Logo, a solução geral da equação dada é

$$y = x^2\left(c - \frac{1}{x}\right), \quad x \neq 0.$$

Teoricamente, o método de resolver uma equação diferencial normal de primeira ordem achando um fator integrante é muito geral pois pode-se mostrar que toda equação da forma $M\,dx + N\,dy = 0$, cujos coeficientes são continuamente diferenciáveis numa região simplesmente conexa do plano, possui um fator integrante. Na verdade tem uma infinidade deles e, conhecido um, todos eles podem ser achados sem muita dificuldade (ver Exers. 48 e 49 abaixo). Infelizmente não existe uma técnica pela qual mesmo um só fator integrante possa ser achado para uma equação diferencial arbitrária, e pouco se pode fazer além de discursar sobre a eficácia da experiência e de insistir com o estudante para que se familiarize com as diferenciais encontradas no cálculo elementar. Em alguns dos exercícios a seguir damos fórmulas para achar fatores integrantes em certos casos especiais, mas quase todos estes resultados são, na melhor das hipóteses, de utilidade limitada.

exercícios

Mostre que cada uma das equações seguintes é exata e ache sua integral geral.

1. $2xy\,dx + (x^2 + 4y)\,dy = 0$
2. $y(y^2 - 3x^2)\,dx + x(3y^2 - x^2)\,dy = 0$
3. $(3x^2 + 6xy - y^2)\,dx + (3x^2 - 2xy + 3y^2)\,dy = 0$
4. $(5x^4 - 9x^2y^2 + 5y^4)dx + 2xy(10y^2 - 3x^2)dy = 0$
5. $\dfrac{y\,dx - x\,dy}{(x+y)^2} + \dfrac{1}{y}\,dy = 0$ 6. $x^2\,dx + y^2\,dy + \dfrac{y\,dx - x\,dy}{x^2 + y^2} = 0$
7. $\dfrac{y\,dx - x\,dy}{xy} + \dfrac{x\,dy + y\,dx}{\sqrt{1 + (xy)^2}} = 0$ 8. $[1 + \ln(xy)]\,dx + \left(1 + \dfrac{x}{y}\right)dy = 0$
9. $\left[\ln(x - y) + \dfrac{x+y}{x-y}\right]dx + \left[\ln(x - y) - \dfrac{x+y}{x-y}\right]dy = 0$
10. $(ye^x + e^y)\,dx + (e^x + xe^y)\,dy = 0$ 11. $\left(\dfrac{y}{x} + \ln y\right)dx + \left(\dfrac{x}{y} + \ln x\right)dy = 0$
12. $e^x(x^2e^x + e^x + xy + y)\,dx + (xe^x + y)\,dy = 0$
13. $y[\operatorname{sen}(x + y) + x\cos(x + y)]\,dx + x[(\operatorname{sen}(x + y) + y\cos(x + y)]\,dy = 0$
14. $y\left(\dfrac{1}{x^2 + y^2} - \dfrac{1}{x\sqrt{x^2 - y^2}}\right)dx + \left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2 - y^2}} - \dfrac{x}{x^2 + y^2}\right)dy = 0$
15. $\sec x\,(\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y + y \sec x)\,dx + (\sec x \sec^2 y + \operatorname{tg} x)\,dy = 0$
16. $y\left[\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{(x-y)^2}\right]dx + x\left[\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{(x-y)^2}\right]dy = 0$
17. $[1 + \operatorname{tg}(xy)]\,dx + [\sec(xy)\operatorname{tg}(xy) + x\sec^2(xy)]\,(y\,dx + x\,dy) = 0$
18. $y(e^{xy} + y)\,dx + x(e^{xy} + 2y)\,dy = 0$

19. $e^{xy}(y\,dx + x\,dy) + \dfrac{y}{\sqrt{x^2 - y^2}}(x\,dx - y\,dy) + \sqrt{x^2 - y^2}\,dy = 0$
20. $\dfrac{2\cos(xy)}{\operatorname{sen}(xy)}(x\,dy + y\,dx) + e^{\operatorname{sen} x}e^{\operatorname{sen} y}(\cos x\,dx + \cos y\,dy) = 0$

Resolva cada uma das equações seguintes achando um fator integrante.

