อัลกอริทึมการแบ่งแยกและเอาชนะ
(Divide and Conquer algorithm)
Part 2

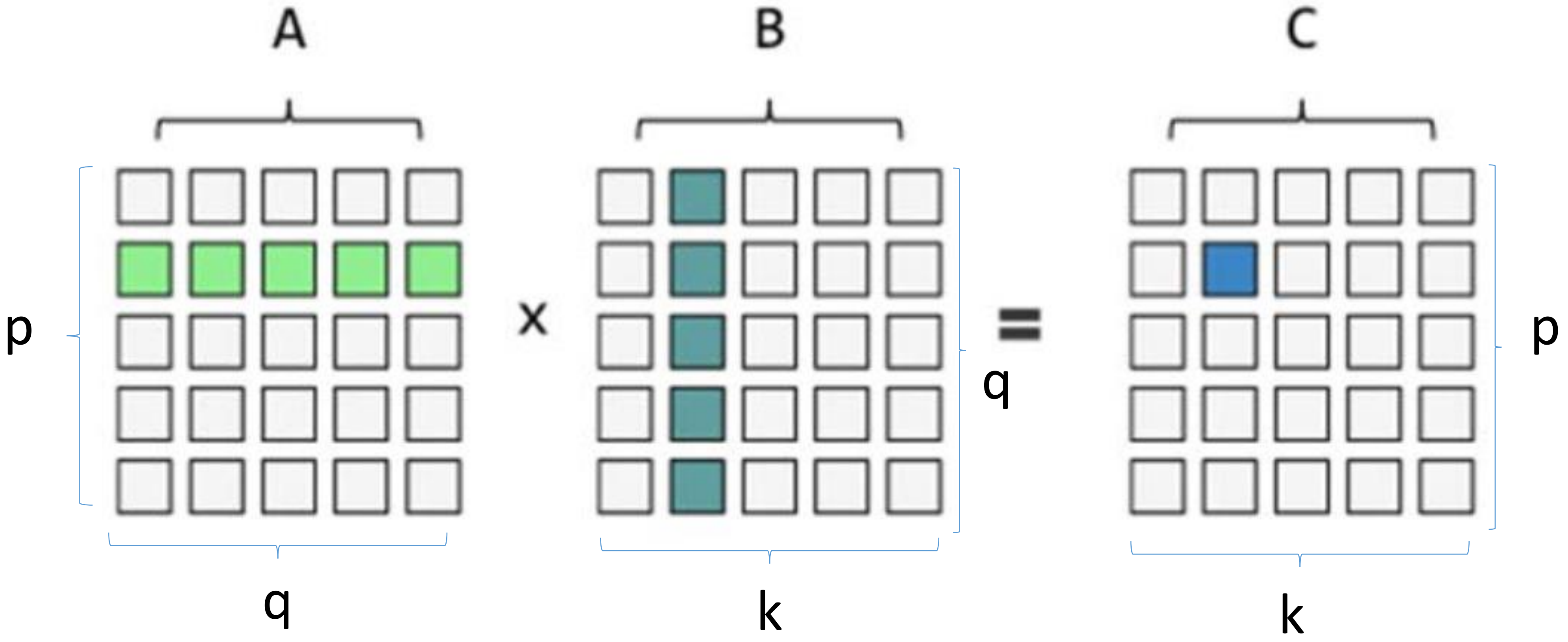
อ.ดร.ลือพล พิพานเมฆาภรณ์

luepol.p@sci.kmutnb.ac.th

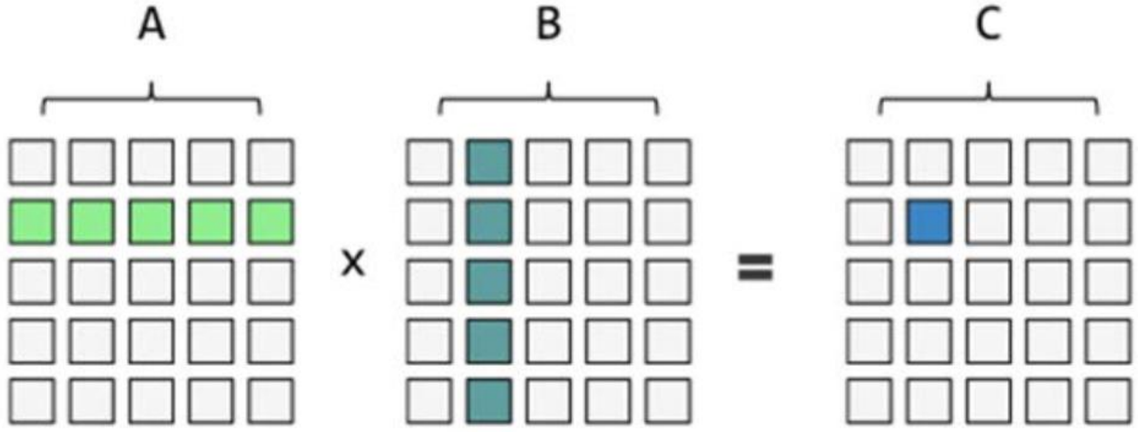
Matrix multiplication

Input: Matrix A[p x q] , B[q x k]

