数学实验试题　　　　2003.6.22 上午

班级________　　姓名___________　　学号__________　　得分_________

说明：

（1）第一、二、三题的答案直接填在试题纸上；

（2）第四题将数学模型、简要解题过程和结果写在试题纸上；卷面空间不够时，可写在背面；

（3）考试时间为90分钟。

一．（10分，每空2分）（计算结果小数点后保留4位有效数字）

某两个地区上半年6个月的降雨量数据如下（单位：mm）：

月份	1	2	3	4	5	6
地区A	25	99	46	33	70	54
地区B	10	50	30	20	45	30

（1）　在90%的置信水平下，给出A地区的月降雨量的置信区间：[32.35　76.65]____

x=[25　99　46　33　70　54];

[mu, sigma, muci, sigmaci]=normfit(x,0.1)

输出结果：

muci = 32.348211120103912

　　　76.651788879896088

（2）　在90%的置信水平下，A地区的月降雨量是否不小于70（mm）？__是___________

H0：μ≥70

x=[25　99　46　33　70　54];

[h,sig,ci] =ttest(x,70,0.1,-1)

输出结果：

h =0

（3）　在90%的置信水平下，A、B地区的月降雨量是否相同？_____否_________

x=[25　99　46　33　70　54];

y=[10　50　30　20　45　30];

[h,sig,ci]=ttest2(x,y,0.1)

输出结果：

h =1

（4）　A地区某条河流上半年6个月对应的径流量数据如下（单位：m^3）：110，184，145，122，165，143。该河流的径流量*y*与当地的降雨量*x*的线性回归方程为__y=91.12+0.9857*x___；若当地降雨量为55mm，该河流的径流量的预测区间为[130.9　159.7]（置信水平取90%）。

y=[110　184　145　122　165　143];

x=[25　99　46　33　70　54];

n=6

T=[ones(n,1),x'];

[b,bint,r,rint,s]=regress(y',T);

b,bint,s,
rcoplot(r,rint)

输出结果：

b =91.115018618121596

0.985657150737830

少量数据回归分析区间预测：y=b0+b1*x

```
%预测区间函数 M 文件源程序：
function y30=guessless(x0,x,s2,b0,b1,alpha)
s=sqrt(s2);                                          %将s²开方即得
xx=mean(x);                                           %x的均值
sxx=(length(x)-1)*var(x);
y0=b0+b1*x0;
y30=[y0-tinv(1-alpha/2,length(x)-2)*s*sqrt((x0-xx)^2/sxx+1/length(x)+1),
y0+tinv(1-alpha/2,length(x)-2)*s*sqrt((x0-xx)^2/sxx+1/length(x)+1)];    %利用（30）式预测区间
%预测55mm降雨量对应河流径流量所在区间源程序(需要先运行回归程序！)
x=[25   99   46   33   70   54];
y55=guessless(55,x, s(4),b(1),b(2),0.1)
```

