可換環論

安藤 遼哉（@Reincarnatorsan）

2021 年 6 月 17 日

はじめに

可換環論とは，大雑把に言えば可換な２つの演算，加法と乗法を備えた集合についての理論である．これらはもともと整数全体の集合 $\mathbb{Z}$ の一般化として生み出され，Kummer, Dedekind により素因数分解の一般化としてイデアルが導入された．その後，多項式全体のなす多項式環に関する研究が進行するとともに，1900 年以前は個別の環について計算することが主な研究になっていた．というのは当時の主なテーマの１つに不変式環の有限性があったのであるが，当時は各群の作用について個別に計算する以外に有効な手法を人々は有していなかった．そこに巨人 Hilbert が登場し，いまの言葉を使えば Noether 次数付き環の理論を駆使して，一度に多数の環に対して有限性を判定するという結果を与えた．この手法は当時から見ればあまりに抽象的であったため,「これは数学ではなく神学だ」とも評されていた．しかしながらこのような抽象的な手法が有効であることが認められるとともに，我が国では園正造，諸外国では Noether, Krull, Macaulay, Cohen らによって可換環論は抽象化への道を歩むことになる（これこそが可換環論の始まりとみる研究者も多い）．その後は Zariski や永田雅宜らによって代数幾何学と可換環論の間に深いつながりがあることが示され，代数幾何的な視点からの研究が盛んになってゆく．代数幾何学で扱われる環の多く，または初等的な例は Noether 環，特に体上有限生成代数であったこと，またイデアルの有限性からくる扱いやすさもあり，可換環論における主要な興味の対象は Noether 環にあった．そして 1950 年代，Grothendieck や Serre といった巨人たちにより可換環論にホモロジー代数が導入され，Serre (1956) は当時の難問であった「正則局所環の素イデアルによる局所化はまた正則か？」という問題をホモロジー代数を駆使して見事に解決し理論の有効性を自ら示した．その後は Bass, Auslander, Buchsbaum らの活躍によりホモロジカルな手法による研究が可換環論の主流な分野へと成長してゆく．

そしてホモロジカル予想と呼ばれる一連の予想が 1960 年代から提唱され始め，Hochster (1975) によりこれを包括する big CM 予想が提唱された（ほとんどのホモロジカル予想は big CM 予想から従う）．CM とは Cohen–Macaulay の略であるが，Hochster and Huneke (1991) が “the Cohen-Macaulay condition (possibly on the local rings of a variety) is just what is needed to make the theory work.” と述べている通り，CM 性は非常にありがたい性質であって，環が与えられたとき「その環は CM か？」という問題を真っ先に考えることが多い．環が CM でないときは，次の問題もよく考えられていた．

問題 1.
$(A, \mathfrak{m})$ を Noether 局所環とする．A 代数 B であって，$B \neq \mathfrak{m}B$ でありかつ，任意の A の巴系 $a_1, \ldots, a_d$ に対して $a_1, \ldots, a_d$ を B 正則列とするようなものが存在するか？

このような B は big CM 代数と呼ばれる．この B を A 加群 M としたものが big CM 予想である．一般にホモロジカル予想は局所環についての問題ということができ，局所環は等標数と呼ばれる場合と混標数と呼ばれる場合の２つに別れていることを注意しておく．Hochster (1983) は等標数の big CM 予想を解決し，そして「正標数の環では Frobenius 写像の解析が微積分の代用となる」という問題意識のもと，Hochster and Huneke (1990) は等標数において密着閉包という理論を提唱した．これにより等標数のホモロジカル予想の証明が簡略化され，約 20 年もの間ホモロジカルな手法による可換環論の間で一大旋風を巻き起こした．混標数の場合に “密着閉包” を定義することで big CM 予想を完全に解決することが期待され（Hochster の夢），Heitmann (2002), Hochster (2002) はその方針で３次元以下の big CM 予想を解決したが，一般の解決には至らなかった．最終的に big CM 予想を解決したのは Scholze によるパーフェクトイド代数で，André (2018a,b) はパーフェク

トイド代数と Almost ring theory を駆使することによって big CM 予想を肯定的に解決した．これによってホモロジカル予想はその大半が解決され，またパーフェクトイド代数は混標数の場合に非常に強力な理論であると見られている．実際 Ma, Schwede, Česnavičius らによって混標数の場合のみ未解決であった問題がパーフェクトイド代数によって次々と解決されてきている．このように Noether 局所環について非常に深い理論が構築されてきたのである．

これまでに環論は表現論，代数幾何学と相互に関連して発展してきたため，応用先の要請と扱いやすさの両方の観点から Noether 性に絞った研究が多かった．そもそも CM 性などの概念は素朴には Noether 環のみに考えられる定義であったが，1990 年代から Glaz (1994), Hamilton and Marley (2007) らによって，非 Noether の場合にも CM 性の類似が求められてきた．また Noether 環の場合に成り立つ結果の一般化（例えば Schenzel (2003) は，Noether 環では局所コホモロジーと Čech コホモロジーが一致するという事実の非 Noether 環への一般化を与えた）なども研究されてきている．いま現在非 Noether 環についての深い理論と解決すべき大きな問題があるとは言えないが，筆者は今後数論幾何などの文脈からも非 Noether 環の状況を明らかにすることが要請されると考えている．

本ノートでは，筆者が勉強した限りの可換環論とその周辺分野について，これまでの教科書にない視点を少しでも紹介しながらまとめることができればよいと思っている．筆者の力不足もあり，ホモロジカル予想の深淵に立ち入るために必要な密着閉包などの概念が未だにまとめられておらず，上で紹介した Big CM 予想などについて未だ解説できていないのが残念である．**このノートでは特に断らない限り環といえば単位元を持つ可換環のこととする．**

最終更新日 . . . 2021 年 6 月 17 日

記号

$\mathbb{N}$	自然数全体の集合（本書では 0 を含む）．
$\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$	それぞれ整数，有理数，実数，複素数全体の集合．
$\mathbb{Z}_+, \mathbb{Q}_+, \mathbb{R}_+$	それぞれ正の整数，正有理数，正の実数全体の集合．
$\#A$	集合 A に対し，A の元の個数またはその濃度．
$\subset$	本書では包含は等号の可能性を除外しない．真の包含関係は $\subsetneq$ を用いる．
$f : A \twoheadrightarrow B$	f が全射であること．
$f : A \hookrightarrow B$	f が単射であること．

目次

第 0 章　環の基礎（かけあし）

—Definition of Ring and more...

§ 1　環の定義

環について，非常に圧縮してではあるが基礎事項を説明しておこう．

定義 *0.1.1*（環）

集合 R に対し 2 つの演算 $a+b, a\cdot b$ が備わっていて，次の性質を満たすとき，代数構造 $(R,+,\cdot)$ を**環 (ring)** という．

(R1) R は $+$ について Abel 群である．
(R2) 任意の $a,b,c \in R$ に対し $a\cdot(b\cdot c) = (a\cdot b)\cdot c$ が成立する．
(R3) ある $1 \in R$ が存在して，任意の $a \in R$ に対し $a\cdot 1 = 1\cdot a = a$ が成立する．
(R4) 任意の $a,b,c \in R$ に対し $a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c, (a+b)\cdot c = a\cdot c + b\cdot c$ が成立する．

このとき，演算 $+$ を加法，$\cdot$ を乗法という．乗法の記号はよく省略される．ここでは乗法の可換性を仮定していないことに注意しよう．乗法が可換な環は**可換環 (commutative ring)** と呼ばれ，本ノートの主題である．これ以後**環の乗法は可換である（すなわち $a\cdot b = b\cdot a$ が常に成り立つ）とする**[*1]．環の定義では R を記号として使用していたが，以後は可換環のみを取り扱うという気持ちで，また Bourbaki に敬意を評して[*2]，フランス語で環を表す Anneau の頭文字をとって A で表すことにする．環の定義における (R2) を**結合法則 (associative property)**，(R4) を**分配法則 (distributive property)** という．

加法の単位元を 0 で表し**零元 (zero element)**，1 を単に**単位元 (identity element)** という．$0, 1$ は一意的に存在する．また同様に，任意の $a \in A$ について $-a$（加法逆元）も一意的に存在する．零元，単位元については実数などで馴染み深い次の性質；

$$\text{任意の } a \in A \text{ に対し } 0\cdot a = 0, (-1)a = -a \text{ が成立する．}$$

が成り立っている（示せ）．$a \in A$ が**単元 (unit)** であるとは，ある $a^{-1} \in A$ が存在して $a^{-1}a = 1$ が成立することをいい，a^{-1} を a の（乗法）**逆元 (inverse element)** という．単元のことを**可逆元 (invertible element)** ともいう（意味からはこの名称のほうが直感的である）．その意味で，a が単元であることを**可逆である**と表現することもある．A の単元全体は群になり，$A^\times$ とかく．これを**単元群 (group of units)**，または**乗法群**という．どれくらい A が単元を持つかというのは大切な問題であって，単元になりえない 0 以外がすべて単元である環を**体**という．

定義 *0.1.2*（体）

環 A が $1 \neq 0$ であって，の 0 以外の元がすべて単元であるとき，A を**体 (field)** という．

---

*1 非可換環に対するイデアルの定義などは，必要なら適宜環の入門書を見てほしい．

*2 ７０００ページ以上に及ぶ「数学原論」(éléments de mathématique) を出版し，数学の公理的基礎づけを行った．今使われている記号，概念の多く（例えば単射，全射）は Bourbaki が導入したものである．

体という日本語はドイツ語の Köper に由来し，体はよく k でかかれる．体でない環の例として $\mathbb{Z}$ を，体の例として $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ を挙げておこう．

環の間の写像の中で代数構造と整合性があるもの，すなわち次の構造を持つものを重要視する．

定義 *0.1.3*（環準同型）

A, B を環とし，f を $f : A \to B$ なる写像とする．以下の条件；

(RH1) 任意の $a, b \in A$ に対し，$f(a+b) = f(a) + f(b), f(ab) = f(a)f(b)$ が成立する．

(RH2) 単位元について $f(1) = 1$ が成立する．

を満たすとき，f を**環準同型 (ring homomorphism)** であるという．

さらに f が全単射であるとき A と B は**同型 (isomophic)** であるといい，$A \cong B$ で表す．環準同型写像 f について；

(i) 零元について $f(0) = 0$ である．

(ii) 任意の $a \in A$ に対し $f(-a) = -f(a)$ である．

(iii) 任意の $a \in A$ に対し，もし $a^{-1} \in A$ が存在するならば $f(a^{-1}) = f(a)^{-1}$ である．

が成り立つ．

A を環とし，集合として $A' \subset A$ とする．A' が A の単位元を含み，和，積，逆元をとる操作で閉じているとき，A' を A の**部分環 (sub ring)** であるという．環準同型 $f : A \to B$ があるとき；

$$\mathrm{Im}\, f = \{f(a) \mid a \in A\}$$

は B の部分環になる．これを f の**像 (image)** という．もう 1 つ部分集合に定義する構造で，部分環と同じくらい（それ以上？）に大切なものに**イデアル**がある．

定義 *0.1.4*（イデアル）

A の部分集合 I が次の条件；

(I1) I は空でない．

(I2) 任意の $a, b \in I$ に対し $a + b \in I$ である．

(I3) 任意の $a \in I$ と $r \in A$ に対し $ra \in I$ である．

をみたすとき，I を A の**イデアル (ideal)** という．

$\{0\}, A$ は明らかに A のイデアルをなす．$\{0\}$ を**零イデアル (zero ideal, null ideal)** といい，A と零イデアルを A の**自明なイデアル (trivial ideal)** という．A と異なるイデアルを**真のイデアル**という．環 A が自明なイデアルしかイデアルを持たないことと，A が体であることは同値である（次に述べる性質から従う）．

イデアルの簡単な性質をまとめておく．

(i) $0 \in I$ である．

(ii) $a \in I$ ならば $-a \in I$ である．

(iii) $1 \in I$ であることと $I = A$ であることは同値である．特に I は可逆元を含むなら $I = A$ である．

イデアルの中でも，次に与えられる**有限生成**なイデアルが扱いやすいだけでなく大切な役割を果たす．

定義 *0.1.5*（有限生成イデアル）

$a_1, \ldots, a_n \in A$ について；

$$(a_1, \ldots, a_n) = \{r_1 a_1 + \cdots + r_n a_n \mid r_i \in A\}$$

とおくと，$(a_1, \ldots, a_n)$ は A のイデアルになる．これを $a_1, \ldots, a_n$ で生成されたイデアルという．また，イデアル I について有限個の $a_1, \ldots, a_n \in I$ が存在して $I = (a_1, \ldots, a_n)$ とかけるとき I は**有限生成 (finitely generated)** であるといい，$a_1, \ldots, a_n$ を I の**生成元 (generator)** という．

この記号のもとに自明なイデアルは $(0), (1)$ とかかれる．特に 1 つの元 a で生成されるイデアル (a) を**単項イデアル (principal ideal)** ないし**主イデアル**という（主イデアルは古い用語）．有限生成イデアルを $Aa_1 + \cdots + Aa_n$ とかくこともある．イデアル I について $a_1, \ldots, a_n \in I$ なら $(a_1, \ldots, a_n) \subset I$ である．また単項イデアル (a)，(b) について，$(a) \subset (b)$ であることと，ある $r \in A$ が存在して $a = rb$ であることは同値である．有限生成イデアル $(a_1, \ldots, a_n)$ について，u を A の単元とすると $(a_1, \ldots, a_r) = (ua_1, \ldots, ua_n)$ が成り立つ．

いくつかのイデアルについて，和と積を次のように定義できる．

定義 *0.1.6*（イデアルの和，積）

I，J を A のイデアルとする．次の定義により，イデアルの和と積が定まる．

$$I + J = \{a + b \mid a \in I, b \in J\}$$

$$IJ = \left\{ \sum_{\text{有限和}} a_i b_i \;\middle|\; a_i \in I, b_j \in I \right\}$$

また，イデアルの族 $\{I_\lambda\}$ について，共通部分 $\bigcap I_\lambda$ もまたイデアルとなる．集合としては；

$$IJ \subset I \cap J \subset I, J \subset I + J$$

となる．$I \cup J$ はイデアルとは限らないことに注意しよう．$I + J = A$ となるとき I, J は**互いに素 (coprime)** であるという．

問 1.

これまでに述べたことについて，環 $\mathbb{Z}$ において例を挙げてみよ．

いままでの数学において，**多項式 (polymonial)** は身近な対象であったと思う．環 A の元を係数にもつ多項式全体を考えると，これは環になる．この環はただの例にとどまらず，環論全体において非常に大切な存在である．

定義 *0.1.7*（多項式環）

A を環とする．A の元を係数とする（変数 X の）多項式；

$$f(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_0 \quad (a_i \in A, a_n \neq 0)$$

全体のなす集合 $A[X]$ は自然な演算によって環になる．これを A の（1 変数）**多項式環**という．

誤解の恐れがない場合，変数はよく省略されて多項式は単に f とかかれる．多項式についての用語をいくつか定義しておこう．a_i を f の i 次の**係数 (coefficient)** といい，a_0 を**定数項 (constant term)** という．$a_n \neq 0$ と

なる最大の n を f の**次数 (degree)** といい，$\deg f$ で表す．多項式 f について，最高次の係数が 1，すなわち $f(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0$ となっているとき f は**モニック (monic)** であるという．次数については明らかに；

$$\deg(f+g) \leq \max\{\deg f, \deg g\}$$

が成り立つ．

多変数多項式についても同様に考えることができ，２変数多項式環 $A[X,Y]$ とは $A[X]$ を係数とする変数 Y の多項式環，すなわち $A[X,Y] = A[X][Y]$ のことである．帰納的に $A[X_1,\ldots,X_n]$ は 1 変数多項式環をとる操作を繰り返して得られる．ここから，任意の $f \in A[X_1,\ldots,X_n]$ は単項式 $X_1^{l_1}\ldots X_n^{l_n}\,(l_i \geq 0)$ の A 係数の線型和である（いままでの数学で考えてきた２変数多項式の全体は $A[X,Y]$ とこの定義のもとで一致する）．

多項式環の強力さはだんだん学習が進むにつれ身にしみてくることであろうから，次の定義に進もう．通常の計算で当たり前のように用いる $ab=0$ なら $a=0$ または $b=0$ は，一般の環では**成り立たない．**

問 2.

その理由を考えよ（$\mathbb{C}$ で $ab=0$ なら $a=0$ または $b=0$ であることの証明を考えてみよ）．

一般の環については次のような定義ができ，いわゆる「悪い元」の代表格である．

定義 *0.1.8*（零因子）

環 A について，ある $a,b \in A$ が存在して $ab=0$ かつ $a,b \neq 0$ となるとき a,b を**零因子 (zero divisor)** という．

逆に，通常の計算のような零因子を持たない環には特別な名前がついている．

定義 *0.1.9*（整域）

可換環 A が零因子を持たないとき，**整域 (integral domain)** であるという．

明らかに体は整域である．また整域の部分環も整域である．よく知られた環 $\mathbb{Z}$ はもちろん整域であり，$\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C}$ も体なのでそうである．

A が整域であるとき，$(a)=(b)$ であることと，A の単元 u が存在して $a=ub$ となることが同値である．一般の環において，a,b に対して A の単元 u が存在して $a=ub$ となることは同値関係となる．このことを a,b は**同伴 (associated)** であるという．同伴関係と単項イデアルが一致することはすべての環で同値になるわけではないが，整域だけでなく例えば半局所環と呼ばれる環（定義 0.2.7）で成り立つことが知られている（命題 1.10.3）．

多項式環については次が成り立つ．

命題 *0.1.10*

A が整域なら，$f,g \in A[X]$ について；

(i) $\deg(fg) = \deg f + \deg g$ である．
(ii) $A[X]$ は整域である．
(iii) $A[X]$ の単元全体は $A^{\times}$ である．

証明は難しくない．整域でない環については (i),(ii),(iii) のそれぞれに反例がある．例えば (iii) について，A がある $n \in \mathbb{Z}_+$ によって $a^n = 0$ となる元 $a \in A$ を持つ（このような a を**冪零 (nilpotent)** であるという）とす

ると $A[X]$ において $(1-aX)(a^{n-1}X^{n-1}+\cdots+aX+1)=1$ となる．

多項式環，整域といったこれらの概念をより彩らせるために，環をイデアルにより「割る」ということが必要である．環 A とそのイデアル I を考える．$a,b\in A$ に対し $a-b\in I$ となることを $a\equiv b \pmod I$ とかくと，これは同値関係になる．整数 $\mathbb{Z}$ における**合同式**を思い出そう．n を法とする合同式は，イデアル $n\mathbb{Z}$ による同値関係と対応している．その意味でこれは合同式の一般化である．とすると，次の演算も自然だろう．$a\equiv a', b\equiv b' \pmod I$ なら；

$$a+b\equiv a'+b' \pmod I,\quad ab\equiv a'b' \pmod I$$

が成り立つ．これにより，A を I が定める同値関係で割った商集合 A/I に次の演算を入れることができる．

定義 *0.1.11*（剰余環）

A/I の元 $\overline{a}$，すなわち a の同値類を $a+I$ と表す．演算を；

$$(a+I)+(b+I)=(a+b)+I,\quad (a+I)(b+I)=ab+I$$

と定義すると A/I は環になる．これを A の I による**剰余環 (residue ring)** という．

$A/(0)=A, A/A=0$ であることを簡単に確かめられる．

剰余環を用いると，整域でない簡単な例を与えることができる．$\mathbb{Z}$ と $n\in\mathbb{Z}$ を考える．剰余環 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ は，n が素数のときに限り整域になり，そうでないとき $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ は非整域になる．例えば $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ において $2\cdot 2=4=0$ である．

問 3.

$\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ の演算表をかけ．

p が素数のとき $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ は整域だけでなく体になる．この体を特に $\mathbb{F}_p$ とかく．また $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ が体であることと n が素数であることは同値である．

$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ の例からわかるように，剰余環 A/I は I の元を 0 とみなしてできる環である．例えば $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}=\{0,1,2\}$ であるが，これは一般の $n\in\mathbb{Z}$ が $n=a+3b$ $(a,b\in\mathbb{Z}, 0\leq a\leq 2)$ とかけるので，$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ では $3b=0$ となるからである．

これと同様の考えで，たとえば $\mathbb{R}[X]/(X^2+1)$ を考えると，$\mathbb{R}[X]$ のなかで $X^2+1=0$ とみなす環なので $X^2=-1$ すなわち X は i と同一視できる．よって標準的な同型 $\mathbb{R}[X]/(X^2+1)\cong\mathbb{C}$ がある．

次に環準同型について着目していこう．A,B の間の環準同型 $f: A\to B$ を考える．集合；

$$\ker f=\{a\in A \mid f(a)=0\}$$

を f の**核 (kernel)** という．$\ker f$ は A のイデアルをなすことが簡単に確かめられる．よって剰余環 $A/\ker f$ が定義できる．これが $\mathrm{Im}\, f$ と同型になるというのが**準同型定理**であり，息をするように用いる．

定理 *0.1.12*（準同型定理）

A，B を環とし，準同型 $f: A\to B$ を考えると，同型 $A/\ker f\cong \mathrm{Im}\, f$ が存在する．

証明.

剰余環に誘導される準同型；

$$\widetilde{f}: A/\ker f\to \mathrm{Im}\, f; a+\ker f\mapsto f(a)$$

が環同型を与える．

Step 1. well-definedness.

$a + \ker f = b + \ker f$ とすると $a - b \in \ker f$ であるので，$f(a) - f(b) = f(a - b) = 0$ すなわち $f(a) = f(b)$ である．

Step 2. 単射性.

$\widetilde{f}(a + \ker f) = 0$ とすると，$f(a) = 0$ すなわち $a \in \ker f$ である．よって $a + \ker f = 0$ である．

Step 3. 全射性.

任意の $b \in \mathrm{Im}\, f$ をとると，定義からある $a \in A$ が存在して $f(a) = b$ である．よって $\widetilde{f}(a+\ker f) = b$ である．

（証明終）

先に挙げた $\mathbb{R}[X]/(X^2 + 1) \cong \mathbb{C}$ は，準同型 $f : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{C}; f(X) \mapsto f(i)$ の核が $(X^2 + 1)$ であることから証明できる．

準同型については次の単射判定法が大切である．

命題 *0.1.13*

環準同型 $f : A \to B$ について，f が単射であることと $\ker f = 0$ であることが同値である．

問 4.

上の命題を示せ．

体の特徴づけについて，イデアルが自明なものしかない環ということを述べた．この命題から体 k からの 0 でない準同型 $f : k \to A$ は必ず単射に限ることがわかる．

この節の最後に，もともとの環と剰余環の間にはイデアルの対応関係があるという重要な事実を証明しておく．

命題 *0.1.14*（環の対応定理）

A を環とし，I を A のイデアルとする．次の２つの集合；

$$X = \left\{J : A\text{ のイデアル} \,\middle|\, I \subset J\right\}, \quad Y = \{A/I\text{ のイデアル}\}$$

の間には包含関係を保つ 1 対 1 の対応がある．

証明.

$\pi : A \to A/I; a \mapsto a + I$ を自然な全射とする．J を I を含む A のイデアルとすると，$\pi(J)$ は A/I のイデアルになることを確かめることができる．よって；

$$\varphi : X \to Y; J \mapsto \pi(J)$$

が全単射であることを示せばよい．

Step 1. 単射性.

$\pi(J) = \pi(J')$ であるとする．任意の $a \in J$ をとる．このとき $\pi(a) \in \pi(J) = \pi(J')$ であるので，ある $a' \in J'$ が存在して $a - a' \in I$ となる．すると $I \subset J'$ であるので $a' \in J'$ となる．ゆえに $J \subset J'$ であり，

逆も同様.

Step 2. 全射性.

A/I のイデアル $\overline{J}$ をとる．$J = \pi^{-1}(\overline{J})$ とおく．$\pi^{-1}(0) = I$ であるので $I \subset J$ は明らか．J が A のイデアルをなすことも確かめられる．π が全射なので，これにより $\pi(J) = \overline{J}$ となる．

（証明終）

§ 2　素イデアル，極大イデアル

この節では，現代の環論において中心的な存在である素イデアル，極大イデアルを導入しよう．素イデアルは歴史的には素数の拡張として数論のために導入されたものだが，現代では数論への応用だけにとどまらず，それ自身が幾何的な意味をもつ対象として研究されている（スキーム論）．それにより可換環論はただの抽象的な理論に留まらず，幾何的な情報を代数的に表現する手法として見ることができるようになった．

定義 *0.2.1*（素イデアル）

環 A の真のイデアル P について，任意の $a, b \in A$ に対して $ab \in P$ ならば，$a \in P$ または $b \in P$ が成り立つとき，P を**素イデアル (prime ideal)** という．環 A の素イデアル全体を $\operatorname{Spec} A$ とかく．

例えば $\operatorname{Spec}\mathbb{Z} = \{(p) \mid p = 0 \text{ または } p \text{ は素数.}\}$ である．素イデアルという言葉を用いると，環 A が整域であることと (0) が素イデアルであることは同値である．

定義 *0.2.2*（極大イデアル）

環 A の真のイデアル $\mathfrak{m}$ について，$\mathfrak{m} \subset I \subsetneq A$ となる真のイデアル I は $\mathfrak{m}$ に限るとき，$\mathfrak{m}$ を**極大イデアル (maximal ideal)** という．環 A の極大イデアル全体を $\operatorname{Spm} A$ とかく．

Spm は Spec-m の略である．本によっては m-Spec A とか，Max A などとかかれる．環の対応定理（命題 0.1.14）により次の特徴づけが得られる．

命題 *0.2.3*

A を環とする．

(i) P が A の素イデアルであることと，A/P が整域であることは同値である．

(ii) $\mathfrak{m}$ が A の極大イデアルであることと，$A/\mathfrak{m}$ が体であることは同値である．

問 1.

これを示せ．

体は整域であるので，次の系が導かれる．

系 *0.2.4*

極大イデアルは素イデアルである．

問 2.

$\operatorname{Spm}\mathbb{Z}$ を決定せよ（ヒント：Fermat の小定理を使え）．

環の対応定理は素イデアルに限っても成り立つ．環 A のイデアル I について，I を含む素イデアル全体を $V(I) = \{P \in \operatorname{Spec} A \mid I \subset P\}$ とかく（V は Vanish に由来し，幾何的な意味を持つ）．

命題 *0.2.5*（素イデアルの対応定理）

A を環とし，I を A のイデアルとする．$V(I)$ と $\operatorname{Spec} A/I$ の間には包含関係を保つ 1 対 1 対応がある．

証明.

対応定理と同様に自然な全射 $\pi : A \to A/I$ が対応を与える．

Step 1. $\pi(P)$ が A/I の素イデアルであること．

$(a+I)(b+I) = ab + I \in \pi(P)$ とする．ある $c \in P$ が存在して $ab - c \in I \subset P$ であるので，$ab \in P$ である．P は素イデアルだから $a \in P$ または $b \in P$ すなわち $a + I \in \pi(P)$ または $b + I \in \pi(P)$ である．

Step 2. $\pi^{-1}(\overline{P})$ が素イデアルであること．

$ab \in \pi^{-1}(\overline{P})$ とすると，$\pi(ab) = \pi(a)\pi(b) \in \overline{P}$ なので $\pi(a) \in \overline{P}$ または $\pi(b) \in \overline{P}$ である．すなわち $a \in \pi^{-1}(\overline{P})$ または $b \in \pi^{-1}(\overline{P})$ となる．

（証明終）

この証明と全く同様の方法で，一般の準同型 $f : A \to B$ について $P \in \operatorname{Spec} B$ に対して $f^{-1}(P) \in \operatorname{Spec} A$ を示すことができる．しかし，極大イデアルの引き戻しが極大とは限らない．例えば $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$ の (0) の引き戻しを考えよ．

選択公理（Zorn の補題）を認めることで，すべてのイデアルに対してそれを含む極大イデアル（素イデアル）の存在を保証できる．

定理 *0.2.6*（Krull の極大イデアル存在定理）

環 A の真のイデアル I について，I を含む極大イデアル $\mathfrak{m}$ が存在する．

証明.

次の集合；

$$\Sigma = \left\{ J : A \text{ の真のイデアル} \,\middle|\, I \subset J \right\}$$

は I を含むので空ではない．Σ は包含関係で帰納的順序集合をなす．実際 X を Σ の全順序部分集合とすると，$J' = \bigcup_{J \in X} J$ が A の真のイデアルをなし，X の極大元となる．よって Zorn の補題より Σ は極大元をもち，それが I を含む極大イデアルとなる．（証明終）

この定理により，環は少なくとも 1 つは極大イデアルを，特に素イデアルを持つことがわかる．この定理を始め，選択公理は可換環論ないし代数幾何学で必要不可欠であることに注意されたい．

定義 *0.2.7*（局所環）

環 A が極大イデアル $\mathfrak{m}$ をただ 1 つしかもたないとき，A を**局所環 (local ring)** という．少し広く A が極大イデアルを有限個しか持たないとき A を**半局所環 (semi local ring)** という．

環 A が唯 1 つの極大イデアル $\mathfrak{m}$ を持つ局所環であることを明示する意味で $(A, \mathfrak{m})$ とかく．また体 $k = A/\mathfrak{m}$ を明示して $(A, \mathfrak{m}, k)$ とかくこともある．局所環は環論全体で重要であり，次の判定条件は有用である．

命題 *0.2.8*

$(A, \mathfrak{m})$ が局所環であることと，A の非可逆元全体 $A \setminus A^\times$ がイデアルであることは同値である．特に $\mathfrak{m} = A \setminus A^\times$ となる．

証明.

$(\Longrightarrow)$

$\mathfrak{m} \subset A \setminus A^\times$ は明らかなので，逆を示す．任意の $a \in A \setminus A^\times$ をとる．すると，$a \notin A^\times$ より $(a) \subsetneq A$ である．(a) を含む極大イデアルが存在するが，A は局所環なのでそれは $\mathfrak{m}$ に一致する．すなわち $(a) \subset \mathfrak{m}$ となり，$a \in \mathfrak{m}$ である．よって $A \setminus A^\times \subset \mathfrak{m}$ となり，$\mathfrak{m} = A \setminus A^\times$ である．

$(\Longleftarrow)$

任意の真のイデアル I について $I \subset A \setminus A^\times$ となり，$A \setminus A^\times$ が唯一の極大イデアルである．

（証明終）

詳細は省くが，代数幾何学で使われる用語として**局所準同型**というものがある．

定義 *0.2.9*（局所準同型）

$(A, \mathfrak{m}), (B, \mathfrak{n})$ を局所環とする．準同型 $\varphi : A \to B$ について $\varphi(\mathfrak{m}) \subset \mathfrak{n}$ であるとき，φ を**局所準同型 (local homomorphism)** という．

この条件は $\varphi^{-1}(\mathfrak{n}) = \mathfrak{m}$ と同値であることを注意しておく．

先にも少し述べたが，零因子のなかで自分自身のいくつかの積が 0 になってしまうようなものを**冪零元 (nilpotent element)** という．

定義 *0.2.10*（被約）

環 A が 0 以外の冪零元をもたないとき，A を**被約 (reduced)** であるという．

整域は明らかに被約である．一般に環 A の冪零元全体を $\mathrm{nil}(A)$ とおくと，これはイデアルとなる（二項定理を用いる）．

定義 *0.2.11*（冪零根基）

環 A の冪零元全体がなすイデアル $\mathrm{nil}(A)$ を，A の**冪零根基 (nilradical)** という．

環 A について $A/\mathrm{nil}(A)$ は必ず被約になる．ここで一般的なイデアルの根基について説明する．

定義 *0.2.12*（根基）

環 A のイデアル I について；

$$\sqrt{I} = \left\{ a \in A \,\middle|\, \text{ある } n \text{ が存在して}, a^n \in I \text{ である.} \right\}$$

はイデアルをなす．これをイデアル I の**根基 (radical)** という．

この記法により $\mathrm{nil}(A) = \sqrt{(0)}$ とかけることに注意しよう．環 A の素イデアル全体を $\mathrm{Spec}\,A$，イデアル I を含む素イデアル全体を $V(I)$ と書くことを思い出そう．一般に次が成り立つ．

命題 *0.2.13*

環 A について，$\mathrm{nil}(A) = \bigcap_{P \in \mathrm{Spec}\, A} P$ である．

証明.

まず $a \in I$ が冪零であるとすると，$a^n = 0$ となる n がある．すると任意の $P \in V(I)$ について $a^n = 0 \in P$ だから $a \in P$ である．よって $\subset$ が示された．

次に任意の $a \in \bigcap P$ をとる．これが冪零でないと仮定すると，次のイデアルの族；

$$\Sigma = \left\{ I : A \text{ のイデアル} \,\middle|\, \text{任意の } n > 0 \text{ に対して}, a^n \notin I \text{ である.} \right\}$$

は 0 を含むので空でなく，帰納的順序集合をなす．よって Zorn の補題から極大元 I をとると，これは素イデアルである．実際 $b, b' \in A$ についてどちらも I の元でないと仮定すると，$I \subsetneq I + (b), I + (b')$ であるので I の極大性から適当な $n, m > 0$ によって $a^m \in I + (b), a^n \in I + (b')$ とできる．すると $a^{m+n} \in I + (bb')$ であるので $I + (bb') \notin \Sigma$ だから $bb' \notin I$ である．よって $a \notin I$ だから矛盾するので，a は冪零である．　（証明終）

系 *0.2.14*

環 A のイデアル I について，$\sqrt{I} = \bigcap_{P \in V(I)} P$ が成り立つ．

証明.

環 A/I を考えることで $\mathrm{nil}(A) = \bigcap_{P \in \mathrm{Spec}\, A} P$ に帰着する．　（証明終）

冪零根基が素イデアルの共通部分であるので，極大イデアルの共通部分についても考えてみよう．

定義 *0.2.15*（Jacobson 根基）

環 A のすべての極大イデアルの共通部分を **Jacobson 根基 (Jacobson radical)** といい，$\mathrm{rad}(A)$ で表す．

すなわち $\mathrm{rad}(A) = \bigcap_{\mathfrak{m} \in \mathrm{Spm}\, A} \mathfrak{m}$ である．極大イデアルは素イデアルであるから，$\mathrm{nil}(A) \subset \mathrm{rad}(A)$ となっている．

問 3.

$\mathrm{nil}(A) = \mathrm{rad}(A)$ であるが，$\mathrm{Spm}\, A \subsetneq \mathrm{Spec}\, A$ であるような A の例を挙げよ．

Jacobson 根基については次の特徴づけがある．

命題 *0.2.16*

$\mathrm{rad}(A) = \left\{ a \in A \,\middle|\, \text{任意の } b \in A \text{ に対して}, 1 - ab \text{ は可逆である.} \right\}$ が成り立つ．

証明.

示すべき等式の右辺を $\mathfrak{A}$ とおく．$a \notin \mathrm{rad}(A)$ であることと，$a \notin \mathfrak{A}$ であることが同値であることを示す．

$(\Longrightarrow)$

$a \notin \mathrm{rad}(A)$，すなわちある極大イデアル $\mathfrak{m}$ が存在して $a \notin \mathfrak{m}$ であるとする．すると $\mathfrak{m} + Aa = A$ であるから，ある $m \in \mathfrak{m}$ と $b \in A$ とが存在して $m + ab = 1$ とできる．すると $1 - ab = m \in \mathfrak{m}$ となり，$1 - ab$ は可逆でない．よって $a \notin \mathfrak{A}$ である．

($\Longleftarrow$)

$a \notin \mathfrak{A}$，すなわちある $b \in A$ が存在して，$1 - ab$ が非可逆であるとする．ここで $1 - ab \in \mathfrak{m}$ となる極大イデアル $\mathfrak{m}$ が存在する．ここでもし $a \in \mathfrak{m}$ ならば $ab \in \mathfrak{m}$ であるから，$(1 - ab) + ab = 1 \in \mathfrak{m}$ となり，矛盾するので $a \notin \mathfrak{m}$ である．ゆえに $a \notin \mathrm{rad}(A)$ である．

（証明終）

§ 3　ED, PID, UFD

整数環 $\mathbb{Z}$ の持つ性質を一般の環に抽象化することで，ED, PID, UFD などの良い性質が得られる．本節ではそれについて説明する．

定義 *0.3.1*（PID）

環 A のすべてのイデアルが単項イデアルであるとき，A を**単項イデアル環**[*3]**(principal ring)** という．特に A が整域のとき，**単項イデアル整域 (principal ideal domain)** という．頭文字をとって PID と略する．

$\mathbb{Z}$ は PID である．実際, 任意のイデアル I について, $n \in I$ を I の元でもっとも絶対値が小さいものとする．イデアルの定義から $n \in \mathbb{N}$ としてよい．このとき，除法の原理から任意の $m \in I$ は $m = qn+r$ $(q \in \mathbb{Z}, 0 \leq r < n)$ と一意にかける．すると $r = m - qn \in I$ であり，n の最小性から $r = 0$ となり $m \in n\mathbb{Z}$ である．よって $I = n\mathbb{Z}$ である．この証明で本質的なのは**除法の原理**である．これを一般化することで PID の判定条件を 1 つ与えよう．

定義 *0.3.2*（Euclid 整域）

A を整域とする．写像 $\rho : A \to \mathbb{N}$ で，次の条件；

(EF1) 任意の 0 でない $a \in A$ について，$\rho(0) < \rho(a)$ が成り立つ．

(EF2) 任意の $a, b \in A$ について，$a \neq 0$ のときある $q, r \in A$ が存在して；

$$b = aq + r, \quad \rho(r) < \rho(a)$$

となる．

を満たすものが存在するとき, ρ を **Eulcid 関数 (Euclid function)**，A を **Euclid 整域，ED (Euclid domain)** という．

除法の原理によって，絶対値を与える関数 $\mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ が Euclid 関数となり $\mathbb{Z}$ は ED である．

問 1.

体 k 上の多項式環 $k[X]$ は，次数を与える写像によって ED となることを示せ．

先に述べた通り，ED ならば PID である．

定理 *0.3.3*

ED は PID である．

[*3] 古い用語では主環とも呼ばれる．

証明.

A を ED とし，$\rho : A \to \mathbb{N}$ を Euclid 関数とする．任意のイデアル I をとる．$I \setminus \{0\}$ の ρ による像；

$$I' = \{\rho(a) \mid 0 \neq a \in I\}$$

を考える．$I' \subset \mathbb{N}$ であり，$\mathbb{N}$ は整列集合なので最小元 $m' = \min I'$ が存在する．$m' \in I'$ より，ある $0 \neq m \in I$ が存在して $\rho(m) = m'$ である．$I = Am$ を示そう．任意の $a \in I$ をとる．A は ED なので，$m \neq 0$ だからある q，$r \in A$ が存在して；

$$a = qm + r, \quad \rho(r) < \rho(m) = m'$$

とかける．ここで $r = a - qm \in I$ であり，$\rho(r) < m'$ であるから $\rho(r) \notin I'$ である．ゆえに $r = 0$ でなければならない．よって $a \in Am$ である．ゆえに $I = Am$ が示された．（証明終）

よって $k[X]$ が PID であることがわかる．PID は 1 変数特有の現象で，2 変数以上では PID にならない（例えば (X, Y) が単項ではない）．

PID の素イデアルについては次の命題が知られている．

命題 *0.3.4*

A を PID とする．$P \in \operatorname{Spec} A$ とすると，P は (0) または極大イデアルである．

証明.

$P = (p)$ とする．$p = 0$ なら示すことはない．$p \neq 0$ としよう．もし $(p) \subset (a)$ となる $a \in A$ が存在したとする．ある $r \in A$ によって $p = ra$ とかける．すると $ra \in (p)$ より $r \in (p)$ または $a \in (p)$ である．$a \in (p)$ なら $(a) = (p)$ である．また $r \in (p)$ とすると，$r = r'p$ となる $r' \in A$ が存在する．よって $p = ar'p$ となり，$p \neq 0$ より $ar' = 1$ である．よって a は単元だから $(a) = A$ となる．以上より P が極大イデアルであることがわかる．（証明終）

PID は $\mathbb{Z}$ における最大公約数の議論を行えるように抽象化した環になっている．もちろん一般の環でも約数，倍数といった概念は定義できるが，PID では嬉しい性質があることを見ていこう．

定義 *0.3.5*（約元，倍元）

A を環とする．$a, b \in A$ について，ある $r \in A$ が存在して $a = rb$ となるとき b は a の**約元 (divisor)**，a は b の**倍元 (multiple)** であるという．

$c \in A$ が a, b の共通の約元であるとき c は a, b の**公約元 (common divisor)** であるといい，g が a, b の公約元であって，任意の a, b の公約元の倍元であるとき g を a, b の**最大公約元 (greatest common divisor)** であるという．$\mathbb{Z}$ ですら最大公約元は一意に決まらない（例えば 12 と 18 の最大公約数は $6, -6$ である）し，一般の整域では存在するかもわからない．

命題 *0.3.6*

A が PID であるとき，任意の $a, b \in A$ について最大公約元 g が少なくとも 1 つ存在する．

証明.

イデアル (a, b) を考えると A は PID なので $(a, b) = (g)$ となる $g \in A$ が存在する．この g が a, b の最大公約元になる．公約元になることは $a, b \in (g)$ からわかる．次に c を a, b の公約元とすると，定義から $a, b \in (c)$ なので $(g) = (a, b) \subset (c)$ である．ゆえに c は g の約元である．（証明終）

このアイデアから次の強力な定理を証明できる．

定理 *0.3.7*

A を PID とし，$a, b \in A$ を 0 でない元とする．a, b の最大公約元を g とすると，２変数１次方程式；

$$ax + by = g$$

の解 (x, y) が A の中に見つかる．

証明.

g, g' が a, b の最大公約元であるとする．このとき g, g' はともに 0 でなく，お互いの約元である．よって $u, t \in A$ が存在して $g = g't, g' = gu$ とかける．すると $g(1 - ut) = 0$ であるが，A が整域なので $g \neq 0$ より $ut = 1$ である．ゆえに g, g' は互いの単元倍である．すると，$(a, b) = (d)$ となる $d \in A$ をとると先の命題より d は a, b の最大公約元であって，g の単元倍であるので $(a, b) = (d) = (g)$ が従う．よって $g \in (a, b)$ であるから主張が従う．（証明終）

約数の一般化として約元を定義したのと同様に，素数の一般化を考えてみよう．

定義 *0.3.8*（既約元）

A を環とし，$f \in A$ を単元でないとする．ここで $a, b \in A$ を用いて $f = ab$ と表したとき必ず a または b が単元であるとき，f を**既約 (irreducible)** であるという．

$\mathbb{Z}$ の単元は $1, -1$ のみであるので，$\mathbb{Z}$ の既約元はまさに素数（の単元倍）である．$\mathbb{Z}$ においては，単元倍を除いて一意的に素因数分解できる．一般の整域では既約元分解はできたとしても，一意性は成り立つとは限らない．例えば $\mathbb{Z}[X]$ に $\sqrt{-5}$ を代入して得られる（$\mathbb{Z}[X]/(X^2 + 5)$ と表現してもよい）；

$$\mathbb{Z}[\sqrt{-5}] = \left\{ a + b\sqrt{-5} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{Z} \right\}$$

を考えると，次の等式；

$$6 = 2 \cdot 3 = (1 - \sqrt{-5})(1 + \sqrt{-5})$$

が成り立つ．また $2, 3, 1 - \sqrt{-5}, 1 + \sqrt{-5}$ が $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ の既約元であることを確かめることができる（代数的整数論の本を参照せよ）．このようなことが起こりえない，すなわち任意の元を一意的に既約元に分解できる環を UFD という．

定義 *0.3.9*（UFD）

整域 A の 0 と以外のすべての元が単元と既約元の積に（単元倍を除いて）一意的に分解できるとき，A を**一意分解整域，UFD (unique factorization domain)** という．

UFD の例を与えるために，既約元について少し考察してみよう．

定義 *0.3.10*（素元）

A を環とする．$p \in A$ に対して $(p) \in \operatorname{Spec} A$ であるとき，p は**素元 (prime element)** であるという．

一般には素元と既約元は異なる概念である．例えば $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ において 3 は既約元だが，(3) は素イデアルではない．実際 $(2 + \sqrt{-5})(2 - \sqrt{-5}) = 9 \in (3)$ であるが，どちらの因数も (3) の元ではない．実はこの逆は一般の整域で成り立っている．

命題 *0.3.11*

A を整域とする．任意の素元 $p \in A$ は既約元である．

証明.

(p) が素イデアルであるとすると，$p = ab$ とかけたなら $a \in (p)$ または $b \in (p)$ である．$a \in (p)$ であるとすると $a = rp$ とかけるので，$p(1 - rb) = 0$ である．$p \neq 0$ より $1 = rb$ であり，b は単元である．$b \in (p)$ なら同様に a が単元となるので，p は既約元である．（証明終）

UFD の嬉しい性質の 1 つとして，この逆が成り立つことが挙げられる．

命題 *0.3.12*

A を UFD とする．このとき $f \in A$ が既約元であることと f が素元であることは同値である．

証明.

上の命題より f が既約なら $(f) \in \operatorname{Spec} A$ であること見ればよい．$ab \in (f)$ とする．定義よりある $r \in A$ が存在して $ab = rf$ となる．ここで a, b, r を既約分解して；

$$a = ua_1 \dots a_n, b = tb_1 \dots v_m,\ r = sr_1 \dots r_l\ (u, t, s \in A^{\times})$$

としよう．このとき；

$$uta_1 \dots a_n b_1 \dots b_m = sr_1 \dots r_l f$$

において，両辺はともに既約分解になっているので，f は $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m$ のどれかの単元倍である．よって $a \in (f)$ または $b \in (f)$ が成り立つ．（証明終）

実は次が成り立ち，これによって強力な系が得られる．

命題 *0.3.13*

A を整域とする．$a \in A$ が素元の 2 通りの積；

$$a = up_1 \dots p_n = tp'_1 \dots p'_m\ (u, t \in A^{\times})$$

にかけたとすると，$n = m$ であり適当に並べ替えると $(p_i) = (p'_i)$ が必ず成立する（p'_i は p_i の単元倍である）．

証明.

$p'_1 \dots p'_m \in (p_1)$ であるので，$p'_1 \in (p_1)$ または $p'_2 \dots p'_m \in (p_1)$ である．これを続けることで，ある p'_i について $p'_i \in (p_1)$ とできる．それを並び替えて p'_1 としよう．ここで p_1 も p'_1 も既約であるから，単元 $u \in A$ が存在して $p'_1 = p_1 u$ である．すなわち $p_2 p_3 \dots p_n = up'_2 \dots p'_m$ である．同様の操作を繰り返すことで $n = m$ であり，p'_i は p_i の単元倍すなわち $(p'_i) = (p_i)$ であることを得る．（証明終）

系 *0.3.14*

整域 A が素元分解を持てば UFD である．

証明.

命題 0.3.11 により得られる．（証明終）

これによって，素元分解ができるような環を探せば UFD の例が得られることになる．まさしくこの方法で次の定理が証明でき，大量に UFD の例が得られる．

定理 *0.3.15*

PID は UFD である．

証明.

A を PID とし，$a \neq 0$ を単元でないとする．このとき真のイデアル (a) を含む極大イデアル $\mathfrak{m}$ が存在する．A は PID なので，$\mathfrak{m} = (p_1)$ となる $p_1 \in A$ が存在する．$a \in (p_1)$ であるから $a = a_1 p_1$ となる $a_1 \in A$ が存在する．a_1 が単元ならば a は素元であり証明が終了する．a_1 が単元でないならば，同様の操作により $a = a_2 p_1 p_2$ となる素元 p_2 が見つかる．この操作が有限回で終了することを示そう．この操作が無限回続いたとすると，無限に続く非単元の族 $\{a_i\}$ で，$(a_i) \subsetneq (a_{i+1})$ となるものがとれる．すると；

$$I = \bigcup_{i=1}^{\infty} (a_i)$$

もまた A のイデアルになる．すると A は PID なので $I = (a_\infty)$ となる $a_\infty \in A$ が存在する．構成より $a_\infty \in (a_n)$ となる n が存在するが，これは $I = (a_n) = (a_{n+1}) = \cdots$ を導くので矛盾．よってこの操作は有限回で終了する．（証明終）

操作が有限回で終了する，というところは本質的にはすべてのイデアルが有限生成である，ということから来ている（Noether 性について勉強したときにわかるだろう）．また証明に選択公理を用いているが，これは ZF では証明できない（体でない PID で，素元を持たないものが存在するような ZF のモデルがある．Hodges (1976)）．

これにより $\mathbb{Z}$ や体係数の多項式環 $k[X]$ は UFD である．ED もあわせて考えると，次のような流れになっている．

$$\text{体} \Longrightarrow \text{ED} \Longrightarrow \text{PID} \Longrightarrow \text{UFD} \Longrightarrow \text{整域} \Longrightarrow \text{環}$$

体上の多変数多項式は PID ではなかったが，UFD であることを示すことができる．次の節ではそのことを証明しよう．

§ 4　GCD 整域

定義 *0.4.1*（GCD 整域）

整域 A であって，任意の２つの $a, b \in A$ が最大公約元を必ず持つものを **GCD 整域 (GCD domain)** という．

PID が GCD 整域であることは見たとおり（命題 0.3.6）であり，さらに強く既約分解することで UFD は GCD 整域であることがわかる．

定義 *0.4.2*（内容，原始多項式）

A を GCD 整域とする．$f(X) = a_n X^n + \cdots + a_0 \in A[X]$ について $a_n, \ldots, a_0$ の最大公約元を $c(f)$ とかき，f の**内容 (content)** という．$c(f)$ が単元であるとき，f は**原始的 (primitive)** であるという．

$a, b \in A$ について，ある $u \in A^\times$ が存在して $a = ub$ とかけるとき a, b は同伴である，と定義したことを思い出そう．この節ではこのことを $a \sim b$ と書くことにする．

補題 *0.4.3*（Gauss の補題）

A を GCD 整域とする．$f, g \in A[X]$ について $c(fg) \sim c(f)c(g)$ が成り立つ．

証明.

$f = c(f)f_0, g = c(g)g_0$ と分解すると f_0, g_0 は原始的である．また；

$$c(fg) \sim c(c(f)c(g)f_0g_0) \sim c(f)c(g)c(f_0g_0)$$

であるので f, g は原始的であると仮定してよい．$f = a_nX^n + \cdots + a_0, g = b_mX^m + \cdots + b_0$ とおく．$fg = c_{n+m}X^{n+m} + \cdots + c_0$ とおき，$n + m$ についての帰納法で示す．$c(fg) = \gcd(c_{n+m}, \ldots, c_0)$ であるが，これは；

$$\gcd(a_n, c_{n+m-1}, \ldots, c_0) \gcd(b_n, c_{n+m-1}, \ldots, c_0)$$

を割り切る．ここで，GCD 整域において $\gcd(x, y_1, \ldots, y_n) \sim \gcd(x, y_1 + zx_1, \ldots, y_n + zx_n)$ であることから；

$$\gcd(a_n, c_{n+m-1}, \ldots, c_0) \sim \gcd(a_n, c_{n+m-1} - a_nb_{m-1}, \ldots, c_n - a_nb_0, c_{n-1}, \ldots, c_0) \sim \gcd(a_n, c((f - a_nX^n)g))$$

である．$\deg(f - a_nX^n)g < n + m$ であるから，帰納法の仮定より；

$$c((f - a_nX^n)g) \sim c(f - a_nX^n)c(g) \sim c(f - a_nX^n) = \gcd(a_{n-1}, \ldots, a_0)$$

であるので，$\gcd(a_n,\ c_{n+m-1}, \ldots, c_0) \sim c(f)$ である．同様に $\gcd(b_m, c_{n+m-1}, \ldots, c_0) \sim c(g)$ であるので，$c(fg)$ は単元の約元である．よって $c(fg)$ も単元である．（証明終）

命題 *0.4.4*

A は GCD 整域とする．$p \in A$ が A で素元であることと，$A[X]$ において素元であることは同値である．

証明.

p は A の素元とする．$f, g \in A[X]$ をとり，$fg \in pA[X]$ であるとする．ある $h \in A[X]$ が存在して $fg = ph$ となるので，Gauss の補題より $pc(h) \sim c(f)c(g)$ となる．p は A の素元なので $c(f) \in pA$ または $c(g) \in pA$ であり，これは $f \in pA[X]$ または $g \in pA[X]$ を意味する．（証明終）

ここで整域 A があったとき，ちょうど整数 $\mathbb{Z}$ から有理数 $\mathbb{Q}$ を作ることと全く同じように，体を作る自然な方法があることを説明する．直積 $A \times (A - \{0\})$ に；

$$(a, s) \sim (b, t) \Longleftrightarrow at - bs = 0$$

のような同値関係を入れよう．(a, s) を $a/s, (b, t)$ を b/t とみなせば，$a/s = b/t$ は $at = bs$ と同値だから，この定義は整数における分数の定義を一般の整域に拡張したものとなる．直積 $A \times (A - \{0\})$ をこの同値関係で割った商集合を $\mathrm{Frac}(A)$ とかく．$\mathrm{Frac}(A)$ は分数と同様の演算で体になる．

定義 *0.4.5*（商体）

整域 A について，$\mathrm{Frac}(A)$ の元 (a,s) を a/s とかき；

$$\frac{a}{s}+\frac{b}{t}=\frac{at+bs}{st},\quad \frac{a}{s}\cdot\frac{b}{t}=\frac{ab}{st}$$

と定めると体となる．これを A の**商体 (field of quotients)**，**分数体 (field of fractions)** という．

補題 *0.4.6*

A を GCD 整域とし，K をその商体とする．$f\in A[X]$ が原始的であるとき，f が $A[X]$ で素元であることと $K[X]$ において素元であることは同値である．

証明.

$(\Longrightarrow)$

$g,h\in K[X], gh\in fK[X]$ とする．ある $q\in K[X]$ が存在して $gh=fq$ である．g,h,q の分母を払い $ag,bh,dg\in A[X]$ とする．$ag=c(ag)g_0, bh=c(bh)h_0, dq=c(dq)q_0$ とすると，Gauss の補題から $dc(ag)c(bh)\sim abc(dq)$ であるので，$g_0h_0\sim q_0f$ である．f は $A[X]$ で素元なので $g_0\in fA[X]$ または $h_0\in fA[X]$ である．よって $g\in fK[X]$ または $h\in fK[X]$ が従う．

$(\Longleftarrow)$

$g,h\in A[X], gh\in fA[X]$ とする．$K[X]$ の元とみなせば素元であるので，$g\in fK[X]$ または $h\in fK[X]$ が成り立つ．$g\in fK[X]$ としよう．ある $\varphi\in K[X]$ が存在して $g=\varphi f$ となる．分母を払い $a\varphi\in A[X]$ とすると，内容をとって $ag=c(a\varphi)\varphi_0 f$ となる．Gauss の補題より $c(ag)=ac(g)\sim c(a\varphi)$ となる．よって $a\varphi=c(a\varphi)\varphi_0\sim ac(g)\varphi_0$ より $\varphi\sim c(g)\varphi_0$ であるので，$\varphi\in A[X]$ である．よって $g\in fA[X]$ である．$h\in fk[X]$ のときも同様．

（証明終）

これらの準備によって次が示される．

定理 *0.4.7*

A が UFD であることと $A[X]$ が UFD であることは同値である．

証明.

A が UFD なら $A[X]$ もそうであることを示せばよい．$f=c(f)f_0\in A[X]$ をとる．A の商体を K とおき，$K[X]$ で $f_1=p_1\dots p_n$ と素元分解する．分母を払って $a_ip_i=c(a_ip_i)p_{i,0}$ とかける．ここで $p_{i,0}$ は原始的で，$K[X]$ において p_i と同伴なので素元である．よって補題から $A[X]$ でも素元．積をとって $a_1\dots a_nf_1=c(a_1p_1)\dots c(a_np_n)p_{1,0}\dots p_{n,0}$ となるから，内容をとって $f_1\sim p_{1,0}\dots p_{n,0}$ となる．これは $A[X]$ における f_1 の素元分解を与える．A は UFD だから $c(f)$ も素元分解でき，よって f を分解できる．よって $A[X]$ は UFD である．（証明終）

系 *0.4.8*

UDF 上の n 変数多項式環は UFD である．

既約性に関連した話題として，Eisenstein の既約判定法について説明しよう．

命題 *0.4.9*（Eisenstein の既約判定法）

A を整域とする．$f = a_nX^n + \cdots + a_0 \in A[X]$ $(a_n \neq 0)$ に対して，ある $P \in \operatorname{Spec} A$ が存在して，$a_n \notin P, a_{n-1}, \ldots, a_0 \in P, a_0 \notin P^2$ を満たすならば，f は２つの非定数多項式の積でかけない．

証明.