21. $(1 + xy)\,dx + x\left(\dfrac{1}{y} + x\right)dy = 0$ 22. $y(1 + y^3)\,dx + x(y^3 - 2)\,dy = 0$
23. $y(2 + xy)\,dx + x(1 + xy)\,dy = 0$
24. $y(y\,dx - x\,dy) + 3\sqrt{y^4 - x^4}\,(y\,dx + x\,dy) = 0$
25. $(\sec x + y\operatorname{tg} x)\,dx + dy = 0$
26. $[2xy\operatorname{sen}(x + y) + y\sec(x + y)]\,dx + [2xy\operatorname{sen}(x + y) + x\sec(x + y)]\,dy = 0$
27. $y(x^2 + y^2 - 1)\,dx + x(x^2 + y^2 + 1)\,dy = 0$
28. $y(x + x^2 + y^2)\,dx + (x^2 + 2y^2)\,dy = 0$
29. $[2(x + y)\sec^2 x + \operatorname{tg} x]\,dx + \operatorname{tg} x\,dy = 0$
30. $y[2(x + y) + (1 + x^2)\operatorname{arc\,tg} x]dx + [(x^3 + 2x^2y + x + 2y)\operatorname{arc\,tg} x]\,dy = 0$
31. (a) Prove que a equação linear fracionária

$$y' = \frac{ax + by}{cx + dy}, \quad a, b, c, d, \text{ constantes}, \quad ad - bc \neq 0,$$

é exata se e só se $b + c = 0$. Ache a integral geral desta equação quando for exata, e discuta o comportamento das curvas-soluções.

(b) Esboce as curvas-soluções das equações

$$y' = \frac{3x - y}{x + y} \quad \text{e} \quad y' = \frac{3x - y}{x - y}.$$

32. Sejam $M(x, y)$ e $N(x, y)$ homogêneas de mesmo grau numa região R. Prove que $1/(Mx + Ny)$ é então um fator integrante para $M\,dx + N\,dy = 0$.
33. (a) Sejam M e N continuamente deriváveis numa região R do plano xy, e suponhamos que N não se anule em nenhum ponto de R. Prove que se

$$\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)\Big/ N = f(x),$$

onde f é uma função só de x, então $e^{\int f(x)\,dx}$ é um fator integrante para a equação $M\,dx + N\,dy = 0$.

(b) Com hipóteses análogas às de (a) prove que se

$$\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\Big/ M = f(x),$$

onde f é função só de y, então $e^{\int f(y)\,dy}$ é um fator integrante para a equação $M\,dx + N\,dy = 0$.

Use os resultados do exercício precedente para achar a integral geral de cada uma das equações seguintes.

34. $(x^3 + x + y)\,dx - x\,dy = 0$ 35. $x(1 - y)\,dx - dy = 0$
36. $(y^2 + 1)\,dx + y(x + y^2 - 1)\,dy = 0$
37. $\operatorname{sen} x(2 + 3y \operatorname{sen}^2 x)\,dx + \sec x\,dy = 0$
38. $(y^2 - 1)\,dx + [x - (y^2 - 1)\sqrt{y + 1}]\,dy = 0$

Resolva cada uma das equações seguintes achando um fator integrante da forma $x^n y^m$.

39. $(-3y^4 + x^3 y)\,dx + (xy^3 - 3x^4)\,dy = 0$
40. $y(2x^2 + y)\,dx + x(y - x^2)\,dy = 0$
41. $y(y^2 + 1)\,dx + x(y^2 - 1)\ln x\,dy = 0$
42. $y(4xy + 3)\,dx + x(3xy + 2)\,dy = 0$
43. $(\operatorname{sen} x - x\cos x)\,dx + 2\left(\dfrac{x^2}{y^2} - \dfrac{x \operatorname{sen} x}{y}\right)dy = 0$
44. Prove que toda função $\mu(x, y)$ que tem derivadas parciais primeiras contínuas e é homogênea de grau -2 é fator integrante para a equação $y\,dx - y\,dy = 0$.
45. Prove que $\mu = \mu(x, y)$ é um fator integrante para a equação $M\,dx + N\,dy = 0$ se e só se μ satisfizer à equação diferencial parcial

$$M\frac{\partial \mu}{\partial y} - N\frac{\partial \mu}{\partial x} + \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)\mu = 0.$$

46. Suponha que a equação $M(x, y)\,dx + dy = 0$ admite um fator integrante que é função só de x. Mostre que $M(x, y)$ é então da forma $p(x)y + q(x)$, onde p e q são funções só de x, e que o fator integrante é $e^{\int p(x)\,dx}$. Ache a solução geral da equação resultante.

