Solução Numérica de Equações Não-Lineares: O Método da Bissecção

Márcio Antônio de Andrade Bortoloti

Cálculo Numérico

Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas - DCET
Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia

Sumário

O Método da Bissecção

- Introdução
- Definição
- Convergência
- Exemplo

O Método da Bissecção

Introdução

Assuma que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é contínua e satisfaz $f(a)f(b) < 0$. O Teorema do Valor Intermediário garante que f tem ao menos uma raíz em $[a, b]$.

Consideremos que f tenha somente uma raíz em $[a, b]$.

Algoritmo 1: Método da Bissecção

Entrada: f, a, b, ε

Saída: Raíz de f em $[a, b]$

1 **início**
2   Defina $c = (a+b)/2$
3   **se** $b - c \leq \varepsilon$ **então**
4   Raiz $\leftarrow c$
5   Pare
6   **fim**
7   **se** $f(b) \cdot f(c) \leq 0$ **então**
8         $a \leftarrow c$
9   **senão**
10         $b \leftarrow c$
11   **fim**
12   Retorne ao Passo 2
13 **fim**

Teorema

Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua. Suponha que $[a, b]$ contenha um único zero da função. A sequência x_n determinada pelo Método da Bissecção converge para o zero de f em $[a, b]$.

Prova

- Vamos inciar definindo as sequências a_n, b_n e x_n:

$$
\begin{aligned}
x_n &= \frac{a_n + b_n}{2} \\
a_{n+1} &= \begin{cases} a_n, & \text{se } f(a_n)f(x_n) < 0 \\ x_n, & \text{caso contrário} \end{cases} \\
b_{n+1} &= \begin{cases} b_n, & \text{se } f(b_n)f(x_n) < 0 \\ x_n, & \text{caso contrário} \end{cases}
\end{aligned}
$$

- Nota-se que a_n, b_n e x_n são convergentes. Além disso $a_n \leq x_n \leq b_n$.
- Considere $a_n \to r_a$, $b_n \to r_b$.

- Agora, o método da Bissecção estabelece que

$$\begin{aligned} b_n - a_n &= \frac{1}{2}(b_{n-1} - a_{n-1}) \\ &= \frac{1}{2^2}(b_{n-2} - a_{n-2}) \\ &= \frac{1}{2^3}(b_{n-3} - a_{n-3}) \\ &= \vdots \\ &= \frac{1}{2^n}(b - a) \end{aligned}$$

- Assim

$$\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = \lim_{n\to\infty\to\infty} \frac{1}{2^n}(b - a) = 0$$

- Segue então que

$$\lim_{n\to\infty} b_n - \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

- De onde tem-se

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} a_n$$

- Implicando em

$$r_a = r_b = r.$$

- Segue ainda que

$$\lim_{n\to\infty} x_n = r.$$

- Vamos, agora, mostrar que r é o zero de f.

- Vamos mostar que $f(r) = 0$.
- Por construção tem-se

$$f(a_n)f(b_n) < 0, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

- Vamos usar a continuidade de f.

$$\begin{aligned} 0 &\geq \lim_{n\to\infty} f(a_n)f(b_n) \\ &= \lim_{n\to\infty} f(a_n) \lim_{n\to\infty} f(b_n) \\ &= f\Big(\lim_{n\to\infty} a_n\Big) f\Big(\lim_{n\to\infty} b_n\Big) \\ &= f(r)f(r) = \Big(f(r)\Big)^2 \end{aligned}$$

- Logo chegamos a

$$\Big(f(r)\Big)^2 \leq 0 \quad \text{de onde conclui-se} \quad f(r) = 0.$$

Observação (Estimativa para o Número de Iterações)
Dada uma precisão (ou tolerância) $\epsilon > 0$, pode-se estimar o número de iterações necessárias para se obter a precisão desejada pelo Método da Bissecção.

