

班级\_\_\_\_\_ 姓名\_\_\_\_\_ 学号\_\_\_\_\_ 得分\_\_\_\_\_

[说明]

- (1) 第一、二、三题的答案直接填在试题纸上；
- (2) 第四题将数学模型、简要解题过程和结果写在试题纸上；卷面空间不够时，请写在背面；
- (3) 除非特别说明，所有计算结果小数点后保留 4 位数字。
- (4) 考试时间为 120 分钟。

一、(10 分) 已知一组数据

$x$	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$y$	0	5.3	1.8	2.6	4.9	6.3

用数值积分求  $x$  在  $(0, 0.5)$  内  $y$  的积分为 1.7750。根据表中数据，试建立 2 次多项式回归模型  $y = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2$ ，其回归系数为  $\beta_0 =$  \_\_\_\_\_,  $\beta_1 =$  \_\_\_\_\_,  $\beta_2 =$  \_\_\_\_\_。在显著性水平为 0.05 情况下有无异常数据（若有，请指出第几个点为异常数据）？第二个。

数值积分：

梯形公式：

$x=0:0.1:0.5;$

$y=[0\ 5.3\ 1.8\ 2.6\ 4.9\ 6.3];$

$S1=trapz(x,y)$

输出结果：

$S1=1.7750$

多项式回归：

$y=[0\ 5.3\ 1.8\ 2.6\ 4.9\ 6.3];$

$x1=0:0.1:0.5;$

%切削时间

$x2=x1.^2;$

%刀具厚度

$n=6;$

%已知的数据容量

$T=[ones(n,1),x1',x2'];$

%1与自变量组成的输入矩阵

$[b,bint,r,rint,s]=regress(y',T);$

%回归分析程序 ( $\alpha=0.05$ )

