que é uma equação linear de primeira ordem normal. Resolvemos agora esta equação em u, e exprimimos a solução geral de (2.21) como $y = u^{1/(1-n)}$. Finalmente, se $n < 0$, devemos acrescentar a solução $y \equiv 0$, "eliminada" ao passar de (2.21) a (2.22).

Por exemplo, para resolver

$$\frac{dy}{dx} + y = (xy)^2, \tag{2.23}$$

reescrevemos a equação como

$$y^{-2}\frac{dy}{dx} + y^{-1} = x^2$$

e fazemos a mudança de variável $u = y^{-1}$. Isto dá

$$-\frac{du}{dx} + u = x^2,$$

de onde resulta

$$ue^{-x} = -\int x^2e^{-x}\,dx + c = (2 + 2x + x^2)e^{-x} + c.$$

Portanto

$$u = 2 + 2x + x^2 + ce^x,$$

e as soluções de (2.23) são

$$y = (2 + 2x + x^2 + ce^x)^{-1}, \quad c \text{ arbitrário},$$

e $y = 0$.

exercícios

Ache a solução geral de cada uma das equações seguintes.

1. $xy' + 2y = 0$.
2. $(1 - x^2)y' - y = 0$.
3. $(\operatorname{sen} x)y' + (\cos x)y = 0$.
4. $3y' + ky = 0$, k uma constante.
5. $2y' + 3y = e^{-x}$.
6. $3xy' - y = \ln x + 1$.
7. $L\dfrac{di}{dt} + Ri = E$, L, R, E constantes, $L, R \neq 0$.
8. $(3x^2 + 1)y' - 2xy = 6x$.
9. $(x^2 + 1)y' - (1 - x)^2y = xe^{-x}$.
10. $(x^2 + 1)y' + xy = (1 - 2x)\sqrt{x^2 + 1}$.
11. $x \operatorname{sen} x\dfrac{dy}{dx} + (\operatorname{sen} x + x\cos x)y = xe^x$.
12. $x\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{y}{\sqrt{2x + 1}} = 1 + \sqrt{2x + 1}$.
13. $x\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{y}{\sqrt{1 - x^2}} = (1 + \sqrt{1 - x^2})e^x$.

14. $\operatorname{sen} x \cos x\dfrac{dy}{dx} + y = \operatorname{tg}^2 x$.
15. $(1 + \operatorname{sen} x)\dfrac{dy}{dx} + (2\cos x)y = \operatorname{tg} x$.
16. $2(1 - x^2)y' - (1 - x^2)y = xy^3e^{-x}$.
17. $y' = \dfrac{y^2 \operatorname{sen} x - y\cos^2 x}{\operatorname{sen} x \cos x}$.
18. $yy' + xy^2 - x = 0$.
19. $(x^2 + 1)\sqrt{y}\,y' = xe^{3x/2} + (1 - x)^2y\sqrt{y}$.
20. $(x^2 + x + 1)yy' + (2x + 1)y^2 = 2x - 1$.
21. $xy' + \dfrac{y}{\ln x} = \dfrac{x(x + \ln x)}{y^2 \ln x}$.
22. $\dfrac{\operatorname{sen} 2x}{6}y' + y = (1 + \cos x)y^{2/3}$.

*23. $(x - 1)y' - 2y = \sqrt{(x^2 - 1)y}$.

24. $y' = \dfrac{(x + 1)\ln x - x(3x + 4)y^3}{(x^3 + 2x^2 - 1)y^2}$.
25. $(xy^2)' = (xy)^3(x^2 + 1)$.
26. Ache a solução particular da equação $xy' - (\operatorname{sen} x)y = 0$ no intervalo $(0, \infty)$ que passa pelo ponto $(1, -1)$. [*Sugestão*: mostre que a solução geral desta equação em $(0, \infty)$ pode ser escrita na forma
$$y = ce^{\int_1^x [(\operatorname{sen} t)/t]\,dt}, x > 0.]$$
27. (a) Ache a curva-solução da equação
$$x\frac{dy}{dx} + y = e^{-x^2/2}$$
que passa pelo ponto $(2, -3)$. *Sugestão*: ache a solução geral e mostre que pode ser escrita na forma
$$y = \frac{c}{x} + \frac{1}{x}\int_2^x e^{-x^2/2}\,dx.$$
(b) Qual é a ordenada do ponto da curva-solução achada em (a) correspondendo ao ponto $x = 1$? (Consulte uma tabela de valores para $(1/\sqrt{2\pi})\int_{-\infty}^x e^{-t^2/2}\,dt$.) Ache a inclinação da curva-solução nesse ponto.

Equação de Riccatti. Toda equação diferencial de primeira ordem da forma
$$\frac{dy}{dx} + a_2(x)y^2 + a_1(x)y + a_0(x) = 0, \tag{2.24}$$
em que $a_0(x)$, $a_1(x)$, $a_2(x)$ são contínuas num intervalo I e $a_2(x) \not\equiv 0$ em I, chama-se uma *equação de Riccatti*. Nos exercícios seguintes apresentamos uma série de fatos elementares relativos às soluções de tais equações.

28. Seja $y_1(x)$ uma solução particular de (2.24). Faça a mudança de variável $y = y_1 + 1/z$ para reduzir (2.24) a uma equação *linear* de primeira ordem em z, e deduza daí que a solução geral de uma equação de Riccatti pode ser achada desde que se conheça uma solução particular.

