อัลกอริทึมการแบ่งแยกและเอาชนะ
(Divide and Conquer algorithm)
Part 1

อ.ดร.ลือพล พิพานเมฆาภรณ์

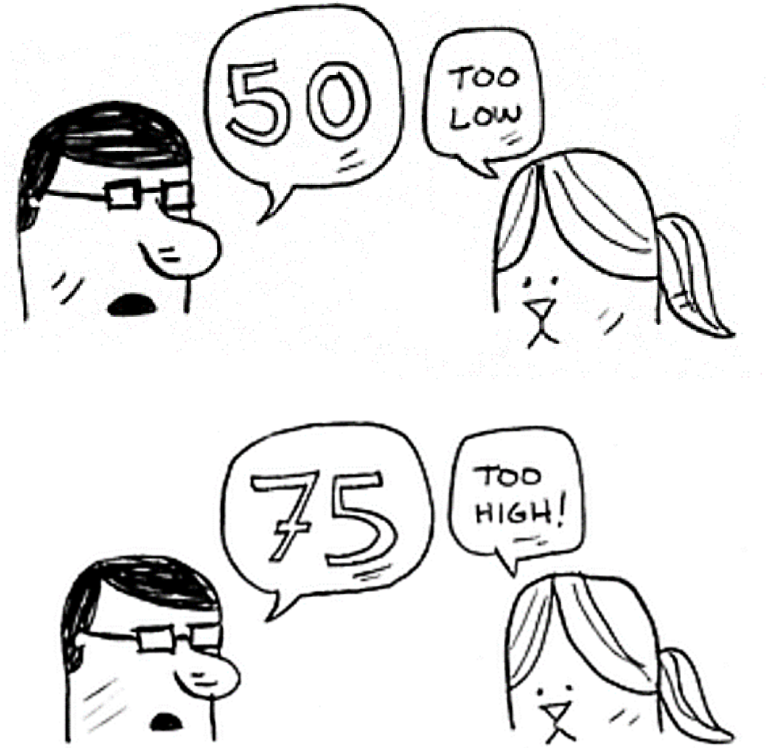
luepol.p@sci.kmutnb.ac.th

ขนาดปัญหา (problem size)

- ปัญหาด้านคอมพิวเตอร์มักต้องมีการประมวลผลข้อมูล ซึ่งหากมีข้อมูลมากก็จะใช้เวลาในการประมวลผลเพื่อหาคำตอบนาน แต่หากข้อมูลมีน้อยก็จะใช้เวลาในการประมวลผลเร็วกว่า
- เรามักเรียกขนาดของข้อมูลที่ต้องการประมวลผลว่า **ขนาดของปัญหา** (problem size)
- มักใช้ตัวแปร **n** แทนขนาดของปัญหา ตัวอย่างเช่น เรียงข้อมูลในอาร์เรย์ขนาด n ตัว หรือค้นหาข้อมูลจากอาร์เรย์ขนาด n ตัว
- โดยทั่วไปปัญหาเหล่านี้มักถูกแก้ด้วย**วิธีตะลุยหาคำตอบ** (brute-force method) ซึ่งมักใช้เวลาในการหาคำตอบนาน เมื่อขนาดของอินพุตมีมาก

