Integração Numérica

Márcio Antônio de Andrade Bortoloti

Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas - DCET
Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia - UESB

Cálculo Numérico
Curso de Matemática

Integral de Riemman

Considere uma partição $\mathcal{P}$ de um intervalo $[a, b]$ e $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua. A Integral de Riemann da função f no intervalo $[a, b]$ é definida como

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{\substack{n \to \infty \\ h \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*) \Delta x_i$$

onde $x_i^* \in \mathcal{P}$, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ e $h = \max_{i \in \mathbb{N}} \Delta x_i$.

- Frequentemente é necessário calcular o valor de uma integral definida de uma função que não tenha primitiva ou cuja primitiva seja difícil de se obter.
  Exemplo:
  $$\int_a^b e^{-x^2}\,dx.$$

Definição

O método básico envolvido na aproximação de $\int_a^b f(x)\,dx$ é chamado **quadratura numérica**.

- Alguns métodos de quadratura numérica são baseados na teoria de polinômios interpolantes.

Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua e

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) L_i(x)$$

o polinômio interpolante de Lagrange.
Logo

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x)$$

onde

$$R_n(x) = \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}, \text{ onde } \xi(x) \in [a, b].$$

Assim

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\,dx &= \int_a^b P_n(x)\,dx + \int_a^b R_n(x)\,dx \\
&= \int_a^b \sum_{i=0}^{n} f(x_i)L_i(x)\,dx + \int_a^b \prod_{i=0}^{n}(x-x_i)\frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}\,dx \\
&= \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\int_a^b L_i(x)\,dx + \frac{1}{(n+1)!}\int_a^b \prod_{i=0}^{n}(x-x_i)f^{(n+1)}(\xi(x))\,dx
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=0}^{n} a_i f(x_i), \text{ onde } a_i = \int_a^b L_i(x)\,dx.}$$

Integração Numérica

A fórmula de quadratura é dada por

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=0}^{n} a_i f(x_i), \text{ onde } a_i = \int_a^b L_i(x)\,dx.}$$

Com erro dado por

$$\boxed{E(f) = \frac{1}{(n+1)!}\int_a^b \prod_{i=0}^{n}(x - x_i) f^{(n+1)}(\xi(x))}$$

- Vamos deduzir a Regra do Trapézio para a aproximação de $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$.

Sejam $x_0 = a$, $x_1 = b$, $h = b - a$ e $P_1(x)$ o polinômio de grau 1 de Lagrange para pontos igualmente espaçados

$$P_1(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} f(x_0) + \frac{(x - x_0)}{x_1 - x_0} f(x_1).$$

Assim

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\,dx &= \int_{x_0}^{x_1} P_1(x)\,dx + \int_a^b R_1(x)\,dx \\
&= \int_{x_0}^{x_1} \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} f(x_0) + \frac{(x - x_0)}{x_1 - x_0} f(x_1)\,dx \\
&+ \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x_1} (x - x_0)(x - x_1) f''(\xi(x))dx
\end{aligned}$$

Vamos analisar, separadamente, a expressão

$$E_T = \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x_1}(x-x_0)(x-x_1)f''(\xi(x))dx$$

Defina $g(x) = (x-x_0)(x-x_1)$.

Note que

- $\forall\, x \in (x_0, x_1)$ temos $g(x) < 0$.
- Se $f''(x)$ for contínua em $[x_0, x_1]$ então existem números reais m e M tais que $m \leq f''(x) \leq M$.

Assim

$$\begin{aligned} m \leq & \quad f''(\xi(x)) & \leq M \\ mg(x) \geq & \quad g(x)f''(\xi(x)) & \geq Mg(x) \\ M\underbrace{\int_{x_0}^{x_1} g(x)\,dx}_{<0} \leq & \int_{x_0}^{x_1} g(x)f''(\xi(x))\,dx & \leq m\underbrace{\int_{x_0}^{x_1} g(x)\,dx}_{<0} \end{aligned}$$

Logo

$$m \leq \underbrace{\frac{\displaystyle\int_{x_0}^{x_1} g(x) f''(\xi(x))\, dx}{\displaystyle\int_{x_0}^{x_1} g(x)\, dx}}_{=A} \leq M$$

Como f'' é contínua em $[x_0, x_1]$ e $m \leq A \leq M$, existe $\zeta \in (x_0, x_1)$ tal que $f''(\zeta) = A$ (Teorema do Valor Intermediário).

