Specral 空間の基礎

安藤 遼哉（@Reincarnatorsan）

2021 年 6 月 22 日

はじめに

Specral 空間とは，Stone (1938) によって導入された位相空間のクラスの 1 つで，分配束のなす圏との双対性が知られている（Stone 双対性）．またそれらのクラスの間の双対として Boole 代数に対応する位相空間は Stone 空間と呼ばれ，Spectral 空間の重要なクラスをなしている．Spectral 空間の具体例としては，可換環 A に対応する Affine スキーム $\operatorname{Spec} A$ がある．実はそれだけでなく Hochster (1969) によってすべての Spectral 空間はある可換環 A によって $\operatorname{Spec} A$ と同相になることが証明され，Spectral 空間は可換環の spectrum として表現できる位相空間として特徴づけられた．また Balmer (2005) はモノイダル圏としての構造の入った三角圏 $\mathscr{T}$ から Balmerspectrum と呼ばれる位相空間 $\operatorname{Spec} \mathscr{T}$ を構成し，それが Spectral 空間になることを示した．これは代数幾何学，特に導来圏の視点からも重要な概念であると考えられている．本ノートはペーパー (@paper3510mm) (2019a,b) を元に Specral 空間の基礎を概説し，上に挙げた結果群の解説を試みるものである．**このノートでは特に断らない限り環といえば単位元を持つ可換環のこととする．**

最終更新日 . . . 2021 年 6 月 22 日

記号

$\mathbb{N}$	自然数全体の集合（本書では 0 を含む）．
$\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$	それぞれ整数，有理数，実数，複素数全体の集合．
$\mathbb{Z}_+, \mathbb{Q}_+, \mathbb{R}_+$	それぞれ正の整数，正有理数，正の実数全体の集合．
$\#A$	集合 A に対し，A の元の個数またはその濃度．
$\subset$	本書では包含は等号の可能性を除外しない．真の包含関係は $\subsetneq$ を用いる．
$f : A \twoheadrightarrow B$	f が全射であること．
$f : A \hookrightarrow B$	f が単射であること．

目次

第1章 Spectral空間

—Spectral spaces

この章では spectral 空間の基本的な定義を概説する．最初に記号をいくつか注意しておく．位相空間 X に対してその開集合系を $\mathcal{O}_X$ で，閉集合系を $\mathcal{A}_X$ で表す．本ノートを通して，（代数幾何学の慣例に習わず）位相空間がコンパクト (compact) であるとは，任意の開被覆が有限部分被覆を持つことをいう．また最初に断っておいたとおり，このノートでは特に断らない限り環といえば単位元を持つ可換環のこととする．

Spectral 空間や sober 空間などの本章で導入する空間は，一般には Hausdorff などの微分幾何学で "良い" とされている性質を必ずしも持たず，点を満足に分離できるとは限らない．このように分離性を満足しない位相空間の例として代数幾何学における Affine スキームの Zariski 位相などが例となっている．これが様々な具体例を与えるため，まず環の spectrum の定義から始めよう．本ノートを書くにあたり簡単な可換環論は仮定した．随時環論の教科書か，拙作安藤 (2021) を参照してもらいたい．

§ 1　環の spectrum と分離公理

この節では環の spectrum と呼ばれる，環 A から作られる位相空間 $\operatorname{Spec} A$ を定義し分離公理について復習しよう．

定義 *1.1.1*（環の spectrum）

A を環とする．集合；

$$\operatorname{Spec} A = \left\{ P \subset A \;\middle|\; P : A \text{ の素イデアル} \right\}$$

を A の **spectrum** という．

Spectrum に位相構造を定めよう．

命題 *1.1.2*

A を環とする．A のイデアル I に対して $V(I) = \{P \in \operatorname{Spec} A \mid I \subset P\}$ とおく．このとき；

