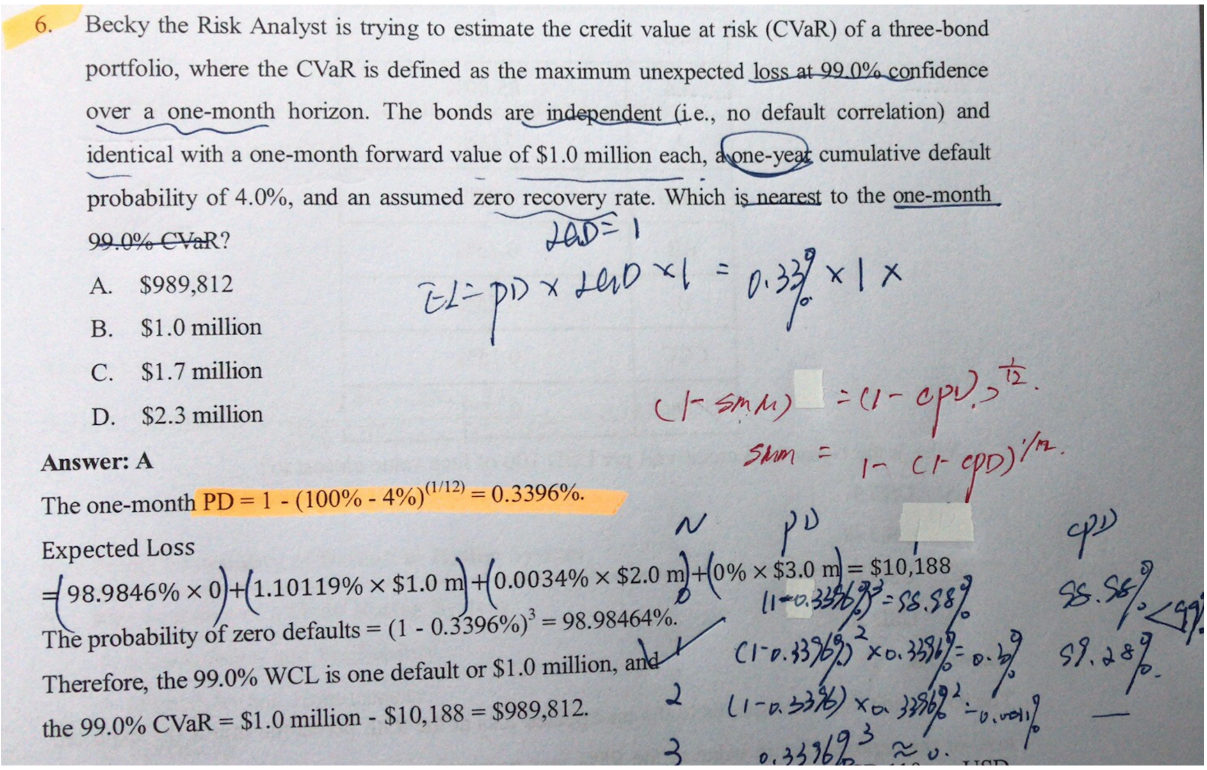
Portfolio VaR 投资组合 VaR

- **互相独立的同质性资产**
  - n: 资产的数量
  - m: 每个资产的价值 （每个资产的价值一样）
  - p: 每个资产的**平均**违约概率 （资产之间违约互相**独立**）
  - p_{wcl}: 每个资产**最坏**违约概率 （一般未知）
  - α: VaR 的 significance level 显著水平（比如 1%）
  - $1-\alpha$: VaR 的 confidence level 置信水平（比如 99%, 99.99%）
- 组合的违约分布是**二项分布 Binomial Distribution**
- 平均损失
  - $EL = n \times p \times m$
  - $EL = n_{avg} \times m$，其中$n_{avg} = n \times p$是平均违约次数
- 最坏损失
  - $WCL = n \times p_{wcl} \times m$
  - $WCL = n_{wcl} \times m$，其中$n_{wcl} = n \times p_{wcl}$是最坏违约次数
- VaR
  - $VaR = WCL - EL = \mathbf{(n_{wcl} - n_{avg}) \times m = (n_{wcl} - n \times p) \times m}$
  - 核心问题就是如何寻找 n_{wcl}
- n_{wcl}的性质
  - 范围 $n_{avg} = n \times p \leq n_{wcl} = n$。
- n_{wcl}的算法 （常用算法）
  - 如果 n 很大而且 p 很小时，n_{wcl}偏小，因此计算时从小的开始计算。
  - 从违约次数 k=0 开始，每次增加 1，一直到 n，做如下的计算
    - 违约 k 次的概率 $P_k = C_n^k \times p^k \times (1-p)^{n-k}$
    - 违约 k 次的累计概率 $F_k = \sum_{i \leq k} P_i$
    - 如果$F_k > 1-\alpha$, 那么$n_{wcl} = k$，停止计算。
- n_{wcl}的另一种算法
  - 如果 n 很小而且 p 比较大时，n_{wcl}偏大，因此计算时从大的开始计算。
  - 从违约次数 k=n 开始，每次减少 1，一直到 0，做如下的计算
    - 违约 k 次的概率 $P_k = C_n^k \times p^k \times (1-p)^{n-k}$
    - 违约 k 次的累计概率 $F_k = \sum_{i \leq k} P_i$
    - 如果$F_k > \alpha$，那么$n_{wcl} = k$，停止计算。



6. Becky the Risk Analyst is trying to estimate the credit value at risk (CVaR) of a three-bond portfolio, where the CVaR is defined as the maximum unexpected loss at 99.0% confidence over a one-month horizon. The bonds are independent (i.e., no default correlation) and identical with a one-month forward value of \$1.0 million each, a one-year cumulative default probability of 4.0%, and an assumed zero recovery rate. Which is nearest to the one-month 99.0% CVaR?

