

Solução Numérica de Equações Diferenciais

Convergência

Márcio Antônio de Andrade Bortoloti

Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas - DCET
Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia - UESB

Cálculo Numérico

- 1 Métodos de Runge-Kutta
 - Método de Runge-Kutta de Segunda Ordem

Métodos de Runge-Kutta

Consideremos o problem

$$y' = f(t, y),$$

com condição inicial $y(t_0) = y_0$.

- Os métodos de Taylor tem a propriedade desejável de erro de truncamento local de alta ordem, mas a desvantagem de exigir a determinação e o cálculo em diversos pontos de $f(t, y)$.

Métodos de Runge-Kutta

Consideremos o problem

$$y' = f(t, y),$$

com condição inicial $y(t_0) = y_0$.

- Os métodos de Taylor tem a propriedade desejável de erro de truncamento local de alta ordem, mas a desvantagem de exigir a determinação e o cálculo em diversos pontos de $f(t, y)$.
- Esse procedimento é complicado e consome muito tempo na maioria dos problemas, de modo que os Métodos de Taylor são raramente usados na prática.

Métodos de Runge-Kutta

Consideremos o problem

$$y' = f(t, y),$$

com condição inicial $y(t_0) = y_0$.

- Os métodos de Taylor tem a propriedade desejável de erro de truncamento local de alta ordem, mas a desvantagem de exigir a determinação e o cálculo em diversos pontos de $f(t, y)$.
- Esse procedimento é complicado e consome muito tempo na maioria dos problemas, de modo que os Métodos de Taylor são raramente usados na prática.
- Os Métodos de Runge-Kutta têm o erro de truncamento local de alta ordem e eliminam a necessidade de calcular as derivadas de $f(t, y)$.

Teorema

Suponha que $f \in \mathcal{C}^{n+1}(D)$, $D = [a, b] \times [c, d]$ e seja $(t_0, y_0) \in D$. Para cada $(t, y) \in D$, existem ξ entre t e t_0 e μ entre y e y_0 tais que

onde
$$f(t, y) = T_n(t, y) + R_n(t, y),$$

$$\begin{aligned} T_n(t, y) = & f(t_0, y_0) + \left[(t - t_0)f_t(t_0, y_0) + (y - y_0)f_y(t_0, y_0) \right] \\ & + \left[(t - t_0)^2/2f_{tt}(t_0, y_0) + (t - t_0)(y - y_0)f_{ty}(t_0, y_0) + (y - y_0)^2/2f_{yy}(t_0, y_0) \right] + \cdots \\ & + \left[\frac{1}{n!} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (t - t_0)^{n-j} (y - y_0)^j \frac{\partial^n f}{\partial t^{n-j} \partial y^j}(t_0, y_0) \right] \end{aligned}$$

e

$$R_n(t, y) = \frac{1}{(n+1)!} \sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} (t - t_0)^{n+1-j} (y - y_0)^j \frac{\partial^{n+1} f}{\partial t^{n+1-j} \partial y^j}(\xi, \mu).$$

Métodos de Runge-Kutta - Segunda Ordem

O primeiro passo na dedução do Método de Runge-Kutta é determinar os valores para a_1, α_1 e β_1 com a propriedade de que $a_1 f(t + \alpha_1, y + \beta_1)$ forneça uma aproximação de

$$T_2(t, y) = f(t, y) + \frac{h}{2} f'(t, y),$$

com erro não maior que $\mathcal{O}(h^2)$, que é o erro de truncamento local para o método de Taylor de segunda ordem.