(i) $V(A) = \emptyset, V((0)) = \operatorname{Spec} A$ である．

(ii) $V(I) \cup V(J) = V(I \cap J)$ である．

(iii) $\bigcap_\lambda V(I_\lambda) = V(\sum_\lambda I_\lambda)$ である．

が成り立つ．

証明は簡単であるので各自試みられたい．これによって $\operatorname{Spec} A$ には位相構造が定まる．

定義 *1.1.3*（Zariski 位相）

A を環とする．$\operatorname{Spec} A$ には $\mathcal{A} = \left\{ V(I) \subset \operatorname{Spec} A \;\middle|\; I : A \text{ のイデアル} \right\}$ を閉集合系とする位相が定まる．この位相を **Zariski 位相**という．

イデアルの根基を考えることで $V(I)$ たちの包含関係を判定できることを注意しておこう．

命題 *1.1.4*

A のイデアル I, J に対し，$V(I) \subset V(J)$ であることと $\sqrt{J} \subset \sqrt{I}$ であることは同値である．

証明.

$\sqrt{I} = \bigcap_{P \in V(I)} P$ であったことから従う．（証明終）

定義から $\operatorname{Spec} A$ の開集合は $D(I) = V(I)^c = \{P \in \operatorname{Spec} A \mid I \not\subset P\}$ という形をしている．その中でも特別なものを $\operatorname{Spec} A$ の**基本開集合**という．

定義 *1.1.5*（基本開集合）

A を環とする．任意の $a \in A$ に対して；

$$D(a) = \{P \in \operatorname{Spec} A \mid a \notin P\} = \{P \in \operatorname{Spec} A \mid (a) \not\subset P\}$$

は $\operatorname{Spec} A$ の開集合である．このような形の開集合を $\operatorname{Spec} A$ の**基本開集合 (principal open set)** という．

定義から明らかに $D(a) \cap D(b) = D(ab)$ であることを注意しておく．基本開集合について大切な２つの命題を述べる．

命題 *1.1.6*

A を環とすると，次が成り立つ．

(i) $D(a)$ はコンパクトである．
(ii) $\{D(a)\}_{a \in A}$ は $\operatorname{Spec} A$ の開基をなす．

証明.

(i) 任意の開集合 $D(I) \subset \operatorname{Spec} A$ と $P \in D(I)$ をとる．$I \not\subset P$ なので，ある $a \in I$ で $a \notin P$ となるものが存在する．よって $P \in D(a) \subset D(I)$ である．

(ii) $D(a)$ の開被覆 $\{D(I_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ をとる．すると $D(a) \subset \bigcup_\lambda D(I_\lambda) = (\bigcap_\lambda V(I_\lambda))^c = V(\sum_\lambda I_\lambda)^c$ となっているので $V(\sum_\lambda I_\lambda) \subset V(a)$ である．よって命題 1.1.4 から $a \in \sqrt{\sum_\lambda I_\lambda}$ である．ゆえにある $n > 0$ によって $a^n \in \sum_\lambda I_\lambda$ であるから，有限個の $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \Lambda$ と $f_i \in I_{\lambda_i}$ を用いて $a^n = \sum_{i=1}^r f_i$ とかける．これは $a \in \sqrt{\sum_{i=1}^r I_{\lambda_i}}$ を意味しており，再び命題 1.1.4 から $\bigcap_{i=1}^r V(I_{\lambda_i}) = V(\sum_{i=1}^r I_{\lambda_i}) \subset V(a)$ である．ゆえに $D(a) \subset \bigcup_{i=1}^r D(I_{\lambda_i})$ となり，$D(a)$ はコンパクトである．

（証明終）

分離公理について復習しておこう．

定義 *1.1.7*（T_0 空間）

X を位相空間とする．任意の $x \neq y \in X$ に対して，開集合 $x \in U$ で $y \notin U$ となるものが存在するとき，X は T_0 **空間**または **Kolmogorov 空間**であるという．

