TEOREMA 2.5. *Todo problema de valor inicial relativo a um operador diferencial linear normal de ordem n tem NO MÁXIMO UMA solução.*

Observação. Como se espera que a solução geral de uma equação diferencial linear normal de ordem n dependa de n constantes arbitrárias, não é surpreendente que um problema de valor inicial para uma tal equação imponha n condições adicionais sobre a solução geral para fixar os valores destas constantes. Seguindo o modelo do caso de primeira ordem, fizemos isto escolhendo um ponto x_0 em I (o *ponto inicial*) e depois exigindo que a solução satisfaça às n *condições iniciais*

$$\begin{aligned} y(x_0) &= y_0, \\ y'(x_0) &= y_1, \\ &\vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) &= y_{n-1}, \end{aligned} \tag{2.29}$$

onde $y_0, \ldots, y_{n-1}$ são números reais arbitrários. Observe-se que estas condições fazem sentido porque toda solução de uma equação diferencial linear de ordem n pertence a $\mathscr{C}^n(I)$ para algum I e portanto tem derivadas até ordem n inclusive em cada ponto de I.

Finalmente, observamos que sempre que L seja um operador diferencial linear de ordem n a equação $Ly = h$ é uma equação com operador do tipo discutido na Sec. 1.12. Naquela ocasião observamos que se L fosse biunívoca poderíamos, ao menos em teoria, resolver esta equação achando um inverso para L. No entanto, como vimos, operadores diferenciais lineares *não* são biunívocos, e portanto sem restrições adicionais sobre o domínio de L é impossível usar o método de inverter o operador para resolver a equação dada. É aqui que entram no problema as condições iniciais. De fato, o teorema de unicidade acima pode ser interpretado como afirmando que um conjunto completo de condições iniciais do tipo apresentado em (2.29) fornece exatamente uma tal restrição para L. Em outras palavras, se tomamos como domínio de L unicamente as funções em $\mathscr{C}^n(I)$ que satisfazem a um tal conjunto de condições iniciais, então L se torna biunívoco e, portanto, tem uma única inversa G. Nestes termos podemos reenunciar o conteúdo dos Teoremas 2,4 e 2.5 como segue. *Se* $L: \mathscr{C}^n(I) \longrightarrow \mathscr{C}(I)$ *é um operador diferencial linear de ordem n normal, existe um único operador inverso* $G: \mathscr{C}(I) \longrightarrow \mathscr{C}^n(I)$ *tal que*

(i) $L[G(h)] = h$ *para todo* h *em* $\mathscr{C}(I)$ *e*

(ii) $G(h)(x_0) = y_0, \quad G(h)'(x_0) = y_1, \ldots, G(h)^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$.

Portanto a tarefa de resolver um problema com valor inicial envolvendo L se reduz ao se achar uma fórmula explícita para G, pois conhecido G o problema

$$Ly = h,$$
$$y(x_0) = y_0, \; y'(x_0) = y_1, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}.$$

pode ser resolvido computando $G(h)$. Isso é o que faremos no próximo capítulo, quando voltaremos nossa atenção para operadores diferenciais lineares a coeficientes constantes. Mas antes continuaremos nosso estudo do comportamento das soluções de uma equação diferencial linear (normal) arbitrária.

exercícios

Ache a solução de cada um dos seguintes problemas com valor inicial e especifique o domínio da solução.

1. $xy' + 2y = 0, \; y(1) = -1.$
2. $(\operatorname{sen} x)y' + (\cos x)y = 0, \; y\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 2.$
3. $2y' + 3y = e^{-x}, \; y(-3) = -3.$
4. $(x^2 + 1)y' - (1 - x^2)y = e^{-x}, \; y(-2) = 0.$
5. $x \operatorname{sen} x \frac{dy}{dx} + (\operatorname{sen} x + x \cos x)y = \frac{e^x}{x}, \; y(-\frac{1}{2}) = 0.$
6. $x^2y' + \frac{xy}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \sqrt{1-x^2}, \; y(\frac{1}{2}) = 0.$
7. $(1 + \operatorname{sen} x)\frac{dy}{dx} + (\operatorname{cotg} x)y = \cos x, \; y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$

Use a solução geral dada para resolver cada um dos seguintes problemas com valor inicial.