输出结果：

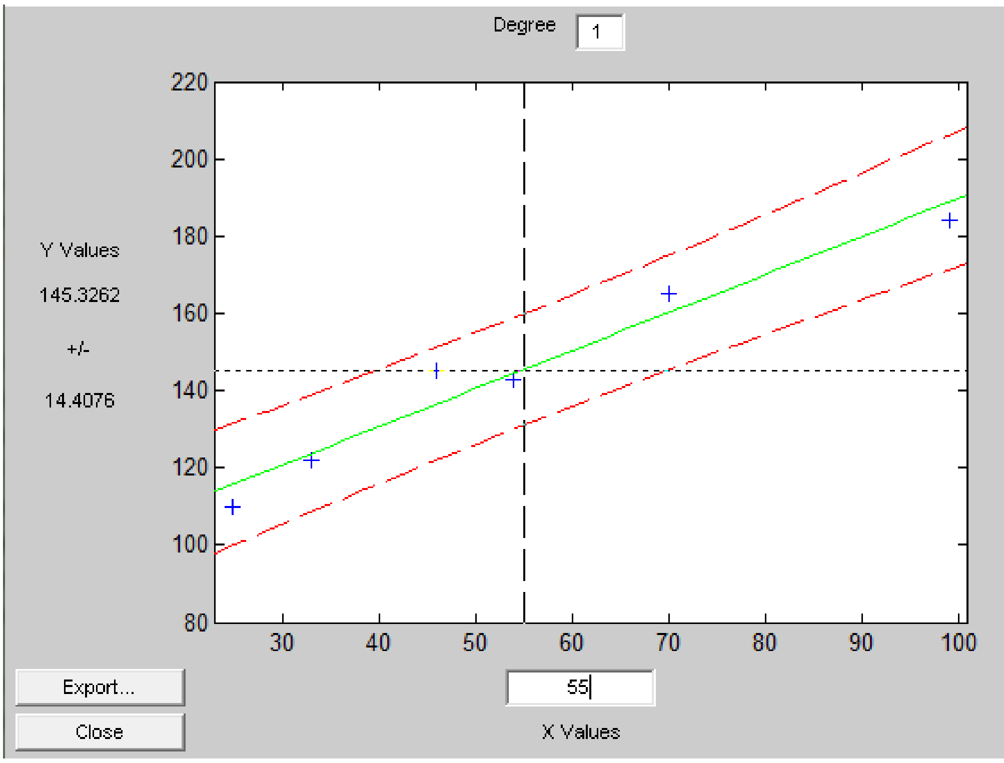
y55 =1.0e+002 *

1.309185906962643   1.597337331211401

还可以应用 POLYTOOL 命令：

```
y=[110   184   145   122   165   143];
x=[25   99   46   33   70   54];
Polytool(x,y,1,0.1)
```

输出结果：



二．（10分）

（1）（每空1分）给定矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&1&2\\3&3&1\end{pmatrix}$， $b=\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$，如果在可行域 $\{x\mid Ax=b,x\geq 0\}$

上考虑线性函数 c^Tx，其中 $c=(4,1,1)^T$，那么 c^Tx 的最小值是 2.2，最小点为 (0,0.4,1.8)；最大值是 3.5，最大点为 (0.5,0,1.5)。

决策变量：

x1；x2；x3；

目标函数：

Z=4*x1+1*x2+1*x3

约束条件：

2*x1+1*x2+2*x3=4

3*x1+3*x2+1*x3=3

基本模型：

max/min(z)= 4*x1+1*x2+1*x3

s.t. 2*x1+1*x2+2*x3=4

3*x1+3*x2+1*x3=3

x1,x2,x3≥0

优化程序(线性)：

```
c=[4 1 1];
A2=[2 1 2;
    3 3 1];
b2=[4 3];
v1=[0 0 0];
```

```
[x,z,ef,out,lag]=linprog(c,[],[],A2,b2,v1)
[x,z,ef,out,lag]=linprog(-c,[],[],A2,b2,v1)
```

输出结果：

x =0.0000　　0.4000　　1.8000

z =2.2000

x =0.5000　　0.0000　　1.5000

z = -3.5000

（2）（每空2分）给定矩阵 $A=\begin{pmatrix} -4 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & -4 \end{pmatrix}^T$，$b=(1,2,4,3,1)^T$，考虑二次规划问题 $\min\{f(x)=x_1^2-4x_1x_2+4x_2^2-2x_1-4x_2 \mid Ax\le b, x\ge 0\}$，其最优解为(2.5556,1.4444)，最优值为______-10.7778______，在最优点处起作用约束为x1+x2≤4。

```
H=[2 -4;-4 8];
A1=[-4 2;0 1;1 1;1 0; 1 -4];
c=[-2 -4];
b1=[1 2 4 3 1];
v1=[0,0,0];
[x,f,ef,out,lag]=quadprog(H,c,A1,b1,[],[],v1)
lag.eqlin                    %等式约束
lag.ineqlin                  %不等式约束
lag.upper                    %上界约束
lag.lower                    %下界约束
```

输出结果：

```
x =
    2.5556
    1.4444
f =
  -10.7778

ans =
   Empty matrix: 0-by-1

ans =
         0
         0
    2.6667
         0
         0
ans =
     0
     0

ans =

     0
     0
```

