

2024.12.26最优化考题

一、填空题

- (1) 序列 $x^{(k)} = (0.5)^{2^k}$ 的收敛速度为_____。
- (2) 已知 $x \in \mathbb{R}^2$, 有二次函数 $f(x) = \frac{1}{2}x^T Gx + b^T x + c$ 。请绘制出当 G 为正定矩阵、半正定矩阵、负定矩阵和不定矩阵时, $f(x)$ 大致的函数图像。
- (3) 写出 x^* 是 $f(x)$ 最小值点的一阶必要条件和二阶必要条件;
- (4) 写出Newton法的三个缺点
- (5) 简述信赖域方法的原理
- (6) 使用_____线搜索准则的 DFP 方法和 BFGS 方法, 可以保证 B_{k+1} 、 H_{k+1} 的对称正定性。
- (7) 设 G 是对称正定矩阵, 若非零向量组 $\{d_0, d_1, \dots, d_l\}$ 满足 $d_i^T G d_j = 0, i \neq j$, 则称这个非零向量组是矩阵 G 的共轭方向。矩阵 G 的特征向量是共轭方向吗? _____。共轭方向一定为特征向量方向吗? _____。矩阵 G 的共轭方向有多少组? _____。
- (9) 带约束的 N 维优化问题, 在任意点上最多有_____个约束条件起作用。

(还有两个题想不起来了)

二、证明题

1. f 凸函数 $\iff \text{epi}(f)$ 是凸集.
2. 证明非凸优化问题 $\min f(x) = \max_{1 \leq i \leq K} x_i + \frac{1}{2}\|x\|^2, K \in [1, N]$ 的最优解 $x^* \in \mathbb{R}^n$ 处有 $f(x^*) = -\frac{1}{2K}$
3. 证明Kantorovich不等式.

三、计算题

1. 手算一个 \mathbb{R}^2 的正定二次函数在线性共轭梯度法下的迭代过程。(迭代两步就到最优点)
2. 倒数障碍罚函数, 令 $\mu \rightarrow 0$, 看倒数障碍反函数的最优解收敛到原优化问题的最优解

(3) 采用基于 KKT 的方法, 求解如下带约束的优化问题

$$\min x_1^2 + x_2^2$$

$$\text{s.t. } x_1 + x_2 = 1, \quad x_2 \leq \alpha,$$

3. 其中 $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, α 为实数。