背理法で示す．

$$a_nX^n + \cdots + a_0 = (b_sX^s + \cdots + b_0)(c_tX^t + \cdots + c_0)\ (b_s, c_t \neq 0, 1 \leq s, t)$$

とかけていると仮定する．A が整域なので $b + s = n$ である．さて $b_0c_0 = a_0 \in P$ かつ $a_0 \notin P^2$ より b_0 か c_0 のどちらか一方のみが P の元である．ここでは $b_0 \in P$ であると仮定しよう．すると $a_1 = b_1c_0 + b_0c_1$ より $b_1c_0 \in P$ で，$c_0 \notin P$ なので $b_1 \in P$ である．続けることで $b_0, b_1, \ldots, b_s \in P$ であることがわかる．しかし $a_n = b_sc_t \notin P$ であるので，これは矛盾である．（証明終）

ここで注意として，$A = \mathbb{Z}$ の場合でも f が $A[X]$ で既約元であるとは限らない．例えば $f = 2X + 6, P = (3)$ とせよ．$A[X]$ での既約性を判定する方法として，f の原始性が有用である．すなわち次の命題が成り立つ；

命題 *0.4.10*（一般化された Eisenstein の判定法）

A を整域とする．$f = a_nX^n + \cdots + a_0 \in A[X]$ $(a_n \neq 0)$ に対して，ある $P \in \operatorname{Spec} A$ が存在して，$a_n \notin P, a_{n-1}, \ldots, a_0 \in P, a_0 \notin P^2$ を満たすとする．すべての $a_n, \ldots, a_0$ の共通約元は単元であるとき，f は $A[X]$ で既約である．

この主張の仮定は A が GCD 整域ならば，Eisenstein の判定法の仮定に加えて f が原始的であることだと表現できる．

証明.

$f = gh$ と書けているとする．命題 0.4.9 より $h \in A$ であるとしてよい．すると h は f の係数の共通約元なので単元である．（証明終）

§5　体の拡大

この節では，体の拡大（例えば $\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{C}$）について，**代数的数**や**超越数**などに触れながら概説しよう．なお，ここでは Galois 理論については立ち入らない．日本語で読める教科書には藤崎 (1991), 中島 (2006) などがあるので，そちらを参照してほしい．体 L の部分環 K がまた体になっているとき，K を L の**部分体 (sub field)** であるという．このとき，自然な単射 $K \hookrightarrow L$ を体の**拡大 (extension)** という．このとき L/K とかく．

まず環の**標数**と呼ばれる概念について説明しよう．一般の環についても，元 $a \in A$ の整数倍を a を何回足したかどうかによって定義することができる．例えば $3a = a + a + a, -5a = -(a + a + a + a + a)$ である．これを用いて次の定義を行う．

定義 *0.5.1*（標数）

A を環とする．単位元 1 について，$n \cdot 1 = 0$ となる $n \in \mathbb{Z}_+$ が存在するとき，そのような n で最小のものを A の**標数 (characteristic number)** であるといい，$\operatorname{Char}(A) = n$ とかく．そのような n が存在しない場合 $\operatorname{Char}(A) = 0$ とする．

例えば $\mathrm{Char}\,\mathbb{Z} = 0$, $\mathrm{Char}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = n$ である．ここで任意の環 A について，$\mathbb{Z}$ からの準同型は $n \mapsto n \cdot 1$ に限ることに注意しよう．これを $\mathbb{Z}$ からの自然な準同型をという．

命題 *0.5.2*

A を整域とすると，A の標数は 0 か素数 p に限る．

証明.

自然な準同型；

$$f : \mathbb{Z} \to A; n \mapsto n \cdot 1$$

を考える．準同型定理から $\mathbb{Z}/\ker f$ は A の部分環 $\mathrm{Im}\, f$ に同型であり，A は整域なので $\mathbb{Z}/\ker f$ は整域．よって $\ker f$ は $\mathbb{Z}$ の素イデアルなので (0) か (p) でなければならない．標数は $\ker f$ の生成元にほかならないので，0 または素数 p である．（証明終）

整域 A から商体を作ったことを思い出そう．次の命題の証明からもわかることだが，整域 A の商体 $\mathrm{Frac}(A)$ は A を含む最小の体となる（ある体 k について $A \subset k$ ならば $\mathrm{Frac}(A) \subset k$ となる）．

命題 *0.5.3*

k を体とする．k の標数が 0 であることと，k が $\mathbb{Q}$（と同型な体）を部分体として含むことは同値であり，k の標数が $p \neq 0$ であることは k が $\mathbb{F}_p$ を部分体として含むことと同値である．

証明.

まず $\mathrm{Char}\, k = 0$ であるとすると，$\mathbb{Z}$ からの自然な準同型 φ の核が 0 であるので，k は $\mathbb{Z}$ と同型な環 $\mathrm{Im}\,\varphi$ を部分環にもつ．このとき $\mathrm{Frac}(\mathrm{Im}\,\varphi) \cong \mathbb{Q}$ である．いま任意の $a \neq 0 \in \mathrm{Im}\,\varphi \subset k$ は単元なので $a/b \in \mathrm{Frac}(\mathrm{Im}\,\varphi)$ を ab^{-1} と同一視して，$\mathrm{Frac}(\varphi) \cong \mathbb{Q}$ は k の部分体である．逆に $\mathbb{Q} \subset k$ であるとすると，包含射 $\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$, $Q \to k$ の合成により単射 $\mathbb{Z} \to k$ が定まる．

同様に $\mathrm{Char}\, k = p$ なら $\mathbb{Z}/\ker\varphi = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \mathbb{F}_p$ が k の部分環になる．また $\mathbb{F}_p$ が k の部分体ならば自然な $\mathbb{Z} \to \mathbb{F}_p$ と $\mathbb{F}_p \to k$ の合成 $\mathbb{Z} \to k$ が定まりこれの核が (p) であるから $\mathrm{Char}\, k = p$ である．（証明終）

この命題より，すべての体は $\mathbb{Q}, \mathbb{F}_p$ のいずれかを含むことがわかる．

定義 *0.5.4*（素体）

体 $\mathbb{Q}, \mathbb{F}_p$ をそれぞれ標数 $0, p$ の**素体 (prime field)** という．

ここから体の拡大について見ていく．例えば体 $\mathbb{C}$ について，拡大 $\mathbb{C}/\mathbb{Q}$ は $\mathbb{C}/\mathbb{R}, \mathbb{R}/\mathbb{Q}$ に分解する．このように体の拡大 L/K について，ある体 M が存在して $L/M, M/K$ が体の拡大になっているとき，M を拡大 L/K の**中間体 (intermediate field)** という．一般に M_1, M_2 が L/K の中間体なら体 $M_1 \cap M_2$ も L/K の中間体になる．拡大 $\mathbb{C}/\mathbb{Q}$ の中間体は $\mathbb{R}$ 以外にも $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \left\{ a + b\sqrt{2} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{Q} \right\}$ などがある（これが体であることを示せ）．

E. Artin により導入された次の捉え方により，線型代数的な手法で体の拡大について考えることができるようになった．

命題 *0.5.5*

体の拡大 L/K について，L は K 上の線型空間とみなすことができる．

証明.

L はそれ自身の演算により Abel 群である．また，任意の $\alpha \in L$ について，K の元 β によるスカラー倍を L の乗法によって $\beta\alpha$ と考えることで L は K 線型空間になる．（証明終）

例えば，拡大 $\mathbb{C}/\mathbb{R}$ について $\mathbb{C}$ は基底 $\{1, i\}$ をもつ 2 次元の $\mathbb{R}$ 線型空間になる．

定義 *0.5.6*（拡大次数）

体の拡大 L/K について，$\dim_K L$ を L/K の**拡大次数 (extension degree)** といい，$[L : K]$ とかく．

$[L : K]$ が有限のとき L/K を有限次拡大，無限のとき無限次拡大という．有限次拡大 L/K の中間体 M について，$L/M, M/K$ も有限次拡大になる．ここから次の結果が従う（証明は線型代数なので省略する）．

命題 *0.5.7*

L/K を有限次拡大とし，M をその中間体とする．このとき $[L : K] = [L : M][M : K]$ となる．

次に，体の拡大について「代数的」とはどういうことであるかについて考察する．まず，体に元を**添加**することについて述べよう．体の拡大 L/K について，$\alpha \in L$ に対して；

$$K(\alpha) = \left\{ \frac{f(\alpha)}{g(\alpha)} \in L \;\middle|\; f, g \in K[X], g(\alpha) \neq 0 \right\}$$

とおく．これを K に α を**添加 (adjunction)** した体という．$K(\alpha)$ は L/K の中間体となり，また M が L/K の中間体で $\alpha \in M$ を満たすなら $K(\alpha) \subset M$ となる．さらに $\beta \in L$ を $K(\alpha)$ に添加した体 $(K(\alpha))(\beta)$ を $K(\alpha, \beta)$ とかく．

一般に K に異なる元 $\alpha, \beta \in L$ を添加したとしても $K(\alpha) = K(\beta)$ となることがあるので注意が必要である．例えば $i, 1 + i$ を $\mathbb{Q}$ に添加した体を考えてみよ（$\mathbb{Q}(i) = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ である）．

いくつか例を見てみよう．$\mathbb{R}(i) = \mathbb{C}$ であり $[\mathbb{C} : \mathbb{R}] = 2$ である（基底は $\{1, i\}$）．また；

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) = \left\{ a + b\sqrt{3} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \right\} = \left\{ x + y\sqrt{2} + z\sqrt{3} + w\sqrt{6} \;\middle|\; x, y, z, w \in \mathbb{Q} \right\}$$

であり $[\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) : \mathbb{Q}] = 4$ である（線型独立を確かめよ）．

既約元の定義（定義 0.3.8）を思い出そう．体 K 上の定数でない多項式 $f \in K[X]$ で，$f = gh (g, h \in K[X])$ なら g, h のどちらかは定数であるようなもの（定数でない多項式の積に分解できないもの）を**既約多項式 (irreducible polymonial)** という．例えば $\mathbb{R}[X]$ において X^2+1 は既約であり，$\mathbb{C}[X]$ では $X^2+1 = (X-i)(X+i)$ となり既約ではない．このように体を拡大すると多項式が既約でなくなることがある．逆に，ある既約多項式を分解できるように体を拡大することを考えよう．$\mathbb{C}/\mathbb{R}$ の例をみると，$\mathbb{C} = \mathbb{R}(i)$ となっている．これは $\mathbb{R}$ に $X^2 + 1$ の「根」を添加するように拡大したと考えることができる．しかし定義を見ればわかるように，根を添加するには，$\mathbb{R}$ の拡大体 L で $f(\alpha) = 0$ となる $\alpha \in L$ が見つかっていなければならない（この例では $\mathbb{C}$ という $X^2 + 1$ の根の居場所がわかっているので問題がない）．そこで $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}[X]/(X^2 + 1)$ であったことを思い出そう．ここから類推できるのは $K[X]$ を既約元で割ることで，根を添加したような拡大体が作れないか？ということである．

命題 *0.5.8*

体 K 上の多項式環 $K[X]$ について，f が既約多項式であることと $K[X]/(f)$ が体であることは同値である．

証明.

f が既約であることと (f) が極大イデアルであることが同値なことを示せばよい．

$(\Longrightarrow)$

$(f) \subset I$ となるイデアル I があるとする．$K[X]$ は PID なので，$I = (g)$ となる $g \in K[X]$ がある．すると $f = hg(h \in K[X])$ とかけるが，f が既約なので g, h のどちらかは定数である．もし g が定数なら $(g) = K[X]$ であり，h が定数なら f, g は同伴なので $(f) = (g)$ となる．よって (f) は極大である．

$(\Longleftarrow)$

$f = gh$ としよう．g が定数でないとすると，$(f) \subset (g) \neq K[X]$ であるので $(f) = (g)$ となり f と g は同伴．よって h は定数であり f は既約.

（証明終）

よって $f \in K[X]$ が既約なら $L = K[X]/(f)$ は K の拡大体となる．ここで；

$$f(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_0$$

とおいておく．g の L における像を $[g]$ とかくことにすると，$[g] = 0$ であることと $g \in (f)$ であることは同値である．すると L において；

$$a_n [X]^n + a_{n-1} [X]^{n-1} + \cdots + a_0 = [a_n X^n + \cdots + a_0] = [f] = 0$$

であるので，f を L 上の多項式とみなしたとき，$[x] = \alpha$ とおくと $f(\alpha) = 0$ が言えることになる（$\mathbb{R}[X]/(X^2 + 1) \cong \mathbb{C}$ で考えてみよ．i は $[X]$ に対応する元であった）．$L = K[X]/(f) = K(\alpha)$ が成り立つことを示そう．

命題 *0.5.9*

$f \in K[X]$ が K 上既約であり，$\deg f = n$ とする．$L = K[X]/(f), \alpha = [X] \in L$ とおくと，$[L : K] = n$ であり，その基底は $\{1, \alpha, \ldots, \alpha^{n-1}\}$ である．

証明.

$\{1, \alpha, \ldots, \alpha^{n-1}\}$ が線型独立であることを示す．$a_0, \ldots, a_{n-1} \in K$ をとり $a_0 + a_1\alpha + \cdots + a_{n-1}\alpha_{n-1} = 0$ と仮定する．これは $g = a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0$ とおくと $g \in (f)$ を意味する．よって g は f の定数倍または定数だが，$\deg g < \deg f$ なので g は定数でなければならない．よって $a_1 = \cdots = a_{n-1} = 0$ となる．すると a_i たちの定義から $a_0 = 0$ でなければならず，線型独立であることが従う．（証明終）

この系として $L = K(\alpha)$ が従う．$f(\alpha) = 0$ となる α を添加することで K から拡大体 L を作ることを見たので，次は $\alpha \in L$ について $f(\alpha) = 0$ となる $f \in K[X]$ があるかどうかを考えよう．

定義 *0.5.10*

L/K を体の拡大とする．$\alpha \in L$ について，ある $f \in K[X]$ が存在して $f(\alpha) = 0$ となるとき α は K 上**代数的 (algebraic)** であるという．そのような f が存在しないときは α は K 上**超越的 (transcendental)** であるという．

拡大 $\mathbb{C}/\mathbb{Q}$ における代数的な元を**代数的数**，超越的な元を**超越数**という．有名な超越数では $e, \pi, \pi + e^\pi$ がある（$e + \pi$ が超越的かは未解決）．一方で $\sqrt[3]{2}$ や i などは代数的数である．

定義 *0.5.11*（最小多項式）

$\alpha \in L$ を K 上代数的とする．このとき $f \in K[X]$ であって，$f(\alpha) = 0$ かつ f はモニックなものが存在し，かつ次数が最小なものは一意的である．これを α の K 上の**最小多項式 (minimal polymonial)** といい，F_α で表す．

存在し，一意なことを示そう．

証明.

Step 1. 存在すること．

α は代数的なので，ある $f \in K[X]$ がとれて $f(\alpha) = 0$ となる．f の最高次の係数が a_n であるとすると $1/a_n \cdot f$ は α を根にもつ K 上のモニック多項式であるので，存在することがわかる．

Step 2. 次数最小のものが一意的であること．

$f \neq g$ が条件を満たすとする．定義から $\deg f = \deg g$ で，どちらもモニックなので $f - g \neq 0$ は f より次数が真に小さくなる．明らかに $f(\alpha) - g(\alpha) = 0$ なので，これを最高次の係数で割ったものも α を根にもつモニック多項式だが，これは次数の最小性に矛盾．

（証明終）

体（整域）上の最小多項式は次数の最小性から既約である．また，$f \in K[X]$ について $f(\alpha) = 0$ であることと f が F_α で割り切れることは同値であり，更に f がモニックで既約なら $f = F_\alpha$ であることが簡単にわかる（演習問題とする）．

体の拡大 L/K において $\alpha, \beta \in L$ はどちらも K 上代数的であるとする．$F_\alpha = F_\beta$ となっているとき，α と β は K 上**共役 (conjugate)** であるという．この定義は複素数の共役の拡張になっていることを確かめよ（$\mathbb{C}/\mathbb{R}$ を考えよ）．

定義 *0.5.12*（代数拡大，超越拡大）

L/K を体の拡大とする．任意の $\alpha \in L$ に対し α が K 上代数的であるとき L/K は**代数拡大 (algebraic extension)** といい，そうでないとき**超越拡大 (transcendental extension)** という．

命題 *0.5.13*

L/K を体の拡大とする．$\alpha \in L$ が K 上代数的であることと，$K(\alpha)/K$ が有限次であることは同値である．

証明.

($\Longrightarrow$)

α の最小多項式 F_α は既約である．$L = K[X]/(F_\alpha)$ は体であり，命題 0.5.9 より L/K は有限次拡大，また $L = K(\alpha)$ であるので題意が従う．

($\Longleftarrow$)

$[K(\alpha) : K] = n$ とすると，$\{1, \alpha, \ldots, \alpha^n\}$ は線型独立ではない．よって；

$$a_n\alpha^n + \cdots + a_1\alpha + a_0 = 0$$

となる $a_i \in K$ について，少なくとも 1 つは 0 でない．よって $f(X) = a_nX^n + \cdots + a_1X + a_0$ とおけば f は α を根にもつ K 上の多項式となる．

（証明終）

系として $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ が K 上代数的なら $K(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)/K$ は代数拡大．また L/K が有限次なら代数拡大である．これまでの結果から，代数的数の（有限個の）和，積，商はすべて代数的である．

K を係数とする既約多項式の根を K に添加することで体を拡大する手法をみたが，これは K 内で「解けない多項式」の存在を仮定するものだった．具体的には X^2+1 は $\mathbb{R}$ では解けないが，$\mathbb{C}$ では $X^2+1 = (X-i)(X+i)$ と解くことができる．では，$\mathbb{C}[X]$ には解けない多項式は存在しない（すべての多項式は 1 次式の積に分解できる．代数学の基本定理）．このような体を更に代数拡大することはできるのだろうか？答えは No である．

定義 *0.5.14*（代数閉体）

体 K であって，$K[X]$ の既約多項式がすべて 1 次であるとき K を**代数閉体 (algebraically closed field)** であるという．

$\mathbb{C}$ は代数閉体である．定義から K が代数閉体のとき，任意の $f \in K[X]$ に対し $\deg f \geq 1$ ならばある $\alpha \in K$ が存在して $f(\alpha) = 0$ となる．逆に体 K でこの条件が成り立つとき，$f(X) = (X-\alpha)f_1(X)$ と分解され（因数定理），f_1 に同様の操作を繰り返すことで K が代数閉体であることを示すことができる．よって K が代数閉であることと，任意の 1 次以上の多項式が K 内に根を持つことは同値である．

命題 *0.5.15*

体 K が代数閉体であることと，L/K が体の代数拡大ならば $L = K$ となることは同値である．

証明.

$(\Longrightarrow)$

L/K を代数拡大とする．任意の $\alpha \in L$ について α は K 上代数的なので $f(\alpha) = 0$ となる $f \in K[X]$ が存在する．仮定から $f = g_1 g_2 \ldots g_n (\deg g_i = 1)$ と既約分解できる．このときある i について $g_i(\alpha) = 0$ となる．そこで $g_i(X) = aX + B(a,\ b \in K, a \neq 0)$ とおくと，$a\alpha + b = 0$ より $\alpha = -b/a \in K$ である．よって $L = K$ となる．

$(\Longleftarrow)$

任意の $f \in K[X], \deg f \geq 1$ をとる．g を f を割り切る既約多項式とすると，$K[X]/(g)$ は K の拡大体となり，ある $\alpha \in K[X]/(g)$ が存在して $K[X]/(g) = K(\alpha), K(\alpha)/K$ は代数拡大となる．すると $K(\alpha) = K$ なので $\alpha \in K$ だから f は K 内に根を持つ．よって K は代数閉体である．

（証明終）

明らかに素体は代数閉体ではない．どんな体についても，それを含むような代数閉体が存在する．

定義 *0.5.16*（代数閉包）

K を体とする．代数閉体 L であって L/K が代数拡大となるものを K の**代数閉包 (algebraic closure)** という．

代数閉包の存在を Zorn の補題を用いて証明したいのだが，体 K の代数拡大体全体のなす族 Σ は安直に考えると集合であるかどうかわからず，Σ に対して Zorn の補題を使うという素直な証明はうまくいかない．そこで次の補題を用意する．

命題 *0.5.17*

K を体とし，L を K の代数拡大体とする．K が無限体なら $\#K = \#L$ であり，K が有限体ならば $\#K \leq \#L$ で L は高々可算である．

証明.

最初に集合の濃度についての一般論について少し注意しておく（証明はしない）．集合 X と集合族 $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を考える．また集合の直和を $\sqcup_{\lambda\in\Lambda}X_\lambda$ で表すと $\#\bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \leq \#\sqcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ であって，また任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して $\#X_\lambda \leq \#X$ ならば $\#\sqcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \leq \#(\Lambda \times X)$ である．

さて，$\#K \leq \#L$ は明らかである．$I = \left\{f \in K[X] \,\middle|\, f\text{: モニック，既約}\right\}$ とおく．各 $f \in I$ に対して $L_f = \{\alpha \in L \mid f(\alpha) = 0\}$ とすると α の最小多項式をとることで $L = \bigcup_{f\in I} L_f$ であることがわかる．各 L_f が有限集合であることに注意すると，$\#I$ が有限のときは；

$$\#L \leq \#\sqcup_{f\in I} L_f \leq \#(I \times \mathbb{N}) \leq \#\mathbb{N}$$

であって，$\#I$ が無限集合のときは；

$$\#L \leq \#\sqcup_{f\in I} L_f \leq \#(I \times \mathbb{N}) = \#I$$

であることがわかる．K が有限体ならば I は高々可算なので証明が終わる．

次に K が無限体であるとしよう．このとき I は有限ではありえないことに注意しておく．I_n を I の n 次の元全体からなる集合とすると $\#I_n \leq \#K$ であることに注意して；

$$\#I = \#\sqcup_{n\in\mathbb{N}} I_n \leq \#(\mathbb{N} \times K) = \#K$$

となり $\#K = \#L = \#I$ となることがわかった．（証明終）

定理 *0.5.18*（Steinitz）

任意の体 K に対してその代数閉包が存在して，K を動かさない同型を除いて一意的である．

この定理は歴史的には Steinitz による．ここで紹介する（Steinitz のものとは異なる）証明は短いものの，初学者にはハードルの高いものであることは否めない．集合論まわりの議論になれていない読者は Artin による構成的な証明のほうがより優しいと思われる．例えば日本語では藤崎 (1991)，定理 2.18 で読むことができる．

証明.

まず存在を示す．K が有限体のとき $S = \mathbb{R}$，K が無限体のとき $S = \mathfrak{P}(K)$ とおく．このとき；

$$\Sigma = \left\{L \subset S \,\middle|\, L/K\text{: 代数拡大}\right\}$$

とおくとこれは集合で，Zorn の補題が使えることがわかり極大元 $\overline{K}$ が存在する．これが代数閉体であることを示そう．そのためにはすべての既約な $f \in \overline{K}[X]$ が $\overline{K}$ で解ければよい．$\overline{K}' = \overline{K}[X]/f$ とおくとこれは $\overline{K}$ の代数拡大で，上の命題より K が有限体ならば $\overline{K}'$ は高々可算で，K が無限体ならば $\#K = \#\overline{K} = \#\overline{K}'$ なので，どちらの場合でも $\#\overline{K}' < \#S$ である．よって単射 $\iota : \overline{K}' \to S$ を $\overline{K} \subset \operatorname{Im}\iota$ となるようにとれるので，$\overline{K}$ の極大性から $\overline{K} = \overline{K}'$ となり $\overline{K}$ は代数閉体である．

次に一意性を示す．別の代数閉包 Ω/K が存在したとする．このとき；

$$\left\{(L, \varphi) \,\middle|\, K \subset L \subset \overline{K}, \varphi : L \to \Omega\right\}$$

は次の順序；

$$(L, \varphi) \leq (L', \psi) \iff L \subset L', \psi|_L = \varphi$$

によって帰納的順序集合をなし，Zorn の補題から極大元 (L, φ) がとれる．極大性から $L = \overline{K}$ で，$\varphi(\overline{K}) \subset \Omega$ かつ $\varphi(\overline{K})$ は代数閉体だから $\varphi : \overline{K} \to \Omega$ は K を動かさない同型となる．　（証明終）

最後に，体の拡大の**分離性**について少し説明しておこう．

定義 *0.5.19*（分離拡大）

L/K を代数拡大とする．任意の $\alpha \in L$ に対し F_α が K の代数閉包 $\overline{K}$ において重根を持たないとき，L/K は分離拡大であるという．

多項式 $f \in K[X]$ が $\overline{K}$ で重根を持たないとき f は**分離的**であるという．この定義は K の代数閉包で根を考えなければならないので，すこし扱いにくい．それを解決してくれるのが（代数的な）微分である．A を環とし，多項式 $f \in A[X]$ が次の形；

$$f(T) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0$$

でかけているとする．このとき，変数 X に関する**微分** (derivaive)$f'(X)$ を；

$$f'(X) = n a_n X^{n-1} + (n-1) a_{n-1} X^{n-2} + \cdots + 2a_2 X + a_1$$

で定義する．これは解析的な極限をとる操作は一切関係ないので，**形式的微分** (formal derivative) ともいう．初等的な微積分学で習う公式は全て成り立っている（計算で確かめられるのでここでは証明しない）．微分を代数で考える恩恵の 1 つは次の性質である．

命題 *0.5.20*

K を体とし，$f \in K[X]$ を考える．$\alpha \in \overline{K}$ が f の根であるとする．このとき，$f'(\alpha) = 0$ であることと α が f の重根であることは同値である．

証明.

多項式環は Euclid 整域であるから，除法の原理が使える．よって；

$$f(X) = (X - \alpha) q(X) + r(X)$$

とかける．このとき $r(X)$ の次数は 1 未満なので定数にほかならず，$f(\alpha) = 0$ であるから $r(X) = 0$ でなければならない（因数定理の逆）．よって $f(X) = (X - \alpha) q(X)$ と書ける．これの両辺を微分して；

$$f'(X) = q(X) + (X - \alpha) q'(X)$$

を得る．ここに α を代入すると

$$f'(\alpha) = q(\alpha)$$

を得る．よって $f'(\alpha) = 0$ であることと α が f の重根であること，すなわち $q(\alpha) = 0$ は同値であることがわかる．　（証明終）

この命題から f が分離的であることと，f と f' が共通な根を持たないことが同値であることがわかる．さらにこれは f と f' が互いに素である（最大公約元が 1 である）こととも同値である．もっと一般に示そう．

命題 *0.5.21*

$f, g \in K[X]$ は 0 でないとする．このとき f と g が互いに素であることと，f と g が共通な根を持たないことは同値である．

証明.

それぞれ対偶をとって f, g が互いに素でないことと，f, g が共通な根を持つことが同値であることを示そう．

$(\Longrightarrow)$

ある定数でない $h \in K[X]$ が存在して $f = hq_1, g = hq_2$ とかける．明らかに h の根が共通根となる．

$(\Longleftarrow)$

$f(\alpha) = g(\alpha) = 0$ とすると；

$$f(X) = (X - \alpha)q_1(X) \quad g(X) = (X - \alpha)q_2(X)$$

と書けるので $(X - \alpha)$ は f と g の公約元である．

（証明終）

系 *0.5.22*

L/K を体の拡大とし，$\alpha \in L$ は K 上代数的であるとする．このとき α の K 上の最小多項式 F_α は α を重根に持たないならば分離的である．

証明.

$F'_\alpha(\alpha) \neq 0$ であるから，F_α は F'_α を割り切らない．すると F_α は既約なので F_α, F'_α は互いによである．よって F_α と F'_α は共通根を持たず，F_α は分離的である．（証明終）

定理 *0.5.23*

体 K の標数が 0 であるとする．$f \in K[X]$ が既約なら f は分離的である．

証明.

背理法で示す．f が分離的でないとすると，定数でない $h \in K[X]$ が存在して $f = q_1 h$, $f' = q_2 h$ とかける．f は既約だから q_1 は定数であることに注意すると，f' は f で割り切れるが，f' の次数は f より低いので $f' = 0$ でなければならない．よって，定義から任意の $1 \leq i \leq \deg f$ について $ia_i = 0$ である．K は標数 0 の体なので $a_i = 0$ となり，f は定数となるがこれは矛盾．（証明終）

このようなよい性質をもつ体を**完全体**と呼ぶ．

定義 *0.5.24*（完全体）

体 K において，K 上既約な多項式がすべて分離的であるとき K を**完全体** (perfect field) という．

完全体になるための条件を調べるには Frobenius 写像という写像が有効である．Frobenius 写像の性質と，それを用いた完全性の判定法を紹介しよう．

定義 *0.5.25*（Frobenius 写像）

A を標数 $p > 0$ の環とする．写像；

$$F : A \longrightarrow A; a \longmapsto a^p$$

を **Frobenius 写像 (Frobenius map)** という．

Frobenius 写像は準同型である．実際 $(a+b)^p$ を二項展開すると a^p と b^p 以外の項は p で割り切れることになり消える．すなわち $F(a+b) = a^p + b^p$ である．積と単位元を保つことについては明らかだろう．また A が被約なら F は単射である．これを用いて完全性の判定をしよう．

命題 *0.5.26*（体の完全性の判定）

体 K の標数が $p > 0$ であるとする．このとき K が完全であることと，Frobenius 写像 $F : K \to K$ が自己同型であることは同値である．

証明.

K は体だから F は単射であることに注意する．

$(\Longrightarrow)$

任意の $a \in K$ を 1 つとる．$f(X) = X^p - a$ を考えると $f'(X) = pX^{p-1} = 0$ より f は分離的でないので，仮定から f は既約でない．そこで f を割り切るモニックな既約多項式 g をとる．また $L = K[X]/g$ を考えよう．命題 0.5.9 により $g(\alpha) = 0$ となる $\alpha \in L$ が存在する．g は f の因子だから $f(\alpha) = \alpha^p - a = 0$ である．ここで；

$$(X-\alpha)^p = X^p - \alpha^p = X^p - a$$

であるので $f(X) = X^p - a = X^p - \alpha^p = (X-\alpha)^p$ となり，g はモニックな f の因子だから $\deg g = n$ とすると $g(X) = (X-\alpha)^n$ でなければならない．さて；

$$g(X) = (X-\alpha)^n = X^n - n\alpha X^{n-1} + \cdots + (-1)^{n-1} n\alpha^{n-1} X + (-1)^n \alpha^n \in K[X]$$

より $n\alpha \in K$ である．また g の定義より $1 \leq n < p$ だから $n^{-1} \in K$ なので $\alpha \in K$ である．よって $F(\alpha) = a$ となり，$F : K \to K$ が全射であることがわかった．

$(\Longleftarrow)$

$f \in K[X]$ が既約であるとする．$f' \neq 0$ であることを背理法で示そう．$f' = 0$ と仮定する．f の係数が；

$$f(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0$$

であるとすると；

$$f'(X) = n a_n X^{n-1} + \cdots + 2a_2 X + a_1 = 0$$

である．よって各 $1 \leq i \leq n$ について，i が p 倍でなければ $a_i = 0$ でなければならない．ゆえに $f(X) = b_m X^{mp} + \cdots + b_1 X^p + b_0$ とかけるが，Frobenius 写像が全射なので；

$$f(X) = c_m^p X^{pm} + \cdots + c_1^p X^p + c_0^p = (c_m X^m + \cdots + c_0)^p$$

とかけ，これは f が既約という仮定に矛盾．

（証明終）

この命題から体 K が完全体となる必要十分条件は，標数 0 または Frobenius 写像 F が自己同型になることであることがわかった．これにより $\mathbb{Q}$ の拡大体や有限体はすべて完全体で，特に素体はすべて完全である．

§ 6　Noether 環と Hilbert の基底定理

一般の環ではその構造が抽象的なため扱いが難しいことが多々あるが，ある種の「有限性」を持つ環はそれを手がかりにいろいろな考察が進められている．そのなかで最も頻出するものが次に述べる **Noether 環**である．

定義 *0.6.1*（Noether 環）

環 A の任意のイデアルが有限生成であるとき，A を **Noether 環 (Noetherian ring)** という．

Noether 環は次の同値条件を持つので，どれを定義にしてもよい（ただし，(ii) から (i)，また (i) から (iii) はそれぞれ選択公理を仮定しなければ導けないことが知られている（Hodges (1974)））．

命題 *0.6.2*

次は同値である．

(i) A は Noether 環である．
(ii) A のイデアルの任意の増大列は有限個で停止する（昇鎖条件）．
(iii) A のイデアルの空でない任意の族は極大元を持つ（極大条件）．

証明.

(i) $\Longrightarrow$ (ii)

A のイデアルの増大列を；

$$I_1 \subset I_2 \subset \cdots \subset I_i \subset \cdots$$

とする．ここで $I = \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$ とおくと，これはイデアルである．仮定から有限生成であるので，$I = (a_1, \ldots, a_r)$ とおく．任意の $1 \leq j \leq r$ に対して，定義からある i が存在して $x_j \in I_i$ である．よって，n を $n_1, \ldots, n_r$ の最大値とすればすべての j について $x_j \in I_n$ すなわち $I \subset I_n$ となる．これは $n \leq l$ に対して $I_n = I_l$ であることにほかならない．

(ii) $\Longrightarrow$ (iii)

$\{I_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を A のイデアルの空でない族とする．これが極大元を持たないとすると，任意の $\lambda_1 \in \Lambda$ に対して，ある $\lambda_2 \in \Lambda$ が存在して $I_{\lambda_1} \subsetneq I_{\lambda_2}$ となる．以下同様に，真の増大列

$$I_{\lambda_1} \subsetneq I_{\lambda_2} \subsetneq \cdots \subsetneq I_{\lambda_i} \subsetneq \cdots$$

がとれて，これは (ii) に矛盾．

(iii) $\Longrightarrow$ (i)

I を A のイデアルとする．I の有限部分集合が生成する A のイデアル全体の集合を Σ とする．$0 \in \Sigma$ より $\Sigma \neq \emptyset$ であるので，これは極大元 I_0 を持つ．ここで，$I \neq I_0$ とすると $a \in I \setminus I_0$ に対し $I_0 \subsetneq I_0 + (a) \in \Sigma$ となり，極大性に反する．よって $I_0 = I$ である．よって (i) が言える．

（証明終）

増大列（昇鎖）を減少列（降鎖）に置き換えて包含関係を逆にしたものが **Artin 性**と呼ばれるものである．

定義 *0.6.3*（Artin 環）

次の同値な条件；

(i) A のイデアルの任意の減少列は有限個で停止する（降鎖条件）.
(ii) A のイデアルの空でない任意の族は極小元を持つ（極小条件）.

を満たす環を **Artin 環 (Artinian ring)** という.

昇鎖条件，降鎖条件はそれぞれ ACC (Ascending Chain Condition), DCC (Dscending Chain Condition) と略される.

命題 *0.6.4*

A が Noether (Artin) なら，任意のイデアル I について A/I も Noether (Artin) である.

証明.

イデアルの対応を考えればわかる.　（証明終）

Noether 環の部分環が必ずしも Noether ではないことに注意しよう．例えば，Noether でない整域は商体に含まれる（定義 0.4.5 をみよ）.

次の定理から，有限生成を確かめるのは素イデアルだけでよいことがわかる.

定理 *0.6.5*（I. S. Cohen）

A の任意の素イデアルが有限生成なら，A は Noether 環である.

証明.

A のイデアルで，有限生成でないもの全体を Σ とする．$\Sigma \neq \emptyset$ と仮定すると，Zorn の補題から極大元 I が存在する．仮定から I は素イデアルでないので，$a, b \in A$ で $ab \in I, a, b \notin I$ を満たすものが存在する．すると，$I + Aa$ は I より真に大きいから有限生成なので，ある $u_1, \ldots, u_n \in I$ を；

$$I + Aa = (u_1, \ldots, u_n, a)$$

となるようにとれる．$(I : a) = \{r \in A \mid ra \in I\}$ とおく（この記号はイデアル商，定義 1.1.8 と整合性がある）と，これは A のイデアルをなす．$b \in (I : a)$ より $I \subsetneq (I : a)$ だからこれも有限生成で，$(I : a) = (v_1, \ldots, v_m)$ とできる.

よって，$I = (u_1, \ldots, u_n, v_1 a, \ldots, v_m a)$ となり，$I \in \Sigma$ に矛盾．よって $\Sigma = \emptyset$ である.　（証明終）

定義 *0.6.6*（A 代数）

環 A，B に対し，環準同型 $f : A \to B$ が定まっているとき B は A **代数 (A-algebra)** であるという.

定義 *0.6.7*（有限型）

ある $n \in \mathbb{N}$ が存在して，全射準同型 $\varphi : A[X_1, \ldots, X_n] \to B$ が存在するとき，φ は**有限型 (finite type)** であるという.

このとき，$S = \{\varphi(X_1), \ldots, \varphi(X_n)\}$ を B の A 代数としての生成元といい，B は A **代数として有限生成 (finitely generated as A- algebla)** であるという．X_i の B における像を α_i としたとき，$B = A[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$ とかく．

最後に **Hilbert の基底定理**について述べておこう．

定理 *0.6.8*（Hilbert の基底定理）

Noether 環上の有限生成代数は Noether 環である．

証明.

A が Noether 環のとき，$A[X]$ が Noether 環なら帰納的に $A[X_1, \ldots, X_n]$ が Noether 環となり，その剰余環である有限生成代数 B は Noether 環である．

よって，$A[X]$ が Noether であることを示せばよい．$I \neq 0$ を $A[X]$ のイデアルとする．これが有限生成であることを示す．$f_1 \neq 0$ を，I の最小次数の多項式とする．$(f_1) \subsetneq I$ ならば，f_2 を $I \setminus (f_1)$ の最小次数の元とする．同様に $(f_1, \ldots, f_i) \subsetneq I$ ならば，f_{i+1} を $I \setminus (f_1, \ldots, f_i)$ の最小次数の多項式とする．ここで，各 f_i に対し，f_i の先頭項を $a_i X^{r_i}$ とし，A のイデアルの増大列；

$$(a_1) \subset (a_1, a_2) \subset \cdots \subset (a_1, \ldots, a_i) \subset \cdots$$

を考えると，A は Noether 環なのでこれは停まる．すなわち，ある n があって，$j \geq n$ に対して $a_j \in (a_1, \ldots, a_n)$ となる．この n に対して $(f_1, \ldots, f_n) = I$ であることを示す．

背理法を用いる．$I \setminus (f_1, \ldots, f_n) \neq \emptyset$ とすると，f_{n+1} を次数最小のものとしてとれる．さて，$a_{n+1} \in (a_1, \ldots, a_n)$ より，$a_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} c_i a_i$ $(c_i \in A)$ とかける．いま $\deg f_i = r_i$ であり，作り方から $r_i \leq r_{n+1}$ なので

$$g = f_{n+1} - \sum c_i X^{r_{n+1} - r_i} f_i$$

とおくと，$\deg g < r_{n+1}$ である．f_{n+1} の次数最小性より $g \notin I \setminus (f_1, \ldots, f_n)$ すなわち $g \in (f_1, \ldots, f_n)$ となり，$f_{n+1} \in (f_1, \ldots, f_n)$ が従うが，これは矛盾．よって $(f_1, \ldots, f_n) = I$ である．（証明終）

系 *0.6.9*

A が Noether 環ならば $A[X]$ は Noether 環である．

問 1.

$A[X]$ が Noether のとき，A は Noether となるか？

いよいよ，加群の定義を導入する時が来た．ここまでの議論は環そのものとイデアルという内部的なものについて見てきたが，加群によって環の外，いわゆる「表現」を考えることで広い世界がみえてくる．

第1章　準備

—Preliminaries

この章では可換環論における基礎的なこと，すなわち加群の定義，テンソル積，局所化，射影，入射加群などを集める．第２章以降に学習を続けていくにつれて，本書で展開される議論はこの章でおこなった準備に根付いていることがわかるだろう．この章以降，**圏論 (category theory)** の言葉を使うことがでてくるため，本章と付録 A をある程度並行して読みすすめることを想定する．

§ 1　加群の定義

線型空間の拡張として**加群**というものを考えると，環 A の構造だけをみるのではなく加群も合わせて考えることで表現論的な考察が可能になる．

定義 *1.1.1*（加群）

A を環とし，M を Abel 群とする．A の作用 $A \times M \to M; (a, x) \mapsto ax$ が存在して；

(M1) $1 \cdot x = x$
(M2) $a(bx) = (ab)x$
(M3) $(a + b)x = ax + bx$
(M4) $a(x + y) = ax + ay$

をみたすとき，M（と作用の組）を A **加群 (module)** という．

環 R が非可換の時，作用が左（右）作用のとき左（右）加群という．すなわち右加群については (M2) の代わりに；

$$\text{(M2)}' \quad a(bx) = b(ax)$$

を要請する必要がある（最初に注意しておいたとおり，すべて A は可換環として進める）．また A が体のときは加群とは線型空間に他ならない．A の作用のことを**スカラー (scalar)** ということもある．

以後線型代数の模倣としていくつかの性質と定義を述べる．例えば任意の $a \in A$ と $x \in M$ に対して；

$$a \cdot 0 = 0, 0 \cdot x = 0, (-a)x = -ax$$

が成り立つ．

自明な例として，集合 M が Abel 群であることと $\mathbb{Z}$ 加群であることは同値である．本書では Abel 群と同じ意味で $\mathbb{Z}$ 加群という表現をしばしば用いる．

定義 *1.1.2*（線型写像）

M, N を A 加群とする．写像 $\varphi : M \to N$ が，任意の $a, b \in A$ と $x, y \in M$ に対し；

$$\varphi(ax + by) = a\varphi(x) + b\varphi(y)$$

を満たす時，φ を A **線型 (linear)** であるという．

これは Abel 群としての準同型になっているので，A 線型写像は A 準同型とも言われる．もちろん φ が全単射のとき，φ は A **同型**であるという．

定義 *1.1.3*（部分加群）

A 加群 M の部分集合 N が Abel 群として M の部分群であり，任意の $a \in A$ と $x \in N$ に対して $ax \in N$，すなわち A の作用で閉じているとき N を M の**部分加群** (sub module) であるという．

また，A 加群 M の部分加群 N, L が存在するとき，$N + L = \{x + y \mid x \in N, y \in L\}$ も M の部分加群となることを注意しておく．

A 自身を環の積を作用として A 加群とみなす（これを**正則加群 (regular module)** という）とき，A の部分加群とはまさに A のイデアルにほかならない．このとき，A 線型写像は環の準同型とは異なることに注意しよう（単位元の行き先を定めることと A 線型写像を定めることは同値）．

定義 *1.1.4*（剰余加群）

M を A 加群とし，N をその部分加群とする．次の M 上の同値関係；

$$x \sim y \Longleftrightarrow x - y \in N$$

による M の商集合を M/N とし，その代表元を $x + N$ と表す．そこに A の作用を $a(x + N) = ax + N$ で定めるとこれは A 加群になる．これを M の N による**剰余加群 (residue module)** という．

定義から $x + N = 0$ と $x \in N$ は同値である．剰余環と同様に準同型定理とよばれる定理が成り立つ．

定理 *1.1.5*（準同型定理）

M, N を A 加群とし，$f : M \to N$ を A 線型写像とする．$\ker\varphi, \mathrm{Im}\,\varphi$ はそれぞれ M, N の部分加群で，同型；

$$M/\ker\varphi \cong \mathrm{Im}\,\varphi$$

が成立する．

証明は環の場合を適切に拡張すればよいから省略する．また環については紹介しなかったが，核の双対概念として余核を定義しておく．

定義 *1.1.6*（余核）

M, N を A 加群とし，$f : M \to N$ を A 線型写像とする．$\mathrm{Coker}\, f = N/\mathrm{Im}\, f$ を f の**余核 (cokernel)** という．

加群の分解に関する文脈（幾何で言う既約分解に対応する）で，部分加群の既約性が大切となるのでここで紹介しておく．

定義 *1.1.7*

A 加群 M の部分加群 N について，N_1，N_2 を M の部分加群として $N = N_1 \cap N_2$ ならば $N = N_1$ または $N = N_2$ が成り立つとき，N を**既約 (irreducible)** といい，そうでないときに**可約 (reducible)** という．

M を A 加群とする．イデアル $\mathrm{Ann}(M) = \{a \in A \mid aM = 0\}$ を M の**零化イデアル (anihilator)** といい，$\mathrm{Ann}(M) = 0$ となるとき M は**忠実 (faithful)** な A 加群であるという．これを一般の加群に拡張したものが次

である．

定義 *1.1.8*（イデアル商）

M を A 加群，L, N をその部分加群とする．

$$(L : N) = \{a \in A \mid aN \subset L\}$$

は A のイデアルになり，これを L と N の**イデアル商 (ideal quotient)** または**コロンイデアル (colon ideal)** という．

これにより $\mathrm{Ann}(M) = (0 : M)$ とかくことができる．またイデアルとは A の部分 A 加群であることに注意するとイデアルについてもイデアル商を考えることができる．イデアル商の計算は次が基本的である（証明は簡単なので省略する）．

命題 *1.1.9*

I, J, K を A のイデアルとし，L, N は A 加群 M の部分加群であるとすると，次が成り立つ．

(i) $I \subset (I : J)$
(ii) $(I : J)J \subset I$
(iii) $((I : J) : K) = (I : JK) = ((I : K) : J)$
(iv) $(\bigcap_\lambda I_\lambda : J) = \bigcap_\lambda (I_\lambda : J)$
(v) $(I : \sum_\lambda J_\lambda) = \bigcap_\lambda (I : J_\lambda)$
(vi) $\mathrm{Ann}(N + L) = \mathrm{Ann}(N) \cap \mathrm{Ann}(L)$
(vii) $(L : N) = \mathrm{Ann}((L + N)/L)$

§ 2　加群の生成系と自由加群

線型空間の基底に対応して，加群の基底について触れる．以下，M を A 加群とし，$\{u_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を M の元の族とする．また Λ が無限集合である場合，Λ を走る和 $\sum_{\lambda\in\Lambda} u_\lambda$ は次の条件；

$$\text{有限個の}\lambda\text{を除いて } u_\lambda \text{が } 0 \text{ である．} \tag{$*$}$$

を満たす場合に限って定義される．

定義 *1.2.1*（加群の直積，直和）

A 加群の族 $\{M_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ に対して，直積 $\prod M_\lambda$ に A の作用を；

$$a(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} = (ax_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$$

と定めると $\prod M_\lambda$ は A 加群になる．同様の作用によって；

$$\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda = \left\{(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \in \prod M_\lambda \;\middle|\; \text{有限個の}\lambda\text{を除いて } x_\lambda = 0 \text{ である．}\right\}$$

も A 加群になる．特に Λ が有限のとき $\prod M_\lambda$ と一致する．これらをそれぞれ $\{M_\lambda\}$ の**直積 (direct product)**，**直和 (direct sum)** という．

上の直和の定義は抽象的であり，有限個の直和は直積と変わらない．対して，部分加群の直和については**内部直和**を考えることが多い．

定義 *1.2.2*（内部直和）

A 加群 M の部分加群の族 $\{M_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が存在して，$\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda \cong M$ であって，この同型で $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ が $\sum x_\lambda$ に移されるとき，$M \cong \bigoplus M_\lambda$ は**内部直和 (internal direct sum)** であるという．

$M = \bigoplus M_\lambda$ が内部直和のとき，$\lambda \neq \lambda'$ のとき $M_\lambda \cap M_{\lambda'} = 0$ でなければならないことに注意せよ．

定義 *1.2.3*（生成系）

M の任意の元が $\sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda u_\lambda$ $(a_\lambda \in A)$ とかけるとき，$\{u_\lambda\}$ を M の**生成系 (system of generator)** という．

このとき M は $\{u_\lambda\}$ で生成されるといい，$M = \langle u_\lambda \rangle$ などとかく．

定義 *1.2.4*（線型独立）

$u_1, \ldots, u_r \in M$ に対して，$\sum a_i u_i = 0$ ならばすべての $a_i = 0$ であるとき，$\{u_1, \ldots, u_r\}$ は**線型独立 (linearly independent)** であるという．無限集合 $\{u_\lambda\}$ については，$\{u_\lambda\}$ の任意の有限部分集合が線型独立のとき $\{u_\lambda\}$ が線型独立であるという．

定義 *1.2.5*（基底）

M の任意の元が $\sum a_\lambda u_\lambda$ の形に一意に書けるとき，$\{u_\lambda\}$ は M の**基底 (basis)** であるという．

それぞれ，線型写像；

$$\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} A \to M; (a_\lambda) \mapsto \sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda u_\lambda$$

が，全射，単射，全単射であることとそれぞれ同値である．特に $\{u_\lambda\}$ が基底であることは $\{u_\lambda\}$ が線型独立な生成系であることと同値である．

定義 *1.2.6*（自由加群）

M が基底を持つとき，M を**自由加群 (free module)** という．

上の注意から，自由加群とは A の直和で表される加群のことである．

線型代数の復習として，線型空間の基底の存在は保証されていること，その濃度は一意的であることを思い出そう（証明はしない）．

定理 *1.2.7*

体 k 上の加群 V（すなわち，k 線型空間）はすべて自由加群であり，その基底の濃度は一定である．

可換環上の自由加群についても，その濃度は一定である（非可換環については一般には成立しない）．

定理 *1.2.8*

（可換）環上の自由加群の基底の濃度は一定である．

証明.

A を環とし，M を A 上の自由加群とする．その基底を $\{u_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$，$\{v_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ とする．すると

$$M = \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} Au_\lambda = \bigoplus_{\omega\in\Omega} Av_\omega$$

とかける．A の極大イデアル $\mathfrak{m}$ を 1 つとる．いま $k = A/\mathfrak{m}$ は体である．ここで；

$$\mathfrak{m}M = \left\{ \sum_{\text{有限和}} a_i x_i \;\middle|\; a_i \in \mathfrak{m}, x_i \in M \right\}$$

とすると，これは M の部分加群で，$\{u_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が M の基底なので；

$$\begin{aligned}\mathfrak{m}M &= \left\{ \sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda u_\lambda \;\middle|\; a_\lambda \neq 0 \text{ となる}\lambda\text{は有限個} \right\} \\ &= \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} \mathfrak{m}u_\lambda\end{aligned}$$

となる．よって $M/\mathfrak{m}M \cong \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} Au_\lambda/\mathfrak{m}u_\lambda = \bigoplus (A/\mathfrak{m})u_\lambda$ となる．ここで $M/\mathfrak{m}M$ は k 上の加群，すなわち k 線型空間とみなすことができる．実際，作用；

$$k \times M/\mathfrak{m}M \to M/\mathfrak{m}M; (a+\mathfrak{m}, x+\mathfrak{m}M) \mapsto ax + \mathfrak{m}M$$

は well-defined である（確かめよ）．以上より k 線型空間として；

$$M/\mathfrak{m}M \cong \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} (A/\mathfrak{m})u_\lambda$$

となり，$\{u_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を k 線型空間として基底に持つことがわかる．同様に $\{v_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ も $M/\mathfrak{m}M$ の基底となっていて，線型空間の基底の濃度は一定であるので $\#\Lambda = \#\Omega$ である．（証明終）

イデアルの場合と同様に，有限生成加群について考えることができる．

定義 *1.2.9*（有限生成加群）

A 加群 M について，有限階数の自由加群 A^n からの全射が存在するとき，M は**有限生成 (finitely generated)** であるという．

この条件は有限個の元 $u_1, \ldots, u_r \in M$ が存在して $M = \langle u_1, \ldots, u_r \rangle$ とかけていることと同値である．

§ 3　線型写像と中山の補題

代数学（圏論）においては，いろいろな概念についてその構成に**自然に付随する射**が重要な働きをする．まずは線型写像そのものに関連する定義について紹介しておこう．

定義 *1.3.1*（Hom 加群）

環 A 上の加群 M，N において；

$$\mathrm{Hom}_A(M,\ N) = \left\{ \varphi : M \to N \;\middle|\; \varphi : A \text{ 線型写像} \right\}$$

は $f, g \in \mathrm{Hom}_A(M, N)$ に対し $f + g$ を $x \mapsto f(x) + g(x)$ で定めることで Abel 群をなす．また，A によるスカラーを $af : x \mapsto f(ax)$ として定めることで A 加群となる．

例えば，自然に $\mathrm{Hom}_A(A, M) \cong M$ である．加群の間の線型写像を考えることで，圏論的に言えば関手的な取り扱いが可能になる．線型写像を考えると，自然に出てくるものが完全列である．これについて定義しておこう．

定義 *1.3.2*（完全列）

M_i を加群とし，$\varphi_i : M_i \to M_{i+1}$ を線型写像とする．そのとき，列；

$$\cdots \longrightarrow M_{i-1} \xrightarrow{\varphi_{i-1}} M_i \xrightarrow{\varphi_i} M_{i+1} \longrightarrow \cdots$$

は任意の i に対し $\mathrm{Im}\,\varphi_{i-1} = \ker \varphi_i$ となるとき**完全列 (exact sequence)** であるという．

特に；

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{\varphi} M_2 \xrightarrow{\psi} M_3 \longrightarrow 0$$

が完全であることと，φ が単射，ψ が全射であることは同値である．この完全列を特に**短完全列 (short exact sequence)** という．

また，次の完全列；

$$M_1 \xrightarrow{\varphi} M_2 \xrightarrow{\psi} M_3 \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{\varphi} M_2 \xrightarrow{\psi} M_3$$

はそれぞれ（短）右完全列，左完全列という．

環 A 上の加群 M があったとき，$\mathrm{Hom}(M, M)$ は自然な A 加群としての構造の他に，合成を考えることで**非可換な**環としての構造を持つ．この非可換環を $\mathrm{End}(M)$ とかくことがある．とはいえ，本書では $\varphi \in \mathrm{Hom}(M, M)$ と任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して，$\varphi^n \in \mathrm{Hom}(M, M)$ が φ を n 回合成することで定まる，ということのみが大切なので，$\mathrm{End}(M)$ を実際に取り扱うことはない．

自己線型写像の累乗を考えることで，線型代数で習った Cayley–Hamilton の定理を加群に対して拡張できる（**行列式のトリック**とも呼ばれる）．

定理 *1.3.3*（Cayley–Hamilton）

M を n 個の元で生成される有限生成な A 加群とし，ある $\varphi \in \mathrm{Hom}(M, M)$ についてある A のイデアル I に対して $\varphi(M) \subset IM$ となっているとする．このとき，$a_1, \ldots, a_n \in I$ が存在して

$$\varphi^n + a_1\varphi^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

を満たす．

主張における a_n は，任意の $x \in M$ に対し $a_n x$ を対応させる線型写像であることを注意しておく．

証明.

M の生成系を $\{u_1, \ldots, u_n\}$ とすると，$\varphi(M) \subset IM$ より

$$\varphi(u_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} u_j \quad (a_{ij} \in I)$$

とできる．よって Kronecker のデルタ δ_{ij} を用いると $\sum_j (\delta_{ij}\varphi - a_{ij})u_j = 0$ である．行列 $(\delta_{ij}\varphi - a_{ij})_{i,\ j}$ に対し余因子行列をかけて，$\det(\delta_{ij}\varphi - a_{ij})$ は M の自己線型写像となるが，これはすべての u_i を消すので零射に

ほかならない．行列式を展開すれば求める式が得られる．（証明終）

これを利用して，**中山の補題**と呼ばれる強力な定理を証明できる．

定理 *1.3.4*（中山の補題）

M を有限生成 A 加群，I を A のイデアルとする．$M = IM$ であるとき，$aM = 0$ かつ $a \equiv 1 \pmod{I}$ を満たす $a \in A$ が存在する．とくに $I \subset \mathrm{rad}(A)$ ならば $M = 0$ である．

証明.

Cayley–Hamilton の定理で $\varphi = \mathrm{id}_M$ とすれば

$$a = 1 + a_1 + \ldots a_n$$

がそれを満たす．また $I \subset \mathrm{rad}(A)$ ならば，a は可逆なので $M = 0$ である．（証明終）

系 *1.3.5*

I を $\mathrm{rad}(A)$ に含まれるイデアルとする．A 加群 M と，その部分加群 N について M/N が有限生成かつ $M = N + IM$ であるとすると，$M = N$ である．

証明.

$M/N \cong I(M/N)$ より $M/N = 0$ である．（証明終）

$(A, \mathfrak{m})$ を局所環とする．剰余環 $k = A/\mathfrak{m}$ は体になり．A 加群 $\mathfrak{m}$ について $M/\mathfrak{m}M$ は自然な演算で k 加群になる．M が有限生成 A 加群なら中山の補題を使うことで次が言える．

命題 *1.3.6*

$(A, \mathfrak{m}, k)$ を局所環とし，M を有限生成 A 加群とする．$\dim_k M/\mathfrak{m}M = r$ ならば M は r 個の元で生成される．

証明.