Output: C = A * B where C [p x k]



Matrix Multiplication



$$C_{i,j} = \sum_{k=0}^{N-1} A_{i,k} * B_{k,j}$$

```
for i=0 to N-1:
    for j=0 to N-1:
        for k = 0 to N-1:
            C[i][j] = A[i][k]*B[k][j]
```

$O(N^3)$

Example (N = 2)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 5 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 \times 6 + 3 \times 4 & 1 \times 8 + 3 \times 2 \\ 7 \times 6 + 5 \times 4 & 7 \times 8 + 5 \times 2 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 18 & 14 \\ 62 & 66 \end{bmatrix}$$

Matrix Multiplication (DAC)

Divide Step: when N > 1, split matrix A and B into 8 parts.

$$
A = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} A_{11} & A_{12} \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{array}\right] \\ \begin{array}{cc} A_{21} & A_{22} \end{array} \end{array}
\qquad
B = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} B_{11} & B_{12} \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc|cc} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ \hline b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{array}\right] \\ \begin{array}{cc} B_{21} & B_{22} \end{array} \end{array}
$$

$$
C = \begin{bmatrix} C11 & C12 \\ C21 & C22 \end{bmatrix}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
\mathbf{C}_{1,1} &= \mathbf{A}_{1,1}\mathbf{B}_{1,1} + \mathbf{A}_{1,2}\mathbf{B}_{2,1} \\
\mathbf{C}_{1,2} &= \mathbf{A}_{1,1}\mathbf{B}_{1,2} + \mathbf{A}_{1,2}\mathbf{B}_{2,2} \\
\mathbf{C}_{2,1} &= \mathbf{A}_{2,1}\mathbf{B}_{1,1} + \mathbf{A}_{2,2}\mathbf{B}_{2,1} \\
\mathbf{C}_{2,2} &= \mathbf{A}_{2,1}\mathbf{B}_{1,2} + \mathbf{A}_{2,2}\mathbf{B}_{2,2}
\end{aligned}\right\} \text{Combine}
$$

Matrix Multiplication (DAC)

Conquer Step: when N = 1, multiply a*b

$$A_{ij} = [a], \qquad B_{ij} = [b] \qquad C_{ij} = [a * b]$$

Matrix Multiplication with Recursive

SQUARE-MATRIX-MULTIPLY-RECURSIVE(A, B)

$n = A.rows$
let C be a new $n \times n$ matrix
if $n == 1$
    $c_{11} = a_{11} \cdot b_{11}$
else partition A, B, and C as in equations (4.9)
    $C_{11} =$ SQUARE-MATRIX-MULTIPLY-RECURSIVE(A_{11}, B_{11})
        $+$ SQUARE-MATRIX-MULTIPLY-RECURSIVE(A_{12}, B_{21})
    $C_{12} =$ SQUARE-MATRIX-MULTIPLY-RECURSIVE(A_{11}, B_{12})
        $+$ SQUARE-MATRIX-MULTIPLY-RECURSIVE(A_{12}, B_{22})
    $C_{21} =$ SQUARE-MATRIX-MULTIPLY-RECURSIVE(A_{21}, B_{11})
        $+$ SQUARE-MATRIX-MULTIPLY-RECURSIVE(A_{22}, B_{21})
    $C_{22} =$ SQUARE-MATRIX-MULTIPLY-RECURSIVE(A_{21}, B_{12})
        $+$ SQUARE-MATRIX-MULTIPLY-RECURSIVE(A_{22}, B_{22})
return C

$$T(n) = \begin{cases} 8T\left(\frac{n}{2}\right) + n^2 & n > 1 \\ 1 & n = 1 \end{cases}$$

$O(n^3)$

Strassen’s algorithm (1969)

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} A_{11} & \qquad A_{12} \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{array}\right] \\ \begin{array}{cc} A_{21} & \qquad A_{22} \end{array} \end{array} \qquad B = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} B_{11} & \qquad B_{12} \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc|cc} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ \hline b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{array}\right] \\ \begin{array}{cc} B_{21} & \qquad B_{22} \end{array} \end{array}$$

