Solução Numérica de Sistemas Lineares
Análise de Estabilidade

Márcio Antônio de Andrade Bortoloti

Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas - DCET
Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia

Cálculo Numérico

Introdução

Antes de começarmos, vamos apresentar algumas definições e um resultado que serão utilizados.

Definição

Uma transformação linear $A : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$, *onde* $\mathcal{V}$ *é um espaço vetorial com produto interno, é limitada se existir uma constante* $K > 0$ *tal que, para todo* $x \in \mathcal{V}$,

$$\|Ax\| \leq K\|x\|.$$

Definição

Para uma norma de vetor dada, definimos uma norma matricial pondo

$$\|A\| = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

Introdução

Teorema

Toda transformação linear em um espaço de dimensão finita munido de um produto interno é limitada.

Prova:

- Seja $A : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ uma transformação linear;
- Seja $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ uma base ortonormal de $\mathcal{V}$;
- Escreva $K_0 = \max\{\|Ae_1\|, \|Ae_2\|, \cdots, \|Ae_n\|\}$;
- Um vetor arbitrário $x \in \mathcal{V}$ pode ser escrito como

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i.$$

Introdução

- Notemos que

$$
\begin{aligned}
\|Ax\| &= \left\|A\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\Big)\right\| = \left\|\sum_{i=1}^{n} x_i A e_i\right\| \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| \|Ae_i\| \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} \|x\| \|Ae_i\| \\
&\leq K_0 \sum_{i=1}^{n} \|x\| = nK_0 \|x\|
\end{aligned}
$$

Análise de Erro - Estabilidade

- Vamos analisar o erro na solução de
$$Ax = b$$
examinando a estabilidade da solução x relativa a pequenas pertubações em b.
- Seja $Ax = b$ um sistema de ordem n com uma única solução.
- Considere uma solução perturbada do sistema
$$A\tilde{x} = b + r.$$
- Considere o erro dado por
$$e = \tilde{x} - x.$$
- Assim
$$\begin{cases} Ax = b \\ A\tilde{x} = b + r \end{cases}$$
$$\Longrightarrow A\tilde{x} - Ax = r \Longrightarrow A(\tilde{x} - x) = r \Longrightarrow Ae = r.$$

Análise de Erro - Estabilidade

- Note que
$$Ae = r \iff e = A^{-1}r.$$
- Para examinar a estabilidade de $Ax = b$, precisamos estudar o quociente
$$\frac{\|e\|/\|x\|}{\|r\|/\|b\|}$$
- Temos então, que
$$\|r\| \leq \|A\|\|e\| \quad \text{e} \quad \|e\| \leq \|A^{-1}\|\|r\|.$$
- Dividindo a primeira inequação por $\|A\|\|x\|$ e a segunda por $\|x\|$, obtemos
$$\frac{\|r\|}{\|A\|\|x\|} \leq \frac{\|e\|}{\|x\|} \leq \frac{\|A^{-1}\|\|r\|}{\|x\|}$$

Condicionamento de um Sistema

- Sabemos que
$$\|b\| \leq \|A\|\|x\| \quad \text{e} \quad \|x\| \leq \|A^{-1}\|\|b\|$$
- Logo
$$\frac{1}{\|x\|} \leq \frac{\|A\|}{\|b\|} \quad \text{e} \quad \frac{1}{\|A^{-1}\|\|b\|} \leq \frac{1}{\|x\|}$$
- Segue que
$$\frac{\|r\|}{\|A\|\|A^{-1}\|\|b\|} \leq \frac{\|r\|}{\|A\|\|x\|} \leq \frac{\|e\|}{\|x\|} \leq \frac{\|A^{-1}\|\|r\|}{\|x\|} \leq \frac{\|A\|\|A^{-1}\|\|r\|}{\|b\|}$$
- Ou de outra forma
$$\frac{1}{\|A\|\|A^{-1}\|} \cdot \frac{\|r\|}{\|b\|} \leq \frac{\|e\|}{\|x\|} \leq \frac{\|r\|}{\|b\|} \cdot \|A\|\|A^{-1}\|$$
- Estas desigualdades ajudam a definir o número de condicionamento de A
$$\operatorname{cond}(A) = \|A\|\|A^{-1}\|.$$

Condicionamento de um Sistema

- O número de condicionamento de A vai variar de acordo com a norma utilizada, mas é sempre limitada inferiormente por 1:

$$1 \leq \|I\| = \|AA^{-1}\| \leq \|A\|\|A^{-1}\| = \operatorname{cond}(A).$$

Assim, observando

$$\frac{1}{\operatorname{cond}(A)} \cdot \frac{\|r\|}{\|b\|} \leq \frac{\|e\|}{\|x\|} \leq \frac{\|r\|}{\|b\|} \cdot \operatorname{cond}(A),$$

Notamos que

- Se $\operatorname{cond}(A)$ estiver próximo de 1 então pequenas pertubações em b vão gerar pequenas pertubações em x (Solução).
- Mas se $\operatorname{cond}(A)$ for grande então pequenas pertubações em b poderão gerar grandes pertubações em x.

