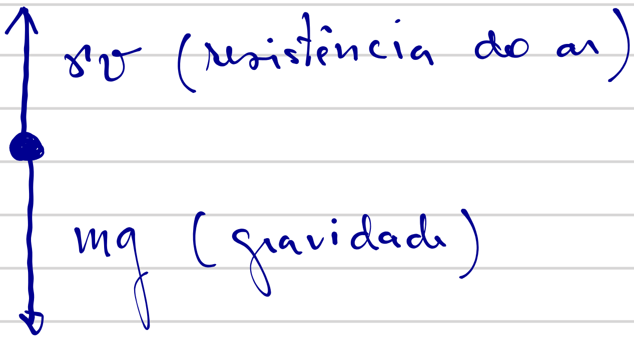
Algumas Aplicações

Considere um objeto caindo sob ação da gravidade e sob ação da resistência do ar.

Temos o seguinte diagrama:



Como

$$F = ma$$

segue que

$$m\frac{dv}{dt} = mg - \gamma v. \qquad (v = \text{velocidade})$$

ou

$$\boxed{\frac{dv}{dt} = g - \frac{\gamma}{m} v}$$

Vamos usar a equação anterior para obter uma análise qualitativa da solução $v = v(t)$.

Inicialmente notamos que $\dfrac{dv}{dt} = 0$

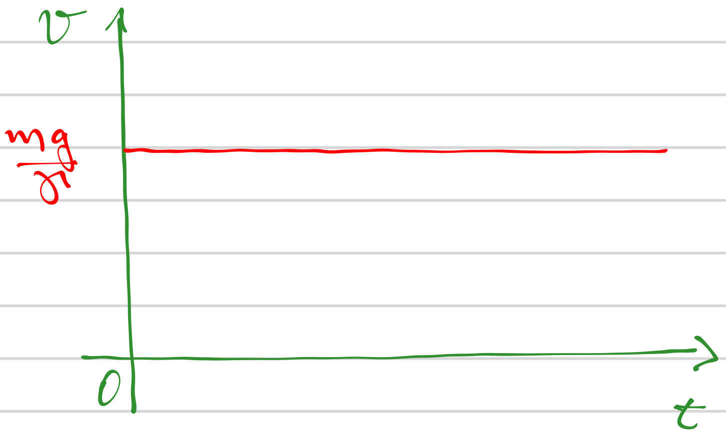
se e somente se

$$g - \frac{\gamma}{m} v = 0 \implies v = \frac{mg}{\gamma}.$$

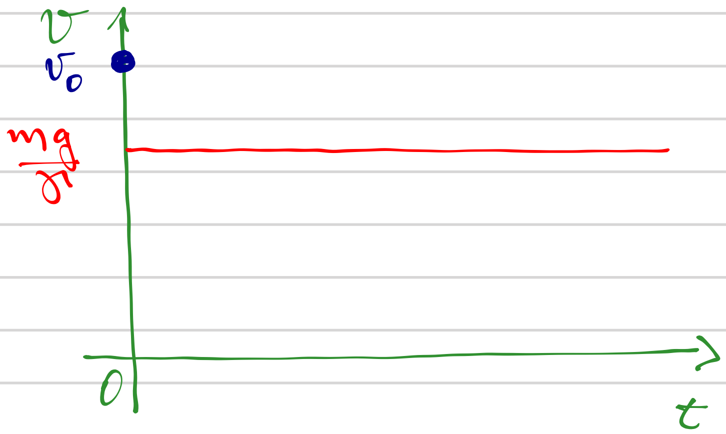
Assim,

$$v = \frac{mg}{\gamma}$$

nos dá os pontos onde a velocidade não varia $\left(\frac{dv}{dt} = 0\right)$.



Vamos agora analisar a situação em que $v(0) = v_0 > \frac{mg}{\gamma}$.