有效约束判断方法：

1) lag函数值中非零项对应的约束条件为有效约束！
2) 教材P179有效约束的定义也可判断！

三．（10分）对线性方程组：$Ax = b$，其中 A = $\begin{bmatrix} 1, a, a \\ a, 1, a \\ a, a, 1 \end{bmatrix}$， $b=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

(1) （3分）当 $a = \frac{1}{2}$ 时，用高斯—赛德尔迭代法求解 $Ax = b$ 。取初值为 $x_0 = [0,0,0]^T$ ，写出迭代第4步的结果 x_4 =(-1.0566 1.0771 2.9897)。

迭代法解线性代数方程组

```
A1=ones(3,3);
A=0.5*A1+ diag(diag(0.5*A1));
D=diag(diag(A));                          %从稀疏矩阵A中提取D
L=-tril(A,-1);                            %从稀疏矩阵A中提取L
U=-triu(A,1);                             %从稀疏矩阵A中提取U
b=[1 2 3]';                               %设定方程组右端项向量
x= zeros(3,1);                            %设定方程组初始向量
e=10^(-5);                                %给定迭代误差
m= inv(D-L)*U;
n= inv(D-L)*b;                            %高斯-赛德尔迭代法
for j2=1:4
    y=m*(x(:,j2));
    for i=1:3
        x(i,j2+1)=y(i,:)+n(i,:);
    end
    if norm(x(:,j2+1)-x(:,j2))<=e;
    break
    end
end
t2=x(:,end)                               %输出迭代法最终结果
j2                                        %输出迭代次数
t2 =

  -1.0566
   1.0771
   2.9897
```

(2) （4分）当 $a = \frac{1}{2}$ 时，用Jacobi 迭代法求解 $Ax = b$ 是否收敛？_____否_____，理由是__迭代矩阵的谱半径等于1_____ 。

迭代法收敛性充要条件：谱半径 ρ(L)<1

雅可比迭代发的迭代公式 $x(t+1) = Lx(t) - h$ 中矩阵L= inv(D)*(L+U);

在此情况下，eig(inv(D)*(L+U))的输出结果为：

ans =

-1.0000
0.5000
0.5000

此时谱半径为以上各值绝对值的最大值！

故ρ(L)=1，不收敛！

(3) （3分）求最大的c, 使得对任意的 $a\in[0,c)$，用高斯—赛德尔迭代法求解 $Ax=b$ 一定收敛，则c应为_____1_____。

c = 1.（备注：可求出原矩阵A的特征值为1-a和2a+1; 利用正定性质得结果。）

系数矩阵对称正定，则高斯-赛德尔迭代法收敛！

四．（20分）一个二级火箭的总重量为2800公斤。第一级火箭的重量为1000公斤，其中燃料为800公斤。第一级火箭燃料燃烧完毕后自动脱落，第二级火箭立即继续燃烧。第二级火箭中的燃料为600公斤。假设火箭垂直向上发射，两级火箭中的燃料同质，燃烧率为15公斤/秒，产生的推力为30000牛顿。火箭上升时空气阻力正比于速度的平方，比例系数为0.4公斤/米。

（1）建立第一级火箭燃烧时火箭运行的数学模型，并求第一级火箭脱落时的高度、速度和加速度；

（2）建立第二级火箭燃烧时火箭运行的数学模型，并求火箭所有燃料燃烧完毕瞬间的高度、速度、和加速度。

（提示：牛顿第二定律f=ma，其中f为力，m为质量，a为加速度。重力加速度9.8米/平方秒。）

模型及其求解：

(1) 建立第一级火箭燃烧时火箭运行的数学模型:

火箭质量m随时间t的变化关系函数为：

$$m=2800-15t(t\le 160/3)$$

火箭在时刻t所受合外力F为：

$$F=F_0-f-mg=2560+147t-0.4v^2(t\le 160/3)$$

火箭在时刻t的加速度a为：

$$a=\frac{dv}{dt}=\frac{d^2h}{dt^2}=\frac{2560+147t-0.4v^2}{2800-15t}\qquad(t\le 160/3)$$

