大学数学实验

实验5 线性代数方程组的数值解法

清 华 大 学 数 学 科 学 系

线性代数方程组的数值解法

具有特别重要的地位和价值

计算数学两大类问题

数值代数　　　　(常/偏)微分方程数值解

非线性→线性　　　　离散化→代数方程

为什么要学习线性方程组的数值解法

- 许多实际问题归结为线性（代数）方程组

  机械设备、土建结构的受力分析　　　经济计划

  输电网络、管道系统的参数计算　　　企业管理

- 大型的方程组需要有效的数值解法
- 数值解法的稳定性和收敛性问题需要注意

实验5的主要内容

1. 直接方法 - 复杂度
2. 迭代方法 - 收敛性
3. 误差分析 – 病态性
4. 线性方程组数值解法的MATLAB实现
5. 实际问题中方程组的数值解

实验5的主要内容

1. 两类数值解法:
   - 直接方法;
   - 迭代方法.
2. 线性方程组数值解法的MATLAB实现
3. 实际问题中方程组的数值解。

线性方程组的一般形式、两类解法

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
\cdots\cdots & \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n
\end{aligned}
\qquad \text{或} \quad AX=b
$$

直接法 经过有限次算术运算求出精确解（实际上由于有舍入误差只能得到近似解） ---- 高斯消元法 (Gaussian elimination)及与它密切相关的矩阵LU分解

迭代法 从初始解出发，根据设计好的步骤用逐次求出的近似解逼近精确解 ---- 雅可比（Jacobi）迭代法和高斯—塞德尔（Gauss—Seidel）迭代法

直接法---高斯消元法（消去法）

消元过程

$$
\begin{aligned}
a_{11}^{(1)}x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + \cdots + a_{1n}^{(1)}x_n &= b_1^{(1)} \\
a_{22}^{(2)}x_2 + \cdots + a_{2n}^{(2)}x_n &= b_2^{(2)} \\
\cdots\cdots \\
a_{n2}^{(2)}x_2 + \cdots + a_{nn}^{(2)}x_n &= b_n^{(2)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a_{11}^{(1)}x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + \cdots\cdots + a_{1n}^{(1)}x_n &= b_1^{(1)} \\
a_{22}^{(2)}x_2 + \cdots\cdots + a_{2n}^{(2)}x_n &= b_2^{(2)} \\
\cdots\cdots \\
a_{n-1,n-1}^{(n-1)}x_{n-1} + a_{n-1,n}^{(n-1)}x_n &= b_{n-1}^{(n-1)} \\
a_{nn}^{(n)}x_n &= b_n^{(n)}
\end{aligned}
$$

回代过程

条件

$a_{kk}^{(k)} \neq 0$

$(k=1,2,\cdots,n)$

直接法-列主元素消元法

高斯消元法条件 $a_{kk}^{(k)} \neq 0 (k=1,2,\cdots,n)$

$a_{kk}^{(k)}$ (绝对值)很小时，用它作除数会导致舍入误差的很大增加

$$
\begin{aligned}
a_{kk}^{(k)}x_k + \cdots\cdots + a_{kn}^{(k)}x_n &= b_k^{(k)} \\
\cdots\cdots \\
a_{nk}^{(k)}x_k + \cdots\cdots + a_{nn}^{(k)}x_n &= b_n^{(k)}
\end{aligned}
$$

解决办法　选 $|a_{ik}^{(k)}| \ (i=k,\cdots n)$ 最大的一个（列主元）

将列主元所在行与第k行交换后，再按上面的高斯消元法进行下去，称为列主元素消元法。

多选题　2分　设置

与（顺序）高斯消元法相比较，引入列主元消去法的主要意义在于：

A 加快算法的求解速度

B 保证算法的收敛性

C 增加算法的稳定性

D 提高算法的计算精度

E 以上都不对

提交

Guass 消元法的计算复杂度

（算法的）计算（时间）复杂度：

基本操作（加减乘除、比较等）总次数与 n 的关系

例：Cramer 法则解 Ax=b： $x_i = \dfrac{D_i}{D}$　$D_i = |A_i|$　$D=|A|$

每个行列式所需乘法次数：　n!(n-1)

总共所需乘法、除法次数：　(n+1)!(n-1) + n

Guass 消元法：估算需要多少次加减法、乘除法？

主观题　5分　设置

假设n阶线性方程组 AX=b 可用Guass消元法求解，请分析其计算复杂度为：

所需的乘除法次数 = ?

所需的加减法次数 = ?

（按消元、回代分别计算，最后加总）

正常使用主观题需2.0以上版本雨课堂

作答

消元过程

$$a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - l_{ik}a_{kj}^{(k)}, \quad i,j = k+1,k+2,\ldots,n \quad (a)$$

$$b_i^{(k+1)} = b_i^{(k)} - l_{ik}b_k^{(k)}, \quad i = k+1,k+2,\ldots,n \quad (b)$$

a式共有$(n-k)^2$个计算式　每式1次乘法

b式共有$(n-k)$个计算式　1次减法

$(n-k)$个 l_{ik} 两式共用　1次除法

乘除法(次)：

$$\sum_{k=1}^{n-1}[(n-k)^2 + 2(n-k)]$$

加减法(次)：

$$\sum_{k=1}^{n-1}[(n-k)^2 + (n-k)]$$

回代过程

$$\begin{cases} x_n = b_n^{(n)} \Big/ a_{nn}^{(n)} \\ x_k = \left(b_k^{(k)} - \sum\limits_{j=k+1}^{n} a_{kj}^{(k)} x_j \right) \Big/ a_{kk}^{(k)}, \quad k = n-1, n-2, \cdots, 2, 1 \end{cases}$$

n次除法；

乘法、减法：k=n-1，各1次；　　k=n-2，各2次；

……；　　k =1=n-(n-1)，各n-1次

乘除法(次)　$\sum\limits_{k=1}^{n-1} k + n = \frac{1}{2}n(n-1) + n = \frac{1}{2}n(n+1)$

