onde c_1 e c_2 são constantes arbitrárias. O leitor deve notar que sem um teorema como o citado acima não haveria nenhuma certeza de que (2.10) inclui *toda* solução da equação dada.

Exemplo 2. A função $y_p(x) = x$ é uma solução da equação não-homogênea.

$$y'' + y = x \tag{2.11}$$

em $(-\infty, \infty)$. (Experimente e veja). Portanto, como $c_1 \operatorname{sen} x + c_2 \cos x$ é a solução geral da equação homogênea associada $y'' + y = 0$, a solução geral de (2.11) é

$$y = x + c_1 \operatorname{sen} x + c_2 \cos x.$$

exercícios

1. Determine a ordem de cada uma das seguintes equações diferenciais lineares nos intervalos indicados.
(a) $xy'' - (2x + 1)y = 3$, em $(-\infty, \infty)$ (b) $(D + 1)^3 y = 0$, em $(0, 1)$
(c) $(x + |x|)y''' + (\operatorname{sen} x)y' = 2e^x$, em $(-1, 1)$; em $(0, \infty)$
(d) $\sqrt{x}\, y'' - 2y' + (\operatorname{sen} x)y = \ln x$, em $(1, \infty)$
(e) $(x + 1 + |x + 1|)y''' + (x + |x|)y' + 2y = 0$, em $(-\infty, \infty)$; em $(0, \infty)$; em $(-1, 0)$.

2. Em cada um dos casos seguintes mostre que a função dada é uma solução da equação diferencial linear correspondente, e ache o intervalo (ou intervalos) em que isto acontece.
(a) $xy'' + y' = 0$; $\ln(1/x)$
(b) $4x^2y'' + 4xy' + (4x^2 - 1)y = 0$; $\sqrt{2/(\pi x)}\operatorname{sen} x$
(c) $(1 - x^2)y'' - 2xy' + 6y = 0$; $3x^2 - 1$
(d) $x^2y'' - xy' + y = 1$; $1 + 2x \ln x$
(e) $(1 - x^2)y'' - 2xy' + 2y = 2$; $x \operatorname{tgh}^{-1} x$

3. (a) Mostre que $e^{ax} \cos bx$ e $e^{ax} \operatorname{sen} bx$ são soluções linearmente independentes da equação
$$(D^2 - 2aD + a^2 + b^2)y = 0, \qquad b \neq 0$$
em $(-\infty, \infty)$.
(b) Qual é a solução geral desta equação?
(c) Ache a solução particular da equação em (a) que satisfaz às condições "iniciais" $y(0) = b$, $y'(0) = -a$.

4. (a) Mostre que e^{ax} e xe^{ax} são soluções linearmente independentes da equação
$$(D - a)^2 y = 0$$
(b) Ache a solução particular desta equação que satisfaz às condições "iniciais" $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.

5. (a) Verifique que $\operatorname{sen}^3 x$ e $\operatorname{sen} x - \frac{1}{3}\operatorname{sen} 3x$ são soluções de
$$y'' + (\operatorname{tg} x - 2 \operatorname{cotg} x)y' = 0$$
em qualquer intervalo em que $\operatorname{tg} x$ e $\operatorname{cotg} x$ sejam ambas definidas. Estas soluções são linearmente independentes?
(b) Ache a solução geral desta equação.

6. Mostre que $\frac{1}{9}x^3$ e $\frac{1}{9}(x^{3/2} + 1)^2$ são soluções da equação diferencial não-linear $(dy/dx)^2 - xy = 0$ em $(0, \infty)$. A soma destas funções é uma solução?

7. Em cada um dos casos seguintes mostre que as funções dadas geram o espaço de soluções da equação diferencial correspondente. Ache uma base do espaço de soluções em cada caso e use-a para obter a solução geral da equação em questão.
(a) $y'' - y = 0$; $\operatorname{senh} x$, $2e^{-x}$, $-\cosh x$, em $(-\infty, \infty)$
(b) $x^2y'' - 5xy' + 9y = 0$; $2x^3 \ln x$, x^3, $x^3(2 \ln x - 1)$, em $(0, \infty)$
(c) $y'' + 4y = 0$; $\operatorname{sen} 2x$, $-2\cos 2x$, $-\cos(2x - 3)$, em $(-\infty, \infty)$
(d) $(1 - x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$; $3x$, $\dfrac{x}{2} \ln \dfrac{1 + x}{1 - x} - 1$, $\dfrac{x}{2}$, em $(-1, 1)$

8. Seja L um operador diferencial linear definido num intervalo I, e suponhamos que y_1 e y_2 são, respectivamente, soluções das equações
$$Ly = h_1 \quad \text{e} \quad Ly = h_2.$$
Mostre que $y_1 + y_2$ é uma solução de $Ly = h_1 + h_2$.

2.3. equações de primeira ordem

Sob muitos aspectos as mais simples de todas as equações diferenciais são as equações lineares de ordem um, isto é, as equações da forma

$$a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = h(x), \tag{2.12}$$

onde $a_0(x)$, $a_1(x)$, e $h(x)$ são contínuas num intervalo I, e $a_1(x) \not\equiv 0$ em I. Nesta seção resolveremos (2.12) acrescentando a hipótese a mais de que é normal em I. Sendo assim, $a_1(x) \neq 0$ em todo ponto de I e podemos reescrever a equação em *forma normal* como

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x), \tag{2.13}$$

onde $p(x) = a_0(x)/a_1(x)$, $q(x) = h(x)/a_1(x)$.

Já vimos que a solução geral de (2.13) é $y = y_p + y_h$, onde y_p é uma solução "particular" e y_h é a solução geral da equação homogênea

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0. \tag{2.14}$$