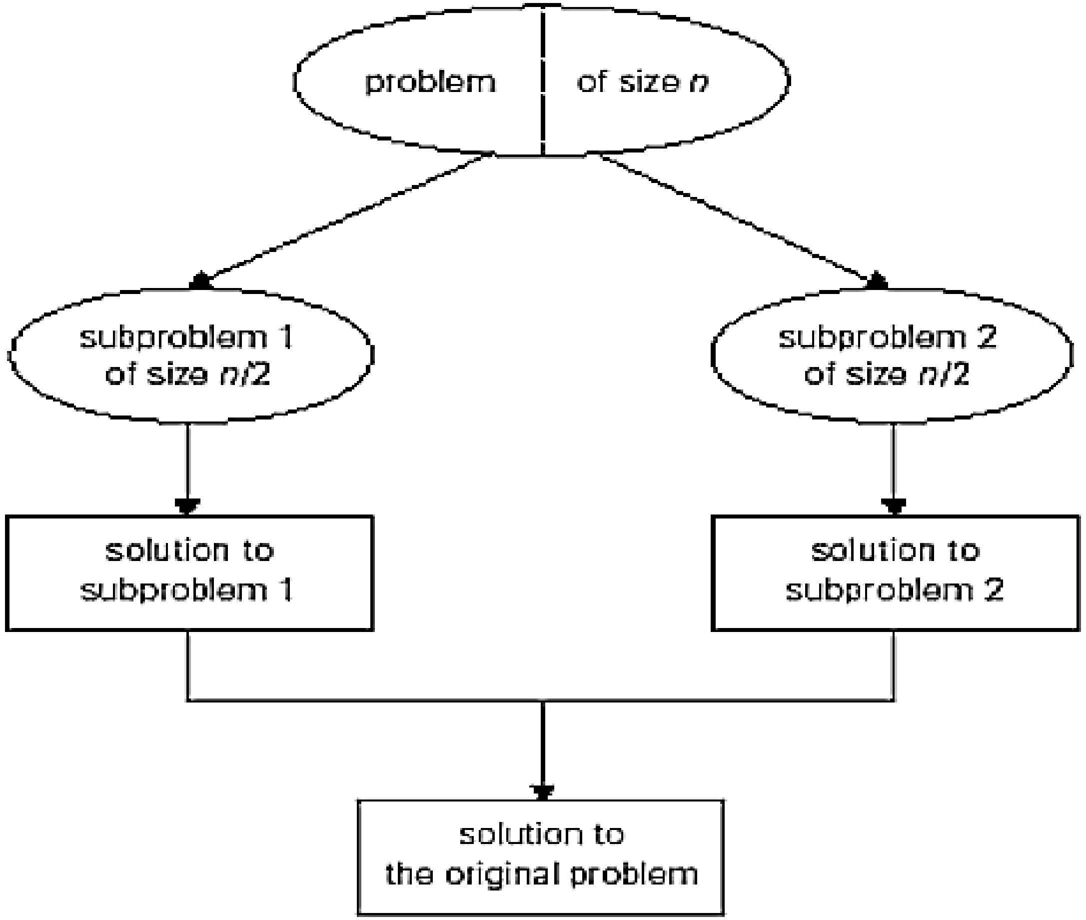
ทายเบอร์มือถือ 2 ตัวท้าย

จะต้องถามทั้งหมดไม่เกิน 100 ครั้ง



จะต้องถามทั้งหมดไม่เกิน ?? ครั้ง

หลักการแบ่งแยกและเอาชนะ (Divide and Conquer)



- เป็นเทคนิคแก้ปัญหาด้วยกระบวนการทางคอมพิวเตอร์ ซึ่งมีแนวคิดมาจากฟังก์ชั่นรีเคอร์ซีฟ (recursive function) ที่แบ่งปัญหาออกเป็นปัญหาย่อย (sub-problem) ไปเรื่อยๆ จนกระทั่งปัญหาย่อยเหล่านี้เล็กเพียงพอที่จะใช้เวลาหาคำตอบไม่นาน
- หากจำเป็นก็ต้องทำการรวมคำตอบของปัญหาย่อย เพื่อสร้างคำตอบของปัญหาหลัก
- สิ่งที่คาดหวังจาก DAC ก็คือเวลาที่ใช้ในการแก้ปัญหาย่อยๆ น่าจะเร็วกว่าเวลาที่ใช้ในการแก้ปัญหาโดยตรง

อัลกอริทึม Divide and Conquer

```
procedure divide_and_conquer
begin
   if base case then
      solve problem
   else
      partition problem into subproblems L and R
      solve problem L using divide-and-conquer
      solve problem R using divide-and-conquer
      combine solutions to problems L and R
   endif
end
```

เครื่องมือที่สำคัญในการแบ่งปัญหาใหญ่เป็นปัญหาย่อยๆ ก็คือ recursive function

ทบทวน recursive function

จงเขียนฟังก์ชั่นรีเคอร์ซีพเพื่อหา<u>ค่ามากที่สุด</u>ในอาร์เรย์ด้านล่าง

34	3	47	91	32	0

ตัวอย่างของอัลกอริทึมที่ใช้แนวคิดการแบ่งแยกและเอาชนะ

- Binary Search
  - แบ่งปัญหาโดยการคำนวณค่า mid
  - ไม่มีการรวมคำตอบ
- Merge Sort
  - แบ่งอาร์เรย์ออกเป็น 2 ส่วน
  - รวมคำตอบโดยฟังก์ชั่น merge()
- Quick Sort
  - แบ่งอาร์เรย์ออกเป็น 2 ส่วน โดย partition()
  - ไม่มีการรวมคำตอบ