加减法(次)　$\sum\limits_{k=1}^{n-1} k = \frac{1}{2}n(n-1)$

消元+回代过程

乘除法(次)：
$$\sum_{k=1}^{n-1}[(n-k)^2 + 2(n-k)] + \tfrac{1}{2}n(n+1)$$
$$= \tfrac{1}{6}(n-1)n(2n-1) + n(n-1) + \tfrac{1}{2}n(n+1)$$
$$= \tfrac{1}{3}n^3 + n^2 - \tfrac{1}{3}n \quad = O(n^3)$$

加减法(次)：
$$\sum_{k=1}^{n-1}[(n-k)^2 + (n-k)] + \tfrac{1}{2}n(n-1)$$
$$= \tfrac{1}{6}(n-1)n(2n-1) + \tfrac{1}{2}n(n-1) + \tfrac{1}{2}n(n-1)$$
$$= \tfrac{1}{3}n^3 + \tfrac{1}{2}n^2 - \tfrac{5}{6}n \quad = O(n^3)$$

投票　最多可选1项　　设置

你认为下列说法正确的是

A　全主元消去法的计算复杂度高于列主元消去法，但计算稳定性优于列主元消去法

B　求解 Ax = b 的消元法可以用于求 A 的逆矩阵

C　如果按矩阵相乘的定义计算两个 n 阶方阵的乘积，计算复杂度为O(n^3)

D　两个 n 阶方阵相乘的计算复杂度至少是 O(n^3)

提交

直接法 - 高斯消元法的矩阵表示

高斯消元法的第一次消元

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} a_{11}^{(1)}x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + \cdots + a_{1n}^{(1)}x_n &= b_1^{(1)} \\ a_{22}^{(2)}x_2 + \cdots + a_{2n}^{(2)}x_n &= b_2^{(2)} \\ \cdots\cdots \\ a_{n2}^{(2)}x_2 + \cdots + a_{nn}^{(2)}x_n &= b_n^{(2)} \end{aligned}$$

系数默认带上标(1)

相当于方程AX=b 两 边左乘单位下三角阵M_1

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ -a_{21}^{(1)}/a_{11}^{(1)} & 1 & & \\ \cdots\cdots & & \ddots & \\ -a_{n1}^{(1)}/a_{11}^{(1)} & & & 1 \end{bmatrix} \quad \Downarrow \quad \boxed{M_1 A x = M_1 b}$$

M_1 是一系列初等矩阵（Elementary matrix ）的乘积

直接法 - 高斯消元法的矩阵表示

第二次消元相当于再左乘单位下三角阵M_2

$$\boxed{M_1 A x = M_1 b} \Rightarrow \boxed{M_2 M_1 A x = M_2 M_1 b}$$

最终消元形式　$M_{n-1} \cdots M_2 M_1 A x = M_{n-1} \cdots M_2 M_1 b$

记 $M_{n-1} \cdots M_2 M_1 = M$,

M为单位下三角阵

记 $MA = U$　　$Ux = Mb$

U为上三角阵,且

对角元素$a_{kk}^{(k)} \neq 0$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{x = U^{-1} M b}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{aligned} a_{11}^{(1)}x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + \cdots\cdots + a_{1n}^{(1)}x_n &= b_1^{(1)} \\ a_{22}^{(2)}x_2 + \cdots\cdots + a_{2n}^{(2)}x_n &= b_2^{(2)} \\ \cdots\cdots \\ a_{n-1,n-1}^{(n-1)}x_{n-1} + a_{n-1,n}^{(n-1)}x_n &= b_{n-1}^{(n-1)} \\ a_{nn}^{(n)}x_n &= b_n^{(n)} \end{aligned}$$

直 接 法 – 矩 阵 LU 分 解

$$a_{kk}^{(k)} \neq 0 \quad (k = 1, 2, \cdots, n) \quad \Leftrightarrow \quad A\text{的顺序主子式} D = \begin{vmatrix} a_{11} \cdots a_{1k} \\ \vdots \quad \vdots \\ a_{k1} \cdots a_{kk} \end{vmatrix} \neq 0, (k = 1, \cdots n)$$

高斯消元法通过左乘M,使MA=U

M单位下三角阵，U上三角阵

记 L=M^{-1}，L为单位下三角阵

若A可逆且顺序主子式不为零，则A可分解为一个单位下三角阵L和一个上三角阵U的积 **A=LU**。

这种分解是唯一的，称 矩阵LU分解。

亦称**Doolittle分解(Doolittle factorization/decomposition)**

直接法－矩阵LU分解

若A可逆，但顺序主子式 $D\neq 0$不成立

消元中会遇到某个$a_{kk}^{(k)}=0$，但必存在$a_{ik}^{(k)}\neq 0(i=k+1,\cdots n)$

第i行与第k行交换 ⟺ 乘以初等置换阵 P_{ik}

$$MA=U \Rightarrow MPA=U$$

P~置换阵（permutation matrix，单位阵经若干次行交换）

若A可逆，则存在置换阵 P 使 PA=LU
L为单位下三角阵，U为上三角阵。

这种分解唯一吗？

【注】交换阵 (commutation matrix)：一类特殊的置换阵；

可交换阵 (commuting/commutative matrix)：相乘可换序

直接法 - 对称正定矩阵的分解

正定对称矩阵 A 可分解成对角元素为正的下三角阵 L 与它的转置矩阵之积，即 $A=LL^T$

或 $A=LDL^T$

其中 L 是单位下三角阵，D 是元素为正的对角阵。
这种分解称三角分解或 Cholesky 分解。

Why？ 对称正定→A可逆，顺序主子式 > 0 → A = LU

L为单位下三角阵，U为上三角阵(对角元素>0)

→ $A = LDU_1$（U_1为单位上三角阵）

→ $A^T = U_1^T DL^T$ → $A = LDL^T$ ($D=D_1D_1$，$L_1=LD_1$)

→ $U_1=L^T$ → $A = LD_1D_1L^T = L_1L_1^T$

直接法 - 三对角矩阵的*LU*分解

在三次样条插值和其它一些计算中，会遇到求解系数矩阵A具有三对角形式的线性方程组，这时A的LU分解（假定分解存在）可表为:

$$A=\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & & & \\ a_2 & b_2 & c_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & a_n & b_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ l_2 & 1 & & & \\ & l_3 & \ddots & & \\ & & \ddots & 1 & \\ & & & l_n & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 & c_1 & & & \\ & u_2 & c_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & u_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & & u_n \end{bmatrix}$$