ลดปัญหาการรวมคำตอบซึ่งต้องมีการคูณทั้งหมด 8 ครั้ง โดยนำเสนอการรวมคำตอบแบบใหม่

$$\mathbf{M}_1 := (\mathbf{A}_{1,1} + \mathbf{A}_{2,2})(\mathbf{B}_{1,1} + \mathbf{B}_{2,2})$$
$$\mathbf{M}_2 := (\mathbf{A}_{2,1} + \mathbf{A}_{2,2})\mathbf{B}_{1,1}$$
$$\mathbf{M}_3 := \mathbf{A}_{1,1}(\mathbf{B}_{1,2} - \mathbf{B}_{2,2})$$
$$\mathbf{M}_4 := \mathbf{A}_{2,2}(\mathbf{B}_{2,1} - \mathbf{B}_{1,1})$$
$$\mathbf{M}_5 := (\mathbf{A}_{1,1} + \mathbf{A}_{1,2})\mathbf{B}_{2,2}$$
$$\mathbf{M}_6 := (\mathbf{A}_{2,1} - \mathbf{A}_{1,1})(\mathbf{B}_{1,1} + \mathbf{B}_{1,2})$$
$$\mathbf{M}_7 := (\mathbf{A}_{1,2} - \mathbf{A}_{2,2})(\mathbf{B}_{2,1} + \mathbf{B}_{2,2})$$

$$\mathbf{C}_{1,1} = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_4 - \mathbf{M}_5 + \mathbf{M}_7$$
$$\mathbf{C}_{1,2} = \mathbf{M}_3 + \mathbf{M}_5$$
$$\mathbf{C}_{2,1} = \mathbf{M}_2 + \mathbf{M}_4$$
$$\mathbf{C}_{2,2} = \mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2 + \mathbf{M}_3 + \mathbf{M}_6$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{1,1} & \mathbf{C}_{1,2} \\ \mathbf{C}_{2,1} & \mathbf{C}_{2,2} \end{bmatrix}$$

Strassen's algorithm (N = 2)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 5 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$M_1 = (1+5) \times (6+2) = 48$$

$$M_2 = (7+5) \times 6 = 72$$

$$M_3 = 1 \times (8-2) = 6$$

$$M_4 = 5 \times (4-6) = -10$$

$$M_5 = (1+3) \times 2 = 8$$

$$M_6 = (7-1) \times (6+8) = 84$$

$$M_7 = (3-5) \times (4+2) = -12$$

$$\mathbf{M}_1 := (\mathbf{A}_{1,1} + \mathbf{A}_{2,2})(\mathbf{B}_{1,1} + \mathbf{B}_{2,2})$$

$$\mathbf{M}_2 := (\mathbf{A}_{2,1} + \mathbf{A}_{2,2})\mathbf{B}_{1,1}$$

$$\mathbf{M}_3 := \mathbf{A}_{1,1}(\mathbf{B}_{1,2} - \mathbf{B}_{2,2})$$

$$\mathbf{M}_4 := \mathbf{A}_{2,2}(\mathbf{B}_{2,1} - \mathbf{B}_{1,1})$$

$$\mathbf{M}_5 := (\mathbf{A}_{1,1} + \mathbf{A}_{1,2})\mathbf{B}_{2,2}$$

$$\mathbf{M}_6 := (\mathbf{A}_{2,1} - \mathbf{A}_{1,1})(\mathbf{B}_{1,1} + \mathbf{B}_{1,2})$$

$$\mathbf{M}_7 := (\mathbf{A}_{1,2} - \mathbf{A}_{2,2})(\mathbf{B}_{2,1} + \mathbf{B}_{2,2})$$

Strassen's algorithm (N = 2)

$$\mathbf{C}_{1,1} = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_4 - \mathbf{M}_5 + \mathbf{M}_7$$
$$\mathbf{C}_{1,2} = \mathbf{M}_3 + \mathbf{M}_5$$
$$\mathbf{C}_{2,1} = \mathbf{M}_2 + \mathbf{M}_4$$
$$\mathbf{C}_{2,2} = \mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2 + \mathbf{M}_3 + \mathbf{M}_6$$

$$AB = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 48 - 10 - 8 - 12 & 6 + 8 \\ 72 - 10 & 48 - 72 + 6 + 84 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 18 & 14 \\ 62 & 66 \end{bmatrix}$$

Strassen's algorithm

Input: $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$ and $B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$

