Interpolação

Márcio Antônio de Andrade Bortoloti

Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas - DCET
Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia - UESB

Interpolação Polinomial

Introdução

Seja o intervalo $[a, b]$ no qual pretendemos aproximar uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. São dados $n + 1$ pontos (x_i, f_i), $i = 0, \cdots, n$. O estudo da Teoria de Interpolação, basicamente, trata de dois problemas:

1. Conhecida a função somente nos pontos acima, obter um aproximação para ela em qualquer outro ponto do domínio.
2. Conhecida a expressão de $f(x)$, aproximá-la por outra expressão mais simples.

Introdução

Em geral, a função que irá aproximar a função f nos pontos dados tem a forma

$$p(x) = c_0\psi_0(x) + c_1\psi_1(x) + \cdots + c_n\psi_n(x),$$

onde $\psi_i(x)$ são funções elementares estabelecidas a priori e c_i são parâmetros a serem determinados.

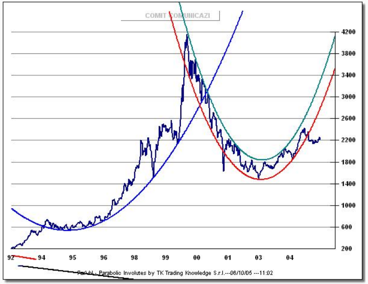
Podemos ter:

- $\psi_i(x) = x^i$
- $\psi_i(x) = \cos(ix)$
- $\psi_i(x) = e^{ix}$

A existência de uma função polinomial que interpola uma dada função é garantida pelo teorema

Weirstrass
Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é contínua então dado $\epsilon > 0$, existe uma função polinomial p_n de grau $n = n(\epsilon)$, tal que

$$|f(x) - p_n(x)| < \epsilon, \text{ para todo } x \in [a, b].$$



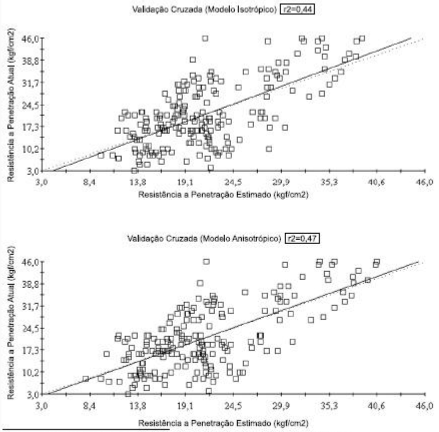


Figura 8 - Validação cruzada para o semivariograma isotrópico e anisotrópico, respectivamente

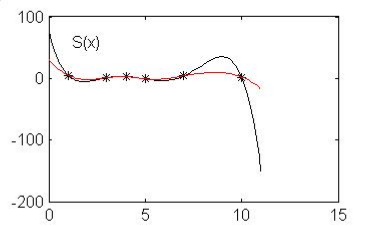
Interpolação Polinomial

Dados os pontos (x_i, f_i), $i = 0, \cdots, n$, vamos determinar o polinômio p_n tal que

$$f(x) \approx p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i.$$

Para isso, exigiremos que

$$p_n(x_i) = f(x_i), \text{ para todo } 0 \leq i \leq n$$



Note que

$$p_n(x_i) = f(x_i), \text{ para todo } 0 \leq i \leq n$$

implica em

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{pmatrix}$$

A matrix acima é conhecida como Matriz de Vandermonde.

Teorema
O determinante da matriz de Vandermonde é diferente de zero sempre que $x_i \neq x_j$ para todo $i \neq j$.

Prova:

Basta notar que o determinante da matriz de Vandermonde é dado por (Exercício)

$$\Delta = \prod_{i=0}^{n-1} \prod_{j=i+1}^{n} (x_i - x_j).$$

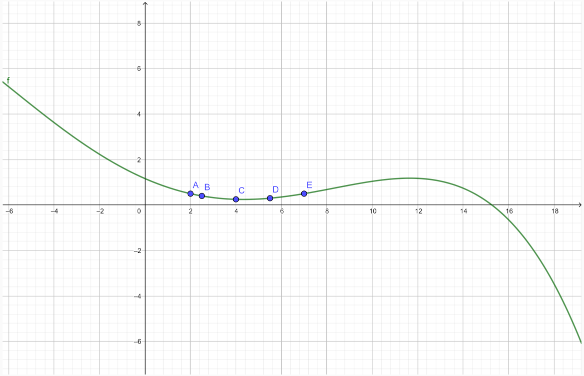
Consequência: Existe uma única interpolante polinomial de ordem n que aproxima $f(x)$ e satisfaz o critério