この定義で注意が必要なところは，どちらか一方のみが “よい開近傍” を持てばよいと主張しているところである．両方に存在を要請したものを T_1 空間という．

定義 *1.1.8*（T_1 空間）

X を位相空間とする．任意の $x \neq y \in X$ に対して，開集合 $x \in U_x$ と $y \in U_y$ が存在して，$y \notin U_x$ かつ $x \notin U_y$ が成り立つとき，X は T_1 **空間**または **Fréchet 空間**であるという．

Hasdorff 空間の定義はよく知られているので述べないが，Hausdorff 空間は T_1 空間であることに注意する．そこで Hausdorff 空間は T_2 空間とも呼ばれる．T_1 空間は，Hausdorff 空間で成り立つ「一点集合が閉」という情報を抜き出したものと捉えることができる．

命題 *1.1.9*

位相空間 X が T_1 であることと，任意の $x \in X$ に対して $\{x\}$ が閉であることは同値である．

証明.

($\Longrightarrow$)

任意の $y \neq x \in X$ に対して，開近傍 $y \in U_y$ で $x \notin U_y$ となるものがとれるので，$y \notin \overline{\{x\}}$ である．よって $\{x\} = \overline{\{x\}}$ となり閉集合である．

($\Longleftarrow$)

任意の $y \neq x \in X$ に対して，$U_y = X \setminus \{x\}$ とおくとこれは開集合で，$x \notin U_y$ である．同様に $\{y\}$ も閉なので，$U_x = X \setminus \{y\}$ とすればよい．

（証明終）

次の命題はこれらの空間について非自明な例を提供するものである．

命題 *1.1.10*

A を環とし，任意の $P \in \operatorname{Spec} A$ をとる．このとき $\overline{\{P\}} = V(P)$ である．

証明.

$\overline{\{P\}} = \bigcap_{P \in V(I)} V(I) = V(P)$ である．（証明終）

系 *1.1.11*

A を環とする．$P \in \operatorname{Spec} A$ について $\{P\}$ が閉集合であることと，P が極大イデアルであることは同値である．

さて T_0, T_1 空間について例を見てみよう．

例 *1.1.12*

(i) $X \neq \emptyset$ に密着位相をいれると，これは T_0 ではない．

(ii) 環 A に対して $\operatorname{Spec} A$ は T_0 である．

(iii) 環 A が極大でない素イデアルを持つとき，$\operatorname{Spec} A$ は T_1 ではない．

(iv) 無限集合 X に**補有限位相 (cofinite topology)** を入れたもの，すなわち；

$$\mathcal{O} = \{U \subset X \mid \#(X \setminus U) < \infty\} \cup \{\emptyset\}$$

を開集合系とするような位相空間 $(X, \mathcal{O})$ は T_1 だが Hausdorff ではない．

証明.

(i) 明らか.

(ii) 任意の $P \neq Q \in \operatorname{Spec} A$ をとる．すると $P \not\subset Q$ または $Q \not\subset P$ であり，これは $Q \in D(P)$ または $P \in D(Q)$ を意味する．いま $P \notin D(P)$ だから $\operatorname{Spec} A$ は T_0 である．

(iii) P を A の極大でない素イデアルとすると，系 1.1.11 によって P は閉点ではない．よって $\operatorname{Spec} A$ は T_1 でない（命題 1.1.9）.

(iv) 任意の $x \in X$ に対して，$\{x\}$ は有限集合だから定義より閉である．よって X は T_1 である．また空でない開集合 $U_1, U_2 \subset X$ について $A_i = X \setminus U_i$ は有限集合で，$A_1 \cup A_2 = X \setminus (U_1 \cap U_2)$ も有限なので $U_1 \cap U_2$ は空でない開集合をなすから X は Hausdorff にはなりえない．

（証明終）

この例から $\operatorname{Spec} A$ が Hausdorff ならば $P \in \operatorname{Spec} A$ はすべて極大イデアルであるが，実は逆が成り立つ．

命題 *1.1.13*

A を環とするとき，次は同値である．

(i) $\operatorname{Spec} A$ は Hausdorff 空間である．

(ii) $\operatorname{Spec} A$ は T_1 空間である．

(iii) すべての $P \in \operatorname{Spec} A$ は極大イデアルである．

証明.