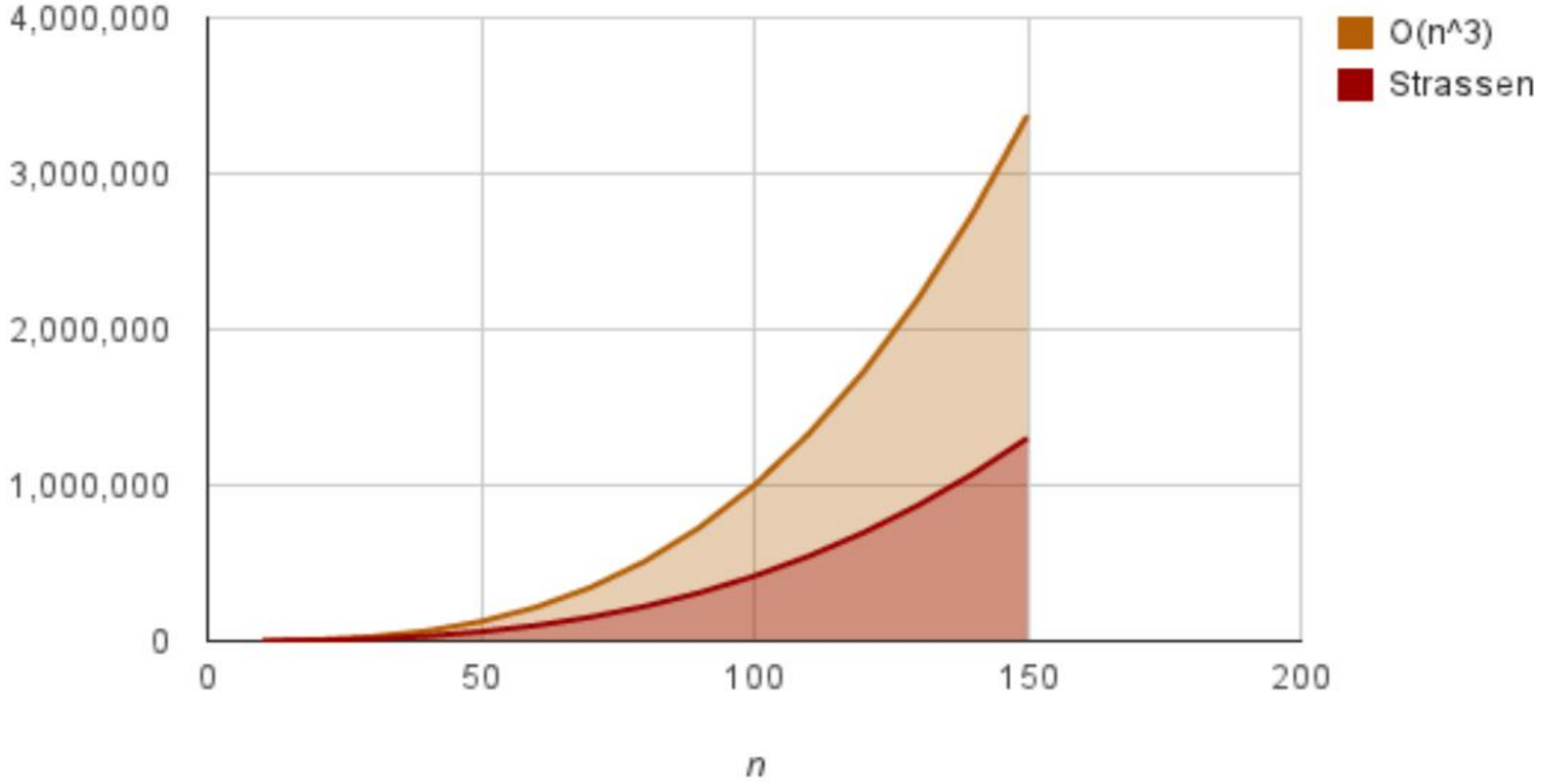
```
if n = 1 then
    C = A · B
else
    M1 = (A11 + A22) · (B11 + B22)
    M2 = (A21 + A22) · B11
    M3 = A11 · (B12 − B22)
    M4 = A22 · (B21 − B11)
    M5 = (A11 + A12) · B22
    M6 = (A21 − A11) · (B11 + B12)
    M7 = (A12 − A22) · (B21 + B22)
    C11 = M1 + M4 − M5 + M7
    C12 = M3 + M5
    C21 = M2 + M4
    C22 = M1 − M2 + M3 + M6
```

$$T(n) = \begin{cases} 7T\left(\frac{n}{2}\right) + n^2 & n > 1 \\ 1 & n = 1 \end{cases}$$