$x_1, \ldots, x_r \in M$ を $M/\mathfrak{m}M$ での像が k 線型空間としての基底になる元とする．ここで $x_1, \ldots, x_r$ が生成する A 加群を N とおくと，N は M の部分加群であって $N + \mathfrak{m}M = M$ が成り立つ．よって中山の補題より $N = M$ である．（証明終）

この節の最後に，中山の補題を無思考に適用しようとすると危険だ，という例を紹介しておこう．

例 1.3.7

A を環，a を零因子でない元とする．A 加群として $A \cong aA$ であるので，中山の補題からある $r \in A$ で $r - 1 \in (a)$，$rA = 0$ となるものが存在する．$rA = 0$ より $r = 0$ であり，$-1 \in (a)$ となるので a は可逆である．これは明らかに矛盾を生む．例えば $A = \mathbb{Z}, a = 2$ とせよ．

このように，集合論的には $A \neq aA$ であるのに，加群の同型だけで中山の補題を適用できると考えると思わぬ穴を生むことになるので，注意が必要である．

§ 4　普遍性

さて，自然に付随する線型写像とはどういうものかを説明しよう．まず A 加群 M とその部分加群 N について，剰余加群 M/N を考えよう．このとき，次が成り立つ．

命題 *1.4.1*（剰余加群の普遍性）

自然な全射 $\pi : M \to M/N$ と，包含 $\iota : N \to M$ が存在する．このとき，任意の A 加群 L について，線型写像 $\psi : M \to L$ で $N \subset \ker\psi$ となるものに対し，$f : M/N \to L$ で $f \circ \pi = \psi$ となるものが**一意的に**存在する．

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, "\iota"] \arrow[rr, bend left, "0"] & M \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\pi"] & L \\ & M/N \arrow[ur, dashed, "f"'] & \end{tikzcd}$$

Figure.1　剰余加群の普遍性

このように，自然な線型写像 π について，ある条件を満たした線型写像（この例では ψ）に対して可換になるような f **が一意に存在する**という性質を**普遍性 (universality)** という．以後紹介していくテンソル積や極限といった概念では，普遍性が重要な働きをする．それどころか圏論では普遍性に完全に依存した議論をすることも珍しくない．具体的には線型写像（射）の一意性が大切である．そこに着目した上で，**ある概念の普遍性を満たすものをそれ自身と定義する**という特徴づけを考える．具体的に説明しよう．ある対象が普遍性を持つことがわかっている（あるいは持ってほしい）場合は，次のように定義するのである．

定義 *1.4.2*（普遍性による剰余加群の定義）

A 加群 M とその部分加群 N に対して，ある A 加群 K と $\pi : M \to K$ で $N \subset \ker\pi$ となるものが存在して，任意の A 加群 L と線型写像 $\psi : M \to L$ で $N \subset \ker\psi$ となるものについて $f : K \to L$ で $f \circ \pi = \psi$ を満たすものが一意に存在するとき，(K, π) を M の N による**剰余加群**といい，M/N とかく．

普遍性から K は（同型を除いて）一意的に定まることが保証されるので，実際に普遍性をみたす $M/N = \{x + N \mid x \in M\}$ という加群で K を表すことが正当化されている．一意に定まることを見よう．剰余加群の普遍性を満たす K, K' を考える．次の図式のように，それぞれの普遍性から $f : M \to K', f' : M \to K$ が存在する（ι と合成すると 0 になることを表す 0 は省略した）；

$$\begin{tikzcd} & K & \\ N \arrow[r] & M \arrow[u, "\varphi"] \arrow[d, "\varphi"] \arrow[r, "\varphi'"] & K' \arrow[ul, dashed, "f'"'] \\ & K \arrow[uu, bend left=60, "\mathrm{id}_K"] \arrow[ur, dashed, "f"'] & \end{tikzcd}$$

このとき，$f' \circ f = \mathrm{id}_K$ となり，**線型写像の一意性から** $f' \circ f = \mathrm{id}_K$ となる．同様に $f \circ f' = \mathrm{id}_{K'}$ が確かめられ，f, f' によって K と K' は同型である．

この議論の本質は，線型写像の一意性から普遍性で得られる線型写像の合成と恒等写像が等しくなる、というところにある．よって，まったく同様の証明で普遍性を持つ対象は必ず（同型を除いて）一意に定まることがわかる．このようにある概念を普遍性を満たすもの，と定義して実際にこの加群（対象）が普遍性を満たす，という主張をすることで well-defined に定義を行うことができる．

定義 1.2.1 で定義した直積，直和についても普遍性を用いた定義が可能である．

定義 *1.4.3*（普遍性を用いた直積の定義）

A 加群の族 $\{M_\lambda\}$ について，ある加群 L と線型写像の族 $p_\lambda : L \to M_\lambda$ が存在して，任意の A 加群 N と線型写像の族 $f_\lambda : N \to M_\lambda$ に対し，$f : N \to L$ で $p_\lambda \circ f = f_\lambda$ となるものが一意的に存在するとき，(L, p_λ) を $\{M_\lambda\}$ の**直積**といい，$\prod_\lambda M_\lambda$ とかく．

定義 *1.4.4*（普遍性を用いた直和の定義）

A 加群の族 $\{M_\lambda\}$ について，ある加群 L と線型写像の族 $\iota_\lambda : M_\lambda \to L$ が存在して，任意の A 加群 N と線型写像の族 $f_\lambda : M_\lambda \to N$ に対し，$f : L \to N$ で $f \circ \iota_\lambda = f_\lambda$ となるものが一意的に存在するとき，(L, ι_λ) を $\{M_\lambda\}$ の**直和**といい，$\bigoplus_\lambda M_\lambda$ とかく．

$$
\begin{tikzcd}
 & \prod M_\lambda \arrow[dr, "p_\lambda"] & \\
N \arrow[ur, dashed, "f"] \arrow[rr, "f_\lambda"'] & & M_\lambda
\end{tikzcd}
$$

Figure.2　直積の普遍性

$$
\begin{tikzcd}
 & \bigoplus M_\lambda \arrow[dr, dashed, "f"] & \\
M_\lambda \arrow[ur, "\iota_\lambda"] \arrow[rr, "f_\lambda"'] & & N
\end{tikzcd}
$$

Figure.3　直和の普遍性

誤解の恐れがない限り添字が省略されることはいつもと同じである．また p_λ は**標準的射影**，ι_λ は**標準的単射**と呼ばれる．

問 1.

定義 1.2.1 で定義された加群たちがそれぞれ直積，直和の普遍性を満たすことを確認せよ．また，普遍性の標準的な結果から同型を除いて一意的に定まることも確かめよ．

早速次節では普遍性を使って**テンソル積**を定義していこう．

§ 5　テンソル積

ここから３つの節に渡って**テンソル積 (tensor product)**, **局所化 (localization)**, **射影加群 (projective module)** を定義する．これらは可換環論全体において使われるものであるが，局所化以外は定義から計算することも大変でとっつきにくいかもしれない．何度もここに帰ってくるつもりで，具体的に使われているところに触れながら慣れていってほしい．

定義 *1.5.1*（双線型写像）

M, N, L を A 加群とする．$x_1, x_2 \in M, y_1, y_2 \in N, a \in A$ とする．写像 $\varphi : M \times N \to L$ が次の 3 つ；

(BM1) $\varphi(x_1 + x_2, y) = \varphi(x_1, y) + \varphi(x_2, y)$
(BM2) $\varphi(x, y_1 + y_2) = \varphi(x, y_1) + \varphi(x, y_2)$
(BM3) $\varphi(ax, y) = \varphi(x, ay) = a\varphi(x, y)$

を満たすとき，φ を A **双線型写像 (biliner map)** という．

双線型写像 $M \times N \to L$ の全体を $\mathrm{Bil}_A(M \times N, L)$ で表すとすると，ある A 加群 T と $\tau \in \mathrm{Bil}_A(M \times N, T)$ が存在して $\mathrm{Hom}_A(T, L) \to \mathrm{Bil}_A(M \times N, L); f \mapsto f \circ \tau$ を同型となるようにできることが知られている．この T と τ を，N と M の A 上の**テンソル積**という．

定義 *1.5.2*（テンソル積）

M，N を A 加群とする．ある A 加群 T と $\tau \in \mathrm{Bil}_A(M \times N, T)$ が存在して，任意の A 加群 L と $\varphi \in \mathrm{Bil}_A(M \times N, L)$ に対して $f \circ \tau = \varphi$ となる f が一意的に存在する．(T, τ) を $M \otimes_A N$ とかき，M, N の A 上の**テンソル積 (tonsor product)** という．

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\tau"] & L \\ M \otimes_A N \arrow[ur, dashed, "f"'] & \end{tikzcd}$$

Figure.4　テンソル積の普遍性

圏論の言葉を使うと，テンソル積 $M \otimes N$ とは，関手 $\mathrm{Bil}_A(M \times N, -)$ を表現する対象，すなわち関手の同型 $\mathrm{Bil}_A(M \times N, -) \cong \mathrm{Hom}_A(M, -)$ を与えるものにほかならない．

テンソル積の存在証明．

直積 $M \times N$ が生成する自由 A 加群；

$$\mathcal{T} = \langle (x, y) \mid (x, y) \in M \times N \rangle = \left\{ \sum_{\text{有限和}} a_i(x_i, y_i) \;\middle|\; a_i \in A, (x_i, y_i) \in M \times N \right\}$$

を考える．また $\mathcal{T}$ の部分加群；

$$\begin{aligned} \mathcal{I} = \langle (x_1 + x_2, y) - (x_1, y) - (x_2, y), (x, y_1 + y_2) - (x, y_1) - (x, y_2), \\ (ax, y) - a(x, y), (x, ay) - a(x, y) \mid a \in A, x, x_1, x_2 \in M, y, y_1, y_2 \in N \rangle \end{aligned}$$

を考えると，$\mathcal{T}/\mathcal{I}$ が $\tau : M \times N \to \mathcal{T}/\mathcal{I}; (x, y) \mapsto (x, y) + \mathcal{I}$ によりテンソル積となる．実際，$\varphi : M \times N \to L$ に対し；

$$\widetilde{\varphi} : \mathcal{T} \to L; \sum a_i(x_i, y_i) \mapsto \sum a_i \varphi(x_i, y_i)$$

を考えると，φ の双線型性より $\mathcal{I} \subset \ker \widetilde{\varphi}$ がわかる．よって；

$$\mathcal{T}/\mathcal{I} \to \mathcal{T}/\ker \widetilde{\varphi}; (x, y) + \mathcal{I} \mapsto (x, y) + \ker \widetilde{\varphi}$$

が well-defined であることがわかるので，同型 $\mathcal{T}/\ker \widetilde{\varphi} \to L$ と合成して，線型写像；

$$f : \mathcal{T}/\mathcal{I} \to L; (x, y) + \mathcal{I} \mapsto \varphi(x, y)$$

を得る．これは τ の全射性から一意に定まる．

同型を除いて一意であることは普遍性の標準的な結果である．

（証明終）

$x \in M, y \in N$ に対し $\tau(x, y) = x \otimes y$ ともかき，これを**元のテンソル積**という．テンソル積 $M \otimes_A N$ は $x \otimes y$ を生成元とし；

$$(x_1 + x_2) \otimes y = x_1 \otimes y + x_2 \otimes y$$

$$x \otimes (y_1 + y_2) = x \otimes y_1 + x \otimes y_2$$

$$(ax) \otimes y = x \otimes (ay) = a(x \otimes y)$$

を満たす A 加群と解釈できる．また，ここから任意の $M \otimes N$ の元は $x \otimes y$ $(x \in M, y \in N)$ の有限和でかけることもわかる．

これらのことが頭に入っていれば，煩雑な構成の証明は忘れても構わないが，いくつかの注意が必要である．ここで，$x \otimes y$ という表示はどの加群のテンソル積かを決定しないと意味がないことに注意しておこう．例えば $\mathbb{Z}$ 加群で考えると $\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ において $2 \otimes \overline{1} = 1 \otimes \overline{2} = 1 \otimes \overline{0} = 0$ だが，$\mathbb{Z}$ の部分加群 $2\mathbb{Z}$ を考えると $2\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ において $2 \otimes \overline{1} \neq 0$ である．

しかし，次の事実はテンソル積の構成から即座に従うもので，有用である．

命題 *1.5.3*

A 加群 M, N について，$0 = \sum(x_i \otimes y_i) \in M \otimes N$ とする．このとき，それぞれ有限生成な部分 A 加群 M_0, N_0 が存在して，$M_0 \otimes N_0$ において $\sum(x_i \otimes y_i) = 0$ である．

証明.

テンソル積の構成の証明中の記号を用いる．$\sum(x_i \otimes y_i) \in \mathcal{I}$ なので，これは $\mathcal{I}$ の生成系の有限和である．それらの各項を $x_j \otimes y_j$ とし，x_i, x_j で生成される M の有限生成部分加群を M_0 とし，y_i, y_j で生成される N の部分加群を N_0 とすればよい．（証明終）

次に線型写像のテンソルについて定義しておく．

命題 *1.5.4*

$f \in \mathrm{Hom}(M, M')$ と $g \in \mathrm{Hom}(N, N')$ に対し，線型写像 $f \otimes g : M \otimes N \to M' \otimes N'$ で，$(f \otimes g)(x \otimes y) = f(x) \otimes g(x)$ を満たすものが一意的に存在する．

証明.

直積の間の線型写像 $f \times g : M \times N \to M' \times N'$ と $\tau' : M' \times N' \to M' \otimes N'$ の合成 $(x, y) \mapsto f(x) \otimes g(x)$ に対し，$M \otimes N$ の普遍性から $(f \otimes g) \circ \tau = \tau' \circ (f \times g)$ となる $f \otimes g$ が一意に定まる．このとき，$f \otimes g : x \otimes y \mapsto f(x) \otimes g(x)$ であるから，$f \otimes g$ は求める線型写像であり，一意性は普遍性から従う．（証明終）

これは $f \times g : M \times N \to M' \times N'; (x, y) \mapsto (f(x), g(x))$ をテンソル積に誘導したものにほかならない．

複数個のテンソル積についても，**多重線型性**を定義することで普遍性などが同様に成り立つが，これは他書（Bourbaki (1970–1975) など）に譲ることにする．テンソル積を演算と見ると次が基本的である．

命題 *1.5.5*

テンソル積は可換なモノイドをなす．つまり次の 3 つが成り立つ．

$$A \otimes M \cong M, M \otimes N \cong N \otimes M, (M \otimes N) \otimes L \cong M \otimes (N \otimes L)$$

また，テンソル積は直和と可換である．すなわち；

$$\left(\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda\right) \otimes N \cong \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} (M_\lambda \otimes N)$$

である．

証明.

Step 1. モノイドをなすこと．

(i) $A \otimes M \to M; a \otimes x \mapsto ax$ と，$M \to A \otimes M; x \mapsto 1 \otimes x$ が互いに逆の関係となる．

(ii) $\varphi : M \times N \to N \otimes M; (x, y) \mapsto y \otimes x$ に対し，$f : M \otimes N \to N \otimes M; x \otimes y \mapsto y \otimes x$ がとれる．同様に $\psi : N \times M \to M \otimes N; (y, x) \mapsto x \otimes y$ に対して $g : N \otimes M \to M \otimes N; y \otimes x \mapsto x \otimes y$ とでき，これが f の逆となる．

(iii) 各 $\mathrm{z} \in L$ について，$\varphi_\mathrm{z} : M \times N \to M \otimes (N \otimes L); (x, y) \mapsto x \otimes (y \otimes \mathrm{z})$ と定義することで，普遍性から $f_\mathrm{z} : M \otimes N \to M \otimes (N \otimes L); x \otimes y \mapsto x \otimes (y \otimes \mathrm{z})$ が定まる．これを用いて，双線型写像 $\psi : (M \otimes N) \times L \to M \otimes (N \otimes L); (x \otimes y, \mathrm{z}) \mapsto f_z(x \otimes y)$ が定義できる．これをさらにテンソル積に落とすことで；

$$f : (x \otimes y) \otimes \mathrm{z} \mapsto x \otimes (y \otimes \mathrm{z})$$

とできる．同様に；

$$g : x \otimes (y \otimes \mathrm{z}) \mapsto (x \otimes y) \otimes \mathrm{z}$$

がとれて，f と g は逆の関係である．

Step 2. 直和と可換であること．

$$\varphi : \left(\bigoplus_{\lambda} M_\lambda\right) \times N \to \bigoplus_{\lambda} (M_\lambda \otimes N); ((x_\lambda)_\lambda, y) \mapsto (x_\lambda \otimes y)_\lambda$$

に対し，テンソル積の普遍性から；

$$f : \left(\bigoplus_{\lambda} M_\lambda\right) \otimes N \to \bigoplus_{\lambda} (M_\lambda \otimes N); (x_\lambda)_\lambda \otimes y \mapsto (x_\lambda \otimes y)_\lambda$$

が存在する．

逆に，任意の $\lambda' \in \Lambda$ に対し；

$$\psi'_\lambda : M'_\lambda \times N \to \left(\bigoplus_{\lambda} M_\lambda\right) \otimes N; (x'_\lambda, y) \mapsto (\tilde{x}_\lambda)_\lambda \otimes y$$

を，$\lambda = \lambda'$ のとき $\tilde{x}_\lambda = x'_\lambda, \lambda \neq \lambda'$ のとき $\tilde{x}_\lambda = 0$ として定める．テンソル積の普遍性から；

$$g'_\lambda : M'_\lambda \otimes N \to \left(\bigoplus_{\lambda} M_\lambda\right) \otimes N; x'_\lambda \otimes y \mapsto (\tilde{x}_\lambda)_\lambda \otimes y$$

がとれて，直和の普遍性から；

$$g : \bigoplus_\lambda M_\lambda \otimes N \to \left(\bigoplus_\lambda M_\lambda\right) \otimes N; (x_\lambda \otimes y)_\lambda \to (x_\lambda)_\lambda \otimes y$$

とできる．作り方から f と g は逆の関係である．

（証明終）

ある加群からある加群を作り出す “操作”（圏論では**関手 (functor)** 的であるという）があるときには，完全列にどのような影響を与えるかをみることは常套手段である．

命題 *1.5.6*（テンソル積の右完全性）

A 加群の完全列；

$$M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3 \longrightarrow 0$$

に対し，任意の A 加群 N は；

$$M_1 \otimes N \xrightarrow{f \otimes \mathrm{id}_N} M_2 \otimes N \xrightarrow{g \otimes \mathrm{id}_N} M_3 \otimes N \longrightarrow 0$$

を完全にする．

証明.

$g \otimes \mathrm{id}_N$ の全射性は明らか．$\mathrm{Im}(f \otimes \mathrm{id}_N) = \ker(g \otimes \mathrm{id}_N)$ を示そう．$\subset$ は明らかなので $\supset$ を示す．任意の $\sum_i x_i \otimes y_i \in \ker(g \otimes \mathrm{id}_N)$ をとる．$M_3 \cong M_2/f(M_1)$ より

$$\varphi : M_3 \times N \to (M_2 \otimes N)/(f(M_1) \otimes N); (g(x), y) \mapsto x \otimes y + f(M_1) \otimes N$$

は well-defined である．実際 $g(x) = g(x')$ とすると $x - x' \in \ker g = \mathrm{Im}\, f$ より $x \otimes y \in f(M_1) \otimes N$ となる．よって，φ は普遍性から；

$$h : M_3 \otimes N \to (M_2 \otimes N)/(f(M_1) \otimes N)$$

を引き起こす．さて $g \otimes \mathrm{id}_N(\sum x_i \otimes y_i) = \sum g(x_i) \otimes y_i = 0$ より $0 = h(\sum g(x_i) \otimes y_i) = \sum \varphi(g(x_i), y_i) = \sum x_i \otimes y_i + f(M_1) \otimes N$ であるので，$\sum x_i \otimes y_i \in \mathrm{Im}(f \otimes \mathrm{id}_N)$ である．（証明終）

もちろん短完全列に対してこの命題を適用すると，右完全列が得られる．この状況は，圏論的には関手 $- \otimes N$ は右完全である，ということになる．これが完全関手になるような N のことを平坦であるという．

定義 *1.5.7*（平坦加群）

任意の短完全列；

$$0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_2 \longrightarrow M_3 \longrightarrow 0$$

に対して；

$$0 \longrightarrow M_1 \otimes N \longrightarrow M_2 \otimes N \longrightarrow M_3 \otimes N \longrightarrow 0$$

が完全であるとき，N を**平坦 (flat)** な加群であるという．

これは単射な $\eta : M_1 \to M_2$ に対して，$\eta \otimes \mathrm{id}_N$ もまた単射になることと同値である．平坦性を確かめるには，実は有限生成な加群についてのみ確かめればよい．

命題 *1.5.8*

A 加群 N が平坦であることと，$f: M_1 \to M_2$ が単射で M_1, M_2 が有限生成ならば $f \otimes \mathrm{id}$ が単射になることは同値である．

証明.

前者から後者が従うことは明らかである．M_1, M_2 を（有限生成とは限らない）A 加群とし，単射 $f: M_1 \to M_2$ を考える．$u = \sum_{i=1}^{s} x_i \otimes y_i \in \ker(f \otimes \mathrm{id})$ をとる．$u = 0$ を示せばよい．M_1' を $x_1, \ldots, x_s$ によって生成される M_1 の部分加群とする．u' を $M_1' \otimes N$ における $\sum x_i \otimes y_i$ を表すものとする．ここで $0 = \sum f(x_i) \otimes y_i \in M_2 \otimes N$ であり，命題 1.5.3 により有限生成部分加群 M_2' が存在して，$M_2' \otimes N$ において $\sum f(x_i) \otimes y_i = 0$ である．また，M_1' の構成から $f(M_1') \subset M_2'$ である．すると，f の M_1' への制限 $f': M_1' \to M_2'$ が定義され，先の議論からこの記号のもとで $f' \otimes \mathrm{id}(u') = 0$ である．仮定から $f' \otimes \mathrm{id}$ は単射なので $u' = 0$ であり，これは $u = 0$ を導く．（証明終）

実際の平坦な加群の例は，次節以降紹介する**局所化**や**射影加群**が与える．この節の最後に**忠実平坦性**について説明しておこう．

定義 *1.5.9*（忠実平坦）

A を環とし，M を A 加群とする．任意の A 線型写像 $f: M_1 \to M_2$ について，f が単射であることと $f \otimes \mathrm{id}_M: M_1 \otimes M \to M_2 \otimes M$ が単射であることが同値であるとき，M は**忠実平坦 (faithfully flat)** であるという．

明らかに忠実平坦ならば平坦である．忠実平坦性の言い換えを証明しておこう．

命題 *1.5.10*

A を環とし，M を A 加群とする．このとき，以下の条件；

(i) M は忠実平坦である．
(ii) M は平坦で，任意の $\mathfrak{m} \in \mathrm{Spm}\, A$ について $M \neq \mathfrak{m}M$ である．
(iii) M は平坦で，任意の A 加群 N について $N \otimes M = 0$ ならば $N = 0$ である．

は同値である．

証明.

(i) $\Longrightarrow$ (ii)

$M = \mathfrak{m}M$ であるとすると，$M/\mathfrak{m}M = (A/\mathfrak{m}) \otimes M = 0$ であるので，$(A/\mathfrak{m}) \otimes M \to 0$ が単射なので $A/\mathfrak{m} \to 0$ が単射となって $A/\mathfrak{m} = 0$ となり矛盾する．

(ii) $\Longrightarrow$ (iii)

N を 0 でない A 加群とする．ある $x \neq 0 \in N$ と $\mathrm{Ann}\, x \subset \mathfrak{m}$ なる $\mathfrak{m} \in \mathrm{Spm}\, A$ をとる．このとき $(\mathrm{Ann}\, x)M \subset \mathfrak{m}M \neq M$ であるから；

$$Ax \otimes M \cong (A/\mathrm{Ann}\, x) \otimes M \cong M/(\mathrm{Ann}\, x)M \neq 0$$

である．ここで $Ax \subset N$ だから単射 $Ax \otimes M \to N \otimes M$ があり，$N \otimes M \neq 0$ である．

(iii) $\Longrightarrow$ (i)

$f: M_1 \to M_2$ について $f \otimes \mathrm{id}: M_1 \otimes M \to M_2 \otimes M$ が単射であるとする．このとき $K = \ker f, C = \operatorname{Coker} f$ とおいたとき；

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow M_1 \xrightarrow{f} M_2 \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

が完全で，M が平坦なので；

$$0 \longrightarrow K \otimes M \longrightarrow M_1 \otimes M \xrightarrow{f \otimes \mathrm{id}} M_2 \otimes M \longrightarrow C \otimes M \longrightarrow 0$$

が完全である．ここで $f \otimes \mathrm{id}$ が単射だから $K \otimes M = 0$ であって，仮定から $K = 0$ である．よって f は単射．

（証明終）

§ 6　局所化と素イデアル

この節では局所化について説明する．“局所” 化といっても必ずしも局所環を作るものではなく，その名前は幾何学に由来する（本章の § 8 もみよ）．

定義 *1.6.1*（積閉集合）

環 A の部分集合 S について $1 \in S, x, y \in S$ ならば $xy \in S$ が成り立つとき，S は**積閉 (multiplicatively closed)** であるという．

定義 *1.6.2*（局所化）

A を環とし，S を A の積閉な部分集合とする．S の元を分母に許すような環 $S^{-1}A$ を，A の S による**局所化 (localization)** または**分数環 (fractional ring)** という．

$S^{-1}A$ の正確な定義を与えておこう．直積 $A \times S$ に次の関係を入れる．

$$(a, s) \sim (a', s') \Longleftrightarrow t(sa' - s'a) = 0 \text{ となる } t \in S \text{ が存在する．}$$

これによる同値類を a/s とかき，その集合に自然な加法と乗法を定めたものを $S^{-1}A$ とかく．写像 $\varphi: A \to S^{-1}A; a \mapsto a/1$ により，$S^{-1}A$ には自然な A 代数としての構造が入る．また；

$$\ker \varphi = \left\{ a \in A \;\middle|\; sa = 0 \text{ となる } s \in S \text{ がある} \right\}$$

であるから，S が零因子を持たなければ φ が単射となり，A を $S^{-1}A$ に埋め込める．

定義 *1.6.3*（全商環）

S を A の非零因子全体の集合とすると，上の φ は単射であって，$S^{-1}A$ を A の**全商環 (total fractional ring)** という．

A が整域のとき，これは商体にほかならない．

命題 *1.6.4*（分数環の普遍性）

S を A の積閉集合とする．このとき $f: A \to B$ で $f(S) \subset B^{\times}$ となる A 代数 B に対し，線型写像 $g: S^{-1}A \to B$ で $g \circ \varphi = f$ となるものが同型を除いて一意的に存在する．

証明.

$g : S^{-1}A \to B; a/s \mapsto f(a)f(s)^{-1}$ により与えられる．　（証明終）

次の命題は実際の計算によく用いられる．一般に環準同型 $\varphi : A \to B$ と $P \in \operatorname{Spec} B$ について $\varphi^{-1}(P) \in \operatorname{Spec} A$ であったことを思い出そう．

命題 *1.6.5*

S を環 A の積閉集合とする．$S^{-1}A$ の素イデアルは $P \cap S = \emptyset$ となる $P \in \operatorname{Spec} A$ と 1 対 1 に対応する．特に，$S^{-1}A$ の素イデアルは；

$$S^{-1}P = \{a/s \mid a \in P, s \in S\}$$

という形をしている．

証明.

$P \in \operatorname{Spec} A$ について，$P \cap S = \emptyset$ ならば $S^{-1}P$ は $S^{-1}A$ の素イデアルとなる．逆に $P' \in \operatorname{Spec} S^{-1}A$ に対して，$P = \{a \in A \mid a/1 \in P'\}$ とおくと $P \in \operatorname{Spec} A$ であって，$P \cap S = \emptyset$ である．このとき $S^{-1}P = P'$ となるから，この操作によって主張にある 1 対 1 対応がわかる．　（証明終）

定義 *1.6.6*

$P \in \operatorname{Spec} A$ に対し，$S = A \setminus P$ は素イデアルの定義から積閉で，これによる局所化を A_P とかいて A の P による局所化という．

局所化という名前の通り A_P は局所環である（命題 0.2.8 を用いる）．しかしながら一般の積閉集合 S による局所化は局所環になるとは限らないことに注意しなければならない．例えば局所環にならないが重要な例として，元による局所化がある．

定義 *1.6.7*

$f \in A$ に対し，$S = \{f^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ は積閉集合である．ただし $f^0 = 1$ と定義する．このとき，$S^{-1}A$ を A_f と書いて A の f による局所化という．

いままでは環の局所化を考えていたが，全く同様の定義で A 加群 M について，A の積閉集合による局所化 $S^{-1}M$（これは $S^{-1}A$ 加群になる）を考えることができる．また，A 線型写像 $\varphi : M \to N$ について，次の $S^{-1}A$ 線型写像；

$$S^{-1}\varphi : S^{-1}M \to S^{-1}N; x/s \mapsto \varphi(x)/s$$

が誘導されることに注意しよう．よって，加群の列；

$$M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3$$

について，誘導された列；

$$S^{-1}(M_1) \xrightarrow{S^{-1}f} S^{-1}M_2 \xrightarrow{S^{-1}g} S^{-1}M_3$$

が得られる．ここでこの操作によって完全性が保たれる（すなわち完全関手になっている）ことが大切である．

命題 *1.6.8*

$M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3$ が完全ならば，$S^{-1}M_1 \xrightarrow{S^{-1}f} S^{-1}M_2 \xrightarrow{S^{-1}g} S^{-1}M_3$ も完全である．

証明.

$\operatorname{Im} S^{-1}f \subset \ker S^{-1}g$ は明らかなので，逆を示す．任意の $x/s \in \ker S^{-1}g$ をとる．よって $g(x)/s = 0$ であるので，ある $h \in S$ が存在して $hg(x) = 0$ である．よって $hx \in \ker g = \operatorname{Im} f$ であるから，ある $y \in M_1$ がとれて $f(y) = hx$ とかける．すると $S^{-1}(y/hs) = hx/hs = x/s$ となる．（証明終）

また，局所化は平坦な加群の例を与える（自然な $A \to S^{-1}A$ により $S^{-1}A$ を A 加群と見ている）．

命題 *1.6.9*

$S^{-1}A$ は A 上平坦である．特に $S^{-1}A \otimes_A M \cong S^{-1}M$ である．

証明.

命題 1.6.8 より $S^{-1}A \otimes M \cong S^{-1}M$ を示せばよいが，

$$f : S^{-1}A \otimes M \to S^{-1}M; a/s \otimes x \mapsto ax/s, \quad g : S^{-1}M \to S^{-1}M \otimes A; x/s \mapsto 1/s \otimes x$$

が互いに逆写像となる．（証明終）

これにより局所化はテンソル積の特別な場合とみなせる．

命題 *1.6.10*

局所化は直和，共通部分，剰余環，根基をとる操作と可換である．すなわち；

(i) $S^{-1}(\bigoplus M_\lambda) = \bigoplus S^{-1}(M_\lambda)$
(ii) $S^{-1}(M \cap N) = S^{-1}(M) \cap S^{-1}(N)$
(iii) $S^{-1}(M/N) \cong (S^{-1}M)/(S^{-1}N)$
(iv) $S^{-1}(\sqrt{M}) = \sqrt{S^{-1}M}$
(v) M が有限生成ならば $S^{-1}(\operatorname{Ann} M) = \operatorname{Ann}(S^{-1}M)$ が成り立つ．

が成り立つ．

証明.

(i) から (iv) は簡単であり，(v) については M の生成元の個数 n についての帰納法を用いる．（証明終）

系 *1.6.11*

N，L を A 加群 M の部分加群で L が有限生成であるとすると，積閉集合 S について $S^{-1}(N : L) = (S^{-1}N : S^{-1}L)$ が成り立つ．

証明.

命題 1.1.9 より $(N : L) = \operatorname{Ann}((N + L)/N)$ であって，$S^{-1}(N : L) = \operatorname{Ann}((S^{-1}N + S^{-1}L)/S^{-1}N) = (S^{-1}N : S^{-1}L)$ である．（証明終）

ところで，位相的性質，すなわち同相で変化しない性質のように（特に素イデアルによる）局所化で変化しないものを**局所的性質 (local properties)** という．その例をいくつか見ておこう．

命題 *1.6.12*

M を A 加群とすると，次の 3 つ；

(i) $M = 0$ である．
(ii) 任意の $P \in \operatorname{Spec} A$ について，$M_P = 0$ である．
(iii) 任意の A の極大イデアル $\mathfrak{m}$ について，$M_{\mathfrak{m}} = 0$ である．

は同値である．

証明.

(i) $\Longrightarrow$ (ii) $\Longrightarrow$ (iii) は明らか．$M \neq 0$ と仮定する．任意の $0 \neq x \in M$ をとる．$\operatorname{Ann} x$ は真のイデアルであり，$\operatorname{Ann} x$ を含む A の極大イデアル $\mathfrak{m}$ がとれる．このとき $M_{\mathfrak{m}} = 0$ であるので $x/1 \in M_{\mathfrak{m}} = 0$ である．すると，ある $h \notin \mathfrak{m}$ が存在して $hx = 0$ である．これは $\operatorname{Ann} x$ が $\mathfrak{m}$ に含まれることに矛盾．（証明終）

命題 *1.6.13*

$\varphi : M \to N$ を A 線型写像とする．このとき；

(i) φ は単射である．
(ii) 任意の $P \in \operatorname{Spec} A$ について，$\varphi_P : M_P \to N_P$ は単射である．
(iii) 任意の A の極大イデアル $\mathfrak{m}$ について，$\varphi_{\mathfrak{m}} : M_{\mathfrak{m}} \to N_{\mathfrak{m}}$ は単射である．

これは単射を全射に言い換えても成り立つ．

証明.

局所化は平坦であることから (i) $\Longrightarrow$ (ii) が従う．(ii) $\Longrightarrow$ (iii) は明らか．(iii) を仮定する．完全列；

$$0 \longrightarrow \ker\varphi \longrightarrow M \xrightarrow{\varphi} N$$

に対して，任意の極大イデアル $\mathfrak{m}$ について；

$$0 \longrightarrow (\ker\varphi)_{\mathfrak{m}} \longrightarrow M_{\mathfrak{m}} \xrightarrow{\varphi_{\mathfrak{m}}} N_{\mathfrak{m}}$$

は完全．ここで $(\ker\varphi)_{\mathfrak{m}} = \ker\varphi_{\mathfrak{m}} = 0$ であるので，命題 1.6.12 より $\ker\varphi = 0$ すなわち φ は単射である．（証明終）

§ 7　射影加群と入射加群

この節では，**射影加群**とその双対概念である**入射加群**について定義する．射影加群とは自由加群に近い加群であり，またこれらは**ホモロジー代数**を扱うために必要である．

さて，線型写像 $\varphi : N_1 \to N_2$ があったとする．この線型写像は Hom 加群の間の線型写像；

$$\varphi_* : \operatorname{Hom}_A(M, N_1) \to \operatorname{Hom}_A(M, N_2); f \mapsto \varphi \circ f$$

$$\varphi^* : \mathrm{Hom}_A(N_2, M) \to \mathrm{Hom}_A(N_1, M); f \mapsto f \circ \varphi$$

を引き起こす．それぞれ次のような状況である．

$$\begin{tikzcd} M \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, dashed, "\varphi_*(f)=\varphi\circ f"] & \\ N_1 \arrow[r, "\varphi"] & N_2 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & M \\ N_1 \arrow[ur, dashed, "\varphi^*(f)=f\circ\varphi"] \arrow[r, "\varphi"] & N_2 \arrow[u, "f"'] \end{tikzcd}$$

下付きの $*$ は写像の合成について共変的であることを，上付きのものは反変的であることを意味している．すなわち，加群の列；

$$M_1 \xrightarrow{\varphi} M_2 \xrightarrow{\psi} M_3$$

について，下付きの $*$ を考えると；

$$\mathrm{Hom}_A(N, M_1) \xrightarrow{\varphi_*} \mathrm{Hom}_A(N, M_2) \xrightarrow{\psi_*} \mathrm{Hom}_A(N, M_3)$$

が得られ，上付きを考えると；

$$\mathrm{Hom}_A(M_3, N) \xrightarrow{\psi^*} \mathrm{Hom}_A(M_2, N) \xrightarrow{\varphi^*} \mathrm{Hom}_A(M_1, N)$$

が得られる．

これは圏の言葉を用いれば $\mathrm{Hom}(N, -)$ は共変関手，$\mathrm{Hom}(-, N)$ は反変関手であると表現できる．これらは左完全になることが知られている．

命題 *1.7.1*

A 加群の完全列；

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{\varphi} M_2 \xrightarrow{\psi} M_3 \longrightarrow 0$$

と，任意の A 加群 N に対して；

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(N, M_1) \xrightarrow{\varphi_*} \mathrm{Hom}_A(N, M_2) \xrightarrow{\psi_*} \mathrm{Hom}_A(N, M_3)$$

は完全である．

同様に；

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M_3, N) \xrightarrow{\psi^*} \mathrm{Hom}_A(M_2, N) \xrightarrow{\varphi^*} \mathrm{Hom}_A(M_1, N)$$

も完全である．証明はほぼ同じであるから，前者のみ示す．

証明.

まず，φ_* が単射であることを確かめよう．$\varphi \circ g = \varphi \circ g'$ とする．任意の $x \in N$ に対し $\varphi(g(x)) = \varphi(g'(x))$ となり，φ が単射なので $g(x) = g'(x)$ すなわち $g = g'$ である．

さて，$\mathrm{Im}\,\varphi_* = \ker\psi_*$ を示せばよい．任意の $f \in \mathrm{Im}\,\varphi_*$ を 1 つとる．ある $g \in \mathrm{Hom}_A(N, M_1)$ が存在して $f = \varphi \circ g$ とかけるので，$\psi_*(f) = \psi \circ \varphi \circ g$ であり，$\mathrm{Im}\,\varphi = \ker\psi$ だからこれは消える．よって $f \in \ker\psi_*$ である．逆に任意の $f \in \ker\psi_*$ を 1 つとる．$\psi \circ f = 0$ だから任意の $x \in N$ に対し $f(x) \in \ker\psi = \mathrm{Im}\,\varphi$ となり，φ が単射だから $f(x) = \varphi(y_x)$ となる $y_x \in M_1$ が一意に定まる．ゆえに $g : N \to M_1; x \mapsto y_x$ が well-defined であることがわかる．このとき $\varphi_*(g) = f$ である．（証明終）

ここで ψ_* が全射であるとは限らないことに注意しよう．すなわち，上の命題について ψ が全射である仮定は不要である．同様に $\mathrm{Hom}(-, N)$ については φ が単射である仮定は不要である．では ψ_*, φ^* が全射になる場合（すなわち Hom が完全関手になるとき）について考えよう．

定義 *1.7.2*（射影加群，入射加群）

任意の A 加群の短完全列；

$$0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_2 \longrightarrow M_3 \longrightarrow 0$$

に対し；

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(P, M_1) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(P, M_2) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(P, M_3) \longrightarrow 0$$

が完全となるような A 加群 P を**射影加群 (projective module)** という．双対的に；

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M_3, I) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M_2, I) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M_1, I) \longrightarrow 0$$

が完全になるような I を**入射加群 (injective module)** という．

先の議論より，P が射影加群であることは，任意の全射な $\psi \in \mathrm{Hom}_A(M_2, M_3)$ と任意の $f \in \mathrm{Hom}_A(P, M_3)$ に対し φ_* が全射，すなわち $\varphi \circ \widetilde{f} = f$ となる $\widetilde{f} \in \mathrm{Hom}_A(P, M_2)$ の存在と同値である．この $\widetilde{f}$ を f の**持ち上げ (lifting)** という．同様に I が入射加群であることは任意の単射な $\varphi \in \mathrm{Hom}_A(M_1, M_2)$ と任意の $f \in \mathrm{Hom}_A(M_1, I)$ に対し φ^* が全射，すなわち $\widetilde{f} \circ \varphi = f$ となる $\widetilde{f}$ の存在と同値である．これを f の**拡張 (expantion)** という．それぞれ下の図式が可換になる $\widetilde{f}$ の存在，ということに要約される．圏論的に言えば，左完全関手 $\mathrm{Hom}(P, -)$ を完全にするものを射影加群，反変左完全関手 $\mathrm{Hom}(-, I)$ を完全にするものを入射加群という，ということになる．

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[d, dashed, "\widetilde{f}"'] \arrow[dr, "f"] & & \\
M_2 \arrow[r, "\psi"] & M_3 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Figure.5　射影加群 P

$$\begin{tikzcd}
 & & I \\
0 \arrow[r] & M_1 \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "\varphi"] & M_2 \arrow[u, dashed, "\widetilde{f}"']
\end{tikzcd}$$

Figure.6　入射加群 I

次に射影加群，入射加群それぞれの特徴づけを与えよう．

命題 *1.7.3*

自由加群は射影加群である．

証明.

F の基底を $\{u_i\}$ とする．$\psi : M_2 \to M_3, f : F \to M_3$ とすると，ψ が全射なので $x_i \in \psi^{-1}(f(u_i))$ が存在し，それを適当に選んで $\widetilde{f}(u_i) = x_i$ とすると，基底の送り先を定めれば十分だから $\widetilde{f} : F \to M_2$ を得る．（証明終）

この命題の証明に選択公理を使っていることに注意してほしい．それだけでなく同値な命題であることも知られている（Blass (1979)）．

定理 *1.7.4*

A 加群 P が射影的であることと，ある自由 A 加群 F が存在して P が F の直和因子であることは同値である．特に P が有限生成なら，F を有限生成にとることができる．

証明.

($\Longrightarrow$)

P の生成系をとることで，自由 A 加群 F からの全射 $\varphi : F \to P$ が定まる．P が射影的なので $\mathrm{id} : P \to P$ の持ち上げ $f : P \to F$ が存在する．すなわち $\varphi \circ f = \mathrm{id}_P$ である．id が単射なので f も単射となり，これによって P を F の部分加群とみなす．次の線型写像；

$$\psi : P \oplus \ker\varphi \to F; (x, y) \mapsto f(x) + y$$

が同型を与えることを示す．

Step 1. 単射であること．

$\psi(x, y) = f(x) + y = 0$ とする．これを φ で送ると定義から x となるが，0 の像は 0 なので $x = 0$ である．すると $\psi(x, y) = y = 0$ となり，$(x, y) = 0$ となる．

Step 2. 全射であること．

任意の $u \in F$ をとる．すると定義から $u - f(\varphi(u)) \in \ker\varphi$ なので，$\psi(\varphi(u), u - f(\varphi(u))) = u$ となる．

よって全単射となり，同型を与える．

($\Longleftarrow$)

$F = P \oplus K$ とおく．全射な $\psi : P_2 \to P_3$ について $f : P \to P_3$ の持ち上げがあればよい．

$$g : F \to P_3; (x, y) \mapsto f(x)$$

を考えると，F は射影的なので g の持ち上げ $\widetilde{g} : F \to P_2$ が定まる．このとき $\widetilde{g}|_P$ が f の持ち上げとなる．実際，$\psi \circ \widetilde{g}|_P(x) = \psi \circ \widetilde{g}(x) = g(x) = f(x)$ となる．

（証明終）

系 *1.7.5*

射影加群は平坦である．

証明.

単射 $\varphi : M_1 \to M_2$ をとり，P を射影加群とする．P はある自由加群の直和因子だから，F を自由として $F = P \oplus N$ とする．$F \cong \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} A$ とすると；

$$F \otimes M \cong \bigoplus_{\lambda\in\Lambda}(A \otimes M) = \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M$$

より，$\mathrm{id}_F \otimes\varphi : F \otimes M_1 \to F \otimes M_2$ も単射．また $F \otimes M \cong (P \otimes M) \oplus (N \otimes M)$ より $P \otimes M_1 \to P \otimes M_2$ に制限しても単射．

（証明終）

この性質は Noether 局所環の上では同値になることを後に見る（命題 7.3.10．実は Noether 性，それだけでなく有限生成であることすら外すことができる）．次に入射加群を特徴付けよう．

定理 *1.7.6*（Baer の判定法 (Baer's Criterion)）

A 加群 E が入射的であることと，すべての A のイデアル I に対して $I \to E$ が $A \to E$ に拡張できることは同値である．

証明.

$(\Longrightarrow)$ は明らか．$M \subset N$ を A 加群とし，$\varphi : M \to E$ とする．ここで，Zorn の補題から N' を $M \subset N' \subset N$ なる加群のうちで φ を拡張できる極大のものとしてとれる．ここで $N' \neq N$ を仮定する．任意の $x \in N \setminus N'$ をとる．ここで $I = \{a \in A \mid ax \in N'\}$ は A のイデアルとなる．このとき $I \to N'; a \mapsto ax$ と $\varphi' : N' \to A$ の合成は，仮定より $\psi : A \to E$ に持ち上がる．ここで；

$$\varphi'' : N' + Ax \to E : n' + an \mapsto \varphi'(n') + \psi(a)$$

はその構成から N' に制限すると φ に一致する．これは N' の極大性に矛盾．よって E は入射的となる．（証明終）

この定理から例えば整域 A の商体 K は入射的 A 加群であることがわかる．実際 $f : I \to K$ を A のイデアルからの A 線型写像とすると，任意の $x, y \in I$ について $yf(x) = xf(y)$ が成り立つ．すなわち固定された 1 つの元 $x_0 \in I$ について $f(x) = x \cdot f(x_0)/x_0$ が常に成り立つ．よって $f' : A \to K; x \mapsto xf(x_0)/x_0$ が f の拡張になる．

最後に，Hom とテンソル積についていくつかの公式を用意しておこう．

補題 *1.7.7*

A を環，M, N, P を A 加群とする．

(i) $\mathrm{Hom}(M \otimes N, P) \cong \mathrm{Hom}(N, \mathrm{Hom}(M, P))$ である（Hom とテンソル積の随伴性）．
(ii) B を平坦 A 代数とする．完全列；

$$A^m \longrightarrow A^n \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

が存在する（このとき M は**有限表示 (finitely presented)** であるという）とき，B 加群として；

$$\mathrm{Hom}_A(M, N) \otimes_A B \cong \mathrm{Hom}_B(M \otimes_A B, N \otimes_A B)$$

が成り立つ．

が成り立つ．

証明.

(i) 次の線型写像；

$$\mathrm{Hom}(M \otimes N, P) \to \mathrm{Hom}(N, \mathrm{Hom}(M, P)); f \mapsto (y \mapsto (x \mapsto (f(x \otimes y))))$$

$$\mathrm{Hom}(N, \mathrm{Hom}(M, P)) \to \mathrm{Hom}(M \otimes N, P); \varphi \mapsto (x \otimes y \mapsto \varphi(y)(x))$$

が互いに逆を与える．

(ii) 完全列；

$$A^m \longrightarrow A^n \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

に $\mathrm{Hom}_A(-, N) \otimes B, \mathrm{Hom}_B(- \otimes B, N \otimes B)$ を施して，完全列；

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_A(M, N) \otimes B & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_A(A^n, N) \otimes B & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_A(A^m, N) \otimes B \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_B(M \otimes B, N \otimes B) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_B(B^n, N \otimes B) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_B(B^m, N \otimes B)
\end{array}$$

を得る．ただし，縦の線型写像は $f \otimes b \mapsto b(f \otimes \mathrm{id})$ であり，これが可換であることは容易に確かめられる．$\mathrm{Hom}(A^m, N) = A^m$ であることに注意すれば，右の２つの線型写像は同型である．すると，簡単な図式追跡で $\mathrm{Hom}_A(M, N) \otimes_A B \to \mathrm{Hom}_B(M \otimes_A B, N \otimes_A B)$ も同型であることがわかる．

（証明終）

系 *1.7.8*

A を環，M, N を A 加群とし，M は有限表示とする．任意の $P \in \mathrm{Spec}\, A$ に対して；

$$(\mathrm{Hom}_A(M, N))_P = \mathrm{Hom}_{A_P}(M_P, N_P)$$

である．

最後に有限表示加群について射影加群は局所的性質であることを示しておこう．

命題 *1.7.9*

A を環とする．有限表示 A 加群 M について；

(i) M は射影加群である．
(ii) 任意の $P \in \mathrm{Spec}\, A$ について M_P は射影加群である．
(iii) 任意の $\mathfrak{m} \in \mathrm{Spec}\, A$ について $M_\mathfrak{m}$ は射影加群である．

は同値である．

証明.

(i) $\Longrightarrow$ (ii)

M が射影加群であることと自由加群の直和因子であることは同値であった．これは局所化により保たれるので，M_P も射影加群である．

(ii) $\Longrightarrow$ (iii)

自明．

(iii) $\Longrightarrow$ (i)

完全列 $N_1 \to N_2 \to 0$ について得られる $\mathrm{Hom}(M, N_1) \to \mathrm{Hom}(M, N_2)$ の局所化を考えると，系 1.7.8 により；

$$\mathrm{Hom}_{A_\mathfrak{m}}(M_\mathfrak{m}, (N_1)_\mathfrak{m}) \to \mathrm{Hom}_{A_\mathfrak{m}}(M_\mathfrak{m}, (N_2)_\mathfrak{m})$$

が得られ，仮定よりこれは全射である．よって命題 1.6.13 よりもとの $\mathrm{Hom}(M, N_1) \to \mathrm{Hom}(M, N_2)$ も全射である．

（証明終）

§ 8　Spec A の幾何構造の概略

可換環論においては素イデアルが非常に重要な働きをする．というのも素イデアル全体のなす集合 Spec A を幾何的な対象として捉えることができるからである．そこでこの節ではある程度の Spec A の幾何的な意味について説明する．

とはいえ，本質的に代数幾何的な手法（層など）については参考として述べた部分もあるものの，可換環論のみを理解するには知っている必要はない．とはいえ，雰囲気だけでもわかっていると環論における定義の動機がわかってくることがあるだろう．そこでこのように "急カーブ注意！" の標識で囲まれた段落で幾何的な意味について補足することにする．

まずは Spec A に入る位相構造について説明しよう．

定義 *1.8.1*（Zariski 位相）

環 A のイデアル $I \subset A$ に対し，$V(I) = \{P \in \mathrm{Spec}\, A \mid I \subset P\}$ は Spec A の閉集合系としての位相を定める．これを A の **Zariski 位相**という．

問 1.

$\mathscr{A} = \left\{V(I) \,\middle|\, I : A \text{ のイデアル}\right\}$ が閉集合系をなすこと，すなわち；

(i) $\emptyset, \mathrm{Spec}\, A \in \mathscr{A}$ である．
(ii) $V(I) \cup V(J) = V(I \cap J)$ である．
(iii) $\bigcap_\lambda V(I_\lambda) = V(\sum_\lambda I_\lambda)$ である．

を確認せよ．

ここで系 0.2.14 を思い出すと，$V(I)$ たちの包含関係を判定できる．

命題 *1.8.2*

A のイデアル I, J に対し，$V(I) \subset V(J)$ であることと $\sqrt{J} \subset \sqrt{I}$ であることは同値である．

証明は簡単なので演習問題としよう．

幾何学では多様体 (manifold) とその上の（正則，連続）関数について考察するが，代数幾何では多様体 (variety) とその上の正則関数について考える．多様体は体 k からなる空間 k^n の部分集合に位相を入れたものであるが，week nullstellensatz（定理 3.3.9）により代数閉体の組 k^n と $k[X_1, ..., X_n]$ の極大イデアル全体が 1 対 1 対応を持つ．そこで $V \subset k^n$ と $k[X_1, ..., X_n]$ の部分環に対応が無いだろうか，と考えた（実際にはすべての $V \subset k^n$ と $k[X_1, ..., X_n]$ の部分環が対応するわけではない）．そこで極大でない素イデアルをそこに合わせることで k^n の点以上の構造をもった $\mathrm{Spec}\, k[X_1, ..., X_n]$ ないし $\mathrm{Spec}(k[X_1, ..., X_n]/I)$（$I$ は $k[X_1, ..., X_n]$ のイデアル）を考えよう，としたのが Grothendieck のスキーム論の始まりである（可換環論と幾何の繋がり）．

一般に A 代数 B があったときに（素）イデアルの対応を考えることは大切である．しかし $\varphi : A \to B$ があったとき，$P \in \mathrm{Spec}\, A$ について必ずしも $\varphi(P)$ は B のイデアルになるかどうかすらわからない．そこで，A のイデアル I に対応する B のイデアルについては $\varphi(I)$ が B で生成するイデアルを考えることが自然である．また，$Q \in \mathrm{Spec}\, B$ について $\varphi^{-1}(Q)$ は必ず素イデアルなので，写像 $\mathrm{Spec}\, B \to \mathrm{Spec}\, A; Q \to \varphi^{-1}(Q)$ が定まる．$\varphi^{-1}(Q)$ を Q の φ による引き戻しという．$A \to S^{-1}A$ などの自然な準同型による $Q \in \mathrm{Spec}\, S^{-1}A$ の引き戻しは $Q \cap A$ と書いたりする．

以上のことについて次の結果が知られている．また注意として，命題 1.6.5 と同様の議論から A のイデアル I について $I \cap S = \emptyset$ となることと I が $S^{-1}A$ で生成するイデアルが真のイデアルであることは同値である．

命題 *1.8.3*

$\varphi : A \to B$ を準同型とし，$P \in \mathrm{Spec}\, A$ とする．$\varphi(P)$ が B で生成するイデアルを P' とかく．ある $Q \in \mathrm{Spec}\, B$ が存在して $\varphi^{-1}(Q) = P$ となることと，$\varphi^{-1}(P') = P$ となることは同値である．

証明.

$(\Longrightarrow)$

$P \subset \varphi^{-1}(P')$ は明らかなので逆を示そう．$a \in \varphi^{-1}(P')$ とすると $\varphi(a) \in P'$ である．ここで $\varphi(P) \subset Q$ なので $P' \subset Q$ だから $\varphi(a) \in Q$ である．よって $a \in \varphi^{-1}(Q) = P$ である．

$(\Longleftarrow)$

$\varphi^{-1}(P') = P$ と仮定する．$S = \varphi(A \setminus P)$ とおくと，$P' \cap S = \emptyset$ である．すると $S^{-1}B$ において $P'S^{-1}B$ は真のイデアルとなり，それを含む極大イデアル $\mathfrak{m}$ がとれる．$Q = \mathfrak{m} \cap B$ とおくと，$\varphi^{-1}(Q) = P$ である．実際，$P' \subset Q$ であるから $P \subset \varphi^{-1}(Q)$ は明らかで，$a \in \varphi^{-1}(Q)$ をとると $Q \cap S = \emptyset$ より $a \notin P$ ならば $\varphi(a) \in Q \cap S$ となってしまうので $a \in P$ でなければならない．

（証明終）

環 A と $P \in \mathrm{Spec}\, A$ について P による局所化を施すと P に含まれていない素イデアルは取り除かれる．また，P による剰余を施すと P を含んでいない素イデアルは取り除かれていた．これを組み合わせることによって，A の P 以外の素イデアルを取り除くことができる．

定義 *1.8.4*（剰余体）

環 A と素イデアル P について，体 A_P/PA_P を $k(P)$ とかいて，A の P における**剰余体 (residue field)** という．

$Q \subset P$ を素イデアルとしたときに，P による局所化と Q による剰余を組み合わせることで A の Q と P の間にある素イデアル以外をすべて取り除くことができることがわかるが，命題 1.6.10 によって A_P/QA_P と $(A/Q)_P$ が同型であるからその順序が関係ないことがわかる．よって $k(P)$ は $\mathrm{Frac}(A/P)$ と同型である（P の A/P における像は零イデアルであるから）．

多様体に対応するものが $\operatorname{Spec} A$ であると述べたが，代数幾何では関数の情報については**層 (sheaf)** というものを使って考察する．詳細は省略するが，多様体上の層がわかればどういった関数が存在しているのかがわかる．そしてその層は局所的な情報である**茎 (stalk)** を集めることで復元できる．要は局所的な stalk が大切だ，ということだが，$\operatorname{Spec} A$ 上の層についてはまさに素イデアルによる局所化 A_P がその stalk である．これで A_P について調べることの大切さがなんとなくわかっていただけると思う．

また A 加群 M が定める $\operatorname{Spec} A$ 上の層 $\widetilde{M}$ というものがあり，それらの貼り合わせは**準連接層 (quasi-coherent sheaf)** と呼ばれ，非常に代数幾何で大切な対象である．その各点 P における stalk は M_P であり，M_P たちは $\widetilde{M}$ の本質的な情報を全て持っている．そこで次の定義をしよう．

定義 *1.8.5*（台，サポート）

A 加群 M の素イデアル P による局所化 M_P が 0 にならない P の集まりを；

$$\operatorname{Supp} M = \{P \in \operatorname{Spec} A \mid M_P \neq 0\}$$

とかき，M の**台**，**サポート (support)** という．

まずは $P \in \operatorname{Supp} M$ となることの簡単な言い換えを述べておく（証明は定義から明らかなので省略する）．

補題 *1.8.6*

$M_P \neq 0$ であることと，ある $x \in M$ が存在して，任意の $h \notin P$ について $hx \neq 0$ となることは同値である．

M が有限生成なら，その生成系 $u_1, \dots, u_r$ について $hu_i = 0$ となる $h \notin P$ が存在するかだけ確かめれば十分であることに注意すると，次の形に整理できる．

命題 *1.8.7*

A 加群 M が A 上有限生成ならば，$V(\operatorname{Ann} M) = \operatorname{Supp} M$ である．

証明.

