Fundamentos de Matemática Elementar I

Márcio Antônio de Andrade Bortoloti
mbortoloti@uesb.edu.br
https://mbortoloti.github.io

Fudamentos de Matemática Elementar I

Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas - DCET
Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia

Noções de Lógica Matemática

A palavra **Definição** no contexto da Matemática

- Os objetos matemáticos adquirem existência por meio de definições.
- Uma definição deve ser absolutamente clara sem apresentar ambiguidades.

Exemplo:

Definição
Um inteiro é chamado par se for divisível por 2.

Observações:

- Cada um dos temos que estão presentes na definição acima pode ser definido por meio de conceitos mais simples.
- Se cada termo for definido por meio de conceitos mais simples, estaremos continuamente em busca de definições.
- Deve chegar um momento em que diremos: "Este termo é indefinível, mas cremos entender o que ele significa".

Teorema

Um teorema é uma afirmação declarativa sobre matemática, para a qual existe uma prova. Uma prova, por sua vez, é uma dissertação que mostra, de maneira irrefutável, que uma afirmação é verdadeira.

Exemplo:

Teorema (Pitágoras)
Se a e b são os comprimentos dos catetos de um triângulo retângulo e c é o comprimento da hipotenusa, então

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Conjectura

Uma conjectura é uma afirmação cuja veracidade não pode ser garantida.

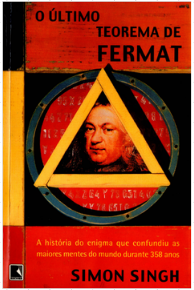
A conjectura de Goldbach (1742) : "Todo inteiro par maior que 2 pode ser escrito como a soma de dois números primos".

Já foram testados os inteiros positivos até o limite de 4×10^{18}.

https://mathworld.wolfram.com/GoldbachConjecture.html

O Último Teorema de Fermat: Não existem soluções inteiras para a equação

$$x^n + y^n = z^n, \qquad \text{para } n > 2.$$



"A história do enígma que confundiu as maiores mentes do mundo durante 358 anos" (1637) .

Alguns termos que podem ser utilizados como sinônimo para "Teorema":

- **Resultado:** Uma expressão modesta, genérica. Utilizada de uma forma mais geral.
- **Proposição:** Um teorema de importância secundária.
- **Lema:** Um teorema cujo objetivo principal é ajudar a provar outro teorema mais importante.
- **Corolário:** Resultado com uma prova rápida, cujo passo principal é o uso de outro teorema provado anterior.

Uma afirmação (teorema, proposição, lema ou corolário) pode ser classificada como *verdadeira* ou *falsa*.

Exemplo de uma afirmação verdadeira: O produto de um inteiro ímpar com um inteiro par é par.

Exemplo de uma afirmação falsa: A soma de dois inteiros ímpares é um ímpar.

Observação: Nem toda frase é uma afirmação válida do ponto de vista matemático.

- "Três vezes cinco mais um";
- "A raíz quadrado de dois é um número racional?";
- "O triplo de um número menos um é igual a onze $(3x - 1 = 11)$";

Sentença Verdadeira

Consideremos a seguinte afirmação: "A soma de dois inteiros pares é par".

Podemos associar a esta afirmação a letra p, de modo que essa letra passe a significar tal afirmação.

Desse modo, dizer que p é uma afirmação verdadeira, significa dizer que a sentença "A soma de dois inteiros pares é par" é também verdadeira.

Negação

Considere, novamente, a frase "A soma de dois inteiros pares é par". Vamos denotar essa afirmação por p. Vamos escrever da seguinte forma

p: A soma de dois inteiros pares é par.

Negar a afirmação p significa assumir que "A soma de dois inteiros pares é ímpar"

Nesse caso, podemos concluir que se p é verdadeira então a negação de p é falsa.

Notação: A negação de uma afirmação p é denotada por $\sim p$.

Agora considere a seguinte informação:

q: A medida do comprimento de uma circunferência é o dobro do raio dessa circunferência.

A afirmação q claramente é falsa. Assim, observamos que a negação de q, denotada por $\sim q$, é verdadeira.

$\sim q$: A medida do comprimento de uma circunferência não é o dobro do raio dessa circunferência.

Assim, para uma dada afirmação p, temos

p	$\sim p$
V	F
F	V

Composição de Proposições: O conectivo $\wedge$ (e)

Usamos o conectivo "$\wedge$" para designar uma conjunção entre duas proposições p e q,

$$p \wedge q.$$

Exemplo: Considere a afirmação: "Todo inteiro cujo algarismo das unidades é 0 é divisível por 2 e por 5."

Considere as afirmações:

- p: Todo inteiro cujo algarismo das unidades é 0 é divisível por 2.
- q: Todo inteiro cujo algarismo das unidades é 0 é divisível por 5.

A afirmação do exemplo pode ser escrita como

$$p \wedge q.$$

Composição de Proposições: O conectivo $\wedge$ (e)

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Em resumo, para que $p \wedge q$ seja verdadeira é necessário que p e q sejam simultaneamente verdadeiros.

Composição de Proposições: O conectivo $\vee$ (ou)

Usamos o conectivo "$\vee$" para designar uma disjunção entre duas proposições p e q,

$$p \vee q.$$

Exemplo: Um número real não negativo r é maior que ou igual a 0.

Considere as afirmações:

- p: $r > 0$.
- q: $r = 0$.

A afirmação do exemplo pode ser escrita como

$$p \vee q.$$

Composição de Proposições: O conectivo $\vee$ (ou)

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Em resumo, para que $p \vee q$ seja verdadeira é necessário que ao menos um p ou q seja verdadeiro.

Condicional: $\rightarrow$ (Se, então)

Exemplo:

Imagine que um político esteja concorrendo a um cargo e anuncie que

"Se for eleito, diminuirei os impostos".