Vamos pensar que $v(t) > \frac{mg}{\gamma}$ para todo $t > 0$. Assim

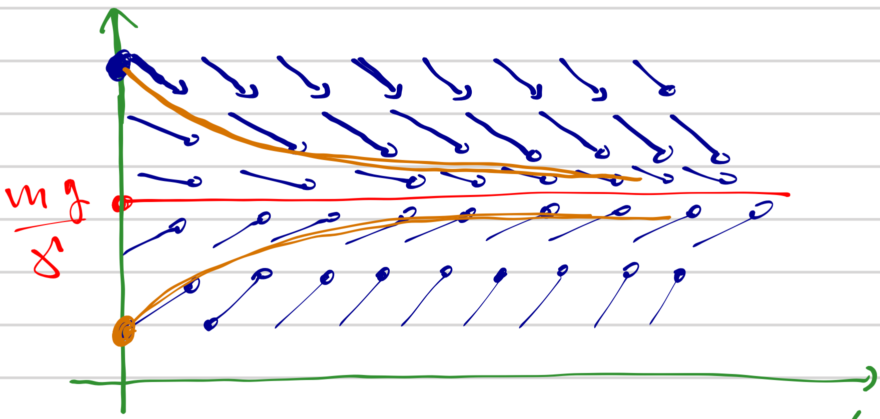
$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{\gamma}{m} v < 0.$$

Logo, para qualquer $t > 0$ onde $v(t) > \frac{mg}{\gamma}$, v será decrescente.

Além disso

$$\lim_{v \to \frac{mg}{\gamma}} \frac{dv}{dt} = 0.$$

Logo



Agora, notamos que para todo $t > 0$ onde $v(t) < \frac{mg}{\gamma}$ obtemos

$$\frac{dv}{dt} > 0.$$

Crescimento de Bactérias

Uma cultura tem inicialmente P_0 bactérias. Em 1h o número medido é de $\frac{3}{2}P_0$. Se a taxa de crescimento for proporcional ao número de bactérias presente no instante t, $P(t)$, determine o tempo necessário para triplicar o número de bactérias.

Taxa de crescimento proporcional a $P(t)$ $\Rightarrow$ $\frac{dP}{dt} = KP.$

Cultura tem inicialmente P_0 bactérias $\Rightarrow$ $P(0) = P_0.$

A solução da equação diferencial é

$$P(t) = c\,e^{kt}.$$

Em $t=0$ temos

$$P_0 = P(0) = c.$$

Logo a solução é

$$P(t) = P_0\,e^{kt}.$$

Temos ainda que

$$P(1) = \frac{3}{2}P_0.$$

Logo

$$\frac{3}{2}P_0 = P_0\,e^{k}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{3}{2} = e^{k} \Rightarrow k = \ln\left(\frac{3}{2}\right).$$

Portanto

$$P(t) = P_0\,e^{\ln\left(\frac{3}{2}\right)t}.$$

Agora podemos determinar t tal que

$$P(t) = 3P_0.$$

Segue que

$$3P_0 = P_0\,e^{\ln\left(\frac{3}{2}\right)t} \Rightarrow 3 = e^{\ln\left(\frac{3}{2}\right)t} \Rightarrow$$

$$\ln 3 = \ln\left(\frac{3}{2}\right)t \Rightarrow t = \frac{\ln 3}{\ln(3/2)}.$$

A Meia Vida do Plutônio

Meia Vida: Medida da estabilidade de uma substância radioativa. A meia vida é simplesmente o tempo necessário para a metade dos átomos em uma quantidade inicial A_0 desintegrar-se ou transformar-se em átomos de um outro elemento.

Problema: Um reator regenerador converte urânio 238 relativamente estável no isótopo plutônio 239. Depois de 15 anos determinou-se que 0.043% da quantidade inicial de plutônio desintegrou-se. Ache a meia-vida desse isótopo, se a taxa de desintegração for proporcional à quantidade remanescente.

$A(t) \equiv$ quantidade remanescente de plutônio

$$\frac{dA}{dt} = KA \quad , \quad A(0) = A_0 .$$

Solução:

$$A(t) = A_0 e^{Kt}.$$

Se 0.043% dos átomos de A_0 se desintegraram então restarão

$$99.957\%$$

da substância (após 15 anos).