*47. Determine condições sob as quais a equação $y' = f(x, y)$ admite um fator integrante da forma $\mu(x)\nu(y)$, onde μ e ν sejam, respectivamente, funções de x e y somente. [*Sugestão*: ver o Exer. 45.]

*48. Seja $\mu = \mu(x, y)$ um fator integrante para a equação $M\,dx + N\,dy = 0$, e suponha que

$$dF(x, y) = (\mu M)\,dx + (\mu N)\,dy.$$

Prove que toda função da forma $\mu\varphi(F)$, onde φ é uma função diferenciável arbitrária de F, é também um fator integrante para $M\,dx + N\,dy = 0$ e conclua daí que toda equação, que admite um fator integrante, admite de fato uma infinidade deles.

*49. (a) Use o resultado do exercício precedente para concluir que $\mu_1/\mu_2 = c$, c arbitrária, é a integral geral da equação $M\,dx + N\,dy = 0$ sempre que μ_1 e μ_2 sejam fatores integrantes cuja razão não é constante.
(b) Mostre que e^{xy} e $(x + y)e^{2xy}$ são fatores integrantes para

$$(1 + xy + y^2)\,dx + (x^2 + xy + 1)\,dy = 0,$$

e use o resultado em (a) para achar a integral geral da equação. Verifique que o resultado está correto.

8.5. campos de direções: existência de soluções

Neste ponto de nosso estudo de equações diferenciais de primeira ordem já temos várias técnicas especiais para resolver equações em forma normal. Infelizmente nenhuma delas é suficientemente geral para garantir que *toda* equação dessas possua soluções, e esta lacuna no nosso conhecimento vai persistir enquanto não tivermos esclarecido a questão da existência de soluções de equações normais de primeira ordem. Nesta seção discutiremos o problema de um ponto de vista geométrico, e apresentaremos um argumento heurístico destinado a convencer o leitor de que de fato existem soluções. No capítulo seguinte daremos uma prova rigorosa de um teorema de existência ligeiramente mais fraco do que o teorema que vamos discutir agora.

Seja

$$y' = f(x, y) \tag{8.42}$$

uma equação diferencial normal de primeira ordem cujo segundo membro é contínuo numa região R do plano xy. Se $y = y(x)$ é uma solução desta equação num intervalo I do eixo x, então para cada x_0 em I

$$y'(x_0) = f(x_0, y(x_0)).$$

Isso, é claro, significa simplesmente que $f(x_0, y(x_0))$ é a inclinação da curva-solução no ponto x_0, e resulta que $y = y(x)$ é uma solução de (8.42) em I se e só se a reta de inclinação $f(x_0, y(x_0))$ for tangente ao gráfico de $y(x)$ para cada x_0 em I.

Suponhamos que por cada ponto (x_0, y_0) em R se tenha traçado um segmento "pequeno" de inclinação $f(x_0, y_0)$. A coleção resultante de segmentos chama-se o *campo de direções* da equação $y' = f(x, y)$, e as observações acima significam que as curvas-soluções desta equação podem ser descritas como curvas diferenciáveis em R cuja direção em cada ponto é a direção do segmento já associado ao ponto. Em outras palavras, as curvas-soluções de $y' = f(x, y)$ são as "trajetórias" ou "linhas de fluxo" determinadas pelo campo de direções da equação. Na Fig. 8.9

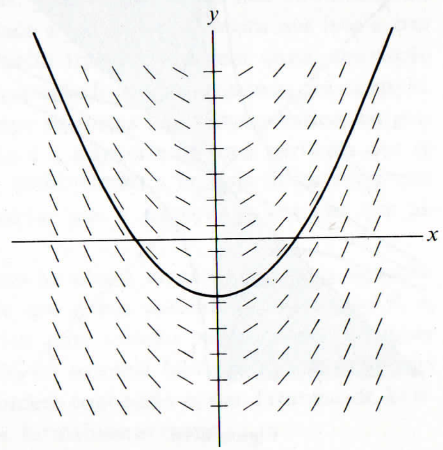

Figura 8-9