8. $y'' - k^2y = 0, \; y(0) = y'(0) = 1; \; y = c_1 \operatorname{senh} kx + c_2 \cosh kx, \; k \neq 0.$
9. $(1 - x^2)y'' - 2xy' = 0, \; y(-2) = 0, \; y'(-2) = 1; \; y = c_1 + c_2 \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|.$
10. $xy'' + y' + xy = 0, \; y(1) = y'(1) = 1; \; y = c_1J_0(x) + c_2Y_0(x)$, onde J_0 e Y_0 são soluções linearmente independentes da equação em $(0, \infty)$.
11. $4x^2y'' + 4xy' + (4x^2 - 1)y = 0, \; y\left(\frac{\pi}{6}\right) = -1, y'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0;$

    $y = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}(c_1 \operatorname{sen} x + c_2 \cos x).$
12. $y'' + (\operatorname{tg} x - 2 \operatorname{cotg} x)y' = 0, \; y\left(-\frac{\pi}{4}\right) = y'\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 1; \; y = c_1 \operatorname{sen}^3 x + c_2.$
13. $xy'' + y' = 0, \; y(-2) = y'(-2) = 1; \; y = c_1 + c_2 \ln|x|.$
14. Dê um exemplo para mostrar que a conclusão do Teorema 2.4 falha quando não está satisfeita a condição de normalidade.
15. Prove que uma solução não-trivial de uma equação diferencial linear de primeira ordem homogênea não pode interceptar o eixo x.
16. Use os resultados desta seção para provar que $y = c_1 \operatorname{sen} x + c_2 \cos x$ é a ***solução geral*** de $y'' + y = 0$ em $(-\infty, \infty)$. [*Sugestão*: se $u(x)$ é qualquer solução em $(-\infty, \infty)$, mostre que c_1 e c_2 podem ser escolhidos tais que $y(0) = u(0)$, $y'(0) = u'(0)$.]
17. Mostre que duas soluções distintas de uma equação diferencial linear normal de primeira ordem não podem ter um ponto de interseção.
18. Prove que toda solução não-trivial $u(x)$ de uma equação diferencial linear normal de segunda ordem

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$$

só tem zeros simples. [Um ponto x_0 diz-se um *zero* de uma função $u(x)$ se e só se $u(x_0) = 0$. Um zero de $u(x)$ é *simples* se e só se $u'(x_0) \neq 0$.]

19. Prove que soluções distintas de uma equação diferencial linear normal de segunda ordem não têm ponto de tangência mútua.
20. Dado o operador diferencial linear D, ache o operador inverso G que satisfaz $G(h)(x_0) = y_0$.
21. Dado o operador diferencial linear $D - k$(k uma constante), ache o operador inverso G que satisfaz $G(h)(x_0) = y_0$.

2.5. dimensão do espaço de soluções

Nesta seção usaremos os teoremas de existência e unicidade enunciados acima para dar uma prova elegante do fato de a dimensão do espaço de soluções de toda equação diferencial linear homogênea *normal* ser igual à ordem da equação. Antes de começar, no entanto, observamos que este resultado é falso no caso de uma equação cujo primeiro coeficiente se anula em algum ponto do intervalo que se está considerando. (Um exemplo é a equação $xy' + y = 0$ em qualquer intervalo contendo a origem.) Assim a hipótese de normalidade é essencial na discussão seguinte.

Dito isto, provamos

TEOREMA 2.6. *O espaço de soluções de qualquer equação diferencial linear homogênea normal de ordem n*

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + \cdots + a_0(x)y = 0 \tag{2.30}$$

definida num intervalo I é um subespaço de dimensão n de $\mathscr{C}^n(I)$.

