考试课程　　数学实验　　　2002. 06. 15

A 卷

1. 已知非线性方程 $f(x)=\int_{-1}^{x}[\frac{1}{4}+\sin(t)]dt=0$。取初值 $x_0=0.5$，在满足 $|x_{k+1}-x_k|\le 10^{-6}$ 的条件下，试用迭代公式 $x_{k+1}=\arccos[\frac{1}{4}x_k+\frac{1}{4}+\cos(1)]$ 求该方程[0, 1]内的根 $x^*=$__ 0.44655_ (保留小数点后 5 位)，该迭代方法是__1___阶收敛。给出求解该方程的 Newton 迭代公式 $x_{k+1}=$ x_k-(0.25 x_k +0.25+cos(1)-cos x_k)/(0.25+sin x_k)。

```
x0=0.5;
x= zeros(50,1);
x(1)=x0;
for j=1:50
    x(j+1)=acos(0.25* x(j)+0.25+cos(1));
    if norm (x(j+1)-x(j))<= 1e-6
        break;
    end;
end;
j
x(j+1)
```

输出结果：

ans = 0.446554090231961

NEWTON 法(2 阶收敛):

对于方程 f(x)=0，其牛顿法迭代公式为：

$$\varphi(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)}$$

f(x)=0.25x+0.25+cos(1)-cos(x)

x(k+1)=x(k)-(0.25x(k)+0.25+cos(1)-cos(x(k)))/(0.25+sin(x(k)))

x_k-(0.25 x_k +0.25+cos(1)-cos x_k)/(0.25+sin x_k)

2. 已知常微分方程初值问题：$y''+y'e^x-y\sin(x+y)=0, y(0)=1, y'(0)=0$。试用数值方法求 y(1)=_1.3091_ (保留小数点后 4 位)，你用的方法是___龙格-库塔方法___。

```
%待解常微分方程组函数 M 文件源程序：
function dy=ff (x,y)
dy=[y(2);y(1)*sin(x+ y(1))-y(2)*exp(x)];
%应用欧拉方法和龙格-库塔方法求解该常微分方程：
ts=0:0.1:1;
y0=[1,0];
[x,y]=ode45(@ff, ts,y0); %龙格-库塔方法求数值解
[x, y(:,1)]
```

输出结果：

1.000000000000000　　1.309095782053819

3. 假定显著性水平 $\alpha=0.01$。已知某厂生产某种家用装修材料，某有害物质含量服从正态分布。在一次连续五天的抽查检验中，得其材料的有害物质含量为 (10^{-3}): 1.1, 1.0, 0.9, 0.8,

0.5，试问这种材料有害物质含量的置信区间（精确到 3 位小数）为_[0.386　1.344]_；若规定这种材料的有害物质含量不能超过万分之五，试根据这次抽样的结果作假设检验。你的原假设为___H0:μ≤0.5_，用的 Matlab 命令是__ ttest(x,0.5,0.01,1)___，检验结果是___接受原假设_。

```
x=[1.1 1.0 0.9 0.8 0.5];
[mu, sigma, muci, sigmaci]=normfit(x,0.01)
```

输出结果：

```
muci =
    0.385979420705654
    1.334020579294346
```

```
x=[1.1 1.0 0.9 0.8 0.5];
[h,sig,ci] =ttest(x,0.5,0.01,1)
```

输出结果：

h =0

4. 某投资公司经理正在考虑将 30 万元基金用于股票投资。经过慎重考虑，他从所有上市交易的股票中选择了三种股票作为候选投资对象。经过分析，该经理认为每年股票 1 的期望收益为每股 5（元），方差为 4；股票 2 的期望收益为每股 8（元），而方差为 36；股票 3 的期望收益为每股 10（元），而方差为 100。假设不同股票的收益是相互独立的，目前股票 1、2、3 的市价分别为每股 20 元、25 元，30 元。投资风险用收益的方差大小来衡量，如股票 1 投资 x 股时，投资风险为 $4x^2$。

