_3)+2\operatorname{cov}(x_2S_2,x_3S_3) \\ &= x_1^2DS_1+x_2^2DS_2+x_3^2DS_3+2x_1x_2\operatorname{cov}(S_1,S_2) \\ &\quad +2x_1x_3\operatorname{cov}(S_1,S_3)+2x_2x_3\operatorname{cov}(S_2,S_3) \\ &= 4x_1^2+36x_2^2+100x_3^2+5x_1x_2-20x_1x_3-30x_2x_3 \end{aligned}$$

实例1：投资组合问题

多目标优化 ➔ 单目标优化

模型1　期望回报至少20%（即$Z_1\ge 1000$作为约束）

$$\min Z_2 = 4x_1^2+36x_2^2+100x_3^2+5x_1x_2-20x_1x_3-30x_2x_3$$

$$\text{s.t.}\quad 5x_1+8x_2+10x_3\ge 1000$$
$$20x_1+25x_2+30x_3\le 5000$$
$$x_1,\ x_2,\ x_3\ge 0$$

均值-方差模型
(都是QP)

模型2　投资回报与风险（加权模型）

$$Min\ Z=\beta Z_2 - Z_1$$
$$\text{s.t.}\quad 20x_1+25x_2+30x_3\le 5000$$
$$x_1,\ x_2,\ x_3\ge 0$$

变化β
可得二
者关系

实例2：供应与选址

某公司有6个建筑工地，位置坐标为(a_i, b_i) (单位：公里)，水泥日用量d_i (单位：吨）

i	1	2	3	4	5	6
a	1.25	8.75	0.5	5.75	3	7.25
b	1.25	0.75	4.75	5	6.5	7.75
d	3	5	4	7	6	11

LP实验中： 1)现有 2 料场，位于 A (5, 1), B (2, 7), 记(x_j,y_j),j=1,2, 日储量 e_j 各有 20 吨。

假设：料场和工地之间有直线道路

目标：制定每天的供应计划，即从 A, B 两料场分别向各工地运送多少吨水泥，使总的吨公里数最小。

实例2：供应与选址

2）改建两个新料场，需要确定新料场位置(x_j,y_j)和运量c_{ij}，在其它条件不变下使总吨公里数最小。

$$\min \quad \sum_{j=1}^{2}\sum_{i=1}^{6} c_{ij}[(x_j-a_i)^2+(y_j-b_i)^2]^{1/2}$$

$$s.t.\quad \sum_{j=1}^{2} c_{ij}=d_i,\quad i=1,\ldots,6$$

$$\sum_{i=1}^{6} c_{ij}\le e_j,\quad j=1,2$$

$$c_{ij}\ge 0,\quad i=1,\ldots,6;\ j=1,2$$

决策变量：
c_{ij}, (x_j,y_j)~16维

非线性规划模型
(NLP)

NLP：（局部）最优解的基本条件

回顾：LP 单纯形法（迭代法）

判断最优性：若非最优，则有下降方向（进基）

寻找步长：要保证可行性，到达边界顶点（出基）

存在可行下降方向

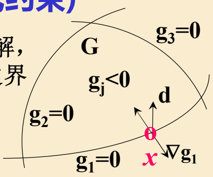
➔ 非最优

➔ 继续迭代

NLP最优性条件(不等式约束)

$$\min_{x\in\Re^n} \quad z=f(x)$$
$$s.t. \quad g_j(x)\le 0,\ j=1,\dots,l$$

设x为可行解，位于约束边界



$g_j(x)=0,\quad j\in J_1$　J_1~有效约束(j=1)

$g_j(x)<0,\quad j\in J_2$　J_2~非有效约束(j=2,3)

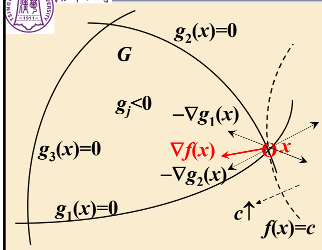
可行方向　$x+\lambda d\in G\quad (0<\lambda<\lambda_0)$

$$g_j(x+\lambda d)=g_j(x)+\lambda\nabla g_j(x)^T d+O(\lambda^2)$$

$$\nabla g_j(x)^T d<0\quad (j\in J_1)\quad (1)$$

下降方向　$f(x+\lambda d)<f(x)\quad (0<\lambda<\lambda_0)$　$\nabla f(x)^T d<0\quad (2)$