L和U的计算公式为

$$\begin{cases} u_1=b_1 & \\ l_i=a_i/u_{i-1} & i=2,3,\cdots,n \\ u_i=b_i-l_ic_{i-1} & i=2,3,\cdots,n \end{cases}$$

直接法 - 三对角矩阵的*LU*分解

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ l_2 & 1 & & & \\ & l_3 & \ddots & & \\ & & \ddots & 1 & \\ & & & l_n & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 & c_1 & & & \\ & u_2 & c_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & u_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & & u_n \end{bmatrix}$$

L U

线性方程组$Ax=f$可通过等价的两个三角形方程组 $Ly=f$ 和 $Ux=y$ 求解如下：

$$\begin{cases} y_1=f_1 \\ y_i=f_i-l_iy_{i-1}, \quad i=2,\cdots,n \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_n=y_n/u_n \\ x_i=(y_i-c_ix_{i+1})/u_i, \quad i=n-1,\cdots,1 \end{cases}$$

求解三对角形方程组的追赶法

多选题 2分 设置

对（实）线性代数方程组 Ax=b, 以下说法正确的是:
（以下说法是中L为单位下三角阵，U为上三角阵）

A 若 A 可逆，则可将A进行LU分解为 A = LU，且这种分解是唯一的

B 若 A 为对称正定矩阵，则可将A进行LU分解为 A = LU，且这种分解是唯一的

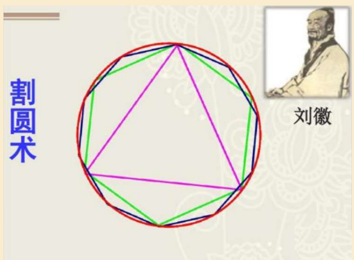
C 若 A 可逆，则高斯消去法（不选主元）可以求解 Ax=b

D 若 A为对称正定矩阵， 则高斯消去法（不选主元）可以求解 Ax=b

E 以上都不对

提交

迭代法



迭代法 --- 一个例子

$$\begin{cases}10x_1+3x_2+x_3=14\\2x_1-10x_2+3x_3=-5\\x_1+3x_2+10x_3=14\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=-0.3x_2-0.1x_3+1.4\\x_2=0.2x_1+0.3x_3+0.5\\x_3=-0.1x_1-0.3x_2+1.4\end{cases}$$

$$\boxed{\begin{cases}x_1^{(k+1)}=-0.3x_2^{(k)}-0.1x_3^{(k)}+1.4\\x_2^{(k+1)}=0.2x_1^{(k)}+0.3x_3^{(k)}+0.5\\x_3^{(k+1)}=-0.1x_1^{(k)}-0.3x_2^{(k)}+1.4\end{cases}}\quad k=0,1,2,\cdots$$

$x_1^{(0)}=x_2^{(0)}=x_3^{(0)}=0$ $\quad x_1^{(1)}=1.4, x_2^{(1)}=0.5, x_3^{(1)}=1.4$

$\Rightarrow$ $x_1^{(4)}=0.9906,\ x_2^{(4)}=0.9645,\ x_3^{(4)}=0.9906$

精确解 $x_1=x_2=x_3=1$

迭代法 – 雅可比（Jacobi）迭代

将 A 分解为 $A=D-L-U$，其中 $D=diag(a_{11},a_{22},\cdots a_{nn})$，

$$L=-\begin{bmatrix}0&&&\\a_{21}&0&&\\\vdots&\ddots&\ddots&\\a_{n1}&a_{n2}\cdots&a_{n,n-1}&0\end{bmatrix},\quad U=-\begin{bmatrix}0&a_{12}\cdots&a_{1n}\\&0&\ddots&\vdots\\&&\ddots&a_{n-1,1}\\&&&0\end{bmatrix}$$

设对角阵D非奇异（即$a_{ii}\neq0, i=1,\cdots n$） $\quad Ax=b$

$\Rightarrow Dx-(L+U)x=b \Rightarrow \boxed{x=D^{-1}(L+U)x+D^{-1}b}$

记 $B_1=D^{-1}(L+U)$ $\quad$ 迭代格式

$f_1=D^{-1}b$ $\quad x^{(k+1)}=B_1x^{(k)}+f_1\ (k=0,1,2\cdots)$

迭代法 – 高斯–塞德尔(Gauss-Sedeil)迭代

Jacobi迭代公式 $Dx^{(k+1)}=Lx^{(k)}+Ux^{(k)}+b$

$$\begin{cases}x_1^{(k+1)}=-0.3x_2^{(k)}-0.1x_3^{(k)}+1.4\\x_2^{(k+1)}=0.2x_1^{(k)}+0.3x_3^{(k)}+0.5\\x_3^{(k+1)}=-0.1x_1^{(k)}-0.3x_2^{(k)}+1.4\end{cases}\xrightarrow{\text{改进}}\begin{cases}x_1^{(k+1)}=-0.3x_2^{(k)}-0.1x_3^{(k)}+1.4\\x_2^{(k+1)}=0.2x_1^{(k+1)}+0.3x_3^{(k)}+0.5\\x_3^{(k+1)}=-0.1x_1^{(k+1)}-0.3x_2^{(k+1)}+1.4\end{cases}$$

Gauss-Seideil迭代公式 $Dx^{(k+1)}=Lx^{(k+1)}+Ux^{(k)}+b$

在D非奇异的假设下$(D-L)$可逆，于是得到

$B_2=(D-L)^{-1}U,\quad f_2=(D-L)^{-1}b$

$x^{(k+1)}=B_2x^{(k)}+f_2\quad(k=0,1,2\cdots)$

迭代法的收敛性

Jacobi迭代 $\quad x^{(k+1)}=B_1x^{(k)}+f_1$ $\quad B_1=D^{-1}(L+U)$, $f_1=D^{-1}b$

Gauss-Seideil迭代 $\quad x^{(k+1)}=B_2x^{(k)}+f_2$ $\quad B_2=(D-L)^{-1}U$, $f_2=(D-L)^{-1}b$

一般迭代形式 $\quad x^{(k+1)}=Bx^{(k)}+f$

原方程组的解x^*满足：$x^*=Bx^*+f \Leftrightarrow Ax^*=b$ (相容性)

