

Equações Diferenciais Lineares

Marcio Antônio de Andrade Bortoloti

mbortoloti@uesb.edu.br

<https://mbortoloti.github.io>

Equações Diferenciais (Aula do dia 08/12/2021)

Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas - DCET
Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia

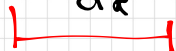
Equações Diferenciais Lineares

Dúvida ①

$$x D(f(x)) \stackrel{?}{=} D(x f(x))$$



$$x \frac{df(x)}{dx} \stackrel{?}{=} \frac{d}{dx}(x f(x)) = f(x) + x \frac{df}{dx}$$



$\leftarrow \quad = ? \quad \rightarrow$

Dúvida ②

$$D(x - 1) = D(x) - D(1) = 1 - 0 = 1$$

$$x D(x) \neq x D$$

$$D: \mathcal{C}^1(I) \longrightarrow \mathcal{C}(I)$$
$$f \longmapsto D(f) = \frac{df}{dx}$$

Equações Diferenciais Lineares

$$D: \mathcal{C}^n(I) \longrightarrow \mathcal{C}(I)$$

$$\underline{D(x) \neq x D}$$

$D \in \mathcal{L}_{lin}$

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x) = \sin(x)$$

$$\sin(x) \neq x \sin$$

Não tem sentido!

$$\begin{array}{|l} \text{Álgebra Linear} \\ T: V \longrightarrow W \text{ (Transp. linear)} \end{array}$$

$$\underline{\text{Álgebra Linear}}$$

A, B matrizes de ordem 3.

$$AB \neq BA$$

$$D(x) \neq x D(v)$$

Equações Diferenciais Lineares

Definição: Uma equação diferencial linear de ordem n em um intervalo $I \subset \mathbb{R}$ é, por definição,

$$Ly = h(x),$$

onde $h \in \mathcal{C}(I)$ e $L: \mathcal{C}^n(I) \rightarrow \mathcal{C}(I)$ tal que

$$L(y) = q_n(x) D^n y + \dots + q_1(x) Dy + q_0(x) y.$$

Exemplo: Equação linear: $y'' + y' + y = \cos x$.

Note que: $L(y) = D^2 y + Dy + y$.

Exemplo: Equação não-linear: $y y'' + y' + y = \cos x$

Equações Diferenciais Lineares

Exemplo: (Equação linear)

$$y'' + (y)^2 = 2 \Leftrightarrow y' + \boxed{y}y = ?$$

Exemplo: (Equação linear)

$$y'' = \operatorname{sen} y$$

$$\Leftrightarrow y'' - \boxed{\operatorname{sen} y} = 0$$

De outra forma, uma equação diferencial linear de ordem n pode ser escrita da forma

$$a_n(x) \frac{dy}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{dy}{dx^{n-1}} + \dots + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = h(x) \quad \text{ou}$$

$$a_n(x) y^{(n)} + a_{n-1}(x) y^{(n-1)} + \dots + a_1(x) y' + a_0(x) y = h(x).$$

Equações Diferenciais Lineares

Observação:

Equações que envolvem derivadas : Equações Diferenciais de uma função y .

A equação que envolve somente derivadas ordinárias
(Equação Diferencial Ordinária)

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

$$ay'' + by' + cy = 0$$

A equação que envolve derivadas parciais
(Equação Diferencial Parcial)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \kappa \Delta u = 0$$
$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

Equações Diferenciais Lineares

Definição: Uma equação diferencial é homogênea se
$$Ly = 0 \quad (Ly = h(x), h(x) \equiv 0).$$

Exemplo:

(i) $y'' + y' = \sin x$ (Não é homogênea)

(ii) $y'' + y' = 0$ (É homogênea)

Dizemos que (iii) é a equação homogênea associada à (i).

Equações Diferenciais Lineares

Definição: Considere a equação diferencial

$$a_n(x)y^{(n)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = h(x) \text{ em } I$$

Se $a_n(x) \neq 0 \quad \forall x \in I$ então dizemos que a referida equação é normal.

Definição: Se $y \in \mathcal{C}^n(I)$ e $Ly = h(x)$ uma equação diferencial, $L: \mathcal{C}^n(I) \rightarrow \mathcal{C}(I)$. Dizemos que y é uma solução da equação diferencial se $Ly = h(x)$.

Equações Diferenciais Lineares

Exemplo: Mostre que $y = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-3t}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$,
é uma solução da equação
 $y'' + 5y' + 6y = 0$. $y = y(t)$.

Note que

$$y'(t) = -2c_1 e^{-2t} - 3c_2 e^{-3t}.$$

$$y''(t) = 4c_1 e^{-2t} + 9c_2 e^{-3t}.$$

Logo

$$y'' + 5y' + 6y = \left(\cancel{4c_1 e^{-2t}} + \cancel{9c_2 e^{-3t}} \right) - 5 \left(\cancel{2c_1 e^{-2t}} + \cancel{3c_2 e^{-3t}} \right) + 6 \left(\cancel{c_1 e^{-2t}} + \cancel{c_2 e^{-3t}} \right) = 0.$$

Equações Diferenciais Lineares

Obs: Considere a equação homogênea normal de ordem n
$$Ly = 0 \text{ em } I.$$

As soluções dessa equação formam o núcleo de L .

Como $L: \mathcal{C}^n(I) \rightarrow \mathcal{C}(I)$ segue que o núcleo de L é um subespaço de $\mathcal{C}^n(I)$. O conjunto das soluções de $Ly = 0$ é um subespaço de $\mathcal{C}^n(I)$

Este subespaço é chamado espaço solução de $Ly = 0$.

Teorema: O espaço solução de qualquer equação diferencial linear de ordem n normal homogênea é um subespaço de dimensão n de $\mathcal{C}^n(I)$.

A prova não é apresentada adiante

Equações Diferenciais Lineares

Base: Seja V um espaço vetorial. Dizemos que

$$B = \{f_1, f_2, \dots, f_n\}$$

é uma base de V se $f_i \in V$ e

(i) B é um gerador de V

(ii) B é linearmente independente.

* B é um gerador de V se $\forall f \in V$ tivermos

$$f = \alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_n f_n.$$

* B é L.I. $\Leftrightarrow \alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_n f_n = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$.

Equações Diferenciais Lineares

Consequência: Se $y_1(x), \dots, y_n(x)$ são soluções linearmente independentes de $Ly=0$ então toda solução de $Ly=0$ é da forma

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \dots + C_n y_n(x),$$

onde $L: \mathcal{C}^n(I) \rightarrow \mathcal{C}(I)$. ($Ly=0$ equação de ordem n)

Prova:

Seja S o conjunto soluções de $Ly=0$. Logo $y_i \in S$, $i=1, \dots, n$. Como temos n soluções e a dimensão de S é n . Logo $\{y_1, \dots, y_n\}$ é uma base de S .

Assim, se φ é uma solução de $Ly=0$ então $\varphi \in S$.