Assim

$$0.99957 A_0 = A_0 e^{15K}.$$

Logo

$$0.99957 = e^{15K}$$

$$\Rightarrow 15K = \ln(0.99957) \Rightarrow K = \frac{\ln(0.99957)}{15}.$$

$$\Rightarrow K = -0.0000286728.$$

Logo

$$A(t) = A_0\, e^{-0.00002867\, t}.$$

A meia vida corresponde a

$$A(t) = \frac{1}{2} A_0 .$$

Logo

$$A_0\, e^{-0.00002867\, t} = \frac{1}{2} A_0$$

$$\Rightarrow \quad e^{-0.00002867\, t} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad -0.00002867\, t = -\ln 2$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{t = \frac{\ln 2}{0.00002867}}$$

Equação logística

Na dinâmica populacional um dos modelos supõe que a taxa de crescimento relativa seja constante, ou seja,

$$\frac{1}{P}\frac{dP}{dt} = K$$

Contudo, modelos desse tipo não são aplicáveis a grandes populações. Além disso esses modelos podem apresentar dependências com outros parâmetros, por exemplo, comportamentos sazonais. Assim, se considerarmos

$$\frac{dP}{dt} = P\, f(P) .$$

(Hipótese da dependência da densidade)

Suponha que um determinado ambiente seja capaz de sustentar no máximo K indivíduos em sua população.

$K \equiv$ "Capacidade de suporte."

Logo para f acima temos:

$$f(K) = 0 \quad e \quad f(0) = r > 0.$$

Uma hipótese simples é considerar f uma função afim, ou seja,

$$f(P) = c_1 P + c_2 .$$

Se usarmos $f(K)=0$ e $f(0)=r$ obtemos

$$c_2 = r \quad e \quad c_1 = -\frac{r}{K}.$$

Logo

$$f(P) = -\frac{r}{K} P + r .$$

Assim a equação diferencial torna-se

$$\frac{dP}{dt} = P\left(-\frac{r}{K} P + r\right)$$

ou

$$\boxed{\frac{dP}{dt} = P(a - bP),}$$

Equação Logística (Verhulst 1840)

onde $a = r$ e $b = \frac{r}{K}$.

Solução:

Temos
$$\frac{dP}{dt} = P(a - bP).$$
Logo
$$\frac{1}{P(a-bP)}\frac{dP}{dt} = 1.$$
$$\Rightarrow \quad \int \frac{1}{P(a-bP)}\,dP = t + C.$$

Calculando a integral:

Note que
$$\frac{1}{P(a-bP)} = \frac{A}{P} + \frac{B}{a-bP}$$
implica em
$$\frac{1}{P(a-bP)} = \frac{(a-bP)A + BP}{P(a-bP)} = \frac{(B-bA)P + aA}{P(a-bP)}$$
$$\Rightarrow \quad B - bA = 0 \quad e \quad aA = 1$$
Segue que $A = \frac{1}{a}$ e $B = \frac{b}{a}$.

Logo
$$\frac{1}{P(a-bP)} = \frac{1}{aP} + \frac{b}{a(a-bP)}.$$
Assim temos

$$\int \frac{1}{P(a-bP)}\,dP = \frac{1}{a}\int \frac{1}{P}\,dP + \frac{b}{a}\int \frac{1}{a-bP}\,dP$$

$u = a-bP$
$du = -b\,dP$

Assim

$$\int \frac{1}{P(a-bP)}\,dP = \frac{1}{a}\ln P + \frac{b}{a}\left(-\frac{1}{b}\right)\ln|a-bP|$$

$$= \frac{1}{a}\ln P - \frac{1}{a}\ln|a-bP|$$

$$= \frac{1}{a}\ln\left|\frac{P}{a-bP}\right|.$$

Logo

$$\frac{1}{a}\ln\left|\frac{P}{a-bP}\right| = t + c \implies$$

$$\ln\left|\frac{P}{a-bP}\right| = at + ac \implies$$

$$\frac{P}{a-bP} = e^{at+ac} \implies \frac{P}{a-bP} = c_1 e^{at}$$

$$\implies P = (a-bP)c_1e^{at} \implies \left(P + bPc_1e^{at}\right) = ac_1e^{at}$$

$$\implies P = \frac{ac_1e^{at}}{1+bc_1e^{at}} = \frac{ac_1}{e^{-at}+bc_1}$$

Se $P(0)=P_0$ e $P_0 \neq a/b$ então

$$P_0 = \frac{ac_1}{e^{-a}+bc_1} \implies c_1 = \frac{P_0}{a-bP_0}.$$

Assim $$\boxed{P(t) = \frac{aP_0}{bP_0 + (a-bP_0)e^{-at}}.}$$