Dimensão do Espaço Solução

Teorema: Seja L um operador diferencial linear normal de ordem n definido em um intervalo I, e seja $x_0 \in I$. Então, se

$$y_0, y_1, \ldots, y_{n-1} \in \mathbb{R}$$

são arbitrários, o PVI

$$\begin{cases} Ly = h \\ y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \end{cases}$$

tem uma única solução.

Teorema: O espaço de soluções de qualquer equação diferencial linear homogênea normal de ordem n

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + \cdots + a_0(x)y = 0$$

definida em um intervalo I é um subespaço de dimensão n de $\mathcal{C}^n(I)$.

Prova:

Seja $x_0 \in I$. Sabemos que a equação admite soluções

$$y_1(x), \ldots, y_n(x)$$

satisfazendo as seguintes condições iniciais:

$$y_1(x_0) = 1,\ y_1'(x_0) = 0,\ \cdots,\ y_1^{(n-1)}(x_0) = 0$$
$$y_2(x_0) = 0,\ y_2'(x_0) = 1,\ \cdots,\ y_2^{(n-1)}(x_0) = 0$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$y_n(x_0) = 0,\ y_n'(x_0) = 0,\ \cdots,\ y_n^{(n-1)}(x_0) = 1$$

Vamos mostrar que $\{y_1(x), \cdots, y_n(x)\}$ é uma base para o espaço solução.

Suponha que $c_1, \cdots, c_n \in \mathbb{R}$ tais que
$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x) = 0.$$

Temos
$$\begin{aligned} c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x) &= 0 \\ c_1 y_1'(x) + c_2 y_2'(x) + \cdots + c_n y_n'(x) &= 0 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad &\vdots \\ c_1 y_1^{(n-1)}(x) + c_2 y_2^{(n-1)}(x) + \cdots + c_n y_n^{(n-1)}(x) &= 0 \end{aligned}$$

Tomando $x = x_0$, temos
$$\begin{aligned} c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) + \cdots + c_n y_n(x_0) &= 0 \\ c_1 y_1'(x_0) + c_2 y_2'(x_0) + \cdots + c_n y_n'(x_0) &= 0 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad &\vdots \\ c_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + c_2 y_2^{(n-1)}(x_0) + \cdots + c_n y_n^{(n-1)}(x_0) &= 0 \end{aligned}$$

Daí segue que
$$c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0.$$

Agora, vamos mostrar que toda solução da equação

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + \cdots + a_0(x)y = 0$$

pode ser escrita como combinação linear de

$$y_1(x), \cdots, y_n(x).$$

Seja y uma solução qualquer da equação diferencial. Temos

$$y(x_0) = a_0,\ y'(x_0) = a_1, \cdots, y^{(n-1)}(x_0) = a_{n-1}.$$

Isto é, y é solução do P.V.I. Mas nota-se que

$$y(x) = a_0\, y_1(x) + a_1 y_2(x) + \cdots + a_{n-1}\, y_n(x)$$

também é solução do PVI. Segue que $y_1(x), \cdots, y_n(x)$ geram o espaço solução.

<u>Exemplo</u>: As funções

$$y_1(x) = e^{x} \quad e \quad y_2(x) = e^{-x}$$

são soluções da equação

$$y'' - y = 0.$$

Além disso o espaço solução tem dimensão 2.

De fato, temos

$$y_1'' - y_1 = e^x - e^x = 0.$$

$$y_2'' - y_2 = e^{-x} - e^{-x} = 0$$

Vamos mostrar que $S = \{e^x, e^{-x}\}$ é uma base para o espaço solução da equação diferencial.

(i) S é L.I.

$$\begin{cases} \alpha_1 e^x + \alpha_2 e^{-x} = 0 \\ \alpha_1 e^x - \alpha_2 e^{-x} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{bmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$\det \begin{bmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{bmatrix} = -e^x e^{-x} - e^x e^{-x} = -2 \neq 0.$$

Logo a matriz é inversível e consequentemente $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.

<u>Definição</u>: Sejam $y_1, \dots, y_n \in C^{n-1}(I)$ e para $x \in I$ defina

$$W[y_1, \dots, y_n] = \det \begin{bmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \vdots & & & \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{bmatrix}.$$

A função W acima é chamado de wronskiano de $y_1, \cdots, y_n$.

