EXERCÍCIOS

Resolva cada um dos seguintes problemas de valor inicial, empregando as transformadas de Laplace.

1. $(D^2 + 2D + 1)y = e^t$; $y(0) = y'(0) = 0$.

2. $\dfrac{dy}{dt} + 3y = t \operatorname{sen} at$; $y(0) = -1$.

3. $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 2\dfrac{dy}{dt} + 3y = 3t$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

4. $(D^2 - 4D + 4)y = 2e^{2t} + \cos t$; $y(0) = \frac{3}{25}$, $y'(0) = -\frac{4}{25}$.

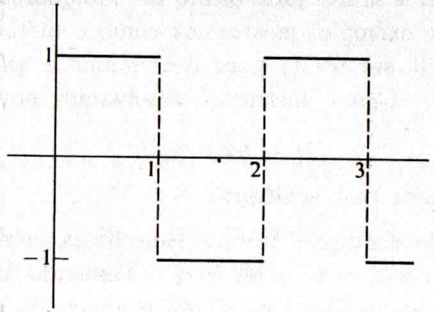

Fig. 5-11

5. $\dfrac{dy}{dt} + ky = h(t)$; $y(0) = 0$, com k constante
e o gráfico de $h(t)$ dado pela Fig. 5-11.

6. $\dfrac{d^2y}{dt^2} - 2\dfrac{dy}{dt} + y = te^t \operatorname{sen} t$; $y(0) = y'(0) = 0$.

7. $\dfrac{d^3y}{dt^3} - \dfrac{d^2y}{dt^2} + 4\dfrac{dy}{dt} - 4y = -3e^t + 4e^{2t}$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 5$, $y''(0) = 3$.

8. $\dfrac{d^4y}{dt^4} + 3\dfrac{d^3y}{dt^3} + \dfrac{d^2y}{dt^2} - 3\dfrac{dy}{dt} - 2y = t$; $y(0) = y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 0$.

9. $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 4\dfrac{dy}{dt} + 4y = \begin{cases} 0, & t \leq 2; \\ e^{-(t-2)}, & t > 2; \end{cases}$ $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$.

10. $\dfrac{d^2y}{dt^2} + y = t^2 + 1$; $y(\pi) = \pi^2$, $y'(\pi) = 2\pi$. [*Sugestão*: Faça primeiro a substituição $x = t - \pi$.]

11. $\dfrac{d^2y}{dt^2} - y = -10 \operatorname{sen} 2t$; $y(\pi) = -1$, $y'(\pi) = 0$. [*Sugestão*: Veja Exercício 10.]

12. $\dfrac{d^4y}{dt^4} + y = \begin{cases} 0, & t \leq 1; \\ t - 1, & t > 1; \end{cases}$ $y(1) = y'(1) = 1$, $y''(1) = y'''(1) = 0$.
[*Sugestão*: Veja Exercício 10.]

13. Use as transformadas de Laplace para resolver a equação

$$\frac{dy}{dt} + 2y + \int_0^t y(t)\,dt = \begin{cases} t, & t < 1, \\ 2 - t, & 1 \le t \le 2, \\ 0, & t > 2, \end{cases}$$

dentro da condição inicial $y(0) = 1$.

14. (a) Suponhamos que $y(t)$ seja de ordem exponencial e seja uma solução da equação de Euler

$$t^2 \frac{d^2y}{dt^2} + at\frac{dy}{dt} + by = 0,$$

sendo a, b constantes. Mostre que $\mathfrak{L}[y(t)]$ também satisfaz a uma equação de Euler.

(b) Demonstre que o resultado de (a) é válido também para qualquer solução (de ordem exponencial) de uma equação de Euler de ordem n.

15. Mostre que se $f(t)$ e $f'(t)$ são de ordem exponencial, e se $f(t)$ é contínua para todo $t > 0$, então

$$\lim_{s\to\infty} s\mathfrak{L}[f] = f(0^+).$$

***16.** A função de Bessel de primeira espécie de ordem zero, designada como J_0, é, por definição, a solução da equação diferencial

$$t\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} + ty = 0$$

que é definida para $t = 0$ e satisfaz $J_0(0) = 1$ Prove que

$$\mathfrak{L}[J_0(t)] = \frac{1}{\sqrt{1 + s^2}}.$$

[*Sugestão*: Mostre que $\mathfrak{L}[J_0]$ é uma solução da equação diferencial

$$(1 + s^2)\varphi'(s) + s\varphi(s) = 0,$$

e aplique o Exercício 15. Suponha que J_0 seja de ordem exponencial.]

***17.** Desenvolvendo $s\mathfrak{L}[J_0] = s(s^2 + 1)^{-1/2}$ (veja Exercício 16) numa série binomial, exprima $J_0(t)$ como uma série de potências.