Solução Numérica de Sistemas Lineares

Márcio Antônio de Andrade Bortoloti

Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas - DCET
Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia

Cálculo Numérico

Eliminação de Gauss

Vamos considerar o sistema

$$Ax = b$$

com $\det A \neq 0$. A matriz ampliada do sistena é

$$[A|b] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & \cdots & a_{1n}^{(0)} & b_1^{(0)} \\ a_{21}^{(0)} & a_{22}^{(0)} & \cdots & a_{2n}^{(0)} & b_2^{(0)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}^{(0)} & a_{n2}^{(0)} & \cdots & a_{nn}^{(0)} & b_n^{(0)} \end{array}\right]$$

Eliminação de Gauss

Etapa 1: Eliminação da variável x_1 das equações $i = 2, \cdots, n$.

Escolha

$$m_{i1} = \frac{a_{i1}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}} \quad \text{para } i = 2, \cdots, n$$

Obtemos

$$[A^{(1)}|b^{(1)}] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(1)} & \cdots & a_{nn}^{(1)} & b_n^{(1)} \end{array}\right]$$

onde

$$\begin{array}{rcl} a_{1j}^{(1)} & \leftarrow & a_{1j}^{(0)} \quad \text{para } j = 1, \cdots, n \\ b_1^{(1)} & \leftarrow & b_1^{(0)} \\ a_{ij}^{(1)} & \leftarrow & a_{ij}^{(0)} - m_{i1}a_{1j}^{(0)}, \quad i = 2, \cdots, n \text{ e } j = 1, \cdots, n \\ b_i^{(1)} & \leftarrow & b_i^{(0)} - m_{i1}b_1^{(0)} \end{array}$$

Eliminação de Gauss

Etapa 2: Eliminação da variável x_2 das equações $i = 3, \cdots, n$. Escolha

$$m_{i2} = \frac{a_{i2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} \quad \text{para } i = 3, \cdots, n$$

Obtemos

$$[A^{(2)}|b^{(2)}] = \left[\begin{array}{ccccc|c} a_{11}^{(2)} & a_{12}^{(2)} & a_{13}^{(2)} & \cdots & a_{1n}^{(2)} & b_1^{(2)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} & \cdots & \vdots & b_3^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{n3}^{(2)} & \cdots & a_{nn}^{(2)} & b_n^{(2)} \end{array}\right]$$

onde

$$\begin{array}{lcl} a_{1j}^{(2)} & \leftarrow & a_{1j}^{(1)} \quad \text{para } i = 1, 2 \text{ e } j = 1, \cdots, n \\ b_i^{(2)} & \leftarrow & b_i^{(1)} \quad \text{para } i = 1, 2 \\ a_{ij}^{(2)} & \leftarrow & a_{ij}^{(1)} - m_{i2} a_{2j}^{(1)}, \quad i = 3, \cdots, n \text{ e } j = 2, \cdots, n \\ b_i^{(2)} & \leftarrow & b_i^{(1)} - m_{i2} b_2^{(1)} \end{array}$$

Eliminação de Gauss

Seguindo raciocínio análogo, procedemos até a etapa $n-1$ e a matriz ao final dessa etapa será

$$[A^{(n-1)}|b^{(n-1)}] = \left[\begin{array}{ccccc|c} a_{11}^{(n-1)} & a_{12}^{(n-1)} & a_{13}^{(n-1)} & \cdots & a_{1n}^{(n-1)} & b_1^{(n-1)} \\ 0 & a_{22}^{(n-1)} & a_{23}^{(n-1)} & \cdots & a_{2n}^{(n-1)} & b_2^{(n-1)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(n-1)} & \cdots & \vdots & b_3^{(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn}^{(n-1)} & b_n^{(n-1)} \end{array}\right]$$

Eliminação de Gauss - Algorítmo

Eliminação

for $k = 1, \cdots, n-1$
    for $i = k+1, \cdots, n$
        $m \leftarrow a_{ik}/a_{kk}$
        $a_{ik} \leftarrow 0$
        for $j = k+1, \cdots, n$
            $a_{ij} \leftarrow a_{ij} - m a_{kj}$
        end
        $b_i \leftarrow b_i - m b_k$
    end
end

Resolução do Sistema

$x_n \leftarrow b_n/a_{nn}$
for $k = (n-1), \cdots, 1$
    $s \leftarrow 0$
    for $j = (k+1), \cdots, n$
        $s \leftarrow s + a_{kj} x_j$
    end
   $x_k \leftarrow (b_k - s)/a_{kk}$
end