Integrais Duplas

Márcio Antônio de Andrade Bortoloti

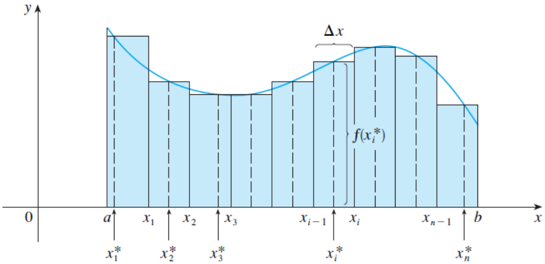
Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas - DCET
Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia

Cálculo III

Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. A integral de Riemman de f no intervalo $[a, b]$ é definida como

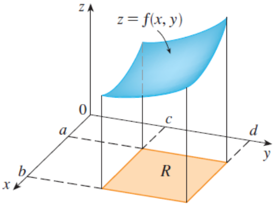
$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x,$$

onde $\Delta x = x_i - x_{i-1}$, $x_i \in \mathcal{P}$ e $\mathcal{P} = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b\}$ é uma partição de $[a, b]$.



Integrais Duplas sobre Retângulos

Considere $f : R \to \mathbb{R}$, onde $R = [a, b] \times [c, d]$, com $f(x, y) \geq 0$ para todo $(x, y) \in R$.

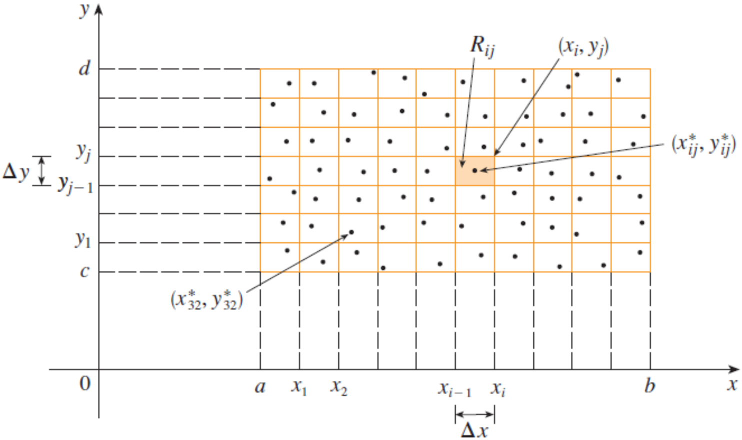


Para definir a integral de Riemann temos que considerar uma partição de R. Neste caso, tomaremos

$$R = \bigcup_{ij} R_{ij},$$

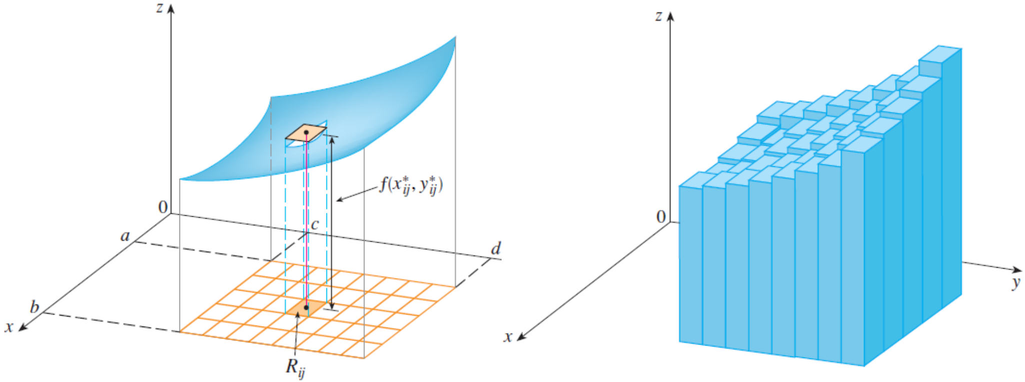
onde $R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{i-1}, y_i]$.

Integrais Duplas sobre Retângulos



$$\Delta A = \Delta x \, \Delta y$$

Como estamos considerando $f(x, y) \geq 0$ em R, podemos interpretar a integral de Riemann de f sobre R como um volume. Assim, vamos calcular o volume da figura entre o plano xy e o gráfico da função f, delimitado pelas dimensões de R.



