Default Probability

- Time
  - T 假定从 1 开始，表示年底违约
- Events
  - Default: D
  - Non-Default $\overline{D}$
- Default Probability
  - Conditional Probability 条件违约概率
    - $C_t = \mathbf{P}(\mathbf{D_t} | \overline{D_{t-1}})$
    - 前期不违约，当期违约的概率
  - Unconditional Default Probability 无条件违约概率 （**乘法原则**）
    - $P_t = P(D_t) = \prod_{i=1}^{t-1} P(\overline{D_i} | \overline{D_{i-1}}) \times P(D_t | \overline{D_{t-1}}) = C_t \times \prod_{i=1}^{t-1}(1 - C_i)$
    - 在时刻 t 当期违约的概率
    - **乘法**原则：多个事件同时发生（类似几何分布）
  - Cumulative Default Probability 累计违约概率（**加法原则**）
    - $F_t = F(D_t) = \sum_{i=1}^{t} P(D_i) = \sum_i P_i$
    - 在时刻 t 时已经处于违约状态的概率
    - **加法**原则：多个违约时间可以选择（或的关系）
- Default intensity λ 给定违约强度
    - $F_t = 1 - e^{-\lambda \times t}$
    - $S_t = 1 - F_t = e^{-\lambda \times t}$
- 给定累计违约概率 F_t
  - $P_t = F_t - F_{t-1}$
  - $\boldsymbol{C_t = \frac{P_t}{1 - F_{t-1}} = \frac{F_t - F_{t-1}}{1 - F_{t-1}}}$
- 给定条件违约概率 $\boldsymbol{C_t}$
  - $\boldsymbol{P_t = C_t \times \prod_{i=1}^{t-1}(1 - C_i)}$
  - $F_t = \sum_i P_i$
- ADR
  - 未完待续。。。

违约概率

类别	**条件违约概率**	**独立违约概率**	**累计违约概率**
定义	假定前期不违约，当期违约的概率 概率是**相对于**前期	只在时刻 t 违约的概率 概率是相对于**最开始**	在时刻 t 时，已经违约的概率 **在时刻 t 前的每年**都可以违约
公式	C_t	P_t	F_t
给定F_t	$C_t = \frac{P_t}{1 - F_{t-1}} = \frac{F_t - F_{t-1}}{1 - F_{t-1}}$	$P_t = F_t - F_{t-1}$	
给定C_t		$\boldsymbol{P_t = C_t \times \prod_{i=1}^{t-1}(1 - C_i)}$	$F_t = \sum_i P_i = \sum_i C_t \times \prod_{i=1}^{t-1}(1 - C_i)$
给定P_t			$F_t = \sum_i P_i$
原则	**除法**	**乘法**	**加法**
FRM	Forward probability	Marginal probability	Cumulative

存活概率

违约概率	C_t	P_t	F_t
存活概率	s_t		$S_t = \prod_i s_i$
违约存活关系	$s_t = 1 - C_t$		$S_t = 1 - F_t$
公式	$s_t = \frac{S_t}{S_{t-1}}$		$S_t = \prod_i s_i$
原则	**除法**		**乘法**
FRM	Forward		cumulative

	Years					
	1	2	3	4	5	
names$_{t=0}$	**1000**					
names$_t$	**990**	**978**	**965**	**950**	**930**	
default$_{cumulated;\, t}$	**10**	**22**	**35**	**50**	**70**	**Formulas**
$PD^{cumulated}$, %	1.00	2.20	3.50	5.00	7.00	$PD_k^{cumulated} = \frac{\sum_t^{t+k} DEF_i}{Names_{t=0}}$
PD_k^{marg}, %	1.00	1.20	1.30	1.50	2.00	$PD_K^{marg} = PD_{t+k}^{cumulated} - PD_t^{cumulated}$
PD_k^{forw}, %	1.00	1.21	1.33	1.55	2.11	$PD_k^{Forward} = \frac{(Def_{t+k} - Def_t)}{Names\ survived_t}$
SR_t^{cumul}, %	99.00	97.80	96.50	95.00	93.00	$SR_t^{cumul} = \left(1 - PD_t^{cumulated}\right)$
SR_k^{forw}, %	99.00	98.80	98.70	98.50	98.00	$SR_k^{forw} = \left(1 - PD_k^{forw}\right)$
$ADR_{t\ discrete\ time}$, %	1.00	1.11	1.18	1.27	1.44	$ADR_t = 1 - \sqrt[t]{(1 - PD_t^{cumulated})}$
$ADR_{t\ continuous\ time}$, %	1.01	1.11	1.19	1.28	1.45	$ADR_t = -\frac{\ln(1 - PD_t^{cumulated})}{t}$