若x沿d方向既可行又下降，则x不是最优解



$\nabla g_j(x)^T d<0\quad (j\in J_1)\quad (1)$

$\nabla f(x)^T d<0\quad (2)$

x为最优解 ⇨ 不存在满足(1),(2)的d ⇨

$\nabla f(x)$是$-\nabla g_1(x)$和$-\nabla g_2(x)$的非负线性组合

最优解的必要条件　若x为（局部）最优解，f和g_j可微，且 $\nabla g_i(x)\ (i\in J_1)$ 线性无关，则存在 $\lambda_1,\cdots\lambda_l\ge 0$

$$\nabla f(x)+\sum_{j=1}^{l}\lambda_j\nabla g_j(x)=0$$

$$\lambda_j g_j(x)=0,\quad j=1,2,\cdots l$$

~KKT条件　(Karush-Kuhn-Tucker)

互补松弛条件

NLP最优性条件(等式+不等式约束)

$$\min_{x\in\Re^n} f(x)\quad s.t.\quad h_i(x)=0,\ i=1,\dots,m$$
$$g_j(x)\le 0,\ j=1,\dots,l$$

最优解的必要条件　若x为最优解，f和h_i, g_j可微，且 $\nabla h_i,\nabla g_j(j\in J_1)$线性无关，则存在$\mu_i$和$\lambda_j\ge 0$,

$$\nabla f(x)+\sum_{i=1}^{m}\mu_i\nabla h_i(x)+\sum_{j=1}^{l}\lambda_j\nabla g_j(x)=0$$

$\lambda_j g_j(x)=0,\ j=1,\cdots l$　(互补松弛条件)

~KKT条件

拉格朗日函数(L)　$L(x,\mu,\lambda)=f(x)+\sum_{i=1}^{m}\mu_i h_i(x)+\sum_{j=1}^{l}\lambda_j g_j(x)$

KKT条件的几何解释

$$\nabla f(x)+\sum_{j=1}^{l}\lambda_i\nabla g_i(x)=0$$

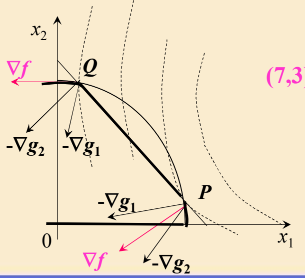
$$\lambda_i g_i(x)=0,\quad j=1,2,\cdots l$$

$\min f(x)=(x_1-7)^2+(x_2-3)^2$

$s.t.\quad g_1(x)=x_1^2+x_2^2-10\le 0$

$g_2(x)=x_1+x_2-4\le 0$

$g_3(x)=x_2\ge 0$



(7,3)　最优解在P(3,1)取得

$\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=0,$

$\nabla f(P)+\nabla g_1(P)+2\nabla g_2(P)=0$

P(3,1)是KKT点

其它点(如Q)均不是

单选题　2分　设置

$$\min_{x\in\Re^n} f(x)\quad s.t.\quad h_i(x)=0,\ i=1,\dots,m$$

（假设f和h_i, g_j可微）　$g_j(x)\le 0,\ j=1,\dots,l$

1）x为（局部）最优解；

2）存在μ_i和λ_j满足$\nabla f(x)+\sum_{i=1}^{m}\mu_i\nabla h_i(x)+\sum_{j=1}^{l}\lambda_j\nabla g_j(x)=0$

$\lambda_j g_j(x)=0,\ j=1,\cdots l$

- A　1）为 2）的必要但非充分条件
- B　2）为 1）的必要但非充分条件
- C　1）和 2）等价
- D　以上都不对

提交

二次规划(QP)及有效集方法

$$\min\ f(x)=\frac{1}{2}x^T Hx+cx$$

$$s.t.\quad Ax\le b$$

当H为对称阵，称二次规划

当H正定时，称凸二次规划

以下假设H正定，凸二次规划性质：

局部最优解⇔全局最优解；

最优点⇔KKT点；

等式约束 $Ax=b$下的Lagrange乘子法

L函数　$L(x,\lambda)=\frac{1}{2}x^T Hx+cx+\lambda^T(Ax-b),\quad \lambda\in R^m$

最优解方程　$Hx+c^T+A^T\lambda=0$

$Ax-b=0$

x为KKT点（最优解）

有效集（active set）方法

基本思想：对于不等式约束的二次规划，在某可行点处将非有效约束去掉，有效约束视为等式约束，通过求解等式约束的二次规划来改进可行点。

$$\min f(x)=\frac{1}{2}x^T Hx+cx \quad s.t.\quad Ax\le b \qquad (1)$$

$$\min f(x)=\frac{1}{2}x^T Hx+cx \quad s.t.\quad a_j x=b_j,\quad j\in J_1\ (a_j\text{是}A\text{的第}j\text{行}) \qquad (2)$$