Métodos de Runge-Kutta - Segunda Ordem

O primeiro passo na dedução do Método de Runge-Kutta é determinar os valores para a_1, α_1 e β_1 com a propriedade de que $a_1 f(t + \alpha_1, y + \beta_1)$ forneça uma aproximação de

$$T_2(t, y) = f(t, y) + \frac{h}{2} f'(t, y),$$

com erro não maior que $\mathcal{O}(h^2)$, que é o erro de truncamento local para o método de Taylor de segunda ordem. Como

$$f'(t, y) = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} y'(t)$$

Métodos de Runge-Kutta - Segunda Ordem

O primeiro passo na dedução do Método de Runge-Kutta é determinar os valores para a_1, α_1 e β_1 com a propriedade de que $a_1 f(t + \alpha_1, y + \beta_1)$ forneça uma aproximação de

$$T_2(t, y) = f(t, y) + \frac{h}{2} f'(t, y),$$

com erro não maior que $\mathcal{O}(h^2)$, que é o erro de truncamento local para o método de Taylor de segunda ordem. Como

$$f'(t, y) = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} y'(t)$$

Tem-se

$$T_2(t, y) = f(t, y) + \frac{h}{2} \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{h}{2} \frac{\partial f}{\partial y} y'(t).$$

Métodos de Runge-Kutta - Segunda Ordem

Por outro lado, expandindo $f(t + \alpha_1, y + \beta_1)$ em seu polinômio de Taylor de primeiro grau em torno de (t, y) teremos

$$a_1 f(t + \alpha_1, y + \beta_1) = a_1 f(t, y) + a_1 \alpha_1 \frac{\partial f}{\partial t}(t, y) + a_1 \beta_1 \frac{\partial f}{\partial y}(t, y) + a_1 R_1(t + \alpha_1, y + \beta_1)$$

onde

$$R_1(t + \alpha_1, y + \beta_1) = \frac{\alpha_1^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(\xi, \mu) + a_1 \beta_1 \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y}(\xi, \mu) + \frac{\beta_1^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\xi, \mu)$$

para algum ξ entre t e $t + \alpha_1$ e μ entre y e $y + \beta_1$.

Métodos de Runge-Kutta - Segunda Ordem

Por outro lado, expandindo $f(t + \alpha_1, y + \beta_1)$ em seu polinômio de Taylor de primeiro grau em torno de (t, y) teremos

$$a_1 f(t + \alpha_1, y + \beta_1) = a_1 f(t, y) + a_1 \alpha_1 \frac{\partial f}{\partial t}(t, y) + a_1 \beta_1 \frac{\partial f}{\partial y}(t, y) + a_1 R_1(t + \alpha_1, y + \beta_1)$$

onde

$$R_1(t + \alpha_1, y + \beta_1) = \frac{\alpha_1^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(\xi, \mu) + a_1 \beta_1 \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y}(\xi, \mu) + \frac{\beta_1^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\xi, \mu)$$

para algum ξ entre t e $t + \alpha_1$ e μ entre y e $y + \beta_1$.

Igualando os coeficientes de f e de suas derivadas nas equações de T_2 e de f acima, obtemos

$$a_1 = 1, \quad a_1 \alpha_1 = \frac{h}{2} \quad a_1 \beta_1 = \frac{h}{2} f(t, y).$$

Métodos de Runge-Kutta - Segunda Ordem

Assim

$$a_1 = 1; \quad \alpha_1 = \frac{h}{2} \quad \beta_1 = \frac{h}{2} f(t, y)$$

Métodos de Runge-Kutta - Segunda Ordem

Assim

$$a_1 = 1; \quad \alpha_1 = \frac{h}{2} \quad \beta_1 = \frac{h}{2} f(t, y)$$

Logo

$$T_2(t, y) = f\left(t + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2} f(t, y)\right).$$

Métodos de Runge-Kutta - Segunda Ordem

Assim

$$a_1 = 1; \quad \alpha_1 = \frac{h}{2} \quad \beta_1 = \frac{h}{2} f(t, y)$$

Logo

$$T_2(t, y) = f\left(t + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2} f(t, y)\right).$$

Do Método de Taylor obtemos

$$\begin{cases} y_0 \text{ dado} \\ y_{n+1} = y_n + hf\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} f(t_n, y_n)\right). \end{cases}$$