ตัวอย่างปัญหาที่เหมาะสมของอัลกอริทึม DAC

1. การนับข้อมูลซ้ำ (count duplicate number)
2. การแบ่งกลุ่มข้อมูล (clustering)
3. การคูณเลขจำนวนเต็ม (integer multiplication)
4. การคูณเมตริกซ์ (matrix multiplication)
5. เซตของจุดที่คลอบคลุม (maxima set)

การนับข้อมูลซ้ำจากตัวเลขที่กำหนด

กำหนดให้อาร์เรย์จำนวนเต็ม N ตัว เรียงลำดับไว้จากน้อยไปมากแล้ว จงพัฒนาอัลกอริทึมที่มีประสิทธิภาพเพื่อนับจำนวนซ้ำกันของตัวเลขที่กำหนด (target)

2 5 5 5 6 6 8 9 9 9

target: 5

Workshop: DAC

จงออกแบบอัลกอริทึมแบ่งแยกและเอาชนะ (Divide and Conquer) เพื่อแก้ปัญหา count duplicate number พร้อมเขียนฟังก์ชั่น

2 5 5 5 6 6 8 9 9 9

การลำดับน้อยที่สุดอันดับ k

ต้องการหาเลขน้อยที่สุดอันดับ k ในอาร์เรย์เลขจำนวนเต็มขนาด n ตัว

1, 5, 10, 4, 8, 2, 6

ค่าน้อยที่สุดอันดับ 3 ของอาร์เรย์นี้ คือ 4

จงเขียนโปรแกรมที่มีประสิทธิภาพในการค้นหาค่าน้อยที่สุดอันดับ k

การลำดับน้อยที่สุดอันดับ k

วิธีการ brute force

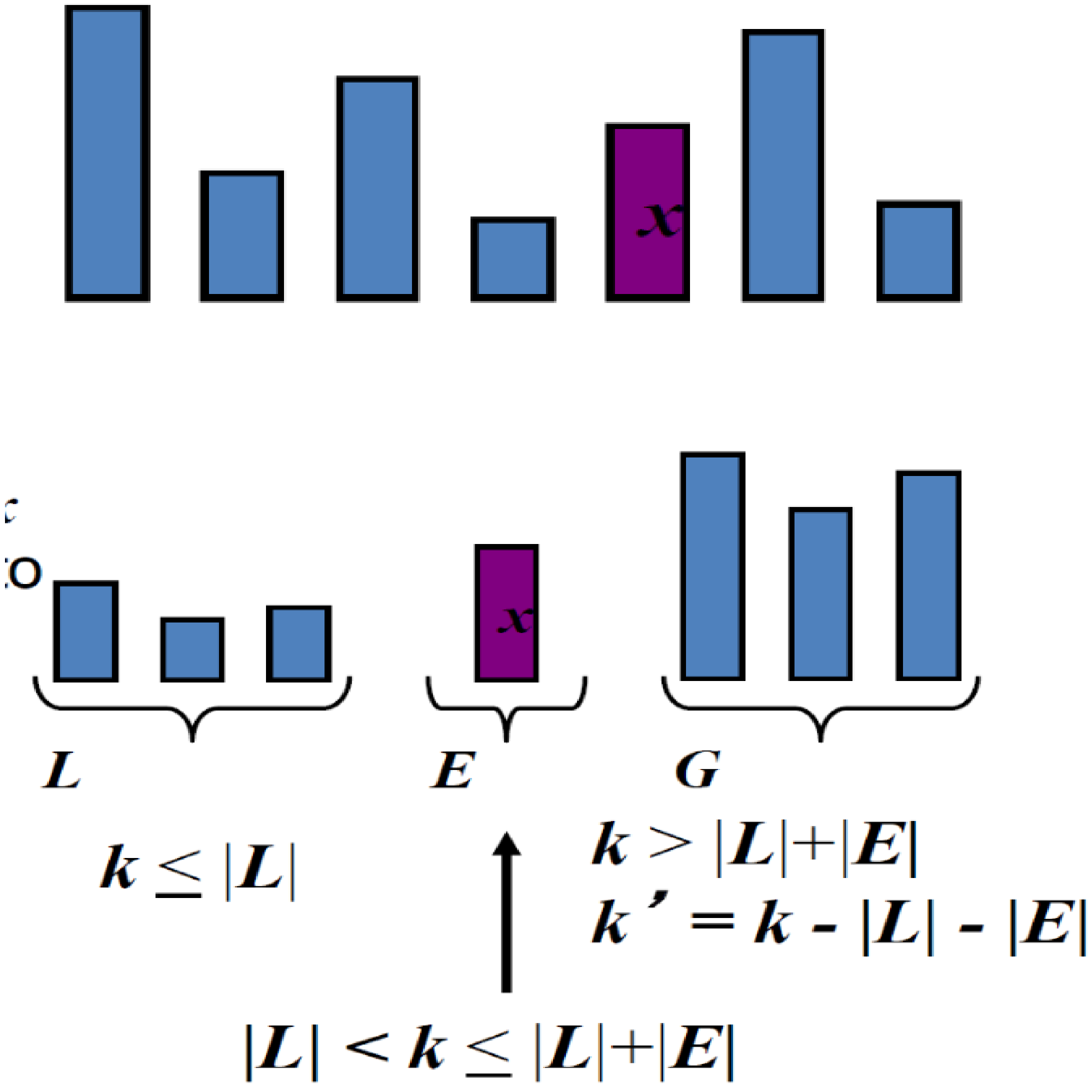
1, 5, 10, 4, 8, 2, 6

$\downarrow$ sort

1, 2, 4, 5, 6, 8, 10

หากกำหนดให้ k = 3 ก็จะได้คำตอบคือ 4 ปัญหาคือ เราทราบอยู่แล้วว่า sorting algorithm ใช้เวลาเรียงข้อมูล ระหว่าง O(n) to O(n^2)

Quick Select algorithm



1. สุ่มหยิบสมาชิก x เพื่อแบ่งข้อมูลออกเป็น 3 กลุ่ม

