Equações Diferenciais Lineares

Marcio Antônio de Andrade Bortoloti
mbortoloti@uesb.edu.br
https://mbortoloti.github.io

Equações Diferenciais (Aula do dia 08/12/2021)

Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas - DCET
Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia

Dúvida: 1

$$xD(f(x)) \overset{?}{=} D(x\,f(x))$$

$$D: C^1(I) \longrightarrow C(I)$$
$$f \longmapsto D(f) = \frac{df}{dx}$$

$$\Updownarrow$$

$$\underbrace{x\frac{df(x)}{dx}}_{} \overset{?}{=} \frac{d}{dx}(x\,f(x)) = \underbrace{f(x) + x\frac{df}{dx}}_{}.$$

$=?$

Dúvida 2:
$$D(x-1) = D(x) - D(1) = 1 - 0 = 1$$

$$* \quad D(x) \neq x\,D$$

$$D : \mathcal{C}^n(I) \longrightarrow \mathcal{C}(I)$$

$$D(x) \neq x\,D$$

$D \in \text{fun}$

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x) = \operatorname{sen}(x)$$

$$\operatorname{sen}(x) \neq \underbrace{x \ \operatorname{sen}}_{\text{Não tem sentido!}}$$

Álgebra Linear

$T : V \longrightarrow W$ (Transformação linear)

Álgebra Linear

A, B matrizes de ordem 3.

$$\boxed{AB \neq BA}$$

$$D(x) \neq x\,D(v)$$

Definição: Uma equação diferencial linear de ordem n em um intervalo $I \subset \mathbb{R}$ é, por definição,

$$Ly = h(x),$$

onde $h \in \mathcal{C}(I)$ e $L : \mathcal{C}^n(I) \longrightarrow \mathcal{C}(I)$ tal que

$$L(y) = a_n(x) D^n y + \cdots + a_1(x) D y + a_0(x) y.$$

Exemplo: Equação linear: $y'' + y' + y = \cos x$.

Note que: $L(y) = D^2 y + D y + y$.

Exemplo: Equação não-linear: $\boxed{y}\, y'' + y' + y = \cos x$

Exemplo: (Equação Linear) $\quad y'' + (y)^2 = 2 \iff y'' + \boxed{y}\,y = 2$

Exemplo: (Equação Linear) $\quad y'' = \operatorname{sen} y$

$$\iff \quad y'' - \boxed{\operatorname{sen} y} = 0$$

De outra forma, uma equação diferencial linear de ordem n pode ser escrita da forma

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = h(x) \quad \text{ou}$$

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = h(x).$$

Observação:

Equações que envolvem derivadas de uma função y: Equações Diferenciais

A equação que envolve somente derivadas ordinárias (Equação Diferencial Ordinária)

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

$$ay'' + by' + cy = 0$$

A equação que envolve derivadas parciais (Equação Diferencial Parcial)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - k\,\Delta u = 0$$

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

Definição: Uma equação diferencial é homogênea se

$$Ly = 0 \quad \left(Ly = h(x), \; h(x) \equiv 0 \right).$$

Exemplo:

(i) $y'' + y' = \operatorname{sen} x$ (Não é homogênea)

(ii) $y'' + y' = 0$ (É homogênea)

Dizemos que (ii) é a equação homogênea associada à (i).

Definição: Considere a equação diferencial

$$a_n(x)y^{(n)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = h(x) \text{ em } I$$

Se $a_n(x) \neq 0 \ \forall x \in I$ então dizemos que a referida equação é normal.

Definição: Se $y \in \mathcal{C}^{(n)}(I)$ e $Ly = h(x)$ uma equação diferencial, com $L : \mathcal{C}^n(I) \longrightarrow \mathcal{C}(I)$. Dizemos que y é uma solução da equação diferencial se

$$Ly = h(x).$$

Exemplo: Mostre que $y = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-3t}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, é uma solução da equação

$$y'' + 5y' + 6y = 0. \qquad y = y(t).$$

Note que

$$y'(t) = -2c_1 e^{-2t} - 3c_2 e^{-3t}.$$
$$y''(t) = 4c_1 e^{-2t} + 9c_2 e^{-3t}.$$

Logo

$$y'' + 5y' + 6y = \left(4\cancel{c_1 e^{-2t}} + 9\cancel{c_2 e^{-3t}}\right) - 5\left(2\cancel{c_1 e^{-2t}} + 3\cancel{c_2 e^{-3t}}\right) + 6\left(\cancel{c_1 e^{-2t}} + \cancel{c_2 e^{-3t}}\right) = 0.$$

Obs: Considere a equação homogênea normal de ordem n

$$Ly = 0 \text{ em } I.$$

As soluções dessa equação formam o núcleo de L.
Como $L: \mathcal{C}^n(I) \to \mathcal{C}(I)$ segue que o núcleo de L é um subespaço de $\mathcal{C}^n(I)$. O conjunto das soluções de $Ly = 0$ é um subespaço de $\mathcal{C}^n(I)$.

Este subespaço é chamado espaço solução de $Ly = 0$.