$b,bint,s,$

$rcoplot(r,rint)$

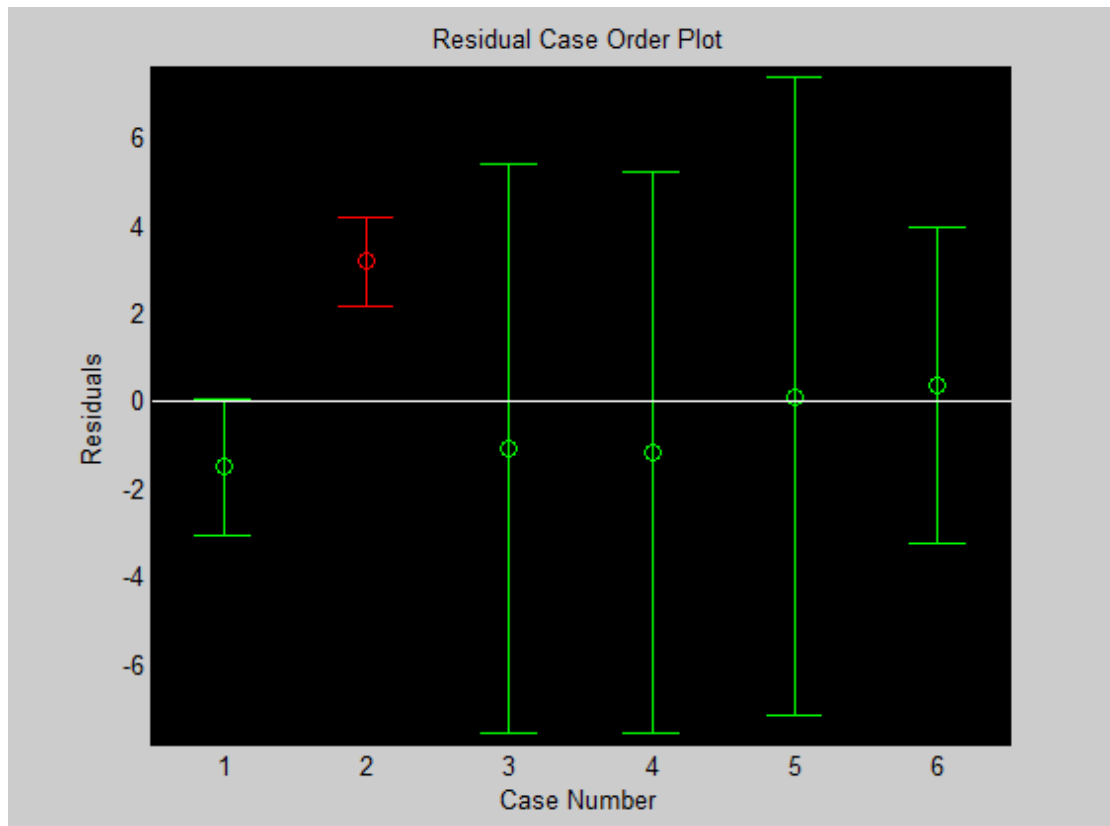
输出结果：

$b =$

1.4821

5.5821

6.6071



二、(10 分) 已知常微分方程组初值问题  $y'' + y \sin(x) + e^x = 0, y(0) = 1, y'(0) = 0$  ,  
 试用数值方法求  $y(0.4) = \underline{0.897893}$  (保留小数点后 6 位数字)。  
 你用的方法是 龙格—库塔方法 , 其精度为 四阶。

%待解常微分方程组函数 M 文件源程序:

```
function dy=ff (x,y)
```

```
dy=[y(2);-y(1)*sin(x)- exp(x)];
```

%应用欧拉方法和龙格-库塔方法求解该常微分方程:

```
ts=0:0.1:0.4;
```

```
y0=[1,0];
```

```
[x,y]=ode45(@ff, ts,y0); %龙格-库塔方法求数值解
```

```
[x, y(:,1)]
```

输出结果:

```
ans =
```

0	1.0000
0.1000	0.9947
0.2000	0.9773
0.3000	0.9457
0.4000	0.8979

三、(10 分) 已知线性代数方程组  $Ax=b$ , 其中

$$A = \begin{bmatrix} 10 & -7 & 0 & 1 \\ -3 & 22 & 6 & 2 \\ 5 & -1 & 51 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 25 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 8 \\ 5 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix},$$

若方程组右端项有小扰动  $\delta b = [0, 0, 0, 0.1]'$ ，试根据误差估计式估计  $\frac{\|\delta x\|_2}{\|x\|_2} \leq$  0.06416  
(保留小数点后 5 位数字); 若取初值  $x^{(0)} = [0, 0, 0, 0]'$ ，则用高斯-赛德尔迭代法求解  $Ax=b$  时，  
 $x^{(5)} =$  (1.07103, 0.37900, -0.00072, -0.06084)，此迭代是否收敛是。

线性代数方程组解的误差分析：

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \|A^{-1}\| \cdot \|A\| \cdot \frac{\|\delta b\|}{\|b\|} = \text{cond}(A) \cdot \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}$$

故其误差上限为：

A=[10 -7 0 1 ; -3 22 6 2 ; 5 -1 51 -1 ; 2 1 0 25];

b=[8 5 5 1];

db=[0 0 0 0.1];

d=cond(A)\*norm(db)/norm(b)

输出结果：

d = 0.061460749095949

A=[10 -7 0 1 ; -3 22 6 2 ; 5 -1 51 -1 ; 2 1 0 25];

D=diag(diag(A));

%从稀疏矩阵 A 中提取 D

L=-tril(A,-1);

%从稀疏矩阵 A 中提取 L

U=-triu(A,1);

%从稀疏矩阵 A 中提取 U

b=[8 5 5 1]';

%设定方程组右端项向量

x= zeros(4,1);

%设定方程组初始向量

m= inv(D-L)\*U;

n= inv(D-L)\*b;

