DCET
Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas
UESB

Governo do Estado da Bahia

2^a Lista de Exercícios de Fundamentos de Matemática Elementar I

Prof. Márcio Antônio de Andrade Bortoloti

1. A escala N de temperaturas foi feita com base nas temperaturas máxima e mínima em uma determinada cidade. A correspondência com a escala Celsius é a seguinte:

^{o}N	^{o}C
0	18
100	43

   Em que temperatura ferve a água na escala N?

2. Uma caixa dágua de 1000 litros tem um furo no fundo por onde escoa a água a uma vazão constante. Ao meio dia de certo dia ela foi cheia e, às 6 da tarde desse dia, só tinha 850 litros. Quando ficará pela metade?

3. Os termos $a_1, a_2, \cdots, a_n$ de uma P.A. são os valores $f(1), f(2), \cdots, f(n)$ de uma função afim. Mostre que cada a_i é igual à área de um trapézio delimitado pelo gráfico de f, pelo eixo OX e pelas retas verticais de equações $x = i - 1/2$ e $x = i + 1/2$. Mostre que a soma $S = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ é igual à área do trapézio delimitado pelo gráfico de f, pelo eixo OX e pelas retas verticais $x = 1/2$ e $x = n + 1/2$. Conclua que $S = \frac{a_1 + a_n}{2} n$.

4. Determine a imagem da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \max\{x - 1; 10 - 2x\}$.

5. Faça o gráfico de $f(x) = \min\{4 - x; x + 1\}$.

6. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função crescente. Mostre que as seguintes afirmações são equivalentes:

   (i) $f(nx) = nf(x)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ e todo $x \in \mathbb{R}$.

   (ii) Pondo $a = f(1)$, tem-se $f(x) = ax$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

   (iii) $f(x + y) = f(x) + f(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$.

7. Dados arbitrariamente $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, com $x_1 \neq x_2$, mostre que existe uma única função afim $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x_1) = y_1$ e $f(x_2) = y_2$.

8. Lembre-se que uma função $f : A \to B$ é chamada injetiva, se para todo $x, y \in A$ tivermos $f(x_1) = f(x_2)$ implicando $x_1 = x_2$. Agora vamos ao exercício: Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função crescente (ou decrescente) injetiva. Mostre que, se o acréscimo $f(x + h) - f(x) = \phi(h)$ depender apenas de h, mas não de x, então f é uma função afim.

9. Mostre que, se uma função crescente (ou decrescente) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ transforma qualquer progressão aritmética $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$ em uma progressão aritimética $y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2), \cdots, y_n = f(x_n), \cdots$ então f é uma função afim.