线

座号______ 学号______ 封 (密封线内不答题) 姓名______ 专业______ 学院______ 密

武汉大学期末考试试卷

开/闭卷 闭卷　　A/B卷 A 卷　　课程名称 泛函分析　　学分 4

考试分数 卷面分100分

在本试卷中，我们固定一个Banach空间X. 本试卷中的Banach代数都假设含有单位元.

一. （40 分） 1. （8 分） 叙述Banach代数的定义. 给定Banach代数B，假设$a \in B$，叙述a的谱集合（spectrum）$\sigma(a)$的定义.

2. （8 分） 设X为紧Hausdorff空间，令$C(X)$为X上所有连续复函数全体，并赋予一致范数. 证明$C(X)$关于函数的点态乘法（即fg定义为正常的函数乘法）是一个Banach代数.证明任意$f \in C(X)$，其在$C(X)$中的谱集合满足

$$\sigma(f) = f(X),$$

其中$f(X)$表示f的像集.

3. （8 分） 给出复Hilbert空间H中的内积的极化恒等式的证明：

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\sum_{m=0}^{3} i^m \langle x + i^m y, x + i^m y\rangle, \quad \forall x, y \in H.$$

利用上述极化等式证明下述结论：设$A \in B(H)$，假设对于任意$x \in H$都有$\langle Ax, x\rangle = 0$, 则A为零算子.

4. （8 分） 给出复Hilbert空间H上正规算子(normal operator)至少两种等价定义.并证明其等价性.

5. （8 分） 叙述复Hilbert空间H上的有界线性算子$A \in B(H)$的numerical range $W(A)$的定义.

答：第1、3、4、5题均参见教材或上课课堂笔记.第2题解答如下：验证$C(X)$是Banach代数的过程略（只要说明$\|fg\| \leq \|f\|\|g\|$就给全部分）.下设$f \in C(X)$.根据定义，$\lambda \in \sigma(f)$当且仅当连续函数$\lambda - f$在$C(X)$不可逆.注意到若$\lambda \notin f(X)$, 则紧集X上的连续函数$|\lambda - f|$取得最小值$\delta > 0$,从而由$|\lambda - f| \geq \delta > 0$知函数$(\lambda - f)^{-1} \in C(X)$,此时有$\lambda \notin \sigma(f)$.这说明$\sigma(f) \subset f(X)$. 另一方面,若$\lambda = f(x_0)$，则函数$\lambda - f = f(x_0) - f$在$C(X)$中没有逆函数，否则，若$(f(x_0) - f)g \equiv 1$, 则有$1 = 0 \times g(x_0)$，矛盾，于是$f(X) \subset \sigma(f)$.

二. （15 分） (本题中假设X是实Banach空间)

1. （5 分） 叙述Banach空间X中序列$\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$弱收敛到$z \in X$的定义.

2. （10 分） 假设X中序列$\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$弱收敛到$z \in X$. 对于任意自然数$n \geq 1$, 定义

$$C_n = \Big\{ \sum_{k=n}^{n+m} \lambda_k x_k : m \geq 1, \lambda_k \geq 0, \sum_{k=n}^{n+m} \lambda_k = 1 \Big\}.$$

(2.1) （5分）证明C_n是包含$\{x_k : k \geq n\}$的最小的凸集.

(2.2) （3分） (提示：用Hahn-Banach分离定理和反证法; 单点集是紧凸集)令$\overline{C_n}$为C_n在X中范数意义下的闭包. 证明$\overline{C_n}$是凸集并证明 $z \in \overline{C_n}$.

(2.3) （2分）利用上述结论证明存在非负实数

$$\lambda_k^{(n)}, k = n, n+1, \cdots, n+m_n,$$

使得

$$\sum_{k=n}^{n+m_n} \lambda_k^{(n)} = 1 \text{且} \lim_{n\to\infty} \left\| \sum_{k=n}^{n+m_n} \lambda_k^{(n)} x_k - z \right\| = 0.$$

答：第1小题参见课本. 第2小题解答如下：（2.1）需要验证两点：一、C_n是凸集（这一点根据凸集定义容易验证）；二、假设S是任意一个包含$\{x_k : k \geq n\}$的凸集，要验证$C_n \subset S$(这一点也容易验证，因为任意$k \geq n$， $x_k \in S$, 由S是凸集的假设，任意由$\{x_k : k \geq n\}$中有限个点的凸组合都在S中，则就表明$C_n \subset S$). （2.2）假设$y_1, y_2 \in \overline{C_n}$.令$\alpha \in (0,1)$, 我们需要验证$\alpha y_1 + (1-\alpha) y_2 \subset \overline{C_n}$. 根据假设，存在序列$\{y_1^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}, \{y_2^{(k)}\}_{k=1}^{\infty} \in C_n$满足

$$\lim_{k\to\infty} \|y_1^{(k)} - y_1\| = 0, \quad \lim_{k\to\infty} \|y_2^{(k)} - y_2\| = 0.$$