O volume procurado é dado por

$$V = \lim_{m,n \to +\infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_i^*, y_j^*) \Delta A$$

Definição

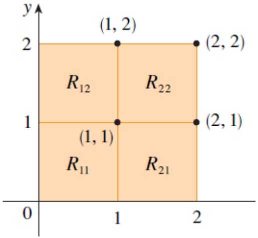
A integral dupla de f sobre o retângulo R é definida por

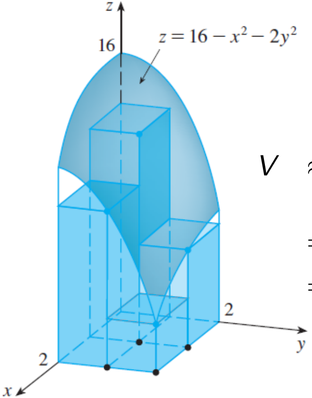
$$\iint_R f(x, y)\, dx = \lim_{m,n \to +\infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_i^*, y_j^*) \Delta A,$$

desde que o limite exista.

Exemplo

Aproxime o volume do sólido que está acima do quadrado $R = [0, 2] \times [0, 2]$ e abaixo do parabolóide elíptico $z = 16 - x^2 - 2y^2$.

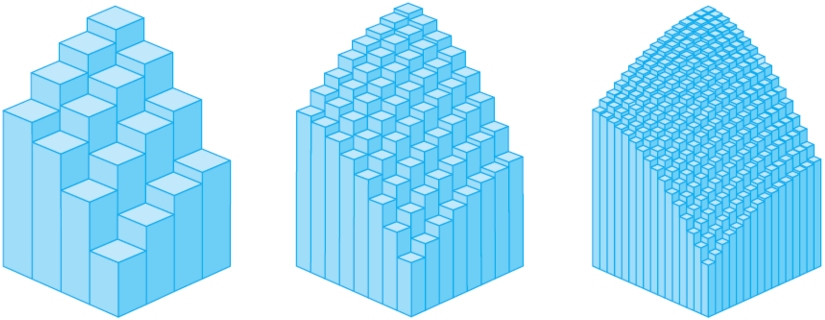




$$
\begin{aligned}
V &\approx \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} f(x_i, y_j)\Delta A \\
&= \left(f(1,1) + f(1,2) + f(2,1) + f(2,2)\right)\Delta A \\
&= (13 + 7 + 10 + 4) \times 1 = 34
\end{aligned}
$$

Exemplo

Vale observar que a medida que a quantidade de quadrados aumenta, obtem-se uma melhor aproximação para o volume.



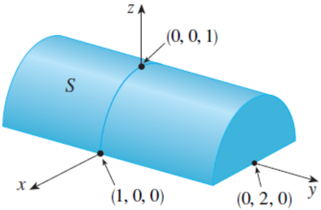
(a) $m = n = 4$, $V \approx 41{,}5$ (b) $m = n = 8$, $V \approx 44{,}875$ (c) $m = n = 16$, $V \approx 46{,}46875$

Exemplo

Se $R = \{(x, y); -1 \leq x \leq 1, -2 \leq y \leq 2\}$, calcule a integral

$$\iint_R \sqrt{1 - x^2} dA.$$

Basta observar que a integral representa o volume da figura abaixo.



O Valor Médio de uma Função

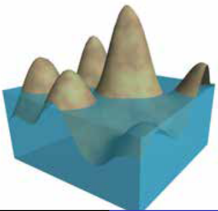
Definição

O valor médio de uma função $f : R \to \mathbb{R}$, onde $R \subset \mathbb{R}^2$ é definida por