初值满足：

$$\mathbf{h(0)=0;v(0)=0}$$

```
%火箭运行情况模型常微分方程组函数M文件源程序：
function dx=rocket11(t,x)
dx=[x(2);(2560+147*t-0.4*(x(2)^2))/(2800-15*t)];
%火箭加速度函数M文件源程序：
function y=a11(ts,x)
for i=1:length(ts)
    y(i)=(2560+147*ts(i)-0.4*x(2,i)^2)./ (2800-15*ts(i));
end
```

```
%应用龙格-库塔方法对火箭运行情况模型的常微分方程组求数值解：
ts=0:1/3:160/3;
j=length(ts);
x0=[0,0];
[t,x]=ode45(@rocket11,ts,x0);                %火箭运行高度与速度情况
y= a11(ts', x(:,2)');                        %火箭运行加速度情况
[ts', x(:,1),x(:,2),y']
a=(2560+147*ts(j)-0.4*x(j,2)^2+200*9.8)./ (2800-15*ts(j)-200)
```

输出结果：

t=0.053333333333333 h=2619.970380776275

v=114.628140679963 a=2.572077872851

a'=3.946753192056594

计算结果：第一级火箭燃烧完毕瞬间：t=53.333 秒，高度：2620.0(米)，速度：114.6 米/秒，

???????????????????????加速度：5.2 米/平方秒。

(2) 建立第二级火箭燃烧时火箭运行的数学模型

火箭质量m随时间t的变化关系函数为：

$$m = 1800 - 15t \qquad (0 < t \le 40)$$

火箭在时刻t所受合外力F为：

$$F = F_0 - f - mg = 12360 + 147t - 0.4v^2 (0 < t \le 40)$$

火箭在时刻 t 的加速度 a 为：

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2h}{dt^2} = \frac{12360 + 147t - 0.4v^2}{1800 - 15t} \qquad (0<t\le40)$$

初值满足：

$$\mathbf{h(160/3)=2260;v(160/3)=114.6}$$

```
%火箭运行情况模型常微分方程组函数M文件源程序：
function dx=rocket12(t,x)
dx=[x(2);(12360+147*t -0.4*x(2)^2)/(1800-15*t)];
%火箭加速度函数M文件源程序：
function y=a12(ts,x)
for i=1:length(ts)
      y(i)=(12360+147*ts(i)-0.4*x(i)^2)./ (1800-15*ts(i));
end
%应用龙格-库塔方法对火箭运行情况模型的常微分方程组求数值解：
ts=0:1:40;
j=length(ts);
x0=[2620, 114.6];
[t,x]=ode45(@rocket12,ts,x0);                %火箭运行高度与速度情况
y= a12(ts', x(:,2)');                        %火箭运行加速度情况
[ts', x(:,1),x(:,2),y']
```

a=(-11790-0.4*x(41,2)^2)./ 1200

输出结果：

t=40.00+53.333=93.333s　h=9400.4m　 v=205.2m/s　a=1.1671m/s^2

燃烧完毕后瞬间：

v=205.2

a=(-11790-0.4* (v ^2))./ 1200= -23.858

计算结果：第二级火箭燃烧完毕瞬间：t=93.333 秒，高度：9400.2 米，速度：205.2 米/秒，

?????????????????????加速度： -2666.0 米/平方秒。

(3)最大高度：

火箭质量m随时间t的变化关系函数为：

$$m = 1200 \qquad (t > 0)$$

火箭在时刻t所受合外力F为：

$$F = -11760 - 0.4 * v^2 \qquad (t > 0)$$

火箭在时刻 t 的加速度 a 为：

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2h}{dt^2} = \frac{-11760 - 0.4v^2}{1200} \qquad (t > 0, v > 0)$$

