Integrais Iteradas

Márcio Antônio de Andrade Bortoloti

Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas - DCET
Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia

Cálculo III

Cálculo de Integrais Duplas

Estamos interpretando geometricamente

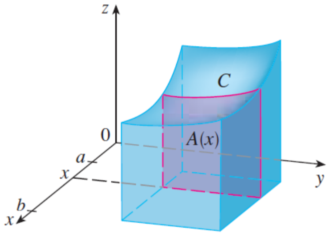
$$\iint_R f(x, y)\, dA$$

como um volume.

Estamos interpretando geometricamente

$$\iint_R f(x, y)\, dA$$

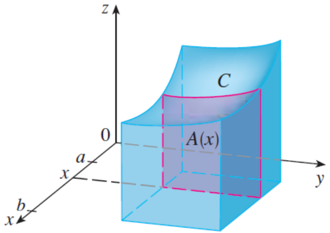
como um volume.



Estamos interpretando geometricamente

$$\iint_R f(x, y)\, dA$$

como um volume.



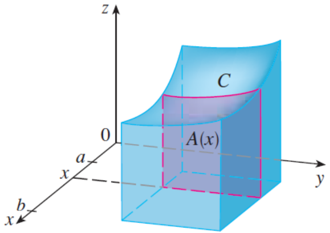
Por outro lado, já vimos que esse volume pode ser calculado por

$$V = \int_a^b A(x)\, dx.$$

Estamos interpretando geometricamente

$$\iint_R f(x,y)\,dA$$

como um volume.



Por outro lado, já vimos que esse volume pode ser calculado por

$$V = \int_a^b A(x)\,dx.$$

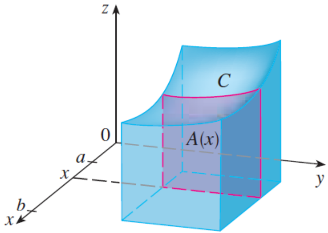
Além disso, $A(x)$ pode ser calculada por

$$A(x) = \int_c^d f(x,y)\,dy.$$

Estamos interpretando geometricamente

$$\iint_R f(x,y)\,dA$$

como um volume.



Por outro lado, já vimos que esse volume pode ser calculado por

$$V = \int_a^b A(x)\,dx.$$

Além disso, $A(x)$ pode ser calculada por

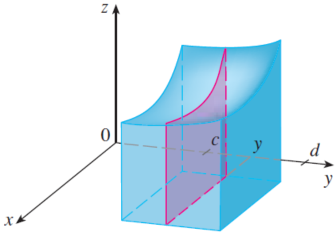
$$A(x) = \int_c^d f(x,y)\,dy.$$

Logo, podemos escrever

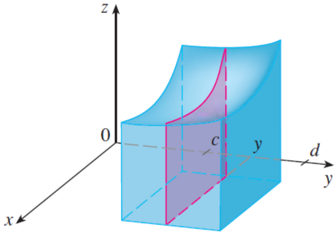
$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_a^b A(x)\,dx = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dydx$$

Cálculo de Integrais Duplas

O mesmo pode ser feito se considerarmos a figura



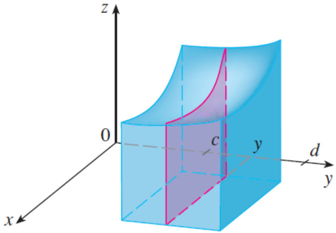
O mesmo pode ser feito se considerarmos a figura



Temos

$$V = \int_c^d A(y)\,dy.$$

O mesmo pode ser feito se considerarmos a figura



Temos

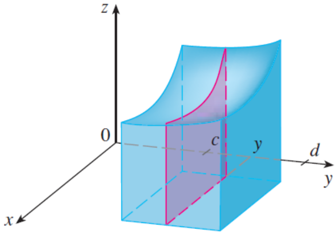
$$V = \int_c^d A(y)\, dy.$$

Além disso, $A(y)$ pode ser calculada por

$$A(y) = \int_a^b f(x, y)\, dx.$$

Cálculo de Integrais Duplas

O mesmo pode ser feito se considerarmos a figura



Temos

$$V = \int_c^d A(y)\,dy.$$

Além disso, $A(y)$ pode ser calculada por

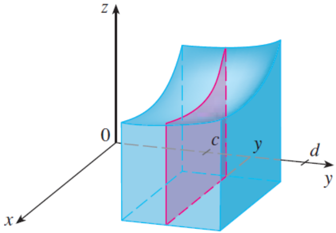
$$A(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx.$$

Logo, podemos escrever

$$\iint_R f(x,y)\,dA \quad = \quad \int_c^d A(y)\,dy$$

Cálculo de Integrais Duplas

O mesmo pode ser feito se considerarmos a figura



Temos

$$V = \int_c^d A(y)\, dy.$$

Além disso, $A(y)$ pode ser calculada por

$$A(y) = \int_a^b f(x,y)\, dx.$$

Logo, podemos escrever

$$\begin{aligned} \iint_R f(x,y)\, dA &= \int_c^d A(y)\, dy \\ &= \int_c^d \int_a^b f(x,y)\, dxdy \end{aligned}$$

Teorema (Fubini)

Se $f : R \to \mathbb{R}$, onde $R = \{(x, y); a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$, então

$$\iint_R f(x, y)dA = \int_a^b \int_c^d f(x, y)\, dy\, dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y)\, dx\, dy.$$

Exemplo

Calcule a integral

$$\iint_R x - 3y^2 \, dA,$$

onde $R = \{(x, y); 0 \leq x \leq 2,\ 1 \leq y \leq 2\}$.

Exemplo

Calcule a integral

$$\iint_R x - 3y^2 \, dA,$$

onde $R = \{(x, y); 0 \leq x \leq 2,\ 1 \leq y \leq 2\}$.

Basta notar que

$$\iint_R x - 3y^2 \, dA \quad = \quad \int_0^2 \int_1^2 x - 3y^2 \, dydx$$

Exemplo

Calcule a integral

$$\iint_R x - 3y^2 \, dA,$$

onde $R = \{(x, y); 0 \leq x \leq 2, \ 1 \leq y \leq 2\}$.

Basta notar que

$$\begin{aligned} \iint_R x - 3y^2 \, dA &= \int_0^2 \int_1^2 x - 3y^2 \, dydx \\ &= \int_0^2 \left[xy - y^3 \right]_{y=1}^{y=2} dx \end{aligned}$$

Exemplo

Calcule a integral

$$\iint_R x - 3y^2 \, dA,$$

onde $R = \{(x, y); 0 \leq x \leq 2, \ 1 \leq y \leq 2\}$.

Basta notar que

$$\begin{aligned}
\iint_R x - 3y^2 \, dA &= \int_0^2 \int_1^2 x - 3y^2 \, dydx \\
&= \int_0^2 \left[xy - y^3\right]_{y=1}^{y=2} dx \\
&= \int_0^2 \left[x - 7\right] dx
\end{aligned}$$

Exemplo

Calcule a integral

$$\iint_R x - 3y^2 \, dA,$$

onde $R = \{(x, y); 0 \leq x \leq 2, \, 1 \leq y \leq 2\}$.

Basta notar que

$$\begin{aligned}
\iint_R x - 3y^2 \, dA &= \int_0^2 \int_1^2 x - 3y^2 \, dydx \\
&= \int_0^2 \left[xy - y^3 \right]_{y=1}^{y=2} dx \\
&= \int_0^2 \left[x - 7 \right] dx \\
&= \left[\frac{x^2}{2} - 7x \right]_{x=0}^{x=2} = -12
\end{aligned}$$