迭代k次得到 $x^{(k)}-x^*=B^k(x^{(0)}-x^*)$

序列收敛 $x^{(k)}\to x^*(k\to\infty)$的充要条件

$B^k\to0(k\to\infty)$ $\boxed{\Leftrightarrow B\text{的所有特征根（取模）小于}1}$

B的谱半径 $\rho(B)=\max\limits_{1\le i\le n}|\lambda_i|$ $\quad \Updownarrow \quad \boxed{\rho(B)<1}$

$\lambda_i(i=1,\cdots n)$是B的特征根

迭代法的收敛性

序列收敛 $x^{(k)}\to x^*(k\to\infty)$的充分条件

1) 若A是严格对角占优的，即$|a_{ii}|>\sum\limits_{j\neq i}|a_{ij}|(i=1,\cdots n)$,

则雅可比和高斯–赛德尔迭代均收敛；

2）若 A 对称正定，则高斯—塞德尔迭代收敛；

3) 若$\|B\|=q<1$, 则迭代公式 $x^{(k+1)}=Bx^{(k)}+f$ 收敛

且 $\|x^{(k+1)}-x^*\|\le\frac{q}{1-q}\|x^{(k+1)}-x^{(k)}\|$, q越小收敛越快

谱半径性质：$\rho(B)\le\|B\|$ 其中$\|B\|$是任何一种矩阵范数

迭代法 - 超松弛(SOR)迭代

Gauss-Seideil迭代公式

$x^{(k+1)}=D^{-1}(Lx^{(k+1)}+Ux^{(k)})+D^{-1}b\rightarrow\tilde{x}^{(k+1)}$

$\tilde{x}^{(k+1)}$和x^k加权ω作平均 $\quad$ 改进

$$\boxed{x^{(k+1)}=\omega\tilde{x}^{(k+1)}+(1-\omega)x^{(k)}}$$

$\omega>1$	$\omega<1$	$\omega=1$
超松弛迭代	低松弛迭代	Gauss-Seideil迭代

迭代法 -超松弛 SOR 迭代

$$x^{(k+1)} = B_\omega x^{(k)} + f_\omega,$$
$$B_\omega = (D-\omega L)^{-1}[\omega U + (1-\omega)D],$$
$$f_\omega = \omega(D-\omega L)^{-1} b$$

若A对称正定 收敛充要条件

$$\boxed{0 < \omega < 2}$$

SOR 迭代------解大型稀疏矩阵方程组

多选题 2分 设置

用迭代法求解Ax=b时，以下说法正确的是

- A 若A对称正定，则雅可比迭代法收敛
- B 若A对称正定，则高斯-赛德尔迭代法收敛
- C 若A对称正定，则超松弛迭代法收敛的充要条件是加权因子（也称松弛因子）大于0且小于2
- D 若A的谱半径 = 0.9, 则雅可比迭代法收敛
- E 以上都不对

提交

误 差 分 析

细致分析线性代数方程求解的误差传播比较困难

换个思路： （事后误差分析）

计算不可能没有误差

==》 相当于求解了“其他”的方程

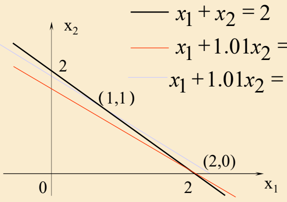
==》 误差是否会导致结果“面目全非”？

与方程本身特点密切相关！

误 差 分 析

$$A \quad x = b$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1.01 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$



$x_1 + x_2 = 2$

$x_1 + 1.01x_2 = 2$

$x_1 + 1.01x_2 = 2.01$

$$x = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 2.01 \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

x对b的扰动敏感

$Ax = b$，如果解 $\boldsymbol{x}$ 对 $\boldsymbol{b}$ 或 $\boldsymbol{A}$ 的扰动敏感，就称方程组是病态的，也称系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是病态的。

向量和矩阵的范数 **度量向量、矩阵大小的数量指标**

向量范数 设 $x = (x_1, \cdots x_n)^T$，范数记作 $\|x\|$

最常用的 2–范数 $\|x\|_2 = (x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{1/2} = \sqrt{x^\mathsf{T} x}$

$1-$范数 $\|x\|_1 = |x_1| + \cdots + |x_n|$ $\infty-$范数 $\|x\|_\infty = \max(|x_1|, \cdots |x_n|)$

矩阵范数 设 $A = (a_{ij})_{n\times n}$，范数记作 $\|A\|$

$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^T A)}$ $2-$范数 $\lambda_{\max}$ 表示最大特征根

$\|A\|_1 = \max\limits_{j} \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ij}|$ （$1-$范数） $\|A\|_\infty = \max\limits_{i} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|$ （$\infty-$范数）

向量和矩阵范数的相容性条件 $\|Ax\| \le \|A\| \cdot \|x\|$

向量的“大小”（“长度”）
----向量范数

定义 向量范数

如果向量$\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n$的某个实值函数f($\boldsymbol{x}$)=||$\boldsymbol{x}$||满足

(1)正定性：||$\boldsymbol{x}$||≥0,且||$\boldsymbol{x}$||=0当且仅当$\boldsymbol{x}$=0

(2)齐次性：对任意实数α，都有||$\alpha\boldsymbol{x}$||=|α|||$\boldsymbol{x}$||

(3)三角不等式：对任意$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbf{R}^n$，都有||$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$||≤||$\boldsymbol{x}$||+||$\boldsymbol{y}$||

则称||$\boldsymbol{x}$||为$\mathbf{R}^n$上的一个向量范数。

由(3)可推出(令$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{z}-\boldsymbol{x}$) ||$\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}$||≥||$\boldsymbol{x}$||-||$\boldsymbol{y}$||

