

Solução Numérica de Sistemas Lineares

Análise de Estabilidade

Márcio Antônio de Andrade Bortoloti

Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas - DCET
Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia

Cálculo Numérico

Sumário

Introdução

Análise de Estabilidade

- Estabilidade de $Ax = b$

- Condicionamento de um Sistema

- Um Exemplo

- Mais um Exemplo

Introdução

Antes de começarmos, vamos apresentar algumas definições e um resultado que serão utilizados.

Definição

Uma transformação linear $A : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$, onde \mathcal{V} é um espaço vetorial com produto interno, é limitada se existir uma constante $K > 0$ tal que, para todo $x \in \mathcal{V}$,

$$\|Ax\| \leq K\|x\|.$$

Definição

Para uma norma de vetor dada, definimos uma norma matricial pondo

$$\|A\| = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

Introdução

Teorema

Toda transformação linear em um espaço de dimensão finita munido de um produto interno é limitada.

Prova:

- ▶ Seja $A : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ uma transformação linear;
- ▶ Seja $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ uma base ortonormal de \mathcal{V} ;
- ▶ Escreva $K_0 = \max\{\|Ae_1\|, \|Ae_2\|, \dots, \|Ae_n\|\}$;
- ▶ Um vetor arbitrário $x \in \mathcal{V}$ pode ser escrito como

$$x = \sum_{i=1}^n x_i e_i.$$

Introdução

- Notemos que

$$\begin{aligned}\|Ax\| &= \left\| A \left(\sum_{i=1}^n x_i e_i \right) \right\| = \left\| \sum_{i=1}^n x_i A e_i \right\| \\ &\leq \sum_{i=1}^n |x_i| \|A e_i\| \\ &\leq \sum_{i=1}^n \|x\| \|A e_i\| \\ &\leq K_0 \sum_{i=1}^n \|x\| = n K_0 \|x\|\end{aligned}$$

Análise de Erro - Estabilidade

- ▶ Vamos analisar o erro na solução de

$$Ax = b$$

examinando a estabilidade da solução x relativa a pequenas perturbações em b .

- ▶ Seja $Ax = b$ um sistema de ordem n com uma única solução.
- ▶ Considere uma solução perturbada do sistema

$$A\tilde{x} = b + r.$$

- ▶ Considere o erro dado por

$$e = \tilde{x} - x.$$

- ▶ Assim

$$\begin{cases} Ax = b \\ A\tilde{x} = b + r \end{cases}$$

$$\implies A\tilde{x} - Ax = r \implies A(\tilde{x} - x) = r \implies Ae = r.$$

Análise de Erro - Estabilidade

- Note que

$$Ae = r \iff e = A^{-1}r.$$

- Para examinar a estabilidade de $Ax = b$, precisamos cotar o quociente

$$\frac{\|e\|/\|x\|}{\|r\|/\|b\|}$$

- Temos então, que

$$\|r\| \leq \|A\|\|e\| \quad \text{e} \quad \|e\| \leq \|A^{-1}\|\|r\|.$$

- Dividindo a primeira inequação por $\|A\|\|x\|$ e a segunda por $\|x\|$, obtemos

$$\frac{\|r\|}{\|A\|\|x\|} \leq \frac{\|e\|}{\|x\|} \leq \frac{\|A^{-1}\|\|r\|}{\|x\|}$$

Condicionamento de um Sistema

- Sabemos que

- Logo

$$\|b\| \leq \|A\|\|x\| \quad \text{e} \quad \|x\| \leq \|A^{-1}\|\|b\|$$
$$\frac{1}{\|x\|} \leq \frac{\|A\|}{\|b\|} \quad \text{e} \quad \frac{1}{\|A^{-1}\|\|b\|} \leq \frac{1}{\|x\|}$$

- Segue que

$$\frac{\|r\|}{\|A\|\|A^{-1}\|\|b\|} \leq \frac{\|r\|}{\|A\|\|x\|} \leq \frac{\|e\|}{\|x\|} \leq \frac{\|A^{-1}\|\|r\|}{\|x\|} \leq \frac{\|A\|\|A^{-1}\|\|r\|}{\|b\|}$$

- Ou de outra forma

$$\frac{1}{\|A\|\|A^{-1}\|} \cdot \frac{\|r\|}{\|b\|} \leq \frac{\|e\|}{\|x\|} \leq \frac{\|r\|}{\|b\|} \cdot \|A\|\|A^{-1}\|$$

- Estas desigualdades ajudam a definir o número de condicionamento de A
 $\text{cond}(A) = \|A\|\|A^{-1}\|.$

Condicionamento de um Sistema

- O número de condicionamento de A vai variar de acordo com a norma utilizada, mas é sempre limitada inferiormente por 1:

$$1 \leq \|I\| = \|AA^{-1}\| \leq \|A\|\|A^{-1}\| = \text{cond}(A).$$

Assim, observando

$$\frac{1}{\text{cond}(A)} \cdot \frac{\|r\|}{\|b\|} \leq \frac{\|e\|}{\|x\|} \leq \frac{\|r\|}{\|b\|} \cdot \text{cond}(A),$$

Notamos que

- Se $\text{cond}(A)$ estiver próximo de 1 então pequenas perturbações em b vão gerar pequenas perturbações em x (Solução).
- Mas se $\text{cond}(A)$ for grande então pequenas perturbações em b poderão gerar grandes perturbações em x .