初值满足：

$$\mathbf{h(0)=9400;v(0)=205.1}$$

ΘΘΘ

计算最大高度时用分段形式解常微分方程造成误差较小，现作为比较列举：

```
%火箭运行情况模型常微分方程组函数M文件源程序：
function dx=rocket13(t,x)
if   x(2)>=0
dx=[x(2);(-11772-0.4*x(2)^2)/1200];
else
dx=[x(2);(-11772+0.4*x(2)^2)/1200];
end
%火箭加速度函数M文件源程序：
function y=a13(ts,x)
for i=1:length(ts)
     if   x(i)>=0
        y(i)=(-11772-0.4*x(i)^2)/1200;
     else
        y(i)=(-11772+0.4*x(i)^2)/1200;
     end
end

%应用龙格-库塔方法对火箭运行情况模型的常微分方程组求数值解：
ts=0:0.01:16;
```

```
j=length(ts);
x0=[9400, 205.1];
[t,x]=ode45(@rocket13,ts,x0);                         %火箭运行高度与速度情况
y= a13(ts', x(:,2)');                                 %火箭运行加速度情况
[ts', x(:,1),x(:,2),y']
```

结果：

t=93.333+15.29 h=10731.44079748829

与答案：达到最高点时间 t=93.333+15.31=108.643 秒，高度： 10733 米。

有一定误差！

ΘΘΘ

建立第二级火箭燃烧时火箭运行的数学模型时，不可分段列常微分方程！！！！！！！！！！！！！以下会对二阶导数造成很大误差；最致命的错误是时间分段错误！！！！！！

火箭质量m随时间t的变化关系函数为：

$$m=\begin{cases}1800-15t & (160/3<t\le 280/3)\\ 1200 & (t>280/3)\end{cases}$$

火箭在时刻t所受合外力F为：

$$F=\begin{cases}F_0-f-mg=12360+147t-0.4v^2 & (160/3<t\le 280/3)\\ f-mg=-11760-0.4v^2 & (t>280/3,v>0)\\ -f-mg=-11760+0.4v^2 & (t>280/3,v<0)\end{cases}$$

火箭在时刻 t 的加速度 a 为：

$$a=\frac{dv}{dt}=\frac{d^2h}{dt^2}=\begin{cases}\dfrac{12360+147t-0.4v^2}{1800-15t} & (160/3<t\le 280/3)\\ \dfrac{-11760-0.4v^2}{1200} & (t>280/3,v>0)\\ \dfrac{-11760+0.4v^2}{1200} & (t>280/3,v>0)\end{cases}$$

ΘΘΘ

第一级火箭发射与第二级火箭发射联立求解，由于中间有间断点，下面的程序是不可行的（并且求解过程中 g 取值为 9.81）：

根据题意可知，在此模型中火箭始终沿竖直方向运动，设重力加速度不随高度变化而变化，其值恒为$g=9.81m/s^2$。初始状态时，h=0，v=0，a=（30000−2800×9.81）/2800=0.9043m/s^2，故可应用牛顿第二定律对火箭运行情况进行如下分析（以下各物理量均为SI制）。

火箭质量m随时间t的变化关系函数为：

$$m=\begin{cases}2800-15t & (t\le 160/3)\\ 1800-15t & (160/3<t\le 280/3)\\ 1200 & (t>280/3)\end{cases}$$

火箭在时刻t所受合外力F为：

$$F=\begin{cases}F_0-f-mg=2532+147.15t-0.4v^2 & (t\le 160/3)\\ F_0-f-mg=12342+147.15t-0.4v^2 & (160/3<t\le 280/3)\\ f-mg=-11772+0.4v^2 & (t>280/3,v>0)\\ -f-mg=-11772-0.4v^2 & (t>280/3,v<0)\end{cases}$$

火箭在时刻t的加速度a为：

$$a=\frac{dv}{dt}=\frac{d^2h}{dt^2}=\begin{cases}\dfrac{2532+147.15t-0.4v^2}{2800-15t} & (t\le 160/3)\\ \dfrac{12342+147.15t-0.4v^2}{1800-15t} & (160/3<t\le 280/3)\\ \dfrac{-11772+0.4v^2}{1200} & (t>280/3,v>0)\\ \dfrac{-11772-0.4v^2}{1200} & (t>280/3,v>0)\end{cases}$$

