Problemas

Nos problemas de 1 a 10, mostre que a equação diferencial dada tem um ponto singular regular em $x = 0$. Determine a equação indicial, a relação de recorrência e as raízes da equação indicial. Encontre a solução em série ($x > 0$) correspondente à maior raiz. Se as raízes forem diferentes e não diferirem por um inteiro, encontre também a solução em série correspondente à menor raiz.

1. $2xy'' + y' + xy = 0$
2. $x^2y'' + xy' + (x^2 - \frac{1}{9})y = 0$
3. $xy'' + y = 0$
4. $xy'' + y' - y = 0$
5. $3x^2y'' + 2xy' + x^2y = 0$
6. $x^2y'' + xy' + (x - 2)y = 0$
7. $xy'' + (1 - x)y' - y = 0$
8. $2x^2y'' + 3xy' + (2x^2 - 1)y = 0$
9. $x^2y'' - x(x + 3)y' + (x + 3)y = 0$
10. $x^2y'' + (x^2 + \frac{1}{4})y = 0$
11. A equação de Legendre de ordem α é

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha + 1)y = 0.$$

A solução dessa equação perto do ponto ordinário $x = 0$ foi discutida nos Problemas 22 e 23 da Seção 5.3. No Exemplo 5 da Seção 5.4, mostramos que $x = \pm 1$ são pontos singulares regulares. Determine a equação indicial e suas raízes para o ponto $x = 1$. Encontre uma solução em série de potências de $x - 1$ para $x - 1 > 0$. *Sugestão*: Escreva $1 + x = 2 + (x - 1)$ e $x = 1 + (x - 1)$. Uma outra maneira é fazer a mudança de variável $x - 1 = t$ e determinar uma solução em série de potências de t.

12. A equação de Chebyshev é

$$(1 - x^2)y'' - xy' + \alpha^2 y = 0,$$

onde α é constante; veja o Problema 10 da Seção 5.3.
(a) Mostre que $x = 1$ e $x = -1$ são pontos singulares regulares e encontre os expoentes em cada uma dessas singularidades.
(b) Encontre duas soluções linearmente independentes em torno de $x = 1$.

13. A equação diferencial de Laguerre[11] é

$$xy'' + (1 - x)y' + \lambda y = 0.$$

Mostre que $x = 0$ é um ponto singular regular. Determine a equação indicial, suas raízes, a relação de recorrência e uma solução ($x > 0$). Mostre que, se $\lambda = m$ é um inteiro positivo, essa solução se reduz a um polinômio. Quando normalizado apropriadamente, esse polinômio é conhecido como polinômio de Laguerre $L_m(x)$.

14. A equação de Bessel de ordem zero é

$$x^2 y'' + xy' + x^2 y = 0.$$

Mostre que $x = 0$ é um ponto singular regular; que as raízes da equação indicial são $r_1 = r_2 = 0$; e que uma solução para $x > 0$ é

$$J_0(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}.$$

Mostre que a série converge para todo x. A função J_0 é conhecida como a função de Bessel de primeira espécie de ordem zero.

15. Com referência ao Problema 14, use o método de redução de ordem para mostrar que a segunda solução da equação de Bessel de ordem zero contém um termo logarítmico. *Sugestão*: Se $y_2(x) = J_0(x)v(x)$, então

$$y_2(x) = J_0(x) \int \frac{dx}{x[J_0(x)]^2}.$$

Encontre o primeiro termo na expansão em série de $1/x[J_0(x)]^2$.

16. A equação de Bessel de ordem 1 é

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - 1)y = 0.$$

(a) Mostre que $x = 0$ é um ponto singular regular; que as raízes da equação indicial são $r_1 = 1$ e $r_2 = -1$; e que uma solução para $x > 0$ é

$$J_1(x) = \frac{x}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(n+1)!\, n!\, 2^{2n}}.$$

Mostre que a série converge para todo x. A função J_1 é conhecida como a função de Bessel de primeira espécie de ordem um.
(b) Mostre que é impossível determinar uma segunda solução da forma

$$x^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n, \qquad x > 0.$$