矩阵的“大小”----矩阵范数

定义 矩阵范数

设$A\in\mathbf{R}^{n\times n}$的某个实值函数$f(A)=\|A\|$满足条件

(1) 正定性：$\|A\|\ge 0$，且$\|A\|=0$当且仅当$A=0$

(2) 齐次性：对任意实数α，都有$\|\alpha A\|=|\alpha|\|A\|$

(3) 三角不等式：对任意$A,B\in\mathbf{R}^{n\times n}$，都有

$$\|A+B\|\le\|A\|+\|B\|$$

(4) 相容性：对任意$A,B\in\mathbf{R}^{n\times n}$，都有$\|AB\|\le\|A\|\|B\|$

则称$\|A\|$为$\mathbf{R}^{n\times n}$上的一个矩阵范数。

矩阵的算子范数

$$\|Ax\|\le\|A\|\cdot\|x\|$$

与向量范数相容的矩阵范数，也称为“算子范数”

向量范数诱导的矩阵范数：$\|A\|=\max\{\|Ax\|:\|x\|=1\}$

【注】矩阵的F-范数（矩阵元素的平方和, 再开方），不是与向量2-范数相容的“算子范数”

定理（向量范数的等价性）

若$\|x\|_s$，$\|x\|_t$是$\mathbf{R}^n$上的任意两种向量范数，则存在大于零的常数C_1，C_2，使得对任意$x\in\mathbf{R}^n$有

$$C_1\|x\|_s\le\|x\|_t\le C_2\|x\|_s$$

条件数与误差分析

$$Ax=b \qquad \|Ax\|\le\|A\|\cdot\|x\|$$

1）设b有扰动δb，分析x的误差δx

$$A(x+\delta x)=b+\delta b \Rightarrow A\,\delta x=\delta b$$

$$\Rightarrow \delta x=A^{-1}\delta b \Rightarrow \|\delta x\|\le\|A^{-1}\|\cdot\|\delta b\|$$

$$\|b\|\le\|A\|\cdot\|x\| \Rightarrow \|x\|\ge\|b\|/\|A\|$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\|\delta x\|}{\|x\|}\le\|A^{-1}\|\cdot\|A\|\cdot\frac{\|\delta b\|}{\|b\|}=cond(A)\frac{\|\delta b\|}{\|b\|}}$$

定义A的条件数为$Cond(A)=\|A^{-1}\|\cdot\|A\|$

***A*的条件数越大,(由*b*的扰动引起的)*x*的误差可能越大**

条件数与误差分析

$$Ax=b$$

2）设A有扰动δA，分析x的误差δx

$$(A+\delta A)(x+\delta x)=b$$

$$\Rightarrow \frac{\|\delta x\|}{\|x\|}\cong\|A^{-1}\|\cdot\|A\|\cdot\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}=cond(A)\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}$$

***A*的条件数越大,(由*A*的扰动引起的)*x*的误差越大**

x的(相对)误差不超过b的(相对)误差的$Cond(A)$倍，也大致上是A的(相对)误差的$Cond(A)$倍。

条件数大的矩阵是病态矩阵

条件数的性质

假设采用算子范数： $\|A\|=\max\{\|Ax\|:\|x\|=1\}$

$=\max\{\|Ax\|/\|x\|:\|x\|\ne 0\}$

→ 单位矩阵的范数 = 1

→ 正交矩阵的2-范数 = 1

但$\|I_{n\times n}\|_F=\sqrt{n}\ne 1$

(1) $\mathrm{cond}(A)=\|A^{-1}\|\|A\|\ge\|A^{-1}A\|=1$，$\mathrm{cond}(A)=\mathrm{cond}(A^{-1})$

$\mathrm{cond}(\alpha A)=\mathrm{cond}(A)$ $\alpha\in\mathbf{R}$，$\alpha\ne 0$

(2) 若U为正交阵，即$U^TU=I$，则

$\mathrm{cond}(U)_2=1$

$\mathrm{cond}(A)_2=\mathrm{cond}(UA)_2=\mathrm{cond}(AU)_2$

多选题 2分 设置

求解Ax=b时，以下说法正确的是

A 若A病态，则用直接法求解优于迭代法

B 若A病态，则用迭代法求解优于直接法

C 若A病态，则迭代法不具有收敛性

D 若A病态，则A无法进行LU分解

E 以上都不对

提交

线性方程组数值解法的MATLAB实现

1. 求解 $Ax=b$ 用左除： $x=A\backslash b$ 。

若A为可逆方阵，输出原方程的解x

若A为$n\times m$矩阵（$n>m$），且A^TA可逆，输出原方程的最小二乘解x

2. 矩阵LU分解

`[x,y]=lu(A)` 若A可逆且顺序主子式不为零，输出x为单位下三角阵L，y为上三角阵U，使A=xy

若A可逆，x为一置换阵与单位下角阵之积，使A=xy

← 列主元消去法对应的结果！

线性方程组数值解法的MATLAB实现

`[x,y,P]=lu(A)` 输出x为单位下三角阵L，y为上三角阵U，P为置换阵，使PA=xy

`[x,y,P]=lu(A, opt)` opt缺省为‘matrix’，若改为‘vector’：输出P为置换向量，使A(P,:)=xy

`u =chol(A)` 对正定对称矩阵 A 的 Cholesky 分解，输出 u 为上三角阵 U，使 $A=U^TU$

稀疏矩阵的LU分解：

[L,U,P,Q,D] = lu(S) 返回置换阵P,Q和对角阵D，使得 P*(D\S)*Q = L*U. （详见help文档）

更多矩阵分解功能(始于R2017b)：**decomposition**

例. 解 $\begin{cases} 10x_1+3x_2+x_3=14 \\ 2x_1-10x_2+3x_3=-5 \\ x_1+3x_2+10x_3=14 \end{cases}$

MATLAB 5.3.lnk

shiyan51

并对系数矩阵作LU分解

若第1个方程改为 $3x_2+x_3=14$ 结果如何

```
A=[10 3 1;2 -10 3;1 3 10],
b=[14 -5 14]',
x=A\b,
[L1,U1]=lu(A);
L1,U1,
A1=L1*U1,
[L2,U2,P]=lu(A);
L2,U2,P,
A2=L2*U2,
A3=inv(P)*A2
```

线性方程组数值解法的MATLAB实现

3. 范数 条件数 特征值

n=norm(x)	输入 x 为向量或矩阵，输出为 x 的 2-范数
c=cond(x)	输入 x 为矩阵，输出为 x 的 2-条件数
r=rcond(x)	输入 x 为方阵，输出为 x 条件数倒数
e=eig(x)	输入 x 为矩阵，输出 x 的全部特征值