1） 如果不考虑投资风险，如何投资可以得到最大的期望收益？
2） 如果该投资人期望今年至少得到 5 万元的投资收益，但是希望投资的总风险最小，则应如何投资？
3） 计算在不同的投资期望收益（从 0 到最大收益，以整万元为单位）下投资的总风险，将计算结果填入下表（保留四位有效数字），并根据该问题的实际意义和以下数据给出拟合函数。

收　益(万元)															
风险															

(1)不考虑投资风险，为线性约束优化：

决策变量：

股票一股数：x1；

股票二股数：x2；

股票三股数：x3；

目标函数：

Z=5*x1+8*x2+10*x3

约束条件：

20*x1+25*x2+30*x3=300000　　　!!!!!此约束条件不恰当，可以选择不全部投资，即使此时全部投资获益最大！

20*x1+25*x2+30*x3≤300000

基本模型：

max(z)= 5*x1+8*x2+10*x3

s.t.　　20*x1+25*x2+30*x3≤30000

　　x1,x2,x3 ≥ 0

优化程序(线性)：

```
c=[5 8 10];
A1=[ 20    25    30    ];
b1=[300000];
v1=[0 0 0];
[x,z,ef,out,lag]=linprog(-c,A1,b1,[],[],v1)
```

输出结果：

```
x =

   1.0e+003 *

        0.0000
        0.0000
       10.0000

z =

  -1.0000e+005
```

优化方案：

股票一股数：0；

股票二股数：0；

股票三股数：10000；

最大收益：100000 元

(2)非线性约束优化：

决策变量：

股票一股数：x1；

股票二股数：x2；

股票三股数：x3；

目标函数：

Y=4*x1^2+36*x2^2+100*x3^2

约束条件：

20*x1+25*x2+30*x3=300000　　!!!!!此约束条件错误，为减少投资风险，投资商可以选择不全部投资！

20*x1+25*x2+30*x3≤300000

5*x1+8*x2+10*x3≥50000

基本模型：

min(y)= 4*x1^2+36*x2^2+100*x3^2

s.t. 5*x1+8*x2+10*x3≥50000

20*x1+25*x2+30*x3≤300000

x1,x2,x3≥0

优化程序(非线性)：

```
function y=min1(x)
y=4*x(1)^2+36*x(2)^2+100*x(3)^2;

x0=[0 0 10000];
A1=[ -5    -8    -10;
       20    25    30];
b1=[-50000 300000];
v1=[0 0 0];
```

```
[x,y,ef,out,lag]=fmincon(@min1,x0,A1,b1,[],[],v1)
Z=5*x(1)+8*x(2)+10*x(3)
T=20*x(1)+25*x(2)+30*x(3)
```

另：可以使用二次规划：

```
H=[8 0 0;0 72 0;0 0 200];
A=[-5 -8 -10;20 25 30];
c=[0 0 0];
b=[-50000,300000];
v1=[0,0,0];
[x,f]=quadprog(H,c,A,b,[],[],v1);
x
VAR=f
REV=-A(1,:)*x
```

输出结果：

```
x =

   1.0e+003 *

     6.923076859964381     1.230769257108539     0.553846164330979

y =      2.769230769230770e+008
Z =      50000
T =      1.858461538461538e+005
```

优化方案：

股票一股数：6923；

股票二股数：1231；

股票三股数：554；

盈利金额：50000 元

投资金额：185846 元

最小风险：276923077

(3)

