黎曼几何中的梯度估计

个人科研竞赛成果展示

马骐

武汉大学 2020 级数学弘毅班

2022 年 6 月 15 日

竞赛成果

- 丘成桐大学生数学竞赛优胜奖
- 全国大学生数学竞赛湖北省第二名
- 国赛、美赛等若干建模比赛...

科研成果

- 微分几何读书报告
- 主持傅里叶分析讨论班

黎曼度量

对于一个 m 维黎曼流形 $(M, U, (u^1, u^2 \ldots, u^m))$，其上的度量 G 是一个二阶张量：

$$G = g_{ij}\ du^i \otimes du^j \quad g_{ij} = g_{ji}$$

给定度量后，我们可以对于切空间 TM 上的切向量定义内积:

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^j} \right\rangle = G(\frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^j}) = g_{ij}$$

如果黎曼度量 g_{ij} 是正定的，那么我们可以定义切向量 X 的“长度”为

$$|X| = \langle X, X\rangle^{\frac{1}{2}}$$

Levi-Civita 联络

黎曼流形上的函数或者任意切丛的 section，我们定义他们在流形上的“微分”为联络：$\nabla_X f$
由黎曼流形基本定理[1]知，任一黎曼流形上有唯一的无挠容许联络，我们称该联络为 Levi-Civita 联络，其满足如下条件：

$$X\langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle \tag{1}$$

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y] \tag{2}$$

其中 $[X, Y] = XY - YX$.
(1) 式和 (2) 式是非常重要的联络公式，将在后续证明中普遍使用。

[1]详见 Page133《微分几何讲义》(第二版), 陈省身著.

调和函数

我们称一个函数 f 是调和函数，如果其二阶连续可微且满足:

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = 0 \tag{3}$$

在" 平坦" 的欧氏空间中，调和函数具有诸如平均值公式等良好的性质。而在具有曲率的黎曼流形之中，由于定义了“微分”，即联络，同样存在调和函数。因此我们希望得出流形中调和函数的某些性质。
梯度估计揭示了流形上的调和函数的良好性质。丘成桐先生证明了正调和函数的梯度估计，本文对其证明做一个简略的概述，以及对梯度分析做一个简单的应用展望。

测地线

测地线直观上的理解就是流形上的" 直线", 其定义为切向量在其上" 平行移动" 的曲线, 测地线严格的数学定义是: 沿测地线的切向量的绝对微分为 0. 即倘若 $\gamma : [0,1] \to M$ 是流形 M 上的一条弧长参数曲线, 其切向量 $\dot{\gamma}(t)$, 那么测地线满足:

$$\nabla_{\dot{\gamma}(t)}\dot{\gamma}(t) = 0 \tag{4}$$

关于测地线的一些著名结论:

- 流形上两点之间的最短距离一定是某测地线
- 在一个充分小的邻域中, 任意两点之间的测地线是存在且唯一的。

Jacobi 场

Jacobi 场是定义在测地线上的特殊向量场，其来源于横截向量场的性质，这里不过多赘述，只叙述我们需要用到的性质：

$$\nabla_{\dot{\gamma}(t)}\nabla_{\dot{\gamma}(t)}U + R(\dot{\gamma}(t), U)\dot{\gamma}(t) = 0 \tag{5}$$

(5) 式是 U 作为 Jacobi 场的定义，其中 R 是曲率张量。Jacobi 场在 Morse 指标理论中有一个著名结论，是我们需要利用的，这里省去其证明：

Jacobi 场上的指标形式最小

曲率

两个切向量 X, Y 所张成的二维子空间 E 的截面曲率定义为：

$$\kappa(E) = \frac{\langle R(X,Y)X, Y\rangle}{|X|^2|Y|^2 - \langle X, Y\rangle^2} \tag{6}$$

沿单位切向量 X 的 Ricci 曲率则定义为

$$\langle Ric\ X, X\rangle = \langle R(e_i, X)e_i, X\rangle \tag{7}$$

进一步我们可以定义数量曲率

$$s = \langle Ric\ e_i, e_i\rangle \tag{8}$$

Hesse 形式

- 定义:

$$H(f)(X,Y)=\nabla^2 f(X,Y)=XY(f)-(\nabla_X Y)f \tag{9}$$

如此便定义了 f 的 Hesse 形式，进一步，我们可以定义 f 在流形上的 Laplace 算子:

- 定义:

$$\Delta f=\sum H(f)(e_i,e_i) \tag{10}$$

其中 e_i 是 M 上的单位正交向量场
容易验证，Δf 的值不受 e_i 选取的影响。

比较定理

- 比较定理:

若 M_1、M_2 是两个完备的 n 维 Riemann 流形。γ_i 是 M_i 上的弧长参数测地线。$\gamma_i : [0, a] \to M_i$. 记 ρ_i 是 M_i 上以 $\gamma_i(0)$ 为起点的距离函数。设 $\rho_i(a)$ 在 $\rho_i(0)$ 的割迹之内。且对任意 $0 \le t \le a$, 均有:

$$\text{截面曲率}\kappa_1(X_1, \dot{\gamma_1}) \ge \text{截面曲率}\kappa_2(X_2, \dot{\gamma_2}) \tag{11}$$

且其中 X_i 分别是 $T_{\gamma_i(t)}M_i$ 中的与 $\dot{\gamma_i}$ 相正交的单位切向量。那么有结论:

$$H(\rho_1)(X_1, X_1) \le H(\rho_2)(X_2, X_2) \tag{12}$$

证明思路简单介绍

- 将 X 扩充为测地线上的 Jacobi 场 $\tilde{X}$，使得: $[\tilde{X}, \dot{\gamma}] = 0$ 且 $\tilde{X}(\gamma(0)) = 0$
- 利用 Jaocobi 场的性质和 Levi-Civita 联络等公式化简 $H(\rho)(X, X) = \left\langle \tilde{X}, \nabla_{\dot{\gamma}} \tilde{X} \right\rangle$
- 注意 $H(0)(\tilde{X}, \tilde{X}) = 0$，将其视为关于 t 的函数，应用 N-L 公式:

$$
\begin{aligned}
H(\rho)(X, X) &= \int_0^\rho \frac{d}{dt} H(t)(\tilde{X}, \tilde{X}) dt \\
&= \int_0^\rho |\nabla_{\dot{\gamma}} \tilde{X}|^2 + \left\langle \tilde{X}, \nabla_{\dot{\gamma}} \nabla_{\dot{\gamma}} \tilde{X} \right\rangle dt \\
&= \int_0^\rho |\nabla_{\dot{\gamma}} \tilde{X}|^2 - \left\langle R(\tilde{X}, \dot{\gamma})\dot{\gamma}, \tilde{X} \right\rangle dt
\end{aligned}
$$

证明思路简单介绍

- 在 γ_1 上取切向量 Z，使得 Z 满足

$$|Z| = |\tilde{X}_2| \quad , \quad |\nabla_{\dot{\gamma}_2}\tilde{X}_2| = |\nabla_{\dot{\gamma}_1}Z|$$

事实上这很容易做到，取 E_1^i, E_2^i 分别是 γ_1, γ_2 上平行移动的正交单位切向量场，不妨设 $\dot{\gamma_1} = E_1^1, \dot{\gamma_2} = E_2^1$，注意到 $\tilde{X}_2$ 与 $\dot{\gamma_2}$ 相正交，不妨设

$$X_2 = \sum_{i=2}^{n} \lambda_i E_2^i$$

$$Z = \sum_{i=2}^{n} \lambda_i E_1^i$$

则如此定义的 Z 满足条件

证明思路简单介绍

- 利用 Jacobi 场的指标形式最小这一条件

$$
\begin{aligned}
H(\rho_1)(X_1, X_1) &\leq \int_0^a (|\nabla_{\dot\gamma_1} Z|^2 - \langle R(Z, \dot\gamma_1)\gamma_1, Z\rangle) dt \\
&\leq \int_0^a (|\nabla_{\dot\gamma_2} \tilde{X}_2|^2 - \left\langle R(\tilde{X}_2, \dot\gamma_2)\gamma_2, \tilde{X}_2 \right\rangle) dt \\
&= H(\rho_2)(X_2)(X_2)
\end{aligned}
$$

其中第二个不等式是由截面曲率的不等式条件导出，至此，我们证明了 Hesse 比较定理。

重要推论——Laplace 算子比较定理

若 n 维完备 Riemann 流形 M 满足 $Ric(M) \geq -(n-1)k^2$，N 是截面曲率恒为 $-k^2$ 的黎曼流形 (我们一般称之为空间形式)。记 ρ_M 和 ρ_N 分别是 M, N 上相对于某固定点的距离函数。则对 ρ_M 的可微点 x，如果 $\rho_M(x) = \rho_N(y)$，则有：

$$\Delta\rho_M(x) \leq \Delta\rho_N(y) \tag{13}$$

证明

注意到 $\Delta\rho_M(x) = \sum H(\rho)(e_i, e_i)$，利用 Hesse 比较定理即可。

Remark

空间形式中有: $\Delta\rho = (n-1)k\coth(k\rho) \leq \frac{n-1}{\rho}(1+k\rho)$

定理——梯度估计

设 M 是完备的 n 维 Riemann 流形 $(n \geq 2)$，
$Ric(M) \geq -(n-1)k^2$。u 是 M 上的正调和函数。则在任意测地球 $B_a(x)$ 中，

$$\frac{|\nabla u|}{u} \leq C_n\left(\frac{1 + a \cdot k}{a}\right) \tag{14}$$

其中 C_n 是只和 n 有关的常数。

证明思路简单介绍

- 不妨设 $p \in M$ 的法坐标为 x^i，则 $\Delta u = \sum u_{ii}$
- 由比较定理可知

$$\begin{aligned}\Delta\rho^2 &= 2\rho\Delta\rho + 2|\nabla\rho|^2 \le 2 + 2\rho\Delta\rho \\ &\le 2 + 2(n-1)(1+k\rho) \le C_n(1+k\rho)\end{aligned}$$