M の生成系を $u_1, \dots, u_r$ とする．対偶を考えて $\operatorname{Ann} M \not\subset P$ と $M_P = 0$ が同値であることを示せばよい．もし $\operatorname{Ann} M \not\subset P$ なら $h \notin P$ でありかつ $hM = 0$ となる h が存在するため，$M_P = 0$ である．また $M_P = 0$ とすると，特に u_i について $h_i \notin P$ が存在して $h_i u_i = 0$ である．すると $h = h_1 \cdots h_r$ とおけば $h \notin P$ であって $h \in \operatorname{Ann} M$ となる．（証明終）

系 *1.8.8*

A のイデアル I に対して，$\operatorname{Supp}(A/I) = V(I)$ である．

この結果は幾何的にも重要であるが，それだけでなく純粋に環論でも大切である．詳細は素因子の節で述べ

ることにしよう．

§ 9　環の直積

定義 *1.9.1*（直積環）

$\{A_i\}_{i\in I}$ を環の族とする．集合としての直積 $\prod_{i\in I} A_i$ には，各成分ごとの和，積を考えることで環構造が入る．これを**直積環 (product ring)** という．$\prod A_i$ の元で，第 i 成分が 1 であり，それ以外の成分は 0 であるものを e_i とかく．

単位元はすべての成分が 1 である元であり，各 A_i が可換ならば直積も可換になる．また，e_i たちは $e_i^2 = e_i$ という性質を持っている．このことを**冪等**であるという．

定義 *1.9.2*（冪等元）

環 A の元 $a \in A$ であって，$a^2 = a$ となるものを**冪等元 (idempotent element)** という．

この元 e_i を考えることで，直積について次が成り立つことがわかる．

命題 *1.9.3*

直積環 $\prod A_i$ は整域になり得ない．

証明.

$i \neq j$ とすると e_i, e_j はどちらも 0 でなく，$e_i e_j = 0$ である．（証明終）

実際にある環が直積であることを与える例として（それだけでなく，初等整数論における定理の一般化として）つぎの**中国剰余定理 (Chinese Remainder Theorem)** が有名である．

定理 *1.9.4*（中国剰余定理）

A を環とし，$I_1, \ldots, I_r$ を A のイデアルとする．どの $k \neq l$ についても I_k, I_l が互いに素，すなわち $I_k + I_l = A$ を満たすならば，次の準同型；

$$\varphi : A/\bigcap_{k=1}^{r} I_k \to A/I_1 \times \cdots \times A/I_r; a + \bigcap I_k \mapsto (a + I_1, \ldots, a + I_r)$$

は環同型である．

証明.

まず $r = 2$ のときに示す．φ の単射性は明らかなので，全射性について議論しよう．任意の $(a + I_1, b + I_2) \in A/I_1 \times A/I_2$ をとる．$I_1 + I_2 = A$ なので，ある $r_1 \in I_1, r_2 \in I_2$ が存在して $r_1 + r_2 = 1$ である．このとき $(br_1 + ar_2) + I_1 = ar_2 + I_1 = a(1 - r_1) + I_1 = a + I_1$ である．I_2 についても同様．よって $\varphi(br_1 + ar_2 + I_1 \cap I_2) = (a + I_1, b + I_2)$ である．これより同型 $A/(I_1 \cap I_2) = A/I_1 \times A/I_2$ が示された．

イデアルが 3 つ以上の場合には，$I_1 \cap I_2$ と I_3 も互いに素になる．実際 $r_1 + r_3 = 1, r_2 + r_3' = 1$ となる $r_1 \in I_1, r_2 \in I_2, r_3, r_3' \in I_3$ をとると；

$$r_1 r_2 + (r_2 r_3 + r_1 r_3' + r_3 r_3') = 1 \quad (r_1 r_2 \in I_1 \cap I_2, (r_2 r_3 + r_1 r_3' + r_3 r_3') \in I_3)$$

である．よって $A/(I_1 \cap I_2 \cap I_3) \cong A/I_1 \times A/I_2 \times A/I_3$ となり，以下帰納的に続ければよい．（証明終）

主に有限直積，とくに 2 つの環の直積であるときを考えよう（3 つ以上のときは $A_1 \times A_2 \times A_3 = (A_1 \times A_2) \times A_3$ であるから同様に議論できる）．

命題 *1.9.5*

A を環とすると，次は同値である．

(i) A は環の直積 $A_1 \times A_2$ と同型である．

(ii) $e_1, e_2 \in A$ が存在して，$e_1 + e_2 = 1, e_1 e_2 = 0$ を満たす．

証明.

$(\Longrightarrow)$ は明らか．(ii) を仮定しよう．次の準同型；

$$\varphi : A \to A/(e_1) \times A/(e_2); a \mapsto (a + (e_1), a + (e_2))$$

が環同型となる．実際 $a \in \ker \varphi$ とすると $a \in (e_1)$ かつ $a \in (e_2)$ であるので，ある $a_1, a_2 \in A$ が存在して $a = a_1 e_1 = a_2 e_2$ とかける．すると，各辺に e_1 を掛けることで $a = a_1 e_1 = 0$ が従う．よって φ は単射であり，また任意の $(a+(e_1), b+(e_2))$ について，$ae_2 + be_1$ を考えると $ae_2 + be_1 - a = a(1-e_2) + be_1 = ae_1 + be_1 \in (e_1)$ である．同様に $ae_2 + be_1 - b \in (e_2)$ より，$\varphi(ae_2 + be_1) = (a + (e_1), b + (e_2))$ であることがわかる．以上より φ は環同型を与える．（証明終）

さて，環の直積 $\prod A_i$ があったとき，自然な射影 $\pi_i : \prod A_i \to A_i$ が存在する．これは環の全準同型であり，スキームの閉移入 $\pi_i^* : \operatorname{Spec} A_i \to \operatorname{Spec} \prod A_i; P \mapsto \pi^{-1}(P)$ を与える（幾何的にはこれはスキームの閉移入になる）．これによって有限直積については Spec の構造を決定できる．素イデアルの直積は素イデアルにならないことに注意しよう．

命題 *1.9.6*

A_1, A_2 を環とする．$\operatorname{Spec}(A_1 \times A_2)$ は，$P_1 \in \operatorname{Spec} A_1$ と $P_1 \times \operatorname{Spec} A_2$ を，$P_2 \in \operatorname{Spec} A_2$ と $A_1 \times P_2$ を同一視することで $\operatorname{Spec} A_1 \sqcup \operatorname{Spec} A_2$ と一致する．

証明.

$A = A_1 \times A_2$ とおく．$P \in \operatorname{Spec} A$ について，$e_1 e_2 = 0 \in P$ より，$e_1 \in P$ または $e_2 \in P$ である．$e_1 + e_2 = 1$ であるので，$e_1 \in P$ かつ $e_2 \in P$ となることはない．ここでは $e_1 \in P$ と仮定する．このとき $\pi_2^{-1}(\pi_2(P)) = P$ であり，$\pi_2(P) \in \operatorname{Spec} A_2$ であることを示そう．このとき $\pi_2(P) = P_2$ とおけば $P = A_1 \times P_2$ とかける．

さて，$P \subset \pi_2^{-1}(\pi_2(P))$ は明らかなので，逆を示す．$(a_1,\ a_2) \in \pi_2^{-1}(\pi_2(P))$ とすると，$\pi_2(a_1, a_2) = a_2 \in \pi_2(P)$ なので，ある $a_1' \in A_1$ が存在して $(a_1', a_2) \in P$ である．すると $(a_1', 0) = a_1' e_1 \in P$ であるので，$(0, a_2) \in P$ である．これは $(a_1, a_2) = a_1 e_1 + (0, a_2) \in P$ を導く．よって $\pi_2^{-1}(\pi_2(P)) = P$ である．また，次の環の同型；

$$A/P = A/\pi_2^{-1}(\pi_2(P)) = A_2/\pi_2(P)$$

より，$A_2/\pi_2(P)$ は整域となり $\pi_2(P) \in \operatorname{Spec} A_2$ である．

$e_2 \in P$ のときは，同様に $P_1 \in \operatorname{Spec} A$ を用いて $P = P_1 \times A_2$ とかける．（証明終）

これは有限個の場合に拡張できる．すなわち次が成り立つ（証明は略）．

命題 *1.9.7*

環の有限直積 $A = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ について，任意の $P' \in \operatorname{Spec} A$ は，ある $1 \leq i \leq n$ と $P \in \operatorname{Spec} A_i$ により $P' = \pi_i^{-1}(P)$ とかける．すなわち；

$$\operatorname{Spec} A = \operatorname{Spec} A_1 \sqcup \operatorname{Spec} A_2 \sqcup \cdots \sqcup \operatorname{Spec} A_n$$

である．

では，無限直積の場合はどうだろうか？実は成り立たないことが知られている．そのために補題を考えよう．

補題 *1.9.8*

環の無限直積 $A = \prod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ について，各 $\lambda \in \Lambda$ に対し，$\{e_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ の生成する A のイデアル I は A よりも真に小さい．

証明.

任意の $a \in I$ をとると，有限個の $\lambda_1, \ldots, \lambda_s \in \Lambda$ が存在して；

$$a = a_1 e_{\lambda_1} + a_2 e_{\lambda_2} + \cdots + a_s e_{\lambda_s}$$

とかける．各 $1 \leq j \leq s$ について，これに e_{λ_j} をかけると a の λ_j 成分は a_j であることがわかる．また，λ_{s+1} を $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ のどれとも違うものとすれば，a の λ_{s+1} 成分は 0 である．よって，A の単位元 1 は I に含まれない．（証明終）

命題 *1.9.9*

環の無限直積 $A = \prod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ について，$P \in \operatorname{Spec} A$ が存在して，P は $\pi_\lambda^{-1}(P_\lambda), P_\lambda \in \operatorname{Spec} A_\lambda$ の形で表せない．

証明.

補題と同じ記号を用いる．イデアル I を含む極大イデアル $\mathfrak{m}$ をとる．するとすべての $\lambda \in \Lambda$ に対し $e_\lambda \in \mathfrak{m}$ である．また任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して，任意の $P_\lambda \in \operatorname{Spec} A_\lambda$ をとると，P_λ は A_λ の単位元を含まないから $e_\lambda \notin \pi_\lambda^{-1}(P_\lambda)$ である．よって $\mathfrak{m} \neq \pi_\lambda^{-1}(P_\lambda)$ となる．（証明終）

§ 10　素イデアル避け (Prime avoidance)

この節では **Prime avoidance** とよばれる，技巧的な道具とその 1 つの応用について説明しよう．

補題 *1.10.1*（Prime avoidance）

環 A のイデアル $P_1, \ldots, P_n$ で，素イデアルでないものは高々 2 つしかないとする．A のイデアル I が $I \subset \bigcup_{i=1}^{n} P_i$ を満たすならば，ある i について $I \subset P_i$ である．

Prime avoidance，素イデアル避けという名前の由来は対偶；

$$\{P_i\} \text{ に対して，すべての } i \text{ について } I \not\subset P_i \text{ ならば } I \not\subset \bigcup_{i=1}^{n} P_i$$

に由来する．

証明．

反例 $I, P_1, \ldots, P_n$ があるとする．そのなかでも n が最小なものを取ろう．$n = 1$ ではありえないので $n \geq 2$ である．

(i) $n = 2$ のとき．

$I \not\subset P_1, P_2$ より $a_1, a_2 \in I$ を $a_2 \notin P_1, a_1 \notin P_2$ となるようにとれる．このとき $I \subset P_1 \cup P_2$ なので，$a_1 \in P_1, a_2 \in P_2$ である．$a = a_1 + a_2$ とおくと，もし $a \in P_1$ ならば $a_2 = a - a_1 \in P_1$ となり矛盾．$a \in P_2$ のときも同様．よって $a \notin P_1 \cup P_2$ であるが，これも矛盾である．

(ii) $n \geq 3$ のとき．

P_i たちの中に素であるものが少なくとも 1 つ存在するので，それを並べ替えて $P_1 \in \operatorname{Spec} A$ とする．ここで，各 i について $I, \{P_i\}_{i \neq j}$ は反例になりえないので，$I \not\subset \bigcup_{j \neq i} P_j$ が成り立つ．よって，ある $a_i \in I$ をとって，$a_i \notin \bigcup_{j \neq i} P_i, a_i \in P_i$ となるようにできる．$a = a_1 + a_2 a_3 \ldots a_n$ とおくと，$a \in I$ であって，$a \notin \bigcup_{i=1}^{n} P_i$ であることを示そう．

$a \in P_1$ ならば $a_2 \ldots a_n \in P_1$ だが，これは P_i が素なので，$i \geq 2$ について $a_i \notin P_1$ であることに矛盾．また $i \geq 2$ について $a \in P_i$ ならばやはり $a_1 \in P_1$ となり矛盾する．よって $I \not\subset \bigcup P_i$ となり，仮定に反する．

（証明終）

定理 *1.10.2*（Davis の補題）

環 A の素イデアル $P_1, \ldots, P_n$ に対して，ある $a \in A$ とイデアル I が存在して $(a) + I \not\subset \bigcup_{i=1}^{n} P_i$ ならば，ある $x \in I$ を選んで $a + x \notin \bigcup_{i=1}^{n} P_i$ であるようにできる．

定義から，ある $c \in A, x \in I$ を選べば $ca + x \notin \bigcup P_i$ とでき，$c = 0$ で a が消えてしまうこともありえるが，この定理は $c = 1$ とすることができる，と主張しているところが強力である．

証明．

n についての帰納法で示す．まず $n = 1$ とする．対偶を考え，任意の $x \in I$ について $a + x \in P_i$ であるとすると，$x = 0$ とすると $a \in P_i$ となり，$(a) + I \subset P_1$ である．

$n - 1$ まで正しいとする．任意の $1 \leq i \leq n - 1$ について，$P_i \not\subset P_n$ としてよい．よって $\prod_{i=1}^{n-1} P_i \not\subset P_n$ である．さて，$(a) + I \not\subset \bigcup_{i=1}^{n-1} P_i$ より，帰納法の仮定からある $y \in I$ をとって $a + y \notin \bigcup_{i=1}^{n-1} P_i$ とできる．もし $a + y \notin P_n$ ならば y が求める元となり証明が終了する．$a + y \in P_n$ だったとき，$a + x \notin \bigcup_{i=1}^{n} P_i$ となる $x \in I$ を構成しよう．ここで，$I \not\subset P_n$ である．もし $I \subset P_n$ ならば $a + y \in P_n$ より $a \in P_n$ となり $(a) + I \subset P_n$ となるので，これは仮定に反する．また，$\prod_{i=1}^{n-1} P_i \not\subset P_n$ であったので，P_n は素だから $I \prod_{i=1}^{n-1} P_i \not\subset P_n$ である．そこで，$z \in I \prod_{i=1}^{n-1} P_i$ を $z \notin P_n$ であるようにとれる．$x = y + z$ とおくと，$a + x \notin \bigcup_{i=1}^{n} P_i$ である．実際，任意の $1 \leq i \leq n - 1$ について $a + y \notin P_i$ であって，$z \in P_i$ なので，$a + x \notin P_i$ である．また $a + y \in P_n$ で $z \notin P_n$ なので $a + x \notin P_n$ である．

（証明終）

Davis の補題を指して Prime avoidance ということもある．応用例として，次の事実；

A が整域なら $(a) = (b)$ であることと a と b が同伴であることは同値である．

について，A について整域以外の条件を課して成り立つかどうかを考えてみよう．端的に言えば半局所環で成り立つことを示せる．

命題 *1.10.3*

A を半局所環とすると，$(a) = (b)$ であることと，a と b が同伴であることは同値である．

証明.

ある $r \in A$ が存在して $b = ra$ とかける．また A が半局所環なので $\operatorname{Spm} A = \{\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_n\}$ とおくことができる．$(r) \subset \mathfrak{m}_i$ となる極大イデアルについて，局所環 $A_{\mathfrak{m}_i}$ を考える．A のイデアルとして $(a) = (r)(a)$ であり，$aA_{\mathfrak{m}_i} = rA_{\mathfrak{m}_i}aA_{\mathfrak{m}_i}$ かつ $aA_{\mathfrak{m}_i}$ は有限生成 $A_{\mathfrak{m}_i}$ 加群である．また $\operatorname{rad} A_{\mathfrak{m}_i} = \mathfrak{m}_i A_{\mathfrak{m}_i}$ であるので，$rA_{\mathfrak{m}_i}$ は $A_{\mathfrak{m}_i}$ の Jacobson 根基に含まれるイデアルである．よって中山の補題より $aA_{\mathfrak{m}_i} = 0$ である．よって $\operatorname{Ann} a \not\subset \mathfrak{m}_i$ である．ゆえに $(r) + \operatorname{Ann} a \not\subset \mathfrak{m}_i$ が成り立つ．また，$(r) \not\subset \mathfrak{m}_j$ となる $\mathfrak{m}_j$ に対して明らかに $(r) + \operatorname{Ann} a \not\subset \mathfrak{m}_j$ である．よって Davis の補題（定理 1.10.2）から，ある $r' \in \operatorname{Ann} a$ が存在して $r + r' \notin \bigcup_{i=1}^{n} \mathfrak{m}_i$ である．よって $r + r'$ は A の単元である．また，$a(r + r') = ra = b$ であるので，a と b は同伴である．（証明終）

第2章　Noether性と素因子論

—Noetherian properties and Associated prime ideal

この章では Noether 性について簡単な考察を行う．Artin 環は Noether 環であることを示し，また**素因子**と呼ばれる特殊な素イデアルについて論じよう．それにより**準素分解**の存在や極小素イデアルの有限性などの Noether 環に特有の性質を見ていく．

§1　極大条件と極小条件

まずは Noether 性の定義を加群についても定義するところから始めよう．

命題 *2.1.1*

A 加群 M について次は同値である．

(i) M の任意の部分加群は有限生成である．

(ii) M の任意の部分加群の増大列；

$$N_1 \subset N_2 \subset \cdots \subset N_i \subset \cdots$$

は必ず停まる．

(iii) M の部分加群からなる空でない族は，包含に関する極大元を持つ．

証明は環の場合を適切に修正すればよいので省略する．これらの条件を満たす加群を **Noether 加群**という．環 A の部分 A 加群はイデアルにほかならないので，この定義は Noether 環の自然な拡張である（A を A 加群とみなすと，A が Noether 加群なら A は Noether 環，A が Noether 環なら A は Noether 加群である）．

(ii) の条件を**昇鎖条件 (ascending chain condition)** といい，ACC と略す．包含の大小を逆にして；

$$N_1 \supset N_2 \supset \cdots \supset N_i \supset \cdots$$

が停まるような M を **Artin 加群**という．これを**降鎖条件 (descending chain condition, DCC)** といい，M の部分加群の空でない族は包含に関する極小元を持つことと同値である．

Noether 性，Artin 性は環とは違って部分加群に遺伝する．これは明らかであろう．

命題 *2.1.2*

短完全列；

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3 \longrightarrow 0$$

について，M_2 が Noether 加群であることと，M_1 と M_3 が Noether 加群であることは同値である．

証明.

($\Longrightarrow$)

準同型は包含関係を保存するからわかる（f の単射性と g の全射性に気をつけよ）．

($\Longleftarrow$)

M_2 の部分加群による増大列；

$$N_1 \subset N_2 \subset \cdots \subset N_i \subset \cdots$$

を考える．M_1，M_3 の部分加群の列；

$$f^{-1}(N_1) \subset f^{-1}(N_2) \subset \cdots \subset f^{-1}(N_i) \subset \cdots$$

$$g(N_1) \subset g(N_2) \subset \cdots \subset g(N_i) \subset \ldots$$

を考えると，M_1，M_3 の ACC からある共通の n がとれて，$n \leq i$ に対し；

$$f^{-1}(N_n) = f^{-1}(N_i), g(N_n) = g(N_i)$$

となる．$N_i \subset N_n$ を示せば十分である．$x \in N_i$ とすると，$g(x) = g(N_i) = g(N_n)$ よりある $y \in N_n$ が存在して $g(x) = g(y)$ なので，$x - y \in \ker g = \operatorname{Im} f$ だからある $z \in M_1$ により $x - y = f(z)$ とできる．ここで $N_n \subset N_i$ だから $x - y \in N_i$ すなわち $z \in f^{-1}(N_i) = f^{-1}(N_n)$ なので，$x - y = f(z) \in N_n$ である．ゆえに $x \in N_n$ となる．

（証明終）

適切に置き換えることで Artin 性についても同様の性質が成り立つ．

命題 *2.1.3*

A が Noether 環であることと，任意の有限生成 A 加群が Noether であることは同値である．

証明.

片方は明らかなので，$(\Longrightarrow)$ を示す．まず完全列；

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow A^n \longrightarrow A^{n-1} \longrightarrow 0$$

において，$n = 2$ のときを考えると先の命題から A^2 は Noether である．帰納的にすべての A^n が Noether であることが従う．さて M が A 上有限生成な加群であるとすると，ある $n \in \mathbb{N}$ に対し全射 $f : A^n \to M$ が存在する．すると；

$$0 \longrightarrow \ker f \longrightarrow A^n \xrightarrow{f} M \longrightarrow 0$$

が完全であり，A^n が Noether なので再び先の命題から M は Noether である．（証明終）

Noether 加群と Artin 加群について例を見てみよう．

例 2.1.4

$\mathbb{Z}$ 加群として $\mathbb{Z}$ は Noether だが Artin でない．実際 $\mathbb{Z}$ は PID だから Noether 環なので，$\mathbb{Z}$ 加群としても Noether．一方；

$$2\mathbb{Z} \supset 4\mathbb{Z} \supset \cdots \supset 2^i\mathbb{Z} \supset \cdots$$

は停止しない減少列をなす．

例 2.1.5

$\mathbb{Z}[1/p] = \left\{x/p^n \;\middle|\; x \in \mathbb{Z},\, n \in \mathbb{Z}_+\right\}$ に自然な演算を入れて $\mathbb{Z}$ 加群とみる．ここで $\mathbb{Z}[1/p]/\mathbb{Z}$ を考えると，これは Artin だが Noether でない．次の $\mathbb{Z}[1/p]$ の部分加群の列；

$$\mathbb{Z} \subset \frac{\mathbb{Z}}{p} \subset \frac{\mathbb{Z}}{p^2} \subset \cdots \subset \frac{\mathbb{Z}}{p^n} \subset \cdots \tag{$*$}$$

を考えよう．このとき $x/p^n - y/p^n \in \mathbb{Z}$ であることは $x - y \in p^n\mathbb{Z}$ と同値なので $(\mathbb{Z}/p^n)/\mathbb{Z} = (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})/p^n$ となる．このことから $\mathbb{Z}[1/p]/\mathbb{Z}$ の部分加群の列；

$$0 \subset \frac{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}}{p} \subset \frac{\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}}{p^2} \subset \cdots \subset \frac{\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}}{p^n} \subset \cdots$$

ができ，これは停まらない増大列をなす．よって Noether ではない．

ここで N を $\mathbb{Z}[1/p]$ の部分加群とする．すると列 $(*)$ のどれか隣り合う項の間に N が存在する．ここで $\mathbb{Z}/p^n \subset N \subset \mathbb{Z}/p^{n+1}$ としよう．$\mathbb{Z}$ の部分加群は $k\mathbb{Z}$ に限るので $N = k\mathbb{Z}/p^{n+1}$ とかける．もし k と p が互いに素でないなら分母の次数が退化するので $(k, p) = 1$ のときに考えれば十分である．

このとき $(k\mathbb{Z}/p^{n+1})/\mathbb{Z} = (\mathbb{Z}/p^{n+1}\mathbb{Z})/p^{n+1}$ を示す．先と同様に $(k\mathbb{Z}/p^{n+1})/\mathbb{Z} = (k \cdot \mathbb{Z}/p^{n+1}\mathbb{Z})/p^{n+1}$ が言える．ここで次の線型写像；

$$\varphi : \mathbb{Z}/p^{n+1}\mathbb{Z} \to k \cdot \mathbb{Z}/p^{n+1}\mathbb{Z}; \bar{i} \mapsto \overline{ki}$$

を考えると $(k, p) = 1$ よりこれは全単射である．よって $k \cdot \mathbb{Z}/p^{n+1}\mathbb{Z} = \mathbb{Z}/p^{n+1}\mathbb{Z}$ が言えるので，$\mathbb{Z}[1/p]/\mathbb{Z}$ の部分加群はすべて $(\mathbb{Z}/p^{n+1}\mathbb{Z})/p^{n+1}$ の形をしていることがわかった．ゆえに部分加群の減少列は必ず停止するので Artin 加群である．

逆に，環については Artin 環は Noether 環となる．そのことは次の節で示すことにして，Noether 性についてもうすこし考察しよう．

命題 *2.1.6*

忠実かつ Noether な加群を持つ環は Noether 環である．

証明.

M を忠実な Noether 加群とする．特に M は有限生成で，$u_1, \ldots, u_n$ をその生成系とする．このとき線型写像；

$$\varphi : A \longrightarrow M^n; a \longmapsto (au_1, \ldots, au_n)$$

について $\ker\varphi = \mathrm{Ann}(M)$ であるので $\ker\varphi = 0$ となり，φ は単射．よって A は Noether 加群 M^n の部分加群と同型なので，A は Noether 加群である．（証明終）

この定理において忠実という条件を外すと，次の命題が同様の手法で得られる．

命題 *2.1.7*

A 加群 M が Noether 加群ならば $A/\mathrm{Ann}(M)$ は Noether 環である．

定理 *2.1.8*（Formanek, 1973）

A を環とし，B を有限生成かつ忠実な A 加群とする．A のイデアル I に対し，IB の形の部分加群のなす集合が極大条件を満足すれば，A は Noether 環である．

証明.

背理法で示す．命題 2.1.6 より B が Noether であればよいので，B が Noether でないと仮定しよう．すると；

$$0 \in \Sigma = \left\{ IB \;\middle|\; I \text{ は } A \text{ のイデアルで}, B/IB \text{ は Noether でない.} \right\} \neq \emptyset$$

より，仮定から極大元 IB がとれる．$\overline{B} = B/IB, \overline{A} = A/\mathrm{Ann}(\overline{B})$ とすると，対応定理から 0 でない $\overline{A}$ の任意のイデアル $\overline{J}$ に対し $\overline{B}/\overline{JB}$ は $\overline{A}$ 加群として Noether である（$\overline{J}$ は $\overline{A}$ のイデアルなので $I \subset J$ より B/JB が Noether）．また，$\overline{A}, \overline{B}$ は定理の仮定を満たす（$\overline{A}, \overline{B}$ は Σ の極大元を 0 になるように潰したものと考えることができる）．

次に，$\Gamma = \left\{ N \;\middle|\; N \text{ は } \overline{B} \text{ の部分加群，} \overline{B}/N \text{ は忠実.} \right\}$ とおくと，$\overline{B}/N$ が忠実であることは，$\overline{B}$ の生成系 $\{u_1, \ldots, u_n\}$ に対し，任意の 0 でない $a \in A$ が $au_i \notin N$ を満たすことであるので，Γ は帰納的順序集合をなす．Zorn の補題から極大元 N_0 がとれる．ここで，$\overline{B}/N_0$ が Noether であるとすると，命題 2.1.6 から $\overline{A}$ は Noether となる．よって $\overline{B}$ は有限生成だから Noether となり，仮定に反するので $\overline{B}/N_0$ は Noether でない．$\overline{B}' = \overline{B}/N_0$ とおくと，次の性質を満たす（これも Γ の極大元を 0 にすることに相当する）．

(i) $\overline{B}'$ は $\overline{A}$ 加群として Noether でない．
(ii) I が 0 でない $\overline{A}$ のイデアルなら，$\overline{B}'/I\overline{B}'$ は Noether.
(iii) N が 0 でない $\overline{B}'$ の部分加群なら，$\overline{B}'/N$ は A 加群として忠実でない．

ここで，N を任意の $\overline{B}'$ の部分加群とする．(iii) より，ある 0 でない $a \in \overline{A}$ が存在して $a(\overline{B}'/N) = 0$，すなわち $a\overline{B}' \subset N$ である．すると，(ii) より $\overline{B}'/a\overline{B}'$ は Noether だから，その部分加群 $N/a\overline{B}'$ は有限生成で，$x\overline{B}'$ も有限生成なので N も有限生成．よって $\overline{B}'$ は Noether 加群となるが，これは (i) に矛盾している．（証明終）

系 *2.1.9*（Eakin–永田の定理）

B は Noether 環，A をその部分加群とする．B が A 上有限生成なら，A は Noether 環である．

この節の最後に，直既約加群を紹介し，Fitting の補題を証明しよう．

定義 *2.1.10*（直既約）

A を環とし，M を 0 でない A 加群とする．任意の真部分加群 $M_1, M_2 \subsetneq M$ について $M = M_1 \oplus M_2$ とかけないとき，M は**直既約 (indecomposable)** であるという．

命題 *2.1.11*

環 A 上の加群 M と，A 線型写像 $f : M \to M$ に対して；

(i) M が Noether で，f が全射なら f は単射である．
(ii) M が Artin で，f が単射なら f は全射である．

が成り立つ．

証明.

(i) を示す．f を i 回施す写像を f^i とおくと，M の部分加群の増大列；

$$\ker f \subset \ker f^2 \subset \cdots$$

が得られ，M が Noether だからある n が存在して $f^n(M) = f^{n+1}(M) = \cdots$ となる．任意の $x \in \ker f^n$ を考えると，f が全射なので，ある $y \in M$ が存在して $f(y) = x$ であり，$y \in \ker f^{n+1} = \ker f^n$ だから，$f^{n-1}(x) = 0$ となり，$\ker f^{n-1} = \ker f^n$ である．繰り返して $\ker f = \ker f^2$ を得る．ここで任意の $x \in \ker f$ について $y \in M$ で $f(y) = x$ だから $f^2(y) = f(x) = 0$ となり $y \in \ker f$ で，$x = 0$ である．よって f は単射.

(ii) は $\mathrm{Im}\, f$ を考えることで同様に示される．（証明終）

定理 *2.1.12*（Fitting の補題）

A を環とし，M を Artin かつ Noether な A 加群とする．任意の $f : M \to M$ に対して，ある $n \geq 0$ で $M \cong \ker f^n \oplus \mathrm{Im}\, f^n$ となるものが存在する．また，M が直既約なら f は同型か冪零かのどちらかである．

証明.

M が Artin かつ Noether だから $\{\ker f^i\}, \{\mathrm{Im}\, f^i\}$ は止まるので，十分大きい n をとれば $\ker f^n = \ker f^{n+1}, \mathrm{Im}\, f^n = \mathrm{Im}\, f^{n+1}$ としてよい．すると，任意の $x \in M$ について $f^n(x) \in \mathrm{Im}\, f^n = \mathrm{Im}\, f^{n+1}$ だからある $y \in M$ がとれて $f^n(x) = f^{n+1}(y)$ であるが，$f : \mathrm{Im}\, f^n \to \mathrm{Im}\, f^{n+1} = \mathrm{Im}\, f^n$ は全射なので命題 2.1.11 から単射でもあるから，$y, y' \in M$ について $f^{n+1}(y) = f^{n+1}(y')$ ならば $f^n(y) = f^n(y')$ が言えている．すると；

$$M \to \ker f^n \oplus \mathrm{Im}\, f^n; x \mapsto (x - f^n(y), f^n(y))$$

が well-defined で，成分の和をとることで逆が定まるからこれは同型を与える．

さらに M が直既約ならば $\ker f^n = 0$ または $\mathrm{Im}\, f^n = 0$ であって，$\ker f^n = 0$ ならば $M = \mathrm{Im}\, f^n$ だから $f^n : M \to M$ は同型で，f も同型である．また $\mathrm{Im}\, f^n = 0$ ならば $M = \ker f^n$ で，f は冪零である．（証明終）

最後に Artin または Noether な加群は直既約分解を持つということを証明しておく．

命題 *2.1.13*

A を環とし，M が Artin または Noether 加群であるとすると，M は有限個の直既約分解を持つ．すなわち．適当な n について $M = M_1 \oplus \ldots M_n$ を各 $M_i \subset M$ が直既約であるようにとれる．

証明.

M が直既約ならば示すことはないので，そうでないとする．このとき $0 \neq M_1, M_1' \subset M$ が存在して $M = M_1 \oplus M_1'$ であるとする．M_1, M_1' が直既約ならば証明が終わる．そうでないとすると，どちらかは直既約でないので，M_1 が直既約でないとしてよい．すると $0 \neq M_2, M_2' \subset M_1$ がとれて $M_1 = M_2 \oplus M_2'$ とかける．このときまた M_2, M_2' がどちらも直規約ならば終わるので，そうでないなら M_2 を直和分解する $0 \neq M_3, M_3' \subset M_2$ がとれる．このような操作が無限に続くと仮定すると，無限増大列；

$$0 \subsetneq M_1' \subsetneq M_1' \oplus M_2' \subsetneq \cdots$$

と，無限減少列；

$$0 \supsetneq M_1 \supsetneq M_2 \supsetneq \cdots$$

がとれて，M が Noether または Artin であることに矛盾するので，この操作は有限回で終わる．（証明終）

次の節で見るように，加群が Artin かつ Noether であるという条件は組成列（定義 2.2.2）を持つということと同値であり，非常によい振る舞いをする加群である．

§2　Artin 性

この節では Artin 性について論じる．特に Artin 環が Noether 環であることを示そう．

命題 *2.2.1*

Artin 環の素イデアルは極大イデアルであり，それは有限個しかない（半局所環である）.

証明.

A を Artin 環とし，P を A の素イデアルとする．A/P が体であることを示そう．$0 \neq a \in A/P$ をとる．すると；

$$0 \neq (a) \supset (a^2) \supset \cdots$$

はイデアルの降鎖列をなし，A/P は Artin なのでこれは停まる．するとある n が存在して $(a^n) = (a^{n+1})$ であるから，ある $b \in \overline{A}$ があって $a^n = ba^{n+1}$ である．よって $a^n(1 - ab) = 0$ であり，A/P は整域で $a \neq 0$ なので $ab = 1$ となり a は可逆．よって体である．

次に有限個であることを見よう．$\operatorname{Spm} A$ を A の極大イデアル全体のなす集合とする．

$$S = \{\mathfrak{m}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{m}_n \mid n \in \mathbb{Z}_+, \mathfrak{m}_i \in \operatorname{Spm} A\}$$

とおくと，これは A のイデアルの族となるので極小元 $I = \mathfrak{m}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{m}_r$ が存在する。このとき任意の $\mathfrak{m} \in \operatorname{Spm} A$ に対し $\mathfrak{m} \cap I \in S$ であるので，$\mathfrak{m} \cap I = I$ となり $I \subset \mathfrak{m}$ である．ここで各 $1 \leq i \leq r$ に対し $\mathfrak{m}_i \not\subset \mathfrak{m}$ であると仮定すると，それぞれ $a_i \in \mathfrak{m}_i \cap \mathfrak{m}^c$ が存在して $\mathfrak{m}$ が素イデアルなので $a_1 a_2 \ldots a_r \notin \mathfrak{m}$ であるが，$a_1 a_2 \ldots a_r \in I \subset \mathfrak{m}$ なので矛盾．よって少なくとも 1 つの $1 \leq j \leq r$ が存在して $\mathfrak{m}_j \subset \mathfrak{m}$ である．すると $\mathfrak{m}_j$ は極大なので $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_j$ である．よって $\operatorname{Spm} A$ は I の成分に現れる有限個の素イデアルのみからなる．（証明終）

Noether, Artin 性は「鎖」についての性質である．ここである種の極大性を満たす鎖について考察しよう．

定義 *2.2.2*（組成列）

A を環とする．A 加群 M の部分加群の有限列；

$$M = M_0 \supsetneq M_1 \supsetneq \cdots \supsetneq M_r = 0$$

において各 M_i, M_{i+1} の間に他の部分加群が存在しないとき，この列を M の**組成列 (composition series)** といい，各 M_i/M_{i+1} を組成列の**組成因子 (composition factors)** という．

この条件は各 M_i/M_{i+1} が自明でない部分加群を持たないことと言い換えることができる．

定義 *2.2.3*（単純加群）

A を環とする．A 加群 $M \neq 0$ が M と 0 以外に部分加群を持たないとき，**単純 (simple)** であるという．

この用語のもとで，組成列とは M_i/M_{i+1} がすべて単純であるような M の部分加群の減少列のことである．

群については部分加群を正規部分群と読み替えることで同様の定義ができる．有限単純群の分類というのは一大トピックであるが，加群においては次のように状況は簡単である．

命題 *2.2.4*

A を環とし，$M \neq 0$ が単純 A 加群であることと，ある $\mathfrak{m} \in \operatorname{Spm} A$ について $M \cong A/\mathfrak{m}$ であることは同値である．

証明.

$0 \neq x \in M$ をとる．このとき $0 \neq Ax \subset M$ であり，M が単純なので $M = Ax$ である．すると，線型写像 $\varphi : A \to M; a \mapsto ax$ は全射であり $A/\ker\varphi \cong M$ である．ここで $\ker\varphi \subset I$ となるイデアル I をとると $I/\ker\varphi$ は $A/\ker\varphi$ の部分加群となり，0 か $A/\ker\varphi$ に等しい．よって $I = \ker\varphi, A$ であり $\ker\varphi$ は極大である．

逆に $\mathfrak{m}$ が極大なら $A/\mathfrak{m}$ が単純であることは，部分加群の対応から明らかである．（証明終）

次の Jordan–Hölder の定理は群論においても知られているが，加群についても成り立つ．

定理 *2.2.5*（Jordan–Hölder）

A を環とする．A 加群 M が組成列を持つなら，任意の組成列は長さが等しく，組成因子も順序と同型の違いを除いて等しい．

証明.

M の組成列の長さの最小値を $\ell(M)$ とする．

Step 1. M の真の部分加群 N に対し，$\ell(N) < \ell(M)$ であること．

$\ell(M) = r$ とおく．M の組成列 $M = M_0 \supset M_1 \supset \cdots \supset M_r = 0$ に対し，$N_i = M_i \cap N$ とおく．

$$N_i/N_{i+1} = (M_i \cap N)/(M_{i+1} \cap N) \subset M_i/M_{i+1}$$

より，M_i/M_{i+1} が単純だから $N_i/N_{i+1} = 0\ (N_i = N_{i+1})$ または $N_i/N_{i+1} = M_i/M_{i+1}$ である．すなわち N_i の重複を除けば，それは N の組成列となる．よって，$\ell(N) \leq \ell(M)$ である．また，$\ell(N) = \ell(M)$ とすると，任意の i に対し $N_i \neq N_{i+1}$ であるから $N_i/N_{i+1} = M_i/M_{i+1}$ となるので，$N_{r-1} = M_{r-1}$ であり，帰納的にすべての i について $N_i = M_i$ を得る．よって $N = M$ である．

Step 2. 任意の組成列の長さが $\ell(M)$ であること．

$M = M_0{}' \supset M_1{}' \supset \cdots \supset M_k{}' = 0$ を M の組成列とする．Step 1 より $\ell(M) > \ell(M_1{}') > \cdots > \ell(M_k{}') = 0$ より $\ell(M) \geq k$ である．よって，$\ell(M)$ の定義から，$\ell(M) = k$ となるので，任意の組成列の長さは等しい．

（証明終）

よって次の定義が well-defined である．

定義 *2.2.6*（組成列の長さ）

A を環とする．A 加群 M が組成列を持つとき，その長さを $\ell(M)$ とかく．組成列を持たない加群については，$\ell(M) = \infty$ と定義する．

一般に M の部分加群のなす減少列；

$$M = M_0 \supset M_1 \supset \cdots \supset M_s = 0$$

について，隣り合う成分の間に部分加群が存在する（ある i について M_i/M_{i+1} が単純でない）ならそれを挿入することで（番号を付け替えて）M_i/M_{i+1} が単純になるように鎖を延長することができるが，一般には長さが有限になるとは限らない（Artin 性を満たさない）．しかし Jordan–Hölder の定理から組成列が存在することがわかっていれば，全ての鎖は組成列に延長できる．このことから次の命題が成り立つ．

命題 *2.2.7*

A を環とする．A 加群 M が組成列を持つこと，すなわち $\ell(M) < \infty$ であることと，M が A 加群として Artin かつ Noether であることは同値である．

証明.

($\Longrightarrow$)

$M_1 \subset M_2 \subset \cdots \subset M_i \subset \cdots$ を M の増大列とする．各 M_i について $\ell(M_i) \leq \ell(M_{i+1}) \leq \ell(M)$ で，$\ell(M)$ が有限なので，これは必ず停まる．減少列については延長すれば組成列となるので明らかである．

($\Longleftarrow$)

$M_0 = M$ とし，M の真部分加群の中で極大なものを M_1 とする．同様に M_i を M_{i-1} の真部分加群で極大なものとしてとる．M の DCC から，これは必ずある n で $M_n = 0$ となり停まる．よって；

$$M = M_0 \supset M_1 \supset \cdots \supset M_i \supset \cdots \supset M_n = 0$$

は組成列.

（証明終）

組成列はそれ自体が有用な概念で，いろいろなところで現れる．ここでは，その応用の 1 つとして Artin 環は Noether であることを証明しよう．

命題 *2.2.8*

体 k 上の加群 V について，k 加群として Artin であることと Noether であることは同値である．

証明.

まず，V が有限次元であると仮定すると，V の基底 $\{u_1, \ldots, u_n\}$ に対して $V_i = \bigoplus_{j=1}^{i} ku_j$ $(1 \leq i \leq n)$ とするとこれは組成列をなすから，命題 2.2.7 より V は Artin かつ Noether である．よって Artin ならば V が有限次元であることを示せば，V は Noether であることが従う．

背理法で示す．V が Artin かつ無限次元であるとする．V の線型独立な元の無限列 $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ が存在する．このとき，$V_n = (x_n, x_{n+1}, \ldots)$ はそれぞれ無限な真減少列をなすので，V が Artin であることに矛盾する．よって V が Artin なら有限次元で，Noether である．

全く同様に V が Noether なら有限次元であることがわかり，V は Artin となることを示すことができる．

（証明終）

定理 *2.2.9*（Akizuki (1935)）

Artin 環は Noether 環である．

証明.

A を Artin 環とする．まず A のすべての極大イデアル $\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_r$ について（命題 2.2.1 より有限個），$I = \mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2 \ldots \mathfrak{m}_r = \mathrm{rad}(A)$ とおく．DCC より $I \supset I^2 \supset \cdots$ は有限で停まるので，ある r がとれて $I^s = I^{s+1}$ となる．$J = \mathrm{Ann}(I^s) = (0 : I^s)$ とおくと；

$$(J : I) = ((0 : I^s) : I) = (0 : I^{s+1}) = J$$

である．ここで $I^s = 0$ すなわち $J = A$ を示す．

$J \subsetneq A$ と仮定する．すると J より真に大きいイデアルのなかで極小な J' がとれる．ここで $a \in J' \setminus J$ とすると $aA + J$ は J より真に大きいイデアルであり $aA + J \subset J'$ となる．よって J' の作り方から $J' = aA + J$ である．すると $J'/J = aA$ であるので，中山の補題より $J' \neq aI + J$ である．すると極小性から $aI + J = J$ である．ゆえに $aI \subset J$ であるが，これは $a \in (J : I) = J$ を意味し，$a \in J' - J$ に矛盾．よって $J = A$ である．

よって $I^s = 0$ となり，イデアルの減少列；

$$A \supset \mathfrak{m}_1 \supset \mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2 \supset \cdots \supset \mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2 \ldots \mathfrak{m}_{r-1} \supset I \supset I\mathfrak{m}_1 \supset \cdots \supset I^2 \supset \cdots \supset I^s = 0 \tag{$*$}$$

を考える．加群としての短完全列；

$$0 \longrightarrow \mathfrak{m}_1 \longrightarrow A \longrightarrow A/\mathfrak{m}_1 \longrightarrow 0$$

を考えると，A が Artin なので $A/\mathfrak{m}_1$ と $\mathfrak{m}_1$ も Artin．同様に $(*)$ の隣り合う 2 項をそれぞれ $M, M\mathfrak{m}_1$ とすると，$M/M\mathfrak{m}_1$ が Artin で体 $A/\mathfrak{m}_1$ 上の線型空間なので命題 2.2.8 より $M/M\mathfrak{m}_1$ は Noether．すると，特に $M = I^{s-1}\mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2 \ldots \mathfrak{m}_{r-1}$ に対し $M/M\mathfrak{m}_r = M$ が Noether なので，帰納的に A も Noether であることがわかる．（証明終）

可換環について示したのは Akizuki (1935) であり，Hopkins (1939) は非可換環に対して証明した．加群については，秋月–Hopkins–Levitzki の定理などが知られている（前述のように，Artin だが Noether でない加群は存在するが，ある種の環上の加群では ACC と DCC が同値であることを示している）．

§ 3　加群の素因子

素因子，準素イデアルの議論においては Noether 性が本質的に効いてくるため，これらの概念を使った議論には Noether 性が必要である．これは Noether 環の仮定が外しにくいことの一因となっている（Noether という仮定を外すとこの章の終わりまでにおける殆どの命題に反例がある）．

定義 *2.3.1*（素因子）

A を環とし，M を A 加群とする．$P \in \operatorname{Spec} A$ であって，ある単射な A 線型写像 $A/P \to M$ が存在するものを M の**素因子 (associated prime ideal of M)** という．M の素因子全体を $\operatorname{Ass}_A M$ で表す．

特に誤解の恐れがない場合は $\operatorname{Ass} M$ とかくが，環が変われば素因子はがらりと変わるため，慣れないうちは A に常に気を配ってもらいたい．

この定義は次のような言い換えがある．

命題 *2.3.2*

A を環とし，M を A 加群とする．$P \in \operatorname{Ass} M$ であることと，ある $0 \neq x \in M$ が存在して $P = \operatorname{Ann} x$ とかけることは同値である．

証明．

$P \in \operatorname{Ass} M$ とすると，単射 $\iota : A/P \to M$ が存在し，$P = \operatorname{Ann} \iota(1 + P)$ とかける．逆に $P = \operatorname{Ann} x$ とかけているなら，$\iota : A/P \to M$ を $1 + P \mapsto x$ で定めれば単射な A 線型写像になる．（証明終）

Noether 環では必ず素因子が存在するということが大切である．

命題 *2.3.3*

Noether 環 A 上の加群 M に対し，$\{\operatorname{Ann} x \mid 0 \neq x \in M\}$ の極大元は素イデアル，すなわち $\operatorname{Ass} M \neq \emptyset$ である．

証明.

$\operatorname{Ann} x$ が極大元であるとする．$ab \in \operatorname{Ann} x$，$a \notin \operatorname{Ann} x$ と仮定すると，$ax \neq 0$ かつ $abx = b(ax) = 0$ なので $b \in \operatorname{Ann}(ax)$ である．すると，定義から $\operatorname{Ann} x \subset \operatorname{Ann}(ax)$ であるが，$\operatorname{Ann} x$ の極大性より $\operatorname{Ann} x = \operatorname{Ann}(ax)$ である．よって，$b \in \operatorname{Ann} x$ となることがわかり，$\operatorname{Ann} x$ は素イデアルである．（証明終）

次の命題は Noether 環の理論でとても便利であるので注意しておく．

系 *2.3.4*

Noether 環 A 上の加群 M の零因子全体は素因子全体と一致する．すなわち；

$$\left\{a \in A \,\middle|\, \text{ある } x \neq 0 \in M \text{ について } ax = 0\right\} = \bigcup_{P \in \operatorname{Ass} M} P$$

である．

素因子は局所化で保たれるという次の補題も大切である．

補題 *2.3.5*

Noether 環 A 上の加群 M と，A の積閉集合 S，$P \in \operatorname{Spec} A$ に対して，$P \in \operatorname{Ass}_A M$ かつ $P \cap S = \emptyset$ であることと，$S^{-1}P \in \operatorname{Ass}_{S^{-1}A} S^{-1}M$ であることは同値である．

証明.

$(\Longrightarrow)$

$P = \operatorname{Ann} x$ となる $x \in M$ をとると，$S^{-1}P = \operatorname{Ann} x/1$ となる．実際 $\subset$ は明らかで，任意の $a/s \in \operatorname{Ann} x/1$ をとると，ある $h \in S$ が存在して $hax = 0$ だから $ha \in \operatorname{Ann} x = P$ だが，$P \cap S = \emptyset$ より $h \notin P$ なので $a \in P$ となる．

$(\Longleftarrow)$

$S^{-1}P \in \operatorname{Ass}_{S^{-1}A} S^{-1}M$ とすると，$S^{-1}P \in \operatorname{Spec} S^{-1}A$ より $P \cap S = \emptyset$ に注意しよう．

ある $x/s \in S^{-1}M$ について $S^{-1}P = \operatorname{Ann} x/s$ とかける．A は Noether なので $P = (a_1, \ldots, a_r)$ としよう．各 a_i について $a_i/1 \cdot x/s = 0$ より，ある $h_i \in S$ が存在して $h_i a_i x = 0$ である．h_i たちの積を $h = h_1 \cdots h_r$ とすると $h \in S$ であり，$Phx = 0$ が成り立つ．よって $P \subset \operatorname{Ann} hx$ である．逆に $y \in \operatorname{Ann} hx$ とすると，$S^{-1}M$ において $y/1 \cdot x/s = 0$ であるので $y/1 \in S^{-1}P$ であるから，あとは形式的な計算によって $y \in P$ であることがわかる．よって $P = \operatorname{Ann} hx \in \operatorname{Ass}_A M$ である．

（証明終）

ここで加群 M の support について思い出そう（定義 1.8.5）．次の結果が知られている．

定理 *2.3.6*

Noether 環 A 上の加群 M について $\operatorname{Ass} M \subset \operatorname{Supp} M$ であり，それぞれの極小元のなす集合は一致する．

証明.

$P = \operatorname{Ann} x$ とする．すると，任意の $s \notin P$ に対して $sx \neq 0$ である．よって $x = x/1$ は M_P の零元でない．よって $M_P \neq 0$，すなわち $P \in \operatorname{Supp} M$ である．よって，極小元が一致することを見るには $P \in \operatorname{Supp} M$ が極小なら $P \in \operatorname{Ass} M$ であることを示せばよい．

まず M_P は 0 でない A_P 加群であり，$\operatorname{Supp}_{A_P} M_P = \{PA_P\}$ を示す．それには $Q \subsetneq P$ となる $Q \in \operatorname{Spec} A$ について QA_P による M_P の局所化が 0 であることを示せばよい．P が $\operatorname{Supp} M$ で極小なので $M_Q = 0$ だから，補題 1.8.6 より任意の $x \in M$ に対してある $a \notin Q$ が存在して $ax = 0$ である．すると $a/1 \notin QA_P$ であり，任意の $x/s \in M_P$ に対して $a/1 \cdot x/s = 0$ である．よって再び補題 1.8.6 から M_P の QA_P による局所化は 0 である．よって $\operatorname{Supp}_{A_P} M_P = \{PA_P\}$ がわかった．

ここで $M_P \neq 0$ なら $\operatorname{Ass}_{A_P} M_P \neq \emptyset$ なので，$\operatorname{Ass}_{A_P} M_P \subset \operatorname{Supp}_{A_P} M_P = \{PA_P\}$ であるから $\operatorname{Ass}_{A_P} M_P = \{PA_P\}$ である．よって補題 2.3.5 から $P \in \operatorname{Ass}_A M$ であることがわかる．（証明終）

系 2.3.7

Noether 環 A のイデアル I について，$V(I)$ の極小元，すなわち $I \subset P$ となる $P \in \operatorname{Spec} A$ で極小なものは A/I の素因子である．

証明.

系 1.8.8 よりわかる．（証明終）

命題 *2.3.8*

Noether 環 A 上の加群の完全列；

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{\varphi} M_2 \xrightarrow{\psi} M_3 \longrightarrow 0$$

に対して $\operatorname{Ass} M_1 \subset \operatorname{Ass} M_2 \subset \operatorname{Ass} M_1 \cup \operatorname{Ass} M_3$ が成立する．

証明.

先の注意から $\operatorname{Ass} M_1 \subset \operatorname{Ass} M_2$ は明らか．$P \in \operatorname{Ass} M_2$ とし，$P = \operatorname{Ann} x$ とおこう．このとき単射；

$$A/P \to M_2; a + P \mapsto ax$$

の像を N としよう．

(i) $\operatorname{Im} \varphi \cap N = 0$ のとき．
完全性から $\ker \psi = \operatorname{Im} \varphi$ なので，$A/P \to M_3; a + P \mapsto a\psi(x)$ が単射である．よって $P \in \operatorname{Ass} M_3$ となる．

(ii) $\operatorname{Im} \varphi \cap N \neq 0$ のとき．
任意の $0 \neq x' \in \operatorname{Im} \varphi \cap N$ をとる．$x \in N$ かつ $x \neq 0$ より，ある $a \notin P$ が存在して $x' = ax$ である．ここで $P = \operatorname{Ann} x$ が素イデアルであることに注意すると $\operatorname{Ann} x = \operatorname{Ann} x'$ である．また $x' \in \operatorname{Im} \varphi$ であり φ は単射なので，0 でない $y \in M_1$ が存在して $x' = \varphi(y)$ である．すると $P = \operatorname{Ann} y$ であることが φ の単射性からわかる．よって $P \in \operatorname{Ass} M_1$ となる．

（証明終）

定理 *2.3.9*

Noether 環 A 上の有限生成加群 M の素因子の集合 $\mathrm{Ass}\, M$ は有限である．

証明.

$M \neq 0$ としてよい．$P_1 \in \mathrm{Ass}\, M$ とすると，A/P_1 と同型な M の部分加群 M_1 が存在する．$M_1 \neq M$ のとき，$M/M_1 \neq 0$ だから，$P_2 \in \mathrm{Ass}\, M/M_1$ が存在して，$A/P_2 \cong \overline{M_2} \subset M/M_1$ とできる．M_2 を $M_2/M_1 = \overline{M_2}$ なる M の部分加群とすると，$M_1 \subset M_2 \subset M$ となる．同様に，$M_2 \neq M$ ならば操作を続けると，部分加群の増大列；

$$0 \neq M_1 \subset M_2 \subset \cdots \subset M_i \subset \cdots$$

と $M_i/M_{i-1} \cong A/P_i$ となる素イデアル P_i がとれる．M は有限生成で A は Noether なので Noether であり，この増大列は停まる．よって，ある n が存在して $M_n = M$ としてよい．すると，短完全列；

$$0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M \longrightarrow M/M_1 \longrightarrow 0$$

に対し，命題 2.3.8 から $\mathrm{Ass}\, M \subset \mathrm{Ass}\, M_1 \cup \mathrm{Ass}\, M/M_1$ となる．また；

$$0 \longrightarrow \overline{M_2} = M_2/M_1 \longrightarrow M/M_1 \longrightarrow (M/M_1)/(M_2/M_1) = M/M_2 \longrightarrow 0$$

に対して命題 2.3.8 を用いて，$\mathrm{Ass}\, M/M_1 \subset \mathrm{Ass}\, M_2/M_1 \cup \mathrm{Ass}\, M/M_2$ となる．以下同様に続けると；

$$\begin{aligned}\mathrm{Ass}\, M &\subset \mathrm{Ass}\, M_1 \cup \mathrm{Ass}\, M/M_1 \\ &\subset \cdots \\ &\subset \mathrm{Ass}\, M_1 \cup \mathrm{Ass}\, M_2/M_1 \cup \cdots \cup \mathrm{Ass}\, M_n/M_{n-1} \\ &= \bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{Ass}\, A/P_i \\ &= \{P_1, \ldots, P_n\}\end{aligned}$$

である．最後の等号は，任意の 0 でない $x \in A/P_i$ に対し $\mathrm{Ann}\, x = P_i$ であることを用いた．　（証明終）

系 *2.3.10*

Noether 環 A のイデアル I について $V(I)$ の極小元は有限個である．

証明.

$V(I) = \mathrm{Supp}(A/I)$ で極小なものは定理 2.3.6 より $\mathrm{Ass}\, A/I$ の元なので，上の定理より I を含む素イデアルで極小なもの（I の極小素イデアル，極小素因子ということもある）は有限個しかないことがわかる．（証明終）

この節の最後に，上の命題の証明から得られる M の減少列で，各項の剰余が剰余環であるようなものがとれることを注意しておく．

系 *2.3.11*

Noether 環 A 上の有限生成加群 M に対して，A 加群の列；

$$M = M_r \supset M_{r-1} \supset \cdots \supset M_0 = 0$$

であって，任意の i について $P_i \in \mathrm{Spec}\, A$ が存在して $M_i/M_{i-1} \cong A/P_i$ であるようなものが存在する．

§ 4　準素イデアル

加群の素因子たちが活躍する例の 1 つに素イデアルの一般化である準素イデアルの理論がある．

定義 2.4.1（準素イデアル）

環 A のイデアル $q \neq 0$ に対し，$P = \sqrt{q}$ とおく．$ab \in q$ かつ $a \notin q$ ならば $b \in P$ が成り立つとき，q を P **準素イデアル (primary ideal)** という．

明らかに素イデアルは準素である．この条件は;

A/q のすべての零因子は冪零である．

と同値であることに注意しよう．$\sqrt{q}$ を P と書くからには，P が素イデアルであるべきだろう．

命題 2.4.2

準素イデアル q の根基は q を含む最小の素イデアルである．

証明.

イデアルの根基はそのイデアルを含む全ての素イデアルの共通部分であるから，素イデアルであることを示せば十分．$ab \in \sqrt{q}$，$a \notin \sqrt{q}$ とする．$ab \in \sqrt{q}$ なので，ある n が存在して $a^n b^n \in q$ である．$a \notin \sqrt{q}$ だから，この n に対して $a^n \notin q$ である．q が準素なので，ある m が存在して $b^{nm} \in q$ である．よって $b \in \sqrt{q}$ である．（証明終）

命題 2.4.3

環 A のイデアル I について，$\sqrt{I}$ が極大なら I は準素である．

証明.