$O(n^{2.378})$

Strassen’s Matrix Multiplication

เปรียบเทียบจำนวนครั้งในการคูณเมื่อ n เพิ่มขึ้น

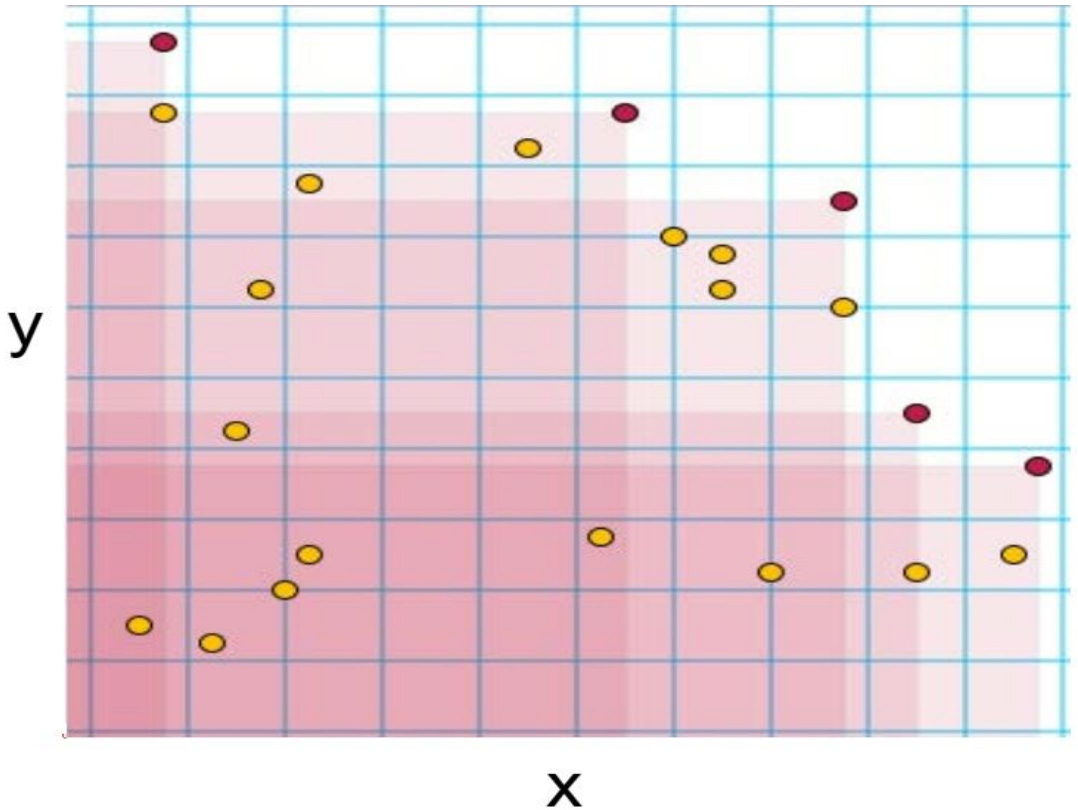


$$T = n^{2.378}$$

Maxima set problem

กำหนดให้ระนาบ X, Y มีจุดทั้งหมด n จุด โดย p คือ maxima หากไม่มีจุด q ใดๆ ที่ครอบคลุม p ได้

หมายเหตุ จุด p จะครอบคลุมโดย q ก็ต่อเมื่อ p.x < q.x และ p.y < q.y

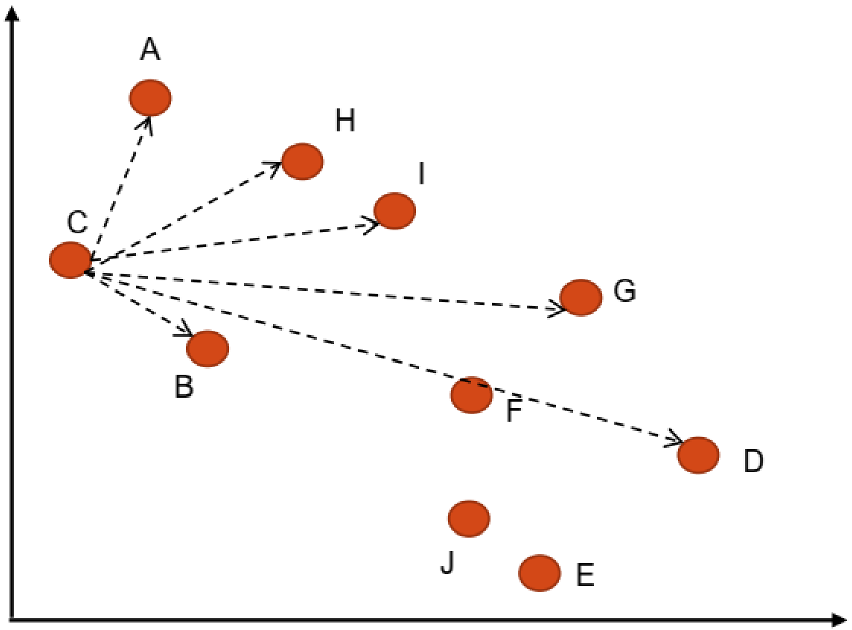


จุดสีแดง คือ maxima set

Finding maxima set (Brute force)