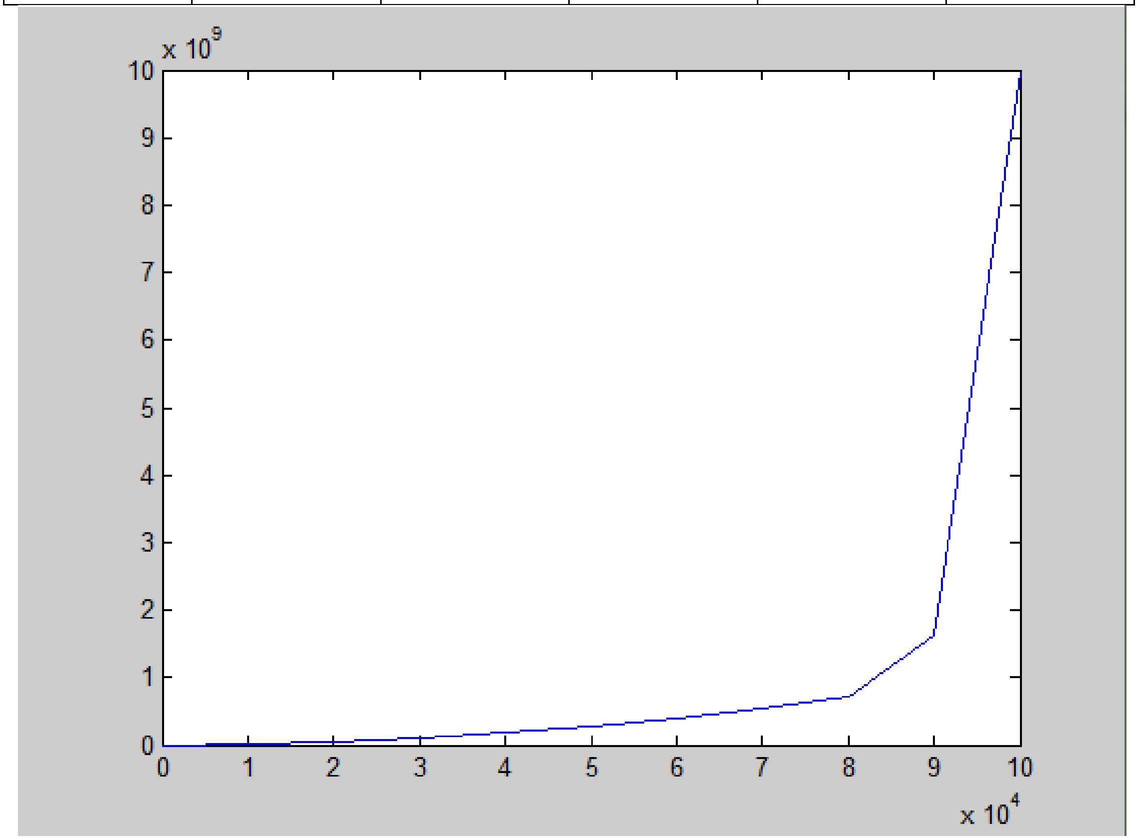
```
y=zeros(1,11);
z= zeros(1,11);
for i=1:11
x0=[0 0 10000];
A1=[ -5    -8    -10;
        20    25    30];
b1=[-10000*(i-1) 300000];
v1=[0 0 0];
[x,y(i),ef,out,lag]=fmincon(@min1,x0,A1,b1,[],[],v1);
z(i)=5*x(1)+8*x(2)+10*x(3)
end;
y
z
grid
plot(z,y)
```

输出结果：

保留四位有效数字！还要有 0!!!

收益(万元)	1	2	3	4	5

风险	11076923	44307692	99692308	177230769	276923077
收益(万元)	6	7	8	9	10
风险	398769231	542769231	708923077	1624988257	10000000000



??根据收益与风险对投股数的次数关系，可大致猜想关系如下：

y=f(z)=b1*z^2/(z+b2);

非线性回归分析：

y=f(z)=b1*z^2/(z+b2);