(iii)$\Longrightarrow$(i) 以外は既にわかっているから，これを示す．環 A に対して，任意の $P \neq Q \in \operatorname{Spec} A$ をとる．$A \setminus (P \cap Q)$ が生成する積閉集合を S とおく．もし $0 \notin S$ であると仮定すると，A_S は零環ではないので少なくとも 1 つ素イデアルを持つ．それに対応する A の素イデアルを P' とすると，$P' \cap S = \emptyset$ だから $P' \subset P \cap Q \subset P, Q$ となり，P' も極大イデアルだから $P = P' = Q$ となり矛盾する．よって $0 \in S$ であるから，ある $a \in P, b \in Q$ で $a \notin Q, b \notin P, ab = 0$ であるものがとれる．このとき $P \in D(b), Q \in D(a)$ で $D(a) \cap D(b) = D(ab) = D(0) = \emptyset$ となる．（証明終）

§ 2　Sober 空間

この節では sober 空間を定義し，分離公理との関係を見よう．

定義 *1.2.1*（既約）

X を位相空間とする．$Y \neq \emptyset \subset X$ に対して，任意の閉集合 $A_1, A_2 \in \mathcal{A}_X$ について $Y \subset A_1 \cup A_2$ ならば $Y \subset A_1$ または $Y \subset A_2$ が成り立つとき，Y は**既約 (irreducible)** であるという．

この定義を開集合を用いて言い換えておくと，$Y \subset X$ が既約であることと，任意の開集合 $U_1, U_2 \in \mathcal{O}_X$ に対して $Y \cap U_1, Y \cap U_2 \neq \emptyset$ ならば $Y \cap (U_1 \cap U_2) \neq \emptyset$ となることは同値である．

命題 *1.2.2*

X を位相空間とする．$Y \subset X$ が既約であることと，その閉包 $\overline{Y}$ が既約であることは同値である．

証明.

($\Longrightarrow$)

閉集合 A_1, A_2 について $\overline{Y} \subset A_1 \cup A_2$ であるとすると，$Y \subset \overline{Y}$ だから $Y \subset A_1$ または $Y \subset A_2$ である．いま A_1, A_2 は閉集合だから $\overline{Y} \subset A_1$ または $\overline{Y} \subset A_2$ であり，$\overline{Y}$ は既約である．

($\Longleftarrow$)

$Y \subset A_1 \cup A_2$ であるとすると，$A_1 \cup A_2$ も閉なので $\overline{Y} \subset A_1 \cup A_2$ で，仮定から $Y \subset \overline{Y} \subset A_1$ または $Y \subset \overline{Y} \subset A_2$ となり Y は既約である．

（証明終）

この命題により既約閉集合を考えることが多いが，既約性は微分幾何で扱うような Hausdorff な空間ではなく，代数幾何学で扱う Zariski 位相において重要な概念である．実際次の事実が成り立つ．

命題 *1.2.3*

X を Hausdorff であるとすると，X の既約部分集合は一点集合である．

証明.

$Y \subset X$ を既約であるとする．任意の $y \in Y$ に対して，開近傍 $y \in U_y$ をとると，$Y \cap U_y \neq \emptyset$ である．そこで任意の $y' \in Y$ に対して同様に開近傍 $U_{y'}$ をとると Y の既約性から $U_y \cap U_{y'} \neq \emptyset$ なので，X は Hausdorff だから $y = y'$ でなければならない．（証明終）

一般の位相空間 X と $x \in X$ に対して $\{x\}$ は明らかに既約だから，既約閉集合 $\overline{\{x\}}$ が構成できる．逆に既約閉集合 Y が $Y = \overline{\{x\}}$ のように表せているとき x を Y の**生成点**という．

定義 *1.2.4*（生成点）

X を位相空間とする．既約閉集合 $Y \subset X$ に対して，ある $x \in X$ によって $Y = \overline{\{x\}}$ と表せるとき，x を Y の**生成点 (generic point)** という．

定義 *1.2.5*（sober 空間）

X を位相空間とする．任意の既約閉集合が一意的な生成点を持つとき，X は **sober** であるという．

sober は “しらふ” だとか “地味な” とかいった意味である．*[1]

Sober 空間は分離公理のなかで次のように位置づけられる．

命題 *1.2.6*

位相空間 X について，Hausdorff 空間は sober であり，また sober ならば T_0 空間である．

証明.