- L บรรจุสมาชิก < x
- E เท่ากับ x
- G บรรจุสมาชิก > x

2. ตัดสินใจตามกฎดังนี้

   2.1 หาก k = |L| + 1 จบการทำงาน ได้ x เป็นคำตอบ

   2.2 หาก k <= |L| ทำ partition ในฝั่ง L

   2.3 หาก k > |L| + 1 ทำการปรับปรุงค่า k โดยให้

   k’ = k – (|L| + 1) แล้วทำ partition ฝั่ง G

ตัวอย่าง Quick Select k = 3

1, 5, 10, 4, 8, 2, 6

- สุ่มหยิบ 6 เป็น pivot เพื่อแบ่งข้อมูลออกเป็น 3 ส่วน

1, 5, 4, 2, 6, 10, 8

L E G

- เนื่องจาก 3 < 4 ดังนั้นคำตอบอยู่ใน L
  จึง partition ฝั่ง L

1, 2, 5, 4

|L| = 1

- หยิบ 2 เป็น pivot แบ่ง L ออกเป็น 3 ส่วน
  เนื่องจาก 3 > 1 + 1 ปรับปรุงค่า k’ = 3 – (1+1) = 1
  จากนั้นทำ partition ฝั่ง G

4, 5

- หยิบ 4 เป็น pivot แบ่ง G เป็น 3 ส่วน เนื่องจาก 4 เป็นสมาชิกตัวแรก จึงเป็นตำแหน่งเดียวกับ k’ ดังนั้นจึงสามารถจบการทำงานและส่งกลับค่า 4

Workshop

จงเขียนฟังก์ชั่น Quick Select ตามแนวคิดการแบ่งแยกและเอาชนะเพื่อแก้ปัญหาลำดับ k กำหนดให้การหยิบ pivot ใช้ตำแหน่งสุดท้ายของอาร์เรย์เสมอ

Integer multiplication with Brute force

ในการคำนวณตัวเลข การคูณ (multiplication) และการหาร (division) ถือเป็นงานที่ต้องใช้ทรัพยากรในการคำนวณสูงเมื่อเปรียบเทียบกับการบวก (addition) และการลบ (subtraction) โดยเฉพาะอย่างยิ่งหากตัวเลขมีจำนวนหลายๆ หลัก