一元线性回归分析：

```
n=11;
T=[ones(n,1),z'];
[b0,bint,r,rint,s]=regress(y',T);
```

非线性回归分析：

M 文件：

```
function y=fun(b,z)
y= b(1)*z.^2./(z+b(2));
```

回归程序：

```
[b,R,J]=nlinfit(z,y, 'fun',b0)        %以一元线性回归结果 b0 作初值！
zz=0:10000:100000
yy= b(1)*zz.^2./(zz+b(2))
plot(z,y, 'o',zz,yy)
nlintool(z,y, 'fun',b)
```

拟合度很差！！！！！！！ 求助！！！

考试课程　　数学实验　　　2002.06.15

B 卷

1. 已知非线性方程 $f(x)=\int_{-1}^{x}[\frac{1}{8}+\sin(t)]dt=0$。取初值 $x_0=0.5$，在满足 $|x_{k+1}-x_k|\le 10^{-6}$ 的条件下，试用迭代公式 $x_{k+1}=\arccos[\frac{1}{8}x_k+\frac{1}{8}+\cos(1)]$ 求该方程[0, 1]内的根 $x^*=$____________ (保留小数点后 5 位), 该迭代方法是____阶收敛。给出求解该方程的 Newton 迭代公式 $x_{k+1}=$____。

2．已知常微分方程初值问题：$y''+y'e^x-y\sin(x+y)-1=0, y(0)=1, y'(0)=0$。试用数值方法求 y(1)=　　　　　　　(精确到 4 位小数),你用的方法是　　　　　　　　,Matlab 命令是 _____ ________________ _______ 。　　　　　　______________

3．假定显著性水平 $\alpha=0.01$。已知某厂生产某种家用装修材料，某有害物质含量服从正态分布。在一次连续五天的抽查检验中，得其材料的有害物质含量为 (10^{-3}): 1.1, 1.0, 0.9, 0.8, 0.7,试问这种材料有害物质含量的置信区间(精确到 3 位小数)为___________________; 若规定这种材料的有害物质含量不能超过万分之五，试根据这次抽样的结果作假设检验。你的原假设为______________________, 用的 Matlab 命令是___________________________, 检验结果是____________。

4. 某投资公司经理正在考虑将 30 万元基金用于股票投资。经过慎重考虑，他从所有上市交易的股票中选择了三种股票作为候选投资对象。经过分析，该经理认为每年股票 1 的期望收益为每股 5（元），方差为 4；股票 2 的期望收益为每股 8（元），而方差为 36；股票 3 的期望收益为每股 20（元），而方差为 100。假设不同股票的收益是相互独立的，目前股票 1、2、3 的市价分别为每股 20 元、25 元，60 元。投资风险用收益的方差大小来衡量，如股票 1 投资 x 股时，投资风险为 $4x^2$。

1） 如果不考虑投资风险，如何投资可以得到最大期望收益？
2） 如果该投资人期望今年至少得到 5 万元的投资收益，但是希望投资的总风险最小，则应如何投资？
3） 计算在不同的投资期望收益（从 0 到最大收益，以整万元为单位）下投资的总风险，将计算结果填入下表（保留四位有效数字），并根据该问题的实际意义和以下数据给出拟合函数。

收　益 (万元)															
风险															

考试课程　　数学实验　　　2002.06.15

A 卷答案

1． 解：由原方程积分可得：f(x)=x/4+1/4+cos(1)-cos(x)=0

$$x_{k+1}=x_k-\frac{x_k/4+1/4+\cos(1)-\cos(x_k)}{1/4+\sin(x_k)}$$

$x^*=0.44655$;　1;