Hausdorff 空間が sober であることは命題 1.2.3 でみた．X が sober であるとしよう．任意の $x \neq y \in X$ をとる．生成点の一意性から $\overline{\{x\}} \neq \overline{\{y\}}$ である．さて $x \in \overline{\{y\}}$ であるとすると，$\overline{\{x\}} \subsetneq \overline{\{y\}}$ であるから $y \notin \overline{\{x\}}$ でなければならず，$U_y = X \setminus \overline{\{x\}}$ とおけば $y \in U_y$ かつ $x \notin U_y$ である．$x \notin \overline{\{y\}}$ ならば $U_x = X \setminus \overline{\{y\}}$ とすればよい．（証明終）

*1 なにかうまい訳はないだろうか．“穏健” とかが良いか？

実はより強く，生成点の言葉で T_0 空間の言い換えを与えることができる．

命題 *1.2.7*

位相空間 X に対して，T_0 空間であることと，既約閉集合の生成点が高々 1 つであることは同値である．

証明.

($\Longrightarrow$)

既約閉集合 Y が２つ以上の生成点を持つ，すなわち $x \neq y \in X$ が存在して $Y = \overline{\{x\}} = \overline{\{y\}}$ であると仮定する．X が T_0 なので，ある開集合 $U \subset X$ が存在して $x \in U$ かつ $y \notin U$ としてよい．すると $x \notin X \setminus U$ だが，$y \in X \setminus U$ でこれは閉集合なので $x \in \overline{\{x\}} = \overline{\{y\}} \subset X \setminus U$ となって矛盾する．よって生成点は存在すれば高々 1 つである．

($\Longleftarrow$)

任意の $x \neq y \in X$ に対して，$\overline{\{x\}}, \overline{\{y\}}$ は既約閉で生成点を持つので，仮定から一意的な生成点を持つ．よってあとは命題 1.2.6 の証明と同じである．

（証明終）

さて，sober 空間についていくつかの例をみよう．

命題 *1.2.8*

A を環とする．$\operatorname{Spec} A$ の閉集合 Y について，Y が既約であることと $P \in \operatorname{Spec} A$ によって $Y = V(P)$ とかけることは同値であり，特に $\operatorname{Spec} A$ は sober である．

証明.

まず Y を既約閉集合とする．定義から $Y = V(I)$ とかけ，$V(\sqrt{I}) = V(I)$ なので $\sqrt{I} = I$ であると仮定してよい．$ab \in I$ であるとすると，$V(I) \subset V(a) \cup V(b)$ で，既約性から $V(I) \subset V(a)$ または $V(I) \subset V(b)$ である．よって $a \in \sqrt{I} = I$ または $b \in \sqrt{I} = I$ となり，I は素イデアルである．

次に $P \in \operatorname{Spec} A$ に対して $Y = V(P)$ を考えると，命題 1.1.10 により $Y = \overline{\{P\}}$ であり，これは既約である．（証明終）

例 *1.2.9*

sober 性と T_1 は比較できない．実際次のような例がある．

(i) A を極大でない素イデアルが存在する環とすると，$\operatorname{Spec} A$ は sober だが T_1 空間ではない．

(ii) X を無限集合すると，補有限位相は T_1 だが sober ではない．

(iii) $\mathbb{R}$ 上の Euclid 位相 $\mathcal{O}_{\mathbb{R}}$ を考える．$X = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ に；

$$\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_{\mathbb{R}} \cup \{\infty \in U \mid X \setminus U\text{: finite}\}$$

によって位相を定めると，X は T_1 かつ sober だが Hausdorff ではない．

証明.