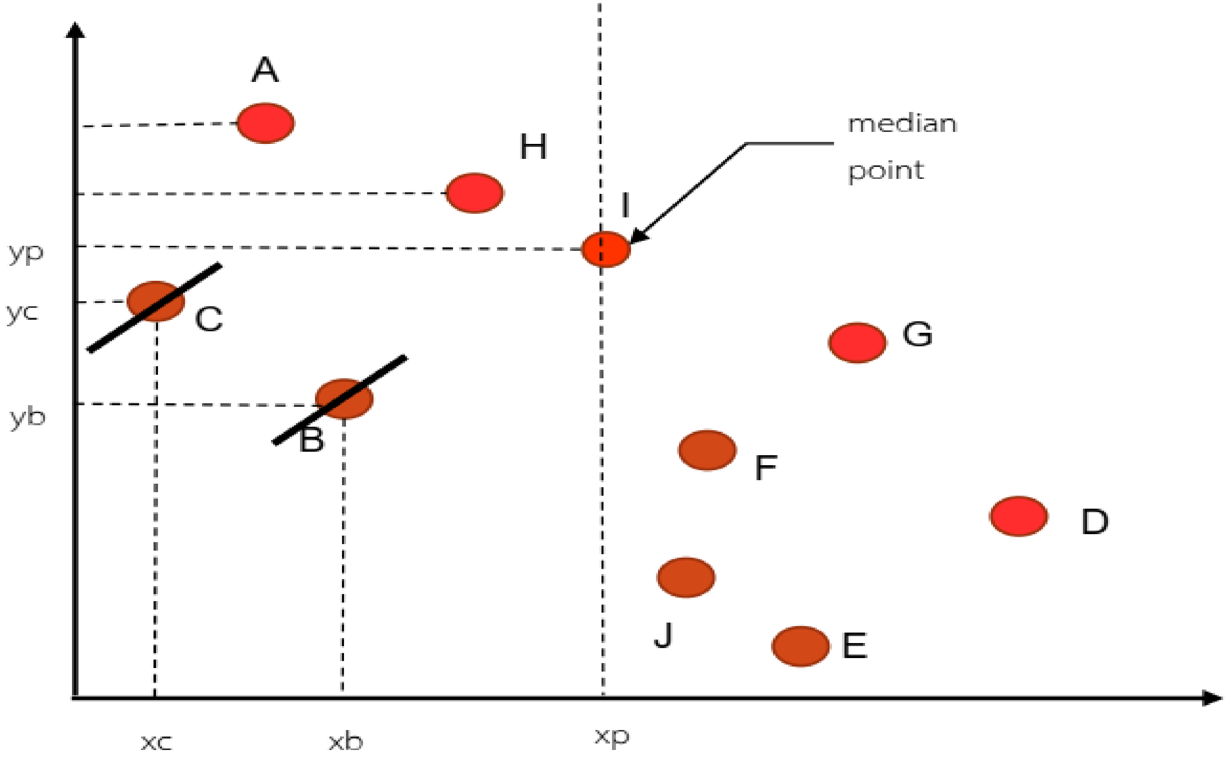
หลักการ brute force ก็คือไล่เช็คทีละจุด โดยหากพบว่ามีอย่างน้อย 1 จุดที่ถูกครอบคลุม โดยจุดใดๆ ก็จะถือว่าจุดดังกล่าวไม่ได้อยู่ในเซตคำตอบ

ดังนั้นหากมีทั้งหมด n จุด คาดหวังได้ว่าจำนวนจุดที่ต้องเปรียบเทียบทั้งหมดคือ n^2



Finding maxima set (DAC)