- Sabe-se que
$$b_n - a_n = \frac{1}{2^n}(b - a).$$
- Desejamo encontrar o valor de $n \in \mathbf{N}$ tal que
$$b_n - a_n < \epsilon \quad \text{ou} \quad \frac{1}{2^n}(b - a) < \epsilon$$
- Resolvendo para n tem-se
$$n > \frac{\log(b - a) - \log \epsilon}{\log 2}.$$

- Se desejarmos encontrar o zero de uma função f com a precisão de $\epsilon = 10^{-6}$ no intervalo $[0.4, 1.8]$, quantas iterações serão necessárias?
- Basta notar que pela relação obtida anteriormente,

$$n > \frac{\log(b-a) - \log \epsilon}{\log 2},$$

é suficiente fazer um cálculo simples:

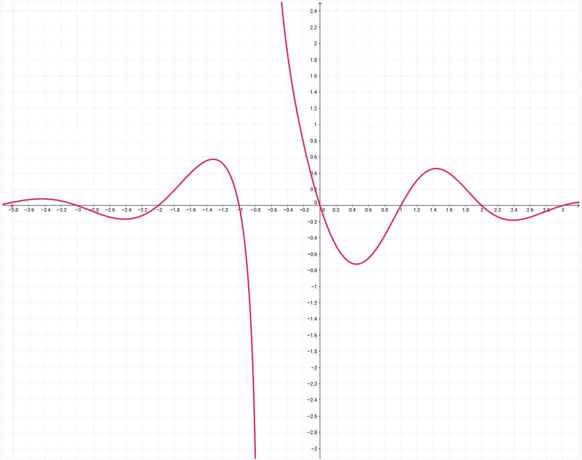
$$\begin{aligned} n &> \frac{\log(1.8-0.4) - \log 10^{-6}}{\log 2} \\ &= \frac{\log 1.4 + 6 \log 10}{\log 2} \\ &= 20.417 \end{aligned}$$

Logo pode-se tomar $n = 21$.

Como um exemplo, o comportamento do Médodo da Bissecção para encontrar o zero de

$$f(x) = \frac{\text{sen}(x-1)\pi}{e^x - x^2}.$$

no intervalo $[0.4, 1.8]$.



n	a_n	b_n	$\lvert b_n - a_n \rvert$	$\lvert f(x_n) \rvert$
0	0.4000000060E+00	0.1799999952E+01	0.1099999979E+01	0.1045785039E+00
1	0.4000000060E+00	0.1099999979E+01	0.6999999732E+00	0.2816193534E+00
2	0.7499999925E+00	0.1099999979E+01	0.3499999866E+00	0.8328284993E-01
3	0.9249999858E+00	0.1099999979E+01	0.1749999933E+00	0.1357877123E-01
4	0.9249999858E+00	0.1012499982E+01	0.8749999665E-01	0.3438124956E-01
5	0.9687499842E+00	0.1012499982E+01	0.4374999832E-01	0.1025677476E-01
6	0.9906249833E+00	0.1012499982E+01	0.2187499916E-01	0.1704052475E-02
7	0.9906249833E+00	0.1001562483E+01	0.1093749958E-01	0.4267239209E-02
8	0.9960937331E+00	0.1001562483E+01	0.5468749790E-02	0.1279201363E-02
9	0.9988281080E+00	0.1001562483E+01	0.2734374895E-02	0.2130930052E-03
10	0.9988281080E+00	0.1000195295E+01	0.1367187448E-02	0.5329081039E-03
11	0.9995117017E+00	0.1000195295E+01	0.6835937238E-03	0.1598699110E-03
12	0.9998534986E+00	0.1000195295E+01	0.3417968619E-03	0.2662196607E-04
13	0.9998534986E+00	0.1000024397E+01	0.1708984310E-03	0.6662168283E-04
14	0.9999389478E+00	0.1000024397E+01	0.8544921548E-04	0.1999927057E-04
15	0.9999816724E+00	0.1000024397E+01	0.4272460774E-04	0.3311510599E-05
16	0.9999816724E+00	0.1000003035E+01	0.2136230387E-04	0.8343844037E-05
17	0.9999923536E+00	0.1000003035E+01	0.1068115193E-04	0.2516157734E-05
18	0.9999976942E+00	0.1000003035E+01	0.5340575967E-05	0.3976789691E-06
19	0.9999976942E+00	0.1000000364E+01	0.2670287984E-05	0.1059238767E-05
20	0.9999990293E+00	0.1000000364E+01	0.1335143992E-05	0.3307797758E-06
21	0.9999996969E+00	0.1000000364E+01	0.6675719959E-06	0.3344963693E-07