- Suponha que o político seja eleito e reduza os impostos. (OK)
- Suponha que ele seja eleito e não diminua os impostos. (Não OK)
- Suponha que ele não seja eleito, mas por um lobby, ele consiga fazer com que os impostos sejam reduzidos. (OK)
- Suponha que ele não seja eleito e os impostos não sejam reduzidos. (OK)

Condicional: $\rightarrow$ (Se, então)

Define-se o condicional $p \rightarrow q$ como falso somente quando p é verdadeira e q é falsa. Cao contrário $p \rightarrow q$ é verdadeira.

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Condicional: $\rightarrow$ (Se, então)

A maioria dos teoremas possuem a estrutura $p \rightarrow q$.

Exemplo:

Teorema (Pitágoras)
Se a e b são os comprimentos dos catetos de um triângulo retângulo e c é o comprimento da hipotenusa, então

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Condicional: $\leftrightarrow$ (Se, e somente se)

Quando escrevemos $p \leftrightarrow q$ estamos assumindo que valem $p \rightarrow q$ e $q \rightarrow p$.

O condicional $\leftrightarrow$ é verdadeiro quando p e q são ambas verdadeiras ou ambas falsas. Se isso não ocorrer, o condicional $\leftrightarrow$ é falso.

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Condicional: $\leftrightarrow$ (Se, e somente se) **Observação:** Vamos analisar a seguinte tabela

p	q	$p \leftrightarrow q$	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F
F	V	F	V	F	F
F	F	V	V	V	V

Definição
Quando os valores lógicos de duas sentenças são iguais então dizemos que essas sentenças são logicamente equivalentes.

Tautologia

Dizemos que uma proposição, que depende de p, q, ..., é uma tautologia se ela for sempre verdadeira, independednte dos valores lógicos de p, q, ...

Exemplo:

Mostre que $(x \vee y) \vee (x \vee \sim y)$ é uma tautologia.

x	y	$x \vee y$	$\sim y$	$x \vee \sim y$	$(x \vee y) \vee (x \vee \sim y)$
V	V	V	F	V	V
V	F	V	V	V	V
F	V	V	F	F	V
F	F	F	V	V	V

Quantificador Universal ($\forall$ - "para todo")

Quando for nececssário constrtuir uma sentença que associe uma propriedade a todos os elementos de um conjunto, usamos o quantificador universal "para todo".

- Todo inteiro é ou par ou ímpar.
- Todos os inteiros são pares ou ímpares.
- Cada inteiro é ou par ou ímpar.
- Seja x um inteiro qualquer. Então x é par ou ímpar.
- $\forall x \in \mathbb{Z}$, x é par ou é ímpar.

Exemplo: A seguinte afirmação é falsa: "$\forall x,\ x + 1 = 2$".

Quantificador Existencial ($\exists$ - "existe")

O quantificador existencial tem a função de informar a existência de um elemento de um conjunto que possui uma determinada propriedade.

Exemplo:

"Existe um número natural que é primo e par " ou "$\exists\, n \in \mathbb{N}$ tal que n é primo e par."

Exemplo: A seguinte afirmação é verdadeira: "$\exists\, x,\ x + 1 = 2$.

Negação de uma Conjunção $(p \wedge q)$

$$\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$$

p	q	$p \wedge q$	$\sim(p \wedge q)$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \vee \sim q$
V	V	V	F	F	F	F
V	F	F	V	F	V	V
F	V	F	V	V	F	V
F	F	F	V	V	V	V

Negação de uma Disjunção $(p \vee q)$

$$\sim(p \vee q) \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$$

p	q	$p \vee q$	$\sim(p \vee q)$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \wedge \sim q$
V	V	V	F	F	F	F
V	F	V	F	F	V	F
F	V	V	F	V	F	F
F	F	F	V	V	V	V

Negação de uma Condicional ($p \to q$)

$$\sim(p \to q) \Leftrightarrow p \wedge \sim q$$

p	q	$p \to q$	$\sim(p \to q)$	$\sim q$	$p \wedge \sim q$
V	V	V	F	F	F
V	F	F	V	V	V
F	V	V	F	F	F
F	F	V	F	V	F

Negação de Afirmações Quantificadas

Considere as seguintes afirmações:

"Não existe inteiro que seja simultaneamente par e ímpar".

"Nem todos os inteiros são primos."

Usando a notação adequada, essas afirmações podem ser reescritas como

$$\sim(\exists\, x \in \mathbb{Z}, x \text{ é par e } x \text{ é ímpar}).$$

$$\forall\, x \in \mathbb{Z}, x \text{ não é par ou } x \text{ não é ímpar.}$$

$$\sim(\forall\, x \in \mathbb{Z}, x \text{ é primo}).$$

$$\exists\, x \in \mathbb{Z},\ x \text{ não é primo}$$

Contra-exemplo

(Afirmação Falsa): Sejam a e b inteiros. Se $a|b$ e $b|a$ então $a = b$.

Como refutar uma afirmação falsa do tipo "Se A, então B"?

Temos que encontrar uma situação em que A seja verdadeira, mas B seja falsa (contra-exemplo).

Uma estratégia para encontrar um contra-exemplo é tentar provar a afirmação.

Se $a|b$ então $b=aq$. Se $b|a$ então $a=bp$. Segue que

$$a=bp=aqp \Rightarrow a=aqp.$$

Desde que $a\neq 0$ tem-se

$$\boxed{1=qp}$$

Se tomamos $\boxed{p=q=-1}$ temos $a=-b$.
Se fizermos $a=5$ então $b=-5$. Nota-se que
$5|-5$ e $-5|5$ mas $5\neq -5$.