que é uma equação linear de primeira ordem normal. Resolvemos agora esta equação em u, e exprimimos a solução geral de (2.21) como $y = u^{1/(1-n)}$. Finalmente, se $n < 0$, devemos acrescentar a solução $y \equiv 0$, "eliminada" ao passar de (2.21) a (2.22).

Por exemplo, para resolver

$$\frac{dy}{dx} + y = (xy)^2, \tag{2.23}$$

reescrevemos a equação como

$$y^{-2}\frac{dy}{dx} + y^{-1} = x^2$$

e fazemos a mudança de variável $u = y^{-1}$. Isto dá

$$-\frac{du}{dx} + u = x^2,$$

de onde resulta

$$ue^{-x} = -\int x^2 e^{-x}\,dx + c = (2 + 2x + x^2)e^{-x} + c.$$

Portanto

$$u = 2 + 2x + x^2 + ce^x,$$

e as soluções de (2.23) são

$$y = (2 + 2x + x^2 + ce^x)^{-1}, \quad c \text{ arbitrário},$$

e $y = 0$.

exercícios

Ache a solução geral de cada uma das equações seguintes.

1. $xy' + 2y = 0$.
2. $(1 - x^2)y' - y = 0$.
3. $(\operatorname{sen} x)y' + (\cos x)y = 0$.
4. $3y' + ky = 0$, k uma constante.
5. $2y' + 3y = e^{-x}$.
6. $3xy' - y = \ln x + 1$.
7. $L\dfrac{di}{dt} + Ri = E$, L, R, E constantes, L, $R \neq 0$.
8. $(3x^2 + 1)y' - 2xy = 6x$.
9. $(x^2 + 1)y' - (1 - x)^2 y = xe^{-x}$.
10. $(x^2 + 1)y' + xy = (1 - 2x)\sqrt{x^2 + 1}$.
11. $x \operatorname{sen} x \dfrac{dy}{dx} + (\operatorname{sen} x + x\cos x)y = xe^x$.
12. $x\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{y}{\sqrt{2x + 1}} = 1 + \sqrt{2x + 1}$.
13. $x\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{y}{\sqrt{1 - x^2}} = (1 + \sqrt{1 - x^2})e^x$.

14. $\operatorname{sen} x \cos x \dfrac{dy}{dx} + y = \operatorname{tg}^2 x$.
16. $2(1 - x^2)y' - (1 - x^2)y = xy^3 e^{-x}$.
18. $yy' + xy^2 - x = 0$.
19. $(x^2 + 1)\sqrt{y}\,y' = xe^{3x/2} + (1 - x)^2 y\sqrt{}$
20. $(x^2 + x + 1)yy' + (2x + 1)y^2 = 2x -$
21. $xy' + \dfrac{y}{\ln x} = \dfrac{x(x + \ln x)}{y^2 \ln x}$.

*23. $(x - 1)y' - 2y = \sqrt{(x^2 - 1)y}$.

25. $(xy^2)' = (xy)^3(x^2 + 1)$.
26. Ache a solução particular da equaç que passa pelo ponto $(1, -1)$. [*Suges* equação em $(0, \infty)$ pode ser escrita n

$$y = ce^{\int_1^x [(\mathrm{se}}$$

27. (a) Ache a curva-solução da equaç

$$x\frac{dy}{dx} + y$$

que passa pelo ponto $(2, -3)$. *Sug* pode ser escrita na forma

$$y = \frac{c}{x} +$$

(b) Qual é a ordenada do ponto respondendo ao ponto $x = 1$? ($(1/\sqrt{2\pi})\int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}\,dt$.) Ache a in

Equação de Riccati. Toda equação

$$\frac{dy}{dx} + a_2(x)y^2 +$$

em que $a_0(x)$, $a_1(x)$, $a_2(x)$ são contín chama-se uma *equação de Riccati.* uma série de fatos elementares relat

28. Seja $y_1(x)$ uma solução particular $y = y_1 + 1/z$ para reduzir (2.24) a u em z, e deduza daí que a solução ger achada desde que se conheça uma

Use a técnica sugerida no exercício preced uma das seguintes equações de Riccati.