$$f_{\text{média}} = \frac{1}{\acute{A}rea(R)} \iint_R f(x,y)\, dA.$$

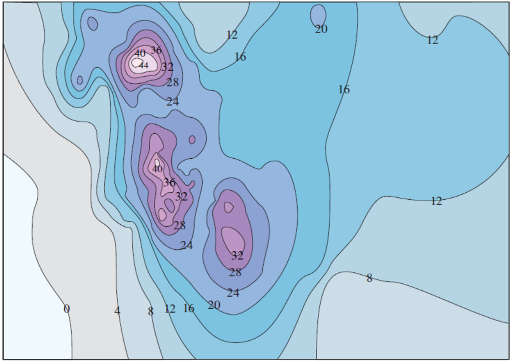
Se $f(x,y) \geq 0$ então

$$f_{\text{média}} \times \text{Área}(R) = \iint_R f(x,y)\, dA.$$



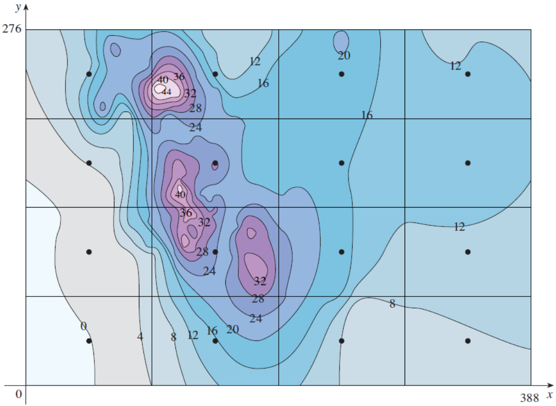
Exemplo

O mapa de contorno abaixo mostra a precipitação de chuva, em milímetros, em uma região de um estado em uma determinada data. Use o mapa de contorno para estimar a precipitação média de chuva em todo o estado.



Exemplo

Vamos considerar uma partição do domínio, como na figura abaixo:



Vamos tomar os pontos (x_i^*, y_j^*) no centro de cada quadrilátero e fazer uma estimativa.

Exemplo

Assim,

$$\begin{aligned}
\iint_R f(x,y)\,dA &\approx \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} f(x_i^*, y_j^*)\,\Delta A \\
&\approx \Big(0+15+8+7+2+25+18.5+11+4.5+28+17+13.5 \\
&+ 12+15+17.5+13\Big)\Delta A \\
&= 207 \times 6693 = 1\,385\,451
\end{aligned}$$

Assim, o valor médio da função é dado por

$$f_{\text{médio}} = \frac{1}{\text{Área}(R)} \iint_R f(x,y)\,dA = \frac{1\,385\,451}{107\,088} \approx 12.9$$

Propriedades da Integral Dupla

Teorema

Sejam $f, g : R \to \mathbb{R}$ funções contínuas, $R \subset \mathbb{R}^2$, um retângulo. Então

$$\iint_R f(x,y) + g(x,y)\, dA = \iint_R f(x,y)\, dA + \iint_R g(x,y)\, dA.$$

Prova: Para uma partição do domínio R tem-se

$$\begin{aligned}
\iint_R f(x,y) + g(x,y)\, dA &= \lim_{m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \left(f(x_i^*, y_j^*) + g(x_i^*, y_j^*)\right)\, \Delta A \\
&= \lim_{m,n\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(x_i^*, y_j^*)\Delta A + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} g(x_i^*, y_j^*)\Delta A \right) \\
&= \lim_{m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(x_i^*, y_j^*)\Delta A + \lim_{m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} g(x_i^*, y_j^*)\Delta A \\
&= \iint_R f(x,y)\, dA + \iint_R g(x,y)\, dA
\end{aligned}$$

Propriedades da Integral Dupla

Teorema

Seja $f : R \to \mathbb{R}$ *uma função contínua,* $R \subset \mathbb{R}^2$*, um retângulo. Então*

$$\iint_R \alpha f(x,y)\, dA = \alpha \iint_R f(x,y)\, dA.$$

Prova: Para uma partição de R, tem-se

$$\begin{aligned}
\iint_R \alpha f(x,y)\, dA &= \lim_{m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \alpha f(x_i^*, y_j^*)\, \Delta A \\
&= \alpha \lim_{m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(x_i^*, y_j^*)\, \Delta A \\
&= \alpha \iint_R f(x,y)\, dA
\end{aligned}$$

Propriedades da Integral Dupla

Teorema

Sejam $f, g : R \to \mathbb{R}$ funções contínuas, $R \subset \mathbb{R}^2$, um retângulo. Se $f(x,y) \geq g(x,y)$ em R, então

$$\iint_R f(x,y)\, dA \geq \iint_R g(x,y)\, dA.$$

Prova: Considere uma partição de R. Como $f(x,y) \geq g(x,y)$ segue que

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(x_i^*, y_j^*)\Delta A \geq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} g(x_i^*, y_j^*)\Delta A.$$

Passando o limite obtemos

$$\iint_R f(x,y)\, dA = \lim_{m,n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(x_i^*, y_j^*)\Delta A \geq \lim_{m,n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} g(x_i^*, y_j^*) = \iint_R g(x,y)\, dA.$$

Exemplo

Se f é uma função constante, $f(x,y) = k$ e $R = [a,b] \times [c,d]$, mostre que

$$\iint_R k\,dA = k(b-a)(d-c).$$

Basta notar que

$$\begin{aligned}
\iint_R k\,dA &= k \iint_R dA \\
&= k \lim_{m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \Delta A \\
&= k(b-a)(d-c)
\end{aligned}$$