基本原理

- 若x为(1)的最优解，则它也是(2)的最优解
- 若x为(1)的可行解，又是(2)的KKT点，且L-乘子非负，则它必是(1)的KKT点

基本步骤

设(1)的可行点为x^*，有效集记作J^*，用L—乘子法求解：

$$\min f(x^*+d)=\frac{1}{2}(x^*+d)^T H(x^*+d)+c(x^*+d)$$

$$s.t.\quad a_j d=0,\quad j\in J^*$$

得d^*, λ^*

- 若$d^*=0$, 则x^*为(2)最优解; 当λ^*非负时x^*是(1)最优解

有效集修正　若$d^*=0$, 且$(\lambda^*)_q<0$, $q\in J^*$，则x^*不是最优解，有效集修正为$J^*\backslash\{q\}$继续　(q: "出有效集")

- 若$d^*\neq 0$，确定最大$\alpha^*\in[0,1]$ → $(x^*+\alpha^* d^*)$可行，更新x^*

有效集保持/修正　当$\alpha^*=1$，保持J^*继续；否则：记$a_p(x^*+\alpha^* d^*)=b_p$，$p\notin J^*$，则有效集修正为$J^*\cup\{p\}$继续　($p$: "进有效集")

多选题 2分　设置

以下说法正确的是

A 二次规划问题的最优解一定是KKT点

B 二次规划问题的局部最优解一定是全局最优解

C 凸二次规划问题的KKT点一定是最优解

D 凸二次规划问题的局部最优解一定是全局最优解

提交

非线性规划(NLP)的解法

罚函数法、可行方向法、梯度投影法、信赖域法、...

逐步二次规划法(SQP：Sequential QP)
（Sequential：也译为顺序、序贯、序列等）

SQP的基本原理

$$\min_{x\in\Re^n} f(x)\quad s.t.\quad h_i(x)=0,\ i=1,\dots,m;\quad g_j(x)\le 0,\ j=1,\dots,l$$

构造NLP的拉格朗日函数

$$L(x,\mu,\lambda)=f(x)+\sum_{i=1}^{m}\mu_i h_i(x)+\sum_{j=1}^{l}\lambda_j g_j(x)$$

用二次函数近似$L(x,\mu,\lambda)$, NLP化为QP；再解QP问题

QP子问题

$$\min\quad \frac{1}{2}d^T G_k d+\nabla f(x_k)^T d$$

$$s.t.\quad \nabla h_i(x_k)^T d+h_i(x_k)=0,\quad i=1,\cdots m$$

$$\nabla g_j(x_k)^T d+g_j(x_k)\le 0,\quad j=1,\cdots l$$

凸二次规划？G_k正定？

x_k是第k次迭代的初始点，G_k是海赛阵$\nabla^2 L$的近似。

将最优解d_k作为迭代的搜索方向，令 $x_{k+1}=x_k+\alpha_k d_k$

SQP的基本步骤

- 求解QP子问题，得d_k；
- 用线性搜索计算迭代步长α_k；
- 确定G_k的迭代公式（如'bfgs'）.

单选题 2分　设置

约束规划问题$\min\{f(x)\mid h(x)=0, g(x)\le 0\}$的逐步二次规划法中，假设已完成第$k$步迭代（$x_k$为当前解），关于下次迭代求解的二次规划，以下说法正确的是

A 目标函数是$f(x)$的二次近似（展开到二次项）

B 目标函数是相应的拉格朗日函数的二次近似（展开到二次项）

C 约束条件是$h(x)$, $g(x)$的二次近似（展开到二次项）

D 约束条件是$h(x)$, $g(x)$的线性近似（展开到一次项）

提交

主观题 2分 设置

QP子问题中：

G_k：为什么不是 $\nabla^2 f$ 的近似，而是 $\nabla^2 L$ 的近似?

正常使用主观题需2.0以上版本雨课堂

作答

清华大学 大学数学实验

G_k：为什么不是 $\nabla^2 f$ 的近似，而是 $\nabla^2 L$ 的近似?