%高斯-赛德尔迭代法

for j2=1:5

    y=m\*(x(:,j2));

    for i=1:4

        x(i,j2+1)=y(i,:)+n(i,:);

    end

end

t2=x(:,end)

%输出迭代法最终结果

j2

输出结果：

t2 =

1.071032233651353

0.378998741589479

-0.000722946127134

-0.060842528355687

高斯-赛德尔迭代判敛法：

1) 若求收敛域,需要计算系数矩阵 A 的正定与对称性质；

2) 若仅仅判断收敛，直接计算迭代矩阵  $L$  的谱半径与  $\lambda$  的大小关系；

$\text{lamda}=\text{eig}(\text{inv}(\text{D}-\text{L})*\text{U})$

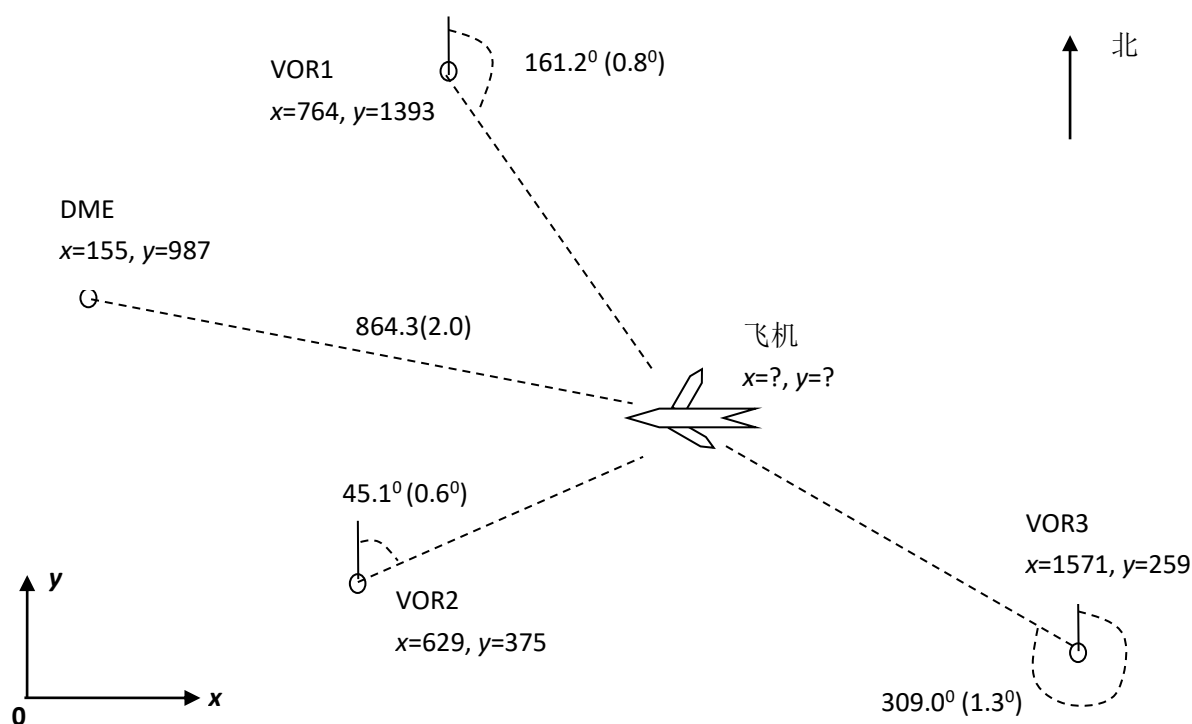
$\text{pubanjing}=\text{max}(\text{abs}(\text{lamda}))$

