Equações Diferenciais Lineares

Marcio Antônio de Andrade Bortoloti
mbortoloti@uesb.edu.br
https://mbortoloti.github.io

Equações Diferenciais (Aula do dia 08/12/2021)

Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas - DCET
Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia

Equações Diferenciais Lineares

Dúvida: 1

$$D: C^1(I) \longrightarrow C(I)$$
$$f \longmapsto D(f) = \frac{df}{dx}$$

$$xD(f(x)) \overset{?}{=} D(x\, f(x))$$

$$\Updownarrow$$

$$x\frac{df(x)}{dx} \overset{?}{=} \frac{d}{dx}(x\, f(x)) = f(x) + x\frac{df}{dx}.$$

$= ?$

Dúvida 2: $D(x-1) = D(x) - D(1) = 1 - 0 = 1$

$* \; D(x) \neq x\,D$

$$D : \mathcal{C}^n(I) \longrightarrow \mathcal{C}(I)$$

$$D(x) \neq x\,D$$

$D \in \mathcal{F}un$

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x) = \operatorname{sen}(x)$$

$$\operatorname{sen}(x) \neq \underbrace{x \ \operatorname{sen}}_{\text{Não tem sentido!}}$$

Álgebra Linear

$T : V \longrightarrow W$ (Transformação linear)

Álgebra Linear

A, B matrizes de ordem 3.

$$\boxed{AB \neq BA}$$

$$D(x) \neq x\,D(v)$$

Equações Diferenciais Lineares

Definição: Uma equação diferencial linear de ordem n em um intervalo $I \subset \mathbb{R}$ é, por definição,

$$Ly = h(x),$$

onde $h \in \mathcal{C}(I)$ e $L : \mathcal{C}^n(I) \longrightarrow \mathcal{C}(I)$ tal que

$$L(y) = a_n(x) D^n y + \cdots + a_1(x) D y + a_0(x) y.$$

Exemplo: Equação linear : $y'' + y' + y = \cos x$.

Note que: $L(y) = D^2 y + D y + y$.

Exemplo: Equação não-linear : $\boxed{y}\, y'' + y' + y = \cos x$

Exemplo: (Equação não linear) $y'' + (y)^2 = 2 \Leftrightarrow y'' + \boxed{y}\, y = 2$

Exemplo: (Equação não linear) $y'' = \operatorname{sen} y$

$$\Leftrightarrow \quad y'' - \boxed{\operatorname{sen} y} = 0$$

De outra forma, uma equação diferencial linear de ordem n pode ser escrita da forma

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = h(x) \quad \text{ou}$$

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = h(x).$$

Observação:

Equações que envolvem derivadas de uma função y: Equações Diferenciais

A equação que envolve somente derivadas ordinárias (Equação Diferencial Ordinária)

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

$$ay'' + by' + cy = 0$$

A equação que envolve derivadas parciais (Equação Diferencial Parcial)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - k\,\Delta u = 0$$

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

Definição: Uma equação diferencial é homogênea se

$$Ly = 0 \quad \left(Ly = h(x) \ , \ h(x) \equiv 0 \right).$$

Exemplo:

(i) $y'' + y' = \operatorname{sen} x$ (Não é homogênea)

(ii) $y'' + y' = 0$ (É homogênea)

Dizemos que (ii) é a equação homogênea associada à (i).

Definição: Considere a equação diferencial

$$a_n(x)\, y^{(n)} + \cdots + a_1(x)\, y' + a_0(x)\, y = h(x) \text{ em } I$$

Se $a_n(x) \neq 0$ $\forall\, x \in I$ então dizemos que a referida equação é normal.

Definição: Se $y \in \mathcal{C}^{(n)}(I)$ e $Ly = h(x)$ uma equação diferencial, com $L: \mathcal{C}^n(I) \longrightarrow \mathcal{C}(I)$. Dizemos que y é uma solução da equação diferencial se

$$Ly = h(x).$$

Exemplo: Mostre que $y = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-3t}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, é uma solução da equação

$$y'' + 5y' + 6y = 0. \qquad y = y(t).$$

Note que

$$y'(t) = -2c_1 e^{-2t} - 3c_2 e^{-3t}.$$

$$y''(t) = 4c_1 e^{-2t} + 9c_2 e^{-3t}.$$

Logo

$$y'' + 5y' + 6y = \left(\cancel{4c_1 e^{-2t}} + \cancel{9c_2 e^{-3t}}\right) - 5\left(\cancel{2c_1 e^{-2t}} + \cancel{3c_2 e^{-3t}}\right) + 6\left(\cancel{c_1 e^{-2t}} + \cancel{c_2 e^{-3t}}\right) = 0.$$

Obs: Considere a equação homogênea normal de ordem n

$$Ly = 0 \text{ em } I.$$

As soluções dessa equação formam o núcleo de L.

Como $L: C^n(I) \to C(I)$ segue que o núcleo de L é um subespaço de $C^n(I)$. O conjunto das soluções de $Ly=0$ é um subespaço de $C^n(I)$.

Este subespaço é chamado espaço solução de $Ly=0$.

Teorema: O espaço solução de qualquer equação diferencial linear de ordem n normal homogênea é um subespaço de dimensão n de $C^n(I)$.

A prova será apresentada adiante

Base: Seja V um espaço vetorial. Dizemos que

$$\mathcal{B} = \{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$$

é uma base de V se $f_i \in V$ e

(i) $\mathcal{B}$ é um gerador de V

(ii) $\mathcal{B}$ é linearmente independente.

* $\mathcal{B}$ é um gerador de V se $\forall f \in V$ tivermos

$$f = \alpha_1 f_1 + \cdots + \alpha_n f_n.$$

* $\mathcal{B}$ é L.I. $\Leftrightarrow$ $\alpha_1 f_1 + \cdots + \alpha_n f_n = 0 \implies \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$.

Consequência: Se $y_1(x), \dots, y_n(x)$ são soluções linearmente independentes de $Ly=0$ então toda solução de $Ly=0$ é da forma

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x),$$

onde $L : \mathcal{C}^n(I) \longrightarrow \mathcal{C}(I)$. ($Ly=0$ equação de ordem n)

Prova: Seja S o conjunto solução de $Ly=0$. Logo $y_i \in S$, $i=1,\dots,n$. Como temos n soluções e a dimensão de S é n. Logo $\{y_1,\dots,y_n\}$ é uma base de S. Assim, se φ é uma solução de $Ly=0$ então $\varphi \in S$.

Segue que

$$\varphi(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x).$$

<u>Consequência</u>: Se $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ são soluções de $Ly=0$ então

$$L\phi = 0,$$

onde

$$\phi = c_1 y_1(x) + \cdots + c_n y_n(x).$$

<u>Prova</u>:

Note que

$$L\phi = L(c_1 y_1 + \cdots + c_n y_n) = c_1 \overset{0}{\overset{\parallel}{Ly_1}} + \cdots + c_n \overset{0}{\overset{\parallel}{Ly_n}} = 0$$