下面仅以等式约束问题进行解释

$$\min f(x)$$
$$s.t.\ h_j(x)=0,\ j\in E=\{1,\ldots,m\}$$

$$h(x)=(h_1(x),\ldots,h_m(x))^T$$
$$u=(u_1,u_2,\ldots,u_m)^T$$

$$\Rightarrow L(x,u)=f(x)-u^T*h(x)$$

Lagrange 乘子法 (KKT条件)

$$\nabla L(x,u)=\begin{bmatrix}\nabla_x L(x,u)\\ \nabla_u L(x,u)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\nabla f(x)-A(x)^T*u\\ -h(x)\end{bmatrix}=0$$

$$A(x)=\nabla h(x)^T=(\nabla h_1(x),\ldots,\nabla h_m(x))^T$$

清华大学 大学数学实验

G_k：为什么不是 $\nabla^2 f$ 的近似，而是 $\nabla^2 L$ 的近似?

$$\nabla L(x,u)=\begin{bmatrix}\nabla_x L(x,u)\\ \nabla_u L(x,u)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\nabla f(x)-A(x)^T*u\\ -h(x)\end{bmatrix}=0$$

采用方程组的Newton法?

记
$$N(x,u)=\nabla^2 L(x,u)=\begin{pmatrix}W(x,u) & -A(x)^T\\ -A(x) & 0\end{pmatrix}$$

Newton法
$$\begin{pmatrix}W(x_k,u_k) & -A(x_k)^T\\ -A(x_k) & 0\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}d_k\\ v_k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\nabla f(x_k)+A(x_k)^T u_k\\ h(x_k)\end{pmatrix}$$

即
$$W(x_k,u_k)*d_k-A(x_k)^T*v_k=-\nabla f(x_k)+A(x_k)^T*u_k$$
$$h(x_k)+A(x_k)d_k=0$$

清华大学 大学数学实验

G_k：为什么不是 $\nabla^2 f$ 的近似，而是 $\nabla^2 L$ 的近似?

$$W(x_k,u_k)*d_k-A(x_k)^T*v_k=-\nabla f(x_k)+A(x_k)^T*u_k$$
$$h(x_k)+A(x_k)d_k=0$$

这是哪个优化问题的KKT条件?

$$\min\ \frac{1}{2}d^T W(x_k,u_k)\,d+\nabla f(x_k)^T d$$
$$s.t.\ \ h(x_k)+A(x_k)d=0$$

即 u_k+v_k 为对应的L-乘子

因此，G_k 是 W（即 $\nabla^2 L$）的近似，不是 $\nabla^2 f$ 的近似！

G_k 修正 ➔ 拟Newton法 （dfp, bfgs等）➔ 超线性收敛

主观题 2分 设置

如何构造逐步线性规划法(SLP：Sequential LP)?

SLP 和 SQP 相比，各有什么优缺点?

正常使用主观题需2.0以上版本雨课堂

作答

清华大学 大学数学实验

逐步线性规划法
(SLP：Sequential LP)

Minimize $f(\mathbf{x}^{(k)}+\Delta\mathbf{x}^{(k)})\cong f(\mathbf{x}^{(k)})+\nabla f^T(\mathbf{x}^{(k)})\Delta\mathbf{x}^{(k)}$

subject to the linearized equality constraints

$$h_j(\mathbf{x}^{(k)}+\Delta\mathbf{x}^{(k)})\cong h_j(\mathbf{x}^{(k)})+\nabla h_j^T(\mathbf{x}^{(k)})\Delta\mathbf{x}^{(k)}=0;\quad j=1\text{ to }m$$

and the linearized inequality constraints

$$g_j(\mathbf{x}^{(k)}+\Delta\mathbf{x}^{(k)})\cong g_j(\mathbf{x}^{(k)})+\nabla g_j^T(\mathbf{x}^{(k)})\Delta\mathbf{x}^{(k)}\le 0;\quad j=1\text{ to }\iota$$

