# Equações Exatas

Seja $F:\Omega\subset\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ diferenciável. Lembramos que

$$dF=\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy.$$

Podemos escrever

$$dF=M(x,y)\,dx+N(x,y)\,dy$$

com $M(x,y)=\dfrac{\partial F}{\partial x}$ e $N(x,y)=\dfrac{\partial F}{\partial y}$.

Com tal observação, notamos que:

**Lema:** Seja

$$M(x,y)\,dx+N(x,y)\,dy=0, \quad (*)$$

onde M e N estão definidas em uma região $R\subset\mathbb{R}^2$ e suponha que existe uma função diferenciável F tal que

$$M(x,y)=\frac{\partial F}{\partial x} \text{ e } N(x,y)=\frac{\partial F}{\partial y}\neq 0$$

sejam contínuas em R. Então a expressão

$$F(x,y)=C$$

onde C é uma constante arbitrária, define a solução geral de $(*)$ em R.

**Definição:** Uma equação diferencial

$$M(x,y)\,dx+N(x,y)\,dy=0$$

é exata se existir uma função $F:\Omega\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ com $F\in\mathcal{C}^2$, tal que

$$\frac{\partial F}{\partial x}=M(x,y) \text{ e } \frac{\partial F}{\partial y}=N(x,y).$$

Teorema: Uma equação diferencial

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$$

é exata se, e somente se,

$$\frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial y}.$$

Prova:

($\Rightarrow$) Suponha que

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$$

seja exata. Dessa forma, existe $F:\Omega\subset\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{\partial F}{\partial x} = M \quad \text{e} \quad \frac{\partial F}{\partial y} = N.$$

Logo

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y\,\partial x} \quad \text{e} \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}.$$

Desde que $F \in \mathcal{C}^2$ segue que

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

($\Leftarrow$) Agora vamos supor que

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Vamos provar que existe $F$ tal que

$$\frac{\partial F}{\partial x} = M \quad \text{e} \quad \frac{\partial F}{\partial y} = N,$$

onde

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$$

é exata.

Suponha que

$$\frac{\partial F}{\partial x} = M(x,y).$$

Logo

$$F(x,y) = \int M(x,y)\,dx + \phi(y).$$

Derivando tal expressão em relação a y temos

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\,dx + \frac{d\phi(y)}{dy}.$$

Queremos ter também

$$\frac{\partial F}{\partial y} = N.$$

Então

$$N(x,y) = \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\,dx + \frac{d\phi(y)}{dy};$$

ou

$$\frac{d\phi(y)}{dy} = N(x,y) - \int \frac{\partial M(x,y)}{\partial y}\,dx.$$

Assim,

$$\phi(y) = \int \left[ N(x,y) - \int \frac{\partial M}{\partial y}(x,y)\,dx \right] dy$$

Logo

$$F(x,y) = \int M(x,y)\,dx + \int \left[ N(x,y) - \int \frac{\partial M(x,y)}{\partial y}\,dx \right] dy.$$

Basta observar que

$$\frac{\partial F}{\partial x} = M(x,y) + \frac{\partial}{\partial x} \int \left[ N(x,y) - \int \frac{\partial M(x,y)}{\partial y}\,dx \right] dy.$$

$$= M(x,y) + \int \Big[ \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} N(x,y) - \frac{\partial M(x,y)}{\partial y}}_{=0} \Big] dy$$

e

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \int M(x,y)\,dx + \frac{\partial}{\partial y} \int \left[ N(x,y) - \int \frac{\partial M(x,y)}{\partial y}\,dx \right] dy$$

$$= \int \frac{\partial M(x,y)}{\partial y}\,dx + N(x,y) - \int \frac{\partial M(x,y)}{\partial y}\,dx$$

$$= N(x,y).$$

Logo

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$$

é exata.

Exemplo: Resolva

$$(3x^2 + 4xy)\,dx + (2x^2 + 2y)\,dy = 0.$$

Vamos verificar se a equação é exata.

Sendo $M(x,y) = 3x^2 + 4xy$ e $N(x,y) = 2x^2 + 2y$, temos

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 4x \quad \text{e} \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 4x.$$

Consequentemente a equação é exata.

Vamos considerar

$$\frac{\partial F}{\partial x} = M(x,y) = 3x^2 + 4xy,$$

e

$$\frac{\partial F}{\partial y} = N(x,y) = 2x^2 + 2y$$

Da primeira igualdade, temos

$$F(x,y) = \int 3x^2 + 4xy \, dx + \phi(y).$$

$$= x^3 + 2x^2 y + \phi(y).$$

A segunda nos diz que

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2x^2 + \frac{d\phi}{dy} = 2x^2 + 2y.$$

Logo

$$\frac{d\phi}{dy} = 2y \implies \phi(y) = y^2 + C_0.$$

Logo

$$F(x,y) = x^3 + 2x^2 y + y^2 + C_0.$$

Do lema segue que a solução

da equação é

$$x^3 + 2x^2y + y^2 + C_0 = C$$

ou,

$$\boxed{x^3 + 2x^2y + y^2 = c}$$