$$p_n(x_i) = f(x_i), \text{ para todo } 0 \leq i \leq n.$$

Interpolação Polinomial

Considere os pontos $A = (2, 0.5)$, $B = (2.5, 0.4)$, $C = (4, 0.25)$, $D = (5.5, 0.3)$ e $E = (7, 0.5)$. O polinômio que interpola esses pontos é

$$p(x) = -0.1763668e{-}3x^4 + 0.8818342e{-}3x^3 + 0.5119047e{-}1x^2 - .43567019x + 1.162345.$$



Exercício Implementar uma função que receba uma lista de pontos e determine os coeficientes do polinômio interpolante.

Exercício Use o exercício acima para fazer o gráfico do polinômio interpolante de um conjunto de pontos dados.

Polinômios de Lagrange

Sejam $(x_0, f_0), (x_1, f_1), \cdots, (x_n, f_n)$ um conjunto de pontos. Vamos considerar um polinômio $L_i(x)$ tal que

$$L_i(x_j) = 0 \text{ para } i \neq j \quad \text{e} \quad L_i(x_j) = 1 \text{ para } i = j.$$

Isto nos dará

$$f_i L_i(x_j) = 0 \text{ para } i \neq j \quad \text{e} \quad f_i L_i(x_j) = f_i \text{ para } i = j.$$

As considerações acima nos fornecerão o polinômio

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ i \neq j}}^{n-1} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}.$$

De onde obteremos

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f_i \; L_i(x) = \sum_{i=0}^{n} f_i \prod_{\substack{j=0 \\ i \neq j}}^{n-1} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}.$$

Exemplo: Vamos aproximar a função $f(x) = \log_{10} x$ no intervalo $[2, 3]$ por uma interpolação polinomial de Lagrange.

Considere os pontos (interpolação Linear):

$$x_0 = 2.0 \quad f_0 = 0.301$$
$$x_1 = 3.0 \quad f_1 = 0.477$$

Temos

$$\begin{aligned} L_0(x) &= \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} = \frac{x - 3.0}{2.0 - 3.0} \\ L_1(x) &= \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{x - 2.0}{3.0 - 2.0} \end{aligned}$$

Interpolação Polinomial - Polinômios de Lagrange

Portanto

$$\begin{aligned} p_1(x) &= L_0(x)f_0 + L_1(x)f_1 \\ &= \frac{x-3.0}{2.0-3.0}0.301 + \frac{x-2.0}{3.0-2.0}0.477. \end{aligned}$$

Assim,

$$p_1(2.4) = \frac{2.4-3.0}{2.0-3.0}0.301 + \frac{2.4-2.0}{3.0-2.0}0.477 = 0.371$$

Compare com o valor $\log_{10} 2.4 = 0.380$ com três algarismos significativos.

$$EA_x = |0.371 - 0.380| = 0.009$$

$$ER_x = \frac{0.009}{0.371} = 0.02425876 < 0.03$$

Exemplo: Seja agora a interpolação do exercício anterior com três pontos no intervalo $[2, 3]$. Considere os pontos:

$$\begin{aligned} x_0 &= 2.0 \quad f_0 = 0.301 \\ x_1 &= 2.5 \quad f_1 = 0.398 \\ x_2 &= 3.0 \quad f_2 = 0.477 \end{aligned}$$

Temos

$$\begin{aligned} L_0(x) &= \frac{(x-2.5)}{(2.0-2.5)}\frac{(x-3.0)}{(2.0-3.0)} \\ L_1(x) &= \frac{(x-2.0)}{(2.5-2.0)}\frac{(x-3.0)}{(2.5-3.0)} \\ L_2(x) &= \frac{(x-2.0)}{(3.0-2.0)}\frac{(x-2.5)}{(3.0-2.5)} \end{aligned}$$

