Solução Numérica de Equações Diferenciais

Márcio Antônio de Andrade Bortoloti

Cálculo Numérico

Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas - DCET
Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia - UESB

Sumário

Método de Taylor de Ordem q

Método de Taylor de Ordem q

Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y' = f(x,y) & \text{em } (a,b) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

A função f pode ser liner ou não-linear, mas vamos admitir que f seja contínua e suficientemente derivável em relação a x e a y. Seja $y(x)$ a solução exata do problema. A expansão em Taylor de y em torno de x_n é dada por

$$\begin{aligned} y(x_n+h) &= y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2!}y''(x_n) + \cdots \\ &+ \frac{h^q}{q!}y^{(q)}(x_n) + \frac{h^{q+1}}{(q+1)!}y^{(q+1)}(\xi_n), \quad x_n < \xi_n < x_n + h. \end{aligned}$$

onde $x_n = x_0 + nh$, para $n = 0, 1, \cdots, N$ com $x_0 = a$, $x_N = b$ e $h = (b-a)/N$.

Observe que as derivadas $y^{(n)}$ não são conhecidas, já que y não é conhecida.

Método de Taylor de Ordem q

Mas, sabemos que $y' = f(x, y)$. Logo podemos escrever, desde que f seja suficientemente regular

$$\begin{aligned}
y' &= f(x,y) \\
y'' &= f' = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} = f_x + f_y f \\
y''' &= f'' = \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_x}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \left[\frac{\partial f_y}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right] f + f_y\left[\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right] \\
&= f_{xx} + f_{xy}f + f_{yx}f + f_{yy}f^2 + f_y f_x + f_y^2 f \\
&= f_{xx} + 2f_{xy}f + f_{yy}f^2 + f_x f_y + f_y^2 f \\
&\dots
\end{aligned}$$

Continuando dessa forma, pode-se expressar qualquer derivada de y em termos de f e de suas derivadas parciais. Contudo, a menos que f seja uma função muito simples, as derivadas de f são muito custosas para serem obtidas.

Método de Taylor de Ordem q

Por razões práticas, deve-se limitar o número de termos na expansão de Taylor.

Assim, truncando a expansão após $q+1$ termos, obtemos

$$y(x_n+h) = y(x_n) + hf(x_n, y(x_n)) + \cdots + \frac{h^q}{q!} f^{(q-1)}(x_n, y(x_n)).$$

Fazendo a substituição

$$\begin{aligned} y(x_n) &= y_n \\ f^{(j)}(x_n, y_n) &= f_n^{(j)}, \quad j = 0, 1, \cdots, q-1. \end{aligned}$$

obtemos

$$y_{n+1} = y_n + hf_n + \frac{h^2}{2!} f_n' + \cdots + \frac{h^q}{q!} f_n^{(q-1)}$$

que é chamado de Método de Taylor de Ordem q.

Método de Taylor de Ordem q

Exemplo

Resolva o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y' = -y + x + 2 & \text{em } [0, 0.3] \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

usando o Método de Taylor de ordem 3.

Assim

$$y_{n+1} = y_n + hf_n + \frac{h^2}{2} f'_n + \frac{h^3}{3!} f''_n$$

com $f(x, y) = -y + x + 2$. Assim

$$\begin{aligned} f'(x, y) &= y - x - 1 \\ f''(x, y) &= -y + x + 1 \end{aligned}$$

Construindo a solução obtemos

x_n	y_n	$y(x_n)$
0.0	2.0000	2.00000
0.1	2.0048	2.00484
0.2	2.0186	2.01873
0.3	2.0406	2.04082

com a solução exata dada por

$$y(x) = e^{-x} + x + 1.$$

O Método de Euler

O método mais simples de passo múltiplo é obtido fazendo $q = 1$ no método de Taylor de ordem q. Obtemos então o método explicito de 1-passo

$$y_{n+1} = y_n + hf_n$$

chamado Método de Euler.

Exercício (Equação de Bernoulli):

Implemente o Método de Euler para resolver o seguinte problema de valor inicial

$$\begin{cases} y' = \dfrac{y - y^2}{t} \quad \text{em } (1, 2) \\ y(1) = 2 \end{cases}$$

Compare com a solução exata

$$y(t) = \frac{t}{t - \frac{1}{2}}.$$