近似程度差，但单步迭代速度快

Name	Model	Global Method	Interfaces	Language
ALGENCAN	Aug. Lag.	augmented Lagrangian	AMPL, C/C++, CUTEr, Java, MATLAB, Octave, Python, R	f77
CONOPT	GRG/SLQP	line-search	AIMMS, GAMS	Fortran
CVXOPT	IPM	*only convex*	Python	Python
FilterSQP	SQP	filter/trust region	AMPL, CUTEr, f77	Fortran77
GALAHAD	Aug. Lag.	nonmonotone/ augmented Lagrangian	CUTEr, Fortran	Fortran95
IPOPT	IPM	filter/line search	AMPL, CUTEr, C, C++, f77	C++
KNITRO	IPM	penalty-barrier/ trust region	AIMMS, AMPL, GAMS, Mathematica, MATLAB, MPL, C, C++, f77, Java, Excel	C++
KNITRO	SLQP	penalty/trust region	s.a.	C++
LANCELOT	Aug. Lag.	augmented Lagrangian/ trust region	SIF, AMPL, f77	Fortran77
LINDO	GRG/SLP	*only convex*	C, MATLAB, LINGO	
LOQO	IPM	line search	AMPL, C, MATLAB	C
LRAMBO	SQP	ℓ_1 exact penalty/ line search	C	C/C++
MINOS	Aug. Lag.	augmented Lagrangian	AIMMS, AMPL, GAMS, MATLAB, C, C++, f77	Fortran77
NLPQLP	SQP	augmented Lagrangian/ line-search	C, f77, MATLAB	Fortran77
NPSOL	SQP	penalty Lagrangian/ line search	AIMMS, AMPL, GAMS, MATLAB, C, C++, f77	Fortran77
PATH	LCP	line search	AMPL	C
PENNON	Aug. Lag.	line search	AMPL, MATLAB	C
SNOPT	SQP	penalty Lagrangian/ line search	AIMMS, AMPL, GAMS, MATLAB, C, C++, f77	Fortran77
SQPlab	SQP	penalty Lagrangian/ line search	MATLAB	MATLAB

NLP软件

来源：
S. Leyffer & A. Mahajan. Software For Nonlinearly Constrained Optimization. In *Wiley Encyclopedia of Operations Research and Management Science*, editors Cochran, James J. and Cox, Louis A. and Keskinocak, Pinar and Kharoufeh, Jeffrey P. and Smith, J. Cole. John Wiley & Sons, Inc. 2010. DOI: 10.1002/9780470400531.eorms0570.

MATLAB求解QP

$$\min\ z=\tfrac{1}{2}x^T Hx+c^T x$$
$$s.t.\ \ A_1x\le b_1,\ A_2x=b_2,\ v_1\le x\le v_2$$

```
[x,fval,exitflag,output,lambda] =
quadprog(H,c,A1,b1,A2,b2,v1,v2,x0,options)
```

例1

$$\min f(x_1,x_2)$$
$$=2x_1^2-3x_1x_2+3x_2^2-3x_1+x_2$$
$$s.t.\quad x_1+2x_2=3$$
$$2x_1-x_2\ge -3$$
$$x_1-3x_2\le 3$$
$$x_1\ge 2,x_2\le 0$$

$$H=\begin{pmatrix}4&-3\\-3&6\end{pmatrix},c=\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$$
$$A_1=\begin{pmatrix}-2&1\\1&-3\end{pmatrix},b_1=\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix},$$
$$A_2=(1,2),b_2=3,$$
$$v_1=[2,-\mathrm{Inf}],v2=[\mathrm{Inf},0]$$

Exam0901.m

---

optimoptions：算法选择

```
optimoptions(@quadprog,'Algorithm','alg')
```

其中 ‘alg’ 可以是以下三种算法之一：
- ‘interior-point-convex’ （凸内点算法，缺省值）
- ‘trust-region-reflective’（信赖域算法）
- ‘active-set’ (有效集方法)

注：有效集方法将来可能不再提供；

凸内点算法只用于求解凸二次规划问题；

用户提供的x0仅用于后两种算法（且信赖域算法只有仅含上下界约束时使用x0；其他算法忽略x0）；

信赖域算法用于仅含上下界约束，或线性等式约束

MATLAB求解约束NLP

$$\min\ z=f(x)$$
$$s.t.\ \ c_1(x)\le 0,c_2(x)=0,$$
$$A_1x\le b_1,A_2x=b_2,v_1\le x\le v_2$$

```
[x,fval,exitflag,output,lambda,grad,hessian] =
fmincon(@fun,x0,A1,b1,A2,b2,v1,v2,@nlcon,options)
```

fun.m给出函数f；当SpecifyObjectiveGradient =true时须给梯度；当HessianFcn='objective'时还须给Jacobi矩阵（仅对信赖域方法有效）

```
function [f,g,H] = fun(x)
f = ...        % objective function value
if nargout > 1
  g = ...      % gradient of the function
if nargout > 2
  H = ...      % Hessian
end
```

