como $u = ye^x$, resulta que a expressão

$$ye^x + \ln|y| = c$$

determina a solução geral da equação de partida. Finalmente, a solução suprimida $u = 0$ de (8.31) fornece a solução $y = 0$ de (8.30).

exercícios

Resolva cada uma das seguintes equações diferenciais

1. $(x + 1)(y - 1)\,dx + (x - 1)(y + 1)\,dy = 0$
2. $\cos y\,dx + x \operatorname{sen} y\,dy = 0$
3. $y' = x^{-m}y^n$, m, n inteiros positivos
4. $x\,dx + e^{(x+y)} \cos y\,dy = 0$
5. $xy\,dx + (x^2 + 1)e^{y^2}\,dy = 0$
6. $(xy^2 + y^2 - x - 1)\,dx + (y - 1)\,dy = 0$
7. $x\,dx + (3x - y - 3)\,dy + xy\,(dx + dy) = 0$
8. $\dfrac{\sqrt{1 + y}}{x}\,dx + xy\,dy = 0$
9. $x \ln(xy)\,dx + \ln y\,(dy - x\,dx) = 0$
10. $\operatorname{sen}(x + y)\,dx + \operatorname{sen} y(\operatorname{cosec} x\,dy - \cos x\,dx) = 0$
11. $e^{x+y} \operatorname{sen} x\,dx + (2y + 1)e^{-y^2}\,dy = 0$
12. $y' = \dfrac{y^2 - 9}{x^2 + 4}$
13. $(x^2 + y^2)\,dx + 2xy\,dy = 0$
14. $y' = \dfrac{2x + 3y}{x}$
15. $(x - y)\,dx + (2y - x)\,dy = 0$
16. $3x^2\,dx + (y^2 - 10x^2)\,dy = 0$
17. $y' = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$
18. $(2xy + y^2)\,dx - (x^2 + 2xy)\,dy = 0$
19. $(x + ye^{y/x})\,dx - xe^{y/x}\,dy = 0$
20. $y\left(\ln \dfrac{y}{x} + 1\right)dx - x \ln \dfrac{y}{x}\,dy = 0$
21. $(2x - y - 4)\,dx - (x - 2y + 1)\,dy = 0$
22. $y' = \dfrac{1 - x - y}{x}$
23. $y' = -\dfrac{x + 2y}{2x + 3y + 1}$
24. $(4x + 2y + 1)\,dx - (2x - y - 1)\,dy = 0$
25. $(9x + 7y - 5)\,dx + (5x + 4y - 3)\,dy = 0$
26. $(-x + y - 2)\,dx + (x + y + 2)\,dy = 0$
27. $(4x + 11y - 42)\,dx + (11x - 9y - 37)\,dy = 0$
28. $y' = \dfrac{7y - 9x - 1}{7x + 4y - 37}$
29. Use o Teorema da Função Implícita para verificar que (8.23) determina a solução geral de (8.22).
30. Prove que $f(x, y)$ é homogênea de grau 0 se e somente se f for uma função de y/x.

*31. (a) Seja $f(x, y)$ homogênea de grau λ, e suponha que $\partial f/\partial x$ e $\partial f/\partial y$ existem em uma região R do plano. Mostre que

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = \lambda f(x, y)$$

em R.

(b) Verifique o resultado em (a) calculando $x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y}$ para as funções

$$x^2y + 2x^3, \quad x(x^2 + y^2)^{1/2}, \quad x/y + \operatorname{sen}[(x + y)/y].$$

32. Prove que toda equação da forma

$$y' = \frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2},$$

onde $a_1, \ldots, c_2$ são constantes com $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$, pode ser reduzida a uma equação cujo segundo membro é homogêneo de grau zero pela mudança de variáveis $x = \mu + \alpha$, $y = v + \beta$, onde α e β são constantes.

33. Seja

$$y' = \frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}, \quad a_1, \ldots, c_2 \text{ constantes,}$$

tal que $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$, e suponha $b_1 \neq 0$. Mostre que a substituição $u = a_1x + b_1y$ reduzirá a equação a uma com variáveis separáveis. [*Sugestão*: mostre que existe uma constante k tal que $a_2x + b_2y = k(a_1x + b_1y)$.] Ache uma substituição que faça o mesmo no caso em que $b_1 = 0$, $b_2 \neq 0$.

Use os resultados do Exer. 33 para resolver cada uma das seguintes equações

34. $y' = -\dfrac{x + y + 1}{x + y}$
35. $y' = y - x + 1$
36. $y' = \dfrac{1}{2x + y}$
37. $(2x + 3y + 1)\,dx + (4x + 6y + 5)\,dy = 0$
38. $(x + y + 2)\,dx - (2x - 2y + 3)\,dy = 0$
39. $(6x + 3y - 5)\,dx - (2x + y)\,dy = 0$
40. $dx + (3y - x - 2)\,dy = 0$
41. $5(5x - y + 2)\,dx + (y - 5x + 1)\,dy = 0$

Resolva cada uma das equações seguintes fazendo a mudança de variável indicada.

42. $\left(x + y - 2 + \dfrac{1}{x}\right)dx + (2 - x - y)\,dy = 0, \quad x + y = u$
43. $(2x - 2y + xe^x)\,dx - (2x - 2y - 1)\,dy = 0, \quad x - y = u$
44. $x(x + \sqrt{y})\,dx + 2\sqrt{y}\,dy = 0, \quad y = u^2$
45. $x^2y\,dx - (x^3 + y^5)\,dy = 0, \quad x = uy$
46. $e^{-y}\left(1 + \dfrac{1}{y}\right)dx + \dfrac{x}{y}\,dy = 0, \quad x = ue^{-v}, \quad y = v$
47. $(y^2 - \ln x)\,dx + xy^3\,dy = 0, \quad x = e^u, \quad y = \sqrt{v}$