易知

$$\lim_{k\to\infty} \left\| \left(\alpha y_1^{(k)} + (1-\alpha) y_2^{(k)}\right) - \left(\alpha y_1 + (1-\alpha) y_2\right) \right\| = 0.$$

由于C_n是凸集，$\alpha y_1^{(k)} + (1-\alpha) y_2^{(k)} \in C_n$，从而$\alpha y_1 + (1-\alpha) y_2 \in \overline{C_n}$. 下面证明$z \in \overline{C_n}$.否则，$z \notin \overline{C_n}$.根据Hahn-Banach分离定理，($\overline{C_n}$为闭凸集，单点集合$\{z\}$为紧凸集), 存在$\ell \in X^*$, 以及实数$a < b$ 使得

$$\ell(z) \leq a < b \leq \ell(y), \forall y \in \overline{C_n}.$$

特别的, 我们有

$$\ell(z) \leq a < b \leq \ell(x_k), \forall k \geq n.$$

但由假设$\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$弱收敛到z, 我们知

$$\lim_{k\to\infty} \ell(x_k) = \ell(z),$$

显然矛盾.因此必然有$z \in \overline{C_n}$. （2.3）.对于任意n, 由于$z \in \overline{C_n}$，故存在非负实数

$$\lambda_k^{(n)}, k = n, n+1, \cdots, n+m_n,$$

使得

$$\sum_{k=n}^{n+m_n} \lambda_k^{(n)} = 1 \text{且} \left\| \sum_{k=n}^{n+m_n} \lambda_k^{(n)} x_k - z \right\| \leq \frac{1}{n}.$$

从而证明（2.3）的结论.

三. （15 分）　1. （5 分） 叙述交换Banach代数中理想和极大理想的定义.

2. （5 分） 叙述交换Banach代数中极大理想与可乘线性泛函之间的关系.

3. （5 分） 令X为给定紧Hausdorff空间，令$C(X)$为X上所有连续复函数全体. 假设I是$C(X)$的一个理想并且$I \neq C(X)$.

(3.1) （3分）证明存在$x_0 \in X$,使得任意$f \in I$都有$f(x_0)=0$.（提示：利用紧集的有限开覆盖性质，假设结论不成立，证明理想I不是真理想）

(3.2) （2分）给出$C(X)$中所有极大理想并说明理由.

答：第1、2小题参见教材.第3小题解答如下：（3.1）假设结论不成立，则任意$x \in X$, 都存在一个函数$f_x \in I$，使得$f_x(x) \neq 0$.由于f_x是连续函数，故存在x的开邻域U_x, 使得

$$f_x(y) \neq 0, \quad \forall y \in U_x.$$

由于$X = \bigcup_{x\in X} U_x$，知$\{U_x\}_{x\in X}$构成X的开覆盖，根据X是紧集的假设，存在有限个点$x_1, \ldots, x_n$,使得

$$X = \bigcup_{k=1}^{n} U_{x_k}.$$

考察连续函数

$$f = \sum_{k=1}^{n} |f_{x_k}|^2 = \sum_{k=1}^{n} f_{x_k} \cdot \overline{f_{x_k}}.$$

由于I是理想，利用理想的吸收性质和假设$f_x \in I$，知$f \in I$. 另一方面，由构造容易知道任意$x \in X$, 都有$f(x) > 0$ （即f不会取值到0）.利用第一大题中的第2小题，知f在$C(X)$中可逆，于是$I = C(X)$,矛盾. （3.2）$C(X)$中所有极大理想为

$$I_x = \{f \in C(X) : f(x) = 0\}.$$

首先我们说明I_x是极大理想，因为若定义$\ell_x \in C(X)^*$如下:

$$\ell_x(f) = f(x), \quad \forall f \in C(X),$$

则易知ℓ_x为可乘线性泛函且$I_x = \ker \ell_x$.从而知I_x为$C(X)$的极大理想.另一方面，假设$I \subset C(X)$为一给定极大理想，根据（3.1）结论，存在x_0，使得$I \subset I_{x_0}$，由于I的极大性，知道事实上$I = I_{x_0}$.

四. （15 分） 1. （6 分） 叙述$B(X)$中的C_0-半群(strongly continuous one-parameter semi-group in $B(X)$)的定义.

2. （6 分） 叙述$B(X)$中C_0-半群的生成子(generator)的定义.

3. （3 分） 设$\{E_t\}_{t\geq 0}$为$B(X)$中的一个C_0-半群且$E_1 \in B(X)$为可逆线性算子. 证明任意$t \geq 0$, 线性算子E_t可逆.

