武汉大学泛函分析期中考试试卷

2022-2023 学年度第一学期，主讲老师：邱彦奇

一、（40 分）

1.（5 分）叙述 Hilbert 空间中范数的平行四边形法则并给出证明

2.（6 分）叙述 Hahn-Banach 定理的两个版本（线性映射延拓和凸集分离两版本）

3.（5 分）叙述赋范空间之间闭算子的准确定义；叙述闭图像定理

4.（5 分）叙述共鸣定理并给出简要证明

5.（6 分）叙述赋范空间的商空间上的范数的定义；证明 Banach 空间的商空间是 Banach 空间

6.（8 分）叙述 Banach 空间之间有界算子具有闭的像集的充要条件并简要说明证明思路

7.（5 分）叙述 Banach 空间之间紧算子的定义

二、（10 分）

1.（2 分）叙述赋范空间中范数等价的定义

2.（8 分）给定一个有限维实线性空间 X，证明其上任意的两个范数等价

三、（12 分）

1.（5 分）给定一个赋范空间 X. 证明一个线性映射 $l : X \to \Re$

2.（5 分）给定两个赋范空间 X, Y 并假设 $dim(Y) < \infty$. 证明一个线性算子:$T : X \to Y$ 有界当且仅当

3.（2 分）若上述条件 $dim(Y) < \infty$ 去掉，结论是否还成立？若成立给出证明，不成立给出反例.

四、（8 分）

令 X 为 Banach 空间. 定义 $B^{\times}(X)$ 为

$$B^{\times}(X) := \{T \in B(X) \mid T\text{为可逆算子}\}$$

令 $I \in B(X)$ 为 X 到自身的恒等算子，即任意 $x \in X$ 都有 $I(x) = x$

1.（3 分）对任意 $T \in B(X)$，若 $\|T\| < 1$，证明 $I + T \in B^{\times}(X)$。

2.（5 分）证明 $B^{\times}(X)$ 是 $B(X)$ 中的开集.

五、（8 分）

假设 X 为一个固定的无穷维 Banach 空间，$T \in K(X)$ 为 X 到自身的紧算子，$A \in B(X)$ 为 X 到自身的一个可逆有界线性算子

1.（4 分）证明 $dim\ ker(A + T) < \infty$

2.（4 分）证明 $Im(A + T)$ 为 X 的闭子空间

六、（10 分）

记 $C[0,1]$ 为 $[0,1]$ 上所有连续实函数构成的线性空间并定义范数：

$$\|f\| = \sup_{t\in[0,1]} |f|$$

对于任意 $f_1, f_2 \in C[0,1]$，若 $f_1(t) \le f_2(t)$ 对任意 $t \in [0,1]$ 都成立，则我们记 $f_1 \le f_2$. 假设给定一个线性算子 $T : C[0,1] \to C[0,1]$，满足如下性质：对于任意 $[0,1]$ 上连续的非负函数 f, 都有 $Tf \ge 0$.

1.（3 分）证明线性算子保序，即任意 $f, g \in C[0,1]$，若 $f \le g$，则 $Tf \le Tg$

2.（4 分）证明 T 为有界线性算子

3.（3 分）假设 $P(s,t)$ 为二元非负系数多项式，定义 $T_p : C[0,1] \to C[0,1]$ 如下：

$$(T_p f)(t) = \int_{[0,1]} P(t,s)f(s)ds$$

证明

$$\|T_p\| = \sup_{t\in[0,1]} \int_{[0,1]} P(t,s)ds$$

七、（12 分）

令 $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ 为复平面中的单位开圆盘，令 dA 是 $\mathbb{D}$ 上的 Lebesgue 测度，定义：

$$L_a^1(\mathbb{D}) \coloneqq \{f : \mathbb{D} \to \mathbb{C} \mid f\text{全纯且}\|f\|_1 \coloneqq \int_{\mathbb{D}} |f| dA < \infty\}$$

对任意 $z \in \mathbb{D}$，定义线性泛函 $l_z : L_a^1(\mathbb{D}) \to \mathbb{C}$ 如下：

$$l_z \coloneqq f(z)$$

1.（5 分）证明 l_z 是 $L_a^1(\mathbb{D})$ 上的有界线性算子，并且对于 $\mathbb{D}$ 中任意紧子集 $Z \subset \mathbb{D}$，都有

$$\sup_{z\in Z} \|l_z\| < \infty$$

(提示，利用全纯函数的面积型平均值性质)

2.（5 分）利用上述结论证明 $L_a^1\mathbb{D}$ 在范数 $\|\cdot\|_1$ 下完备

3.（2 分）给定任意 $r \in (0,1)$. 定义线性算子 $P_r : L_a^1(\mathbb{D}) \to L_a^1(\mathbb{D})$ 如下：

$$(P_r f)(z) = f(rz) \quad \forall f \in L_a^1(\mathbb{D}), \forall z \in \mathbb{D}$$

证明 P_r 是紧算子。