4. Hilbert 矩阵： h=hilb(n)

输出 h 为 n 阶 Hilbert 矩阵

$$H=\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & \cdots\cdots & 1/n \\ 1/2 & 1/3 & \cdots\cdots & 1/(n+1) \\ \cdots\cdots & & & \\ 1/n & 1/(n+1) & \cdots & 1/(2n-1) \end{bmatrix}$$

当n很大时Hilbert矩阵呈病态

观察Hilbert矩阵的病态性

MATLAB 5.3.lnk

shiyan52

例. Hx=b, 其中 H=hilb(5), $b=[1,\ldots 1]^T$

```
H=hilb(5),
h=rats(H),
b=ones(5,1);
x=H\b;
b(5)=1.1;
x1=H\b;
[x,x1],
n1=cond(H),
n2=rcond(H),
```

1.0e+003 *

x	x1
0.0050	0.0680
-0.1200	-1.3800
0.6300	6.3000
-1.1200	-9.9400
0.6300	5.0400

cond(H)=4.7661e+005

线性方程组数值解法的MATLAB实现

1. 提取（产生）对角阵

v=diag(x) 输入向量x，输出v是以x为对角元素的对角阵；输入矩阵x，输出v是x的对角元素构成的向量；

v=diag(diag(x)) 输入矩阵x，输出v是x的对角元素构成的对角阵，可用于迭代法中从A中提取D。

2. 提取（产生）上（下）三角阵

y=triu(x) 输入矩阵 x，输出 v 是 x 的上三角阵；

v=tril(x) 输入矩阵 x，输出 v 是 x 的下三角阵；

v=triu(x,1) 输入矩阵 x，输出 v 是 x 的上三角阵，但对角元素为 0，可用于迭代法中从 A 中提取 U；

v=tril(x,-1) 输入矩阵 x，输出 v 是 x 的下三角阵，但对角元素为 0，可用于迭代法中从 A 中提取 L。

例. 用迭代法解

$$\begin{cases} 10x_1+3x_2+x_3=14 \\ 2x_1-10x_2+3x_3=-5 \\ x_1+3x_2+10x_3=14 \end{cases}$$

MATLAB 5.3.lnk **shiyan53**

	x^T(雅可比)	x^T(高斯—塞德尔)
0	(0, 0, 0)	(0, 0, 0)
1	(1.4, 0.5, 1.4)	(1.4, 0.78, 1.026)
2	(1.11, 1.20, 1.11)	(1.0634, 1.0205, 0.9875)
3	(0.929, 1.055, 0.929)	(0.9951, 0.9953, 1.0019)
4	(0.9906, 0.9645, 0.9906)	(1.0012, 1.0008, 0.9996)

稀疏矩阵的处理 ~ MATLAB进行大规模计算的优点

a=sparse(r,c,v,m,n) 在第r行、第c列输入数值v，矩阵共m行n列，输出a为稀疏矩阵，只给出(r,c)及v

aa=full(a) 输入稀疏矩阵a，输出aa为满矩阵（包含零元素）

```
a=sparse(2,2:3,8,2,4),  aa=full(a),
```

输出

```
a =(2,2)     8        aa= 0    0    0    0
   (2,3)     8            0    8    8    0
```

例. 分别用稀疏矩阵和满矩阵求解$Ax=b$, 比较计算时间

设 $A=\begin{bmatrix} 4 & 1 & & & \mathbf{0} \\ 1 & 4 & 1 & & \\ & 1 & 4 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ \mathbf{0} & & & 1 & 4 \end{bmatrix}_{n\times n}$

$b=[1,2,\cdots n]^T$

```
n=500;b=[1:n]';
a1=sparse(1:n,1:n,4,n,n);
a2=sparse(2:n,1:n-1,1,n,n);
a=a1+a2+a2';
tic;x=a\b;t1=toc
aa=full(a);
tic;xx=aa\b;t2=toc
y=sum(x)
yy=sum(xx)
```

MATLAB 5.3.lnk **shiyan54**

t1, t2相差巨大，说明用稀疏矩阵计算的优点

（y=yy 用于简单地验证两种方法结果的一致）

实例1 投入产出分析

表 1 中国 2002 年投入产出表

投入 \ 产出	农业	工业	建筑业	运输邮电业	批零餐饮业	其他服务业	外部需求	总产出
农业	464	788	229	13	127	13	1284	2918
工业	499	8605	1444	403	557	1223	4083	16814
建筑业	5	9	3	20	23	124	2691	2875
运输邮电业	62	527	128	163	67	146	477	1570
批零餐饮业	79	749	140	43	137	273	927	2341
其他服务业	146	1285	272	225	219	542	2725	5414
初始投入	1663	4851	659	703	1218	3093		
总投入	2918	16814	2875	1570	2341	5414		

假设 总投入=总产出, 产销平衡 直接消耗系数不变

$A=(a_{ij})_{n\times n}$

实例1 投入产出分析

投入产出法中相对稳定的最主要因素是直接消耗系数 a_{ij}

表示第j个部门一个单位的产出对第i个部门的直接消耗量

表 1 六个中间部门的直接消耗系数表

投入 \ 产出	农业	工业	建筑业	运输邮电业	批零餐饮业	其他服务业
农业	0.159	0.047	0.08	0.008	0.054	0.002
工业	0.171	0.512	0.502	0.257	0.238	0.226
建筑业	0.002	0.001	0.001	0.013	0.01	0.023
运输邮电业	0.021	0.031	0.045	0.104	0.029	0.027
批零餐饮业	0.027	0.045	0.049	0.027	0.056	0.05
其他服务业	0.05	0.076	0.095	0.143	0.094	0.1

实例1 投入产出模型

1）设有n个部门，已知直接消耗系数，给定外部需求，建立求解各部门总产出的模型。

2）设直接消耗系数如表2所给，如果今年对农业、制造业和服务业的外部需求分别为1500，4200，3000,500,950,3000亿元，问这三个部门的总产出分别应为多少。

3）如果6个部门的外部需求分别增加1个单位，它们的总产出应分别增加多少。

4）如果对于任意给定的、非负的外部需求，都能得到非负的总产出，模型就称为可行的。问为使模型可行，投入系数应满足什么条件?