(i) 系 1.1.11，命題 1.2.8.

(ii) 例 1.1.12 において X が T_1 であることはすでにみた．X 全体が既約だが生成点を持たない閉集合なので

X は sober ではない．

(iii) X の閉集合系は $\mathcal{A}_X = \{A \cup \{\infty\} \mid A \in \mathcal{A}_{\mathbb{R}}\} \cup \{\text{finite}\}$ で与えられるので X は T_1 である．また Y を X の既約閉集合とすると，Y は有限であるか，$A \in \mathcal{A}_{\mathbb{R}}$ を用いて $Y = A \cup \{\infty\}$ と表せるかのどちらかである．Y が有限なら既約性から一点に限るので，一意的な生成点を持つ．$Y = A \cup \{\infty\}$ と書けているとする．任意の $\mathbb{R}$ の閉集合 A_1, A_2 について $Y \subset (A_1 \cup \{\infty\}) \cup (A_2 \cup \{\infty\})$ であるから，既約性より $A \subset A_1$ または $A \subset A_2$ であって，これは A が $\mathbb{R}$ において既約なことを意味する．よって A は一点で，このとき Y は既約ではない．ゆえに X の既約閉集合は 1 点に限り，X は sober である．また X は Hausdorff でない．実際 ∞ と任意の $\mathbb{R}$ の点が分離できない．

（証明終）

§ 3　Spectral 空間

索引

英字

S

か

さ

参考文献

[1] P. Balmer (2005) “The spectrum of prime ideals in tensor triangulated categories,” *J. reine angew. Math.*, Vol. 588, pp. 149–168, DOI: 10.1515/crll.2005.2005.588.149.

[2] K. Belaid, O. Echi, and R. Gargouri (2004) “A-spectral spaces,” *Topology and its Applications*, Vol. 138, No. 1, pp. 315–322, DOI: 10.1016/j.topol.2003.08.009.

[3] M. Dickmann, N. Schwartz, and M. Tressl (2019) *Spectral spaces*, Vol. 35 of New Mathematical Monographs: Camb. Univ. Press.

[4] R. Hartshorne (1977) *Algebraic Geometry*: Springer, （高橋宣熊・松下大介訳，『代数幾何学 1,2,3』，シュプリンガー・フェアラーク東京，2004 年）.

[5] M. Hochster (1969) “Prime ideal structure in commutative rings,” *Trans. Amer. Math. Soc.*, Vol. 142, pp. 43–60, DOI: 10.1090/S0002-9947-1969-0251026-X.

[6] H. Matsumura (1986) *Commutative Ring Theory*，M. Reid 訳: Cambridge Univ. Press.

[7] M. H. Stone (1936) “The Theory of Representation for Boolean Algebras,” *Trans. Amer. Math. Soc.*, Vol. 40, No. 1, pp. 37–111, DOI: 10.2307/1989664.

[8] M. H. Stone (1938) “Topological representations of distributive lattices and Brouwerian logics,” *Časopis pro pěstování matematiky a fysiky*, Vol. 067, No. 1, pp. 1–25, DOI: 10.21136/CPMF.1938.124080.

[9] 安藤遼哉 (2021) 「可換環論の基礎（未完）」，URL：`https://ryoya9826.github.io/files/ring.pdf`.

[10] ペーパー (@paper3510mm) (2019a) 「Spectral 空間と分配束の Stone 双対性」，URL：`https://paper3510mm.github.io/pdf/spectral.pdf`.

[11] ペーパー (@paper3510mm) (2019b) 「Spectral 空間と Hochster の環構成」，URL：`https://paper3510mm.github.io/pdf/hochster.pdf`.

[12] 松井紘樹 (2019) 「三角圏のスペクトラムとその可換環論への応用」，『第 64 回代数学シンポジウム報告集』.

[13] 松村英之 (1980) 『可換環論（復刊）』，共立出版.