MATLAB求解约束NLP

$$\min\ z=f(x)$$
$$s.t.\ \ c_1(x)\le 0,c_2(x)=0,$$
$$A_1x\le b_1,A_2x=b_2,v_1\le x\le v_2$$

```
[x,fval,exitflag,output,lambda,grad,hessian] =
fmincon(@fun,x0,A1,b1,A2,b2,v1,v2,@nlcon,options)
```

nlcon.m给出约束,SpecifyConstraintGrandient =true时还需给出梯度

```
function [c1,c2,GC1,GC2] = nlcon(x)
c1 = ...     % nonlinear inequalities at x
c2 = ...     % nonlinear equalities at x
if nargout > 2
  GC1 = ...   % gradients of c1
  GC2 = ...   % gradients of c2
end
```

---

optimoptions：算法选择

```
optimoptions(@fmincon,'Algorithm','alg')
```

其中 ‘alg’ 可以是以下算法之一：
- ‘interior-point’ （内点算法，缺省值）
- ‘trust-region-reflective’（信赖域算法）
- ‘sqp’ (逐步二次规划法)
- ‘active-set’ (有效集方法)

注：前两个是大规模算法（后两个不是）；

信赖域法用于仅含上下界约束，或线性等式约束；

信赖域法要求用户提供目标函数的梯度（选项 ’SpecifyObjectiveGradient’设置为 ’true’）

MATLAB求解约束NLP

例2 $\min e^{x_1}(4x_1^2+2x_2^2+4x_1x_2+2x_2+1)$

$$x_1x_2-x_1-x_2+1.5\le 0,\quad x_1x_2+10\ge 0$$

$$x_1^2+x_2-1=0$$

Exam0902.m

初值	梯度	最优解	最优值	迭代次数	目标函数调用次数
(1,-1)	数值	（1.3577，-0.8435）	13.7185	8	28
	分析	（1.3577，-0.8435）	13.7185	8	10
(-1,1)	数值	（-0.1096，1.2433）	5.4496	31	157
	分析	（-0.1096，1.2433）	5.4496	31	100

实例1：投资组合问题

$$\min Z_2=4x_1^2+36x_2^2+100x_3^2+5x_1x_2-20x_1x_3-30x_2x_3$$

s.t. $5x_1+8x_2+10x_3\ge 1000$

$20x_1+25x_2+30x_3\le 5000$

$x_1, x_2, x_3\ge 0$

portfolio1.m

解得x = 1.0e+002 *（1.3111，0.1529，0.2221）

如果一定要整数解，可以四舍五入到（131，15，22）

如利用LINGO软件,可得整数最优解(132，15，22)