清华大学 大学数学实验

1）基本模型

x_i: 第i个部门的产出，
x_{ij}: 第i个部门对第 j个部门的投入，
d_i: 第i个部门的外部需求

产出 / 投入	部门 1	部门 i	部门 n	外部需求	总产出
部门 1	x_{11}	x_{1i}	x_{1n}	d_1	x_1
部门 i	x_{i1}	x_{ii}	x_{in}	d_i	x_i
部门 n	x_{n1}	x_{ni}	x_{xn}	d_n	x_n
初始投入	x_{01}	x_{0i}	x_{0n}		
总投入	x_1	x_i	x_n		

平衡关系

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} + d_i = x_i (i=1,2,\cdots,n) \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + d_i = x_i (i=1,2,\cdots,n)$$

投入系数 $a_{ij} = x_{ij} / x_j$

投入系数矩阵 $A = (a_{ij})_{n\times n}$

产出向量 $x = (x_1,\cdots x_n)^T$

需求向量 $d = (d_1,\cdots d_n)^T$

$$\boxed{x = Ax + d} \Downarrow \boxed{(I-A)x = d} \Downarrow \boxed{x = (I-A)^{-1} d}$$

清华大学 大学数学实验

2）设农业、制造业和服务业的外部需求分别为1500，4200，3000, 500, 950, 3000亿元，求三个部门的总产出。

基本模型 $x = (I-A)^{-1} d$

MATLAB 5.3.lnk shiyan55

$\Rightarrow$ x=(3277, 17872, 3210, 1672, 2478, 5888)^T

清华大学 大学数学实验

3）若三部门的外部需求分别增加1个单位，求它们的总产出的增量。

基本模型 $x = (I-A)^{-1} d$ 记 $C = (I-A)^{-1}$

当需求增加Δd时，总产出增量 $\Delta x = C\Delta d$

C=					
1.2266	0.1413	0.1827	0.0658	0.1148	0.0512
0.5624	2.3327	1.3554	0.8253	0.7284	0.6869
0.0075	0.0106	1.0117	0.0231	0.0175	0.0302
0.0549	0.0959	0.1145	1.1583	0.0707	0.0658
0.0709	0.1310	0.1396	0.0898	1.1107	0.1010
0.1325	0.2349	0.2642	0.2692	0.1970	1.1962

若Δd=(1, 0, 0, 0, 0, 0,)^T，即农业外部需求增加1单位时，6个部门总产出应分别增加1.2266, 0.5624, 0.0075, 0.0549, 0.0709, 0.1325单位。即C的第1列。 C的第2，3列给出了什么？

清华大学 大学数学实验

4）如果对于任意给定的、非负的外部需求，都能得到非负的总产出，模型就称为可行的。问为使模型可行，投入系数应满足什么条件？

基本模型 $x = (I-A)^{-1} d$，其中$A \ge 0$

模型可行 $\Leftrightarrow$ $\boxed{\forall d \ge 0 \Rightarrow x \ge 0}$ $\Leftrightarrow$ $\boxed{(I-A)^{-1} \ge 0}$

$$(I-A)(I + A + \cdots + A^k) = I - A^{k+1}$$

$A \ge 0$

$$A^k \to 0 (k\to\infty) \Rightarrow \boxed{(I-A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k}$$

问 $A^k \to 0 (k\to\infty)$ 是否成立？

清华大学 大学数学实验

模型可行 $\Leftrightarrow$ $\boxed{\forall d \ge 0 \Rightarrow x \ge 0}$ $\Leftarrow$ $\boxed{A^k \to 0 (k\to\infty)}$

矩阵范数定义 $\|AB\| \le \|A\| \cdot \|B\|$ $\Rightarrow$ $\boxed{\|A^k\| \le \|A\|^k}$

$$\boxed{\|A\|_1 < 1 \Rightarrow \|A\|^k \to 0 \Rightarrow A^k \to 0}$$

$a_{ij} = x_{ij} / x_j$

$\|A\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$

$$\|A\|_1 < 1 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} a_{ij} < 1 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} x_{ij} < x_j \ (j=1,\cdots n)$$

若A是由实际数据得到，只要初始投入非负 $\sum_{i=1}^{n} x_{ij} < x_j \ (j=1,\cdots n)$ 成立

模型可行

清华大学 大学数学实验

实例2 一年生植物的繁殖(实验2)

实验2给出的模型为 $x_k + p x_{k-1} + q x_{k-2} = 0, \quad k=2,3,\cdots,n$

$p = -a_1 bc, q = -a_2 b(1-a_1)bc$

$\Downarrow$

Ax=B

$$A=\begin{bmatrix} p & 1 & & & & \\ q & p & 1 & & & \\ & q & p & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & q & p & 1 \\ & & & & q & p \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-2} \\ x_{n-1} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -qx_0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -x_n \end{bmatrix}$$

求解Ax=B可得第二年（及以后诸年）植物的数量

实例2 一年生植物的繁殖

设$a_1 = 0.5, a_2 = 0.25, b = 0.2, c = 10$ shiyan56

开始有100棵植物，要求50年后有1000棵植物

```
p=-1;q=-0.05;x0=100;xn=1000; n=49;
A1=sparse(1:n,1:n,p,n,n);  A2=sparse(1:n-1,2:n,1,n,n);
A3=sparse(2:n,1:n-1,q,n,n);
A=A1+A2+A3;
i=[1,n];j=[1,1];s=[-q*x0,-xn];
B=sparse(i,j,s,n,1);
x=A\B;
x1=x(1),   % 输出第2年植物数量101.7097
k=0:n+1;xx=[x0,x',xn];
plot(k,xx),grid,
```

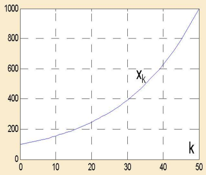


图4 一年生植物繁殖x_k

实例3 按年龄分组的种群增长

- 动物因自然或人工繁殖而增加，因自然死亡和人为屠杀而减少；
- 不同年龄动物的繁殖率、死亡率有较大差别；
- 将种群按年龄等间隔地分成若干个年龄组，时间离散化为时段；
- 在稳定环境下假定各年龄组种群的繁殖率和死亡率与时段无关；
- 建立按年龄分组的种群增长模型；
- 要使某时段各年龄组的种群数量达到给定值,讨论前一时段的分布；
- 讨论时间充分长以后的变化趋势.

