Equações Diferenciais

Exemplo: Resolva

$$xy' + y - y\ln(xy) = 0.$$

Sol:

Faça $v = \ln(xy)$. Note que

$$v' = \frac{1}{xy}(y + xy').$$

Assim a equação pode ser escrita como

$$\frac{xy' + y}{xy} - \frac{\ln(xy)}{x} = 0$$

ou

$$v' - \frac{1}{x}v = 0.$$

Segue que

$$v' = \frac{1}{x}v$$

ou

$$\frac{1}{v}v' = \frac{1}{x}.$$

Assim

$$\ln|v| = \ln|x| + C^*$$

$$\Rightarrow \quad v = e^{\ln|x| + C} = x\, e^{C^*}$$

ou seja

$$v = cx, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Como fizemos $v = \log(xy)$, segue que

$$cx = \log(xy)$$

de onde tem-se

$$e^{cx} = xy$$

ou

$$\boxed{y = \frac{1}{x} e^{cx}}$$

Equações na Forma Normal

Vamos considerar equações da forma

$$y' = f(x,y).$$

Nota-se que para obtermos soluções da equação acima $f: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ deve ser continuamente diferenciável.

Exemplo:

$$y' = -\frac{x}{y}.$$

Note que $y \neq 0$, ou seja, $f(x,y) = -\frac{x}{y}$ está definida em todo o plano exceto no eixo x.

Para resolver tal equação, vamos reescrevê-la da seguinte forma:

$$yy' + x = 0. \quad \left(\text{Equação não linear}\right)$$

Essa equação pode ser reescrita como

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y^2}{2}\right) + \frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{2}\right) = 0.$$

Integrando,

$$\int \frac{d}{dx}\left(\frac{y^2}{2}\right)dx + \int \frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{2}\right)dx = c^*$$

obtemos

$$\frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2} = c^*.$$

A expressão anterior pode ser reescrita como

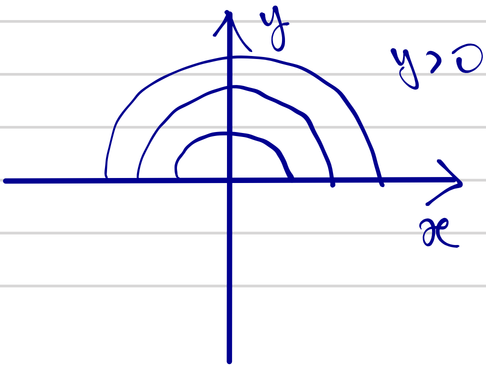
$$x^2 + y^2 = c^2,$$

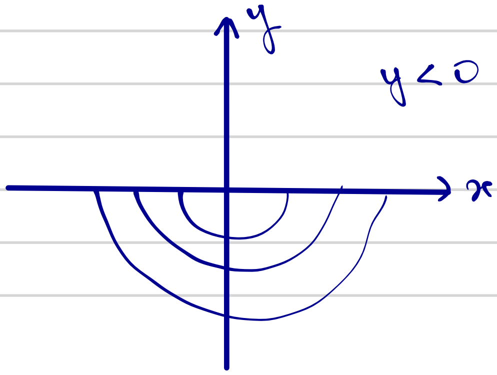
onde $c^2 = 2c^*$. (Note que $c^* > 0$).

(*) Por que c^* não poderia ser igual a 0 ?

Segue que

$$y = \sqrt{c^2 - x^2} \quad \text{ou} \quad y = -\sqrt{c^2 - x^2}.$$





Separação de Variáveis

Considere uma equação diferencial da forma

$$y' = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)},$$

onde $N(x,y) \neq 0$.

Se $M = M(x)$ e $N = N(y)$ então

$$y' = -\frac{M(x)}{N(y)}$$

implica

$$N(y)\, y' = -M(x)$$

$$\Rightarrow \quad N(y)\, y'\, dx = -M(x)\, dx$$

$$\Rightarrow \quad N(y)\, dy + M(x)\, dx = 0$$

É portanto

$$\int N(y)\, dy + \int M(x)\, dx = C,$$

$C \in \mathbb{R}$ é uma constante.

De uma forma mais geral, se

$$M(x,y) = M_1(x) M_2(y) \text{ e } N(x,y) = N_1'(x) N_2'(y)$$

então

$$y' = -\frac{M_1(x) M_2(y)}{N_1'(x) N_2'(y)}.$$

Assim

$$\frac{N_2(y)}{M_2(y)}\, y' = -\frac{M_1(x)}{N_1(x)},$$

onde

$$\frac{N_2(y)}{M_2(y)}\, y' + \frac{M_1(x)}{N_1(x)} = 0$$

$\Rightarrow$

$$\frac{N_2(y)}{M_2(y)}\, y'\, dx + \frac{M_1(x)}{N_1(x)}\, dx = 0$$

ou

$$\frac{N_2(y)}{M_2(y)}\, dy + \frac{M_1(x)}{N_1(x)}\, dx = 0$$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{N_2(y)}{M_2(y)}\, dy + \int \frac{M_1(x)}{N_1(x)}\, dx = C,$$

C é uma constante.

Exemplo:

$$y' = \frac{y \cos x}{1 + 2y^2}, \quad y(0) = 1.$$

Note que

$$\frac{(1 + 2y^2)}{y}\, y' = \cos x. \qquad y \neq 0.$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{1}{y} + 2y\right) y' = \cos x,$$

Assim,

$$\left(\frac{1}{y} + 2y\right) dy = \cos x \, dx$$

Integrando ambos os lados obtemos

$$\ln|y| + y^2 = \operatorname{sen} x + C$$

Fazendo $y(0)=1$ temos

$$\ln 1 + 1 = \operatorname{sen} 0 + C \Rightarrow C = 1$$

Assim,

$$\boxed{\ln|y| + y^2 = \operatorname{sen} x + 1}$$