输出结果：

$\text{pubanjing}=0.218937948256270$

四、(20 分) 飞机在飞行过程中，能够收到地面上各个监控台发来的关于飞机当前位置的信息，根据这些信息可以比较精确地确定飞机的位置。如下图所示，高频多向导航设备 (VOR) 能够得到飞机与该设备连线的角度信息；距离测量装置 (DME) 能够得到飞机与该设备的距离信息。图中飞机接收到来自 3 个 VOR 给出的角度和 1 个 DME 给出的距离 (括号内是相应设备测量的精度，即绝对误差限)，并已知这 4 种设备的  $x, y$  坐标 (假设飞机和这些设备在同一平面上)。请你根据这些信息确定当前飞机的位置，要求建立相应的数学模型并给出解答。

[提示：对角度信息进行处理时，可以考虑使用 MATLAB 的  $\text{atan2}$  函数。]



第四题图：飞机与监控台 (图中坐标和测量距离的单位是“公里”)

考试课程 数学实验

2004.6.24 下午

班级\_\_\_\_\_ 学号\_\_\_\_\_ 姓名\_\_\_\_\_ 得分\_\_\_\_\_

[说明]

(1) 第一、二、三题的答案直接填在试题纸上；

(2) 第四题将数学模型、简要解题过程和结果写在试题纸上；卷面空间不够时，请写在背面；

(3) 除非特别说明，所有计算结果小数点后保留 4 位数字。

(4) 考试时间为 120 分钟。

一、(10 分) 已知一组数据

$x$	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
-----	---	-----	-----	-----	-----	-----

y	0	0.3	1.8	8.6	4.9	6.3
---	---	-----	-----	-----	-----	-----

用数值积分求  $x$  在  $(0, 0.5)$  内  $y$  的积分为\_\_\_\_\_。根据表中数据，试建立 2 次多项式回归模型  $y = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2$ ，其回归系数为  $\beta_0 =$ \_\_\_\_\_,  $\beta_1 =$ \_\_\_\_\_,  $\beta_2 =$ \_\_\_\_\_。在显著性水平为 0.05 情况下有无异常数据（若有，请指出第几个点为异常数据）？\_\_\_\_\_。

二、(10 分) 已知常微分方程组初值问题  $y'' + y \cos(x) + e^x = 0, y(0) = 1, y'(0) = 0$ ，试用数值方法求  $y(0.4) =$ \_\_\_\_\_ (保留小数点后 6 位数字)。你用的方法是\_\_\_\_\_，其精度为\_\_\_\_\_。