Condicionamento de um Sistema

Observação Dependência de $\operatorname{cond}(A)$ da Norma Utilizada

Definição

Seja A uma matriz quadrada arbitrária. O espectro de A é o conjunto de todos os autovalores de A e será denotado por $\sigma(A)$. O raio espectral é o maior módulo tomado desses autovalores e será denotado por

$$r_\sigma(A) = \max_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda|.$$

Teorema

Seja A uma matriz quadrada arbitrária. Então para qualquer norma matricial tem-se

$$r_\sigma(A) \leq \|A\|.$$

Condicionamento de um Sistema

Prova:

- Seja $\|\cdot\|$ uma norma matricial compatível com a norma vetorial $\|\cdot\|_v$.
- Seja λ um autovalor em $\sigma(A)$ tal que $|\lambda| = r_\sigma(A)$ e seja x o autovetor associado com $\|x\|_v = 1$.
- Então

$$r_\sigma(A) = |\lambda| = |\lambda|\|x\|_v = \|\lambda x\|_v = \|Ax\|_v \leq \|A\|\|x\|_v = \|A\|.$$

e o teorema está provado.

Desse teorema tem-se

$$\mathrm{cond}\,(A) \geq r_\sigma(A) r_\sigma(A^{-1}).$$

De onde segue que

$$\mathrm{cond}\,(A) \geq \max_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda| \max_{\lambda \in \sigma(A^{-1})} |\lambda|$$

Condicionamento de um Sistema

Definição (Norma Espaços de Matrizes)

Seja $\mathcal{M}$ um espaço vetorial e seja $\|\cdot\|$ uma função $\mathcal{M} \to \mathbb{R}$. Então $\|\cdot\|$ é uma norma se

- $\|X\| \geq 0$ *para todo* $X \in \mathcal{M}$ *e* $\|X\| = 0$ *se e somente se* $X = 0$.
- $\|\alpha X\| = |\alpha|\|X\|$ *para todo* $X \in \mathcal{M}$ *e todo escalar* α.
- $\|X + Y\| \leq \|X\| + \|Y\|$ *para todo* $X, Y \in \mathcal{M}$.
- $\|XY\| \leq \|X\|\|Y\|$
- *Se* $x \in \mathcal{V}$ *é um vetor em um espaço vetorial com a norma dada por* $\|x\|_v$ *então está estabelecida a compatibilidade entre as normas* $\|\cdot\|$ *e* $\|\cdot\|_v$ *da forma*

$$\|Ax\|_v \leq \|A\|\|x\|_v.$$

Condicionamento de um Sistema

Como uma ilustração, pode-se comparar algumas normas para vetores e para matrizes.

Normas Vetores	Normas Matrizes
$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|$	$\|A\|_1 = \max_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{n} \|a_{ij}\|$
$\|x\|_2 = \left[\sum_{j=1}^{n} \|x_i\|^2 \right]^{1/2}$	$\|A\|_2 = \sqrt{\mathrm{tr}\,(A^T A)}$
$\|x\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} \|x_i\|$	$\|A\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{n} \|a_{ij}\|$

Análise de Erro - Estabilidade - Um Exemplo

Exemplo:
Considere o sistema linear

$$\begin{cases} 7x_1 + 10x_2 = b_1 \\ 5x_1 + 7x_2 = b_2 \end{cases}$$

As matrizes A e A^{-1} do sistema são

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} -7 & 10 \\ 5 & -7 \end{bmatrix}$$

Temos, para esse exemplo,

$$\text{cond}\,(A)_2 = 223$$

O número de condicionamento de A sugere que o sistema anterior pode ser sensível à alterações em b e em A.

Um Exemplo

Para ilustrar, vamos observar o sistema abaixo

$$\begin{cases} 7x_1 + 10x_2 = 1 \\ 5x_1 + 7x_2 = 0.7 \end{cases}$$

Esse sistema possui a solução $(x_1 = 0, x_2 = 0.1)$.
Agora, observemos o seguinte sistema pertubado

$$\begin{cases} 7\tilde{x}_1 + 10\tilde{x}_2 = 1.01 \\ 5\tilde{x}_1 + 7\tilde{x}_2 = 0.69 \end{cases}$$

Este possui a solução $\tilde{x}_1 = -0.17, \tilde{x}_2 = 0.22$.

Um Exemplo

- Sistema lineares cuja solução é instável com relação a pequenas alterações em b é chamado mal-condicionado.
- O sistema anterior é um exemplo de sistema mal-condicionado.
- Os números $\operatorname{cond}(A)$ e $\operatorname{cond}(A)_*$ são bons indicadores de mal-condicionamento.

Mais um Exemplo

Um exemplo de matriz mal-condicionada é a chamada Matriz de Hilbert de ordem n:

$$H_n = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & & & & \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \cdots & & \frac{1}{2n-1} \end{bmatrix}$$

n	$\text{cond}(H_n)_*$	n	$\text{cond}(H_n)_*$
3	5.24E+02	7	4.75E+08
4	1.55E+04	8	1.53E+10
5	4.77E+05	9	4.93E+11
6	1.50E+07	10	1.60E+13

Mais um Exemplo

Como um exemplo, considere

$$H_3 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \quad H_3^{-1} = \begin{bmatrix} 9 & -36 & 30 \\ -36 & 192 & -180 \\ 30 & -180 & 180 \end{bmatrix}$$

Após o emprego de uma aritmética de ponto flutuante em H_3 e encontrando H_3^{-1} por meio de um programa de inversão de matrizes, obtemos

$$\overline{H}_3 = \begin{bmatrix} 1.0000 & 0.5000 & 0.3333 \\ 0.5000 & 0.3333 & 0.2500 \\ 0.3333 & 0.2500 & 0.2000 \end{bmatrix} \overline{H}_3^{-1} = \begin{bmatrix} 9.062 & -36.32 & 30.30 \\ -36.32 & 193.7 & -181.6 \\ 30.30 & -181.6 & 181.5 \end{bmatrix}$$