I が素のときは示すことはないので，素でないとしてよい．$\sqrt{I} = \mathfrak{m}$ とおく．I を含む A の素イデアルは $\mathfrak{m}$ のみなので，$\operatorname{Spec} A/I = \{\overline{\mathfrak{m}}\}$ となる．すると $\operatorname{nil} A/I = \overline{\mathfrak{m}}$ となり，任意の $x \in A/I$ について $x \in \operatorname{nil} A/I$ または $x \in (A/I)^\times$ が成り立つ．よって I は準素である．（証明終）

一般の A 加群 M については，準素部分加群を次のように定義しよう．

定義 2.4.4

A を環とし，M を A 加群，N をその部分加群とする．任意の $a \in A$ について，ある $x + N \in M/N$ について $ax + N = 0$ ならば $a \in \sqrt{\operatorname{Ann}(M/N)}$ であるとき N を M の**準素部分加群 (primary submodule)** という．

この定義を言い換えると，$a \in A$ がある $x \in M \setminus N$ について $ax \in N$ ならば，ある $n \in \mathbb{N}$ について $a^n M \subset N$ である，ということになる．この定義のもとで準素イデアルとは A 加群の準素部分加群のことである．

命題 2.4.5

A を Noerher 環，M を有限生成 A 加群とし，N をその部分加群とする．N が準素部分加群であることと，$\operatorname{Ass}(M/N)$ が一点集合であることは同値である．

証明.

証明を通して $I = \mathrm{Ann}(M/N)$ とおく．

$(\Longrightarrow)$

$P \in \mathrm{Ass}(M/N)$ とする．ある $0 \neq x + N \in M/N$ によって $P = \mathrm{Ann}(x+N)$ となる．任意の $a \in P$ について $ax \in N$ なので，仮定より $a \in \sqrt{I}$ となるから $P \subset \sqrt{I}$ である．一方で素因子の定義から $\sqrt{I} \subset P$ なので $P = \sqrt{I}$ となり，$\mathrm{Ass}(M/N) = \{\sqrt{I}\}$ である．

$(\Longleftarrow)$

$\mathrm{Ass}(M/N) = \{P\}$ とする．定理 2.3.6 より $\mathrm{Supp}\, M/N$ の極小元は P のみであり，命題 1.8.7 より $V(\mathrm{Ann}\, M/N) = \mathrm{Supp}\, M/N$ である．よって $\mathrm{Ann}\, M/N$ を含む素イデアルで極小なものは P だけなので $\sqrt{I} = P$ が成り立つ．また $a \in \mathrm{Ann}(x+N)$ $(x+N \neq 0)$ ならば命題 2.3.3 より $a \in P = \sqrt{I}$ が成り立つ．

（証明終）

命題 *2.4.6*

A を Noerher 環，M を有限生成 A 加群とし，N を準素部分加群とする．$\mathrm{Ass}(M/N) = \{P\}, \mathrm{Ann}\, M/N = I$ とおくと $\sqrt{I} = P$ であって，I は P 準素イデアルである．

証明.

$ab \in I, a \notin I$ とする．これは $abM \subset N, aM \not\subset N$ を意味するので，ある $x + N \neq 0$ について $ax + N \neq 0$ であり $b \in \mathrm{Ann}(ax+N) \subset P$ となる．よって I は P 準素．（証明終）

命題 2.4.5 の証明において $(\Longrightarrow)$ の証明には M が有限生成である必要はなかったことに注意すると，準素部分加群の定義を次のように拡張できる．

定義 *2.4.7*

Noether 環 A 上の加群 M と，その準素部分加群 N に対して，$\mathrm{Ass}(M/N) = \{P\}$ であるとき，N を P **準素部分加群**という．

紛らわしい用語だが，N が準素部分加群という定義を外してしまうと P 準素だが準素でない部分加群が存在することになり，もはや定義 2.4.4 とは同値でない．以後単に**準素部分加群**といった場合には定義 2.4.4 の意味とし，$\mathrm{Ass}(M/N)$ の元を明示したい場合にのみ P 準素という用語を用いることにする．

準素加群を考えることの嬉しさの 1 つに，加群の分解のある種の一意性がある．これは加群に対応する幾何的な対象を考えることでその対象を分解（分割）することに対応し，応用が広い．そのために部分加群の既約性（定義 1.1.7）を思い出そう．

定義 *2.4.8*（既約分解，準素分解）

M を A 加群とする．M の部分加群 N を，M の有限個の部分加群の交わりとして

$$N = N_1 \cap \cdots \cap N_r$$

と表すことを N の**分解 (decomposition)** という．各 N_i が既約なら**既約分解**，準素なら**準素分解**という．

分解 $N = \bigcap_i^r N_i$ に対して，各 $1 \leq j \leq r$ について $N \neq \bigcap_{i \neq j} N_i$ であるとき，この分解は**むだがない (irredundant)** という．

次の定理を当面の目標としよう．その後，分解の一意性について考察していく．

定理 *2.4.9*（Laker–Noether の分解定理）

Noether 環 A 上の有限生成加群 M の任意の部分加群 N は準素分解を持つ．特に，任意の A のイデアル I は準素分解を持つ．

補題 *2.4.10*

M が Noether 加群ならば，任意の部分加群は既約部分加群の有限個の交わりとしてかける．

証明.

そのように分解できない部分加群の集まりを S とする．M の Noether 性より S の極大元がとれるので，それを N とする．N は可約なので，N_1，$N_2 \neq N$ を用いて $N = N_1 \cap N_2$ とできる．すると $N \subset N_1$，N_2 なので，N の極大性から N_1，$N_2 \notin S$ であるから，N_1 と N_2 は既約な部分加群の交わりでかける．よって，N も既約な部分加群の有限個の交わりとなり，矛盾．（証明終）

補題 *2.4.11*

Noether 環上の既約な真部分加群は準素である．

証明.

対偶である，M の部分加群 N が準素でなければ可約であることを示す．$\mathrm{Ass}(M/N)$ は少なくとも 2 つの異なる素因子を持つので，それを $P_1 \neq P_2$ とする．$A/P_i \cong \overline{N_i} \subset M/N$ とすると，$0 \neq x \in \overline{N_i}$ ならば $\mathrm{Ann}\, x = P_i$ となるので，$\overline{N_1} \cap \overline{N_2} = 0$ でなければならない．さて，N_i を $N_i/N = \overline{N_i}$ となるようにとると，自然な全射 $\pi : M \to M/N$ に対し $N_1 \cap N_2 = \pi^{-1}(\overline{N_1} \cap \overline{N_2}) = \pi^{-1}(0) = N$ であって，$N \subsetneq N_i$ なので N は可約である．（証明終）

2 つの補題により準素分解できること（定理 2.4.9）が示された．では，分解の一意性について見ていこう．

補題 *2.4.12*

Noether 環上の加群 M の，P 準素部分加群加群 N_1 と N_2 について $N_1 \cap N_2$ も P 準素である．

証明.

$$\iota : M/(N_1 \cap N_2) \longrightarrow M/N_1 \oplus M/N_2; x + N_1 \cap N_2 \longmapsto (x + N_1, x + N_2)$$

は単射であるので，短完全列；

$$0 \longrightarrow M/N_1 \longrightarrow M/N_1 \oplus M/N_2 \longrightarrow M/N_2 \longrightarrow 0$$

とあわせて，命題 2.3.8 から $\emptyset \neq \mathrm{Ass}\, M/(N_1 \cap N_2) \subset \mathrm{Ass}\, M/N_1 \cup \mathrm{Ass}\, M/N_2 = \{P\}$ であるから $N_1 \cap N_2$ は P 準素．（証明終）

これより，準素分解 $N = \bigcap_i^r N_i$ がむだのない分解であるとき，N_{i_1} と N_{i_2} がともに P 準素なら $N_{i_1} \cap N_{i_2}$ も P 準素なので，$N_j = N_{i_1} \cap N_{i_2}$ とおくと，分解の長さを短くできる．このように，すべての i に対し $\mathrm{Ass}(M/N_i)$ が異なるようにすることで**最短準素分解**が得られる．

定理 *2.4.13*

Noether 環上の加群 M の部分加群 N について $N = N_1 \cap \cdots \cap N_r$ を無駄のない準素分解とし，P_i を N_i の素因子とすると $\mathrm{Ass}(M/N) = \{P_1, \ldots, P_r\}$ となる．

証明.

埋め込み $M/N \subset \bigoplus_{i=1}^r M/N_i$ と，命題 2.3.8 により $\mathrm{Ass}\, M/N \subset \bigcup_{i=1}^r \mathrm{Ass}\, M/N_i = \{P_1, \ldots, P_r\}$ を得る．また，むだのないことから $0 \neq \bigcap_{i=2}^r N_i/N$ であり

$$\iota : \bigcap_{i=2}^r N_i/N \longrightarrow M/N_1; x + N \longmapsto x + N_1$$

は単射．実際 $x + N_i = 0$ とすると $x \in N_1$ である．一方 $x \in \bigcap_{i=2}^r N_i$ より $x \in N$ となり $x + N = 0$ である．よって，$\emptyset \neq \mathrm{Ass}(\bigcap_{i=2}^r N_i/N) \subset \mathrm{Ass}(M/N_1) = \{P_1\}$ すなわち $\mathrm{Ass}(\bigcap_{i=2}^r N_i/N) = \{P_1\}$ である．また，$\bigcap_{i=2}^r N_i/N \subset M/N$ でもあるので，$P_1 \in \mathrm{Ass}(M/N)$ である．他の P_i についても同様．（証明終）

準素分解の一意性については，極小素因子に対応する成分は一意的に定まることがわかる．

定理 *2.4.14*

Noether 環 A 上の有限生成 A 加群 M とその部分加群 N に対して，$N = N_1 \cap \cdots \cap N_r$ をむだのない最短準素分解，$\mathrm{Ass}(M/N) = \{P_1, \ldots, P_r\}$ とおく．P_i が $\mathrm{Ass}(M/N)$ で極小なら $f_{P_i} : M \longrightarrow M_{P_i}$ を P_i における局所化とすると，$N_i = f_{P_i}^{-1}(N_{P_i})$ となり，P_i 準素成分は N と P_i から一意に定まる．

証明.

適当に並べ替えて P_1 が極小であるとする．$P_i \not\subset P_1$ $(i \neq 1)$ である．よって $y \in P_i$ で $y \notin P_1$ となるものが存在する．このとき $(M/N_i)_{P_1}$ において $y/1 \in A_{P_1}$ は可逆．また，$y \in P_i = \sqrt{\mathrm{Ann}\, M/N_i}$ だから，ある n があって $y^n(M/N_i) = 0$ である．よって $y^n/1 \cdot (M/N_i)_{P_1} = 0$ で，$y/1$ は可逆なので $(M/N_i)_{P_1} = 0$ である．すると完全列；

$$0 \longrightarrow N_i \longrightarrow M \longrightarrow M/N_i \longrightarrow 0$$

に対し；

$$0 \longrightarrow (N_i)_{P_1} \longrightarrow M_{P_1} \longrightarrow (M/N_i)_{P_1} \longrightarrow 0$$

も完全であるので $(N_i)_{P_1} = M_{P_1}$ である．ここで $N_{P_1} = \bigcap_i^r (N_i)_{P_1} = (N_1)_{P_1}$ であるので，$f_{P_1}^{-1}(N_{P_1}) = f_{P_1}^{-1}((N_1)_{P_1}) = N_1$ であることがわかった．（証明終）

これをイデアルに関して述べ返すと，次のようになる．

系 *2.4.15*

Noether 環 A 上のイデアル I は，有限個の準素分解 $I = q_1 \cap \cdots \cap q_r$ を持つ．この分解に無駄がなければ $P_i = \sqrt{q_i}$ は素であって，$\mathrm{Ass}(A/I) = \{P_1, \ldots, P_r\}$ である．さらに，これが最短ならば極小素因子 P_i に対応する準素イデアル q_i は I と P_i から一意に定まる．

この結果により，極小な素因子に対応する準素イデアルの一意性が言えるが，極小でない素因子を持つときを考えてみよう．k を体として，$A = k[X_1, X_2], I = (X_1^2, X_1X_2)$ とおく．ここで素イデアル鎖

$(0) \subsetneq (X_1) \subsetneq (X_1, X_2)$ を考えると；

$$I = (X_1) \cap (X_1^2, X_2) = (X_1) \cap (X_1, X_2)^2$$

が最短準素分解であり，$(X_1^2, X_2) \neq (X_1, X_2)^2$ である．さて $\mathrm{Ass}\, A/I = V(I) = \{(X_1), (X_1, X_2)\}$ であるので (X_1, X_2) は極小でない素因子であり，$(X_1^2, X_2), (X_1, X_2)^2$ はどちらも (X_1, X_2) に対応する準素イデアルである．このように極小でない素因子はいろいろと技術的に問題を引き起こすことがある．極小でない素イデアルを**非孤立素因子 (embedded associated prime ideal)** ともいう．

とはいえ，$P \in \mathrm{Ass}(A/I)$ であることと，I の無駄のない準素分解 $I = \bigcap q_i$ において $\sqrt{q_i} = P$ となる i が存在することは同値である．これら素因子の概念は環の素イデアルの挙動，特に**次元論**において目覚ましい活躍を見せる．次の章では環の拡大を考察し，環の**次元**を定義しよう．

第3章　整拡大と次元論初歩

—Integral extension and The elements of dimension theory

代数曲線，特に古典的な代数多様体論では，曲線をより単純な曲線，特に直線に射影して性質を見る，という方法をとる．それは環の準同型としては $k[X] \to k[X,Y]/I$ に対応し，これは**整拡大**というものになっている．また，多様体 (variety) と環を対応させて調べるという発想において，特に議論の対象となる環は代数閉体 k 上の有限生成代数であることが多い．そこで，一般の環についてある種の**次元**を定義するとともに，それが代数多様体の自然な次元と一致することを確認することを目標にしよう．すなわち，多項式環 $k[X_1,...,X_n]$ の自然な次元 n を，多項式環の性質によらずに一般の環に拡張する．

§1　環の拡大

体の拡大の基礎については第 0 章で少しまとめているが，Galois 理論などの入門書を適宜参照のこと．体の拡大 L/k において，代数的，超越的という概念があった．その概念を環の場合に拡張することを考えてみよう．A 代数 $f : A \to B$ を考え，これを環の拡大とみなしたい．体の場合は，体からの任意の準同型が単射なので，任意の準同型を埋め込みとして問題はなかった．そこで，$f : A \to B$ が単射であるとき**環の拡大**という．しばらくは一般の A 代数 B について議論をしていこう．まずは代数的という性質を環の拡大の場合に拡張する．

定義 *3.1.1*（整）

B を A 代数とする．$x \in B$ に対し，A 係数のモニックな多項式 $g \in A[X]$ が存在して；

$$g(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

が A 加群 B で成立するとき，x は A 上**整 (integral)** であるという．

任意の $x \in B$ が A 上で整のとき，B は A 上整であるという．$\mathbb{Z}$ 上で整である複素数のことを**代数的整数**，$\mathbb{Q}$ 上で整である複素数のことを**代数的数**といっていたことを思い出そう．

例 3.1.2

環の拡大 $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ を考えよう．ここでは $\mathbb{Z}$ 上整な元をすべて求める．$r = p/q$ (p, q は互いに素) が $\mathbb{Z}$ 上整であると仮定すると，適当な $a_i \in \mathbb{Z}$ がとれて；

$$r^n + a_1 r^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

が成り立つ．分母を払うと；

$$p^n + a_1 q p^{n-1} + \cdots + a_n q^n = 0$$

となり，p^n は q の倍数となる．p と q は互いに素なので，$q = \pm 1$ が従う．ゆえに r は $\mathbb{Z}$ の元である．$\mathbb{Z}$ の元が $\mathbb{Z}$ 上整なことは明らか．

整拡大を考えるときには，有限生成代数が度々登場する．そこで A 上有限生成代数 B について，全射 $\varphi : A[X_1,...,X_n] \to B$ を考えると，これは多項式環に何かを代入した準同型になっている．これを説明する

ため，単に B が 1 変数多項式環の像になっているときを考えよう．任意の $b \in B$ について，ある $f \in A[X]$ が存在して $b = \varphi(f)$ とかける．ここで $f = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0$ とおくと；

$$b = \varphi(a_n)\varphi(X)^n + \cdots + \varphi(a_0)$$

であるが，$\varphi(X)$ は B の元であり，B を自然に A 代数とみると，これは次のように書くのが自然である（$a \cdot b = \varphi(a)b$ としてスカラーを定義したことを思い出そう）；

$$b = a_n\varphi(X)^n + a_{n-1}\varphi(X)^{n-1} + \cdots + a_0$$

このようにして，B は多項式環 $A[X]$ の X を $\varphi(X)$ で置き換えた環になっている．多変数の場合も同じである．そこで，全準同型 $\varphi : A[X_1, \ldots, X_n] \to B$ が存在するとき，$B = A[\varphi(X_1), \varphi(X_2), \ldots, \varphi(X_n)]$ とかく．ただし，各 $\varphi(X_i)$ たちが変数のように独立に振る舞うとは限らない．例えば，$A[X,Y]$ に $X \mapsto T^2$，$Y \mapsto T^4$ と定めることで 1 変数多項式環への準同型が定まる．この準同型の像を B とすると先の議論から $B = A[T^2,T^4]$ とかけるが，これは環としては $A[T^2]$ にほかならない（T^4 は T^2 で表現できる）．

整であることは次のように特徴づけされる．

命題 *3.1.3*

B を A 代数とすると，次は同値である．

(i) $x \in B$ は A 上で整である．
(ii) $A[x]$ は A 加群として有限生成である．
(iii) B の部分環 C で，A 加群として有限生成なものが存在して，$A[x] \subset C$ が成り立つ．
(iv) A 上有限生成な $A[x]$ 加群 M であって，任意の $f \in A[x]$ について，任意の $m \in M$ に対し $fm = 0$ ならば $f = 0$ を満たすものが存在する（有限生成で忠実な $A[X]$ 加群が存在する）．

証明.

(i) $\Longrightarrow$ (ii)

$x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$ とすると，任意の $k \geq n$ に対して $x^k \in \bigoplus_{i=0}^{n-1} Ax_i$ である（厳密には帰納法を用いる）．ゆえに $A[x] = \bigoplus Ax_i$ となり有限生成である．

(ii) $\Longrightarrow$ (iii)

明らか．

(iii) $\Longrightarrow$ (iv)

$M = C$ とすればよい．

(iv) $\Longrightarrow$ (i)

$\varphi : M \to M = m \mapsto xm$ は A 加群としての自己線型写像になり，$\varphi(M) = x \cdot M \subset M$ より，Cayley–Hamilton の定理（定理 1.3.3）を $I = A$ として使うことができる．すると；

$$\varphi^n + a_1\varphi^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

となるから，この式の左辺は $x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$ 倍写像であるので，忠実性から従う．

（証明終）

整な元の集まり $\{x_1, \ldots, x_n\}$ についても，以下の補題から類似する性質を示すことができる．

補題 *3.1.4*

B を A 代数とし，M を B 加群とする．B が A 加群として有限生成かつ M が B 加群として有限生成であるとき，M は A 加群として有限生成である．

証明.

B, M それぞれの生成元を $\{x_i\}, \{y_j\}$ として $B = \bigoplus Ax_i, M = \bigoplus By_j$ とすると，$M = \bigoplus_i \left(\bigoplus_j Ax_iy_j\right)$ であることがわかり，A 加群としても有限生成である．（証明終）

命題 *3.1.5*

B を A 代数とし，$b_1, \ldots, b_n \in B$ を A 上整な元たちであるとする．このとき $A[b_1, \ldots, b_n]$ は A 加群として有限生成である．

証明.

帰納法で示す．$n = 1$ のときは命題 3.1.3 より従う．$A_i = A[b_1, \ldots, b_i]$ とおこう．すると A_{n-1} が有限生成 A 加群であるとき，$A_n = A_{n-1}[b_n]$ であるので，b_n は A_{n-1} 上でも整だから A_n は有限生成 A_{n-1} 加群である．すると，補題より A_n は有限生成 A 加群になる．（証明終）

命題 *3.1.6*

B を A 代数とする．B が A 上有限型であり整であることと，A 加群として有限生成であることは同値である．

証明.

$(\Longrightarrow)$ は命題 3.1.5 から即座に従う．B が A 加群として有限生成であるとする．まず，任意の $x \in B$ をとると，命題 3.1.3 (iii) において $C = B$ とできるので，x は A 上整，すなわち B は A 上整である．また，B の A 加群としての生成系を $\{b_1, \ldots, b_n\}$ とすれば；

$$A[X_1, \ldots, X_n] \to B; f \mapsto f(b_1, \ldots, b_r)$$

が全準同型となり，B は有限型である．（証明終）

これは標語的に；

有限型 + 整 = 有限生成

と言い表すことができる，とても便利な性質である．

命題 *3.1.7*（整従属の推移性）

$A \subset B \subset C$ を環の拡大とする．B が A 上整でありかつ，C が B 上整ならば，C は A 上整である．

証明.

任意の $x \in C$ をとる．B 上整であるから，$b_r, \ldots, b_n \in B$ がとれて；

$$x^n + b_1x^{n-1} + \cdots + b_n = 0$$

が成り立つ．このとき $B' = A[b_1, \ldots, b_n]$ とおくと，命題 3.1.5 よりこれは有限生成 A 加群であり，x は B' 上でも整なので $B'[x]$ も有限生成 A 加群となる．よって命題 3.1.3 より，x は A 上整である．（証明終）

§ 2　整閉整域と正規環

整域 A があったとき，その商体 Frac A を考えることで自然な環の拡大 $A \subset \operatorname{Frac} A$ がある．例えば $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ を考えたとき，例 3.1.2 より $\mathbb{Z}$ 上整な $\mathbb{Q}$ の元は $\mathbb{Z}$ のみである．このような整域を**整閉整域**という．この概念をしっかりと定義するために，まずは次の定義をしよう．

定義 *3.2.1*（整閉包）

$A \subset B$ を環の拡大とする．A 上整な B の元全体，すなわち；

$$\left\{b \in B \,\middle|\, ある\ a_1, \ldots, a_m \in A\ が存在して，b^m + a_1 b^{m-1} + \cdots + a_m = 0\right\}$$

を A の B における**整閉包 (integral closure)** という．ここでは $\overline{A}_B$ と書くことにする．[*4]

先に述べたとおり $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ の整閉包 $\overline{\mathbb{Z}}_{\mathbb{Q}}$ は $\mathbb{Z}$ である．閉包というからには，一般に次が成り立つ．

命題 *3.2.2*

(i) $\overline{A}_B$ は B の部分環である．
(ii) $\overline{A}_B$ の B での整閉包は $\overline{A}_B$ である．

証明.

(i) $x, y \in \overline{A}_B$ とする．まず x, y は A 上整なので $A[x, y]$ は有限生成である．ゆえに $x + y, xy \in A[x, y]$ だからこれらも整となり，$\overline{A}_B$ は部分環をなす．

(ii) $b \in B$ が $\overline{A}_B$ 上整であるとすると，$a_1, \ldots, a_m \in \overline{A}_B$ がとれて；

$$b^m + a_1 b^{m-1} + \cdots + a_m = 0$$

である．このとき $A' = A[a_1, \ldots, a_n]$ とおくと $A[b]$ は A' 加群として有限生成であり，a_i たちは A 上整だから A' は A 加群として有限生成．よって $A[b]$ は A 加群として有限生成になり，$b \in \overline{A}_B$ が従う．

（証明終）

定義 *3.2.3*（整閉）

$A \subset B$ を環の拡大とする．$\overline{A}_B = A$ のとき，A は B において**整閉 (integrally closed)** であるといい，特に整域 A がその商体 Frac A で整閉のとき，**整閉整域 (integrally closed domain)** という．

例 3.2.4

容易に計算できるように UFD は整閉整域である（例 3.1.2 で計算した $\mathbb{Z}$ についての類似である）．それは GCD 整域（定義 0.4.1）に対して容易に一般化できる．

整閉より強い概念として，次の**完整閉**を紹介しよう．

[*4] Global に通用する記号はないように思われる．

定義 *3.2.5*（完整閉）

A を整域とする．任意の $x \in \mathrm{Frac}(A)$ について，ある $r \in A$ が存在して，すべての $n > 0$ について $ax^n \in A$ ならば $x \in A$ が成り立つとき，A は**完整閉** (completely integrally closed) であるという．

命題 *3.2.6*

整域 A が完整閉ならば整閉整域である．

証明.

$x \in \mathrm{Frac}(A)$ が A 上で整であるとする．すると，命題 3.1.3 により $A[x]$ は有限生成 A 加群なので，生成系 $u_1, \ldots, u_n$ をとれば，分母を一斉に払う $r \in A$ がとれる．すなわち $rA[x] \subset A$ とできる．よって A は完整閉なので $x \in A$ となり，A は整閉整域である．（証明終）

実は A が Noether なら逆も正しい．

命題 *3.2.7*

A を Noether 整域とすると，整閉ならば完整閉である．

証明.

$x \in \mathrm{Frac}(A)$ について，ある $r \in A$ が存在して，すべての $n > 0$ について $rx^n \in A$ であると仮定する．すると $A[x] \subset A \cdot 1/r$ であり，$A \cdot 1/r$ は有限生成 A 加群で，A が Noether なので $A[x]$ も有限生成 A 加群であり，命題 3.1.3 から x は A 上整である．よって A が整閉なので $x \in A$ である．（証明終）

定義 *3.2.8*（正規環）

環 A について，任意の $P \in \mathrm{Spec}\, A$ に対し A_P が整閉整域であるとき，A を**正規環 (normal ring)** という．

これは幾何的にも意味のある命題であるが，正規環は被約である．

命題 *3.2.9*

A を正規環とすると，A は被約である．

証明.

$\mathrm{nil}\, A = 0$ を言えばよい．任意の $P \in \mathrm{Spec}\, A$ について命題 1.6.10 より $(\mathrm{nil}\, A)_P = \mathrm{nil}(A_P)$ であり，A は正規なので A_P は整域だから $\mathrm{nil}(A_P) = 0$ である．すると命題 1.6.12 より $\mathrm{nil}\, A = 0$ となり正規環は被約である．（証明終）

補題 *3.2.10*

環の拡大 $A \subset B$ について，S を A の積閉集合とする．このとき $S^{-1}\overline{A}_B = \overline{S^{-1}A}_{S^{-1}B}$ が成り立つ．

証明.

任意の $x/s \in S^{-1}\overline{A}_B$ をとる．x は A 上整なので；

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

となる $a_i \in A$ が存在する．このとき；

$$(x/s)^n + (a_1/s)(x/s)^{n-1} + \cdots + a_n/s^n = 0$$

となるので $x/s \in \overline{S^{-1}A}_{S^{-1}B}$ である．

また，任意の $x/s \in \overline{S^{-1}A}_{S^{-1}B}$ をとる．

$$(x/s)^n + (a_1/s_1)(x/s)^{n-1} + \cdots + a_n/s_n = 0$$

となる $a_i \in A$，$s_i \in S$ が存在する．ここで $t = s_1 \ldots s_n$ とおき，両辺に $(ts)^n$ をかけると $tx \in \overline{A}_B$ となる．よって $x/s = (tx)/(ts) \in S^{-1}\overline{A}_B$ である．（証明終）

以下の命題より整閉整域は正規環である．

命題 *3.2.11*

A を整域とすると，A が整閉であることと A が正規環であることは同値（整閉整域は局所的な性質である）．

証明.

$\overline{A}_{\mathrm{Frac}\,A} = A$ であることは，自然な包含射 $\iota : A \to \overline{A}_{\mathrm{Frac}\,A}$ が全射であることと同値である．さて補題 3.2.10 より $S^{-1}\overline{A}_{\mathrm{Frac}\,A} = \overline{S^{-1}A}_{\mathrm{Frac}\,A}$ である．命題 1.6.13 より ι が全射であることと ι の局所化 $A_P \to (\overline{S^{-1}A}_{\mathrm{Frac}\,A})_P$ が全射であることは同値だから主張が従う．（証明終）

整域においては整閉性と正規性は同値だが，整域でない正規環が存在することに注意が必要である．A_1，A_2 を整閉整域とし，直積 $A = A_1 \times A_2$ の素イデアルによる局所化を考えよう．$P \times A_2 \in \mathrm{Spec}\,A$ について，$A_{P\times A_2}$ は A_{1P} と同型である．$\mathrm{Spec}\,A$ は $P_1 \times A_2$ $(P_1 \in \mathrm{Spec}\,A_1), A_1 \times P_2$ $(P_2 \in \mathrm{Spec}\,A_2)$ のみからなるので，A は整域でない正規環である．実はすべての Noether 正規環は有限個の整閉整域の直積である．系 2.3.10 により Noether 環の極小な素イデアルは有限個であることに注意しよう．

定理 *3.2.12*

A を Noether 正規環とすると，A は有限個の整閉整域の直積である．

証明.

A の極小な素イデアル全体を $P_1, \ldots, P_r$ とする．このとき $P_i + P_j = A$ $(i \neq j)$ が成り立つ．実際 $P_i + P_j \subsetneq A$ とすると，これはイデアルをなすのである極大イデアル $\mathfrak{m}$ に含まれる．すると $A_{\mathfrak{m}}$ において $P_iA_{\mathfrak{m}}, P_jA_{\mathfrak{m}}$ は異なる極小素イデアルであるが（命題 1.6.5），$A_{\mathfrak{m}}$ は整域なのでただ 1 つの極小素イデアル (0) を持つ．これは矛盾．また A は被約なので $P_1 \cap \cdots \cap P_r = (0)$ である．よって中国剰余定理（定理 1.9.4）から；

$$A \cong \prod_{i=1}^{r} A/P_i$$

である．ここで任意の $P \in \mathrm{Spec}\,A/P_i$ をとると，命題 1.9.6 より $P \times \prod_{i\neq j} A/P_j \in \mathrm{Spec}\,A$ による A の局所化は $(A/P_i)_P$ と同型で，A が正規なのでこれは整閉整域である．よって A/P_i は整閉整域となり，A は有限個の正規環の直積である．（証明終）

また，一般の正規環 A は被約かつ全商環で整閉である．これの逆は Noether 環について成り立つ．

命題 *3.2.13*

A を正規環とする．A の全商環を $Q(A)$ とおくと，$\overline{A}_{Q(A)} = A$ である．

証明.

$x/s \in Q(A)$ が A 上整であるとしよう．次のイデアル $I = \{a \in A \mid ax/s \in A\}$ が A であることを示せばよい．任意の $P \in \operatorname{Spec} A$ をとる．自然な単射 $A \to Q(A)$ にテンソルすることで，単射 $A_P \to Q(A) \otimes_A A_P = Q(A)_P$ が存在する．x/s は A_P 上整なので，$x/s \in A_P$ である．これは $a, t, h \in A, t, h \notin P$ が存在して $h(xt - as) = 0$ であることを意味する．ゆえに $ht \in I$ であり，$I \not\subset P$ である．よって $I = A$ となり，s は A の単元である．（証明終）

定理 *3.2.14*

A が Noether なら命題 3.2.13 の逆が成り立つ．すなわち A を全商環で整閉であるような被約 Noether 環とすると，A は正規である．

証明.

Step 1. A の全商環 $Q(A)$ は有限個の体の直積であること（これは A が被約 Noether 環なら成り立つ）．

A が Noether なので，有限個の極小素イデアルを持つ．それを $P_1, \dots, P_r$ とする．系 2.4.15 より $\operatorname{Ass} A = \{P_1, \dots, P_r\}$ であるので，$S = A \setminus (P_1 \cup \cdots \cup P_r)$ とおくと $S^{-1}A = Q(A)$ である．このとき $\operatorname{Spec} Q(A) = \{PQ(A) \mid P \in \operatorname{Spec} A, P \subset P_1 \cup \cdots \cup P_r\}$ であり，$P \in \operatorname{Spec} A$ が $P \subset P_1 \cup \cdots \cup P_r$ を満たすなら Prime avoidance（補題 1.10.1）より $P \subset P_i$ となる i が存在するので，極小性から $\operatorname{Spec} Q(A) = \{P_1 Q(A), \dots, P_r Q(A)\}$ である．よってこれらは全て極大で，また互いに素．A が被約だから $Q(A)$ もまたそうなので，中国剰余定理から；

$$Q(A) \cong \prod Q(A)/P_i Q(A)$$

となり $Q(A)$ は体の有限直積である．

Step 2. $A \cong \prod A/P_i$ であること．

$e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \in Q(A)$ について，$e_i^2 - e_i = 0$ よりこれらは A 上整である．A は $Q(A)$ 上整なので，これは $a_i + 1 \in \bigcap_{i \neq j} P_j, a_i \in P_i$ となる $a_i \in A$ の存在を意味する．よって P_i たちは互いに素となり，中国剰余定理から $A \cong \prod A/P_i$ である．

Step 3. A/P_i が整閉整域であること．

$\operatorname{Frac}(A/P_i) = A_{P_i}$ に注意する．実際，準同型；

$$\varphi : \operatorname{Frac}(A/P_i) \to A_{P_i}; \frac{x + P_i}{s + P_i} \mapsto x/s$$

を考えると，$x/s = 0$ ならばある $h \notin P_i$ が存在して $xh = 0 \in P_i$ となるので $x + P_i = 0$ となり，φ は単射．また任意の $x/s \in A_{P_i}$ について $x \notin P_i$ ならば $\varphi((x + P_i)/(s + P_i)) = x/s$ であり，$x/s \in P_i A_{P_i}$ ならば $P_i = \operatorname{Ann} y$ となる $y \in A$ について，A が被約なので $y \notin P_i$ だから $xy = 0$ となり $P_i A_{P_i} = 0$，すなわち $\varphi(0) = x/s = 0$ である．以上より φ は全単射となり同型である．ここで，自然な準同型 $Q(A) \to A_{P_i}; x/s \mapsto x/s$ を考えると，この核は $P_i Q(A)$ であるので，$Q(A)/P_i Q(A)$ は A_{P_i} の部分体で

ある．一方で自然に $\mathrm{Frac}(A/P_i) \subset Q(A)/P_iQ(A)$ であるから，$Q(A)/P_iQ(A) = A_{P_i}$ であることがわかる．ゆえに $Q(A) \cong \prod A_{P_i}$ である．よって $A \cong \prod A/P_i$ は $Q(A)$ で整閉であることから，各 A/P_i は整閉整域である．

以上より A は整閉整域の直積なので正規であることが示された．（証明終）

§ 3　超越次数

体の理論において，拡大の次数を考えることができたことを思い出そう．一般の環拡大について同様の概念を考えたい．少し条件を制限して，整域 A について全商環を考えるとこれは体になる．これを使って整域の拡大，とくに体上の有限型の代数について考えよう．まずは次の命題に倣って，元の超越性を複数個の場合に拡張しよう．

命題 *3.3.1*

L/k を体の拡大とする．$\alpha \in L$ が k 上超越的であることと，次の準同型；

$$\varphi : k[X] \longrightarrow L; f(X) \longmapsto f(\alpha)$$

が単射であることは同値である．

証明.

$(\Longleftarrow)$ は明らかだろう．$\alpha \in L$ が k 上超越的と仮定する．$\varphi(f) = \varphi(g)$ としよう．このとき $\varphi(f-g) = (f-g)(\alpha) = 0$ となるが，α は超越元なので $f - g = 0$ となり，$f = g$ である．（証明終）

定義 *3.3.2*（代数的に独立）

L/k を体の拡大とする．$\alpha_1, \dots, \alpha_r \in L$ に対し，

$$\varphi : k[X_1, \dots, X_r] \longrightarrow L; f(X_1, \dots, X_r) \longmapsto f(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$$

が単射であるとき，$\alpha_1, \dots, \alpha_r$ は k 上**代数的に独立 (algebraically independent)** であるという．また，部分集合 $S \subset L$ に対し，その任意の有限部分集合が代数的に独立であるとき，S を k 上代数的に独立な集合であるという．

これを用いて超越次数を定義しよう．

定義 *3.3.3*（超越基底）

L/k を体の拡大とする．$\{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$ が k 上代数的に独立な集合で，$L/k(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ が代数拡大であるとき，$\alpha_1, \dots, \alpha_r$ を L/k の**超越基底 (transcendental basis)** といい，$r = \mathrm{tr.deg}_k\, L$ とかいてこれを**超越次数 (transcendence degree)** という．

L/k が代数拡大であるときは $\emptyset$ を超越基底とし，$\mathrm{tr.deg}_k\, L = 0$ と定める．超越次数の well-definedness を示そう．

命題 *3.3.4*（超越次数の well-definedness）

拡大 L/k に対し，超越基底は存在し，その個数 (濃度) は一致する．

証明.

超越基底が有限のときのみ示す.

Step 1. 超越基底が存在すること.

集合族；

$$\Sigma = \left\{ S \;\middle|\; S : \text{代数的に独立な集合} \right\}$$

は空ではなく，包含関係により帰納的順序集合をなす．よって Zorn の補題より極大元 $\mathcal{S}$ が存在する．このとき，$L/k(\mathcal{S})$ を考えると，ある $x \in L$ が $k(\mathcal{S})$ 上代数的でないと仮定したとき，$\mathcal{S} \cup \{x\}$ は代数的に独立で，$x \notin \mathcal{S}$ なので $\mathcal{S}$ の極大性に反する．よって $L/k(\mathcal{S})$ は代数拡大で，$\mathcal{S}$ が超越基底となる.

Step 2. 次数の well-definedness.

$\{\alpha_1, \ldots, \alpha_r\}$ と $\{\beta_1, \ldots, \beta_s\}$ がどちらも L/k の超越基底であるとする．$s \leq r$ を言えばよい．$L/k(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ は代数拡大なので，β_1 は $k(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ 上代数的．すなわち，$a_i \in k(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ によって，関係式；

$$a_n {\beta_1}^n + a_{n-1} {\beta_1}^{n-1} + \cdots + a_1 \beta_1 + a_0 = 0 \quad (a_n \neq 0) \tag{(*)}$$

を満たす．β_1 は L/k において超越的なので，少なくとも 1 つの α_i が存在して，$a_0, \ldots, a_n$ のうち少なくとも 1 つには α_i が表れる．番号を取り替えて，それを α_1 とすると，$(*)$ は α_1 が $k(\alpha_2, \ldots, \alpha_r, \beta_1)$ 上代数的であることを示している．すると，L の任意の元は $k(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ 上代数的なので，$L/k(\alpha_2, \ldots, \alpha_r, \beta_1)$ は代数拡大である．すると，β_2 は $k(\alpha_2, \ldots, \alpha_r, \beta_1)$ 上代数的だから，$b_i \in k(\alpha_2, \ldots, \alpha_r, \beta_1)$ がとれて；

$$b_m {\beta_2}^m + \cdots + b_1 \beta_2 + b_0 = 0 \quad (b_m \neq 0) \tag{(**)}$$

とできる．ここで，β_1 と β_2 は k 上で代数的に独立だから，b_i の少なくとも 1 つには，$\alpha_2, \ldots, \alpha_r$ のうち 1 つ以上が表れる．番号を取り替えてそれを α_2 とすると，$(**)$ は α_2 の $k(\alpha_3, \ldots, \alpha_r, \beta_1, \beta_2)$ 上の関係式と見ることができる．よって，同様の議論から $L/k(\alpha_3, \ldots, \alpha_r, \beta_1, \beta_2)$ は代数拡大．これを続けると $L/k(\alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_r, \beta_1, \ldots, \beta_i)$ はすべて代数拡大である.

ここで $r < s$ を仮定する．$L/k(\alpha_r, \beta_1, \ldots, \beta_{r-1})$ は代数拡大で，β_r はこの上で代数的になる．いま $\{\beta_1, \ldots, \beta_r\}$ は代数的に独立なので，先程の議論と同様に α_r は $k(\beta_1, \ldots, \beta_r)$ 上代数的である．しかし $\alpha_1, \ldots, \alpha_{r-1}$ は $k(\alpha_r, \beta_1, \ldots, \beta_r)$ 上代数的なので，$L/k(\beta_1, \ldots, \beta_r)$ は代数拡大になり矛盾．よって $r \leq s$ であることがわかった.

（証明終）

定義 *3.3.5*

k を体とする．k 代数 A が整域であるとき，体の拡大 $\mathrm{Frac}\, A/k$ の超越次数を A の（k 上の）超越次数と定義し，$\mathrm{tr.deg}_k\, A$ とかく.

命題 *3.3.6*

k を体とし，A を k 上の有限型整域とすると，0 でない A の素イデアル P に対し，

$$\mathrm{tr.deg}_k\, A/P < \mathrm{tr.deg}_k\, A$$

が成り立つ.

証明.

仮定から $k[X_1,\dots,X_n]$ の 0 でない素イデアル P' が存在して $A=k[X_1,\dots,X_n]/P'$ とかけている．簡単のため $k[X]=k[X_1,\dots,X_n]$ と略記しよう．このとき，$P\subset Q$ となる素イデアル Q について $\mathrm{tr.deg}\,k[X]/Q<\mathrm{tr.deg}\,k[X]/P$ を示せばよい．$m=\mathrm{tr.deg}\,A$ とし，$m\le\mathrm{tr.deg}\,k[X]/Q$，$r=\mathrm{tr.deg}\,k[X]/Q$ とおき，$m\le r$ と仮定する．それぞれ $k[X]/P=k[\alpha_1,\dots,\alpha_n],k[X]/Q=k[\beta_1,\dots,\beta_n]$ とし，適切に並べ替えて $\beta_1,\dots,\beta_r$ を $k[X]/Q$ の超越基とする．また $\alpha_1,\dots,\alpha_m\in k[\alpha_1,\dots,\alpha_n]$ を自然な準同型 $k[\alpha_1,\dots,\alpha_n]\longrightarrow k[\beta_1,\dots,\beta_n]$ において $\beta_1,\dots,\beta_m$ に移すものとする．また，P,Q はそれぞれ次の代入する写像；

$$\varphi:k[X_1,\dots,X_n]\longrightarrow k[\alpha_1,\dots,\alpha_n]$$
$$\psi:k[X_1,\dots,X_n]\longrightarrow k[\beta_1,\dots,\beta_n]$$

の核であるので，α_i の組の関係式が存在すれば，それは対応する β_i の組の関係式でもある．さて，任意の 0 でない $q\in Q$ をとると，$\mathrm{tr.deg}\,k[X]/P=m$ だから，$p,\alpha_1,\dots,\alpha_m$ は代数的に独立でない．よって，ある k 上の多項式 f が存在して $f(q,\alpha_1,\dots,\alpha_m)=0$ とできる．すると，$f(p,X_1,\dots,X_m)$ は 0 でない関係式であり，これにより $\beta_1,\dots,\beta_m$ が消える．これは矛盾である．（証明終）

補題 *3.3.7*（Artin–Tate の補題）

$A\subset B\subset C$ を環の拡大とする．A が Noether 環であり，C は有限型 A 代数でかつ B 加群として有限生成であるとすると，B は有限型 A 代数である．

証明.

$C=A[c_1,\dots,c_r]$ とおくと，C は有限 B 加群なので c_i たちは B 上整である．すると；

$$c_i^{n_i}+b_{i1}c_i^{n_i-1}+\cdots+b_{n_i}=0$$

となる $b_{ij}\in B(1\le i\le r,1\le j\le n_i)$ たちがとれる．これらが A 上生成する有限型 A 代数を $B'=A[b_{ij}]$ とおく．このとき，構成から C は B' 上整であり，また $C=B'[c_1,\dots,c_r]$ すなわち C は有限型 B' 代数である．これより C は有限 B' 加群となる．いま A が Noether なので B' も Noether（Hilbert の基底定理）で，C の部分 B' 加群 B は有限生成である．よって B は有限型 B' 代数で，B' は有限型 A 代数だから B は有限型 A 代数である．（証明終）

命題 *3.3.8*（Zariski の補題）

k を体とし，L を k 上の有限型代数とする．このとき，L が体ならば体の拡大 L/k は有限次拡大である．

証明.

$L=k[x_1,\dots,x_n]$ としよう．L が k 上代数的でないと仮定すると，並び替えることで $x_1,\dots x_r$ は k 上代数的に独立で，$x_{r+1},\dots,x_n$ は $F=k(x_1,\dots,x_r)$ 上代数的であるようにとれる．このとき L は F の有限次拡大体となるので，F 加群として有限生成である．

Artin–Tate の補題（補題 3.3.7）から F は有限型 k 代数である．$F=k(x_1,\dots,x_r)$ であったので，$f_i,g_i\in k[x_1,\dots,x_r]$ が存在して；

$$F=k[g_1/f_1,\dots,g_s/f_s]$$

とかける．すると $f = f_1 \dots f_s$ とおくと，$F = k[x_1, \dots, x_r][1/f]$ と表せる．さて $1/(f+1) \in k(x_1, \dots, x_r) = F$ より，多項式 $h \in k[x_1, \dots, x_r][X]$ が存在して $1/(f+1) = h(1/f)$ となる．よって $N \gg 0$ をとれば $f^N/(f+1) \in k[x_1, \dots, x_r]$ とかける．N をこのような条件を満たすものの中で最小のものとしよう．このとき $g \in k[x_1, \dots, x_r]$ が存在して $f^N = gf + g$ とかけている．$N \geq 1$ と仮定すると；

$$g/f = f^{N-1} - g \in k[x_1, \dots, x_r]$$

となるので，g は f で割り切れる．これは N の最小性に矛盾．よって $N = 0$ である．すなわち $1/(f+1) \in k[x_1, \dots, x_r]$ となり，$f \in k$ でなければならない．

よって $F = k[x_1, \dots, x_r]$ とかけるが，$F = k(x_1, \dots, x_r)$ であったことに矛盾．よって L は k 上代数的である．（証明終）

Zariski の補題の直接の応用の一つとして，Hilbert の零点定理（定理 3.7.7）の弱い形である次の定理を示しておこう．

定理 *3.3.9*（弱零点定理，week nullstellensatz）

k が代数閉体であるとき，$k[X_1, \dots, X_n]$ のすべての極大イデアル $\mathfrak{m}$ は，ある $a_1, \dots, a_n \in k$ が存在して；

$$\mathfrak{m} = (X_1 - a_1, X_2 - a_2, \dots, X_n - a_n)$$

と表せる．

証明.

簡単のため $k[X_1, \dots, X_n] = k[X]$ とかく．$\mathfrak{m}$ が極大であるから，$k[X]/\mathfrak{m}$ は体である．すると，命題 3.3.8 より $k[X]/\mathfrak{m}$ は k 代数拡大体であるので，k が代数閉体だから $k[X]/\mathfrak{m} \cong k$ である．すると，適当な全準同型写像 $\varphi : k[X]/\mathfrak{m} \twoheadrightarrow k$ が存在する．ここで $\varphi(X_i) = a_i$ とすれば，明らかに；

$$(X_1 - a_1, \dots, X_n - a_n) \subset \ker\varphi = \mathfrak{m} \tag{(*)}$$

である．また，$(X_1 - a_1, \dots, X_n - a_n)$ は $a = (a_1, \dots, a_n)$ とするときの点 a の代入写像；

$$\phi_a : k[X_1, \dots, X_n] \longrightarrow k; f \longmapsto f(a) = f(a_1, \dots, a_n)$$

の核であるので，同型 $k[X]/(X_1 - a_1, \dots, X_n - a_n) \cong k$ がなりたち，$(X_1 - a_1, \dots, X_n - a_n)$ は極大イデアルである．よって $(*)$ において等号が成り立つことがわかる．（証明終）

§ 4　Krull 次元と超越次元

まず，環の次元の 1 つを定義する．環に次元を導入する方法はいくつかあるが，ある仮定のもとでそれらは一致してしまう（Krull の次元定理，定理 5.4.8）．ここでは 1 番初等的に導入が行える Krull 次元というものを紹介しよう．

定義 *3.4.1*（Krull 次元）

環 A に対し，素イデアルの真の増大列

$$P_* : P_0 \subsetneq P_1 \subsetneq \cdots \subsetneq P_n$$

に対して，n を列 P_* の**長さ**という．最長の素イデアルの列の長さを，環 A の **Krull 次元**といい，$\dim A$ とかく．

自明な例として，体の次元は 0 である．（体でない）PID の次元は 1 である．また，命題 2.2.1 より Artin 環の次元も 0 である．実は，次元 0 の Noether 環であることと Artin 環であることは同値である．

定理 *3.4.2*

A が Artin 環であるためには，Noether 環かつ $\dim A = 0$ であることが必要十分である．

証明.

Artin 環 A は $\dim A = 0$ の Noether 環であることは見た（定理 2.2.9）．A を次元 0 の Noether 環とする．系 2.3.10 より A の極小素イデアルは有限個である．それを $P_1, \ldots, P_r$ とする．また，A の次元は 0 なので P_i が A の素イデアルのすべてである．$\sqrt{0} = \bigcap_{i=1}^r P_i$ であり，$\sqrt{0}$ は A のイデアルだから有限生成なのである $k \in \mathbb{Z}_+$ に対して $\sqrt{0}^k = 0$ である．よって，$P_1^k P_2^k \ldots P_r^k \subset (\bigcap P_i)^k = \sqrt{0}^k = 0$ なので $P_1^k P_2^k \ldots P_r^k = 0$ である．よって，**重複を許すことで**極大イデアル $P_1, \ldots, P_n$ を $P_1 \ldots P_n = 0$ となるようにできる（最大でこの中には P_i が k 回ずつ現れる）．ここで，イデアルの減少列；

$$A \supset P_1 \supset P_1P_2 \supset \cdots \supset P_1P_2 \ldots P_n = 0$$

を考えると，A が Noether 的なので定理 2.2.9 の証明と同様に，隣り合う 2 項の剰余加群；

$$M_i = P_1 \ldots P_i / P_1 \ldots P_{i-1}$$

は Noether．M_i は体 A/P_i 上の加群なので，命題 2.2.8 より M_i は Artin である．帰納的に A も Artin 的である．（証明終）

ここで，次元と関連したイデアルの情報を定義しておこう．

定義 *3.4.3*（高さ）

A を環，P を素イデアルとする．

$$\operatorname{ht} P = \sup\left\{r \in \mathbb{Z} \;\middle|\; P = P_0 \supsetneq P_1 \supsetneq \cdots \supsetneq P_r : \text{素イデアルの真減少列}\right\}$$

$$\operatorname{coht} P = \sup\left\{r \in \mathbb{Z} \;\middle|\; P = P_0 \subsetneq P_1 \subsetneq \cdots \subsetneq P_r : \text{素イデアルの真増大列}\right\}$$

を，それぞれ素イデアル P の**高さ（高度），余高度 (height, coheight)** という．coheight のことを**深さ (depth)** ということもある．一般のイデアル I については；

$$\operatorname{ht} I = \min\{\operatorname{ht} P \mid P \in V(I)\}$$

で I の高さを定義する．

定義から $\dim A$ は $\sup\{\operatorname{ht} P \mid P \in \operatorname{Spec} A\}$ である．高さと環の次元には次の関係がある．

命題 *3.4.4*

以下の 3 つが成り立つ．

(i) $\dim A_P = \mathrm{ht}\, P$
(ii) $\dim A/P = \mathrm{coht}\, P$
(iii) $\mathrm{ht}\, P + \mathrm{coht}\, P \leq \dim A$

証明.

(i) 命題 1.6.5 より，$\mathrm{Spec}\, A_P$ と $\{P' \in \mathrm{Spec}\, A \mid P' \cap (A \setminus P) = \emptyset\} = \{P' \in \mathrm{Spec}\, A \mid P' \subset P\}$ の間には包含関係を保つ全単射がある．よって，$\dim A_p = \mathrm{ht}\, P$ である．
(ii) 素イデアルの対応定理を用いれば，(i) と同様.
(iii) A の素イデアルの最長の鎖の中に P が含まれるとき，前後で区切れば最長の真増大列と真減少列になるから，$\mathrm{ht}\, P + \mathrm{coht}\, P = \dim A$ である．そうでないときは，P の最長の真増大列と真減少列をつなげたものは素イデアルの鎖の 1 つとなるから，$\mathrm{ht}\, P + \mathrm{coht}\, P \leq \dim A$ が成り立つ．

（証明終）

この命題の (iii) の不等式がいつ成り立つか，というのは重要な命題であり，それについての一つの結果が命題 3.6.8 である．

環の次元 $\dim A$ は幾何的には $\mathrm{Spec}\, A$ の次元である．加群の次元については $\mathrm{Supp}\, M$ の（幾何的な）次元をもって定義しよう．A 加群 M が有限生成なら $V(\mathrm{Ann}\, M) = \mathrm{Supp}\, M$ である（命題 1.8.7）．

定義 *3.4.5*（加群の Krull 次元）

A を環とする．有限生成 A 加群 M について $\dim A/\mathrm{Ann}\, M$ を M の **Krull 次元**と定め，$\dim M$ とかく．

ここでは有限生成ではない加群については次元を定義していないことに注意しよう．また簡単な計算により次の言い換えができることがわかる．

命題 *3.4.6*

Noether 環 A 上の有限生成加群 M について；

$$\dim M = \sup \{\dim A/P \mid P \in \mathrm{Ass}\, M\}$$

が成り立つ．

証明.

まず $\dim M = r$ とし，素イデアルの昇鎖 $\mathrm{Ann}\, M \subset P \subsetneq P_1 \subsetneq \cdots \subsetneq P_r$ を考える．次元の定義から P は $\mathrm{Ann}\, M$ の極小素イデアルとなる．ここで $V(\mathrm{Ann}\, M) = \mathrm{Supp}\, M$ であり，P は定理 2.3.6 より $\mathrm{Ass}\, M$ の元である．また $r \leq \dim A/P$ であるから，$r \leq \sup \{\dim A/P \mid P \in \mathrm{Ass}\, M\}$ が示された．次に $P \in \mathrm{Ass}\, M$ を $\dim A/P$ を最大にするものとすれば P は極小なので $\mathrm{Supp}\, M$ の元，つまり $\dim A/P \leq \dim A/\mathrm{Ann}\, M$ である．（証明終）

この節では次の定理により，具体的な環の次元を計算する方法の 1 つを紹介しよう．

定理 *3.4.7*

体 k 上有限生成な整域 A に対し，$\dim A = \mathrm{tr.deg}_k\, A$ である．

証明.

Step 1. $\dim A \leq \mathrm{tr.deg}\, A$ であること．

dim $A = r$ とし，$0 \subsetneq P_1 \subsetneq \cdots \subsetneq P_r$ とすると，命題 3.3.6 より；

$$0 \leq \mathrm{tr.deg}\, A/P_r < \mathrm{tr.deg}\, A/P_{r-1} < \cdots < \mathrm{tr.deg}\, A/P_1 < \mathrm{tr.deg}\, A$$

であるので，$r \leq \mathrm{tr.deg}\, A$ である．

Step 2. $\mathrm{tr.deg}\, A \leq \dim A$ であること．

$n = \mathrm{tr.deg}\, A$ についての帰納法で示す．まず $n = 0$ のときは明らかに $0 \leq \dim A$ である．次に $\mathrm{tr.deg}\, A = n-1$ となるすべての A について正しいとする．$\mathrm{tr.deg}\, A = n$ となる A を，$A = k[\alpha_1, \ldots, \alpha_r]$ とおく．すべての α_i は代数的でないから，α_1 が k 上超越的としてよい．$S = k[\alpha_1] \setminus \{0\}$ は積閉で，これで局所化すると $A_S = k(\alpha_1)[\alpha_2, \ldots, \alpha_r]$ となる．$k(\alpha_1) = k'$ とすると，$\mathrm{tr.deg}_{k'} A_S = n-1$ であるので，帰納法の仮定から（任意の基礎体について成り立っているので）$n-1 \leq \dim A_S$ である．ゆえに，A_S の素イデアルの列；

$$P_0 \subsetneq P_1 \subsetneq \cdots \subsetneq P_{n-1}$$

がとれる．よって命題 1.6.5 より $Q_i \cap S = \emptyset$ となる A の素イデアルの列；

$$Q_0 \subsetneq \cdots \subsetneq Q_{n-1}$$

がとれる．ここで，Q_{n-1} が極大でなければ $Q_{n-1} \subsetneq Q_n$ となる真のイデアル Q_n が存在するので，A/Q_{n-1} が体でないことを示せばよい．さて，$Q_{n-1} \cap S = (Q_{n-1} \cap k[\alpha_1]) \setminus \{0\} = \emptyset$ であるので，$\alpha_1 \notin Q_{n-1}$ である．そこで，もし $\overline{\alpha_1} \in A/Q_{n-1}$ が k 上代数的であると仮定すると，$f(\overline{\alpha_1}) = 0$ となる k 上の多項式 f があり，これは $f(\alpha_1) \in Q_{n-1}$ を意味する．ところが $f(\alpha_1) \in k[\alpha_1]$ であるから，矛盾．よって $\overline{\alpha_1}$ は A/Q_{n-1} の超越的な元であるから，$\mathrm{tr.deg}_k A/Q_{n-1} > 0$ である．よって命題 3.3.8 より A/Q_{n-1} は体ではない．よって $n \leq \dim A$ が示された．

（証明終）

この定理の系として，直感的な次の事実が得られる．

系 *3.4.8*

$\dim k[X_1, \ldots, X_n] = n$ である．また，$n \neq m$ なら $k[X_1, \ldots, X_n]$ と $k[X_1, \ldots, X_m]$ は同型ではない．

§ 5　上昇定理と下降定理

この節では，次節で Noether の正規化定理（定理 3.6.3）を証明する際に有力な道具となる，Cohen and Seidenberg (1946) による**上昇定理**と**下降定理**を紹介しよう．定理と名前がついているが，以下に紹介するようにむしろ環の拡大の間に成り立つ性質として捉えられるものである．記号を思い出しておこう．A 代数 $f : A \to B$ について，$P' \in \mathrm{Spec}\, B$ に対して $f^{-1}(P') \in \mathrm{Spec}\, A$ を $P' \cap A$ と書くことにする．

定義 *3.5.1*（俯瞰定理）

$A \subset B$ を環の拡大とする．任意の $P \in \mathrm{Spec}\, A$ に対して，$P' \cap A = P$ となる $P' \in \mathrm{Spec}\, B$ が存在するとき，A, B の間に**俯瞰定理 (lying-over threorem)** が成り立つという．

A のイデアル I に対し，B のイデアル I' が存在して $I' \cap A = I$ となっているとき，I' は I の**上にある (lying over)** という．

定義 *3.5.2*（上昇定理と下降定理）

$A \subset B$ を環の拡大とする．任意の A の素イデアルの鎖 $P_1 \subset \cdots \subset P_n$ と $P'_1 \in \operatorname{Spec} B$ で $P'_1 \cap A = P_1$ となるものに対して，B の素イデアルの鎖 $P'_1 \subset \cdots \subset P'_n$ で $P'_i \cap A = P_i$ となるものが存在するとき，A, B の間に**上昇定理 (going-up theorem)** が成り立つという．また任意の A の素イデアルの鎖 $P_1 \subset \cdots \subset P_n$ と $P'_n \in \operatorname{Spec} B$ で $P'_n \cap A = P_n$ となるものに対して，B の素イデアルの鎖 $P'_1 \subset \cdots \subset P'_n$ で $P'_i \cap A = P_i$ となるものが存在するとき，A, B の間に**下降定理 (going-down theorem)** が成り立つという．

次の命題は簡単だが大切である．

命題 *3.5.3*

$A \subset B$ を整域の拡大とする．B が A 上整であるとき，A が体であることと B が体であることは同値である．

証明.