Condicionamento de um Sistema

Observação Dependência de $\text{cond}(A)$ da Norma Utilizada

Definição

Seja A uma matriz quadrada arbitrária. O espectro de A é o conjunto de todos os autovalores de A e será denotado por $\sigma(A)$. O raio espectral é o maior módulo tomado desses autovalores e será denotado por

$$r_{\sigma}(A) = \max_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda|.$$

Teorema

Seja A uma matriz quadrada arbitrária. Então para qualquer norma matricial tem-se

$$r_{\sigma}(A) \leq \|A\|.$$

Condicionamento de um Sistema

Prova:

- ▶ Seja $\|\cdot\|$ uma norma matricial compatível com a norma vetorial $\|\cdot\|_v$.
- ▶ Seja λ um autovalor em $\sigma(A)$ tal que $|\lambda| = r_\sigma(A)$ e seja x o autovetor associado com $\|x\|_v = 1$.
- ▶ Então

$$r_\sigma(A) = |\lambda| = |\lambda|\|x\|_v = \|\lambda x\|_v = \|Ax\|_v \leq \|A\|\|x\|_v = \|A\|.$$

e o teorema está provado.

Desse teorema tem-se

$$\text{cond}(A) \geq r_\sigma(A)r_\sigma(A^{-1}).$$

De onde segue que

$$\text{cond}(A) \geq \max_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda| \max_{\lambda \in \sigma(A^{-1})} |\lambda|$$

Condicionamento de um Sistema

Definição (Norma Espaços de Matrizes)

Seja \mathcal{M} um espaço vetorial e seja $\|\cdot\|$ uma função $\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$. Então $\|\cdot\|$ é uma norma se

- ▶ $\|X\| \geq 0$ para todo $X \in \mathcal{M}$ e $\|X\| = 0$ se e somente se $X = 0$.
- ▶ $\|\alpha X\| = |\alpha| \|X\|$ para todo $X \in \mathcal{M}$ e todo escalar α .
- ▶ $\|X + Y\| \leq \|X\| + \|Y\|$ para todo $X, Y \in \mathcal{M}$.
- ▶ $\|XY\| \leq \|X\| \|Y\|$
- ▶ Se $x \in \mathcal{V}$ é um vetor em um espaço vetorial com a norma dada por $\|x\|_v$ então está estabelecida a compatibilidade entre as normas $\|\cdot\|$ e $\|\cdot\|_v$ da forma

$$\|Ax\|_v \leq \|A\| \|x\|_v.$$

Condicionamento de um Sistema

Como uma ilustração, pode-se comparar algumas normas para vetores e para matrizes.

Normas Vetores	Normas Matrizes
$\ x\ _1 = \sum_{i=1}^n x_i $	$\ A\ _1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n a_{ij} $
$\ x\ _2 = \left[\sum_{j=1}^n x_i ^2 \right]^{1/2}$	$\ A\ _2 = \sqrt{\text{tr}(A^T A)}$
$\ x\ _\infty = \max_{1 \leq i \leq n} x_i $	$\ A\ _\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n a_{ij} $

Análise de Erro - Estabilidade - Um Exemplo

Exemplo:

Considere o sistema linear

$$\begin{cases} 7x_1 + 10x_2 = b_1 \\ 5x_1 + 7x_2 = b_2 \end{cases}$$

As matrizes A e A^{-1} do sistema são

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} -7 & 10 \\ 5 & -7 \end{bmatrix}$$

Temos, para esse exemplo,

$$\text{cond}(A)_2 = 223$$

O número de condicionamento de A sugere que o sistema anterior pode ser sensível à alterações em b e em A .

Um Exemplo

Para ilustrar, vamos observar o sistema abaixo

$$\begin{cases} 7x_1 + 10x_2 = 1 \\ 5x_1 + 7x_2 = 0.7 \end{cases}$$

Esse sistema possui a solução $(x_1 = 0, x_2 = 0.1)$.

Agora, observemos o seguinte sistema perturbado

$$\begin{cases} 7\tilde{x}_1 + 10\tilde{x}_2 = 1.01 \\ 5\tilde{x}_1 + 7\tilde{x}_2 = 0.69 \end{cases}$$

Este possui a solução $\tilde{x}_1 = -0.17, \tilde{x}_2 = 0.22$.

Um Exemplo

- ▶ Sistema lineares cuja solução é instável com relação a pequenas alterações em b é chamado mal-condicionado.
- ▶ O sistema anterior é um exemplo de sistema mal-condicionado.
- ▶ Os números $\text{cond}(A)$ e $\text{cond}(A)_*$ são bons indicadores de mal-condicionamento.

Mais um Exemplo

Um exemplo de matriz mal-condicionada é a chamada Matriz de Hilbert de ordem n :

$$H_n = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & & & & \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \cdots & & \frac{1}{2n-1} \end{bmatrix}$$

n	$\text{cond}(H_n)_*$	n	$\text{cond}(H_n)_*$
3	5.24E+02	7	4.75E+08
4	1.55E+04	8	1.53E+10
5	4.77E+05	9	4.93E+11
6	1.50E+07	10	1.60E+13

Mais um Exemplo

Como um exemplo, considere

$$H_3 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \quad H_3^{-1} = \begin{bmatrix} 9 & -36 & 30 \\ -36 & 192 & -180 \\ 30 & -180 & 180 \end{bmatrix}$$

Após o emprego de uma aritmética de ponto flutuante em H_3 e encontrando H_3^{-1} por meio de um programa de inversão de matrizes, obtemos

$$\overline{H}_3 = \begin{bmatrix} 1.0000 & 0.5000 & 0.3333 \\ 0.5000 & 0.3333 & 0.2500 \\ 0.3333 & 0.2500 & 0.2000 \end{bmatrix} \quad \overline{H}_3^{-1} = \begin{bmatrix} 9.062 & -36.32 & 30.30 \\ -36.32 & 193.7 & -181.6 \\ 30.30 & -181.6 & 181.5 \end{bmatrix}$$