Equações Diferenciais Ordiárias de Primeira Ordem

Marcio Antônio de Andrade Bortoloti
mbortoloti@uesb.edu.br
https://mbortoloti.github.io

Equações Diferenciais (Aula do dia 13/12/2021)

Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas - DCET
Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia

Vamos estudar a equação diferencial linear <u>normal</u> de primeira ordem

$$a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_2(x)\,y = h(x) \quad \text{em } I$$

onde $a_i \in \mathcal{C}(I)$ e $a_1(x) \neq 0 \;\forall\, x \in I$.

Como $a_1(x) \neq 0$ segue que

$$\frac{dy}{dx} + \frac{a_2(x)}{a_1(x)}\,y = \frac{h(x)}{a_1(x)}, \quad x \in I \implies$$

$$\boxed{y' + p(x)\,y = q(x), \quad x \in I,}$$

onde $p(x) = \dfrac{a_2(x)}{a_1(x)}$ e $q(x) = \dfrac{h(x)}{a_1(x)}$.

Teorema: Seja $\qquad p, q \in \mathcal{C}(I)$

$$y' + p(x)\,y = q(x)$$

definida em um intervalo I. Então a solução geral dessa equação é

$$y(x) = \left[C + \int q(x) \exp\left(\int p(x)\,dx\right) dx\right] \exp\left(-\int p(x)\,dx\right)$$

onde C é uma constante arbitrária.

Prova: Notamos que o espaço solução da equação diferencial é de dimensão 1. Além disso, a solução dessa equação pode ser encontrada da forma

$$y = y_h + y_p ,$$

onde y_h é a solução geral da homogênea e y_p é uma solução particular.

Vamos considerar a equação homogênea

$$y' + p(x)\, y = 0 .$$

Note que

$$y' = -p\, y .$$

Para $y \neq 0$ tem-se

$$\frac{1}{y}\, y' = -p(x)$$

Integrando os dois lados obtemos (em relação x)

$$\int \frac{1}{y(x)}\, y'(x)\, dx = \int -p(x)\, dx \Rightarrow \int \frac{1}{y}\, dy = \int -p(x)\, dx.$$

Logo

$$\ln y = -\int p(x)\, dx, \qquad y > 0.$$

Assim

$$\exp(\ln y) = \exp\left(-\int p(x)\, dx\right) \Rightarrow$$

$$y = \exp\left(-\int p(x)\, dx\right) > 0 \qquad \left(e^{-\int p(x)\, dx} > 0 \right)$$

Logo

$$\boxed{y_h(x) = C \exp\left(-\int p(x)\, dx\right)}.$$

Agora, vamos encontrar uma solução particular para

$$y' + p(x)y = q(x).$$

Seja $\overset{\neq 0}{\mu} : I \longrightarrow \mathbb{R}$ com $\mu \in C^1(I)$. Multiplicando a equação diferencial por μ obtemos

$$\mu y' + p(x)\mu y = \mu q(x).$$

Agora, lembrando que

$$\mu y' + \mu' y = \frac{d}{dx}(\mu y)$$

Vamos determinar $\mu \in C^1(I)$ tal que

$$\mu' = p(x)\mu.$$

Note que

$$\frac{1}{\mu}\mu' = p(x).$$

Logo

$$\mu(x) = \exp\left(\int p(x)\,dx\right).$$

Assim

$$\frac{d}{dx}(\mu y) = \mu q(x).$$

Integrando ambos os lados em relação a x obtemos

$$\int \frac{d}{dx}(\mu y)\,dx = \int \mu q(x)\,dx.$$

Assim

$$\mu(x)y(x) = \int \mu(x)q(x)\,dx \Rightarrow \overbrace{y(x) = \frac{1}{\mu(x)}\int \mu(x)q(x)\,dx.}^{\text{Solução Particular}}$$

Logo a solução particular é

$$y_p(x) = \frac{1}{\exp \int p(x)dx} \cdot \int \mu(x)\, q(x)\, dx. \iff$$

$$y_p(x) = \exp\left(-\int p(x)dx\right) \int q(x) \exp\left(\int p(x)dx\right) dx.$$

Finalmente, a solução é

$$\begin{aligned} y(x) &= y_h(x) + y_p(x) \\ &= C \exp\left(-\int p(x)\,dx\right) + \exp\left(-\int p(x)dx\right)\int q(x) \exp\left(\int p(x)dx\right)dx \\ &= \exp\left(-\int p(x)dx\right)\left(C + \int q(x) \exp\left(\int p(x)\,dx\right) dx\right). \end{aligned}$$

Exemplo: Resolva a equação

$$y' + \frac{3}{x} y = 6x^2 .$$

Vamos determinar a solução geral de

$$y' + \frac{3}{x} y = 0 .$$

Temos

$$y' = -\frac{3}{x} y \iff \frac{1}{y} y' = -\frac{3}{x} \quad , \; y \neq 0 .$$

Logo

$$\int \frac{1}{y} y' dy = -3 \int \frac{1}{x} dx . \Rightarrow \ln y = -3 \ln x .$$

Temos

$$\ln y = -3 \ln x. \qquad \ln a^b = b \ln a, \; a>0$$

Logo,

$$\exp(\ln y) = \exp(-3 \ln x) \Longrightarrow$$

$$y = \exp\left(\ln(x^{-3})\right) = x^{-3} = \frac{1}{x^3}.$$

Assim, a solução geral da equação homogênea é

$$y_h(x) = c \frac{1}{x^3} = \frac{c}{x^3}, \qquad c = \text{constante}.$$

Agora, vamos determinar uma solução particular para

$$y' + \frac{3}{x} y = 6x^2.$$

Note que

$$\mu y' + \frac{3}{x} y \mu = 6x^2 \mu$$

$$\mu y' + \mu' y = \frac{d}{dx}(\mu y)$$

Logo, temos que determinar μ tal que

$$\mu' = \frac{3}{x}\mu .$$

Tem-se que

$$\frac{1}{\mu}\mu' = \frac{3}{x} \Rightarrow \int \frac{1}{\mu}\mu' dx = \int \frac{3}{x} dx \Rightarrow$$

$$\ln \mu = 3 \ln x \Rightarrow \boxed{\mu = x^3}$$

Assim,

$$\frac{d}{dx}(y\mu) = 6x^2\mu \quad \text{ou}$$

$$\frac{d}{dx}(yx^3) = 6x^5 \qquad (\mu = x^3)$$

Integrando ambos os lados, obtemos

$$yx^3 = x^6 \implies y = x^3, \quad x \neq 0.$$

Assim uma solução particular de $y' + \frac{3}{x}y = 6x^2$ é $y_p(x) = x^3$, $x \neq 0$. A solução é

$$\boxed{y(x) = \frac{c}{x^3} + x^3}$$