Teorema: O espaço solução de qualquer equação diferencial linear de ordem n normal homogênea é um subespaço de dimensão n de $\mathcal{C}^n(I)$.
A prova será apresentada adiante

Base: Seja V um espaço vetorial. Dizemos que

$$\mathcal{B} = \{f_1, f_2, \dots, f_n\}$$

é uma base de V se $f_i \in V$ e

(i) $\mathcal{B}$ é um gerador de V

(ii) $\mathcal{B}$ é linearmente independente.

* $\mathcal{B}$ é um gerador de V se $\forall f \in V$ tivermos

$$f = \alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_n f_n.$$

* $\mathcal{B}$ é L.I. $\Leftrightarrow$ $\alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_n f_n = 0 \implies \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$.

Consequência: Se $y_1(x), \cdots, y_n(x)$ são soluções linearmente independentes de $Ly=0$ então toda solução de $Ly=0$ é da forma

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x),$$

onde $L: C^n(I) \longrightarrow C(I)$. ($Ly=0$ equação de ordem n)

Prova: Seja S o conjunto solução de $Ly=0$. Logo $y_i \in S$, $i=1,\ldots,n$. Como temos n soluções e a dimensão de S é n. Logo $\{y_1,\ldots,y_n\}$ é uma base de S. Assim, se φ é uma solução de $Ly=0$ então $\varphi \in S$.

Segue que

$$\varphi(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \dots + C_n y_n(x).$$

__Consequência:__ Se $y_1(x), \dots, y_n(x)$ são soluções de $Ly = 0$ então

$$L\phi = 0,$$

onde

$$\phi = c_1 y_1(x) + \dots + c_n y_n(x).$$

__Prova:__

Note que

$$L\phi = L(c_1 y_1 + \dots + c_n y_n) = c_1 \overset{0}{\overset{\parallel}{L y_1}} + \dots + c_n \overset{0}{\overset{\parallel}{L y_n}} = 0$$

Definição: Se $y_1(x), \cdots, y_n(x)$ são soluções de $Ly = 0$ então

$$y(x) = c_1 y_1(x) + \cdots + c_n y_n(x)$$

é chamada de solução geral de $Ly = 0$.

$y'' + y' + y = 0$

Equação Homogênea

Observação: Considere a equação não-homogênea $Ly = h(x)$.
Se $y_1(x), \cdots, y_n(x)$ são soluções de $Ly = 0$ e $y_p(x)$ uma solução particular de

$$Ly = h(x),$$

então para

$$\boxed{y_h(x) = \alpha_1 y_1(x) + \cdots + \alpha_n y_n(x)}$$

Solução geral de $Ly = 0$.

tem-se

$$L(y_h(x) + y_p(x)) = \underbrace{L(y_h(x))}_{=0} + \underbrace{L(y_p(x))}_{=h(x)} = h(x).$$

$\Longrightarrow$ $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$ é uma solução $Ly = h(x)$.

Isto significa que uma solução para $Ly = h(x)$ pode ser encontrada determinando a solução geral, y_h, de $Ly = 0$ e uma solução particular, y_p, de $Ly = h(x)$, e assim escrevendo

$$\boxed{y = y_h + y_p .}$$

Exemplo: Considere a equação

$$y'' + y = x .$$

"Nota-se" que

$$\phi(x) = c_1 \operatorname{sen} x + c_2 \cos x$$

é uma solução geral de $y'' + y = 0$. De fato,

$$\phi' = c_1 \cos x - c_2 \operatorname{sen} x \quad \text{e} \quad \phi'' = -c_1 \operatorname{sen} x - c_2 \cos x .$$

Logo, $\phi'' + \phi' = \left(-c_1 \cancel{\operatorname{sen} x} - c_2 \cancel{\cos x}\right) + \left(c_1 \operatorname{sen} x + c_2 \cancel{\cos x}\right) = 0.$

Além disso as funções $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$ são linearmente independentes. Vamos mostrar que

$$\alpha_1 \operatorname{sen} x + \alpha_2 \cos x = 0 \implies \underset{\text{(única)}}{\alpha_1 = \alpha_2 = 0}.$$

Note que

$$\begin{cases} \alpha_1 \operatorname{sen} x + \alpha_2 \cos x = 0 \\ \alpha_1 \cos x - \alpha_2 \operatorname{sen} x = 0 \end{cases} \iff \begin{bmatrix} \operatorname{sen} x & \cos x \\ \cos x & -\operatorname{sen} x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Temos

$$\det \begin{bmatrix} \operatorname{sen} x & \cos x \\ \cos x & -\operatorname{sen} x \end{bmatrix} = -\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x = -1 \neq 0.$$

Logo a matriz é inversível $\forall x \in \mathbb{R}$ e consequentemente $c_1 = c_2 = 0$. Portanto $\{\operatorname{sen} x, \cos x\}$ é uma base para o espaço solução de

$$y'' + y = 0.$$

Vamos agora determinar uma solução particular para a

$$y'' + y = x.$$

Note que $y_p(x) = x$ é uma solução particular. De fato,

$$y_p'' + y_p = 0 + x = x.$$

Assim

$$\phi(x) = c_1 \operatorname{sen} x + c_2 \cos x + x.$$

é uma solução para $y'' + y = x$.