分别用 MATLAB 计算并作图，为便于编程，令 x（1）=h，x（2）=x(1)’=v，x（2）’=a,程序如下：

```
%火箭运行情况模型常微分方程组函数M文件源程序：
function dx=rocket11(t,x)
if t<=160/3
dx=[x(2);(2532+147.15*t-0.4*(x(2)^2))/(2800-15*t)];
elseif t>160/3&t<=280/3
dx=[x(2);(12342+147.15*t -0.4*x(2)^2)/(1800-15*t)];
elseif t>280/3&x(2)>=0
dx=[x(2);(-11772+0.4*x(2)^2)/1200];
else x(2)<=0
dx=[x(2);(-11772-0.4*x(2)^2)/1200];
end
```

```
%火箭加速度函数M文件源程序：
function y=a11(ts,x)
for i=1:length(ts)
    if ts(i)<=160/3
        y(i)=(2532+147.15*ts(i)-0.4*x(i)^2)./ (2800-15*ts(i));
     elseif   ts(i)>=160/3 & ts(i)<=280/3
         y(i)=(12342+147.15*ts(i)-0.4*x(i)^2)./ (1800-15*ts(i));
     elseif   ts(i)>280/3 & x(i)>=0,
        y(i)=(-11772+0.4*x(i)^2)/1200;
    else x(i)<0,
        y(i)=(-11772-0.4*x(i)^2)/1200;
    end
end
%应用龙格-库塔方法对火箭运行情况模型的常微分方程组求数值解：
ts=0:1:160;
x0=[0,0];
[t,x]=ode23(@rocket11,ts,x0);                      %火箭运行高度与速度情况
y= a11(ts', x(:,2)');                              %火箭运行加速度情况
[ts', x(:,1),x(:,2),y']
grid                                               %作图
plot(ts,x(:,1))                                    %h-t图
xlabel('t/s');ylabel('h/m');
plot(ts,x(:,2))                                    %v-t 图
xlabel('t/s');ylabel('v/m/s');
plot(ts,y)                                         %a-t 图
xlabel('t/s');ylabel('a/m/s2');
```

数学实验试题　　　2003.6.22 上午　　　　(A卷；90分钟)

一. 某两个地区上半年6个月的降雨量数据如下（单位：mm）：

月份	1	2	3	4	5	6
地区A	25	99	46	33	70	54
地区B	10	50	30	20	45	30

（5） 在90%的置信水平下，给出A地区的月降雨量的置信区间：________________

（6） 在90%的置信水平下，A地区的月降雨量是否不小于70（mm）？ ____________

（7） 在90%的置信水平下，A、B地区的月降雨量是否相同？ ____________

（8） A地区某条河流上半年6个月对应的径流量数据如下（单位：m^3）：110，184，145，122，165，143。该河流的径流量y与当地的降雨量x的线性回归方程为________________________；若当地降雨量为55mm，该河流的径流量的预测区间为______（置信水平取90%）。

答案：（程序略）
(1) [32.35，76.65]
(2) 是
(3) 否
(4) y=91.12+0.9857x
(5) [130.9,159.7]

二．（10分）

（1）（每空1分）给定矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&1&2\\3&3&1\end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$，如果在可行域 $\{x\mid Ax=b, x\ge 0\}$ 上考虑线性函数 $c^T x$，其中 $c=(4,1,1)^T$，那么 $c^T x$ 的最小值是________，最小点为______；最大值是_______，最大点为_________。

（2）（每空2分）给定矩阵 $A=\begin{pmatrix}-4&0&1&1&1\\2&1&1&0&-4\end{pmatrix}^T$，$b=(1,2,4,3,1)^T$，考虑二次规划问题 $\min\{f(x)=x_1^2-4x_1x_2+4x_2^2-2x_1-4x_2 \mid Ax\le b, x\ge 0\}$，其最优解为______，最优值为________________________________，在最优点处起作用约束为________________________________。

答案：（1）最小值为11/5，最大值为7/2，最小点为（0，2/5，9/5），最大点为（1/2，0，3/2）。

（2）最优解为（2.5556，1.4444），最优值为－1.0778e+001，其作用约束为 $x_1+x_2\le 4$。

三．（10分）对线性方程组：$Ax=b$，其中 A＝$\begin{bmatrix}1,a,a\\a,1,a\\a,a,1\end{bmatrix}$，$b=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$

(4) （3分）当 $a=\frac{1}{2}$ 时，用高斯—赛德尔迭代法求解 $Ax=b$ 。取初值为 $x_0=[0,0,0]^T$ ，写出迭代第4步的结果 $x_4=$____________________。