Teorema: As funções $y_1, \cdots, y_n$ são L.I em $C^{n-1}(I)$, sempre que o wronskiano não seja identicamente nulo em I.

Atenção: A recíproca do Teorema é falsa.

Considere as funções x^3, $|x|^3$. Temos

$$a x^3 + b |x|^3 = 0.$$

Para $x = 1$ e $x = -1$ obtemos

$$\begin{matrix} a + b = 0 \\ -a + b = 0 \end{matrix} \Rightarrow a = b = 0.$$

Contudo,

$$W[x^3, |x|^3] = 0.$$

Note que:

* para $x \geq 0$ temos $|x|^3 = x^3$. Logo

$$W[x^3, |x|^3] = 0$$

* para $x < 0$ temos $|x|^3 = -x^3$. Logo

$$W[x^3, |x|^3] = 0.$$

<u>Teorema</u>: Sejam $y_1, \dots, y_n$ soluções da equação

$$a_n(x)\, y^{(n)} + \cdots + a_0(x)\, y = 0$$

em I e suponha que $W[y_1, \dots, y_n] = 0$. Então $\{y_1, \dots, y_n\}$ é L.D. em $\mathcal{C}(I)$.

<u>Prova</u>:

Para $x_0 \in I$ temos

$$\begin{cases} c_1\, y_1(x_0) + \cdots + c_n\, y_n(x_0) = 0 \\ c_1\, y_1'(x_0) + \cdots + c_n\, y_n'(x_0) = 0 \\ \vdots \\ c_1\, y_1^{(n-1)}(x_0) + \cdots + c_n\, y_n^{(n-1)}(x_0) = 0 \end{cases}$$

ou

$$\begin{bmatrix} y_1(x_0) & \cdots & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0) & \cdots & y_n'(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Como $W[y_1, \dots, y_n] = 0$ o determinante da matriz acima é nulo e o sistema acima tem uma solução não trivial.

$y = \sum c_i y_i$ com condições iniciais

$$y(x_0) = y'(x_0) = \cdots = y^{(n-1)}(x_0) = 0.$$

Por outro lado a função nula também é solução do PVI.

Como a solução do PVI é única temos que ter

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i \, y_i(x) = 0 .$$

Como algum c_i não é nulo segue que

$$\{y_1, \dots, y_n\} \text{ é L.D.}$$

Teorema: Um conjunto de n soluções de uma equação diferencial linear homogênea de ordem n é L.I em $\mathcal{C}(I)$ se e somente se seu wronskiano nunca se anula em I.

Teorema (Abel): Sejam $y_1, \dots, y_n$ soluções em I de

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)\, y^{(n-1)} + \dots + a_0(x)\, y = 0 .$$

Então

$$w[y_1, \dots, y_n] = c \exp\left(- \int a_{n-1}(x)\, dx \right)$$

Prova:

(Caso $n=2$)

Temos

$$w[y_1, y_2] = y_1 y_2' - y_1' y_2 .$$

Logo

$$w'[y_1, y_2] = y_1' y_2' + y_1 y_2'' - y_1'' y_2 - y_1' y_2'$$

$$= y_1 y_2'' - y_1'' y_2 .$$

Como y_1 e y_2 são soluções de

$$y'' + a_1(x) y' + a_2(x) y = 0$$

temos

$$y_1'' = -a_1(x) y_1' - a_2(x) y_1$$

e

$$y_2'' = -a_1(x) y_2' - a_2(x) y_2$$

Assim,

$$W'[y_1, y_2] = y_1 y_2'' - y_1'' y_2$$

$$= y_1\left(-a_1(x) y_2' - \cancel{a_2(x) y_2}\right) - y_2\left(-a_1(x) y_1' - \cancel{a_2(x) y_1}\right)$$

$$= -a_1(x)\left(y_2' y_1 - y_1' y_2\right)$$

$$= -a_1(x)\, W[y_1, y_2].$$

Logo

$$W' + a_1(x) W = 0.$$

Temos então

$$W = c \exp\left[-\int a_1(x)\, dx\right], \quad c = \text{cte}.$$