Econometria I

Lista de Exercícios 1 (Gabarito)

PIMES/UFPE

Problemas conceituais

1. A resposta a estas questões podem ser encontradas no Greene, cap. 2 (8a edição)
   a. Greene, pag. 20
   b. Greene, pag. 17
   c. Greene, pag. 22
   d. Greene, pag. 23
   e. Greene, pag. 25
2. A resposta a esta questão pode ser encontrada no Greene, cap.3 (8a edição), pag. 29.
3. a. Mostre que este modelo pode ser escrito equivalentemente em forma matricial como $\mathbf{y} = \mathbf{X}\beta + \varepsilon$.
   b.

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{b} &= \left(\boldsymbol{X'X}\right)^{-1}\boldsymbol{X'y} \\
&= \left(\begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_N \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_N \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_N \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n x_i^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n y_i \\ \sum_{i=1}^n x_i y_i \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{n\sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n x_i^2 & -\sum_{i=1}^n x_i \\ -\sum_{i=1}^n x_i & n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n y_i \\ \sum_{i=1}^n x_i y_i \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{n\sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n y_i \sum_{i=1}^n x_i^2 - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ -\sum_{i=1}^n y_i \sum_{i=1}^n x_i + n\sum_{i=1}^n x_i y_i \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Então, a estimativa do parâmetro β é dado por

$$
\frac{n\sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{n\sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i y_i - \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n y_i\right)}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i\right)^2}
$$

A estimativa do parâmetro α é dado por

$$
\begin{aligned}
&\frac{\sum_{i=1}^n y_i \sum_{i=1}^n x_i^2 - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n x_i y_i}{n\sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2} \\
&= \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n y_i \left(n\sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1^n x_i})^2\right) + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n y_i (\sum_{i=1}^n x_i)^2 - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n x_i y_i}{n\sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2} \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n y_i - \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i y_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n y_i (\sum_{i=1}^n x_i)^2}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i^2 - (\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i)^2} \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n y_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i y_i - \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n y_i\right)}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i\right)^2} \\
&= \bar{y} - b\bar{x}
\end{aligned}
$$

4. A resposta a esta questão pode ser encontrada no Greene, cap.3 (8a edição), pag. 36.

5. Na regressão $\mathbf{y}$ em $\mathbf{i}$ e $\mathbf{X}$, os coeficientes de $\mathbf{X}$ são $\mathbf{b} = (\mathbf{X'M^0X})^{-1}\mathbf{X'M^0y}$. $\mathbf{M}^0 = \mathbf{I} - \mathbf{i}(\mathbf{i'i})^{-1}\mathbf{i'}$ é a matriz que transforma as observações em desvios em relação à média das colunas. Como $\mathbf{M}^0$ é idempotente e simétrica, podemos escrever a equação anterior como $[(\mathbf{X'M^{0\prime}})(\mathbf{M^0X})]^{-1}(\mathbf{X'M^{0\prime}})(\mathbf{M^0y})$, o que implica que a regressão de $\mathbf{M^0y}$ em M^0X produz

os coeficientes de inclinação por mínimos quadrados. Caso somente $\mathbf{X}$ seja transformado em desvios, teríamos $[(\mathbf{X}'\mathbf{M^0}')(\mathbf{M^0X})]^{-1}(\mathbf{X}'\mathbf{M^0}')\mathbf{y}$ mas, obviamente, é idêntico ao caso anterior. Entretanto, caso somente $\mathbf{y}$ seja transformado, o resultado é $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{M^0y}$, o qual é muito provavelmente diferente.

6. a.

$$
\begin{aligned}
TSS &= \sum_{i=1}(y_i - \bar{y})^2 \\
&= \sum_{i=1}^{N}(y_i - \hat{y}_i + \hat{y}_i - \bar{y})^2 \\
&= \sum_{i=1}^{N}(y_i - \hat{y}_i)^2 + \sum_{i=1}^{N}(y_i - \bar{y})^2 + 2\sum_{i=1}^{N}(e_i)(\hat{y}_i - \bar{y}) \\
&= \sum_{i=1}^{N}(y_i - \hat{y}_i)^2 + \sum_{i=1}^{N}(y_i - \bar{y})^2 - 2\bar{y}\Big(\sum_{i=1}^{N}(e_i)\Big) + 2\sum_{i=1} e_i\hat{y}_i \\
&= \sum_{i=1}^{N}(y_i - \hat{y}_i)^2 + \sum_{i=1}^{N}(y_i - \bar{y})^2 - 2\bar{y}\Big(\sum_{i=1}^{N}(e_i)\Big) + 2\sum_{i=1} e_i x_i'\beta \\
&= \sum_{i=1}^{N}(y_i - \hat{y}_i)^2 + \sum_{i=1}^{N}(y_i - \bar{y})^2
\end{aligned}
$$

b. A resposta a esta questão pode ser encontrada no Greene, cap.3 (8a edição), pag. 45.

Problemas práticos

1. Com base nos dados fornecidos, as quantidades solicitadas são

a. $\mathbf{X}'\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 4 & 14 & 21 \\ 14 & 70 & 72 \\ 21 & 72 & 137 \end{bmatrix}$

b. $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} = \begin{bmatrix} 1.9687221 & -0.181411975 & -0.206434316 \\ -0.1814120 & 0.047810545 & 0.002680965 \\ -0.2064343 & 0.002680965 & 0.037533512 \end{bmatrix}$

c. $\mathbf{b} = \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 0.92046470 \\ 1.33869526 \\ 0.07506702 \end{bmatrix}$

d. $\mathbf{e} = \begin{bmatrix} -0.4253798 \\ 0.2582663 \\ -0.2734584 \\ 0.4405719 \end{bmatrix}$

e. $\hat{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} 6.425380 \\ 10.741734 \\ 4.273458 \\ 2.559428 \end{bmatrix}$

f. $\mathbf{M} = \mathbf{I} - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}' = \begin{bmatrix} 0.3503128 & -0.2126899 & 0.2252011 & -0.3628239 \\ -0.2126899 & 0.1291332 & -0.1367292 & 0.2202860 \\ 0.2252011 & -0.1367292 & 0.1447721 & -0.2332440 \\ 0.3628239 & 0.2202860 & -0.2332440 & 0.3757819 \end{bmatrix}$

g. $\mathbf{My} = \begin{bmatrix} -0.4253798 \\ 0.2582663 \\ -0.2734584 \\ 0.4405719 \end{bmatrix}$

h. $\mathbf{P} = \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}' = \begin{bmatrix} 0.6496872 & 0.2126899 & -0.2252011 & 0.3628239 \\ 0.2126899 & 0.8708668 & 0.1367292 & -0.2202860 \\ -0.2252011 & 0.1367292 & 0.8552279 & 0.2332440 \\ 0.3628239 & -0.2202860 & 0.2332440 & 0.6242181 \end{bmatrix}$

i. $\mathbf{Py} = \begin{bmatrix} 6.425380 \\ 10.741734 \\ 4.273458 \\ 2.559428 \end{bmatrix}$

2. Com a partição sendo $\mathbf{M}_1 = \mathbf{M}^0$, temos

a. $\mathbf{M}_1\mathbf{y} = \mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}$

b. $\mathbf{y}'\mathbf{M}_1\mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2 = 0^2 + 5^2 + (-2)^2 + (-3)^2 = 38$

c. $R^2 = 1 - \frac{\mathbf{e}'\mathbf{e}}{\mathbf{y}'\mathbf{M}^0\mathbf{y}} = 1 - \frac{0.5165326}{38} = 0.01359296\}$