29. $y' - xy^2 + (2x-1)y = x-1$; solução particular $y = 1$.
30. $y' + xy^2 - 2x^2y + x^3 = x + 1$; solução particular $y = x - 1$.
31. $2y' - (y/x)^2 - 1 = 0$; solução particular $y = x$.
32. $y' + y^2 - (1 + 2e^x)y + e^{2x} = 0$; solução particular $y = e^x$.
33. $y' - (\operatorname{sen}^2 x)y^2 + \dfrac{1}{\operatorname{sen} x \cos x}y + \cos^2 x = 0$; solução particular $y = \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$.
34. (a) Sejam $y_1(x)$ e $y_2(x)$ duas soluções particulares da Eq. (2.24). Mostre que a solução geral da equação é

$$\frac{y-y_1}{y-y_2} = ce^{\int a_2(x)(y_2-y_1)\,dx},$$

c uma constante arbitrária. *Sugestão:* considere a expressão

$$\frac{y'-y_1'}{y-y_1} - \frac{y'-y_2'}{y-y_2}.$$

(b) Sejam $y_1(x)$, $y_2(x)$ e $y_3(x)$ soluções particulares distintas da Eq. (2.24). Use o resultado estabelecido em (a) para provar que a solução geral da equação é

$$\frac{(y-y_1)(y_3-y_2)}{(y-y_2)(y_3-y_1)} = c,$$

c uma constante arbitrária.

35. (a) Mostre que uma equação de Riccati a coeficientes constantes

$$\frac{dy}{dx} + ay^2 + by + c = 0$$

tem uma solução da forma $y = m$, m uma constante, se e só se m é raiz da equação quadrática $am^2 + bm + c = 0$.

(b) Use este resultado, junto com o Exer. 28 ou Exer. 34(a), como convier, para achar a solução geral de cada uma das equações de Riccati seguintes:

(i) $y' + y^2 + 3y + 2 = 0$ (ii) $y' + 4y^2 - 9 = 0$
(iii) $y' + y^2 - 2y + 1 = 0$ (iv) $6y' + 6y^2 + y - 1 = 0$

36. (a) Prove que a mudança de variável $v = y'/y$ reduz a equação diferencial linear homogênea de segunda ordem

$$y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \tag{2.25a}$$

à equação de Riccati

$$v' + v^2 + a_1(x)v + a_0(x) = 0 \tag{2.25b}$$

e daí conclua que o problema de resolver (2.25a) é equivalente ao de resolver o par simultâneo de equações de primeira ordem

$$\frac{dy}{dx} = vy, \quad \frac{dv}{dx} = -v^2 - a_1(x)v - a_0(x). \tag{2.25c}$$

[A equação (2.25b) chama-se a e
(2.25a).]
(b) Que condições deve impor a (
$y(0) = y_0$, $y'(0) = y_1$ em (2.25a)
(c) Prove que toda equação de Ri
transformada numa equação di
ordem fazendo a mudança de

37. Ache a equação de Riccati associ
e daí ache a solução geral de $y'' -$
38. Prove que sempre que m_1 e m_2 seja
drática

$$am^2 + bm + c = $$

então e^{m_1x} e e^{m_2x} são soluções linea
equação diferencial linear homogên

$$ay'' + b$$

(Ver Exer. 35(a) e 36(a).)

39. Use o resultado do exercício preced
uma das equações diferenciais linea
(a) $y'' - 5y' + 6y = 0$,
(c) $(D + 1)(D - 2)y = 0$,
(e) $(2D^2 - 3)y = 0$.
40. Prove que e^{mx} e xe^{mx} são soluções l
da equação diferencial linear homo

$$y'' - 2my$$

m sendo uma constante.
41. Use o resultado do exercício preced
uma das seguintes equações diferen
(a) $y'' + 2y' + y = 0$,
(c) $(D - \frac{3}{2})^2y = 0$,
(e) $(2D^2 - 2\sqrt{2}\,D + 1)y = 0$.

2.4. existência e unicidade d valor inicial

Na seção precedente vimos que toda equa
da forma $y' + p(x)y = q(x)$ definida num
dade, tem infinitas soluções, uma para ca

$$y = \Big[c + \int q(x)e^{\int}$$