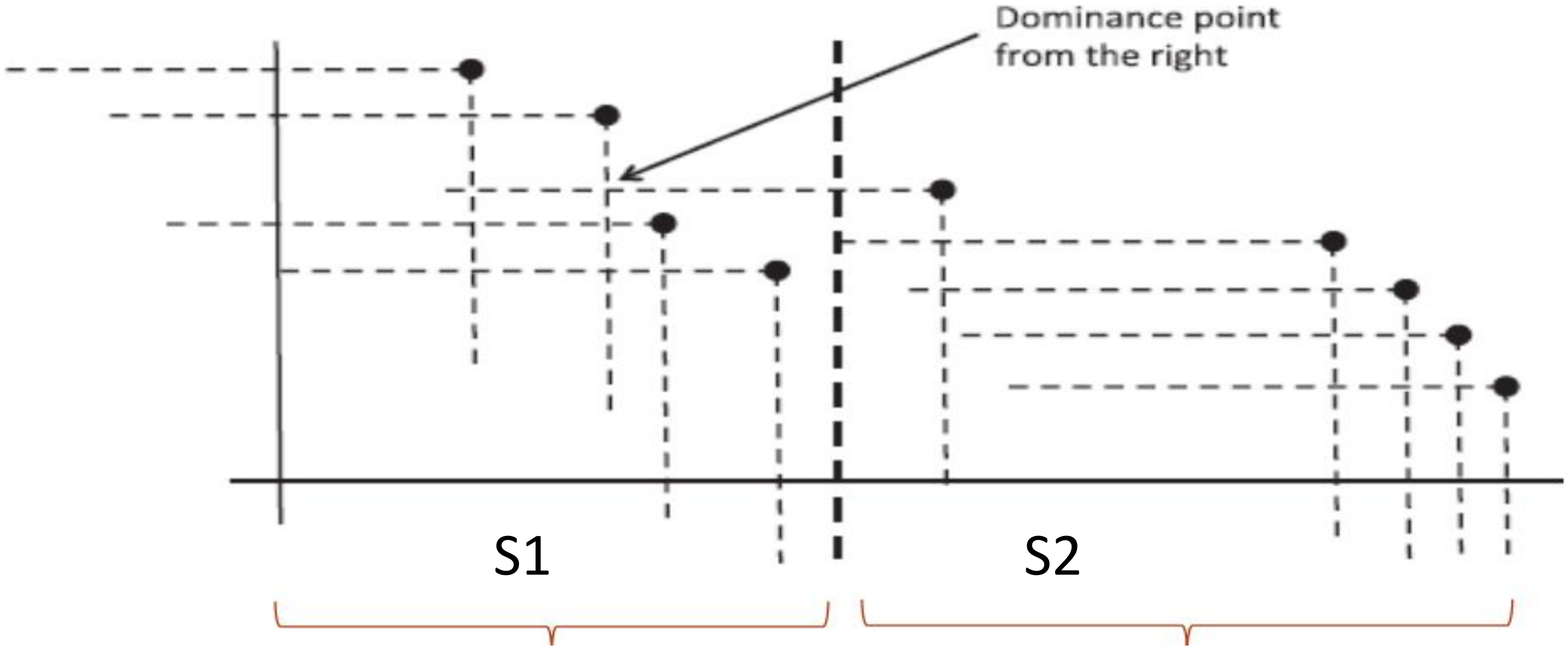
1. เรียงลำดับจุดทั้งหมดสอดคล้องสัมพันธ์กับค่า x (lexicographic order)
2. ค้นหาจุดกลาง (median point) เป็นจุดอ้างอิงและเป็นตัวแบ่งกลุ่มออกเป็น 2 กลุ่ม
3. ทุกๆ จุดด้านซ้ายที่มีค่า y มากกว่า yp คือ maxima point
4. ทุกๆ จุดด้านขวาเป็น maxima point ยกเว้นแต่จะมีบางจุดด้านขวาที่มีค่า y มากกว่า



Finding maxima set (DAC)

อย่างไรก็ตามอาจมีบางจุดที่เป็น maxima ด้านซ้าย S1 ถูกครอบคลุมโดยบางจุดที่เป็น maxima ด้านขวา S2

วิธีการแก้ปัญหาก็คือทุกครั้งที่มีการ add จุดเข้าไปที่ S2 จะต้องนำค่า y ของจุดนั้นไปเช็คกับทุกๆ จุด maxima ใน S1 และกำจัดทิ้งหากพบว่าค่า y ของจุดใน S1 มีค่าน้อยกว่า



Divide and Conquer

ประมวลผลเบื้องต้น เรียงลำดับจุดทั้งหมดสอดคล้องสัมพันธ์กับค่า x (lexicographic order)

Base case: ถ้า **n = 1** เพิ่มจุดเข้าไปในเซตคำตอบ S

Divide: ให้ p เป็นจุดกลาง (median) ดังนั้นแบ่งจุดที่เหลือออกเป็น 2 กลุ่มคือ S1 และ S2
โดยทุกๆ จุดใน S1 จะมีค่า x น้อยกว่า xp มิฉะนั้นจะถูกเก็บไว้ใน S2

Combine:

** ให้ q เป็นจุดที่มีค่า x ต่ำสุดใน S2 จากนั้นกำจัดทุกๆ จุด ใน S1 ที่มีค่า y น้อยกว่า yq
เซตคำตอบคือ S = S1 U S2

Algorithm $\mathsf{MaximaSet}(S)$:

Input: A set, S, of n points in the plane

Output: The set, M, of maxima points in S

if $n \leq 1$ **then**

  return S

Let p be the median point in S, by lexicographic (x, y)-coordinates

Let L be the set of points lexicographically less than p in S

Let G be the set of points lexicographically greater than or equal to p in S

$M_1 \leftarrow \mathsf{MaximaSet}(L)$

$M_2 \leftarrow \mathsf{MaximaSet}(G)$

Let q be the lexicographically smallest point in M_2

for each point, r, in M_1 **do**

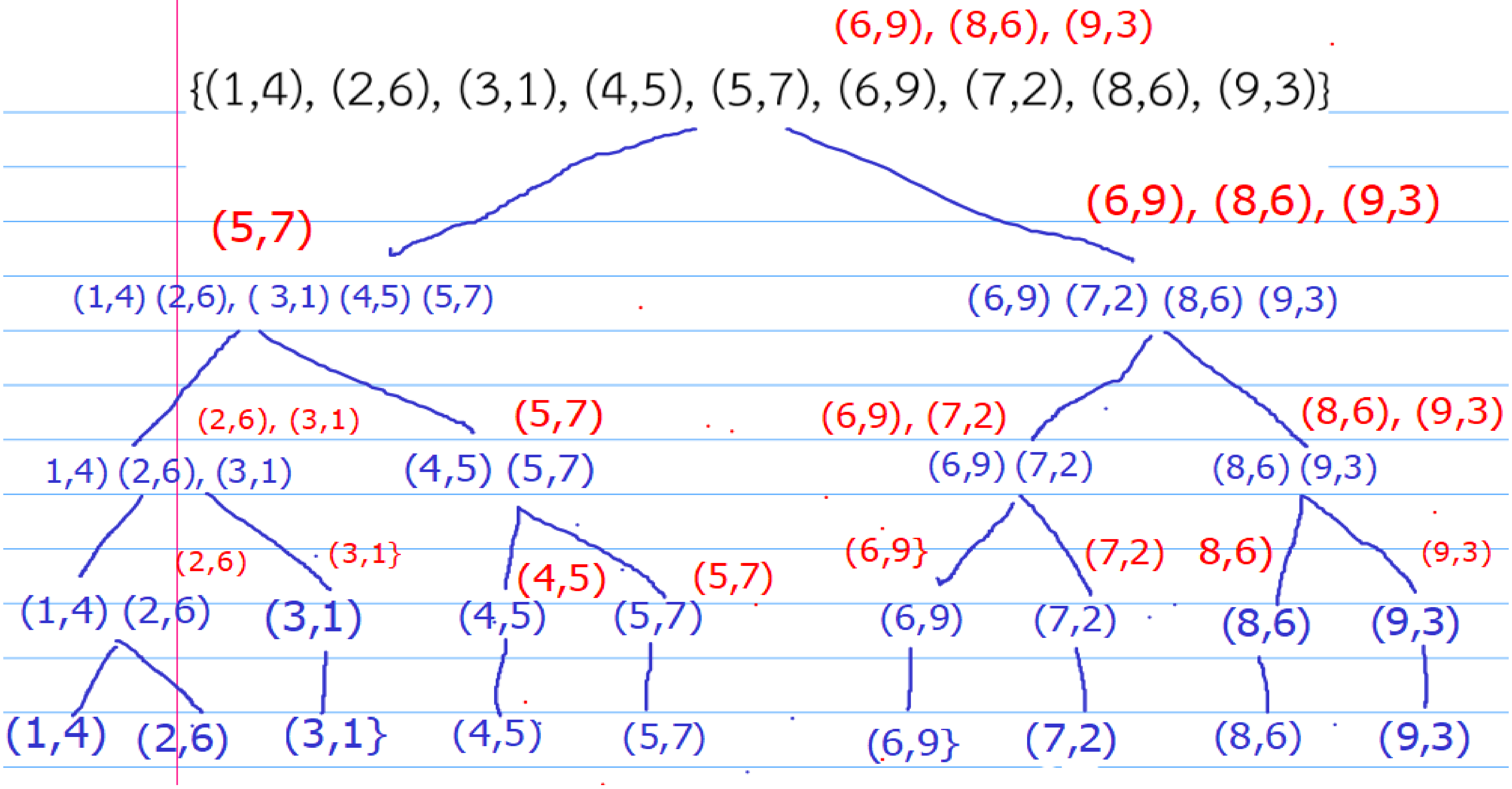
  if $\cancel{x(r) \leq x(q)}$ ~~**and**~~ $y(r) \leq y(q)$ **then**

    Remove r from M_1

return $M_1 \cup M_2$

ตัวอย่าง

กำหนดให้เซตของจุดมีดังนี้ {(1,4), (2,6), (3,1), (4,5), (5,7), (6,9), (7,2), (8,6), (9,3)} จงหาเซต maxima


(6,9), (8,6), (9,3)
{(1,4), (2,6), (3,1), (4,5), (5,7), (6,9), (7,2), (8,6), (9,3)}
(5,7)
(6,9), (8,6), (9,3)
(1,4) (2,6), (3,1) (4,5) (5,7)
(6,9) (7,2) (8,6) (9,3)
(2,6), (3,1)
(5,7)
(6,9), (7,2)
(8,6), (9,3)
1,4) (2,6), (3,1)
(4,5) (5,7)
(6,9) (7,2)
(8,6) (9,3)
(2,6)
(3,1}
(4,5)
(5,7)
(6,9}
(7,2)
8,6)
(9,3)
(1,4) (2,6)
(3,1)
(4,5)
(5,7)
(6,9)
(7,2)
(8,6)
(9,3)
(1,4)
(2,6)
(3,1}
(4,5)
(5,7)
(6,9}
(7,2)
(8,6)
(9,3)