Demonstração. Seja x_0 um ponto fixado em I. Então, pelo Teorema 2.4 sabemos que esta equação admite soluções $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ satisfazendo, respectivamente, às seguintes condições iniciais

$$\begin{aligned} &y_1(x_0) = 1,\ y_1'(x_0) = 0, \ldots, y_1^{(n-1)}(x_0) = 0,\\ &y_2(x_0) = 0,\ y_2'(x_0) = 1, \ldots, y_2^{(n-1)}(x_0) = 0,\\ &\quad\vdots\\ &y_n(x_0) = 0,\ y_n'(x_0) = 0, \ldots, y_n^{(n-1)}(x_0) = 1. \end{aligned} \tag{2.31}$$

Em outras palavras, $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ têm a propriedade que os vetores

$$(y_i(x_0),\ y_i'(x_0), \ldots, y_i^{(n-1)}(x_0)),\quad i = 1, \ldots, n,$$

são os vetores da base-padrão do espaço $\mathscr{R}^n$. Esta escolha de soluções está ilustrada na Fig. 2.3 para uma equação de segunda ordem, sendo que então

$$\begin{aligned}(y_1(x_0), y_1'(x_0)) &= (1, 0),\\ (y_2(x_0), y_2'(x_0)) &= (0, 1).\end{aligned}$$

Afirmamos que estas soluções formam uma base para o espaço de soluções de (2.30).

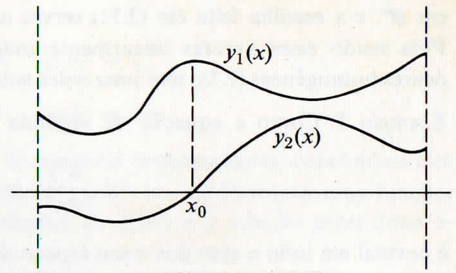

Figura 2-3

De fato, suponhamos que $c_1, \ldots, c_n$ são números reais tais que

$$c_1y_1(x) + \cdots + c_ny_n(x) \equiv 0$$

em I. Então esta identidade, junto com suas $n-1$ derivadas, fornece o sistema

$$\begin{aligned} c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \cdots + c_ny_n(x) &\equiv 0,\\ c_1y_1'(x) + c_2y_2'(x) + \cdots + c_ny_n'(x) &\equiv 0,\\ &\ \vdots\\ c_1y_1^{(n-1)}(x) + c_2y_2^{(n-1)}(x) + \cdots + c_ny_n^{(n-1)}(x) &\equiv 0. \end{aligned} \tag{2.32}$$

Pondo $x = x_0$ obtemos

$$\begin{aligned} c_1y_1(x_0) + c_2y_2(x_0) + \cdots + c_ny_n(x_0) &= 0,\\ c_1y_1'(x_0) + c_2y_2'(x_0) + \cdots + c_ny_n'(x_0) &= 0,\\ &\ \vdots\\ c_1y_1^{(n-1)}(x_0) + c_2y_2^{(n-1)}(x_0) + \cdots + c_ny_n^{(n-1)}(x_0) &= 0. \end{aligned} \tag{2.33}$$

Disto e de (2.31) segue-se que $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$. Logo, $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ são *linearmente independentes* em $\mathscr{C}(I)$.

Resta provar que *toda* solução de (2.30) pode ser escrita como combinação linear de $y_1(x), \ldots, y_n(x)$. Para isto, seja $y(x)$ uma solução arbitrária da equação e suponhamos que

$$y(x_0) = a_0,\ y'(x_0) = a_1, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = a_{n-1}. \tag{2.34}$$

Então pelo Teorema 2.5 sabemos que $y(x)$ é *a* solução de (2.30) que satisfaz a estas particulares condições iniciais. Mas, usando (2.31) novamente, vemos que a função

$$a_0y_1(x) + a_1y_2(x) + \cdots + a_{n-1}y_n(x)$$

também satisfaz a este problema com valores iniciais. Logo,

$$y(x) = a_0y_1(x) + a_1y_2(x) + \cdots + a_{n-1}y_n(x),$$

e segue-se que $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ *geram* o espaço de soluções de (2.30). □

Chamamos a atenção do leitor para o fato de os particulares valores numéricos usados para fixar as soluções $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ não terem realmente um papel essencial no argumento acima. De fato, o sucesso da prova dependeu apenas da independência linear dos vetores

$$(y_i(x_0),\ y_i'(x_0), \ldots, y_i^{(n-1)}(x_0)),\quad i = 1, \ldots, n,$$