วิธีการคูณเลข 2 จำนวน ที่เราคุ้นเคยมากที่สุด คือ *pen-and-pencil algorithm* โดยเริ่มจากการพิจารณานำตัวคูณในแต่ละหลักไปทุกหลักของตัวตั้ง จากนั้นเลื่อนตัวคูณไปหลักถัดไป และทำซ้ำจนกระทั่งครบทุกหลัก และนำมาผลลัพธ์บวกกัน

```
     23958233
×        5830
-------------
     00000000
    71874699
   191665864
+ 119791165
-------------
  139676498390
```

จากตัวอย่างจะเห็นได้ว่า หากตัวตั้งและตัวคูณมีจำนวนหลักเท่ากันคือ n

จำนวนครั้งในการคูณทั้งหมดคือ n^2

Integer multiplication with divide & conquer

เพื่อลดจำนวนครั้งในการคูณเราอาจใช้เทคนิคการแบ่งแยกและเอาชนะสำหรับแก้ปัญหานี้ได้ แต่เราจะต้องหาวิธีในการแบ่งปัญหาและการรวมปัญหาให้ได้ ซึ่งในปัญหานี้อาจกระทำได้ง่าย ดังนี้

สมมติให้เลขจำนวนเต็ม 2 หลักคือ 23 และ 14 เราสามารถเขียนในอีกรูปแบบดังนี้

$$23 = 2.10^1 + 3.10^0$$
$$14 = 1.10^1 + 4.10^0$$

การแบ่งปัญหาย่อย

$$23*14 = (2.10^1 + 3.10^0)*(1.10^1 + 4.10^0)$$

การรวมคำตอบ

$$23*14 = (2*1)10^2 + (2*4 + 3*1)10^1 + (3*4)10^0 = 322$$

Integer multiplication with divide & conquer

ดังนั้นเลขจำนวนเต็ม 2 ตัว คือ X และ Y ขนาด n หลัก สามารถแบ่งปัญหาย่อยได้ครั้งละ 4 เทอม คือ a, b, c และ d สำหรับตัวตั้งและตัวคูณ ดังนี้