- 记 $\Phi = \frac{|\nabla u|}{u}$ 构造函数 $F(y) = (a^2 - \rho^2)\Phi(y)$，其中 $\rho(y) = dist(y, x)$。注意到 F 在 $\partial B_a(x)$ 上取 0。故 |F| 的极大值点在内部取到。
- 设 F 极大值点在 x_1 上取到。如果 x_1 不在割迹上，那么有：

$$\nabla F(x_1) = 0 \qquad \Delta F(x_1) \le 0 \tag{15}$$

证明思路简单介绍

- (15) 式等价于下列式子

$$\frac{\nabla\rho^2}{a^2-\rho^2}=\frac{\nabla\Phi}{\Phi} \tag{16}$$

$$-\frac{\Delta\rho^2}{a^2-\rho^2}+\frac{\Delta\Phi}{\Phi}-\frac{2\nabla\rho^2\cdot\nabla\Phi}{(a^2-\rho^2)\cdot\Phi}\leq 0 \tag{17}$$

- (16)(17) 式两者结合可得:

$$\frac{\Delta\Phi}{\Phi}-\frac{\Delta\rho^2}{a^2-\rho^2}-\frac{2|\nabla\rho^2|^2}{(a^2-\rho^2)^2}\leq 0 \tag{18}$$

- 我们对 (18) 式进一步操作，注意这些不等式均是在 x_1 点的估计，由于 x_1 点的选取，我们希望得到的是 $F(x_1) \leq C_n a(1+ka)$ 我们将不等式纳入 (18) 式得:(注意 $|\nabla \rho^2| = |2\rho\nabla\rho| = 2\rho$)

$$\frac{\Delta\Phi}{\Phi} - \frac{C_n(1+k\rho)}{a^2-\rho^2} - \frac{8\rho^2}{(a^2-\rho^2)^2} \leq 0 \tag{19}$$

- (19) 式仍然需要进一步的转换，我们自然地想对 $\Delta\Phi$ 做估计。注意到 $\Phi = \frac{|\nabla u|}{u}$，$u$ 是调和函数。
- (引理 1) $\Delta\Phi \geq -(n-1)k^2\Phi - (2-\frac{2}{n-1})\frac{\nabla\Phi\cdot\nabla u}{u} + \frac{1}{n-1}\Phi^3$ 这一" 神来之笔" 并非羚羊挂角无迹可寻，而是主动的去找这样一个三次函数放缩。

引理 1 的证明主要依靠分析的手段，为了保证证明的连续性，这里我们先略过。

- 将引理 1 代入 (19) 式并注意到 (16) 式 $\frac{\nabla\Phi}{\Phi}=\frac{\nabla\rho^2}{a^2-\rho^2}$。

$$-(n-1)k^2-(2-\frac{2}{n-1})\frac{2\rho}{a^2-\rho^2}\Phi+\frac{1}{n-1}\Phi^2$$
$$-\frac{C_n(1+k\rho)}{a^2-\rho^2}-\frac{8\rho^2}{(a^2-\rho^2)^2}\leq 0$$

该式虽然看起来复杂，但是最重要的是我们几乎已经把微分算子给" 扔掉了"，而且将 $(a^2-\rho^2)^2$ 乘上去之后可以得到一个关于 F 的二次函数不等式。
利用这个不等式做 F 的最大值估计。

- 对二次函数 F 经过非常粗糙的放缩可以得到:

$$\frac{1}{n-1}F^2 - 2C_1 aF - C_2(1+ka)^2 \cdot a^2 \leq 0 \qquad (20)$$

从这里可以得到 $F(x_1)$ 的估计

$$\begin{aligned} F(x_1) &\leq (n-1)[C_1 a + \sqrt{C_1^2 a^2 + \frac{C^2}{n-1}a^2(1+ka)^2}] \\ &\leq C_n a(1+ka) \end{aligned}$$

- 因为 $F(x)$ 在 x_1 处取最大值, 将 F 限制到 $B_{a/2}(x)$ 上有:

$$\sup_{B_{a/2}(x)} \frac{|\nabla u|}{u} \leq \frac{4}{3a^2} C_n a(1+ka)$$

即

$$\sup_{B_{a/2}(x)} \frac{|\nabla u|}{u} \leq C_n \frac{1+ka}{a} \qquad (21)$$

当 x_1 恰好位于 x 的割迹之中