实例3 按年龄分组的种群增长 模型及其求解

- 种群按年龄大小等分为n个年龄组，记i=1,2,…,n
- 时间离散为时段，长度与年龄组区间相等，记k=1,2,…
- 第i 年龄组1雌性个体在1时段内的繁殖率为b_i
- 第i 年龄组在1时段内的死亡率为d_i, 存活率为s_i=1- d_i

$x_i(k)$~时段k第i 年龄组的种群数量

$$x_1(k+1) = \sum_{i=1}^{n} b_i x_i(k) \quad \text{(设至少1个}b_i\text{>0)}$$

$$x_{i+1}(k+1) = s_i x_i(k),\ i = 1,2,\cdots,n-1$$

实例3 按年龄分组的种群增长 模型及其求解

$$x_1(k+1) = \sum_{i=1}^{n} b_i x_i(k) \qquad x_{i+1}(k+1) = s_i x_i(k),\ i = 1,2,\cdots,n-1$$

$$L = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-1} & b_n \\ s_1 & 0 & & 0 & 0 \\ & \ddots & & & \\ & s_2 & & 0 & \vdots \\ & & \ddots & & \\ 0 & & & s_{n-1} & 0 \end{bmatrix}$$

~Leslie矩阵(L矩阵)

$$x(k) = [x_1(k), x_2(k), \cdots x_n(k)]^T$$

$$x(k+1) = Lx(k)$$

线性差分方程组

归一化：$\tilde{x}(k) = x(k) / \sum_{i=1}^{n} x_i(k)$

~按年龄组的分布向量

实例3 按年龄分组的种群增长 模型及其求解

设一种群分成 n=5个年龄组, 繁殖率 b_1~b_5= 0, 0.2, 1.8, 0.8, 0.2, 存活率s_1~s_4= 0.5, 0.8, 0.8, 0.1, 要使下一时段的数量分别为400只,190只,150只,120只,10只,讨论当前时段的种群数量.

```
b=[0,0.2,1.8,0.8,0.2];
S=diag([0.5,0.8,0.8,0.1]);
L=[b;S,zeros(4,1)];
X_next=[400;190;150;120;10];
X_cur=L\X_next;
X_cur=round(X_cur)
```

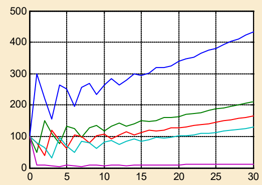
shiyan57

Output: X_cur=380,188,150,100,63

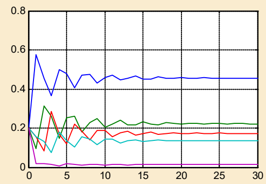
实例3 按年龄分组的种群增长 模型及其求解

设一种群分成 n=5个年龄组, 繁殖率 b_1~b_5= 0, 0.2, 1.8, 0.8, 0.2, 存活率s_1~s_4= 0.5, 0.8, 0.8, 0.1, 各年龄组现有数量均为100 .

$$x(k) = L^k x(0)$$



$x_1(k)$~$x_5(k)$ 的图形（自上而下）



$\tilde{x}_1(k) \sim \tilde{x}_5(k)$ 的图形（自上而下）

实例3 按年龄分组的种群增长 结果分析

时间充分长后 $x(k), \tilde{x}(k)$ 的稳定性 $x(k) = L^k x(0)$

Leslie矩阵的性质

- **L矩阵存在正单特征根λ₁，** $|\lambda_k| \le \lambda_1,\ k = 2,3,\cdots n$

  特征向量 $x^* = \left[1, \dfrac{s_1}{\lambda_1}, \dfrac{s_1 s_2}{\lambda_1^2}, \cdots, \dfrac{s_1 s_2 \cdots s_{n-1}}{\lambda_1^{n-1}}\right]^T$

- **若L矩阵存在b_i, b_{i+1}>0, 则** $|\lambda_k| < \lambda_1,\ k = 2,3,\cdots,n$

  且 $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{x(k)}{\lambda_1^k} = cx^*$，**$c$是由$b_i$, s_i, $x(0)$决定的常数**

实例3 按年龄分组的种群增长 结果分析

时间充分长后 $x(k), \tilde{x}(k)$ 的稳定性 $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{x(k)}{\lambda_1^k} = cx^*$

1) $\tilde{x}(k) \approx \tilde{x}$ (归一化的特征向量 x^*)

按年龄组的分布向量趋向稳定分布 (与$x(0)$无关)

2) $x(k+1) \approx \lambda x(k)$ ~各年龄组种群数量按同一倍数λ (固有增长率) 增减

与基本模型 $x(k+1) = Lx(k)$ 比较

3）λ=1时 $x(k+1) \approx x(k) \approx cx^*$ ~各年龄组种群数量不变

实例3 按年龄分组的种群增长 结果分析

3）λ=1时 $Lx^* = x^*$ $x^* = [1, s_1, s_1 s_2, \cdots s_1 s_2 \cdots s_{n-1}]^T$

$$L = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-1} & b_n \\ s_1 & 0 & & 0 & 0 \\ & & \ddots & & \\ & s_2 & & 0 & \vdots \\ & & \ddots & & \\ 0 & & & s_{n-1} & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow b_1 + b_2 s_1 + \cdots + b_n s_1 s_2 \cdots s_{n-1} = 1$$

~**1个个体在整个存活期内的繁殖数量为1**

4) $x(k) \approx c\lambda^k x^*,\ x^* = [1, s_1, s_1 s_2, \cdots, s_{n-1}]^T$

$\Rightarrow x_{i+1}(k) \approx s_i x_i(k),\ i = 1,2,\cdots n-1$

~存活率 s_i是同一时段的 x_{i+1}与 x_i之比

（与s_i的定义 $x_{i+1}(k+1) = s_i x_i(k)$ 比较）

布置实验

目的

1)学会用MATLAB软件数值求解线性代数方程组，对迭代法的收敛性和解的稳定性作初步分析；
2)通过实例学习用线性代数方程组解决简化的实际问题。

内容 见网络学堂