x	a	b
y	c	d

$$x = a.10^{n/2} + b$$

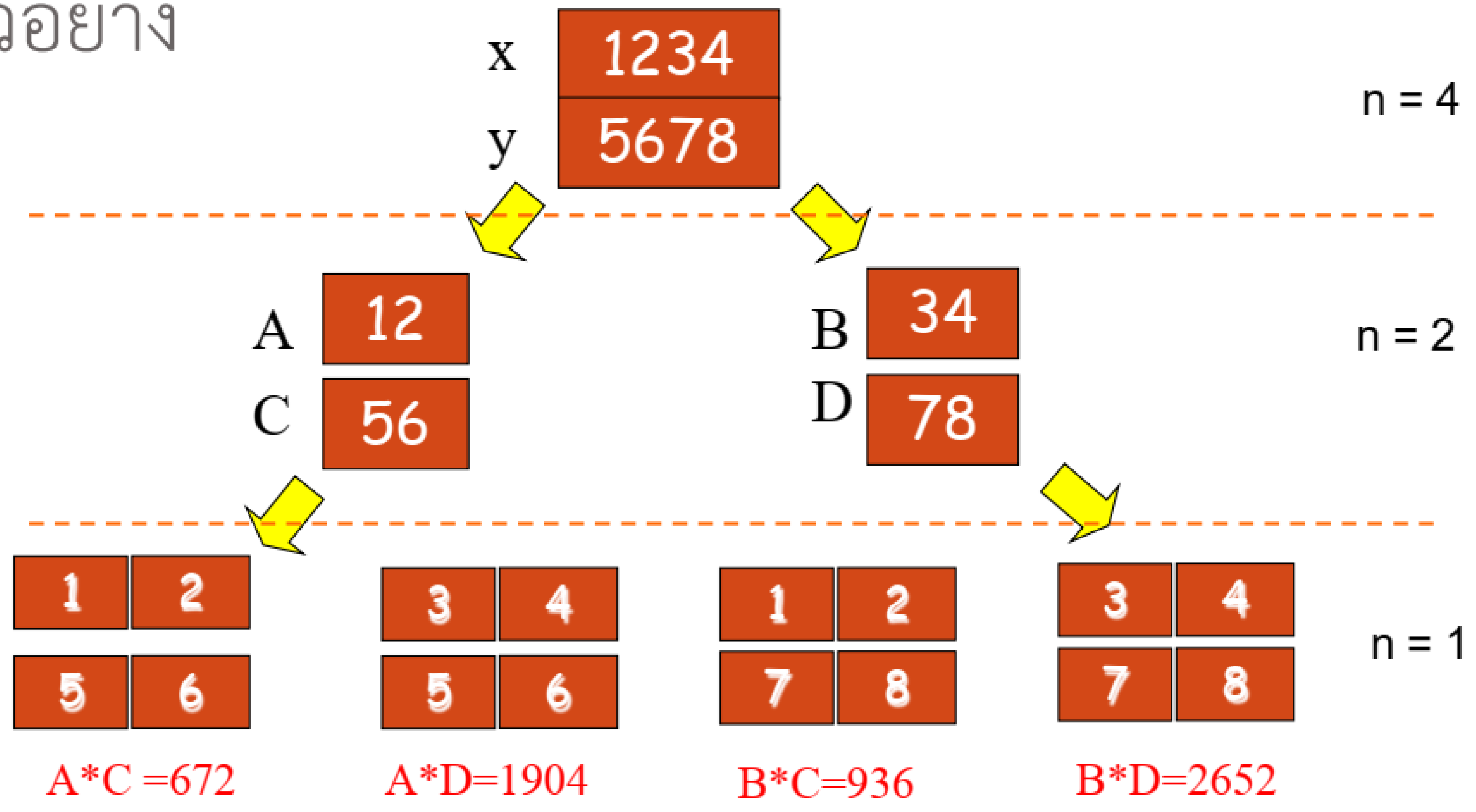
$$y = c.10^{n/2} + d$$

และการรวมคำตอบของปัญหาย่อยคือ

$$x * y = (a.10^{n/2} + b) * (c.10^{n/2} + d)$$

$$x * y = (a * c).10^{n} + (a * d + b * c).10^{n/2} + b * d$$

ตัวอย่าง



$$1234 * 5678 = (a*c)10^{n} + (a*d + b*c)10^{n/2} + (b*d)$$
$$= 672*10^{4} + (1,904+936)*10^{2} + (2,652)$$
$$= 7,006,652$$

Karatsuba method (1962)

จากหลักการ divide & conquer จะเห็นได้ว่าจำนวนครั้งในการคูณไม่ได้ลดลงไปจากวิธีการ brute force คือ n^2

ต่อมาในปี ค.ศ. 1962 Anatoly Karatsuba จะได้นำเสนอการแยกตัวประกอบในเทอมกลางเพื่อลดจำนวนครั้งในการคูณดังนี้

$$x*y=(a*c).10^n+\boxed{(a*d+b*c)}.10^{n/2}+b*d$$

โดยพยายามแยกตัวประกอบในเทอมกลางเพื่อให้เกิดเทอมที่ซ้ำกันออกมา

$$x*y=(a*c).10^n+\boxed{((a+b)*(c+d)-a*c-b*d)}.10^{n/2}+b*d$$

จะเห็นว่าด้วยวิธีการแยกตัวประกอบนี้ จะทำให้สามารถลดจำนวนครั้งในการคูณกัน จาก 4 ครั้งในแต่ละรอบของการแบ่งเหลือเพียง 3 ครั้งเท่านั้น

```
long  int multiply (string X, string Y)
{  int  n = makeEqualLength(X, Y);

    if (n == 1)  return  multiplyiSingleBit(X, Y);

      int fh = n/2;
    int sh = (n-fh);
     string Xl = X.substr(0, fh);                      // a
      string Xr = X.substr(fh, sh);                   //  b

      string Yl = Y.substr(0, fh);                   // c
      string Yr = Y.substr(fh, sh);                 //  d

           long int P1=multiply (Xl, Yl);         //   a*c
           long int P2=multiply (Xr, Yr);        //     b*d
           long int P3=multiply (addBitStrings(Xl, Xr),
                                 addBitStrings(Yl, Yr));

         return P1*(1<<(2*sh)) + (P3 -P1 -P2)*(1<<sh) + P2;
}
```