2. [0.386 1.334]; $H_0:\mu\le 0.5$; ttest(x, 0.5, 0.01, 1); 接受 H_0

3. 1.3090 (or 1.3091); R-K 方法

4.. 参考解答：

问题 1）全部投资于股票 3，最大的期望收益 10 万元。

问题 2）分别用 x_1 、x_2 和 x_3 表示投资股票 1、2、3 的数量，决策目标可以表示为

$$Min\quad 4x_1^2+36x_2^2+100x_3^2 \tag{1}$$

投资的期望收益约束为

$$5x_1+8x_2+10x_3>=50000 \tag{2}$$

考虑可用于投资的资金的限制，即

$$20x_1+25x_2+30x_3\le 300000 \tag{3}$$

（1）-（3）构成本题的优化模型（加上 x_1 和 x_2 的非负限制）。MATLAB 程序如下：

```
H=[8 0 0;0 72 0;0 0 200];
A=[-5 -8 -10;20 25 30];
c=[0 0 0];
b=[-50000,300000];
v1=[0,0,0];
[x,f]=quadprog(H,c,A,b,[],[],v1);
x
VAR=f
REV=-A(1,:)*x
```

计算结果为：

X= 6923.07692307693,1230.76923076923,553.84615384615

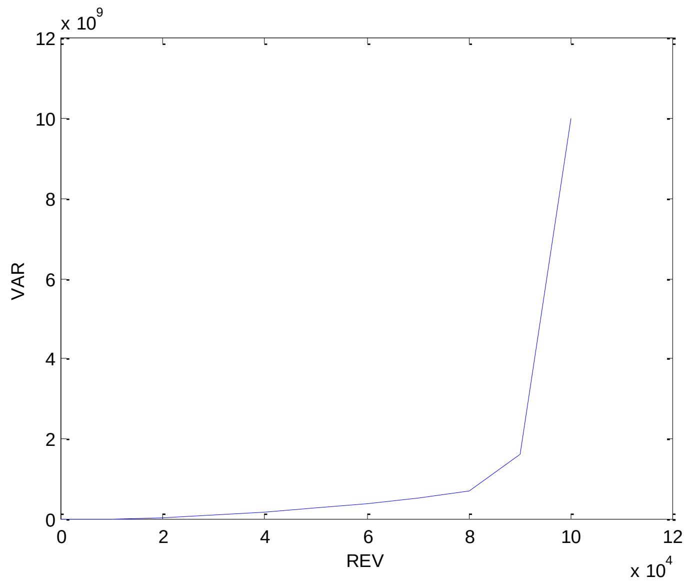
VAR = 　2.769230769230770e+008

REV = 　50000

由于在投资时购买股票的数量必须是整数，我们简单将上述结果取整。例如：x_1=6923，x_2=1231，x_3 =554（股）。所用去的资金为 185855（元），期望利润为 50003（元），此时的风险（方差）为 276956312。

问题 3）：分别计算期望利润为 0~10 万元的情况，MATLAB 程序如下：

```
H=[8 0 0;0 72 0;0 0 200];
A=[-5 -8 -10;20 25 30];
c=[0 0 0];
v1=[0 0 0];
for i=1:11,
   b=[10000*(-i+1),300000];
   x=quadprog(H,c,A,b,[],[],v1);
   REV(i)=-A(1,:)*x;
   VAR(i)=x'*H*x/2.0;
end
plot(REV,VAR);
xlabel('REV');
ylabel('VAR');
```



B 卷答案

1. $x^* = 0.71553$; 1; $x_{k+1} = x_k - \dfrac{x_k/8 + 1/8 + \cos(1) - \cos(x_k)}{1/8 + \sin(x_k)}$

2. [0.574 1.226]; $H_0: \mu \le 0.5$; ttest(x, 0.5, 0.01, 1); 拒绝 H_0

3. 1.6296 (or 1.6297); R-K 方法

4. 参考解答：

问题 1）全部投资于股票 3，最大的期望收益 10 万元。

问题 2）计算结果为：X= 5196.30484988453, 923.78752886836, 831.40877598153

VAR = 2.078521939953814e+008 REV = 50000

由于在投资时购买股票的数量必须是整数，我们简单将上述结果取整。例如：x_1=5196，x_2=925，x_3 =831（股）。所用去的资金为 176905（元），期望利润为 50000（元），此时的风险（方差）为 207852264。

问题 3）