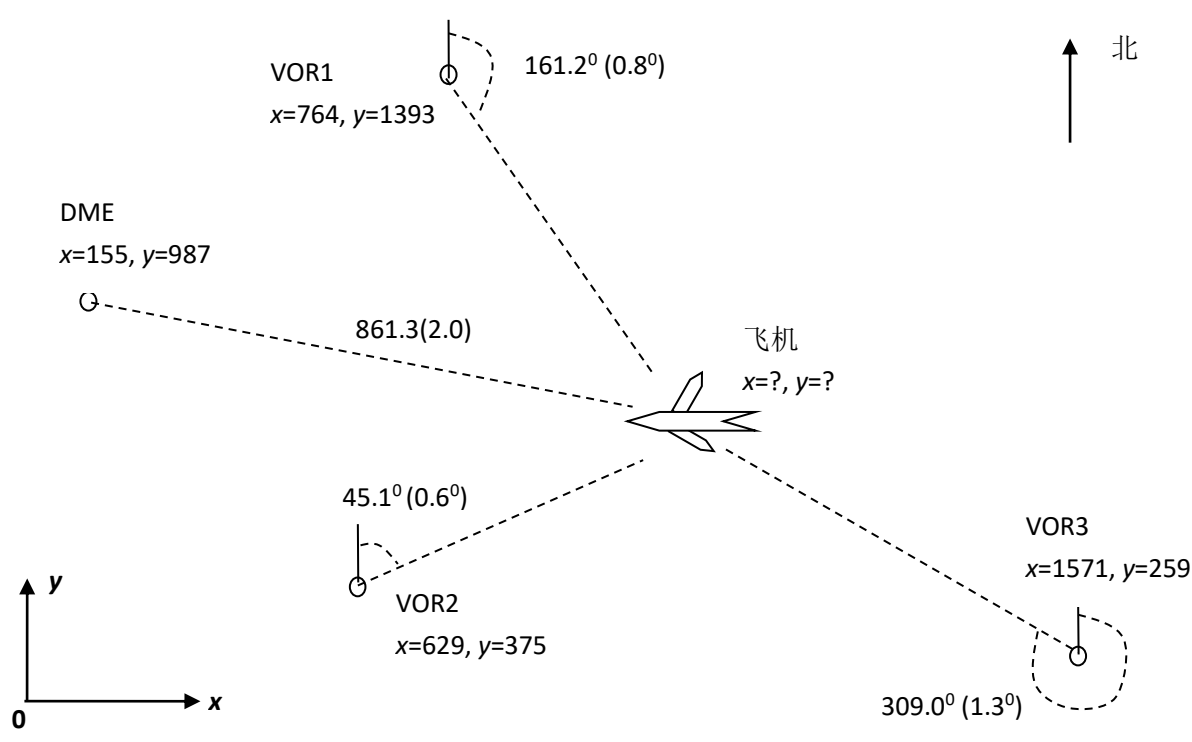
三、(10 分) 已知线性代数方程组  $Ax=b$ ，其中

$$A = \begin{bmatrix} 10 & -7 & 0 & 1 \\ -3 & 22 & 6 & 2 \\ 5 & -1 & 5 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 25 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 8 \\ 5 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix},$$

若方程组右端项有小扰动  $\delta b = [0, 0, 0, 0.1]'$ ，试根据误差估计式估计  $\frac{\|\delta x\|_2}{\|x\|_2} \leq$ \_\_\_\_\_ (保留小数点后 5 位数字)；若取初值  $x^{(0)} = [0, 0, 0, 0]'$ ，则用高斯-赛德尔迭代法求解  $Ax=b$  时， $x^{(5)} =$ \_\_\_\_\_，此迭代是否收敛\_\_\_\_\_。

四、(20 分) 飞机在飞行过程中，能够收到地面上各个监控台发来的关于飞机当前位置的信息，根据这些信息可以比较精确地确定飞机的位置。如下图所示，高频多向导航设备 (VOR) 能够得到飞机与该设备连线的角度信息；距离测量装置 (DME) 能够得到飞机与该设备的距离信息。图中飞机接收到来自 3 个 VOR 给出的角度和 1 个 DME 给出的距离（括号内是相应设备测量的精度，即绝对误差限），并已知这 4 种设备的  $x, y$  坐标（假设飞机和这些设备在同一平面上）。请你根据这些信息确定当前飞机的位置，要求建立相应的数学模型并给出解答。

[提示：对角度信息进行处理时，可以考虑使用 MATLAB 的 `atan2` 函数。]



第四题图：飞机与监控台（图中坐标和测量距离的单位是“公里”）

**A 卷**（班级-姓名-学号）

- 一、1.7750; 1.4821, 5.5821, 6.6071; 第 2 个点为异常数据
- 二、0.897892 (或 0.897893), 龙格-库塔方法, 3 级 2 阶(ode23)(或 5 级 4 阶(ode45))
- 三、0.06146, [1.0710, 0.3790, -0.0007, -0.0608]', 收敛
- 四、模型为

$$\text{Min } E(x, y) = \sum_{i=1}^3 \left( \frac{\text{atan2}(x - x_i, y - y_i) - \theta_i}{\sigma_i} \right)^2 + \left( \frac{d_4 - \sqrt{(x - x_4)^2 + (y - y_4)^2}}{\sigma_4} \right)^2$$