用去资金为132×20+15×25+22×30 = 3675（百元）

期望收益为132×5+15×8+22×10 = 1000（百元）

风险(方差)为 68116，标准差约为261（百元）

实例1：投资组合问题

加权模型

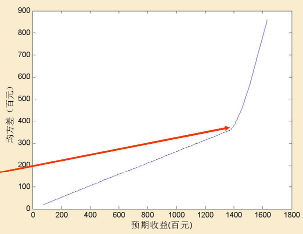
$Min\ Z=\beta Z_2-Z_1$

s.t. $20x_1+25x_2+30x_3\le 5000$

$x_1, x_2, x_3\ge 0$

portfolio2.m

通过试探发现 β 从0.0001~0.1以0.0001的步长变化就可以得到很好的近似结果



投资股票A、B、C分别为153、35、35（手）

实例2: 供应与选址

$$\min \sum_{j=1}^{2}\sum_{i=1}^{6} c_{ij}[(x_j-a_i)^2+(y_j-b_i)^2]^{1/2}$$

$$s.t.\ \sum_{j=1}^{2} c_{ij}=d_i,\quad i=1,\ldots,6$$

$$\sum_{i=1}^{6} c_{ij}\le e_j,\quad j=1,2$$

改建两个新料场

决策变量：

c_{ij}, (x_j,y_j)~16维

Shili0902.m;
shili0902fun.m

初始点的选择

局部最优解问题

用现料场总吨公里数为136.2

结果：总吨公里数为85.3，比使用原料场减少了50.9

计算方法的改善

$$\min \sum_{i=1}^{6}\{c_i[(x_1-a_i)^2+(y_1-b_i)^2]^{1/2}$$

$$+(d_i-c_i)[(x_2-a_i)^2+(y_2-b_i)^2]^{1/2}\}$$

$$s.t.\ c_i\le d_i,\quad i=1,\cdots 6$$

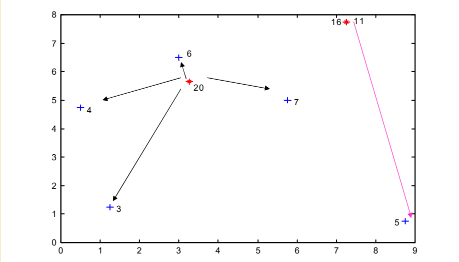
$$\sum_{i=1}^{6} c_i\le e_1,\quad \sum_{i=1}^{6}(d_i-c_i)\le e_2$$

决策变量：c_i, (x_j,y_j)~10维

Shili0902n.m;
shili0902fun1.m

局部最优解问题有所改进

i	1	2	3	4	5	6	新料场位置（x_j,y_j）
c_{i1}	3	0	4	7	6	0	（3.2552 5.6528）
c_{i2}	0	5	0	0	0	11	（7.2497 7.7499）



+为工地, 数字为用量; *为新料场, 数字为供应量。

LINGO软件的求解过程

1. 确定常数
2. 识别类型

LINGO预处理程序

LP QP NLP IP 全局优化(选)

分枝定界管理程序

ILP IQP INLP

线性优化求解程序

1. 单纯形算法
2. 内点算法(选)

非线性优化求解程序

1、顺序线性规划法(SLP)
2、广义既约梯度法(GRG) (选)
3、多点搜索(Multistart) (选)

LINGO求解NLP

输入与LP类似，软件自动判别问题类型、选择算法求解

例1

$$\min f(x_1,x_2) = 2x_1^2-3x_1x_2+3x_2^2-3x_1+x_2$$

$$s.t.\quad x_1+2x_2=3,\quad 2x_1-x_2\ge -3,\quad x_1-3x_2\le 3,\quad x_1\ge 2, x_2\le 0$$

Exam0901.lg4

注意@free(x2)

一般只求局部最优，要求全局最优可修改选项卡

LINGO求解NLP

例2

$$\min e^{x_1}(4x_1^2+2x_2^2+4x_1x_2+2x_2+1)$$

$$x_1x_2-x_1-x_2+1.5\le 0,\quad x_1x_2+10\ge 0$$

$$x_1^2+x_2-1=0$$

Exam0902.lg4

注意@free(x1); @free(x2);

利用全局最优求解程序：

最优解	最优值
(1.3584，-0.8452)	13.7185

实例1：投资组合问题

$$\min Z_2 = 4x_1^2+36x_2^2+100x_3^2+5x_1x_2-20x_1x_3-30x_2x_3$$

$$\text{s.t.}\quad 5x_1+8x_2+10x_3\ge 1000$$

$$20x_1+25x_2+30x_3\le 5000$$

$$x_1,\ x_2,\ x_3\ge 0$$

Shili0901.lg4

解得x = 1.0e+002 *（1.3111，0.1529，0.2221）

如果一定要整数解，可以四舍五入到（131，15，22）

如利用@gin(x),可得整数最优解(132，15，22)

用去资金为132×20+15×25+22×30 = 3675（百元）

期望收益为132×5+15×8+22×10 = 1000（百元）

风险(方差)为 68116，标准差约为261（百元）

实例2: 供应与选址

$$\min \sum_{j=1}^{2}\sum_{i=1}^{6} c_{ij}[(x_j-a_i)^2+(y_j-b_i)^2]^{1/2}$$

$$s.t.\quad \sum_{j=1}^{2} c_{ij}=d_i,\quad i=1,\dots,6$$

$$\sum_{i=1}^{6} c_{ij}\le e_j,\quad j=1,2$$

改建两个新料场

决策变量：

c_{ij}, (x_j, y_j)~16维

Shili0902.lg4

初始点的选择

局部最优解问题

用现料场总吨公里数为136.2

结果：总吨公里数为85.3，比使用原料场减少了50.9。

布置实验内容

实验目的

1）掌握用MATLAB优化工具箱和LINGO解非线性规划的方法；

2）练习建立实际问题的非线性规划模型。

实验内容

见网络学堂