Redução de Ordem

Considere uma equação diferencial de ordem n

$$Ly = h.$$

Suponha u seja solução não nula de

$$Ly = 0.$$

Vamos verificar quais condições uma função $c(x)$ deve satisfazer para que

$$y = c(x)u(x)$$

seja uma solução de $Ly = h$.

Logo, devemos ter

$$L(c(x)u(x)) = h(x).$$

A Regra de Leibnitz para derivada do produto de funções é

$$D^n(uv) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^k u \, D^{n-k} v. \quad \text{(Prove!)}$$

Logo

$$L(u(x)c(x)) = L(u)c + (L'u)c' + \frac{1}{2!}(L''u)c'' + \cdots + \frac{1}{n!}(L^{(n)}u)c^{(n)}.$$

Como $Lu=0$, segue que a equação diferencial se torna

$$(L'u)c' + \frac{1}{2!}(L''u)c'' + \dots + \frac{1}{n!}(L^{(n)}u)c^{(n)} = h(x).$$

Note que a equação acima tem ordem igual a $n-1$!

<u>Exemplo</u>: Resolva a equação

$$x^2y'' + xy' - y = x^4$$

Vamos considerar a equação homogênea associada

$$x^2y'' + xy' - y = 0.$$

Vamos tentar a solução $u(x) = x$ da homogênea. Temos

$$u'(x) = 1 \quad e \quad u''(x) = 0.$$

Logo, vamos determinar v tal que

$$y = v(x)\,u(x)$$

seja solução da equação diferencial não homogênea!

De fato,

$$y' = v'u + vu'$$
$$y'' = v''u + 2v'u' + vu''$$

Segue que

$$x^2(v''u + 2u'v' + vu'') + x(v'u + vu') - uv = x^4$$

Como $u' = 1$ e $u'' = 0$ temos

$$x^2(2v' + xv'') + x(xv' + v) - xv = x^4$$

Logo
$$x^3 v'' + 3x^2 v' + xv - xv = x^4.$$

Assim, temos

$$x^3 v'' + 3x^2 v' = x^4$$

Fazendo $w = v'$ temos $v'' = w'$. Logo

$$x^3 w' + 3x^2 w = x^4$$

Temos então uma equação diferencial de 1ª ordem. Assim,

$$x^3 w' + 3x^2 w = x^4 ,$$

ou, para $x \neq 0$,

$$w' + \frac{3}{x} w = x$$

Note que a equação homogênea associada é

$$w' + \frac{3}{x} w = 0 .$$

Logo

$$\frac{1}{w} w' = -\frac{3}{x} \Rightarrow \ln|w| = -3\ln|x|$$

ou

$$\boxed{w = \frac{c}{x^3}, \text{ para } c \in \mathbb{R}}$$ (Solução da homogênea)

Uma solução particular da equação não homogênea pode ser encontrada do seguinte modo:

$$\begin{cases} \mu w' + \frac{3}{x}\mu w = \mu x . \\ \mu w' + \mu' w = (\mu w)' \end{cases} \Rightarrow$$

$$\frac{3}{x}\mu = \mu' \quad \text{ou} \quad \frac{1}{\mu}\mu' = \frac{3}{x},$$

de onde segue que

$$\ln|\mu| = 3\ln|x|$$

ou

$$\mu(x) = x^3$$

Logo

$$(\mu x) = (\mu w)',$$

ou,
$$x^4 = (x^3 w)'.$$

Segue que
$$w x^3 = \frac{x^5}{5}$$

ou
$$w = \frac{x^2}{5}, \quad \text{(Solução Particular)}$$

Assim, a solução da equação de 1ª ordem é

$$w = w_h + w_p \quad \text{ou} \quad w = \frac{c}{x^3} + \frac{x^2}{5}.$$

Agora, como $v' = w$, segue que

$$v = \int \frac{c}{x^3} + \frac{x^2}{5} \, dx$$

ou
$$v(x) = -\frac{c}{x^2} + \frac{x^3}{15} + d.$$

Como $y(x) = x\,v(x)$, segue que a solução da equação diferencial é

$$y(x) = -\frac{c}{x} + \frac{x^4}{15} + d \cdot x.$$