Logo

$$p_2(x) = 0.301 L_0(x) + 0.398 L_1(x) + 0.477 L_2(x)$$

Portanto

$$\begin{aligned} p_2(2.4) &= \frac{(2.4-2.5)}{(2.0-2.5)}\frac{(2.4-3.0)}{(2.0-3.0)}0.301 \\ &+ \frac{(2.4-2.0)}{(2.5-2.0)}\frac{(2.4-3.0)}{(2.5-3.0)}0.398 \\ &+ \frac{(2.4-2.0)}{(3.0-2.0)}\frac{(2.4-2.5)}{(3.0-2.5)}0.477 \\ &= 0.380 \end{aligned}$$

Definição
Para todo $x_i \in [a, b]$ defina $\psi_n(x)$ como o polinômio

$$\psi_n(x) = \prod_{i=0}^{n}(x - x_i).$$

Definição
Considere a seguinte função auxilar $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}$ tal que

$$\phi(u) = f(u) - p_n(u) - F(x)\psi_n(u)$$

onde $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, que se deseja interpolar, $p_n(x)$ o polinômio interpolante e

$$F(x) = \frac{f(x) - p_n(x)}{\psi_n(x)}.$$

Teorema
Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua e $n+1$ vezes continuamente diferenciável em (a, b). Então, temos

$$f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\psi_n(x),$$

onde $p_n(x)$ é o polinômio de interpolação em $n+1$ pontos de $[a, b]$, (x_i, f_i) para $i = 0, \cdots, n$, $\xi \in [a, b]$.

Prova:

Vamos analisar a função ϕ. Note que

$$\phi(x_i) = f(x_i) - p_n(x_i) - F(x)\psi_n(x_i),$$

para todo $i = 0, \cdots, n$.

Interpolação Polinomial - Polinômios de Lagrange

Note que

$$\phi(x_i) = 0 \text{ para todo } i = 0, \cdots, n.$$

Logo $\phi(u)$ tem ao menos $n+1$ raízes distintas em $[a, b]$.

Note que, em particular,

$$\begin{aligned}
\phi(x) &= f(x) - p_n(x) - F(x)\psi_n(x) \\
&= f(x) - p_n(x) - \frac{f(x) - p_n(x)}{\psi_n(x)}\psi_n(x) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Logo, $\phi(u)$ tem ao menos $n+2$ raízes. Assim $\phi^{(n+1)}(u)$ tem ao menos uma raíz. Seja ξ tal raíz.

Note que

$$\phi^{(n+1)}(u) = f^{(n+1)}(u) - p_n^{(n+1)}(u) - \frac{f(x) - p_n(x)}{\psi_n(x)}\psi_n^{(n+1)}(u).$$

Agora, note que, se p_n é um polinômio de grau n então

$$p_n^{(n+1)}(u) = 0.$$

e

$$\psi_n^{(n+1)}(u) = (n+1)!. \text{ (Exercício)}$$

Assim, fazendo $u = \xi$

$$\phi^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - p_n^{(n+1)}(\xi) - \frac{f(x) - p_n(x)}{\psi_n(x)}\psi_n^{(n+1)}(\xi).$$

Segue, então que

$$0 = f^{(n+1)}(\xi) - 0 - \frac{f(x) - p_n(x)}{\psi_n(x)}(n+1)!$$

ou seja

$$f^{(n+1)}(\xi) - \frac{f(x) - p_n(x)}{\psi_n(x)}(n+1)! = 0$$

Portanto

$$f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\psi_n(x).$$

De onde segue o resultado.

Além disso,

$$\begin{aligned} |f(x) - p_n(x)| &= \left|\frac{f^{(n+1)}(\xi_n)}{(n+1)!}\right| |\psi_n(x)| \\ &\leq \frac{|\psi_n(x)|}{(n+1)!} \max_{y\in[a,b]}\{|f^{(n+1)}(y)|\} \end{aligned}$$

Exemplo:

Voltando ao primeiro exemplo, o erro na aproximação de $\log_{10} x$ por $p_1(x)$ é dado por

$$E_1(x) \leq \frac{|\psi_1(x)|}{2} \max_{y \in [2,3]} \{|f''(y)|\}$$

Ora,

$$\begin{aligned} \max_{y \in [2,3]} \{|f''(y)|\} &= 0.109 \\ \psi_1(2.4) &= (2.4 - 2.0)(2.4 - 3.0) \end{aligned}$$

Logo

$$E_1(2.4) \leq 0.0131.$$