Solução Numérica de Equações Diferenciais

Márcio Antônio de Andrade Bortoloti

Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas - DCET
Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia - UESB

Cálculo Numérico

Sumário

Solução por meio de Técnicas de Integração Numérica

Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y' = f(t, y) & \text{em } [a, b] \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Vamos integrar os dois lados do PVI acima

$$\int_{t_n}^{t_{n+k}} y'(t)\, dt = \int_{t_n}^{t_{n+k}} f(t, y(t))\, dt$$

Desde que o lado esquerdo pode ser integrado exatamente, obtemos

$$y(t_{n+k}) - y(t_n) = \int_{t_n}^{t_{n+k}} f(t, y(t))\, dt$$

para quaisquer pontos $t_n, t_{n+k} \in [a, b]$. Assim, para diferentes valores de k após aproximar a integral do lado direito, usando fórmulas de integração numérica adequadas, obtemos diferentes métodos lineares de passo múltiplo.

Método do Trapézio

O Método da Regra do Trapézio, para solução numérica do PVI é obtido fazendo $k = 1$ em

$$y(t_{n+k}) - y(t_n) = \int_{t_n}^{t_{n+k}} f(t, y(t))\, dt.$$

Assim podemos aplicar a Regra do Trapézio na fórmula acima e obter

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + \frac{h}{2}[f(t_n, y(t_n)) + f(t_{n+1}, y(t_{n+1}))].$$

Escrevendo de outra forma

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(f_n + f_{n+1})$$

Método de Simpson

Como no caso anterior, fazendo $k = 2$ em

$$y(t_{n+k}) - y(t_n) = \int_{t_n}^{t_{n+k}} f(t, y(t))\, dt.$$

obtemos

$$y(t_{n+2}) - y(t_n) = \int_{t_n}^{t_{n+2}} f(t, y(t))\, dt.$$

Utilzando a Regra de Simpson para a integração, teremos

$$y(t_{n+2}) = y(t_n) + \frac{h}{3}[f(t_n, y(t_n)) + 4f(t_{n+1}, y(t_{n+1})) + f(t_{n+2}, y(t_{n+2}))]$$

ou

$$y_{n+2} = y_n + \frac{h}{3}\Big[f_n + 4f_{n+1} + f_{n+2}\Big].$$

Este é chamado Método de Simpson e é classificado como um método 2-passos.

Método de Simpson

Observação: De

$$y_{n+2} = y_n + \frac{h}{3}\Big[f_n + 4f_{n+1} + f_{n+2}\Big].$$

- Observa-se que para utilizar este método é necessária a utilização de métodos preditores-corretores, pois precisa-se obter valores iniciais por métodos de 1-passo, pois para $n = 0$ vê-se a necessidade da utilização do valor de y_1. (y_0 já é dado pela condição inicial).

Uma Solução Iterativa para o Método do Trapézio

Vamos usar o método de Euler para gerar chutes iniciais para y_{n+1}.

$$y_{n+1}^{(j+1)} = y_n + \frac{h}{2}\left[f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y_{n+1}^{(j)})\right], \quad j = 0, 1, \cdots$$

Função Trapézio

```julia
function trapezio1(f,ci,dt,tf,ϵ)

    (t,yi) = euler(f,ci,dt,tf)

    y = Float64[]
    push!(y,ci[2])

    n = size(t,1)

    for i in 1 : n - 1
        j = 0
        yant = yi[i]
        while true
            newy = y[end] + 0.5 * dt * (f(t[i],y[end]) + f(t[i+1],yant))
            if abs(newy - yant) < ϵ
                push!(y,newy)
                break
            else
                yant = newy
                j += 1
            end
        end
    end

    return(t,y)
end
```

Exemplo

Resolver o problema de valor inicial $\dot{y} = -y^2$, no intervalo $[0, 5]$ com $y(0) = 1$. Considerando $\Delta t = 0.5$ e $\epsilon = 10^{-8}$, obtemos o gráfico abaixo. A solução exata para o problema é $y(t) = 1/(1 + t)$.