Use a técnica sugerida no exercício precedente para achar a solução geral de cada uma das seguintes equações de Riccatti.

29. $y' - xy^2 + (2x-1)y = x - 1$; solução particular $y = 1$.
30. $y' + xy^2 - 2x^2y + x^3 = x + 1$; solução particular $y = x - 1$.
31. $2y' - (y/x)^2 - 1 = 0$; solução particular $y = x$.
32. $y' + y^2 - (1 + 2e^x)y + e^{2x} = 0$; solução particular $y = e^x$.
33. $y' - (\operatorname{sen}^2 x)y^2 + \dfrac{1}{\operatorname{sen} x \cos x}y + \cos^2 x = 0$; solução particular $y = \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$.
34. (a) Sejam $y_1(x)$ e $y_2(x)$ duas soluções particulares da Eq. (2.24). Mostre que a solução geral da equação é

$$\frac{y-y_1}{y-y_2} = ce^{\int a_2(x)(y_2-y_1)\,dx},$$

c uma constante arbitrária. *Sugestão:* considere a expressão

$$\frac{y'-y_1'}{y-y_1} - \frac{y'-y_2'}{y-y_2}.$$

(b) Sejam $y_1(x)$, $y_2(x)$ e $y_3(x)$ soluções particulares distintas da Eq. (2.24). Use o resultado estabelecido em (a) para provar que a solução geral da equação é

$$\frac{(y-y_1)(y_3-y_2)}{(y-y_2)(y_3-y_1)} = c,$$

c uma constante arbitrária.

35. (a) Mostre que uma equação de Riccati a coeficientes constantes

$$\frac{dy}{dx} + ay^2 + by + c = 0$$

tem uma solução da forma $y = m$, m uma constante, se e só se m é raiz da equação quadrática $\boxed{am^2 + bm + c = 0.}$

(b) Use este resultado, junto com o Exer. 28 ou Exer. 34(a), como convier, para achar a solução geral de cada uma das equações de Riccati seguintes:

(i) $y' + y^2 + 3y + 2 = 0$ (ii) $y' + 4y^2 - 9 = 0$
(iii) $y' + y^2 - 2y + 1 = 0$ (iv) $6y' + 6y^2 + y - 1 = 0$

36. (a) Prove que a mudança de variável $v = y'/y$ reduz a equação diferencial linear homogênea de segunda ordem

$$y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \qquad (2.25a)$$

à equação de Riccati

$$v' + v^2 + a_1(x)v + a_0(x) = 0 \qquad (2.25b)$$

e daí conclua que o problema de resolver (2.25a) é equivalente ao de resolver o par simultâneo de equações de primeira ordem

$$\frac{dy}{dx} = vy, \qquad \frac{dv}{dx} = -v^2 - a_1(x)v - a_0(x). \qquad (2.25c)$$

[A equação (2.25b) chama-se a equação de Riccati *associada à* equação (2.25a).]

(b) Que condições deve impor a (2.25c) para corresponder às condições $y(0) = y_0$, $y'(0) = y_1$ em (2.25a)?

(c) Prove que toda equação de Riccati (2.24) em que $a_2(x) \neq 0$ pode ser transformada numa equação diferencial linear homogênea de segunda ordem fazendo a mudança de variável $y = v'/(a_2 v)$.

37. Ache a equação de Riccati associada a $y'' - y = 0$. Resolva esta equação e daí ache a solução geral de $y'' - y = 0$.
38. Prove que sempre que m_1 e m_2 sejam raízes reais distintas da equação quadrática

$$am^2 + bm + c = 0, \quad a,\ b,\ c \text{ constantes}$$

então e^{m_1x} e e^{m_2x} são soluções linearmente independentes em $\mathscr{C}(-\infty, \infty)$ da equação diferencial linear homogênea de segunda ordem

$$ay'' + by' + cy = 0.$$

(Ver Exer. 35(a) e 36(a).)

39. Use o resultado do exercício precedente para achar a solução geral de cada uma das equações diferenciais lineares de segunda ordem seguintes

(a) $y'' - 5y' + 6y = 0$, (b) $2y'' + y' - 3y = 0$,
(c) $(D + 1)(D - 2)y = 0$, (d) $(12D^2 - D - 20)y = 0$,
(e) $(2D^2 - 3)y = 0$.

40. Prove que e^{mx} e xe^{mx} são soluções linearmente independentes em $\mathscr{C}(-\infty, \infty)$ da equação diferencial linear homogênea de segunda ordem.

$$y'' - 2my' + m^2y = 0,$$

m sendo uma constante.

41. Use o resultado do exercício precedente para achar a solução geral de cada uma das seguintes equações diferenciais lineares de segunda ordem.

(a) $y'' + 2y' + y = 0$, (b) $4y'' - 12y' + 9y = 0$,
(c) $(D - \frac{3}{2})^2 y = 0$, (d) $(36D^2 - 12D + 1)y = 0$,
(e) $(2D^2 - 2\sqrt{2}\,D + 1)y = 0$.

2.4. existência e unicidade de soluções; problemas de valor inicial

Na seção precedente vimos que toda equação diferencial linear de primeira ordem da forma $y' + p(x)y = q(x)$ definida num intervalo I tem soluções em I. Na verdade, tem infinitas soluções, uma para cada valor de c na expressão

$$y = \left[c + \int q(x)e^{\int p(x)\,dx}\,dx\right]e^{-\int p(x)\,dx}. \qquad (2.26)$$