A. \$989,812

B. \$1.0 million

C. \$1.7 million

D. \$2.3 million

Answer: A

The one-month PD = 1 - (100% - 4%)^(1/12) = 0.3396%.

Expected Loss = (98.9846% × 0) + (1.10119% × \$1.0 m) + (0.0034% × \$2.0 m) + (0% × \$3.0 m) = \$10,188

The probability of zero defaults = (1 - 0.3396%)^3 = 98.98464%.

Therefore, the 99.0% WCL is one default or \$1.0 million, and the 99.0% CVaR = \$1.0 million - \$10,188 = \$989,812.

- Yearly pd to monthly pd 算出每月违约概率
  - $(1-\mathrm{PD_m})^{12} = 1-\mathrm{PD_y}$
  - $\mathrm{PD_m} = 1-\sqrt[12]{1-PD_y} = 1-\sqrt[12]{1-0.04} = 0.003396$
- $\mathrm{n_{wcl}}$
  - $P_k = C_n^k \times p^k \times (1-p)^{n-k}$
  - 增加违约次数，计算累计违约概率，找出第一个累计概率>99.99%的次数，这里是 1 次。
- VaR
  - $\mathrm{VaR = WCL - EL} = (\mathbf{n_{wcl}} - \mathbf{n_{avg}}) \times \mathbf{m} = (\mathbf{n_{wcl}} - \mathbf{n} \times \mathbf{p}) \times \mathbf{m}$
  - $=> \mathrm{VaR} = (1-3\times 0.003396)\times 1\mathrm{million}$ = 989812

违约分布，3 个 bond，每个 bond 都是 1m。VaR confidence level $1-\alpha = 99\%$

Default Times (k)	Probability	Loss (million)	Cumulative Probability
0	$(1-p)^3 = 98.98\%$	0	98.98%
1	$C_3^1 \times p^1 \times (1-p)^2$ 1.01%	1	**99.99% > 99% 计算停止**
2	$C_3^2 \times p^2 \times (1-p)^1$	2	
3	p^3	3	

另一种算法 VaR significance level $\alpha = 0.01 = 1\%$

Default Times (k)	Probability	Loss (million)	Cumulative Probability
3	$p^3 = 3.92\mathrm{e}^{-6}\%$	3	$3.92\mathrm{e}^{-6}\%$

2	$C_3^2 \times p^2 \times (1-p)^1$ $= 0.003448\%$	2	0.00345%
1	$C_3^1 \times p^1 \times (1-p)^2$ 1.01%	1	$1.015\% > 1\%$ **计算停止**
0	$(1-p)^3 = 98.98\%$	0	