$(\Longrightarrow)$

A が体であるとき，任意の $0 \neq x \in B$ について；

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

となる a_i に対して B が整域だから $a_n \neq 0$ である．よって $x^{-1} = -a_n{}^{-1}(x^{n-1} + \cdots + a_{n-1})$ であることがわかる．

$(\Longleftarrow)$

B が体であると仮定すると，任意の $0 \neq x \in A$ について $x^{-1} \in B$ であるから；

$$x^{-n} + a_1 x^{-n+1} + \cdots + a_n = 0$$

となる a_i が存在する．両辺に $x^{n-1} \in A$ をかけると $x^{-1} = -(a_1 + a_2 x + \cdots + a_n x^{n-1}) \in A$ であることがわかる．

（証明終）

この命題は系 3.5.8 の特別な場合であることを注意しておく．次の補題の証明は明らかであるので省略するが，この節の鍵となるものである．

補題 *3.5.4*

$A \subset B$ を整拡大とする．このとき，I' が B のイデアルならば B/I' は $A/(I' \cap A)$ 上整である．

定理 *3.5.5*

$A \subset B$ を整拡大とすると俯瞰定理が成り立つ．また $P'_1, P'_2 \in \operatorname{Spec} B$ が $P \in \operatorname{Spec} A$ の上に乗っていて，$P'_1 \subset P'_2$ ならば $P'_1 = P'_2$ である（P の上にある素イデアルの間には包含関係がない）．

証明.

$P \in \operatorname{Spec} A$ をとる．A 加群の完全列 $0 \longrightarrow A \longrightarrow B$ を P で局所化して考えると，B_P は A_P の整拡大である．いま PA_P のうえにある B_P の素イデアルと P のうえにある B の素イデアルは 1 対 1 対応があるか

ら，P が極大イデアルの場合に帰着する．P の上にある $P' \in \operatorname{Spec} B$ の存在を示そう．もし PB が B の真のイデアルならば，それを含む B の極大イデアル P' に対して $P \subset P' \cap A$ で，$1 \notin P' \cap A$ なので $P = P' \cap A$ となって P' は P の上にあることがわかる．さて $PB = B$ であると仮定しよう．

$$1 = \sum_{i=1}^{n} c_i b_i \quad (c_i \in P, b_i \in B)$$

と表示するとき，$C = A[b_1, \ldots, b_n]$ とおくとこれは命題 3.1.5 より A 上有限生成で，$PC = C$ であるので，中山の補題から $aC = 0$ かつ $1 - a \in P$ となるような $a \in A$ が存在する．いま $1 \in C$ なので $a = 0$ だから，$1 \in P$ となって矛盾する．よって常に PB は真のイデアルだから，俯瞰定理が成り立つ．

また一意性については P' を P の上にある素イデアルとすると，補題から B/P' は A/P の整拡大だから命題 3.5.3 により P が極大ならば P' も極大なので成り立っている．　（証明終）

系 3.5.6

$A \subset B$ を整拡大とする．任意の $P' \in \operatorname{Spec} B$ と $P = P' \cap A \in \operatorname{Spec} A$ に対して，$\operatorname{ht} P' \leq \operatorname{ht} P$ である．

証明.

長さ $\operatorname{ht} P'$ の B の素イデアルの鎖を A に引き戻すと，先の定理からそれも長さ $\operatorname{ht} P'$ の A の素イデアル鎖となる．　（証明終）

定理 3.5.7

$A \subset B$ を整拡大とすると，上昇定理が成り立つ．

証明.

帰納法によって $n = 2$ の場合についてのみ示せば十分である．$\overline{A} = A/P_1, \overline{B} = B/P'_1$ とする．補題 3.5.4 より $\overline{B}$ は $\overline{A}$ 上整である．そこで $\overline{P_2} \in \operatorname{Spec} \overline{A}$ について定理 3.5.5 より $\overline{P'_2} \in \operatorname{Spec} \overline{B}$ が存在して $\overline{P'_2} \cap \overline{A} = \overline{P_2}$ である．$\overline{P'_2}$ に対応する $P'_2 \in \operatorname{Spec} B$ について $P'_2 \cap A = P_2$ となり，示された．　（証明終）

系 3.5.8

$A \subset B$ を整拡大とする．このとき $\dim A = \dim B$ である．

証明.

上昇定理により $\dim A \leq \dim B$ が従い，B の極大な昇鎖を引き戻せばそれは A のイデアルの昇鎖となるから定理 3.5.5 より $\dim B \leq \dim A$ がわかる．　（証明終）

次に整拡大の間の下降定理について考えていくが，上昇定理とは異なり若干の仮定が必要である．そのためにいくつか準備をしよう．

定義 3.5.9

$A \subset B$ を環の拡大，I を A のイデアルとする．$x \in \overline{A}_B$ について，$x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = 0$ となる a_i をすべて I の元であるようにとれるとき，x は I **上整**であるという．I 上整である B の元全体を $\overline{I}_B$ とかき，B における I の**整閉包**という．

補題 *3.5.10*

$A \subset B$ を整拡大，I を A のイデアルとする．自然な準同型 $A \to \overline{A}_B$ による I の像が $\overline{A}_B$ で生成するイデアルと I' とおくと，$\overline{I}_B = \sqrt{I'}$ である．

証明.

$x \in \overline{I}_B$ をとる．このとき，$a_i \in I$ がとれて；

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

となる．すると $x^n = -(a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n)$ であるので，$x \in \overline{A}_B$ であるから $x^n \in I'$ すなわち $x \in \sqrt{I'}$ である．

一方，$x \in \sqrt{I'}$ とすると，$x^n \in I'$ となる n が存在する．よって，$c_i \in \overline{A}_B$ と $x_i \in I$ によって $x^n = \sum_{i=1}^m c_i x_i$ とかける．命題 3.1.5 より，$\varphi : A[c_1, \ldots, c_m] \to A[c_1, \ldots, c_m]; y \mapsto x^n y$ に対して Cayley–Hamilton の定理（定理 1.3.3）を適用できる．これにより x^n は I 上整であり，$x \in \overline{I}_B$ である．（証明終）

命題 *3.5.11*

$A \subset B$ を整域の拡大とし，さらに A は整閉であるとする．A のイデアル I と $x \in \overline{I}_B$ について，x の $k = \mathrm{Frac}\, A$ 上の最小多項式 $F_x = T^n + c_1 T^{n-1} + \cdots + c_n$ をとると，$c_i \in \sqrt{I}$ とできる．

証明.

I 上整なので，k 上代数的なことは明らか．F_x のすべての根を $x = x_1, \ldots, x_m$ とし，それらを k に添加した体を L とすると，各 x_j は x と同じ関係式によって I 上整である．すると，L において F_x の係数 c_i は x_j の多項式であるので，c_i は I 上整である．すると，$c_i \in k$ であったから $c_i \in \overline{I}_k$ である．ここで，補題を $A \subset k$ について考えると，A は整閉なので $I' = I$ であるから $c_i \in \overline{I}_k = \sqrt{I}$ である．（証明終）

定理 *3.5.12*

$A \subset B$ を整域の整拡大とし，さらに A は整閉であるとすると下降定理が成り立つ．

証明.

上昇定理と同様に $n = 2$ の場合に帰着できる．P_2 が B で生成するイデアルを BP_2 とかく．$B_{P'_1}$ について同様に考えると，命題 1.8.3 より $B_{P'_1} P_2 \cap A = P_2$ を示せばよいことがわかる．

$x/s \in B_{P'_1} P_2 \cap A$ をとる．このとき $x \in BP_2$，$s \in B - P'_1$ である．ここで補題 3.5.10 において B が A 上整なので $\overline{A}_B = B$ であり，$\sqrt{BP_2} = \overline{P_2}_B$ となるので x は P_2 上整である．すると命題 3.5.11 より，x の $\mathrm{Frac}\, A$ 上の最小多項式は；

$$F_x = T^n + a_1 T^{n-1} + \cdots + a_n \quad (a_i \in P_2)$$

とかける．ここで $x/s \in A$ より $x/s = y$ とおくと，$sy = x$ が成り立つので；

$$F_s = T^n + \frac{a_1}{y} T^{n-1} + \cdots + \frac{a_n}{y^n}$$

である．

$P_2 \subset B_{P'_1} P_2 \cap A$ は明らかなので，$y \in B_{P'_1} P_2 \cap A$ について $y \notin P_2$ と仮定して矛盾を導こう．s は A 上整だから，命題 3.5.11 を $I = A$ として適用すると各 $a_i / y^i \in A$ である．すると $a_i / y^i \cdot y^i = a_i \in P_2$ で $y^i \notin P_2$ だか

ら $a_i/y^i \in P_2$ である．すると；

$$s^n = -\left(\frac{a_1}{y}s^{n-1} + \cdots + \frac{a_n}{y^n}\right)$$

であるから $s^n \in BP_2 \subset BP_1 \subset P'_1$ であり，$s \in P'_1$ となるがこれは矛盾である．（証明終）

命題 *3.5.13*

環の拡大 $A \subset B$ に対して下降定理が成り立っているとする．任意の $P' \in \operatorname{Spec} B$ と，$P = P' \cap A \in \operatorname{Spec} A$ に対して $\operatorname{ht} P \leq \operatorname{ht} P'$ が成り立つ．

証明.

$\operatorname{ht} P = r$ とし，A の素イデアル鎖 $P_0 \subsetneq \cdots \subsetneq P_r$ を考えると，下降定理から B の素イデアル鎖 $P'_0 \subset \cdots \subset P'_r = P'$ がとれる．もし $P'_i = P'_{i+1}$ ならば $P_i = P_{i+1}$ となることに注意して，$r \leq \operatorname{ht} P'$ であることがわかる．（証明終）

系 *3.5.14*

$A \subset B$ が整域の整拡大で，A が整閉であるとする．B のイデアル $I' \neq (1)$ について，$\operatorname{ht} I' = \operatorname{ht}(I' \cap A)$ が成り立つ．

証明.

仮定より下降定理が成り立つことに注意すると，系 3.5.6 と命題 3.5.13 から I' が素イデアルのときに成り立っていることがわかる．I' が一般のイデアルのときを考えよう．補題 3.5.4 により $A/(I' \cap A) \subset B/I$ は整拡大であることに注意する．また以下の式；

$$\operatorname{ht}(I' \cap A) = \min_{P \in V(I' \cap A)} \operatorname{ht} P \leq \min_{P' \in V(I')} \operatorname{ht}(P' \cap A) = \min_{P' \in V(I')} \operatorname{ht} P' = \operatorname{ht} P'$$

が成り立っていて，$P \in V(I \cap A)$ について定理 3.5.5 から $P' \in V(I)$ が存在して $P' \cap A = P$ であるので，等号が成立していることがわかる．（証明終）

§ 6　Noether の正規化定理

この節では Noether の正規化定理（定理 3.6.3）を証明し，体上の有限生成代数について考察しよう．

補題 *3.6.1*

$k[X_1, \ldots, X_n]$ について，任意の $f \in k[X_1, \ldots, X_n]$ に対し，$f \notin k$ ならば，与えられた自然数 q の倍数 $m_2, \ldots, m_n$ が存在して，$y_1 = f, y_2 = X_2 + X_1^{m_2}, \ldots, y_n = X_n + X_1^{m_n} (m_i \geq 0)$ とおくとき $k[X_1, \ldots, X_n]$ は $k[y_1, \ldots, y_n]$ 上整である．

証明.

f を単項式の和として $f = \sum a_i M_i$ とする．$\deg f = d$ とおき，t を d より大きい q の倍数としよう．$i \leq 2$ について，$m_i = t^{i-1}$ とおく．$M = X_1^{k_1} X_2^{k_2} \ldots X_n^{k_n}$ について，$X_i = y_i + X_1^{m_i}$ を代入すると；

$$M = X_1^{\sum k_i t^{i-1}} + (X_1\text{について低次の } X_1, y_2, \ldots, y_n\text{の項})$$

である．そこで $\omega(M) = \sum k_i t^{i-1}$ とおく．f を構成する単項式 $M = X_1^{k_1} \dots X_n^{k_n}$，$M' = X_1^{l_1} \dots$，$X_n^{l_n}$ に対して，辞書式順序において $(l_n, \dots, l_1) \leq (k_n, \dots, k_1)$ ならば $\omega(M') \leq \omega(M)$ となるから，M_i のうちで $\omega(M)$ が最大のものは唯一つしかない．それを M_1 とおく．このとき；

$$f = a_1 X_1^{\omega(M_1)} + (X_1\text{について低次の } X_1, y_2, \dots, y_n\text{の項})$$

であるので，$y_1 = f$ であったことを思い出すと，X_1 は $k[y_1, \dots, y_n]$ を係数とする多項式；

$$X^{\omega(M_1)} + (X \text{ についての低次の項}) + \frac{1}{a_1} y_1$$

の根である．よって X_1 は $k[y_1, \dots, y_n]$ 上整である．すると，$2 \leq i$ について X_i は X_1, y_i でかけているので，$k[X_1, \dots, X_n]$ は $k[y_1, \dots, y_n]$ 上で整である．（証明終）

定理 *3.6.2*（多項式環の正規化定理）

$k[X_1, \dots, X_n]$ とそのイデアル I を考える．$\mathrm{ht}\, I = r$ のとき，$y_1, \dots, y_n \in k[X_1, \dots, X_n]$ が存在して，$k[X_1, \dots, X_n]$ は $k[y_1, \dots, y_n]$ 上整であって，$k[y_1, \dots, y_n]$ のイデアルとして $I \cap k[y_1, \dots, y_n] = (y_1, \dots, y_r)$ とできる．

証明.

r についての帰納法で示す．$r = 0$ のときは $I = 0$ なので $y_i = X_i$ とすればよい．

$r - 1$ まで正しいとする．$I' \subset I$ を $\mathrm{ht}\, I' = r - 1$ となるものとする．帰納法の仮定から $y'_1, \dots, y'_n$ で $I' \cap k[y'_1, \dots, y'_n] = (y'_1, \dots, y'_r) \subset I \cap k[y'_1, \dots, y'_n]$ となるものがとれる．系 3.5.14 より $\mathrm{ht}\, I' \cap k[y'_1, \dots, y'_n] = r - 1, \mathrm{ht}\, I \cap k[y'_1, \dots, y'_n] = r$ であるので，ある $f \in I \cap k[y'_1, \dots, y'_n]$ で $f \notin I' \cap k[y'_1, \dots, y'_n]$ となるものがある．$I' \cap k[y'_1, \dots, y'_n] = (y'_1, \dots, y'_r)$ より，$f(0, \dots, 0, y'_r, \dots, y'_n)$ も同じ条件を満たす．よって $f \in k[y'_r, \dots, y'_n]$ としてよい．ここで補題 3.6.1 を用いると $y''_r = f, \dots, y''_n$ で $k[y'_r, \dots, y'_n]$ が $k[y''_r, \dots, y''_n]$ 上整であるものがとれる．ここで；

$$y_1 = y'_1, \dots, y_{r-1} = y'_{r-1}, y_r = y''_r, \dots, y_n = y''_n$$

とすると $k[X_1, \dots, X_n]$ は $k[y_1, \dots, y_n]$ 上整で，$I \cap k[y_1, \dots, y_n] \supset (y_1, \dots, y_r)$ であって $\mathrm{ht}(y_1, \dots, y_r) \geq r$ だから $\supsetneq$ ではありえず，$I \cap k[y_1, \dots, y_n] = (y_1, \dots, y_r)$ である．（証明終）

定理 *3.6.3*（Noether の正規化定理）

k を体，A を有限生成 k 代数とする．このとき，k 上代数的に独立であるような $z_1, \dots, z_s \in A$ がとれて，A は $k[z_1, \dots, z_s]$ 上整である．

証明.

A が有限生成 k 代数であるから，全準同型 $\varphi : k[X_1, \dots, X_n] \to A$ が存在する．$I = \ker \varphi, \mathrm{ht}\, I = r$ とおき，前定理を適用して $y_1, \dots, y_n$ を得る．y_{r+j} の φ による像を z_j とすると，$k[X_1, \dots, X_n]$ は $k[y_1, \dots, y_n]$ 上整なので，$A = \varphi(k[X_1, \dots, X_n])$ は $k[z_1, \dots, z_{n-r}] = \varphi(k[y_1, \dots, y_n])$ 上整である．よって $z_1, \dots, z_{n-r}$ が k 上代数的に独立ならばよい．z_i についての関係式があったとすると，それの z_i を y_{r+i} に置き換えたものは $I = \ker \varphi$ の元であるが，$I \cap k[y_1, \dots, y_n] = (y_1, \dots, y_r)$ なので係数は 0 である．よって代数的に独立となり，主張が従う．（証明終）

Noether の正規化定理によって，体上の有限生成代数 A が**鎖状環**と呼ばれる環になることがわかる．

定義 *3.6.4*（鎖状環）

環 A の素イデアルの真増大列 $P_0 \subset P_1 \subset \cdots$ についてどの隣接した 2 項の間にも素イデアルが存在しないとき，その鎖は飽和しているという．任意の $P \subset P'$ となる素イデアルについて，次の飽和したイデアルの鎖；

$$P = P_0 \subsetneq \cdots \subsetneq P_n = P'$$

の長さがすべて同一の有限値であるとき，A を**鎖状環 (catenary ring)** という．

定理 *3.6.5*

体 k 上有限生成な整域 A に対して，飽和した素イデアル鎖 $P_0 \subsetneq \cdots \subsetneq P_t$ について；

$$t = \dim A/P_0 - \dim A/P_t$$

である．つまり A は鎖状環である．

証明.

$0 = P_0 \subset \cdots \subset P_t$ が飽和していて，P_t が極大であるとする．環を適当に割ることで上の状態に帰着できるので，これについて t についての帰納法を用いて，$t = \dim A$ を示せばよい．

$t = 0$ のとき，A は体であるので明らか．$t-1$ まで正しいとする．$\dim A = \operatorname{tr.deg} A = d$ とおくと，Noether の正規化定理より，$z_1, \ldots, z_d \in A$ が存在して A は $k[z_1, \ldots, z_d]$ 上整である．ここで，任意の i について $z_i \notin P_1$ と仮定する．このとき $P_1 \cap k[z_1, \ldots, z_d] \subset k$ なので，$P_1 \cap k[z_1, \ldots, z_d] = 0$ である．ところが系 3.5.14 より $1 = \operatorname{ht} P_1 = \operatorname{ht}(P_1 \cap k[z_1, \ldots, z_d])$ であるので矛盾．よって $z_1 \in P_1$ としてよい．このとき $z_j \notin P_1 (j \neq 1)$ に注意して，A/P_1 と $k[z_1, \ldots, z_d]/(P_1 \cap k[z_1, \ldots, z_d]) = k[z_2, \ldots, z_d]$ について帰納法の仮定から $t-1 = d-1$ である．よって $t = d$ である．（証明終）

鎖状環の準同型像はまた鎖状環であることに注意すると，体上の有限生成代数はすべて鎖状環である．そこで次の定義をする．

定義 *3.6.6*（強鎖状環）

A を環とする．任意の有限生成 A 代数が鎖状であるとき，A は**強鎖状環 (universally catenary ring)** であるという．

先に述べたことから A が強鎖状であることと，すべての n について $A[X_1, \ldots, X_n]$ が鎖状であることは同値であり，体 k は強鎖状である．

鎖状環というトピックは命題 3.4.4 (iii) の不等式と関係している．明らかに A が局所整域（極大イデアルと極小イデアルが一意的）で鎖状ならば，等号が成り立つ．すなわち，任意の $P \in \operatorname{Spec} A$ について；

$$\operatorname{ht} P + \operatorname{coht} P = \dim A$$

が成り立つ．そこで，この性質のことを本書では**弱次元公式**が成り立つ，ということにしよう．

定義 *3.6.7*（弱次元公式）

環 A について，任意の $P \in \operatorname{Spec} A$ について；

$$\operatorname{ht} P + \operatorname{coht} P = \dim A$$

が成り立つとき，A において**弱次元公式 (week dimension formula)** が成り立つという．

この表現のもとで，先に述べたことは局所整域である鎖状環において弱次元公式が成り立つ，と言い換えることができる．ではその逆，弱次元公式が成り立つ局所整域 A は鎖状環である，は成り立つだろうか？これは A が Noether 局所整域ならば正しい（Ratliff (1972)）がその証明は難しい（松村 (1980)，定理 31.4.）．一方で，鎖状どころか強鎖状環ですら弱次元公式が成り立たない例が存在する（例 B.2.1）．しかし，実用の面では定理 3.6.5 により次の結果が従う．

命題 *3.6.8*

体 k 上の有限生成整域 A において弱次元公式が成り立つ．

証明.

定理 3.6.5 より任意の極大イデアル $\mathfrak{m}$ について，極大イデアルで終わる飽和した鎖は $\dim A - \dim A/\mathfrak{m} = \dim A$ 個の素イデアルからなる．（証明終）

ところで，**次元公式**と呼ばれる等式も存在する．A を Noether 整域，B を A 上の有限生成整域とする．任意の $P \in \operatorname{Spec} B$ と $P' = P \cap A$ について；

$$\operatorname{ht} P + \operatorname{tr.deg}_{k(P')} k(P) = \operatorname{ht} P' + \operatorname{tr.deg}_{\operatorname{Frac}(A)} \operatorname{Frac}(B)$$

が成り立つとき，A と B の間で**次元公式 (dimension formula)** が成り立つという．A が体のときこれは体上有限生成整域についての弱次元公式にほかならない．

実際の Noether 環はほとんどが鎖状環であることが知られているが，その証明は Cohen–Macaulay 環の登場を待たなければならない．また，鎖状でない Noether 環の例は Nagata (1956) で与えられている．それだけでなく鎖状であるが強鎖状でない Noether 環の例も永田によって与えられている．

§ 7　Hilbert の零点定理

この節では，（古典的）代数幾何学の基礎を成す零点集合について紹介し，Hilbert の零点定理を証明しよう．

定義 *3.7.1*（Affine-n 空間）

k を（代数閉）体とする．k の元 n 個の組すべてからなる集合を n 次元 **Affine 空間 (Affine space)** という．

体 k は代数閉でなくても構わないが，後述する Hilbert の零点定理は代数閉体でしか成り立たないため，注意が必要となる．

$A = k[X_1, \ldots, X_n]$ に対し，$f \in A$ と $(a_1, \ldots, a_n) = P \in k^n$ について $f(P) := f(a_1, \ldots, a_n)$ と定めることにより，A の元を k^n から k への写像と解釈することができる．

定義 *3.7.2*（零点集合）

$T \subset A$ とする．$Z(T) = \left\{P \in k^n \;\middle|\; 任意の\ f \in T\ に対し\ f(P) = 0\right\}$ を，T の**零点集合 (zero set)** という．

A は Noether 環なので，イデアル I は有限個の生成元 $(f_1, \ldots, f_n)$ を持つ．よって，$Z(I)$ は有限個の多項式 $f_1, \ldots, f_n$ の共通の零点と考えられる．

定義 3.7.3（代数的集合）

$X \subset k^n$ に対し，ある $T \subset A$ が存在して，$X = Z(T)$ となるとき，X を**代数的集合 (algebraic set)** という．

I を T によって生成される A のイデアルとすると，$Z(T) = Z(I)$ が成り立つので，代数的集合 X に対応する T をイデアルとなるように取れる．

命題 3.7.4

代数的集合全体は閉集合系の公理を満たす．

証明.

Step 1. $Z(0) = \mathbb{A}^n$，$Z(1) = \emptyset$ である．

Step 2. 有限和について．

$X = Z(T_X), Y = Z(T_Y)$ を代数的集合とする．$X \cup Y = Z(T_X T_Y)$ である．実際 $\subset$ は明らかで，$p \in Z(T_X T_Y)$ とすると，$P \notin X$ ならば，ある $f \in T_X$ が存在して $f(P) \neq 0$ であるので，任意の $g \in T_Y$ について $f(P)g(P) = 0$ であることから $g(P) = 0$ である．よって，$P \in Y$ となる．ゆえに $P \in X \cup Y$ である．

Step 3. 交わりについて．

X_λ を代数的集合とし，$X_\lambda = Z(T_\lambda)$ とすると

$$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda = Z\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} T_\lambda\right)$$

が成立する．実際 $\subset$ は明らかで，$P \in Z(\cup T_\lambda)$ に対し，任意の $f \in \cup T_\lambda$ について $f(P) = 0$ だから，特に各 λ に対して任意の $g \in T_\lambda$ について $g(P) = 0$ である．よって $P \in X_\lambda$ となり，$P \in \bigcap X_\lambda$ が従う．

（証明終）

定義 3.7.5（Zariski 位相）

$\mathbb{A}^n$ に代数的集合全体を閉集合系とする位相を定める．これを **Zariski 位相 (Zariski topology)** という．

例として，k 上の Zariski 位相（これを Affine 直線という）を考える．$A = k[X]$ は PID だから，すべての代数的集合は 1 つの多項式の零点の集まりである．k は代数閉体なので，0 でない多項式 f の次数が n のとき

$$f(X) = c(X - a_1) \cdots (X - a_n) \ (c \in k)$$

と分解できる．このとき $Z(f) = \{a_1, \ldots, a_n\}$ である．よって，$\mathbb{A}^1$ の代数的集合は，有限な部分集合または k である．よって，開集合系は空集合及び有限部分集合の補集合となる（補有限位相）．特にこれは Hausdorff ではないが，コンパクトである位相の大事な例である（ここでは「任意の開被覆を有限個で取り直せる」という性質を指して「コンパクト」と呼んだ．代数幾何学，特に Bourbaki の流儀では慣習的に上の性質に加えて Hausdorff を課してコンパクトといい，Hausdorff でないときに**準コンパクト (quasi-compact)** と呼ぶことがあるので注意してほしい）．

ここで Zariski 位相（定義 1.8.1）を思い出そう．k^n の Zariski 位相において，点 $\{(a_1, \ldots, a_n)\}$ は $f = c(X_1 - a_1) \cdots (X_n - a_n)$ の零点集合となり，k^n の閉点になる．これは弱零点定理（定理 3.3.9）によって

$k[X_1,\dots,X_n]$ の極大イデアル，言い換えれば $\operatorname{Spec} k[X_1,\dots,X_n]$ の閉点が $(X_1-a_1,\dots,X_n-a_n)$ しかないこととと対応している．

また，Zariski 位相は体 $k=\mathbb{C}$ としたとき，Euclid 位相より真に弱い位相となる．実際に多項式 f を $\mathbb{C}^n$ から $\mathbb{C}$ への連続写像とみなせば，代数的集合は Euclid 位相における閉集合 $\{0\}$ の f による引き戻しにほかならない．

$Y\subset\mathbb{A}^n$ に対し

$$I(Y)=\left\{f\in A\;\middle|\;\text{任意の } P\in Y \text{ に対して } f(P)=0\right\}$$

と定めると，これはイデアルをなす．これらについて性質をまとめよう．

命題 3.7.6

(i) $T_1\subset T_2\subset A$ とすると $Z(T_2)\subset Z(T_1)$ である．

(ii) $Y_1\subset Y_2\subset\mathbb{A}^n$ とすると $I(Y_2)\subset I(Y_1)$ である．

(iii) $Y_1,Y_2\subset\mathbb{A}^n$ について $I(Y_1\cup Y_2)=I(Y_1)\cap I(Y_2)$ である．

証明.

(iii) のみ示す．$f\in I(Y_1\cup Y_2)$ とすると，任意の $P\in Y_1$ について $f(P)=0$ であるので，$f\in I(Y_1)$ である．同様に $f\in I(Y_2)$ であることがわかる．逆に，$f\in I(Y_1)\cap I(Y_2)$ とすると任意の $P\in Y_1$ と $Q\in Y_2$ について $f(P),f(Q)=0$ であるので，$f\in I(Y_1\cup Y_2)$ である．（証明終）

定理 3.7.7（Hilbert の零点定理）

k を代数的閉体，I を $A=k[X_1,\dots,X_n]$ のイデアルとし，$f\in A$ を $Z(I)$ のすべての点で消える多項式とする．このとき $f\in\sqrt{I}$ である．

証明.

$f\notin\sqrt{I}$ と仮定する．すると $P\in V(I)$ であって，$f\notin P$ であるものがとれる．このとき $\overline{A}=A/P$ において $\overline{A}_{\overline{f}}=\overline{A}[1/\overline{f}]$ と，極大イデアル $\mathfrak{m}$ を考えよう．体 $\overline{A}_{\overline{f}}/\mathfrak{m}$ は有限型 k 代数であるから，Zariski の補題（命題 3.3.8）より k の有限次拡大体，すなわち代数拡大体であり k が代数閉体だから，これは k に同型である．各 X_i の $\overline{A}_{\overline{f}}/\mathfrak{m}$ への像を a_i とおいて $a=(a_1,\dots,a_n)\in k^n$ を定めると，任意の $g\in I$ について $g(a)=g(\overline{X_1}+\mathfrak{m},\dots,\overline{X_n}+\mathfrak{m})=g(\overline{X_1},\dots,\overline{X_n})+\mathfrak{m}=0$ である．一方で $\overline{f}\notin\mathfrak{m}$ より $f(a)\neq 0$ であるので，仮定に反する．よって $f\in\sqrt{I}$ である．（証明終）

命題 3.7.8

$\mathbb{A}^n$ の代数的集合全体を As，A の根基イデアル全体を Ri とすると，次の 2 つの写像

$$\varphi: As\longmapsto Ri; Y\longmapsto I(Y), \psi: Ri\longrightarrow As; I\longmapsto Z(I)$$

が包含関係を逆にする全単射となる．

証明.

まず Hilbert の零点定理より，$I\in Ri$ とすると，$I(Z(I))=\sqrt{I}=I$ となるので，$\varphi\circ\psi=\mathrm{id}\,Ri$ である．

次に $\psi\circ\varphi=\mathrm{id}\,As$ を確かめよう．まず，任意の $Y\subset\mathbb{A}^n$ に対し，$Z(I(Y))$ は Y の閉包 $\overline{Y}$ に等しいことを示す．簡単に確かめられるように $Y\subset Z(I(Y))$ であって，$Z(I(Y))$ は閉なので，$\overline{Y}\subset Z(I(Y))$ である．ここ

で，W を $Y \subset W$ となる閉集合とする．すると，$W = Z(I)$ となるイデアル I がとれる．$Y \subset Z(I)$ なので $I(Z(I)) \subset I(Y)$ である．ここで $I \subset \sqrt{I} = I(Z(I))$ だから，$Z(I(Y)) \subset Z(I) = W$ が成立．よって $Z(I(Y)) \subset \overline{Y}$ となる．以上より $Z(I(Y)) = \overline{Y}$ であることがわかった．ここで，$\overline{Y}$ が代数的集合，すなわち $Y \in As$ なら $\overline{Y} = Y$ であるので，$\psi \circ \varphi = \mathrm{id}\, As$ である．　（証明終）

第4章　完備化とArtin–Reesの補題

—Completion and Artin–Rees lemma

この章では環や加群に位相を定め，その位相の完備化について考察する．また，その過程で Artin–Rees の補題を始めとする応用も広い諸結果に触れていこう．

§ 1　位相群

環も加群も群としての構造を持っているのであるから，まずは一般に**位相群**について論じよう．

定義 *4.1.1*（位相群）

G を Abel 群とする．また，集合として G が位相空間であり，次の写像；

$$p : G \times G \to G; (x, y) \mapsto x + y$$

$$m : G \to G; x \mapsto -x$$

が連続であるとき，G を**位相群 (topological group)** という．

$g \in G$ について，写像 $p_g : G \to G; x \mapsto x + g$ は G 上の自己同相写像となる．よって，任意の点 g の近傍はすべて 0 の近傍 U を用いて $g + U$ と表せる．特に G の位相は 0 の近傍によって決定される．

命題 *4.1.2*

H を G における 0 のすべての近傍の共通部分とする．H は G の部分群であり，$\{0\}$ の閉包に等しい．

証明.

まず H が部分群であることを示そう．$0 \in H$ より $H \neq \emptyset$ である．任意の $x, y \in H$ をとる．すると 0 の任意の近傍 U に対して $x, y \in U$ である．

p の連続性から $p^{-1}(U)$ は $G \times G$ の開集合である．よって G の開集合族 $\{U_i\}, \{V_i\}$ が存在して $p^{-1}(U) = \bigcup(U_i \times V_i)$ とかける．ここで $(0, 0) \in p^{-1}(U)$ だから適当な i について $(0, 0) \in U_i \times V_i$ である．このとき U_i, V_i は 0 の近傍となり，仮定から $x \in U_i, y \in V_i$ とできる．よって $(x, y) \in p^{-1}(U)$ すなわち $x + y \in U$ である．よって $x + y \in H$ である．同様に $m^{-1}(U)$ を考えれば $x^{-1} \in H$ がわかる．

次に $H = \overline{\{0\}}$ を示そう．$x \in \overline{\{0\}}$ であることを $(*)$ とすると，これは任意の x の開近傍 U が $0 \in U$ となることと同値である．ここで U は 0 の開近傍 V を用いて $x + V$ とかけることに注意すると，$(*)$ は 0 の任意の開近傍 V に対して $0 \in x + V$ となることと同値である．これは更に $-x \in V$ と言い換えることができ，$-x \in H$ と同値である．ゆえに $x \in \overline{\{0\}}$ は $x \in H$ と同値である．（証明終）

この節を通じて，単に H と書いたら G における 0 のすべての近傍の交わりとする．H を用いて位相群 G が Hausdorff であることの判定条件を与えよう．ここで位相空間に関する次の命題を思い出しておく．

命題 *4.1.3*

位相空間 M が Hausdorff であることと，対角集合 $\Delta = \{(x, y) \in M \times M \mid x = y\}$ が $M \times M$ における閉集合であることは同値である．

証明.

M が Hausdorff であるとき，Δ^c が開であることを示す．任意の $(x, y) \in \Delta^c$ に対して $x \neq y$ である．M が Hausdorff なので，開近傍 $x \in U_x, y \in U_y$ で $U_x \cap U_y = \emptyset$ であるものがとれる．すると $U_x \times U_y$ は (x, y) の開近傍で $U_x \times U_y \subset \Delta^c$ である．よって (x, y) は内点なので Δ^c は開である．

同値であることはこの議論を逆にたどることで簡単にわかる．（証明終）

命題 *4.1.4*

G が Hausdorff であることと，$H = 0$ であること，すなわち $\{0\}$ が閉集合であることは同値である．特に G/H は Hausdorff である．

証明.

$(\Longrightarrow)$

G が Hausdorff であるとき T_1 であるので，1 点は閉である．

$(\Longleftarrow)$

連続写像 $G \times G \to G; (x, y) \mapsto x - y$ による $\{0\}$ の引き戻しは Δ である．$\{0\}$ が閉なのでこれは閉であるから Hausdorff となる．

（証明終）

以降極限を扱うため G は第 1 可算公理を満たす，すなわち 0 は可算個の近傍を持つと仮定する．解析的な完備化は Cauchy 列によって与えられていたことを思い出そう．まずは位相群についても Cauchy 列を定義する．

定義 *4.1.5*（Cauchy 列）

G の元の族 $\{x_i\}$ であって，0 の任意の近傍 U について，ある整数 n が存在して；

$$\text{任意の } i, j \geq n \text{ に対し } x_i - x_j \in U$$

が成り立つとき，$\{x_i\}$ を **Cauchy 列 (Cauchy sequence)** であるという．

Cauchy 列を扱うには「収束」の概念が不可欠であるため，距離空間でない一般の位相空間における収束を振り返っておこう．

定義 *4.1.6*（収束）

位相空間 M について，系列 $\{x_i\}$ に対してある $x \in M$ が存在して，任意の x の開近傍 U に対してある $n > 0$ が存在して $i \geq n$ ならば $x_i \in U$ となるものが存在するとき，$\{x_i\}$ は x に**収束 (converge)** するという．

G の Cauchy 列全体には，今までと同じように要素ごとの和をとることで和が定義され，次の関係；

$$\{x_i\} \sim \{y_i\} \Longleftrightarrow \lim_{i \to \infty} x_i - y_i = 0 \tag{$*$}$$

は同値関係となる．

定義 *4.1.7*（完備化）

同値関係 $(*)$ による G の Cauchy 列全体の同値類を $\widehat{G}$ とかき，G の**完備化 (completion)** という．

この定義により，$\mathbb{Q}$ を加法群としてみたときの完備化 $\widehat{\mathbb{Q}}$ は $\mathbb{R}$ になることが自然に納得されるだろう．

各元 $g \in G$ に対して，定数列 $\{g\}$ は明らかに Cauchy 列となる．これによって自然な写像 $\varphi : G \to \widehat{G}$ を得ることができるが，一般にはこれは埋め込みにならない，すなわち単射ではない．

補題 *4.1.8*

$\ker \varphi = H$ である．

証明.

$x \in \ker \varphi$ とすると，$(0) \sim (x)$ であるので，任意の 0 の近傍 U に対して $x \in U$ となる．よって $x \in H$ であり，逆も成り立つ．（証明終）

命題 *4.1.9*

φ が単射であることと，G が Hausdorff であることは同値である．

証明.

補題と命題 4.1.4 より従う．（証明終）

この節の最後に，完備化はテンソル積や局所化といったこれまでの操作と同様に関手になる，ということを注意しておく．というのも G, H を位相群（先程まで考えていた H とは異なる）としたとき，準同型 $f : G \to H$ により G の Cauchy 列は H の Cauchy 列を定めるから，群準同型 $\widehat{f} : \widehat{G} \to \widehat{H}$ が定義される．このとき $(g \circ f)\widehat{\ } = \widehat{g} \circ \widehat{f}$ となるからである．

§ 2　線型位相と代数的な完備化

ここまでは一般的な位相で考えてきたが，代数的な都合から G に**線型位相**という位相を入れて考えていくことにする．

定義 *4.2.1*（線型位相）

群 G の部分群の列；

$$G = G_0 \supset G_1 \supset G_2 \supset \cdots \supset G_n \supset \cdots$$

が与えられたとき，$U \subset G$ について，ある $n \geq 0$ について $G_n \subset U$ であるとき，U が 0 の開近傍であると定義する．これは G の位相を定め，これを部分群の列が定める**線型位相 (linear topology)** という．

この条件は位相群 G が部分群の減少列 $\{G_n\}$ からなる 0 の基本近傍系を持つ，と言いかえることもできる．位相になることを確かめておこう．

補題 *4.2.2*

$\mathcal{V}(x) = \left\{ V \subset G \;\middle|\; p_x^{-1}(V) \text{ が } 0 \text{ の開近傍である} \right\}$ と定める．このとき；

(i) 任意の $V \in \mathcal{V}(x)$ に対して $V \subset U$ ならば $U \in \mathcal{V}(x)$ である．
(ii) $U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{V}(x)$ ならば $\bigcap_{i=1}^n U_i \in \mathcal{V}(x)$ である．
(iii) 任意の $U \in \mathcal{V}(x)$ に対して，$x \in U$ である．
(iv) 任意の $U \in \mathcal{V}(x)$ に対して，ある $V \in \mathcal{V}(x)$ が存在して，任意の $y \in V$ に対して $U \in \mathcal{V}(y)$ である．

が成り立ち，$\mathcal{V}(x)$ は x の近傍系をなす．

証明.

(i) から (iii) はほぼ明らかであるから，(iv) だけ示す．

U を x の近傍とする．このとき，ある n が存在して $G_n \subset p_x^{-1}(U)$ となる．このとき $p_x(G_n) = V$ とおくと，$p_x^{-1}(V) = G_n$ であるから，V も x の近傍となる．任意の $y \in V$ をとると，ある $g_0 \in G_n$ がとれて $y = g_0 + x$ である．このとき $p_y^{-1}(V) = (G_n + x) - (g_0 + x) = G_n - g_0 = G_n$ であり，$V \subset U$ であるから $G_n \subset p_y^{-1}(U)$ が成り立つ．よって U は y の近傍となっている．（証明終）

以上より，任意の点の近傍系が定まったから，G 全体に位相が定まることがわかった．この位相のもとでも p_x は自然な自己同相写像であることに注意しよう．また，$\{G_n\}$ が定める線型位相において，各 G_n は開かつ閉であることに注意しよう．

先の節で，位相的な完備化 $\widehat{G}$ と $\varphi : G \to \widehat{G}$ を定義した．線型位相については，φ が埋め込みであることと $\bigcap G_n = 0$ が成り立つことが同値である．このとき，線型位相は Hausdorff であるだけでなく非常によい位相となることが知られている．

命題 *4.2.3*

G と部分群の減少列 $\{G_n\}$ について，$\bigcap G_n = 0$ が成り立つとき；

$$d(x, y) = \inf \left\{ \left(\frac{1}{2}\right)^n \;\middle|\; x - y \in G_n \right\}$$

と定めるとこれは G 上の距離になり，d が定める位相は $\{G_n\}$ による線型位相と一致する．

証明.

まずは距離になっていることを示そう．正値性，対称性，三角不等式が成り立つことは明らか．非退化であることを示す．$x = y$ のとき $x - y = 0$ はすべての部分群に含まれるので，$d(x, y) = 0$ である．逆に $d(x, y) = 0$ とすると，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある n で $x - y \in G_n$ となるものが存在して $(1/2)^n < \varepsilon$ である．ここで任意の $m > 0$ に対して $\varepsilon = (1/2)^m$ とすれば，これに対してとれる n は $n < m$ を満たし，$x - y \in G_n \subset G_m$ より $x - y \in G_m$ である．よって $x - y \in \bigcap G_n = 0$ であり $x - y = 0$ がわかる．

以上より d は距離を定める．次に 0 の近傍全体が線型位相における 0 の近傍全体と一致することを見よう．$x \in G_n$ のとき $d(x, 0) \leq (1/2)^n$ であること，$x \notin G_n$ であるとき $(1/2)^n < d(x, 0)$ であることに注意する．各 n について $B_{(1/2)^{n-1}}(0) = G_n$ であることを示す．$x \in G_n$ ならば $d(x, 0) \leq (1/2)^n < (1/2)^{n-1}$ より $x \in B_{(1/2)^{n-1}}(0)$ である．逆に $x \in B_{(1/2)^{n-1}}(0)$ とすると，$d(x,\ 0) < (1/2)^{n-1}$ より $d(x, 0) \leq (1/2)^n$ でなければならないから，$x \notin G_n$ であるとすると矛盾する．

さて，任意の $\varepsilon > 0$ をとる．ここで，$(1/2)^{n-1} < \varepsilon$ となる n を取ることができる．このとき $B_{(1/2)^{n-1}}(0) = G_n$ であるから，$G_n \subset B_\varepsilon(0)$ となり $B_\varepsilon(0)$ は線型位相において開であり，逆に U が線型位相において開ならば G_n は 0 の開球であり U に含まれるから，距離空間において開である．

（証明終）

G は Abel 群であるとする．ここで，自然な全射 $\theta_n : G/G_n \to G/G_{n-1}$ を考えると，$\{G/G_n, \theta_n\}$ は射影系をなす．射影極限；

$$\varprojlim G/G_n = \left\{ (\xi_n) \;\middle|\; \text{任意の } n \leq m \text{ について} \theta_m(\xi_m) = \xi_n \text{が成り立つ．} \right\}$$

が Cauchy 列による完備化 $\widehat{G}$ と同型であることを示す．

定理 4.2.4（代数的な完備化）

Abel 群 G の部分群の列 $\{G_n\}$ からなる線型位相を考える．射影系 $\{G/G_n\}$ を考えると，次の同型が成り立つ．

$$\widehat{G} = \varprojlim G/G_n$$

証明.

まず，Cauchy 列 (x_n) を考えよう．各 n について，十分大きな m_n をとれば，任意の $i, j \leq m_n$ について $x_i - x_j \in G_n$ とできる．これは $\pi_n(x_i) = \pi_n(x_j)$ を意味する．このことは各 n について $\{\pi_n(x_i)\}_i$ は停まる，と言い換えることができる．それを ξ_n とおく．このとき (ξ_n) は $\varprojlim G/G_n$ の元になる．

次に $(\xi_n) \in \varprojlim G/G_n$ をとる．各 x_n を ξ_n の代表元とすると，(x_n) は Cauchy 列となる．実際，$\pi_n(x_{n+1}) = \theta_{n+1}(\pi_{n+1}(x_{n+1})) = \theta_{n+1}(\xi_{n+1}) = \xi_n = \pi_n(x_n)$ であるので，$x_{n+1} - x_n \in G_n$ となる．（証明終）

解析的な意味での完備性，すなわち実数の完備性とはある種の公理であった（同値な命題として中間値の定理や Bolzano–Weierstraß の定理などがある）が，ここでは純粋に代数的な完備化として射影極限による構成を与えることができているので，完備であることの定義を天下り的に定義しよう．

定義 4.2.5（完備）

位相群 G について，$\varphi : G \to \widehat{G}$ が同型であるとき，**完備 (complete)** であるという．

φ が単射なことと $\bigcap G_n = 0$ が成り立つことが同値であったので，完備な位相群は距離空間である．この節の残りの部分では，完備化は完備であることを示すことを目標にする．

命題 4.2.6

Abel 群の完全列；

$$0 \longrightarrow G' \longrightarrow G \stackrel{\pi}{\longrightarrow} G'' \longrightarrow 0$$

を考える．G に部分群の列 $\{G_n\}$ で定義される線型位相が入っているとき，G', G'' にはそれぞれ $\{G' \cap G_n\}, \{\pi(G_n)\}$ による線型位相を考えることができ，次の完全列；

$$0 \longrightarrow \widehat{G}' \longrightarrow \widehat{G} \longrightarrow \widehat{G}'' \longrightarrow 0$$

が得られる．

証明.

一般に，定義から線型位相による射影系 $\{G/G_n\}$ は全射的である．よって定理 A.4.13 を次の完全列；

$$0 \longrightarrow G'/(G' \cap G_n) \longrightarrow G/G_n \longrightarrow G''/\pi(G_n) \longrightarrow 0$$

に適用すればよい．（証明終）

系 4.2.7

$\widehat{G}_n$ は $\widehat{G}$ の部分群であり，$\widehat{G}/\widehat{G}_n \cong G/G_n$ が成り立つ．

証明.

命題 4.2.6 において $G' = G_n, G'' = G/G_n$ とすると，G'' は離散位相を持つので，$\widehat{G''} = G''$ となる．（証明終）

系 4.2.8

G の完備化 $\widehat{G}$ は完備である．

証明.

先の系において射影極限を取ればよい．（証明終）

§ 3　I 進位相と Artin–Rees の補題

位相群の例で重要なものは，やはり加群についての応用である．環 A のイデアル I により定義される線型位相のなかで重要なものに，I 進位相がある．

定義 4.3.1（I 進位相）

A 加群 M と A のイデアル I を考える．$\{I^n M\}$ は M の部分加群の減少列をなし，これによる線型位相を I **進位相** (**I-adic topology**) という．

これからは特筆しない限り，A 加群 M の位相は I 進位相を考える．M の完備化 $\widehat{M}$ は $\widehat{A}$ 加群になることに注意しよう．また，$f : M \to N$ を A 線型写像とすると，$f(I^n M) = I^n f(M) \subset I^n N$ であるので，f は I 進位相について連続である．よって $\widehat{f} : \widehat{M} \to \widehat{N}$ が定まる．

この節の目標は，群の場合と同様に A 加群の完全列；

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \xrightarrow{\pi} M'' \longrightarrow 0$$

に対して；

$$0 \longrightarrow \widehat{M}' \longrightarrow \widehat{M} \longrightarrow \widehat{M}'' \longrightarrow 0$$

が完全であることを示すことである（実はこれは A が Noether で，M が有限生成 A 加群であるときにしか成り立たない）．群の場合と同様に考えると，M', M'' はそれぞれ $\{(I^n M) \cap M'\}, \{I^n \pi(M)\}$ で定義される線型位相による完備化についての完全列は得られる．よって，問題はそれぞれの線型位相が I 進位相と一致しているだろうか？ということになる．定義からすぐに，部分加群群の列 $\{M_n\}, \{M'_n\}$ があったとき，任意の n につい

て $M_n \subset M'_{m_1}, M'_n \subset M_{m_2}$ となるような m_1, m_2 が存在するならばこの２つの列から定まる線型位相は一致することがわかる．特別な場合を定義しておこう．

定義 *4.3.2*

$\{M_n\}, \{M'_n\}$ を M の部分加群の列とする．ある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して，任意の $n \in \mathbb{N}$ について；

$$M_{n+n_0} \subset M'_n, M'_{n+n_0} \subset M_n$$

が成り立つとき，$\{M_n\}$ と $\{M'_n\}$ は**有界な差 (bounded difference)** を持つという．

フィルターという概念を導入すると，有界な差を持つための条件をわかりやすくすることができる．

定義 *4.3.3*（I フィルター）

A 加群 M と，A のイデアル I を考える．M_n を M の部分加群として，降鎖 $M = M_0 \supset M_1 \supset \cdots \supset M_n \cdots$ を考える．すべての n に対して，$IM_n \subset M_{n+1}$ が成り立つとき，降鎖 $\{M_n\}$ は **I フィルター (I-filtration)** であるという．特に，ある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して，任意の $n \geq n_0$ に対して $IM_n = M_{n+1}$ が成り立つとき，そのフィルターは**安定 (stable)** しているという．

補題 *4.3.4*

$\{M_n\}, \{M'_n\}$ を M の安定 I フィルターとすると，それらは有界な差を持つ．

証明.

$M'_n = I^n M$ としてよい．ある n_0 が存在して，任意の $n \leq n_0$ について $IM_n = M_{n+1}$ なので，$M_{n+n_0} = I^n M_{n_0} \subset I^n M$ となる．

また，定義より任意の $n \in \mathbb{N}$ について，$IM_n \subset M_{n+1}$ なので，帰納的に $I^n M \subset M_n$ となり，$I^{n+n_0} M \subset I^n M \subset M_n$ であることがわかる．（証明終）

系 *4.3.5*

安定しているすべての I フィルターの定める位相は I 進位相に一致する．

よって，問題は $\{(I^n M) \cap M'\}, \{I^n \pi(M)\}$ がそれぞれ M', M'' の安定フィルターとなるかどうかに帰着することがわかった．$\{I^n \pi(M)\}$ は定義から安定しているので，$\{(I^n M) \cap M'\}$ について考えればよい．これには Artin–Rees の補題が有効に働くため，この節の残りではこれを示すことにしよう．

Artin–Rees の補題の証明には Rees 環という次数付き環が活躍するので，次数付き環について定義をしておく．

定義 *4.3.6*（次数付き環）

A を環とする．$\mathbb{Z}$ 加群としての直和分解 $A = \bigoplus_{d \in \mathbb{Z}} A_d$ について，A_0 は A の部分環であり，任意の i, j について A の積によって $A_i A_j \subset A_{i+j}$ となっているとき，A と $\{A_d\}$ の組を**次数付き環 (graded ring)** といい，A_d の元を d 次の斉次元という．

誤解の恐れがない場合は A を単に次数付き環という．任意の環 A は $A_0 = A, A_i = 0\ (i \neq 0)$ とすることで自明に次数付き環となる．わかりやすい例として，多項式環は次数付き環である．1 変数多項式環 $A[X]$ は $A_d = AX^d$（$d < 0$ については $A_d = 0$）とすればよく，n 変数については d 次元斉次多項式，すなわち各項を

なす単項式の総次数がすべて等しいもの（たとえば $X^2 + 2XY + Y^2$）全体を A_d とすると次数付き環になる．また，$A_+ = \bigoplus_{d>0} A_d$ は A のイデアルとなる．これを A の**無縁イデアル (irrelevant ideal)** という．

A を次数付き環とし，A 加群 M とその部分加群の族 $\{M_d\}$ について，$M = \bigoplus M_d$ が成り立ち，すべての i, j について $A_i M_j \subset M_{i+j}$ が成り立つとき，M を**次数付き A 加群 (graded A-module)** という．各 M_d は A_0 加群であることに注意しよう．次数付き A 加群 M, N について，A 線型写像 $f : M \to N$ がすべての d について $f(M_d) \subset N_d$ を満たすとき，f を次数付き加群の線型写像，また斉次射であるという．

ここで次数付き環に関して非常に有用な命題を示しておこう．

命題 *4.3.7*

A を次数付き環とする．A が Noether であることと，A_0 が Noether で，A が有限生成 A_0 代数であることは同値である．

証明.

($\Longrightarrow$)

$A_0 = A/A_+$ より A_0 は Noether である．A_+ は A のイデアルなので有限生成である．そこで x_i たちを A_+ の生成元とすると，これは斉次元の和でかけるので，適切に取り替えることで x_i は次数 k_i の斉次元としてよい．また A_+ の定義より $k_i > 0$ であることに注意しよう．

$A_+ = (x_1, \ldots, x_A), A' = A_0[x_1, \ldots, x_A]$ とする．帰納法により，任意の d について $A_d \subset A'$ であることを示す．$d = 0$ のときは明らかである．任意の $x \in A_d$ をとる．$x \in A_+$ より $x = \sum a_i x_i$ とかける．ここで x は斉次なので $a_i \in A_{d-k_i}$ でなければならない（$m < 0$ のとき $A_m = 0$ と考えている）．帰納法の仮定より $a_i \in A'$ なので，$x \in A'$ であることがわかる．よって $A_d \subset A$ が成り立ち，$A = A'$ である．

($\Longleftarrow$)

Hilbert の基底定理（定理 0.6.8）より従う．

（証明終）

定義 *4.3.8*（Rees 環）

環 A のイデアル I に対し，次数付き環；

$$R_A(I) = \bigoplus I^n$$

をイデアル I の **Rees 環 (Rees algebra)** という．特に I の生成元を $\{x_i\}$ とするとき，$R_A(I)$ は $\{x_i\}$ で生成される A 代数であることに注意しよう．

Hilbert の基底定理より，A が Noether なら $R_A(I)$ も Noether である．

補題 *4.3.9*

A を Noether 環，M を有限生成 A 加群とする．M の I フィルター $\{M_n\}$ が安定していることと，$M^* = \bigoplus M_n$ が有限生成 $R_A(I)$ 加群であることは同値である．

証明.

各 n について，$M_n^* = M_0 \oplus \ldots \oplus M_n \oplus IM_n \ldots \oplus I^n M_n \oplus \cdots$ を考える．各 M_n は有限生成 A 加群であるから，M_n^* は有限生成 $R_A(I)$ 加群である．ここで，$\{M_n\}$ が安定しているならば，ある n_0 が存在して，$n \geq n_0$

について $M_n^* = M^*$ であるので，M^* は有限生成 $R_A(I)$ 加群である．

逆に M^* が有限生成 $R_A(I)$ 加群であるとすると，M^* は Noether である．いま $\{M_n^*\}$ は M^* の部分加群からなる昇鎖であるからこれは停まる．ここで $\bigcup M_n^* = M^*$ であるので，ある n_0 が存在して $M_{n_0}^* = M^*$ となり，これは任意の $n \geq 0$ について $I^n M_{n_0} = M_{n_0+n}$ が成り立つことを意味している．よって $\{M_n\}$ は安定している．（証明終）

定理 *4.3.10*（Artin–Rees の補題）

A を Noether 環とし，A のイデアル I と有限生成加群 M を考える．M の安定している I フィルター $\{M_n\}$ と部分加群 M' について，$\{M' \cap M_n\}$ は M' の安定している I フィルターである．

証明.

