Econometria I

Lista de Exercícios 3

PIMES/UFPE

Problemas conceituais

1. Mostre que podemos escrever $Var[\mathbf{b}|\mathbf{X}]$ como

$$Var[b_k|\mathbf{x}] = \frac{\sigma^2}{(1 - R_k^2)\sum_{i=1}^{n}(x_{ik} - \bar{x}_k)^2}$$

   e discuta os cada um dos fatores que determina a precisão do estimador de MQO.

2. Discuta por que multicolinearidade é um problema e como podemos remediar.

3. Um conjunto de dados consiste em n observações contidas em $\mathbf{X}_n$ e $\mathbf{y}_n$. O estimador de mínimos quadrados baseado nessas observações é $\mathbf{b}_n = (\mathbf{X}_n'\mathbf{X}_n)^{-1}\mathbf{X}_n'\mathbf{y}_n$. Outra observação, x_s e y_s, fica disponível. Prove que o estimador de mínimos quadrados calculado usando esta observação adicional é

$$\mathbf{b}_{n,s} = \mathbf{b}_n + \frac{1}{1 + \mathbf{x}_s'(\mathbf{X_n'X_n})^{-1}\mathbf{x}_s}(\mathbf{X_n'X_n})^{-1}\mathbf{x}_s(y_s - \mathbf{x}_s'\mathbf{b}_n)$$

   Observe que o último termo é e_s, o resíduo da previsão de y_s usando os coeficientes baseados em X_n e y_n. Conclua que os novos dados alteram os resultados dos mínimos quadrados apenas se a nova observação em y não puder ser perfeitamente prevista usando as informações já disponíveis.

4. Seja e_i o i-ésimo resíduo na regressão de mínimos quadrados ordinários de $\mathbf{y}$ em $\mathbf{X}$ no modelo de regressão clássico, e seja ε_i o verdadeiro termo de erro correspondente. Prove que $\text{plim}\ (e_i - \varepsilon_i) = 0$.

5. Uma regressão múltipla de y em uma constante, x_1 e x_2 produz os seguintes resultados: $\hat{y} = 4 + 0,4x_1 + 0,9x_2$, $R^2 = 8/60$, $\mathbf{e}'\mathbf{e} = 520$, $n = 29$,

$$\mathbf{X}'\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 29 & 0 & 0 \\ 0 & 50 & 10 \\ 0 & 10 & 80 \end{bmatrix}$$

   Teste a hipótese de que os coeficientes de inclinação somam 1.

6. Prove o resultado de que o estimador de mínimos quadrados restrito nunca tem uma matriz de covariância maior do que o estimador de mínimos quadrados irrestrito.

7. Prove o resultado de que o R^2 associado a um estimador de mínimos quadrados restrito nunca é maior que aquele associado ao estimador de mínimos quadrados irrestrito. Conclua que a imposição de restrições nunca melhora o ajuste da regressão.

Problemas práticos

Considere o modelo de Solow neste exercício. Uma versão modelo começa com uma função de produção do tipo $Y(t) = K(t)^{\alpha}(A(t)L(t))^{1-\alpha}$. A evolução do capital per capita é determinada pela seguinte equação: $\dot{k}(t) = sk(t)^{\alpha} - (n+g+\delta)k(t)$, onde $k(t) \equiv K(t)/L(t)$, s é a taxa de poupança, n é o crescimento populacional, g é o crescimento exógeno da tecnologia A, e δ é a depreciação do capital. O nível de capital per capita no estado estacionário é dado por

$$k^* = \left(\frac{s}{n+g+\delta}\right)^{1/(1-\alpha)}$$

Substituindo k^* na função de produção, tomando logs, e assumindo $A(0) = a + \varepsilon$, onde a é uma constante comum a todos os países e ε é um choque específico a cada país, encontramos a relação

$$log(Y/L) = a + \frac{\alpha}{1-\alpha}log(s) - \frac{\alpha}{1-\alpha}log(n+g+\delta) + \varepsilon$$

1. Com base nos dados disponíveis, estime o modelo de regressão acima por MQO. Qual é o valor de α implicado pela estimativa?

2. Defina o modelo estimado como $log(y) = b_0 + b_1 log(s) + b_2 log(n+g+\delta) + e$. Podemos dizer que $\beta_1 = -\beta_2$?

3. Outra forma de testar a hipótese anterior é incorporar a restrição diretamente no modelo anterior. Escreva a equação do modelo de regressão restrito e o estime por MQO. Qual o resultado que obtemos em relação à restrição imposta?

4. Um fato estilizado sobre o crescimento econômico é o de que, em termos gerais, $\alpha \approx 1/3$. Realize o teste de hipótese correspondente. Interprete o resultado.

5. Mankiw, Romer e Weil (1992) sugerem que o modelo de Solow (básico) acima deve ser aumentado para incorporar capital humano no processo de produção. Considere a função de prdução aumentada: $Y(t) = K(t)^{\alpha}H(t)^{\beta}(A(t)L(t))^{1-\alpha-\beta}$. A evolução da economia é determinada por

$$\dot{k}(t) = s_k y(t) - (n+g+\delta)k(t)$$
$$\dot{h}(t) = s_h y(t) - (n+g+\delta)h(t)$$

Realizando o mesmo procedimento anterior, encontre a expressão a ser estimada abaixo, para y no estado estacionário:

$$log(Y/L) = log(A(0) + gt + \frac{\alpha}{1-\alpha-\beta}log(s_k) - \frac{\alpha+\beta}{1-\alpha-\beta}log(n+g+\delta) + \frac{\beta}{1-\alpha-\beta}log(s_h)$$

6. Encontre uma expressão para o viés de variável omitida ao não considerarmos o papel do capital humano para explicar diferenças de renda per capita quando estimamos o modelo básico de Solow.

7. Estime o modelo aumentado acima e teste se o modelo, incorporando capital humano, reproduz o fato estilizado de $\alpha = 1/3$. Discuta seu resultado.

8. Mesmo incorporando capital humano ao modelo de Solow, a estimação acima provavelmente viola um pressuposto do modelo de regressão, $E[\varepsilon|X] = 0$. Discuta algumas possibilidades de como este pressuposto pode ser violado.