Ou seja

$$\int_{x_0}^{x_1} g(x) f''(\xi(x))\, dx = f''(\zeta) \int_{x_0}^{x_1} g(x)\, dx.$$

$$\Rightarrow \boxed{E_T = \frac{f''(\zeta)}{2} \int_{x_0}^{x_1} g(x)\, dx, \quad \zeta \in (x_0, x_1)}.$$

Agora,

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{x_1} g(x)\,dx &= \int_{x_0}^{x_1} (x - x_0)(x - x_1)\,dx \\ &= \int_0^{-h} u(h+u)\,du \quad \text{(Fizemos } x = x_0 - u\text{)} \\ &= -\frac{h^3}{6}\end{aligned}$$

Logo

$$E_T = -\frac{h^3}{12} f''(\zeta) \quad \text{para algum} \quad \zeta \in (x_0, x_1).$$

Integração Numérica - A Regra do Trapézio

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\int_{x_0}^{x_1} P_1(x)\,dx &= \int_{x_0}^{x_1} \frac{x-x_1}{x_0-x_1} f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{x_1-x_0} f(x_1)\,dx \\
&= \frac{f(x_0)}{h}\int_{x_0}^{x_1} x - x_1\,dx + \frac{f(x_1)}{h}\int_{x_0}^{x_1} x - x_0\,dx \\
&= \frac{h}{2}\Big[f(x_0)+f(x_1)\Big]
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\boxed{\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx = \frac{h}{2}\Big[f(x_0)+f(x_1)\Big] - \frac{h^3}{12} f''(\zeta)}$$

Graficamente,

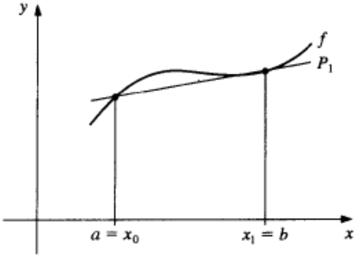

Figura: Regra do Trapézio

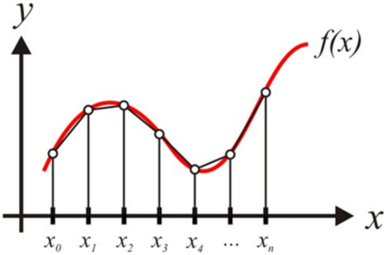

Figura: Regra do Trapézio Repetida

A Regra do Trapézio nos diz

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx = \frac{h}{2}\Big\{f(x_0)+f(x_1)\Big\} - \frac{h^3}{12}f''(\zeta), \quad \zeta \in (x_0, x_1).$$

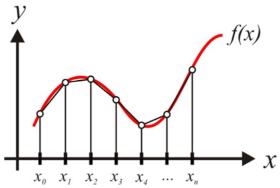

Figura: Regra do Trapézio

Considerando uma partição $\mathcal{P}$ de $[a,b]$, temos

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &= \sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx \\ &= \sum_{i=0}^{n-1}\left\{\frac{h}{2}\Big(f(x_i)+f(x_{i+1})\Big) - \frac{h^3}{12}f''(\zeta_i)\right\}, \quad \zeta_i \in (x_i, x_{i+1})\end{aligned}$$

Integração Numérica - A Regra do Trapézio

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &= \sum_{i=0}^{n-1}\frac{h}{2}\Big(f(x_i)+f(x_{i+1})\Big)-\sum_{i=0}^{n-1}\frac{h^3}{12}f''(\zeta_i)\\ &= \sum_{i=0}^{n-1}\frac{h}{2}\Big(f(x_i)+f(x_{i+1})\Big)\\ &- \frac{nh^3}{12}f''(\zeta)\ \text{para algum } \zeta\in(a,b)\end{aligned}$$

Portanto

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=0}^{n-1}\frac{h}{2}\Big(f(x_i)+f(x_{i+1})\Big)}$$

com

$$|E_T| = \left|\frac{nh^3 f''(\zeta)}{12}\right| \le \left|\frac{nh^3}{12}\right|\max_{x\in[a,b]}|f''(x)| = \boxed{\frac{(b-a)h^2}{12}\max_{x\in[a,b]}|f''(x)|}$$

Integração de $\exp(x)$ no intervalo $[0, 1]$.

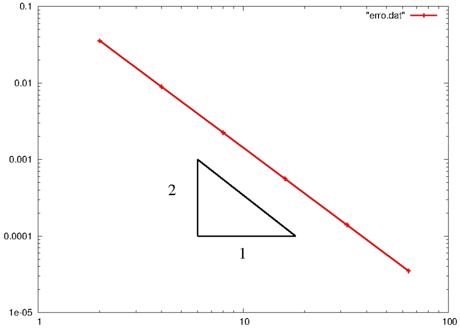

Figura: Convergência

Estudo do erro

$$E_T = \left| \int_0^1 e^x \, dx - \int_0^1 P_1(x) \, dx \right|$$

$$|E_T| \leq \frac{(b-a)h^2}{12} \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|$$