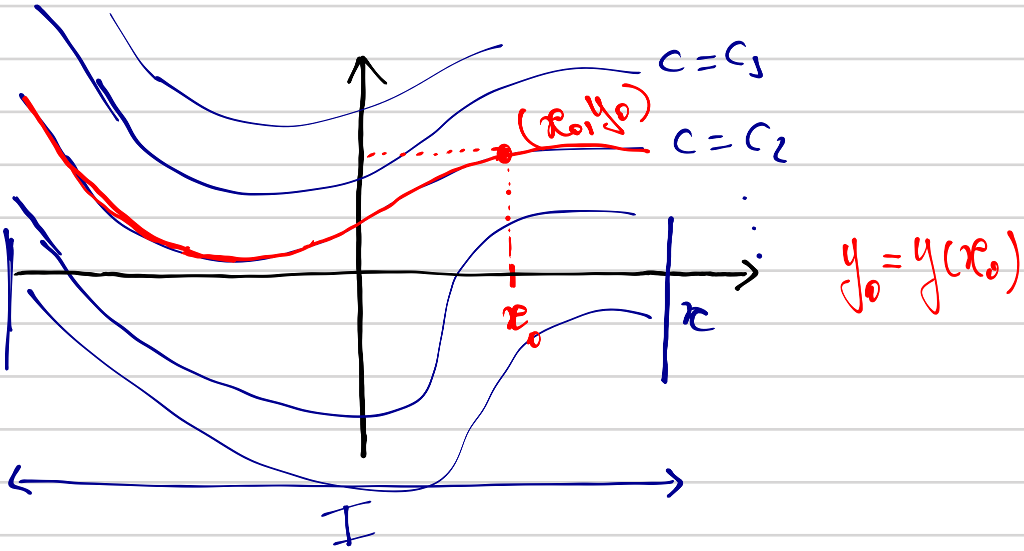
Existência e Unicidade

Considere a equação

$$y' + p(x)y = q(x)$$

definida em I. As soluções da equação são dadas por

$$y = \left[C + \int q(x)\exp\left(\int p(x)\,dx\right)dx \right]\exp\left(-\int p(x)\,dx\right).$$



Definição: O problema

$$\begin{cases} y' + p(x)y = q(x) \text{ em } I \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

é chamado problema de valor inicial (PVI).

<u>Teorema</u>: Seja L um operador diferencial linear normal de primeira ordem definido em I, e seja $x_0 \in I$. Então para cada $y_0 \in \mathbb{R}$ o problema de valor inicial

$$\begin{cases} Ly = q \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \qquad Ly = y' + p(x)y$$

tem ao menos uma solução.

<u>Prova</u>:
Note que,

$$y(x) = \left[C + \int q(x) \exp\left(\int p(x)\,dx\right) dx \right] \exp\left(-\int p(x)\,dx\right)$$

é solução de $Ly = q$.

Para $I = [a,b]$ podemos escrever

$$y(x) = \left[C + \int_a^x q(\xi) \exp\left(\int_a^\xi p(\rho)\,d\rho\right) d\xi \right] \exp\left(-\int_a^x p(\xi)\,d\xi\right),$$

de modo que, ao fazer $y(x_0) = y_0$ obtemos a expressão

$$y_0 = \left[C + \int_a^{x_0} q(\xi) \exp\left(\int_a^{\xi} p(\xi)\,d\xi\right) d\xi \right] \exp\left(-\int_a^{x_0} p(\xi)\,d\xi\right).$$

Resolvendo a equação podemos encontrar uma expressão para C, onde substituindo tal expressão na solução geral obtemos uma solução para o problema de valor inicial.

Teorema (Unicidade) Todo problema de valor inicial

$$(PVI) \quad \begin{cases} Ly = q \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

onde $Ly = y' + p(x)y$ tem uma única solução.

Prova:

Suponha que y_1, y_2 são duas soluções do PVI. Assim

$$\begin{cases} Ly_1 = q \\ y_1(x_0) = y_0 \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} Ly_2 = q \\ y_2(x_0) = y_0 \end{cases}.$$

Assim

$$Ly_1 - Ly_2 = 0$$

ou

$$L(y_1 - y_2) = 0.$$

Isto significa que $y = y_1 - y_2$ é solução da equação homogênea $Ly = 0$.

Mas, nesse caso, temos que y deve ser da forma

$$y(x) = C \exp\left(-\int_a^x p(z)\,dz\right).$$

Logo

$$y_1(x) - y_2(x) = C \exp\left(-\int_a^x p(z)\,dz\right).$$

Fazendo $x = x_0$ temos

$$0 = y_0 - y_0 = y_1(x_0) - y_2(x_0) = c \exp\left(-\int_a^{x_0} p(\xi)\,d\xi\right)$$

Como $\exp\left(-\int_a^{x_0} p(\xi)\,d\xi\right) \neq 0$ segue que devemos ter $c = 0$. Isso implica que $y = y_1(x) - y_2(x) = 0$ e portanto $y_1(x) = y_2(x)$.

Exemplo: Resolva a equação:

$$\begin{cases} x y' + 2y = 0 \\ y(1) = -1 \end{cases}$$

Temos

$$y' + \frac{2}{x} y = 0 \quad , \quad x \neq 0,$$

ou

$$\frac{1}{y} y' = -\frac{2}{x} \quad , \quad x \neq 0.$$

Integrando,

$$\int \frac{1}{y} y' \, dx = -2 \int \frac{1}{x} \, dx. \implies$$

$$\int \frac{1}{y} \, dy = -2 \int \frac{1}{x} \, dx \implies$$

$$\ln|y| = -2 \ln|x|.$$

Assim

$$y = \frac{c}{x^2} \quad , \quad c = \text{cte}.$$

é a solução geral do PVI.

Para determinar a constante c usamos o fato de $y(1) = -1$. Logo

$$y(1) = \frac{c}{1^2} = -1 \Rightarrow c = -1.$$

Assim a solução do PVI é

$$y(x) = -\frac{1}{x^2}.$$