$\{M' \cap M_n\}$ が I フィルターであることは明らかである．このフィルターが定める次数付き加群 $\bigoplus (M' \cap M_n)$ は M^* の部分加群であり，補題から M^* は有限生成 $R_A(I)$ 加群であり，$R_A(I)$ は Noether だから $\bigoplus (M' \cap M_n)$ も有限生成である．再び補題より $\{M' \cap M_n\}$ は安定している．（証明終）

Artin–Rees の補題の主張を使いやすく言い換えておこう．I を Noether 環 A のイデアルと有限生成 A 加群 M，その部分加群 M' についてある $n \geq 0$ が存在して，任意の $i \geq n$ について；

$$I^i M \cap N = I^{i-n}(I^n M \cap N)$$

が成り立つ．

これにより以下の定理が得られた．

定理 *4.3.11*

A を Noether 環とし，M を有限生成 A 加群とする．A 加群の完全列；

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

について，I 進位相による完備化；

$$0 \longrightarrow \widehat{M}' \longrightarrow \widehat{M} \longrightarrow \widehat{M}'' \longrightarrow 0$$

は完全である．

§ 4　Krull の交叉定理

この節では，自然な準同型 $A \to \widehat{A}$ により，$\widehat{A}$ を A 代数としてみて，完備化についての考察を続けよう．まずはテンソル積 $\widehat{A} \otimes_A \widehat{M}$ が $\widehat{M}$ と一致する条件を調べよう．A 線型写像 $M \to \widehat{M}$ が誘導する線型写像；

$$M \otimes_A \widehat{A} \longrightarrow \widehat{M} \otimes_A \widehat{A} \longrightarrow \widehat{M} \otimes_{\widehat{A}} \widehat{A} = \widehat{M}$$

を考えよう．

命題 *4.4.1*

環 A について，M が有限生成ならば $M \otimes_A \widehat{A} \to \widehat{M}$ は全射である．また A が Noether ならばこれは同型である．

証明.

M は有限生成なので，ある n について；

$$0 \longrightarrow \ker\varphi \xrightarrow{\iota} A^n \xrightarrow{\varphi} M \longrightarrow 0$$

が完全である．テンソル積，完備化はそれぞれ左完全，完全であるから，先の線型写像により，次の可換図式を考えることができる．

$$\begin{tikzcd}
 & \ker\varphi \otimes_A \widehat{A} \arrow[r, "\iota\otimes\mathrm{id}"] \arrow[d, "f"] & A^n \otimes_A \widehat{A} \arrow[r, "\varphi\otimes\mathrm{id}"] \arrow[d, "g"] & M \otimes_A \widehat{A} \arrow[r] \arrow[d, "h"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \widehat{\ker\varphi} \arrow[r, "\widehat{\iota}"] & \widehat{A^n} \arrow[r, "\widehat{\varphi}"] & \widehat{M} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

ここで，加群の圏において射影極限は有限個の直和と可換であるから g は同型射である．すると g は全射なので h も全射である．

また，A が Noether であったとしよう．このとき $\ker\varphi$ は有限生成なので，f も全射である．このとき，図式追跡によって h が単射であることを示すことができる（補題 6.1.4 もみよ）．よって同型となることがわかる．（証明終）

系 *4.4.2*

A が Noether であるとき，$\widehat{A}$ は平坦 A 代数である．

証明.

命題 1.5.8 からわかる．（証明終）

次に，これらの結果から極大イデアルによる完備化は局所環であることを示そう．

補題 *4.4.3*

A を Noether とし，I を A のイデアルとする．I 進完備化 $\widehat{A}$ について；

(i) $\widehat{I} = \widehat{A}I \cong \widehat{A} \otimes_A I$
(ii) $\widehat{I^n} = \widehat{I}^{\,n}$
(iii) $I^n/I^{n+1} \cong \widehat{I}^{\,n}/\widehat{I}^{\,n+1}$
(iv) $\widehat{I}$ は $\widehat{A}$ の Jacobson 根基に含まれる．

が成り立つ．

証明.

(i) A が Noether なので I は有限生成である．よって命題 4.4.1 より $\widehat{A} \otimes_A I \to \widehat{I}$ は同型であり，その像は

$\widehat{A}I$ である．

(ii) (i) より $\widehat{I^n} = \widehat{A}I^{\,n} = (\widehat{A}I)^n = \widehat{I}^{\,n}$ である．

(iii) 系 4.2.7 より $\widehat{A}/\widehat{I}^{\,n} \cong A/I^n$ であり，これから (iii) が従う．

(iv) 任意の $x \in \widehat{I}$ について，すべての A に対し $\{\sum_{k=0}^{i} x^k\}$ が $\widehat{A}$ の $\widehat{I}$ 進位相において Cauchy 列をなすので，$1 + x + x^2 + \cdots = (1-x)^{-1}$ は $\widehat{A}$ において収束する．よって $1-x$ は単元である．よって，任意の $a \in \widehat{A}$ についても $1-ax$ は単元となり，$\widehat{I}$ は Jacobson 根基に含まれる．

（証明終）

命題 *4.4.4*

環 A の極大イデアル $\mathfrak{m}$ による完備化 $\widehat{A}$ は $\widehat{\mathfrak{m}}$ を唯一の極大イデアルとする局所環である．

証明.

まず，補題 4.4.3(iii) より，$\widehat{A}/\widehat{\mathfrak{m}} \cong A/\mathfrak{m}$ なので，$\widehat{\mathfrak{m}}$ は極大イデアルである．また，$\widehat{\mathfrak{m}}'$ を $\widehat{A}$ の別の極大イデアルとすると，補題 4.4.3(iv) より $\widehat{\mathfrak{m}}$ は $\widehat{A}$ の Jacobson 根基に含まれ，定義より $\widehat{\mathfrak{m}} \subset \widehat{\mathfrak{m}}'$ がわかる．よって $\widehat{\mathfrak{m}} = \widehat{\mathfrak{m}}'$ であり，局所環である．（証明終）

また，このとき Noether 局所環の $\widehat{A}$ が A 上忠実平坦であることを証明しておく．

命題 *4.4.5*

$(A, \mathfrak{m})$ を Noether 局所環とする．このとき $\widehat{A}$ は A 上忠実平坦である．

証明.

系 4.4.2 より $\widehat{A}$ は平坦 A 加群で，また補題 4.4.3 から $\mathfrak{m}\widehat{A} = \widehat{\mathfrak{m}} \neq 0$ なので命題 1.5.10 から $\widehat{A}$ は忠実平坦である．（証明終）

環 A とそのイデアル I による完備化への自然な写像 $M \to \widehat{M}$ は，一般に単射とは限らず，それは $\bigcap I^n M$ により決定されるのだった．その構造について（条件付きではあるが）次の Krull の交叉定理が知られている．

定理 *4.4.6*（Krull の交叉定理）

A を Noether，I をそのイデアルとする．有限生成 A 加群 M について，$L = \bigcap I^n M$ とおくとき，ある $a \in I$ が存在して，$(1-a)L = 0$ である．すなわち；

$$x \in L \Longleftrightarrow (1-a)x = 0$$

が成り立つ．

証明.

Artin–Rees の補題（定理 4.3.10）より，十分大きな n について $I^n M \cap L = I^{n-k}(I^k M \cap L)$ となる $k \geq 0$ をとることができる．ここで，構成から $I^n M \cap L = L$ であるので $L = IL$ である．よって，中山の補題からある $a \in I$ が存在して，$(1-a)L = 0$ である．（証明終）

この定理から多くの重要な系が得られる．

系 *4.4.7*

A を Noether 整域とし，$I \neq A$ をイデアルとすると，$\bigcap I^n = 0$ である．

系 *4.4.8*

A を Noether，I を A の Jacobson 根基に含まれるイデアルとする．有限生成 A 加群 M について，I 進位相は Hausdorff である．すなわち $\bigcap I^n M = 0$ である．

系 *4.4.9*

$(A, \mathfrak{m})$ を Noether 局所環とする．有限生成 A 加群 M に対して M の $\mathfrak{m}$ 進位相は Hausdorff である．特に，A の $\mathfrak{m}$ 進位相は Hausdorff である．

§ 5　随伴次数環

この節では，Noether 環の完備化が Noether であることを示すことを目的とする．そのために**随伴次数環**という概念を導入するが，これは完備化の議論のみならず様々なところで活躍する．

定義 *4.5.1*（随伴次数環）

環 A とそのイデアル I，A 加群 M とその I フィルター $\{M_n\}$ を考える．このとき；

$$G_I(A) = \bigoplus_{n \geq 0} I^n / I^{n+1}, \quad G(M) = \bigoplus_{n \geq 0} M_n / M_{n+1}$$

をそれぞれ I に関する A の**随伴次数環 (associated graded ring)**，M の**随伴 $G_I(A)$ 加群 (associatred graded $G_I(A)$-module)** という．

よく省略して $G(A)$ とかかれる．積は次のように定義しよう．$a_n \in I^n$ について，$\overline{a_n}$ を I^n/I^{n+1} における像とする．$\overline{a_n} \cdot \overline{a_m}$ を，$a_n a_m \in I^{n+m}$ の I^{n+m}/I^{n+m+1} の像と定義すると，これは代表元のとり方によらない．作用についても同様に考えると，この演算のもとでこれらは斉次成分を $I^n/I^{n+1}, M_n/M_{n+1}$ としてもつ次数付き環，加群になる．

命題 *4.5.2*

A を Noether，I を A のイデアルとする．このとき；

(i) $G(A)$ は Noether である．

(ii) $G_I(A)$ と $G_{\widehat{I}}(\widehat{A})$ は次数付き環として同型である．

が成り立つ．特に $G(\widehat{A})$ は Noether 環である．

証明.

(i) A は Noether なので，$I = (a_1, \ldots, a_n)$ とできる．$G(A)$ の 0 次斉次成分は A/I であり，これは Noether である．a_i の I/I^2 における像を $\overline{a_i}$ とすれば $G(A) = A/I[\overline{a_1}, \ldots, \overline{a_n}]$ であり，Hilbert の基底定理から $G(A)$ は Noether.

(ii) $I^n/I^{n+1} \cong \widehat{I}^n/\widehat{I}^{n+1}$ であったことから従う．

（証明終）

命題 *4.5.3*

A を Noether，I を A のイデアルとする．M が有限生成 A 加群であり，$\{M_n\}$ が安定しているフィルターのとき，$G(M)$ は $G(A)$ 加群として有限生成である．

証明.

$\{M_n\}$ が安定しているので，ある n_0 が存在して，任意の $n \geq 0$ について $M_{n_0+n} = I^n M_{n_0}$ である．よって $G(M) = \bigoplus_{n \leq n_0} M_n/M_{n+1}$ であり，各斉次成分は Noether なので，$G(M)$ は Noether である．（証明終）

命題 *4.5.4*

環 A とそのイデアル I，A 加群 M と I フィルター $\{M_n\}$ を考える．A が I 進位相について完備であり，$\bigcap M_n = 0$ がなりたち（すなわち M は Hausdorff），$G(M)$ が有限生成 $G(A)$ 加群ならば M は有限生成 A 加群である．

証明.

次数環 $G(A)$ の d 次斉次成分を $G(A)_d$ と表すことにする．

$G(M)$ は有限生成 $G(A)$ 加群なので，ある $y_i \in M_{d_i} (1 \leq i \leq r)$ たちを，y_i の M_{d_i}/M_{d_i+1} における像 $\overline{y_i}$ が $G(M)$ の生成系になるようにとれる．ここで，背理法を用いて $M = \sum_{i=1}^r Ay_i$ を示す．

ある x_0 が存在して，$x_0 \notin \sum Ay_i$ であると仮定する．$x_0 \neq 0$ より，$x_0 \in M_{k_0}$ となる最大の k_0 が存在する．$\overline{x_0}$ を M_{k_0}/M_{k_0+1} における x_0 の像とすると，$\overline{x_0} = \sum_{i=1}^r \overline{a_{0i} y_i}$ とかけている．ここで $\overline{a_{0i}} \in G(A)_{k_0-d_i} = I^{k_0-d_i}/I^{k_0-d_i+1}$ である．このとき $x_1 = x_0 - \sum a_{0i} y_i$ とおくと，$x_1 \in M_{k_0+1}$ かつ $x_1 \notin \sum Ay_i$ である．

x_0 のかわりに x_1 を用いて同様の操作を行うことで，$\{x_n\}$ たちを $x_n \in M_{k_0+n}$，$x_n - x_{n+1} = \sum_{i=1}^r a_{ni} y_i$ となるようにとることができる．このとき，作り方から；

$$x - x_{n+1} = \sum_{i=1}^{r} \left(\sum_{j=0}^{n} a_{ji} \right) y_i \tag{$*$}$$

である．ここで，各 i について $\{\sum a_{ji}\}_j$ は A 内の Cauchy 列をなすので収束する．極限を a_i とおくと，$x = \sum_{i=1}^r a_i y_i$ となることを示そう．$\bigcap M_n = 0$ より，任意の $l \geq 0$ に対して $x - \sum a_i y_i \in M_{K_0+l}$ を示せばよい．まず，$(*)$ より，任意の n に対し；

$$x - \sum a_i y_i = x_{n+1} + \sum_{i=1}^{r} \left(\sum_{j=0}^{n} a_{ij} - a_i \right) y_i$$

が成り立つ．ここで，a_i のつくりかたから，ある n_i が存在して $n \geq n_i$ では $\sum_{j=0}^n a_{ji} - a_i \in I^{k_0+l-d_i}$ とできる．i は有限個だから，n_i の最大値を M と置くことで $n \geq M$ について $\sum_{i=1}^r (\sum_{j=0}^n a_{ij} - a_i) y_i \in M_{k_0+l}$ である．よって，n を $k_0 + l$，M より大きくとれば $x - \sum a_i y_i \in M_{k_0+l}$ となる．

以上より $x = \sum a_i y_i \in \sum Ay_i$ となり，矛盾した．（証明終）

系 *4.5.5*

環 A とそのイデアル I，A 加群 M と I フィルター $\{M_n\}$ に対して，A は I 進完備で $\bigcap M_n = 0$ が成り立つとする．このとき $G(M)$ が Noether $G(A)$ 加群ならば M は Noether A 加群である．

証明.

N を M の部分 A 加群とすると，$\{N \cap M_n\}$ が N の I フィルターとなり，$G(N)$ は $G(M)$ の部分 $G(A)$ 加群なので有限生成である．明らかに $\bigcap N \cap M_n = 0$ であるから，先の命題より N は有限生成 A 加群である．（証明終）

定理 *4.5.6*

A を Noether 環とする．A の I 進位相による完備化 $\widehat{A}$ は Noether である．

証明.

$\widehat{A}$ の $\widehat{I}$ 進位相を考える．$\widehat{A}$ は完備なので $\bigcap \widehat{I}^n \widehat{A} = 0$ であり，また命題 4.5.2 より $G(\widehat{A})$ は Noether だから系 4.5.5 より $\widehat{A}$ は Noether である．（証明終）

この節の最後に，完備な環上の加群の有限生成性について随伴次数環を使ったもの（命題 4.5.4）とは異なる方法を紹介しておこう．

命題 *4.5.7*

A を環とし，I を A が I 進位相で完備であるような A のイデアルとする．A 加群 M について $\bigcap I^n M = 0$ であって，M/IM が有限生成 A/I 加群ならば M は有限生成 A 加群である．

証明.

$u_1, \ldots, u_r \in M$ を，その M/IM への像が A/I 加群として M/IM を生成しているとする．このとき $M = (u_1, \ldots, u_r) + IM$ とかけ；

$$M = (u_1, \ldots, u_r) + I((u_1, \ldots, u_r) + IM) = (u_1, \ldots, u_r) + I^2 M$$

であるので，任意の $n > 0$ に対して $M = (u_1, \ldots, u_r) + I^n M$ である．ここで任意の $x \in M$ に対して $x = \sum a_{i,0} u_i + x_1$ $(x_1 \in IM)$ とかき；

$$x_1 = \sum a_{i,1} u_i + x_2 \ (a_{i,1} \in I,\ x_2 \in I^2 M)$$

のようにして $a_{i,j} \in I^j$, $x_j \in I^j M$ をとると，$\sum_{j \geq 0} a_{i,j}$ は A で収束するので，それを b_i とおくと；

$$\begin{aligned} x &= \sum a_{i,0} u_i + x_1 \\ &= \sum (a_{i,0} + a_{i,1}) u_i + x_2 \\ &= \cdots \end{aligned}$$

であるので，$x - \sum b_i u_i \in \bigcap I^n M = 0$ であるから M は u_i によって生成される．（証明終）

第5章　局所環と次元論

—*Local ring and Dimension theory*

§1　付値環

局所環の例の 1 つに付値環というものがある．そのなかでも特に離散付値環は，後に見るように 1 次元正則局所環という非常に振る舞いのよい環の特徴づけを与える，重要なクラスの 1 つである．本節では付値環一般について紹介し，次節で離散付値環について多少詳しく見ていくことにしよう．用語の注意として，全順序の定まった群 G であって，任意の $x, y, z \in G$ に対して $x \leq y$ ならば $x + z \leq y + z$ かつ $z + x \leq z + y$ となりとき，G を**全順序群 (totally ordered group)** という．

定義 *5.1.1*（付値）

K を体とし，G を Abel 全順序群とする．全射な関数 $v : K \to G \cup \{\infty\}$ について，すべての $\alpha, \beta \in K$ に対して；

(V1) $v^{-1}(\infty) = \{0\}$

(V2) $v(\alpha\beta) = v(\alpha) + v(\beta)$

(V3) $v(\alpha + \beta) \geq \min\{v(\alpha), v(\beta)\}$

が成立するとき，v を加法付値 (additive valuation)，または単に**付値 (valuation)** という．

定義から $v(1) = 0$ であり，$v(\alpha^{-1}) = -v(\alpha)$ である．また $v(\alpha) = 0$ であることと，α が単元であることも同値．

定義 *5.1.2*（付値環）

K を体とし，v を K の付値とすると，集合 $A = \{\alpha \in K \mid v(\alpha) \geq 0\}$ は K の部分環をなす．これを v の**付値環 (valuation ring)** という．

付値環についての基本的な性質を見ておこう．

命題 *5.1.3*

A を体 K の付値 v についての付値環とする．このとき；

(i) 任意の $\alpha \in K$ に対して，$\alpha \notin A$ ならば $\alpha^{-1} \in A$ である．

(ii) A は $\mathrm{Frac}\, A = K$ であるような整域である．

(iii) 任意の $a, b \in A$ について $v(a) \geq v(b)$ であることと，$a \in (b)$ であることは同値である．

(iv) A のイデアル全体は包含関係について全順序である．

(v) A は局所環であり，その極大イデアルは $\{\alpha \in K \mid v(\alpha) > 0\}$ で与えられる．

(vi) A は整閉整域である．

が成り立っている．

証明.

(i) $\alpha \in K$ について $\alpha \notin A$ とすると，$v(\alpha) < 0$ である．ゆえに $v(\alpha^{-1}) > 0$ であり，$\alpha^{-1} \in A$ である，

(ii) $A \subset K$ であり，A が整域で $\operatorname{Frac} A \subset K$ は明らかに成り立っている．任意の $\alpha \in K$ をとる．$\alpha \in A$ のときは明らかに $\alpha \in \operatorname{Frac} A$ である．$\alpha \notin A$ とすると $\alpha^{-1} \in A$ であるので，$\alpha^{-1} \in \operatorname{Frac} A$ だから $\alpha \in \operatorname{Frac} A$ である．

(iii) $v(a) \geq v(b)$ であるとすると，$v(ab^{-1}) = v(a) - v(b) \geq 0$ より $ab^{-1} \in A$ である．これは $a \in (b)$ を導く．逆に $a \in (b)$ なら $a = rb$ とおいて $v(a) = v(r) + v(b) \geq v(b)$ である．

(iv) I, J を A のイデアルとする．$I \not\subset J$ と仮定すると，ある $a \in I$ で $a \notin J$ であるものがとれる．すると任意の $b \in J$ に対して $a \notin (b)$ だから $v(a/b) < 0$ であり，$a/b \notin A$ だから $b/a \in A$ である．よって $b = a \cdot b/a \in I$ となり $J \subset I$ である．

(v) イデアルが全順序なので局所環である．すると $v(\alpha) = 0$ と α が単元であることが同値なので $\mathfrak{m} = \{\alpha \in K \mid v(\alpha) > 0\}$ である．

(vi) $\alpha \in K$ が，ある $a_1, \dots, a_n \in A$ によって；

$$\alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

とかけているとする．$\alpha \notin A$ であると仮定すると，$\alpha^{-1} \in A$ なので；

$$1 + a_1\alpha^{-1} + \cdots + a_n\alpha^{-n} = 0$$

であるので $1 \in \mathfrak{m}$ となって矛盾する．

（証明終）

本書では付値環を付値（関数）を用いて定義したが，純粋に環論的に定義することもできる（次の定理の条件のうち (iii) を付値環の定義とする文献も多い）．

定理 *5.1.4*

A を整域とし，K をその商体とする．このとき，次の条件；

(i) A は K の付値 v の付値環である．

(ii) A は局所環であり，すべての A の有限生成イデアルは単項である．

(iii) 任意の $\alpha \in K$ について，$\alpha \notin A$ ならば $\alpha^{-1} \in A$ である．

は同値である．

証明.

(i) $\Longrightarrow$ (ii)

A が局所環であることはすでにみた．$I = (a_1, \dots, a_r)$ を A の有限生成イデアルとすると，$v(a_j)$ を任意の i について $v(a_i) \geq v(a_j)$ であるものとすると，各 i について $a_i \in (a_j)$ なので $I = (a_j)$ とかける．

(ii) $\Longrightarrow$ (iii)

$\alpha \in K$ について $\alpha \notin A$ とする．$\alpha = a/b$ とおこう．$(a, b) = (c)$ となるような $c \in A$ をとる．このとき $ra + r'b = c$ であるような $r, r' \in A$ をとる．また $a, b \in (c)$ より $a', b' \in A$ をとって $a = a'c, b = b'c$ とかけるので $ra' + r'b' = 1$ とでき，A は局所環なので $a' \notin \mathfrak{m}$ または $b' \notin \mathfrak{m}$ である．いま $b' \notin \mathfrak{m}$ であると仮定すると b' は単元なので $b'^{-1} = c/b \in A$ であって，$a/b = (a/c)(c/b) \in A$ となって矛盾するから $a' = a/c$ が単元であり，これは $\alpha^{-1} = b/a \in A$ を導く．

(iii) $\Longrightarrow$ (i)

まずは Abel 群 G を構成しよう．$\alpha \in K$ に対して $\alpha A = \{\alpha a \in K \mid a \in A\} \subset K$ とおくと，これら全体の集合には包含関係で全順序が入る．実際 $\alpha A \subset \beta A$ であることと $\alpha/\beta \in A$ であることは同値なので，仮定から $\alpha A \subset \beta A$ か $\beta A \subset \alpha A$ のどちらかは成り立つ．よって $G = \{\alpha A \mid \alpha \in K^{\times}\}$ に包含関係の逆によって順序；

$$\alpha A \leq \beta A \Longleftrightarrow \beta A \subset \alpha A$$

を入れると $\leq$ は全順序で，$\alpha A + \beta A = (\alpha\beta)A$ と定義することで G は全順序な Abel 群をなす．このとき；

$$v : K \to G \cup \{\infty\}; \alpha \mapsto \begin{cases} \alpha A & \text{if } \alpha \neq 0 \\ \infty & \text{if } \alpha = 0 \end{cases}$$

と定めると，これは付値をなす．実際付値の条件は (V3) 以外は明らかで，(V3) を確かめればよい．任意の $\alpha, \beta \in K$ をとる．$v(\alpha) \leq v(\beta)$ と仮定してよく．このとき $\beta A \subset \alpha A$ であるので $(\alpha+\beta)A \subset \alpha A$ であるから $v(\alpha) = \min\{v(\alpha), v(\beta)\} \leq v(\alpha+\beta)$ である．よって付値 v が定まった．最後に $A = \{\alpha \in K \mid v(\alpha) \geq 0\}$ であることを示そう．定義から G の零元とは A のことであることに注意すると，$v(\alpha) \geq 0$ であることと $\alpha A \subset A$ であることは同値であることがわかる．よって A は v についての付値環となる．

（証明終）

系 *5.1.5*

付値環 A が Noether であることと，PID であることは同値である．

§ 2　離散付値環

定義 *5.2.1*（離散付値）

$G = \mathbb{Z}$ としたときの付値 v を**離散付値 (discrete valuation)** という．対応する付値環を**離散付値環 (discrete valuation ring)** といい，DVR と略記する．

命題 *5.2.2*

A を離散付値環とする．I を A の任意のイデアルとすると，ある $n \in \mathbb{N}$ がとれて $I = \mathfrak{m}^n$ である．特に A は PID である．

証明.

まず，$\mathfrak{m}$ が単項であることを示そう．付値は全射であるから，$v(a) = 1$ となる $a \in \mathfrak{m}$ が存在する．このとき $(a) \subset \mathfrak{m}$ は明らかで，任意の $b \in \mathfrak{m}$ をとると，$v(b) \geq 1 = v(a)$ より $b \in (a)$ となって $\mathfrak{m} = (a)$ である，

さて，I を A のイデアルとする．$v(I) = \{v(b) \mid b \in I\} \subset \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ は最小元を持つ．それを $n = v(b')$ $(b' \in I)$ とおこう．すると任意の $b \in I$ について $v(b) \geq n = v(a^n)$ より $b \in (a^n)$ である．逆に $b \in (a^n)$ とすると，$v(b) \geq n = v(b')$ より，$b \in (b') \subset I$ が従う．よって $I = (a^n)$ であることがわかる．　（証明終）

系 *5.2.3*

離散付値環 A は 1 次元の Noether 局所整域で，$\operatorname{Spec} A = \{0, \mathfrak{m}\}$ である．

命題 5.2.2 は離散付値環の著しい特徴付けを与えており，次が成り立つ．

定理 5.2.4

$(A, \mathfrak{m})$ を 1 次元 Noether 局所整域とする．次は同値である．

(i) A は離散付値環である．
(ii) A は整閉である．
(iii) $\mathfrak{m}$ は単項イデアルである．
(iv) すべての A の 0 でないイデアルは $\mathfrak{m}$ の冪である．
(v) ある $x \in A$ が存在して，すべての 0 でないイデアルは $(x^k)(k \geq 0)$ とかける．

これを示すためにいくつかの補題を示していこう．

命題 5.2.5

$(A, \mathfrak{m})$ を Noether 局所環とすると，次のうちどちらか 1 つだけが成り立つ．

(i) 任意の $n \geq 0$ について，$\mathfrak{m}^n \neq \mathfrak{m}^{n+1}$ が成り立つ．
(ii) ある $n > 0$ が存在して $\mathfrak{m}^n = 0$ である．特に，この場合 A は 0 次元すなわち Artin 環である．

証明.

$\mathfrak{m}^n = \mathfrak{m}^{n+1}$ となる n があるとする．すると，中山の補題より $\mathfrak{m}^n = 0$ が成り立つ．任意の $P \in \operatorname{Spec} A$ について，$\mathfrak{m}^n \subset P$ より根基をとると $\mathfrak{m} = P$ が成り立つ．ゆえに A は Artin である．（証明終）

系 5.2.6

$(A, \mathfrak{m})$ を $\dim A \geq 1$ となる Noether 局所環とすると，任意の n について $\mathfrak{m}^n \neq \mathfrak{m}^{n+1}$ である．

補題 5.2.7

A を Artin 環とすると，$\operatorname{nil} A$ は冪零である．

証明.

DCC よりある $k > 0$ がとれて $(\operatorname{nil} A)^k = (\operatorname{nil} A)^{k+1} = \cdots$ となる．これを I とおこう．$I \neq 0$ と仮定する．このとき $IJ \neq 0$ となるイデアル J の集合 Σ は，$I \in \Sigma$ だから空ではない．よって Σ の極小元がとれるので，それを改めて J とおこう．このとき，ある $a \in J$ がとれて $aI \neq 0$ となる．極小性より $(a) = J$ であることがわかる．ここで $(aI)I = aI^2 = aI \neq 0$ より再び極小性から $aI = (a)$ となる．よって，ある $b \in I$ について $ab = a$ とかける．ここで $b \in I \subset \operatorname{nil} A$ より $b^n = 0$ となる n がとれる．すると $a = ab = ab^2 = \cdots = ab^n = 0$ となり，$J = 0$ となるから矛盾．よって $I = 0$ である．（証明終）

命題 5.2.8

$(A, \mathfrak{m})$ を Artin 局所環とすると，A のすべてのイデアルが単項であることと $\dim_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) \leq 1$ であることは同値である．

証明.

$(\Longrightarrow)$ は明らかなので，逆を示す．$\dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = 0$ なら $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}^2$ となり中山の補題から $\mathfrak{m} = 0$ すなわち A

は体となるので，示すことはない．

$\dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = 1$ と仮定すると命題 1.3.6 より $\mathfrak{m}$ は単項生成であり，$\mathfrak{m} = (a)$ とする．Artin 環において冪零根基と Jacobson 根基は等しいので $\operatorname{nil} A = (a)$ であるから，I を 0 でも A でもない A のイデアルとすると補題 5.2.7 より $I \subset (a^k), I \not\subset (a^{k+1})$ となる $k \in \mathbb{N}$ がとれる．よってある $b \in I$ と $r \in A$ がとれて $b = ra^k, b \notin (a^{k+1})$ とできる．このとき $r \notin (a)$ でなければならないので r は可逆であるから $a^k \in I$ となり，$I = (a^k)$ となることがわかった．　（証明終）

定理 *5.2.4* の証明.

示すことは 1 次元 Noether 局所整域について；

(i) A は離散付値環である．
(ii) A は整閉である．
(iii) $\mathfrak{m}$ は単項イデアルである．
(iv) すべての A の 0 でないイデアルは $\mathfrak{m}$ の冪である．
(v) ある $a \in A$ が存在して，すべての 0 でないイデアルは (a^n) $(n \geq 0)$ とかける．

の同値性である．

(i) $\Longrightarrow$ (ii)

明らか.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii)

定理 5.1.4 からわかる．

(iii) $\Longrightarrow$ (iv)

I を A の 0 でも A でもないイデアルとする．A/I は Arin 環なので，命題 5.2.5 から $\mathfrak{m}^n \subset I$ となるものがとれる．$A/\mathfrak{m}^n$ に命題 5.2.8 を使うと I は $\mathfrak{m}$ の冪になることがわかる．

(iv) $\Longrightarrow$ (v)

系 5.2.6 より $\mathfrak{m} \neq \mathfrak{m}^2$ であるので，$x \notin \mathfrak{m}^2$ となる $a \in \mathfrak{m}$ がとれる．仮定より $(a) = \mathfrak{m}^r$ となる r がとれるが，a のとりかたから $r = 1$ でなければならない．よって $\mathfrak{m} = (a)$ とできるので，すべてのイデアルは (a^k) の形に書ける．

(v) $\Longrightarrow$ (i)

$(a) = \mathfrak{m}$ なので，系 5.2.6 より $(a^n) \neq (a^{n+1})$ である．よって 0 でない任意の $r \in A$ について，唯 1 つ $(r) = (a^n)$ となる n が定まる．$v(r) = n, v(r^{-1}) = -n$ として v を k 全体に定義することで離散付値環となる．

（証明終）

系 *5.2.9*

付値環 A が Noether であることと DVR であることは同値である．

証明.

定理 5.1.4 から従う．　（証明終）

§ 3　Dedekind 整域

定義 *5.3.1*（Dedekind 整域）

A を整域とする．すべての A の 0 でも A でもないイデアル I が有限個の素イデアルの積に (一意的に) かけるとき，A を **Dedekind 整域**という．

この条件は，素イデアルは $\mathbb{Z}$ の素因数分解の拡張を与えるために考案されたという歴史的経緯を考えると，Dedekind 整域とは素因数分解ができる環，という形で捉えることができ，$\mathbb{Z}$ のよい一般化になっている．この節では Dedekind 環の公理的特徴づけを与えよう．

まず，判定方法として 1 次元の Noether 整閉整域ならば Dedekind 整域であることを示そう．実際にはこれが同値条件を与えていることを後に示す（定理 5.3.10）．

補題 *5.3.2*

A を環，$P, P_0 \in \operatorname{Spec} A$ とし，q_0 を P_0 準素イデアルとする．$P \neq P_0$ であるとき，$q_0 A_P = A_P$ が成り立つ．

証明.

$a \notin P$ となる $a \in P_0$ をとる．このとき $P_0 = \sqrt{q_0}$ なので，$a^n \in q_0$ となる $n \geq 1$ がとれる．また $a^n \notin P$ なので，$a^n/1 \in q_0 A_P$ は可逆である．よって $q_0 A_P = A_P$ が成り立つ．（証明終）

補題 *5.3.3*

環 A のイデアル I, J について，I と J が互いに素であることは $\sqrt{I}$ と $\sqrt{J}$ が互いに素であることと同値である．

証明.

逆は明らかなので根基が互いに素なら I, J も互いに素であることを見れば十分である．$a + b = 1$ となる $a \in \sqrt{I}, b \in \sqrt{J}$ をとる．適当な n, m をとって $a^n \in I$，$b^m \in J$ としたとき，$1 = (a+b)^{n+m}$ であって，これは $k + l = m + n$ となる k, l についての $a^k b^l$ の線型和である．いま $k < n$ なら $m < l$ が成り立ち，常に $a^k b^l \in I \cup J$ が成り立つ．よって各項は I か J に含まれるから，I と J は互いに素である．（証明終）

定理 *5.3.4*

A が 1 次元 Noether 整閉整域ならば A は Dedekind 整域である．

証明.

I を A の 0 でも A でもないイデアルとする．A は Noether なので，$I = \cap q_i$ と無駄のない準素分解ができる．$P_i = \sqrt{q_i}$ とおく．このとき A は 1 次元の整域だから P_i は極大イデアルであることに注意する．特に IA_{P_i} は A_{P_i} の 0 でないイデアルになる．ここで；

$$IA_{P_i} = \cap(q_i A_{P_i})$$

であり，$i \neq j$ のとき $P_i \neq P_j$ なので補題 5.3.2 より $q_j A_{P_i} = A_{P_i}$ である．よって $IA_{P_i} = q_i A_{P_i}$ が成り立つ．ここで A_{P_i} は 1 次元の Noether 局所整閉整域なので，定理 5.2.4 より $q_i A_{P_i} = IA_{P_i} = P_i^{n_i} A_{P_i}$ が成り立つ．ここで $\sqrt{P_i^{n_i}} = P_i$ であり，P_i は極大なので命題 2.4.3 より $P_i^{n_i}$ も P_i 準素イデアルである．すると；

$$q_i = q_i A_{P_i} \cap A = P_i^{n_i} A_{P_i} \cap A = P_i^{n_i}$$

である．ここで P_i たちは極大なので互いに素である．よって補題 5.3.3 より q_i たちも互いに素なので，中国剰余定理から $I = \prod P_i^{n_i}$ とかける．（証明終）

逆向きの証明を行うために，分数イデアルという概念を導入しよう．

定義 *5.3.5*（分数イデアル）

A を整域とし，k をその商体とする．k の 0 でない A 部分加群 M で，ある $0 \neq x \in A$ が存在して $xM \subset A$ となっているとき，M を A の**分数イデアル (fractional ideal)** という．

通常の A のイデアルは分数イデアルであることに注意せよ．ここでは A の通常のイデアルを区別する目的で**整イデアル**と呼ぶことがある．

k の有限生成 A 部分加群 M は分数イデアルである．なぜならば，生成元たちを「通分」して，その分母をかければよいからである．

定義 *5.3.6*（可逆イデアル）

M, N を k の A 部分加群とする．$MN = A$ となっているとき，M, N を**可逆イデアル (invertible ideal)** という．

実際には，M が可逆イデアルであるとき，$MN = A$ となる N は $(A : M) = \{\alpha \in k \mid \alpha M \subset A\}$ に一致する．実際 $N \subset (A : M) = (A : M)MN \subset AN = N$ が成り立つ．特に $(A : M) = M^{-1}$ と略記する．

一般の分数イデアル M について同様に M^{-1} を考えると MM^{-1} は A の整イデアルになる．次の補題から可逆イデアルは分数イデアルであるから，分数イデアル M が可逆であることは $M(A : M) = A$ となること，と定式化できる．

補題 *5.3.7*

M が可逆なら有限生成であり，分数イデアルとなる．

証明.

$MM^{-1} = A$ であるので，$x_i \in M$ と $y_i \in M^{-1}$ がとれて $\sum x_i y_i = 1$ が成立する．ここで，任意の $x \in M$ に対して $y_i x \in A$ であるから，$x = \sum (y_i x) x_i$ により M は x_i たちによって生成される．（証明終）

可逆性は局所的な性質であることを示そう．

命題 *5.3.8*

分数イデアル M について，次は同値である．

(i) M は可逆である．
(ii) M は有限生成で，任意の $P \in \operatorname{Spec} A$ について M_P は可逆．
(iii) M は有限生成で，任意の $\mathfrak{m} \in \operatorname{Spm} A$ について $M_{\mathfrak{m}}$ は可逆．

証明.

(i) $\Longrightarrow$ (ii)

M は可逆なので有限生成である．ここで $M(A:M)=A$ であるから，系 1.6.11 より $A_P = M_P(A_P : M_P)$ が成り立つ．

(ii) $\Longrightarrow$ (iii)

明らか．

(iii) $\Longrightarrow$ (i)

$I = M(A:M)$ とおくと，これは A の整イデアルとなる．$I \neq A$ とすると，$I \subset \mathfrak{m}$ となる極大イデアル $\mathfrak{m}$ について $M_{\mathfrak{m}}$ は可逆だから $I_{\mathfrak{m}} = M_{\mathfrak{m}}(A_{\mathfrak{m}} : M_{\mathfrak{m}}) = A_{\mathfrak{m}}$ が成り立つ．よって $I \subset \mathfrak{m}$ ではありえず，$I = A$ である．（証明終）

命題 *5.3.9*

A を整域とする．A の 0 でないすべてのイデアルが可逆ならば，A は 1 次元 Noether 整閉整域である．

証明.

可逆な分数イデアルは有限生成なので，A は Noether 環である．

まずは A が極大イデアルが $\mathfrak{m}$ であるような局所環であると仮定しよう．A のすべてのイデアルが $\mathfrak{m}$ の冪になっていればよい．Σ を $\mathfrak{m}$ の冪でない A のイデアル全体の集合とし，これが空でないと仮定する．I を Σ の極大元とする．このとき $I \subsetneq \mathfrak{m}$ でなければならない．よって $\mathfrak{m}^{-1}I \subsetneq \mathfrak{m}^{-1}\mathfrak{m} = A$ もイデアルで，$I \subset \mathfrak{m}^{-1}I$ である．ここで，もし $\mathfrak{m}^{-1}I = I$ ならば中山の補題より $I = 0$ となってしまうから，$I \subsetneq m^{-1}I$ である．よって極大性から $\mathfrak{m}^{-1}I$ は $\mathfrak{m}$ の冪になるが，これは I が $\mathfrak{m}$ の冪であることを即座に導き矛盾．

命題 3.2.11 より整閉性は局所的な条件であることに注意する．局所整域 A_P のイデアルがすべて可逆であることを示そう．I を A_P のイデアルとすると，$I \cap A$ は A のイデアルなので可逆である．よって，I はこれを局所化したものだから命題 5.3.8 より可逆．ゆえに A_P は 1 次元局所 Noether 整閉整域である．よって $\operatorname{ht} P = \dim A_P = 1$ より $\dim A = 1$ が従い，A は 1 次元 Noether 整閉整域であることがわかる．（証明終）

定理 *5.3.10*

A を整域とする．A が Dedekind 整域であることと，A が 1 次元 Noether 整閉整域であることは同値である．

証明.

定理 5.3.4 と命題 5.3.9 より，A が Dedekind 整域ならば A の 0 でないすべてのイデアルが可逆であることを示せばよい．

Step 1. M, N を 0 でない分数イデアルとする． M, N が可逆であることと MN が可逆であることは同値である．

$MN = B$ とおく．M, N が可逆なら B が可逆なことは明らかなので，逆を示そう．B が可逆であると仮定する．簡単な計算で $M^{-1}N^{-1} \subset B^{-1}$ であることがわかる．また $B^{-1}M \subset N^{-1}, B^{-1}N \subset M^{-1}$ であるので，$B^{-1} = B^{-1}B^{-1}B = (B^{-1}M)(B^{-1}N) \subset M^{-1}N^{-1}$ が成立する．よって $B^{-1} = M^{-1}N^{-1}$ であるから；

$$A = BB^{-1} = (MM^{-1})(NN^{-1})$$

が従う．ここで $MM^{-1} \subset A$ であり，これは A のイデアルを成すので $MM^{-1} = NN^{-1} = A$ でなければならない．

Step 2. $0 \neq P \in \operatorname{Spec} A$ に対して，$P \subset I$ となるイデアル I について $IP = P$ である．

$a \notin P$ をとる．$I = P + (a)$ の形のときに示せば十分である．I^2 と $P + (a^2)$ を素イデアル分解して $I^2 = P_1 \dots P_r, P + (a^2) = Q_1 \dots Q_s$ とする．$P \subset I \subset P_i, Q_j$ なので，$\overline{A} = A/P$ における像 $\overline{P_i}, \overline{Q_j}$ はすべて 0 でない．このとき；

$$\overline{P_1} \dots \overline{P_r} = (\overline{a}^2) = \overline{Q_1} \dots \overline{Q_s} \tag{$*$}$$

となる．$\overline{P_i}$ が $\overline{P_i}$ のなかで極小であるとしてよい．ここで $\overline{Q_j}$ のすべてが $\overline{P_i}$ に含まれないと仮定すると，$x_j \in \overline{Q_j} - \overline{P_1}$ がとれる．一方で $x_1 \dots x_s \in \overline{Q_1} \dots \overline{Q_s} = \overline{P_1} \dots \overline{P_r} \subset \overline{P_1}$ より，$\overline{P_1}$ が素であることに矛盾する．よって $\overline{Q_1} \subset \overline{P_1}$ としてよい．ここで $\overline{P_1} \dots \overline{P_r} \subset \overline{Q_1}$ だから，同様にして $\overline{P_i} \subset \overline{Q_1}$ となる i がある．このとき $\overline{P_1}$ の極小性から $\overline{P_1} = \overline{Q_1}$ である．

また，$(*)$ において $(\overline{a}^2)$ は可逆なイデアルなので，Step1 から $\overline{P_i}, \overline{Q_j}$ はすべて可逆である．よって両辺に $\overline{P_1}^{-1}$ をかけることで $\overline{P_2} \dots \overline{P_r} = \overline{Q_2} \dots \overline{Q_s}$ がわかる．上と同様にして $r = s$ であり，$\overline{P_i} = \overline{Q_i}$ となるように並び替えることができることがわかる．

よって $P_i = Q_i$ が従うから，$P + (a^2) = P^2 + aP + (a^2)$ である．よって，任意の $x \in P$ は；

$$x = y + az + a^2 t \quad y \in P^2,\ z \in P,\ t \in A$$

とかけるが，このとき $a^2 t \in P$ で $a \notin P$ から $t \in P$ である．よって $P \subset P^2 + aP = IP \subset P$ であるから，主張が従う．

Step 3. $0 \neq x \in A$ に対して，$(x) = P_1 \dots P_r$ と素イデアル分解したとき，各 P_i は極大イデアルである．

実際，イデアル I が $P_i \subset I$ を満たすなら Step2 より $IP_i = P_i$ であるが，P_i は Step1 より可逆だから $I = A$ である．

Step 4. すべての A のイデアルは可逆である．

任意の 0 でも A でもないイデアル I について，$I = P_1 \dots P_r$ と素イデアル分解する．各 P_i が可逆なら I も可逆になるので，すべての $0 \neq P \in \operatorname{Spec} A$ が可逆ならよい．

$0 \neq P \in \operatorname{Spec} A$ と $0 \neq x \in P$ をとる．Step3 より $(x) = Q_1 \dots Q_s$ と分解したとき各 Q_i は極大イデアルである．ここでどれかの Q_i は P に含まれるから，$Q_i = P$ が成り立つ．よって P は可逆である．

（証明終）

§ 4　Krull の次元定理

定義 3.4.1 で環の Krull 次元を定義した．素イデアルの長さをもってして環の大きさを計ったわけであるが，この節では **Poincaré 級数**を用いた別の「計りかた」を次数付き Noether 環に与え，そして定義 4.5.1 で定義した随伴次数環を用いて Noether 局所環に対して考えよう．

定義 *5.4.1*（加法的関数）

環 A 上のある A 加群の族 $\{M_i\}$ 上定義された $\mathbb{Z}$ への関数 λ について，$\{M_i\}$ の元からなる短完全列；

$$0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_2 \longrightarrow M_3 \longrightarrow 0$$

について $\lambda(M_1) - \lambda(M_2) + \lambda(M_3) = 0$ がなりたつとき，λ を**加法的 (additive)** 関数という．

加法的関数はすべての A 加群さて，$A = \bigoplus_{n\geq 0} A_n$ を次数付き Noether 環とする．このとき，$A = A_0[x_1, \ldots, x_s]$ とできる（命題 4.3.7）．ここで x_i を斉次元で取り替え，それらの次数を k_i としよう．また，$M = \bigoplus_{n\geq 0} M_n$ を有限生成 A 加群とし，斉次な生成元を $m_1, \ldots, m_t$，それぞれの次数は $r_1, \ldots, r_t$ とする．このとき M_n のすべての元は $f_i \in A_{n-r_i}$ によって $\sum f_i m_i$ の形で書けるので，M_n は有限生成 A_0 加群である．以後，しばらくはこの記号で話をすすめる．

定義 *5.4.2*（Poincaré 級数）

次数付き環 A，次数付き有限生成 A 加群 M について，λ をすべての有限生成 A_0 加群からなる集合族上の加法的関数とする．このとき；

$$P(M, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda(M_n) t^n$$

を M の **Poincaré 級数 (Poincaré series)** という．

Poincaré 級数の考察には，次の定理により与えられる表示が強力である．

定理 *5.4.3*（Hilbert, Serre）

$P(M, t)$ は有理関数である．特に $\mathbb{Z}$ 係数の多項式 $f(t) \in \mathbb{Z}[t]$ が存在して；

$$P(M, t) = \frac{f(t)}{\prod_{i=1}^{s}(1 - t^{k_i})}$$

が成り立つ．

証明.

$A = A_0[x_1, \ldots, x_s]$ とおく．s についての帰納法で示す．$s = 0$ のとき，$A = A_0$ なので，M は有限生成 A_0 加群となり，十分大きな M_n について $M_n = 0$ である．よって $P(M, t)$ は多項式となる．

$s - 1$ まで正しいとする．

$M_n \xrightarrow{\times x_s} M_{n+k_s}$ の核，余核を K_n, L_{n+k_s} とおくと；

$$0 \longrightarrow K_n \longrightarrow M_n \xrightarrow{\times x_s} M_{n+k_s} \longrightarrow L_{n+k_s} \longrightarrow 0$$

が完全である．$K = \bigoplus K_n, L = \bigoplus L_n$ とおくと，M は有限生成 A 加群なので，その部分加群，剰余加群である K，L も有限生成である．どちらも x_s で零化されるので $A_0[x_1, \ldots, x_{s-1}]$ 加群である．ここで λ が加法的なので，$(*)$ において；

$$\lambda(K_n) - \lambda(M_n) + \lambda(M_{n+k_s}) - \lambda(L_{n+k_s}) = 0$$

である．t^{n+k_s} をかけて，n について加えると，補正項を $g(t)$ として；

$$t^{k_s} P(K,\ t) - t^{k_s} P(M, t) + P(M, t) - P(L,\ t) - g(t) = 0$$

となり；

$$(1-t^{k_s})P(M,t) = -t^{k_s}P(K,\ t) + P(L,\ t) + g(t)$$

となるので，帰納法の仮定から条件を満たす $f(t)$ が見つかる．（証明終）

もっとも簡単な，かつ多項式のように重要な $k_1 = \cdots = k_s = 1$ の場合を考えてみよう．このとき $P(M,t) = f(t)(1-t)^{-s}$ とかけるが，$f(1) = 0$ ならば約分して f をとりかえることで；

$$P(M,t) = \frac{f(t)}{(1-t)^d}, \quad f(1) \neq 0$$

とできる．ここで d は $P(M,t)$ の 1 における極の位数であることに注意する．$(1-t)^{-1} = 1 + t + t^2 + \cdots$ の両辺を t で微分して（あるいは $(1 + t + t^t 2 + \cdots)^d$ を展開して）；

$$(1-t)^{-d} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{d+n-1}{d-1} t^n$$

を得る．よって，$f(t) = \sum_{k=0}^{N} a_k t^k$ とすると；

$$\lambda(M_n) = a_0\binom{d+n-1}{d-1} + a_1\binom{d+n-2}{d-1} + \cdots + a_k\binom{d+n-k-1}{d-1} \qquad (*)$$

とかけていて（$m < d-1$ なら $\binom{m}{d-1} = 0$ とする），$(*)$ の先頭項は $f(1)/(d-1)!n^{d-1}$ である．これをまとめると次のようになる．

定義 *5.4.4*（Hilbert 多項式）

$k_1 = \cdots = k_s = 1$ のとき，有理係数で $d-1$ 次の (n に関する) 多項式 $\varphi_M(n)$ が存在して，$N \leq n$ ならば $\lambda(M_n) = \varphi_M(n)$ が成り立つ．φ_M を，M の λ に関する **Hilbert 多項式 (function，polymonial)** という．

A_0 が Artin（特に体）のとき，M は有限生成だから Artin かつ Noether 的なので命題 2.2.7 より組成列の長さ $\ell(M)$ は有限である．そして $\ell(M)$ は加法的である（確かめよ）．x_i を A_0 上の不定元として $A = A_0[x_1, \ldots, x_s]$ とすると，A_n は $x_1^{m_1} \ldots x_s^{m_s}$ $(\sum m_i = n)$ により生成される．n 次の単項式は $\binom{n+s}{s}$ 個あるので，$\ell(A_n) = \ell(A_0)\binom{n+s}{s}$ となり；

$$\varphi_A(n) = \frac{\ell(A_0)}{s!}(n+s)(m+s-1)\ldots(n+1)$$

である．

次に $(A, \mathfrak{m})$ を Noether 局所環，M を有限生成 A 加群とし，随伴次数環について考えよう．I を $\mathfrak{m}$ 準素イデアルとし，$G(A) = (G_I(A) =) \bigoplus I^n/I^{n+1}, G(M) = \bigoplus M_n/M_{n+1}$ を考える．このとき $G_0(A) = A/I$ は I が $\mathfrak{m}$ 準素なので Artin である．ここでフィルターについて思い出してみよう．

命題 *5.4.5*

上の設定のもとで，$\{M_n\}$ を M の安定している I フィルターとする．$x_1, \ldots, x_s$ を I の極小の生成系とすると；

(i) $\ell(M/M_n)$ は有限である．
(ii) すべての十分大きな n について，次数が s 以下の多項式 $g(n)$ が存在して $\ell(M/M_n) = g(n)$ となる．
(iii) $g(n)$ の先頭項は M と I のみに依存する（フィルター $\{M_n\}$ のとり方によらない）．

が成り立つ．

証明.

(i) 命題 4.5.2，命題 4.5.3 より $G(A)$ は Noether で，$G(M)$ は Noether$G(A)$ 加群である．各 $G_n(M) = M_n/M_{n+1}$ は I で零化されるので Noether A/I 加群であるから，A/I は Artin なので $\ell(M_n/M_{n+1})$ は有限である．ここで $\ell(M/M_n) = \sum_{i=1}^n \ell(M_{i-1}/M_i)$ であるから，$\ell(M/M_n)$ も有限である．

(ii) $I = (x_1, \dots, x_s)$ のとき，$G(A) = A/I[\overline{x_1}, \dots, \overline{x_s}]$ であった．よって 定義 5.4.4 の条件を満たし，次数が $s-1$ 次以下の $\varphi_{G(M)}(n)$ が存在して，$\ell(M_n/M_{n+1}) = \varphi_{G(M)}(n)$ となる．(i) より $\ell(M/M_{n+1}) - \ell(M/M_n) = \varphi_{G(M)}(n)$ なので，題意が従う．

(iii) $\{M'_n\}$ を M の安定している I フィルターとすると，$g'(n) = \ell(M/M'_n)$ とおく．補題 4.3.4 より $\{M_n\}, \{M'_n\}$ は有界な差を持つ．よって，ある $n_0 \geq 0$ が存在して，すべての n について；

$$g'(n) \leq g(n+n_0), g(n) \leq g'(n+n_0)$$

が成り立つ．はさみうちの原理から $\lim_{n\to\infty} g(n)/g'(n) = 1$ となり，先頭項は一致する．

（証明終）

フィルター $\{I^n M\}$ に対応する $g(n)$ は $\chi_I^M(n)$ で表される．

定義 *5.4.6*（特性多項式）

環 A の $\mathfrak{m}$ 準素イデアル I がなすフィルター $\{I^n\}$ に対応する $\chi_I^A(n)$ を $\mathfrak{m}$ 準素イデアル I の**特性多項式 (characteristic polynomial)** という．誤解の恐れのない場合，単に $\chi_I(n)$ とかく．

$\chi_I(n)$ の次数は I の極小の生成系の個数以下であることに注意する．

命題 *5.4.7*

I, I' を $\mathfrak{m}$ 準素イデアルとすると，$\chi_I(n)$ と $\chi'_I(n)$ の次数は等しい．

証明.

$\deg \chi_I(n) = \deg \chi_{\mathfrak{m}}(n)$ を示せばよい．A が Noether で I が $\mathfrak{m}$ 準素なので $\sqrt{I} = \mathfrak{m}$ だから，ある $r \geq 0$ が存在して $\mathfrak{m}^r \subset I \subset \mathfrak{m}$ である．よって $\mathfrak{m}^{nr} \subset I^n \subset \mathfrak{m}^n$ なので；

$$\chi_{\mathfrak{m}}(n) \leq \chi_I(n) \leq \chi_{\mathfrak{m}^r}(nr)$$

である．右辺と左辺の次数は等しいので題意が成り立つ．（証明終）

$\deg \chi_I(n) = d(A)$ とかく．また，先程まで s とかいていた I の極小の生成系の個数を $\delta(A)$ とかくことにする．$d(A)$ を A の Hilbert–Samuel 次元，$\delta(A)$ を A の座標次元と呼ぶ．この節の残りの目標は Noether 局所環 $(A, \mathfrak{m})$ について，次の Krull の次元定理；

定理 *5.4.8*（Krull の次元定理）

$(A, \mathfrak{m})$ を Noether 局所環とする．$\chi_{\mathfrak{m}}(n) = \ell(A/\mathfrak{m}^n)$ の次数を $d(A), A$ の $\mathfrak{m}$ 準素イデアルの極小の生成系の個数を $\delta(A)$ とおくと；

$$\dim A = d(A) = \delta(A)$$

が成り立つ．

を示すことである．先程も注意したように，$\delta(A) \geq d(A)$ が成り立っている．次に $d(A) \geq \dim A$ を示していこう．

補題 *5.4.9*

Noether 局所環 $(A, \mathfrak{m})$ と $\mathfrak{m}$ 準素イデアル I について，M を有限生成 A 加群，$x \in A$ を M の零因子でない元として $M' = M/xM$ とおく．このとき $\deg \chi_I^{M'} \leq \deg \chi_I^{M} - 1$ である．特に，$M = A$ としたとき $d(A/(x)) \leq d(A) - 1$ が成り立つ．

証明.

$N = xM$ とおき，$N_n = N \cap I^n M$ とする．このとき；

$$0 \longrightarrow N/N_n \longrightarrow M/I^n M \longrightarrow M'/I^n M' \longrightarrow 0$$

が完全である．Artin–Rees の補題（定理 4.3.10）より，$\{N_n\}$ は N の (安定している) I フィルターだから，命題 5.4.5 より，十分大きな n について $\ell(M/M_n) = g(n)$ となる $g(n)$ がとれる．同様に，十分大きな n をとれば $g(n) - \chi_I^M(n) + \chi_I^{M'}(n) = 0$ が成り立つ．また，仮定より $N = xM \cong M$ であるから，命題 5.4.5(iii) より $\deg g(n) = \deg \chi_I^M$ であるので，主張が従う．（証明終）

命題 *5.4.10*

$d(A) \geq \dim A$ である．

証明.

