VaR

- Not sub-additive
  - VaR_p > VaR_1 + VaR_2
  - 可能存在，对于非正态分布
- VaR_p =sqrt(VaR_1^2+VaR_2^2+2*r*VaR_1*VaR_2) <= VaR_1 + VaR_2
  - 前提：正态分布或者椭圆分布
  - VaR 的本质是 quantile。因为这里是简化了。VaR= P*Z*sigma 用的是标准差。

构造一个非正态分布 （p 是 significance level）：

- 资产一，有 n 个可能的值，VaR_1 = p * n
- 资产二，有 m 个可能的值，VaR_2 = p * m
- 组合资产：就是一个交叉组合，有 n*m 个可能的值（假定都是唯一的，很容易构造），Var_p = p*(n*m)

因为对于大部分情况： n*m > n+m，因此 VaR_p > VaR_1 + VaR_2

比如：2*3 > 2+3， 4*5>4+5

```
>>>
>>> asset1=[-i for i in range(5)]
>>> asset2=[-i-131 for i in range(5)]
>>> assetp=list(sorted([-i*j for i in asset1 for j in asset2]))
>>>
>>> asset1
[0, -1, -2, -3, -4]
>>> asset2
[-131, -132, -133, -134, -135]
>>> assetp
[-540, -536, -532, -528, -524, -405, -402, -399, -396, -393, -270, -268, -266, -
264, -262, -135, -134, -133, -132, -131, 0, 0, 0, 0, 0]
>>>
>>> alpha=0.02
>>>
>>> var1=asset1[int(alpha*len(asset1))]
>>> var2=asset2[int(alpha*len(asset2))]
>>> varp=assetp[int(alpha*len(assetp))]
>>>
>>> var1
0
>>> var2
-131
>>> varp
-540
>>>
```

Normalized [edit]

$$\varrho(0) = 0$$

That is, the risk of holding no assets is zero.

Monotonicity [edit]

$$\text{If } Z_1, Z_2 \in \mathcal{L} \text{ and } Z_1 \leq Z_2 \text{ a.s., then } \varrho(Z_1) \geq \varrho(Z_2)$$

That is, if portfolio Z_2 always has better values than portfolio Z_1 under almost all scenarios then the risk of Z_2 should be less than the risk of Z_1.[2] E.g. If Z_1 is an in the money call option (or otherwise) on a stock, and Z_2 is also an in the money call option with a lower strike price. In financial risk management, monotonicity implies a portfolio with greater future returns has less risk.

Sub-additivity [edit]

$$\text{If } Z_1, Z_2 \in \mathcal{L}, \text{ then } \varrho(Z_1 + Z_2) \leq \varrho(Z_1) + \varrho(Z_2)$$

Indeed, the risk of two portfolios together cannot get any worse than adding the two risks separately: this is the diversification principle. In financial risk management, sub-additivity implies diversification is beneficial.

Positive homogeneity [edit]

$$\text{If } \alpha \geq 0 \text{ and } Z \in \mathcal{L}, \text{ then } \varrho(\alpha Z) = \alpha \varrho(Z)$$

Loosely speaking, if you double your portfolio then you double your risk. In financial risk management, positive homogeneity implies the risk of a position is proportional to its size.

Translation invariance [edit]

If A is a deterministic portfolio with guaranteed return a and $Z \in \mathcal{L}$ then

$$\varrho(Z + A) = \varrho(Z) - a$$

先看 Monotonicity 的定义：希望寻找一个指标使得 return 越高（越低），风险指标就越小（越大）。给定一个 return 分布，Monotonicity 定义里隐含说指标对越极端（loss 越大）的权值就要 *越大*或者保持稳定。ES 只考虑左边分布，而且权值都是 1/n，因此对的。std 一样，考虑的是 *中间* 分布，是 return 靠近均值的情况，而忽略了极端分布，因此不符合

或者说 Monotonicity 是希望考虑 最坏情况的， std 考虑的是*平均* 偏差

从参考值角度理解更容易。ES 和 VaR 参考的是最坏的值，最极端的值，因此是单调的。而 std 参考的是平均值，包含了平均值的两边，因此不是单调的.

单调就是要不对称，而 std 就是对称的。假如收入是 1, 2, 3。1 的收入就是比 3 的小。但是用 std 时，1 和 3 离平均值一样大。

函数 f(r)，其中 r 是 return

单调性要求：回报越小，风险越大

$$\text{for } r_1 < r_2 \rightarrow f(r_1) > f(r_2)$$

VaR 是基于分位数：最小的回报使得对应的分位数大于给定的α

$$VaR(\alpha) = \min_{r} Q(r) > \alpha$$

$$\text{for } D_1 < D_2 \rightarrow \mathrm{VaR}(\alpha) > \mathrm{Quantile}(r_2)$$