EXERCÍCIOS

Calcule a transformada de Laplace e abscissa de convergência de cada uma das seguintes funções.

1. t **2.** e^{at} **3.** $f(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t \leq 1 \\ 0, & t > 1 \end{cases}$

4. 1 **5.** sen at **6.** $f(t) = \begin{cases} 0, & 0 < t \leq 1 \\ t, & t > 1 \end{cases}$

Mostre que cada uma das seguintes funções é de ordem exponencial.

7. t^n, sendo n inteiro positivo. **8.** e^{at} **9.** sen bt.

10. cos bt. **11.** ln $(1 + t)$. **12.** $\sqrt{t}$.

***13.** Mostre que a transformada de Laplace de uma função f pode existir, mesmo que f "cresça demasiado rápido" para ser de ordem exponencial.

---

* Relembremos que b é uma *cota inferior* de um conjunto não-vazio S de números reais se, e sòmente se, $b \leq s$ para todo s de S, e que B é um *ínfimo* de S se, e sòmente se, B é uma cota inferior de S e $B \geq b$ para tôda cota inferior b de S. Uma das mais importantes propriedades do sistema de números reais é que todo conjunto não-vazio S de números reais tem um único ínfimo B (desde que suponhamos que B assume o valor $-\infty$ quando S não tiver cota inferior finita).

14. Seja f contínua por partes em $[0, \infty)$, e suponhamos que existam constantes C e α, tais que $|f(t)| \leq Ce^{\alpha t}$ quando $t > t_0 > 0$. Prove que f é de ordem exponencial.

15. Prove que o produto de duas funções de ordem exponencial é de ordem exponencial.

16. Seja f contínua por partes em $[0, \infty)$.

(a) Prove que f é de ordem exponencial quando existe uma constante α tal que

$$\lim_{t \to \infty} \frac{f(t)}{e^{\alpha t}} = 0.$$

(b) Prove que f *não* é de ordem exponencial se

$$\lim_{t \to \infty} \frac{f(t)}{e^{\alpha t}} = \infty$$

para *todos* os números reais α.

17. Utilize os resultados do exercício precedente para provar que e^{t^α} é de ordem exponencial, se $\alpha \leq 1$, e não se $\alpha > 1$.

18. A função t^t é de ordem exponencial em $[0, \infty)$? [*Sugestão*: Recorra ao Exercício 16 e à identidade $t^t = e^{t \ln t}$.]

19. Outra versão do teorema de comparação da integral, enunciado na demonstração do Teorema 5-1, é a seguinte: se f e g são integráveis em $[a, 1]$, $0<a < 1$, e se $|f(t)| \leq g(t)$ quando $0<t \leq 1$, então $\int_0^1 f(t)\,dt$ existe quando $\int_0^1 g(t)\,dt$ existe. Aplique êste resultado para mostrar que $1/\sqrt{t}$ tem uma transformada de Laplace. [*Sugestão*:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-st}}{\sqrt{t}}\,dt = \int_0^1 \frac{e^{-st}}{\sqrt{t}}\,dt + \int_1^\infty \frac{e^{-st}}{\sqrt{t}}\,dt.]$$

20. Seja f uma função de ordem exponencial, e seja α_0 o menor número real tal que, para alguma constante C,

$$|f(t)| \leq Ce^{\alpha t}$$

para todo $\alpha > \alpha_0$.

(a) Mostre que $\alpha_0 \geq s_0$, a abscissa de convergência de f.

(b) Mostre que existem funções para as quais $\alpha_0 > s_0$. [*Sugestão*: Considere a função

$$f(t) = \begin{cases} e^t, & \text{se } t \text{ é um inteiro,} \\ 0 & \text{para outros valôres de } t. \end{cases} \quad]$$