

Integração Numérica - Quadratura Gaussiana

Márcio Antônio de Andrade Bortoloti

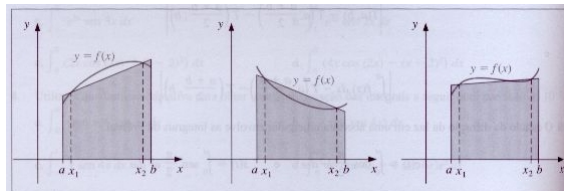
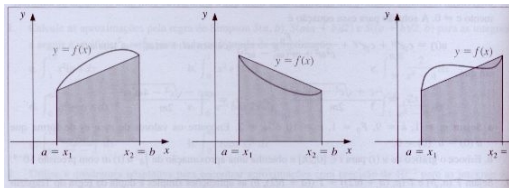
Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas - DCET
Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia - UESB

Cálculo Numérico
Curso de Física

Integração Numérica - Quadratura de Gauss

Considere uma função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua. Vamos calcular

$$\int_a^b f(x) dx.$$



Integração Numérica - Quadratura de Gauss

- A Quadratura de Gauss escolhe os pontos para cálculo de uma forma ótima, em vez de igualmente espaçada.
- Os pontos x_1, x_2, \dots, x_n no intervalo $[a, b]$ e os coeficientes c_1, c_2, \dots, c_n são escolhidos para minimizar o erro esperado na aproximação

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n c_i f(x_i).$$

- Os coeficientes c_1, c_2, \dots, c_n são arbitrários e os pontos x_1, x_2, \dots, x_n estão no intervalos $[a, b]$, fornecendo $2n$ parâmetros a determinar.
- Note que a classe de polinômios de grau menor que ou igual a $2n - 1$ contém $2n$ parâmetros.
- Essa é a maior classe de polinômios para o qual é razoável esperar que a fórmula será exata.

Iniciando ...:

Suponha que desejamos determinar c_1, c_2, x_1 e x_2 de modo que a fórmula de integração

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2)$$

forneça o resultado exato sempre que $f(x)$ for um polinômio de grau menor que ou igual a $3 = 2(2) - 1$, ou seja, quando

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3.$$

$$\int_{-1}^1 (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3) dx = a_0 \int_{-1}^1 dx + a_1 \int_{-1}^1 x dx + a_2 \int_{-1}^1 x^2 dx + a_3 \int_{-1}^1 x^3 dx$$

Vamos então determinar c_1, c_2, x_1 e x_2 ...

Integração Numérica - Quadratura de Gauss

Para determinar c_1 , c_2 , x_1 e x_2 , com $\int_{-1}^1 f(x) dx \approx c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2)$, temos

$$(f(x) = 1) \quad c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 1 = \int_{-1}^1 dx = 2$$

$$(f(x) = x) \quad c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 = \int_{-1}^1 x dx = 0$$

$$(f(x) = x^2) \quad c_1 \cdot x_1^2 + c_2 \cdot x_2^2 = \int_{-1}^1 x^2 dx = \frac{2}{3}$$

$$(f(x) = x^3) \quad c_1 \cdot x_1^3 + c_2 \cdot x_2^3 = \int_{-1}^1 x^3 dx = 0$$

Resolvendo o sistema acima temos

$$c_1 = 1, \quad c_2 = 1, \quad x_1 = -\frac{\sqrt{3}}{3}, \quad x_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Assim,

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

Note que

$$\int_{-1}^1 x^2 dx = \left. \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^1 = \frac{2}{3}$$

$$\int_{-1}^1 x^2 dx = \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{2}{3}$$

Integração Numérica - Quadratura de Gauss

n	Raízes $r_{n,i}$	Coeficientes $c_{n,i}$
2	0.5773502692	1.0000000000
	-0.5773502692	1.0000000000
3	0.7745966692	0.5555555556
	0.0000000000	0.8888888889
	-0.7745966692	0.5555555556
4	0.8611363116	0.3478548451
	0.3399810436	0.6521451549
	-0.3399810436	0.6521451549
	-0.8611363116	0.3478548451
5	0.9061798459	0.2369268850
	0.5384693101	0.4786286705
	0.0000000000	0.5688888889
	-0.5384693101	0.4786286705
	-0.9061798459	0.2369268850

Exemplo

Obtenha uma aproximação de $\int_{-1}^1 e^x \cos x \, dx$, com $n = 3$.

A tabela anterior fornece

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 e^x \cos x \, dx &\approx 0.5e^{0.7745966692} \cos 0.7745966692 \\ &+ 0.8 \cos 0 e^0 + 0.5e^{-0.7745966692} \cos(-0.7745966692) \\ &= 1.9333904 \end{aligned}$$

O valor encontrado usando integração por partes é 1.9334214.

Observação

Uma integral $\int_a^b f(x) dx$ pode ser transformada para uma integral sobre $[-1, 1]$ utilizando a mudança de variáveis:

$$t = \frac{2x - a - b}{b - a} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}[(b - a)t + a + b]$$

Isso nos permite escrever

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{-1}^1 f\left(\frac{(b - a)t + (b + a)}{2}\right) \frac{(b - a)}{2} dt$$

Integração Numérica - Quadratura de Gauss

Exemplo: Calcule

$$\int_1^{1.5} e^{-x^2} dx = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 e^{-(t+5)^2/16} dt.$$

Se $n = 2$

$$\int_1^{1.5} e^{-x^2} dx \approx \frac{1}{4} \left[e^{-(5+0.5773502692)^2/16} + e^{-(5-0.5773502692)^2/16} \right] = 0.1094003.$$

Se $n = 3$

$$\begin{aligned} \int_1^{1.5} e^{-x^2} dx &\approx \frac{1}{4} \left[(0.5555555556) e^{-(5+0.7745966692)^2/16} \right. \\ &\quad + (0.888888889) e^{-5^2/16} \\ &\quad \left. + 0.5555555556 e^{-(5-0.7745966692)^2/16} \right] \\ &= 0.1093642 \end{aligned}$$

O valor exato com sete casas decimais é 0.1093643

- ① Escreva uma função que calcule a função erro da distribuição normal definida por

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

- ② Calcule a integral

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx.$$