Equações Diferenciais

Exemplo:

$$x \frac{dy}{dx} + y = x$$

Para $x \neq 0$ temos

$$\boxed{\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x} y = 1 .}$$

Solução da Equação homogênea associada:

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x} y = 0 .$$

Temos

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = - \frac{1}{x}$$

$\Rightarrow$

$$\int \frac{1}{y} dy = - \int \frac{1}{x} dx \quad \Rightarrow$$

$$\ln |y| = - \ln |x| \quad \Rightarrow$$

$$y = \frac{1}{x} .$$

As soluções da equação homogênea são da forma

$$\boxed{y = \frac{c}{x} , \quad c \in \mathbb{R} .}$$

Solução Particular:

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y = 1$$

Multiplicando por μ:

$$\mu\frac{dy}{dx} + \boxed{\mu\frac{1}{x}}\, y = \mu$$

$$\mu\frac{dy}{dx} + \boxed{\frac{d\mu}{dx}}\, y = \frac{d}{dx}(\mu y)$$

Vamos determinar μ tal que

$$\mu\frac{1}{x} = \frac{d\mu}{dx}.$$

Segue que

$$\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dx} = \frac{1}{x} \implies \int\frac{1}{\mu}\,d\mu = \int\frac{1}{x}\,dx$$

$$\implies \quad \ln|\mu| = \ln|x|$$

$$\implies \quad \mu = x$$

Assim, $\mu = x$ é tal que

$$\frac{d}{dx}(\mu y) = \mu.$$

Logo,

$$\frac{d}{dx}(xy) = x \implies$$

$$(xy) = \int x\,dx$$

$$\Rightarrow \quad (xy) = \frac{x^2}{2}.$$

Assim, $\boxed{y = \frac{x}{2}}$ Solução Particular.

Portanto, a solução geral é

$$\boxed{y = \frac{c}{x} + \frac{x}{2}}$$

Equação de Bernoulli

$$\frac{dy}{dx} + p(x)\,y = q(x)\,y^n.$$

* Se $n=0$ então

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x). \quad \left(\text{Já foi visto!}\right)$$

* Se $n=1$ então

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)y.$$

Note que

$$\frac{dy}{dx} + (p(x) - q(x))y = 0. \quad \left(\text{Já foi visto!}\right)$$

Vamos assumir $n \neq 0$ e $n \neq 1$.

Considere a equação

$$y^{-n}\frac{dy}{dx} + p(x)y^{1-n} = q(x). \quad (*)$$

Tome

$$u = y^{1-n}.$$

Tem-se

$$\frac{du}{dx} = (1-n)\,y^{-n}\,\frac{dy}{dx}.$$

Substituindo em $(*)$ temos

$$\boxed{\frac{1}{1-n}\frac{du}{dx} + p(x)\,u = q(x)}.$$

Que é uma equação diferencial linear de 1ª ordem. Esta equação pode ser resolvida usando o método conhecido até agora.
A solução y é calculada fazendo

$$y = u^{\frac{1}{1-n}}.$$

Exemplo:

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = -\frac{y^2}{x}.$$

Dividindo por y^2 obtemos

$$y^{-2}\frac{dy}{dx} - \frac{y^{-1}}{x} = -\frac{1}{x}.$$

Fazendo $v = y^{-1}$ obtemos

$$\frac{dv}{dx} = -y^{-2}\frac{dy}{dx}.$$

Logo a equação diferencial se torna

$$-\frac{dv}{dx} - \frac{1}{x}v = -\frac{1}{x} \qquad \text{ou}$$

$$\frac{dv}{dx} + \frac{1}{x}v = \frac{1}{x}.$$

<u>Solução Equação Homogênea</u>

$$\frac{dv}{dx} + \frac{1}{x}v = 0$$

Temos

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{1}{x}v \implies$$

$$\frac{1}{v}\frac{dv}{dx} = -\frac{1}{x} \implies$$

$$\int \frac{1}{v}\,dv = -\int \frac{1}{x}\,dx \implies$$

$$\ln|v| = -\ln|x| \implies$$

$$\boxed{v = \frac{1}{x}. \qquad x \neq 0.}$$

Logo

$$v = \frac{c}{x}, \quad \forall c \in \mathbb{R} \text{ e } x \neq 0$$

é a solução geral da Eq. Homogênea.

Agora, vamos determinar uma solução particular de

$$\frac{dv}{dx} + \frac{v}{x} = \frac{1}{x}.$$

Multiplicando por μ:

$$\mu \frac{dv}{dx} + \mu \frac{v}{x} = \frac{\mu}{x}.$$

Comparando com

$$\mu \frac{dv}{dx} + \frac{d\mu}{dx} v = \frac{d}{dx}(\mu v)$$

temos

$$\frac{\mu}{x} = \frac{d\mu}{dx} \Rightarrow \frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{dx} = \frac{1}{x}.$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{\mu} d\mu = \int \frac{1}{x} dx \Rightarrow \ln|\mu| = \ln|x|$$

$\Rightarrow \mu = x$ é uma função tal que

$$\frac{d}{dx}(\mu v) = \frac{\mu}{x}.$$

Assim

$$x v = \int dx \Rightarrow$$

$$v = 1 \quad \text{(solução particular)}$$

Logo a solução para v é

$$v = \frac{c}{x} + 1.$$

Como $v = y^{-1}$, segue que

$$y = \frac{1}{v}.$$

Logo

$$y = \frac{1}{\frac{c}{x} + 1} = \frac{1}{\frac{c+x}{x}}$$

$$= \frac{x}{c+x}.$$