答：第1、2小题参见教材.第3小题解答如下(课堂中曾经提过交换算子的一个结论)：我们先证明若$t \in [0,1]$,则E_t可逆，事实上，根据假设E_1可逆.由于

$$E_1 = E_t E_{1-t} = E_{1-t} E_t,$$

故

$$E_1^{-1} E_t E_{1-t} = E_t E_{1-t} E_1^{-1} = E_{1-t} E_t E_1^{-1} = E_1^{-1} E_{1-t} E_t = Id.$$

则

$$E_t E_1^{-1} E_{1-t} = (E_t E_1^{-1} E_{1-t})(\underbrace{E_t E_{1-t} E_1^{-1}}_{=Id}) = E_t(\underbrace{E_1^{-1} E_{1-t} E_t}_{=Id}) E_{1-t} E_1^{-1} = E_t E_{1-t} E_1^{-1} = Id.$$

即我们证明了

$$E_t(E_1^{-1} E_{1-t}) = (E_1^{-1} E_{1-t}) E_t = Id,$$

从而E_t可逆并且

$$E_t^{-1} = E_1^{-1} E_{1-t}.$$

对于$t > 1$, 存在足够大自然数n，使得$t/n \in [0,1]$, 则$E_t = E_{t/n}^n$.由于$E_{t/n}$可逆知E_t可逆.

五. （15 分） 假设H是一个可分（separable）无穷维复Hilbert空间. 我们采用如下Hilbert-Schmidt算子的定义: 固定H的一个标准正交基$\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$. 称一有界算子$T \in B(H)$为Hilbert-Schmidt算子，若

$$\|T\|_{HS} := \Big(\sum_{n=1}^{\infty} \|Tv_n\|^2\Big)^{1/2} < \infty.$$

令

$$S_2(H) := \{T \in B(H) | T\text{是Hilbert-Schmidt算子}\}.$$

注记：有界算子T的伴随算子T^*定义为唯一满足下述等式的有界算子

$$\langle Tu, v\rangle = \langle u, T^* v\rangle, \forall u, v \in H.$$

1. （5 分） 若$\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$是H的任意一个标准正交基，证明对任意$T \in S_2(H)$，都有

$$\|T\|_{HS}^2 = \sum_{n,m=1}^{\infty} |\langle Tv_n, w_n\rangle|^2.$$

并由此说明$\|T\|_{HS}$的定义不依赖于正交基的选取.

2. （5 分） 证明对任意$T \in S_2(H)$，都有

$$\|T\|_{HS} = \|T^*\|_{HS}.$$

3. （5 分） 证明任意$T \in S_2(H), A, B \in B(H)$, 都有

$$\|ATB\|_{HS} \le \|A\| \cdot \|T\|_{HS} \cdot \|B\|,$$

其中$\|A\|,\|B\|$表示有界算子A,B的算子范数. 提示：可以尝试先分别证明下述两个不等式

$$\|AT\|_{HS} \le \|A\|\|T\|_{HS}, \quad \|TB\|_{HS} \le \|T\|_{HS}\|B\|.$$

答： 1. 利用Hilbert空间中的Parseval恒等式可以证明. 即任意$x \in H$，都有

$$\|x\|^2 = \sum_{m=1}^{\infty} |\langle x, w_m\rangle|^2,$$

特别地，任意n，我们有

$$\|Tv_n\|^2 = \sum_{m=1}^{\infty} |\langle Tv_n, w_m\rangle|^2.$$

于是，我们知

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|Tv_n\|^2 = \sum_{n,m=1}^{\infty} |\langle Tv_n, w_m\rangle|^2 = \sum_{n,m=1}^{\infty} \langle v_n, T^* w_m\rangle|^2 = \sum_{m=1}^{\infty} \|T^* w_m\|^2.$$

上述证明的等式

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|Tv_n\|^2 = \sum_{m=1}^{\infty} \|T^* w_m\|^2$$

右边显然不依赖于正交基$\{v_n\}$.

2. 利用第1小问结论，知

$$\|T\|_{HS}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|Tv_n\|^2 = \sum_{m=1}^{\infty} \|T^* w_m\|^2 = \|T^*\|_{HS}^2.$$

3. 首先

$$\|AT\|_{HS}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|ATv_n\|^2 \le \sum_{n=1}^{\infty} (\|A\|\|Tv_n\|)^2 = \|A\|^2 \sum_{n=1}^{\infty} \|Tv_n\|^2 = \|A\|^2\|T\|_{HS}^2.$$

从而$\|AT\|_{HS} \le \|A\|\|T\|_{HS}$.另一方面，利用第2小问的结论和刚刚证明的这个不等式知

$$\|TB\|_{HS} = \|(TB)^*\|_{HS} = \|B^*T^*\|_{HS} \le \|B^*\|\|T^*\|_{HS} = \|B\|\|T\|_{HS}.$$

于是，一般情况下，

$$\|ATB\|_{HS} = \|A(TB)\|_{HS} \le \|A\|\|TB\|_{HS} \le \|A\|\|T\|_{HS}\|B\|.$$