(5) （4分）当 $a=\frac{1}{2}$ 时，用Jacobi 迭代法求解 $Ax=b$ 是否收敛？__________，理由是____。

(6) （3分）求最大的c，使得对任意的 $a\in[0,c)$，用高斯—赛德尔迭代法求解 $Ax=b$ 一定收敛，则c应为__________。

答案：（1）x = [-1.0566 1.0771 2.9897]

（2）否；迭代矩阵的谱半径=1。（备注：可以求出此时迭代矩阵的特征值为a和-2a。）

(3) c = 1.（备注：可求出原矩阵A的特征值为1-a和2a+1; 利用正定性质得结果。）

[附] 第（1）问程序：

```
a=1/2; b=(1,2,3);
A=[1,a,a;a,1,a;a,a,1];
D=diag(diag(A));
L=-tril(A,-1);
U=-triu(A,1);
B=inv(D-L)*U;
f=inv(D-L)*b;
x=[0,0,0]';
for i=1:4;
    x=B*x+f;
end
x
AX=A*x, b
```

四．（20分）一个二级火箭的总重量为2800公斤。第一级火箭的重量为1000公斤，其中燃料为800公斤。第一级火箭燃料燃烧完毕后自动脱落，第二级火箭立即继续燃烧。第二级火箭中的燃料为600公斤。假设火箭垂直向上发射，两级火箭中的燃料同质，燃烧率为15公斤/秒，产生的推力为30000牛顿。火箭上升时空气阻力正比于速度的平方，比例系数为0.4公斤/米。

（1）建立第一级火箭燃烧时火箭运行的数学模型，并求第一级火箭脱落时的高度、速度和加速度；

（2）建立第二级火箭燃烧时火箭运行的数学模型，并求火箭所有燃料燃烧完毕瞬间的高度、速度、和加速度。

（3*）火箭达到最高点瞬间的高度和加速度。

（提示：牛顿第二定律f=ma，其中f为力，m为质量，a为加速度。重力加速度9.8米/平方秒。）

答案：第一级火箭：模型建立

设时间变量t，高度为h(t)。第一级火箭模型为

$$\begin{cases}30000-0.4(h'(t))^2-(2800-15t)*9.8=(2800-15t)h''(t)\\ h(0)=0,h'(0)=0,\\ 0\le t\le 800/15.\end{cases}$$

令：$x_1(t)=h(t),x_2(t)=h'(t)$，则有

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_2(t), \\ x_2'(t) = (30000 - 0.4x_2^2(t))/(2800 - 15t) - 9.8, \\ x_1(0) = x_2(0) = 0, 0 \le t \le 800/15. \end{cases}$$

计算结果：第一级火箭燃烧完毕瞬间：t=53.333秒，高度：2620.0(米)，速度：114.6米/秒，加速度：5.2米/平方秒。

第二级火箭：模型建立

设时间变量t，高度为h(t)。第二级火箭模型为

$$\begin{cases} 30000 - 0.4(h'(t))^2 - (1800 - 15t) * 9.8 = (1800 - 15t)h''(t) \\ h(0) = 2620, h'(0) = 114.6, \\ 0 \le t \le 600/15. \end{cases}$$

令：$x_1(t) = h(t), x_2(t) = h'(t)$，则有

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_2(t), \\ x_2'(t) = (30000 - 0.4x_2^2(t))/(1800 - 15t) - 9.8, \\ x_1(0) = 2620, x_2(0) = 114.6, 0 \le t \le 600/15. \end{cases}$$

计算结果：第二级火箭燃烧完毕瞬间：t=93.333秒，高度：9400.2米，速度：205.2米/秒，加速度： -2666.0米/平方秒。

火箭的最大高度：模型建立

设时间变量t，高度为h(t)。第二级火箭模型为

$$\begin{cases} -0.4(h'(t))^2 - 1200 * 9.8 = 1200h''(t) \\ h(0) = 9400.2, h'(0) = 205.2. \end{cases}$$

计算结果：达到最高点时间t=93.333+15.31=108.643秒，高度： 10733米。