得到飞机的坐标为 (978.3070, 723.9838), 误差的平方和为 0.6685。

[附]主要程序示例: (fun 为上述函数, 程序略)

```
X=[746 629 1571 155];
Y=[1393 375 259 987];
theta=[161.2,45.1,309.0-360]*2*pi/360;          % 角度转换
sigma=[0.8,0.6,1.3]*2*pi/360;
d4=864.3;                                          %B 卷为 861.3
sigma4=2;
x0=[900,700];                                    % 初值
[x,norm,res,exit,out]=lsqnonlin(@fun,x0,[],[],X,Y,theta,sigma,d4,sigma4)
```

**B 卷**（班级-学号-姓名）

- 一、1.8750; -0.9821, 28.5464, -27.3214; 第 4 个点为异常数据
- 二、0.831371 (0.831373), 龙格-库塔方法, 3 级 2 阶(ode23)( 5 级 4 阶(ode45))
- 三、0.07726, [1.0610, 0.3776, 0.0026, -0.0600]', 收敛
- 四、模型同 A 卷。计算结果: 飞机的坐标为 (975.2474, 723.1857), 误差的平方和为 0.9132。

评分标准:

- 一、第一空 4 分, 中间三空每空 1 分, 最后一空 3 分。
- 二、第一空 6 分, 后两空每空 2 分。
- 三、第一空 3 分, 中间一空 5 分, 最后一空 2 分。
- 四、模型 15 分 (基本拟合模型 5 分; 角度转换正确 5 分; 无量纲化处理正确 5 分);  
 计算结果 5 分 (若因模型错误导致结果错误, 可依计算方法或程序是否正确、完整给分, 最多给 3 分; 若无计算方法或程序的说明, 则不给分)。

**A 卷** (班级-姓名-学号)

一、1.7750; 1.4821, 5.5821, 6.6071; 第 2 个点为异常数据

二、0.897892 (或 0.897893), 龙格-库塔方法, 3 级 2 阶(ode23)(或 5 级 4 阶(ode45))

三、0.06146, [1.0710, 0.3790, -0.0007, -0.0608]', 收敛

四、模型为

$$\text{Min } E(x, y) = \sum_{i=1}^3 \left( \frac{\text{atan2}(x - x_i, y - y_i) - \theta_i}{\sigma_i} \right)^2 + \left( \frac{d_4 - \sqrt{(x - x_4)^2 + (y - y_4)^2}}{\sigma_4} \right)^2$$

得到飞机的坐标为 (978.3070, 723.9838), 误差的平方和为 0.6685。

[附]主要程序示例: (fun 为上述函数, 程序略)

X=[746 629 1571 155];

Y=[1393 375 259 987];

theta=[161.2, 45.1, 309.0-360]\*2\*pi/360;

% 角度转换

sigma=[0.8, 0.6, 1.3]\*2\*pi/360;

d4=864.3;

%B 卷为 861.3

sigma4=2;

x0=[900, 700];

% 初值

[x, norm, res, exit, out]=lsqnonlin(@fun, x0, [], [], [], X, Y, theta, sigma, d4, sigma4)

**B 卷** (班级-学号-姓名)

一、1.8750; -0.9821, 28.5464, -27.3214; 第 4 个点为异常数据

二、0.831371 (0.831373), 龙格-库塔方法, 3 级 2 阶(ode23)(5 级 4 阶(ode45))

三、0.07726, [1.0610, 0.3776, 0.0026, -0.0600]', 收敛

四、模型同 A 卷。计算结果: 飞机的坐标为 (975.2474, 723.1857), 误差的平方和为 0.9132。

## 评分标准:

一、第一空 4 分, 中间三空每空 1 分, 最后一空 3 分。

二、第一空 6 分, 后两空每空 2 分。

三、第一空 3 分, 中间一空 5 分, 最后一空 2 分。

五、模型 15 分 (基本拟合模型 5 分; 角度转换正确 5 分; 无量纲化处理正确 5 分);

计算结果 5 分 (若因模型错误导致结果错误, 可依计算方法或程序是否正确、完整给分, 最多给 3 分; 若无计算方法或程序的说明, 则不给分)。