$d(A) = d$ についての帰納法で示す．$d = 0$ のとき，十分大きな n に対して $\ell(A/\mathfrak{m}^n)$ は定数である．これは $\mathfrak{m}^n = \mathfrak{m}^{n+1}$ であるので，中山の補題より $\mathfrak{m}^n = 0$ である．よって命題 5.2.5 から A は Artin であり，$\dim A = 0$ である．

$d-1$ まで正しいとする．$\dim A = r$ とおき，$P_0 \subset P_1 \subset \cdots \subset P_r$ を A の素イデアルの列とする．$x \in P_1 \setminus P_0$ をとる．$A' = A/P_0$ とおき，x' を x の A' への像とする．A' は整域で，$x' \neq 0$ であるので，補題 5.4.9 より $d(A'/(x'))) \leq d(A') - 1$ が成り立つ．ここで $\mathfrak{m}'$ を $\mathfrak{m}$ の A' への像とすると，$(A', \mathfrak{m}')$ は Noether 局所環である．ここで $\ell(A'/\mathfrak{m}') \leq \ell(A/\mathfrak{m})$ であるので $d(A') \leq d(A)$ である．よって $d(A'/(x')) \leq d(A) - 1$ であるから，帰納法の仮定から $\dim A'/(x') \leq d - 1$ である．$P_1, \ldots, P_r$ の $A'/(x')$ への像は長さ $r-1$ の素イデアルの列をなし，$r \leq d$ が成り立つ．よって示された．（証明終）

系 *5.4.11*

Noether 環 A の素イデアル P について $\operatorname{ht} P < \infty$ である．

証明.

Noether 局所環 $(B, \mathfrak{m})$ について，$\delta(B) < \infty$ が明らかに成り立つ．よって $\dim B < \infty$ である．よって，Noether 環 A とその素イデアル P について，A_P は局所環となるので，$\operatorname{ht} P = \dim A_P < \infty$ である．（証明終）

しかしながら，無限次元の Noether 環（整域）が存在することに注意しなければならない（例 B.2.2）．

補題 *5.4.12*

A を $1 \leq \dim A$ なる有限次元 Noether 環とする．このとき，単元でない $x \in A$ が存在して，$\dim A/(x) < \dim A$ が成り立つ．

証明.

$P \in \operatorname{Spec} A$ を $\operatorname{ht} P > 0$ となるものとする．ここで，A が Noether なので A の極小な素イデアルは有限個しか存在しない（系 2.3.10）．よって，それらを $P_1, \ldots, P_n$ とすると，すべての i について $P \not\subset P_i$ であるから，Prime avoidance（補題 1.10.1）より $P \not\subset \bigcup_{i=1}^{n} P_i$ が成り立つ．よって $x \in P \setminus \bigcup P_i$ をとると，$\dim A/(x) < \dim A$ である．

（証明終）

命題 *5.4.13*

$(A, \mathfrak{m})$ を Noether 局所環とすると，$\dim A \geq s$ 個の元からなる $\mathfrak{m}$ 準素イデアル I が存在する．特に $\delta(A) \leq \dim A$ である．

証明.

$\dim A = d$ についての帰納法で示す．$d = 0$ のとき，A は Artin なので，命題 5.2.5 より，ある n が存在して $\mathfrak{m}^n = 0$ である．よって $\mathfrak{m} = \operatorname{nil} A$ が成り立ち，0 は $\mathfrak{m}$ 準素イデアルである．ゆえに $\delta(A) = 0$ がわかる．

$d-1$ まで正しいとする．補題より，単元でない $x \in A$ で，$\dim A/(x) \leq d-1$ となるものがとれる．$A' = A/x$ とおくと，これは Noether 局所環である．$d' = \dim A'$ とすると，帰納法の仮定より $d' \geq s$ 個の元で生成される $\mathfrak{m}'$ 準素イデアル $I' = (x_1', \ldots, x_s')$ が存在する．ここで $I = (x_1, \ldots, x_s,\ x)$ が $\mathfrak{m}$ 準素イデアルであること，すなわち $\mathfrak{m} \subset \sqrt{I}$ であることを示そう．

任意の $y \in \mathfrak{m}$ をとる．もし $y \in (x)$ のときは $y \in I$ であるので，$y \notin (x)$ すなわち y' を A' への像とすると $y' \neq 0$ としてよい．I' は $\mathfrak{m}'$ 準素なので，ある n が存在して $y'^n \in I'$ である．よって $y'^n = a_1' x_1' + \cdots + a_s' x_s'$ とかける．よって $y^n - a_1 x_1 + \cdots + a_s x_s \in (x)$ であるから，$y^n \in I$ である．

よって $\delta(A) = s + 1 \leq d' + 1 \leq (d-1) + 1 = d$ であることがわかった．（証明終）

以上より，命題 5.4.5，命題 5.4.10，命題 5.4.13 によって Krull の次元定理（定理 5.4.8）が示された．

§ 5　Krull の次元定理の系たち

準素イデアルの節で注意しておいたことだが，極小素イデアルについてもう一度注意しておこう．Noether 環 A とそのイデアル I について $V(I)$ の極小元，つまり I を含む素イデアルで極小なものは $\operatorname{Ass}(A/I)$ の元であるから有限個である．また $I = \bigcap q_i$ と準素分解したとき，$P = \sqrt{q_i}$ となる i が存在する．

定理 *5.5.1*（Krull の標高定理）

A を Noether 環とし，$f_1, \ldots, f_n \in A$ とする．イデアル $(f_1, \ldots, f_n)$ の極小素イデアル P について $\operatorname{ht} P \leq n$ が成り立つ．

証明.

P のとりかたから，$(f_1, \ldots, f_n) = \bigcap_{i=1}^{m} q_i$ と準素分解したとき，$P = \sqrt{q_j}$ となる j がある．ここで A_P において $(f_1, \ldots, f_n)A_P$ が PA_P 準素イデアルであることを示そう．そのために $\sqrt{(f_1, \ldots, f_n)A_P} = PA_P$ を示せば十分である．任意の $x/s \in PA_P$ をとる．$x \in P = \sqrt{q_j}$ より，ある n がとれて $x^n \in q_j$ である．ここで $x^n \notin q_i$ となる i たちをまとめて $i_1, \ldots, i_r$ とする．$\sqrt{q_i} = P_i$ とおくと，P は極小なので $P_i \not\subset P$ が成り立つ．よって $i_1, \ldots, i_r$ について，ある $y_k \in P_{i_k}$ が存在して $y_k \notin P$ である．$y_k \in \sqrt{q_{i_k}}$ よりある n_k が存在し

て $y_k^{n_k} \in q_{i_k}$ である．n，$n_1, \ldots, n_r$ の最大値を n ととりなおし，$xy_1 \ldots y_r$ を x，$sy_1 \ldots y_r$ を s と置き直すと $x^n = \bigcap_{i=1}^m q_i = (f_1, \ldots, f_n)$ であり，$s \notin P$ であるので，$x/s \in \sqrt{(f_1, \ldots, f_n)A_P}$ である．よって Krull の次元定理から $\operatorname{ht} P = \dim A_P \leq n$ となる． （証明終）

系 5.5.2（Krull の単項イデアル定理）

A を Noether 環とし，x を A の零因子でも単元でもない A の元とする．このとき，(x) のすべての極小素イデアル P について $\operatorname{ht} P = 1$ である．

証明.

標高定理より $\operatorname{ht} P \leq 1$ である．$\operatorname{ht} P = 0$ であるとすると，$\operatorname{Spec} A_P = \{P\}$ であるので，$\operatorname{nil} A_P = PA_P$ である．$x \in P$ であるので，x は零因子でないことに矛盾する．よって $\operatorname{ht} P = 1$ である． （証明終）

定理 5.5.3（Krull の標高定理の逆）

A を Noether 環とし，$P \in \operatorname{Spec} A$ が $\operatorname{ht} P = n$ であったとすると，ある $a_1, \ldots, a_n \in P$ が存在して P は $(a_1, \ldots, a_n)$ の極小素イデアルとなる．

証明.

A_P は n 次元局所環なので，n 個の元で生成される PA_P 準素イデアル $(x_1/s_1, \ldots, x_n/s_n)$ が存在する．このとき PA_P は $(x_1/s_1, \ldots, x_n/s_n)$ の極小素イデアルになる．ここで $a_i = s_1 \ldots s_n(x_i/s_i) \in A$ とおくと，$s_1 \ldots s_n$ は A_P の単元なので，イデアルとして $(a_1, \ldots, a_n)A_P = (x_1/s_1, \ldots, x_n/s_n)$ である．よって P は $(a_1, \ldots, a_n)$ の極小素イデアルとなる． （証明終）

命題 5.5.4

A を Noether 環とし，$P \in \operatorname{Spec} A$ が $(a_1, \ldots, a_n)$ の極小素イデアルなら $\operatorname{ht}(P/(a_1, \ldots, a_i)) = n - i$ $(1 \leq i \leq n)$ である．

証明.

P の $\overline{A} = A/(a_1, \ldots, a_n)$ における像を $\overline{P}$ とおく．$\operatorname{ht} \overline{P} = r$ としよう．$\overline{A}$ において $\overline{P}$ は $(\overline{a_{i+1}}, \ldots, \overline{a_n})$ の極小素イデアルである．よって Krull の標高定理から $r \leq n - i$ である．

また，Krull の標高定理の逆より $\overline{b_1}, \ldots, \overline{b_r} \in \overline{A}$ が存在して $\overline{P}$ は $(\overline{b_1}, \ldots, \overline{b_r})$ の極小素イデアルである．よって P は $(a_1, \ldots, a_i, b_1, \ldots, b_r)$ の極小素イデアルとなり，$n \leq r + i$ である．よって $r = n - i$ が示された． （証明終）

命題 5.5.5

Noether 局所環 $(A, \mathfrak{m})$ と A の零因子でない $a \in \mathfrak{m}$ について，$\dim A/aA = \dim A - 1$ が成り立つ．

証明.

$d = \dim A/aA$ とおく．補題 5.4.9 より $d \leq \dim A - 1$ である．一方，$\mathfrak{m}$ の A/aA への像を $\overline{\mathfrak{m}}$ とすると，局所環 $(A/aA, \overline{\mathfrak{m}})$ において d 個の元で生成される $\overline{\mathfrak{m}}$ 準素イデアルがある．$a_1, \ldots, a_d \in A$ をそれらの A/aA への像 $\overline{a_i}$ が $\overline{\mathfrak{m}}$ 準素イデアルを生成するような元としよう．このとき $(a, a_1, \ldots, a_d)$ は $\mathfrak{m}$ 準素イデアルとなる．よって $\dim A \leq d + 1$ となり，示された． （証明終）

定理 5.5.6

Noether 局所環 $(A, \mathfrak{m})$ において，$\mathfrak{m}$ 進完備化を $\widehat{A}$ とすると $\dim \widehat{A} = \dim A$ である．

証明.

補題 4.4.3 より $A/\mathfrak{m}^n = \widehat{A}/\widehat{\mathfrak{m}}^n$ であるので，$\chi_{\mathfrak{m}}(n) = \chi_{\widehat{\mathfrak{m}}}(n)$ が成り立つ　（証明終）

命題 5.5.7

Noether 環 A のイデアル I について，$\mathrm{ht}\, I = r$ ならばある $f_1, \ldots, f_r \in I$ が存在して，任意の $1 \leq i \leq r$ について $\mathrm{ht}(f_1, \ldots, f_i) = i$ が成り立つ．

証明.

$\mathrm{ht}\, I = r \geq 1$ としてよい．まず，A は Noether なので A の極小素イデアルは有限個である．すると，Prime avoidance（補題 1.10.1）から $f_1 \in I$ を A のどの極小素イデアルにも含まれないようにとれる．よって $f_1 \in P$ となる $P \in \mathrm{Spec}\, A$ について $\mathrm{ht}\, P \geq 1$ である．ここで Krull の標高定理より $\mathrm{ht}(f_1) \leq 1$ であるから，$\mathrm{ht}(f_1) = 1$ となる．そこで，ある $i < r$ について $f_1, \ldots, f_i$ がすべての $1 \leq j \leq i$ について $\mathrm{ht}(f_1, \ldots, f_j) = j$ となるように選ばれているとする．素イデアル $P \in V(f_1, \ldots, f_i)$ について $\mathrm{ht}\, P = i$ であるものは $(f_1, \ldots, f_i)$ の極小素因子なので系 2.3.10 より有限個しかない．また，$I \subsetneq P$ であるので，Prime avoidance より $f_{i+1} \in I$ を $f_{i+1} \notin \bigcup_{P \in V(j_1, \ldots, j_i), \mathrm{ht}\, P = j} P$ となるようにとることができる．すると $\mathrm{ht}(f_1, \ldots, f_{i+1}) = i + 1$ が成り立つ．よって帰納的に主張が従う．　（証明終）

定理 5.5.8

環 A について，$\dim A + 1 \leq \dim A[X] \leq 2 \dim A + 1$ が成り立つ．

証明.

$\dim A + 1 \leq \dim A[X]$ は明らかである．$\dim A[X] = d$ とおこう．$A[X]$ の素イデアル鎖 $P_0 \subsetneq P_1 \subsetneq \cdots \subsetneq P_d$ について，$P'_i = P_i \cap A$ とおいて A の素イデアル鎖 $P'_0 \subset P'_1 \subset \cdots \subset P'_d$ を考える．この鎖の長さの取りうる値の最小値を求めよう．

$P \in \mathrm{Spec}\, A[X]$ と $P' = P \cap A \in \mathrm{Spec}\, A$ を考える．積閉集合 $A - P'$ による A, $A[X]$ の局所化はそれぞれ $A'_P, A'_P[X]$ である．特に $\mathrm{Spec}\, A'_P[X]$ は $\{Q \in \mathrm{Spec}\, A[X] \mid (Q \cap A) \subset P'\}$ と対応する．また，$A'_P[X]$ において $V(P' A'_P[X])$ は $\mathrm{Spec}(A'_P[X]/P' A'_P[X]) = \mathrm{Spec}(k(P)[X])$ と対応するので，これらから P について $\{Q \in \mathrm{Spec}\, A[X] \mid Q \cap A = P'\}$ からなる $A[X]$ の素イデアル鎖の長さは高々 1 である．

さて，A の素イデアル鎖 $P'_0 \subset \cdots \subset P'_d$ にもどると，もし $P'_{i-1} = P'_i$ ならば先の議論より P'_{i-2}, P'_{i+1} は P'_i と異なる．よってこの鎖は最短でも長さが d が偶数なら $d/2$, 奇数なら $(d-1)/2$ である．よって $(d-1)/2 \leq \dim A$ すなわち $d \leq 2 \dim A + 1$ が成り立つ．　（証明終）

次の結果は系 3.4.8 の拡張である．

系 5.5.9

A が Noether 環ならば，$\dim A[X] = \dim A + 1$ が成り立つ．帰納的に $\dim A[X_1, \ldots, X_n] = \dim A + n$ である．

証明.

$d = \dim A[X]$ としたとき，$A[X]$ の素イデアル鎖 $P_0 \subsetneq P_1 \subsetneq \cdots \subsetneq P_d$ について，先の定理と同様に A の素イデアル鎖 $P'_0 \subset \cdots \subset P'_d$ を考える．このとき $d - 1 \leq \operatorname{ht} P'_d$ を示したい．

$P' \in \operatorname{Spec} A$ について，$P'A[X]$ を係数がすべて P' の元である多項式全体とすると，これは $A[X]$ の素イデアルになる．$\operatorname{ht} P' = r$ とし，A の素イデアル鎖 $Q'_0 \subsetneq Q'_1 \subsetneq \cdots \subsetneq Q'_r = P'$ を考えよう．このとき $Q'_0 A[X] \subsetneq Q'_1 A[X] \subsetneq \cdots \subsetneq Q'_r A[X]$ は $A[X]$ の素イデアル鎖になるので $r \leq \operatorname{ht} P'A[X]$ が成り立つ．また $\operatorname{ht} P' = r$ より，P はある $f_1, \ldots, f_r$ について $I = (f_1, \ldots, f_r)$ の極小素イデアルである．このとき $P'A[X]$ は $I[X]$ の極小素イデアルになるので，Krull の標高定理より $\operatorname{ht} P'A[X] \leq r$ である．

すると，A の素イデアル鎖 $P'_0 \subset \cdots \subset P'_d$ において $\operatorname{ht} P'_d = \operatorname{ht} P'_d A[X]$ であり，$P'_d A[X] \cap A = P_d \cap A$ であるので，$P'_d A[X] \subset P_d$ でありかつ前定理の議論からその間に素イデアルはない．よって $d - 1 \leq \operatorname{ht} P'_d A[X] = \operatorname{ht} P'_d \leq \dim A$ である．よって $d \leq \dim A + 1$ が従う．（証明終）

§ 6　正則環

以後２つの節，正則環と Cohen–Macaulay 環については，深い結果を証明するにはホモロジー代数の考え方が不可分なので，定義とそこから予見される性質を紹介するに留める．

Noether 局所環 $(A, \mathfrak{m}, k)$ について，$\dim A = d$ とすると A の $\mathfrak{m}$ 準素イデアルは少なくとも d 個の元で生成される．ちょうど d 個の元で $\mathfrak{m}$ 準素イデアルが生成されているときを考えよう．

定義 *5.6.1*（巴系）

$(A, \mathfrak{m})$ を d 次元 Noether 局所環とする．$a_1, \ldots, a_d \in \mathfrak{m}$ が $\mathfrak{m}$ 準素イデアルを生成するとき $a_1, \ldots, a_d$ を A の**巴系 (system of parameters)** という．

また命題 1.3.6 より，$\mathfrak{m}$ を生成するのに必要な元の個数は $\dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ である．$\dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ を A の**埋め込み次元 (embedding dimension)** といい $\operatorname{em.dim} A$ と表す．次元定理より $\dim A \leq \operatorname{em.dim} A$ が成り立つ．等号が成り立つとき，すなわち $\mathfrak{m}$ が $\dim A$ 個の元で生成されているとき A を**正則局所環**という．

定義 *5.6.2*（正則局所環）

$(A, \mathfrak{m})$ を Noether 局所環とする．$d = \dim A$ 個の元 $a_1, \ldots, a_d \in A$ が存在して $\mathfrak{m} = (a_1, \ldots, a_d)$ となっているとき A を**正則局所環 (regular local ring)** といい，$\mathfrak{m}$ を生成する巴系を**正則巴系**という．

環 A のすべての素イデアル P による局所化 A_P が正則局所環であるような A を，**正則環 (regular ring)** という．注意するべきこととして，この節の最後にも述べているが，正則局所環は正則であることの（ホモロジー代数を用いないという意味での）**初等的な証明は知られていない（定理 5.6.9）**．この定義は後に述べる Cohen–Macaulay 環のアナロジーであり，自明なものではまったくない．局所環に関する定義を一般化する際には，素イデアルによる局所化により局所環に帰着させよう，という気持ちを汲んでいただければ十分だろう．

命題 *5.6.3*

d 次元 Noether 局所環 $(A, \mathfrak{m})$ について，$a_1, \ldots, a_i$ が A の正則巴系の 1 部分であることと $A/(a_1, \ldots, a_i)$ が $d - i$ 次の正則局所環であることは同値である．

証明.

($\Longrightarrow$)

$A/(a_1,\dots,a_i)$ の極大イデアルは $a_{i+1},\dots,a_d$ の像で生成されており，命題 5.5.4 より $\dim A/(a_1,\dots,a_i) = d-i$ である．よって正則局所環となる．

($\Longleftarrow$)

$A/(a_1,\dots,a_i)$ の極大イデアル $\mathfrak{m}' = \mathfrak{m}/(a_1,\dots,a_i)$ が $b_1,\dots,b_{d-i}$ の像で生成されているとすると $\mathfrak{m} = (a_1,\dots,a_i,\ b_1,\dots,b_{d-i})$ である．

（証明終）

定理 5.2.4 により 1 次元の正則局所環と DVR は同じ概念である．これの一般化として，正則局所環が整閉整域であることを証明しよう．環 A のイデアル I による随伴次数環 $G_I(A) = \bigoplus I^n/I^{n+1}$ を思い出そう．これは次数付き環であり，A が Noether ならば $I = (a_1,\dots,a_r)$ としたとき $G(A) \cong A/I[a_1+I^2,\dots,a_r+I^2]$ であった．これを正則局所環 $(A,\mathfrak{m})$ に適用すると，$\dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = \dim A$ であるから，$d = \dim A$ とおくと $G(A) \cong k[X_1,\dots,X_d]$ となり，随伴次数環は整閉整域である．一般に Noether 環 A のイデアルによる随伴次数環が整閉整域なら A も整閉整域だが，ここではもう少し広い環についてそのことを示そう．

A を環とし，I を A のイデアルとする．$a \notin \bigcap_{n\geq 0} I^n$ ならば $a \in I^n, a \notin I^{n+1}$ であるような n が一意に定まる．すなわち $a + I^n$ が a の $G(A)$ における像である．これを $G(a)$ と書いて，a の**先頭形式 (initial form)** という．また $a \in \bigcap_{n\geq 0} I^n$ ならば $v(a) = \infty$，そうでないなら $a \in I^n, a \notin I^{n+1}$ となる n を用いて $v(a) = n$ と定めることで関数 $v : A \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ が定まる．これを A の I に関する**順序関数 (order function)** という．このとき，任意の $a, b \in A$ について；

$$v(a+b) = \min\{v(a), v(b)\}$$

$$v(ab) \geq v(a) + v(b)$$

が成り立つことがわかる．この v が付値のような挙動を見せることと，$G(A)$ が整域であることは同値である．

補題 5.6.4

A を環とし．I を A のイデアルとする．$v(ab) > v(a)+v(b)$ であることと，$G(a)G(b) = 0$ であることは同値である．

証明.

$v(ab) > v(a)+v(b)$ とする．$G(a) = a + I^{v(a)}, G(b) = b + I^{v(b)}$ であるから $G(a)G(b) = ab + I^{v(a)+v(b)+1}$ である．$v(ab) > v(a)+v(b)$ より $ab \in I^{v(a)+v(b)+1}$ だから $G(a)G(b) = 0$ であることがわかる．逆も同様．

（証明終）

系 5.6.5

A を環とし．I を A のイデアルとする．$G(A)$ が整域ならば $A' = A/\bigcap I^n$ も整域で，A' 上で $v(ab) = v(a)+v(b)$ が成り立つ．

系 4.4.8 により，A が Noether で $I \subset \operatorname{rad} A$ なら $\bigcap I^n = 0$ であるので，$A' = A$ とできる．

定理 *5.6.6*

A を環とし，I を $\bigcap I^n = 0$ であるような A のイデアルとする．このとき，随伴次数環 $G(A)$ が完整閉ならば A もそうである．

証明.

系 5.6.5 により A は整域である．さて，$x = a/b \in \mathrm{Frac}\, A$ をとったとき，ある $r \in A$ があって，任意の $n > 0$ について $r(a/b)^n \in A$ であると仮定する．$x = a/b \in A$ すなわち $a \in Ab$ を示せばよい．いま $\bigcap I^n = 0$ だから，任意の $n \geq 0$ について $a \in Ab + I^n$ を示せばよい．

$n = 0$ のときは $I^n = A$ より自明．$n - 1$ まで正しい，すなわち $a = a'b + c^{n-1}$ とおけるとする．すると $x = a' + c^{n-1}/b$ で，任意の $m > 0$ に対して $rx^m \in A$ だから，$r(x - a')^m = r(c^{n-1}/b)^m \in A$ である．よって $rc^{n+m-1} = c_m b^m$ とおくと $G(r)G(c^{n-1})^m = G(c_m)G(b)^m$ なので，$G(A)$ が完整閉だから $G(c^{n-1})/G(b) \in G(A)$ である．すなわち，ある $a'' \in A$ によって $G(c^{n-1}) = G(a'')G(b)$ とかける．$c^{n-1} \in I^{n-1}$ なのでこれは $c^{n-1} - a''b \in I^n$ を意味する．よって $c^{n-1} = a''b + (c')^n$ とおけば，$a = a'b + c^{n-1} = (a' + a'')b + (c')^n$ とかけて，$a \in Ab + I^n$ である．（証明終）

系 *5.6.7*

正則局所環は整閉整域である．

命題 3.2.11 により整閉整域は正規環であるから，次の結果が従う．

系 *5.6.8*

A を正則局所環とすると，任意の $P \in \mathrm{Spec}\, A$ に対して A_P も整閉整域である．特に高さ 1 の素イデアル P による局所化 A_P は正則局所環である．

系の拡張として一見するとイデアル論の範疇で示せそうに見えるが，ホモロジー代数を要する結果として；

定理 *5.6.9*（Serre の定理）

A を正則局所環とすると，任意の $P \in \mathrm{Spec}\, A$ について A_P も正則局所環である．すなわち正則局所環は正則環である．

がある（証明は定理 7.4.10）．この定理の証明は Serre による方法と本質的に異なる証明法が知られていない．これとは異なる正則局所環についての結果で，ホモロジー代数（Serre の定理）を要するものに；

定理 *5.6.10*（Auslander–Buchsbaum の定理）

正則局所環は UFD である．

がある（証明は定理 10.1.12）．このように 1960 年代は，Serre, Auslander, Bachsbaum, Bass, Grothendieck らによってホモロジー代数的な手法が本格的に導入され，可換環論は大規模に発展することとなった．

次の節ではホモロジー代数を導入する前に，現在の可換環論の中心をなす Cohen–Macaulay 性についてホモロジー代数を用いない範囲で紹介することにする．

§ 7　Cohen–Macaulay 加群

重要な局所環のクラスの 1 つに **Cohen–Macaulay 環**（略して CM **環**と書くことも多い）がある．Cohen–Macaulay 環は現在の可換環論で中心的な存在の 1 つであり，この節と続くもう 1 つの節ではホモロジー代数を（ほとんど）要しない範囲で性質をまとめておこう．まずそのために**正則列**と**深さ**を導入する．

定義 *5.7.1*（正則列）

A 加群 M について，$a \in A$ が M に非零因子として作用する，すなわち任意の $0 \neq x \in M$ について $ax \neq 0$ であるとき，a は M **正則 (regular)** であるという．また $a_1, \ldots, a_r \in A$ について任意の $1 \leq i \leq r$ について a_i が $M/(a_1, \ldots, a_{i-1})M$ 正則であるとき，$a_1, \ldots, a_r$ を M **正則列 (regular sequence)** という．

A が Noether 環のとき，系 2.3.4 により $a \in A$ が M 正則であること $a \notin \bigcup_{P \in \operatorname{Ass} M} P$ であることは同値である．

例えば体上の多項式 $A = k[X_1, X_2, X_3]$ において $f_1 = X_1(X_2 - 1), f_2 = X_2, f_3 = X_3(X_1 - 1)$ とすると f_1, f_2, f_3 は A 正則列をなす．ところが X_1 は $A/(f_1)$ において 0 ではないが，$f_3 X_3$ は 0 であるので f_1, f_3, f_2 は A 正則列ではない．このように正則列は順序を考慮する必要があるが，局所環においては極大イデアルの元について順序によらないことが知られている．ここではより強く $\operatorname{rad} A$ の元においてそのことを示そう．

補題 *5.7.2*

Noether 環 A 上の加群 M において $a \in A$ が M 正則でありかつ $\bigcap a^n M = 0$ であるものとする．このとき M の素因子 $P \in \operatorname{Ass} M$ について $P + aA \subset Q$ となる $Q \in \operatorname{Ass}(M/aM)$ が存在する．

この補題の仮定は Krull の交叉定理（系 4.4.8）より $a \in \operatorname{rad} A$ のとき満たされる．

証明.

$x \in M$ によって $P = \operatorname{Ann}(x)$ とかける．ここで $\bigcap a^n M = 0$ より，ある $k \geq 0$ が存在して $x \in a^k M$ かつ $x \notin a^{k+1} M$ である．このとき $y \in M$ によって $x = a^k y$ と書けているとすると $y \notin aM$ である．ここで $\overline{y}$ を y の M/aM における像とすると，a が M 正則なので $(P + aA)\overline{y} = 0$ が成り立つ．これは $P + aA \subset \operatorname{Ann}(\overline{y})$ を導き，命題 2.3.3 よりある $Q \in \operatorname{Ass}(M/aM)$ で $P + aA \subset Q$ となるものが存在する．（証明終）

命題 *5.7.3*

Noether 環 A 上の有限生成加群 M において $a_1, \ldots, a_r \in \operatorname{rad} A$ とする．このとき $a_1, \ldots, a_r$ が M 正則列ならその並べ替えも M 正則である．

証明.

まず 2 つの場合に帰着できることをみよう．$a_1, \ldots, a_i, a_{i+1}, \ldots, a_r$ が M 正則列であるとする．$N = M/(a_1, \ldots, a_{i-1})M$ とおくと a_i は N 正則であり，a_{i+1} は $N/a_i N = M/(a_1, \ldots, a_i)M$ 正則である．このとき $a_1, \ldots, a_{i+1}, a_i, \ldots, a_r$ が M 正則列であることをみるには a_{i+1} が N の，a_i が $N/a_{i+1}N = M/(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1})M$ 正則であることを示せばよい．

よって a_1 が M 正則，かつ a_2 が $M/a_1 M$ 正則なら a_2 が M 正則，かつ a_1 が $M/a_2 M$ 正則であることを示せば十分である．まず a_2 が M の零因子とすると，命題 2.3.3 よりある $P \in \operatorname{Ass} M$ に対して $a_2 \in P$ である．ここで $a_1 \in \operatorname{rad} A$ より，Krull の交叉定理から $\bigcap a_1^n M = 0$ となるので，補題から $P + a_1 A \subset Q$ とな

る $Q \in \mathrm{Ass}(M/a_1M)$ がある．すると $a_2 \in P \subset Q$ だから a_2 が M/a_1M 正則であることに矛盾する．よって a_2 は M 正則．また a_1 について $a_1x \in a_2M$ となる $x \in M$ があったとすると，$a_1x = a_2y$ とかいたとき，$a_2y \in a_1M$ より a_2 が M/a_1M 正則だから $y \in a_1M$ である．$y = a_1z$ とおくと $a_1(x - a_2z) = 0$ となり，a_1 は M 正則なので $x = a_2z \in a_2M$ となり，a_1 は M/a_2M 正則であることがわかる．（証明終）

系 5.7.4

Noether 局所環 $(A, \mathfrak{m})$ 上の有限生成加群 M について，$a_1, \dots, a_r \in \mathfrak{m}$ が M 正則列であるとき，その並べ替えも M 正則列である．

また，命題 5.7.3 の証明を抜き出すことで，一般の正則元についても次のことが言えていることがわかる．

系 5.7.5

Noether 環 A の有限生成加群 M について，a_1, a_2 が M 正則列であるとき，a_2 が M 正則ならば a_2, a_1 も M 正則列である．

ここで，Noether 環 A 上の有限生成加群について，イデアル I を固定したときに I の元のみからなる正則列に興味がある．もし $IM \neq M$ ならば正則列で極大なものの長さは一般に一意に定まることを示そう．もし A が局所環ならすべての真のイデアル I について $I \subset \mathfrak{m}$ であり，中山の補題から $IM \neq M$ であることに注意する．

補題 5.7.6

A を Noether 環とし，M を有限生成 A 加群とする．$IM \neq M$ となる A のイデアル I について，任意の $a \in I$ が M の零因子であることと，ある $P \in \mathrm{Ass}\, M$ が存在して $I \subset P$ であることは同値である．

証明.

$(\Longleftarrow)$ は明らか．$(\Longrightarrow)$ は対偶を示す．任意の $P \in \mathrm{Ass}\, M$ について $I \not\subset P$ であると仮定する．$\mathrm{Ass}\, M$ は有限だから Prime avoidance より $I \not\subset \bigcup_{P \in \mathrm{Ass}\, M} P$ であり，系 2.3.4 より $a \in I$ で M 正則元となるものが存在する．（証明終）

定理 5.7.7

A を Noether 環とし，M を有限生成 A 加群とする．$IM \neq M$ となる A のイデアル I について，I の元からなる極大な M 正則列の長さは一定である．

証明.

M の極大な正則列の長さの最小値を n とする．n についての帰納法で示そう．$n = 0$ のときは示すことがない．

$n = 1$ のとき，$a, b \in I$ を M 正則元とする．任意の I の元が M/bM の零因子であることを示す．補題 5.7.6 よりある $P \in \mathrm{Ass}\, M/aM$ が存在して $I \subset P$ なので，ある $x \in M$ が存在して，$x \notin aM$ かつ $Ix \subset aM$ である．すると，ある $y \in M$ が存在して $bx = ay$ とかける．もし $y \in bM$ とすると，b が M 正則だから $x \in aM$ となって矛盾する（$y = b'y$ とおくと $b(x - a'y) = 0$ となる）から $y \notin bM$ である．そこで $Iy \subset bM$ を示そう．いま $Ix \subset aM$ だったから，$Iay = Ibx \subset abM$ であるので，a が M 正則なので $Iy \subset bM$ であることがわかり，すべての I の元は M/bM の零因子である．よって I の元からなる極大な M 列はすべて長さ 1 である．

次に $n > 1$ としよう．$a_1, \ldots, a_n$ を極大な M 正則列とし，$b_1, \ldots, b_n$ を異なる M 正則列とする．I が $M/(b_1, \ldots, b_n)M$ 正則元を持たないことを示せばよい．$I_i = (a_1, \ldots, a_i), J_i = (b_1, \ldots, b_i)$ とおく．次の集合；

$$\mathscr{P} = \bigcup_{0 \leq i \leq n-1} (\mathrm{Ass}\, M/I_iM \cup \mathrm{Ass}\, M/J_iM)$$

は有限集合で，補題 5.7.6 により，任意の $P \in \mathscr{P}$ について $I \not\subset P$ である．すると Prime avoidance よりある $r \in I$ であって，すべての $M/I_iM, M/J_iM$ で正則であるものがとれる．

$a_2, \ldots, a_n$ は M/a_1M の長さ $n-1$ の極大な正則列となり，帰納法の仮定より $a_2, \ldots, a_{n-1}, r$ も M/a_1M で極大である．すると $a_1, \ldots, a_{n-1}, r$ は M の極大な正則列で，系 5.7.5 から，並び替えて $r, a_1, \ldots, a_{n-1}$ も極大な正則列となる．よって M/rM は長さ $n-1$ の極大な正則列をもつ．

いま $b_1, \ldots, b_{n-1}, r$ も M 正則列で，並び替えて r で割ると $b_1, \ldots, b_{n-1}$ は M/rM の正則列である．よって帰納法の仮定から $b_1, \ldots, b_{n-1}$ は M/rM で極大で，$b_1, \ldots, b_{n-1}, r$ も極大でなければならない．ここで $M/J_{n-1}M$ において r は極大な正則列をなすから，b_n も極大であることがわかり，$b_1, \ldots, b_n$ は極大である．（証明終）

この一意に決まる値をもって，加群の**深さ**というものを導入しよう．

定義 5.7.8（深さ）

A を Noether 環とし，M を有限生成 A 加群とする．A のイデアル I について $IM \neq M$ であるとき，I の元からなる極大な M 正則列の長さを M の I における**深さ (depth)** といい，$\mathrm{depth}_I\, M$ とかく．$IM = M$ であるときは $\mathrm{depth}_I\, M = \infty$ と定義する．特に A が極大イデアルが $\mathfrak{m}$ である局所環のとき，$\mathfrak{m}$ における M の深さを $\mathrm{depth}\, M$ とかいて単に M の**深さ**という．

さて，Noether 局所環 $(A, \mathfrak{m})$ について $\dim A \leq \mathrm{em.dim}\, A = \dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ であり，これの等号が成り立つものを正則局所環というのであった．深さは次元を下から抑えるものとなっている．そのことを示そう．

命題 5.7.9

Noether 局所環 $(A, \mathfrak{m})$ と，有限生成 A 加群 $M \neq 0$ について，任意の $P \in \mathrm{Ass}\, M$ に対し；

$$\mathrm{depth}\, M \leq \dim A/P$$

が成り立つ．

証明.

$\mathrm{depth}\, M$ についての帰納法で示す．まず $\mathrm{depth}\, M = 0$ のときは明らかに成り立っている．$\mathrm{depth}\, M = r$ とおき，$\mathrm{depth}\, M' \leq r-1$ となる M' について成り立っていると仮定しよう．M 正則列 $a_1, \ldots, a_r$ を考える．このとき $\mathrm{depth}(M/a_1M) = r-1$ である．また任意の $P \in \mathrm{Ass}\, M$ について，補題 5.7.2 から $P + (a_1) \subset Q$ となる $Q \in \mathrm{Ass}(M/a_1M)$ が存在し，$a_1 \notin P, a_1 \in Q$ であるから $P \subsetneq Q$ である．よって $\dim A/Q < \dim A/P$ が成り立つ．帰納法の仮定から $r - 1 = \mathrm{depth}(M/a_1M) \leq \dim A/Q < \dim A/P$ であるので，$r \leq \dim A/P$ であることがわかる．（証明終）

系 5.7.10

Noether 局所環 $(A, \mathfrak{m})$ と，有限生成 A 加群 $M \neq 0$ について，$\mathrm{depth}\, M \leq \dim M$ である．

これにより次の定義を導入する．

定義 *5.7.11*（Cohen–Macaulay 加群）

Noether 局所環 $(A, \mathfrak{m})$ 上の有限生成加群 M について，$\dim M = \operatorname{depth} M$ であるとき M を **Cohen–Macaulay 加群**という．局所環 A が A 加群として Cohen–Macaulay 加群であるとき，A を Cohen–Macaulay 局所環という．

Cohen–Macaulay は単に CM と略されることが多い．CM 加群の定義からすぐに従う性質をいくつか紹介しておく．

命題 *5.7.12*

M を Noether 局所環 $(A, \mathfrak{m})$ 上の CM 加群とすると，M は非孤立素因子を持たない．

証明.

一般に $P \in \operatorname{Ass} M$ なら $\operatorname{depth} M \leq \dim A/P \leq \dim M$ だが，M が CM なので $\dim A/P$ は P によらず $\operatorname{depth} M = \dim M$ に等しい．（証明終）

これから CM 性について考察していくために，補題を用意しよう．

補題 *5.7.13*

$(A, \mathfrak{m})$ を Noether 局所環とし，M を A 上の有限生成加群とする．$a \in I$ が M 正則ならば，イデアル $I \subset \mathfrak{m}$ について；

$$\operatorname{depth}_I(M/aM) = \operatorname{depth}_I M - 1$$

が成り立つ．

極大列の長さが一意である（定理 5.7.7）ことから証明は明らかである．

補題 *5.7.14*

$(A, \mathfrak{m})$ を Noether 局所環とし、$M \neq 0$ を有限生成 A 加群とする．$a \in \mathfrak{m}$ が M 正則元であるとき，$\dim M/aM = \dim M - 1$ が成り立つ．

証明.

a は $A/\operatorname{Ann} M$ の非零因子なので，命題 5.5.5 より $\dim M - 1 = \dim A/\operatorname{Ann} M - 1 = \dim A/(\operatorname{Ann} M + (a))$ が成り立つ．また $\dim M/aM = \dim A/\operatorname{Ann}(M/aM)$ であるので，$V(\operatorname{Ann} M + (a)) = V(\operatorname{Ann} M/aM)$ を示せばよい．

容易に $\operatorname{Ann}(M/aM) \subset P$ なら $\operatorname{Ann} M \subset P$ かつ $a \in P$ であることがわかる．一方で $\operatorname{Ann} M \subset P$ かつ $a \in P$ ならば $M_P \neq 0$ であり，また $a \in P$ だから $(M/aM)_P = M_P/aM_P$ であり，$a/1 \in \operatorname{rad}(A_P) = PA_P$ だから中山の補題より $M_P/aM_P \neq 0$ である．よって $P \in \operatorname{Supp} M/aM$ すなわち $\operatorname{Ann}(M/aM) \subset P$ となり，求める等式が示された．（証明終）

この２つの補題から帰納法により容易に次が従う．

系 *5.7.15*

M を Noether 局所環 $(A, \mathfrak{m})$ 上の CM 加群とする．$a_1, \ldots, a_r \in \mathfrak{m}$ が M 正則列なら（r は $\operatorname{depth} M$ と一致しているとは限らない），$M/(a_1, \ldots, a_r)M$ も次元が $\dim M - r$ の CM 加群である．

最後に技術的な命題たちを述べておこう．

命題 *5.7.16*

$(A, \mathfrak{m})$ を Noether 局所環とし，M を A 上の CM 加群とする．任意の A のイデアル I について；

$$\operatorname{depth}_I M = \dim M - \dim M/IM$$

である．

証明.

$\operatorname{depth}_I M$ についての帰納法で示す．$\operatorname{depth}_I M = 0$ のとき，補題より $I \subset P$ となる $P \in \operatorname{Ass} M$ が存在する．命題 5.7.12 により $\dim M = \dim A/P$ なので，$\dim M/IM \leq \dim A/P$ である．逆を示すには，$P \in \operatorname{Supp} M/IM$ をみればよいが，$I \subset P$ かつ $P \in \operatorname{Ass} M$ なので $(M/IM)_P = M_P/IA_P M_P \neq 0$ となって，求める等式が成り立つ．

$r = \operatorname{depth}_I M > 0$ とする．$a_1, \ldots, a_r \in I$ を M 正則列とすると，イデアル $I' = (a_1, \ldots, a_{r-1})$ において；

$$\operatorname{depth}_I M - 1 = \operatorname{depth}_{I'} M = \dim M - \dim M/I'M$$

なので，$\dim M/IM = \dim M/I' - 1$ を示せばよい．$\dim M/(a_1, \ldots, a_r)M = \dim M/I'M - 1$ だから，$\dim M/IM = \dim M/(a_1, \ldots, a_r)$ を示す．$\operatorname{depth}_I M/(a_1, \ldots, a_r)M = 0$ だからある $P \in \operatorname{Ass} M/(a_1, \ldots, a_r)M$ が存在して $I \subset P$ である．いま $M/(a_1, \ldots, a_r)M$ は CM 加群だから $\dim M/(a_1, \ldots, a_r)M = \dim A/P$ であり，$r = 0$ の場合と同様に示される．（証明終）

命題 *5.7.17*

$(A, \mathfrak{m})$ を Noether 局所環とし，M を A 上の CM 加群とすると，任意の $P \in \operatorname{Supp} M$ について；

$$\operatorname{depth}_P M = \operatorname{depth}_{PA_P} M_P = \dim M_P$$

が成り立つ．特に M_P も CM A_P 加群である．

証明.

一般に $\operatorname{depth}_P M \leq \operatorname{depth}_{PA_P} M_P \leq \dim M_P$ であることを容易に確かめることができる．よって $\dim M_P \leq \operatorname{depth}_P M$ であることを示せばよい．

$\operatorname{depth}_P M$ についての帰納法で示そう．まず $\operatorname{depth}_P M = 0$ ならば，補題より $P \subset Q$ となる $Q \in \operatorname{Ass} M$ が存在する．ここで補題 2.3.5 より $V(\operatorname{Ann}(M_P)) = \operatorname{Ass} M_P = \{Q \in \operatorname{Ass} M \mid Q \subset P\} \neq \emptyset$ であり，M が CM 加群だから非孤立素因子を持たないので $V(\operatorname{Ann}(M_P)) = PA_P$ となり，$\dim M_P = \dim A_P/PA_P = 0$ である．さて $\operatorname{depth}_P M = r > 0$ として，$r - 1$ まで正しいとする．定義より $a \in P$ で M 正則なものがある．ここで補題 5.7.13 より $\operatorname{depth}_P M/aM = \operatorname{depth}_P M - 1$ であり，帰納法の仮定と補題 5.7.14 から $\operatorname{depth}_P M/aM = \dim(M/aM)_P = \dim M_P/aM_P = \dim M_P - 1$ である．よって $\operatorname{depth}_P M = \dim M_P$ であることがわかり，証明が完了する．（証明終）

この命題により CM 局所環 $(A, \mathfrak{m})$ の局所化 A_P もまた $\operatorname{depth} A_P = \operatorname{ht} P$ となる CM 局所環である．

§ 8　Cohen–Macaulay 環と鎖状環

一般の環についての CM 性は次のように定義する（正則局所環の場合と異なり，命題 5.7.17 により CM 局所環は次の定義を満たすことがわかっていることに注意せよ）．

定義 *5.8.1*（Cohen–Macaulay 環）

Noether 環 A について，任意の $P \in \operatorname{Spec} A$ による局所化 A_P が Cohen–Macaulay 局所環となるとき，A を **Cohen–Macaulay 環**という．

明らかに体は CM 環である．また簡単な計算により 1 次元 Noether 整域は CM 環であることがわかる．特に PID，Dedekind 整域などは CM 環である．この節では，CM 環の簡単な性質を見るとともに，正則局所環や CM 環上の多項式環が CM 環であること，またすべての CM 環が強鎖状環であることを示そう．

命題 *5.8.2*

環 A について，鎖状性は局所的な性質である．すなわち A が鎖状環であることと，任意の $P \in \operatorname{Spec} A$ について A_P が鎖状環であることは同値である．

証明は定義から明らかであろう．この性質により CM 局所環に帰着することができる．

定理 *5.8.3*

$(A, \mathfrak{m})$ を CM 局所環とする．A において弱次元公式（定義 3.6.7）が成り立ち，また A は鎖状環である．

証明.

まず弱次元公式が成り立つことを示そう．任意の $P \in \operatorname{Spec} A$ をとり，$\operatorname{ht} P = n$ とする．命題 5.7.17 より A_P も CM 局所環で $\operatorname{ht} P = \operatorname{depth}_{PA_P} A_P = \operatorname{depth}_P A$ であるので，A 正則列 $a_1, \ldots, a_n \in P$ が存在する．$I = (a_1, \ldots, a_n)$ とおくと，系 5.7.15 より A/I は $\dim A/I = \dim A - n$ となる CM 局所環である．また $a_1, \ldots, a_n$ は A 正則なので $0 < \operatorname{ht}(a_1) < \operatorname{ht}(a_1, a_2) < \cdots$ であるから，$n \leq \operatorname{ht} I$ が成り立つ．また $\operatorname{ht} I \leq \operatorname{ht} P = n$ より $\operatorname{ht} I = \operatorname{ht} P$ となり，P は I の極小素イデアルである．よって P は A/I の素因子なので，$\dim A/P = \dim A/I = \dim A - n$ が成り立つ．よって $\dim A/P = \operatorname{coht} P$ だから $\operatorname{ht} P + \operatorname{coht} P = \dim A$ である．

次に鎖状であることを示す．任意の素イデアル鎖 $P \subsetneq Q$ をとる．局所化 A_Q も CM 局所環なので，弱次元公式が成り立つから $\operatorname{ht} Q - \operatorname{ht} P = \dim A_Q/PA_Q$ が成り立つ．そこで $P \subsetneq P_1 \subsetneq \cdots \subsetneq P_s = Q$ を飽和した素イデアル鎖とすると，$P_i \subsetneq P_{i+1}$ について同様に $\operatorname{ht} P_{i+1} = \operatorname{ht} P_i + \dim A_{P_i}/P_{i-1}A_{P_i} = \operatorname{ht} P_i + 1$ が成り立つ．よって $\operatorname{ht} Q = \operatorname{ht} P + s$ であり，$s = \dim A_Q/PA_Q$ がわかるので A は鎖状である．（証明終）

系 *5.8.4*

CM 環は鎖状環である．

次に CM 環においては巴系と正則列の間に相互によい関係があることを見よう．まず一般に正則局所環は CM 環であることを確認しておく．

命題 *5.8.5*（Cohen）

正則局所環は CM 環である．

証明.

$(A, \mathfrak{m})$ を正則局所環とし，$\dim A = n$ とおく．$x_1, \ldots, x_d \in \mathfrak{m}$ を正則巴系としよう．このとき命題 5.6.3，系 5.6.7 によりこれらが A 正則列をなすことがわかる．（証明終）

CM 環という条件を仮定すると，正則列と巴系の概念が一致する．

命題 *5.8.6*

$(A, \mathfrak{m})$ を CM 局所環とすると，$a_1, \ldots, a_r \in \mathfrak{m}$ について，以下の命題；

(i) $a_1, \ldots, a_r$ は A 正則列をなす．
(ii) 任意の $1 \leq i \leq r$ について $\mathrm{ht}(a_1, \ldots, a_i) = i$ である．
(iii) $\mathrm{ht}(a_1, \ldots, a_r) = r$ である．
(iv) $a_1, \ldots, a_r$ は A の巴系の一部分をなす．

は同値である．

証明.

CM 性が必要になるのは (iv)$\Longrightarrow$(i) のみであることを注意しておく．

(i) $\Longrightarrow$ (ii)

$a_1, \ldots, a_r \in \mathfrak{m}$ を A 正則列とすると，$0 < \mathrm{ht}(a_1) < \mathrm{ht}(a_1, a_2) < \cdots$ より Krull の標高定理（定理 5.5.1）から $1 \leq i \leq r$ について $\mathrm{ht}(a_1, \ldots, a_i) = i$ である．

(ii) $\Longrightarrow$ (iii)

自明．

(iii) $\Longrightarrow$ (iv)

もし $\dim A = r$ なら，$(a_1, \ldots, a_r)$ の極小素イデアルは $\mathfrak{m}$ のみなので $\sqrt{(a_1, \ldots, a_r)} = \mathfrak{m}$ となり $(a_1, \ldots, a_r)$ は $\mathfrak{m}$ 準素だから $a_1, \ldots, a_r$ は巴系をなす．また $r < \dim A$ なら $\mathfrak{m}$ は $(a_1, \ldots, a_r)$ の極小素イデアルではないので，Prime avoidance から $a_{r+1} \in \mathfrak{m}$ を $(a_1, \ldots, a_r)$ のすべての極小素イデアルに含まれないようにとれる．このとき $\mathrm{ht}(a_1, \ldots, a_r, a_{r+1}) > r$ なので，高さが $\dim A$ と一致するまで続けることで $a_1, \ldots, a_r$ は A の巴系の一部分であることがわかる．

(iv) $\Longrightarrow$ (i)

$\dim A = n$ として，$a_1, \ldots, a_n$ が巴系なら A 正則であることを示せばよい．n についての帰納法を用いる．まず $n = 1$ のとき，a_1 が巴系であるとする．ここで a_1 が A 正則でない，すなわち $a_1 x = 0$ となる $x \neq 0 \in A$ が存在するとすると，命題 2.3.3 から $a_1 \in P$ となる $P \in \mathrm{Ass}\, A$ が存在するが，命題 5.7.12 の証明からわかるように $\dim A/P = 1$ であるので，$P \subsetneq \mathfrak{m}$ を意味する．これは (a_1) が $\mathfrak{m}$ 準素であることに矛盾する．よって a_1 は A 正則である．

次に $n-1$ まで正しいとする．A の巴系 $a_1, \ldots, a_n$ について，a_1 が A 正則元でないと仮定すると，$n = 1$ の場合と同様に $a_1 \in P$ となる $P \in \mathrm{Ass}\, A$ が存在して $\dim A/P = n$ である．一方で $\sqrt{(a_1, \ldots, a_n)} = \mathfrak{m}$ であるので，A/P において $\sqrt{(\overline{a_2}, \ldots, \overline{a_n})} = \mathfrak{m}$ であり，次元定理から $\dim A/P \leq n-1$ が言えるがこれは矛盾である．ゆえに a_1 は A 正則で，$A/a_1 A$ は $a_2, \ldots, a_n$ の像を巴系とする $n-1$ 次の CM 局所環である．よって帰納法の

仮定から $a_2, \ldots, a_n$ の像は A/a_1A の正則列であり，$a_1, \ldots, a_n$ は A の正則列をなす．

（証明終）

次に CM 環上の多項式環も CM 環になることを示そう．そのために，CM 環について Macaulay,Cohen らが考察していた当時の定義を紹介しよう．

定義 *5.8.7*（純性定理）

Noether 環 A のイデアル I について，任意の $P \in \operatorname{Ass} A/I$ の高さが $\operatorname{ht} I$ に等しいとき，I は**純 (unmixied)** であるという．特に Noether 環 A について r 個の元で生成されるイデアル $I = (a_1, \ldots, a_r)$ について $\operatorname{ht} I = r$ ならば I は必ず純であるとき，A において**純性定理 (unmixedness theorem)** が成り立つという．

Krull の標高定理（定理 5.5.1）より，r 個の元で生成され高さが r のイデアル I の極小素イデアルの高さはすべて r であるので，I が純であるということは非孤立素因子を持たないということを意味する．Macaulay (1916) は体上の多項式環について純性定理が成り立つことを，Cohen (1946) は正則局所環について純性定理が成り立つことを証明した．Noether 環 A について純性定理が成り立つことと，（本書の意味で）CM 環であることは同値であり，これが CM 環の由来である．正則局所環が CM 環であることは（Cohen は純性定理が成り立つことを証明したので，Cohen とは異なる道筋ではあるが）すでに見た．CM 環の定義と純性定理が成り立つことを同値であることを確かめておこう．

定理 *5.8.8*

Noether 環 A について，純性定理が成り立つことと CM 環であることは同値である．

証明.

$(\Longrightarrow)$

任意の $P \in \operatorname{Spec} A$ をとり，$\operatorname{ht} P = r$ とする．命題 5.5.7 より $a_1, \ldots, a_r \in P$ を $\operatorname{ht}(a_1, \ldots, a_i) = i$ がすべての $1 \leq i \leq r$ で成り立つようにとれる．このとき $a_1, \ldots, a_r$ が A_P 正則列になる．各 i について純性定理により $(a_1, \ldots, a_i)$ の素因子の高さはすべて i であるので，特に a_{i+1} を含まない．すると系 2.3.4 により a_{i+1} は $A/(a_1, \ldots, a_i)$ で正則である．よって $\operatorname{depth} A_P = r = \dim A_P$ であり A_P は CM 局所環である．すなわち A は CM 環.

$(\Longleftarrow)$

$I = (a_1, \ldots, a_r)$ が $\operatorname{ht} I = r$ であるとする．$P \in \operatorname{Ass} A/I$ をとり，P が極小でないと仮定する．P を含む極大イデアル $\mathfrak{m}$ で局所化して考える．このとき $IA_\mathfrak{m}$ はすくなくとも素因子 $P'A_\mathfrak{m} \subsetneq PA_\mathfrak{m}$ を持つ．ところが命題 5.8.6 より $a_1, \ldots, a_r$ は $A_\mathfrak{m}$ の正則列であり，系 5.7.15 より $A_\mathfrak{m}/IA_\mathfrak{m}$ も CM 局所環である．よって $IA_\mathfrak{m}$ の素因子はすべて極小でなければならないので矛盾である．よって純性定理が成り立つ．

（証明終）

この証明の $(\Longleftarrow)$ に注目すると，A の極大イデアルによる局所化が CM 局所環でありさえすれば純性定理が成り立つ．よって次の系が従う．

系 *5.8.9*

Noether 環 A が CM 環かどうかを確かめるには任意の極大イデアルによる局所化が CM 局所環であるかどうかを確かめれば十分である．

CM 環上の多項式環が CM 環であること，そして CM 環は強鎖状環であることを証明してこの節を締めくくろう．

定理 5.8.10

A を CM 環とすると，A 上の多項式 $A[X_1, \dots, X_n]$ も CM 環である．

証明.

先の系により $A[X]$ の極大イデアル $\mathfrak{m}'$ による局所化が CM 局所環であることを示せば十分である．まずは A が局所環の場合に帰着できることを見る．$A \cap \mathfrak{m}' = \mathfrak{m} \in \operatorname{Spec} A$ とおくと，自然な対応で；

$$A[X]_{\mathfrak{m}'} = (A_{\mathfrak{m}}[X])_{\mathfrak{m}' A_{\mathfrak{m}}[X]}, A_{\mathfrak{m}}[X]/(\mathfrak{m}' A_{\mathfrak{m}}[X]) = A[X]/\mathfrak{m}'$$

であり，A を局所環と仮定してよいことがわかる．また $\mathfrak{m}' A_{\mathfrak{m}}[X] \cap A_{\mathfrak{m}} = \mathfrak{m} A_{\mathfrak{m}}$ であるので，$\mathfrak{m}$ も極大と仮定してよい．

以上より，A が局所環であって，$A[X]$ の極大イデアル $\mathfrak{m}'$ が $\mathfrak{m}' \cap A = \mathfrak{m} \in \operatorname{Spm} A$ を満たすときに $A[X]_{\mathfrak{m}'}$ が CM 局所環であることを示せばよい．体 $A/\mathfrak{m}$ を k とおくと，準同型；

$$\varphi : A[X] \to k[X]; a_n X^n + \cdots + a_0 \mapsto \overline{a_n} X^n + \cdots + \overline{a_0} \quad (\overline{a_i} \text{ は } a_i \text{ の } A/\mathfrak{m} \text{ における像.})$$

により環同型 $A[X]/\mathfrak{m}A[X] \cong k[X]$ がある．いま $\mathfrak{m}A[X] \subset \mathfrak{m}'$ であり，$A[X]/\mathfrak{m}A[X]$ は 1 次元の整域であることに注意すると $\mathfrak{m}'$ の像は極大イデアルである．よってモニックで既約な $f' \in k[X]$ によって生成されている．$f \in \mathfrak{m}'$ を $\varphi(f) = f'$ となるようにとると，$\mathfrak{m}' = \mathfrak{m}A[X] + (f)$ である．よって $\mathfrak{m} = (a_1, \dots, a_r)$ とすれば $A[X]$ 上 $\mathfrak{m}'$ は $a_1, \dots, a_r, f$ で生成されている．またこれらは $A[X]$ 正則列をなす．a_i たちについては命題 5.8.6 から A 正則列をなすことから従い，f は $A[X]/(a_1, \dots, a_r)A[X] = k[X]$ でモニックなので正則である．よって $r + 1 \leq \operatorname{depth}_{\mathfrak{m}'} A[X]$ であることがわかる．また $\mathfrak{m}'$ は $r + 1$ 個の元で生成されているから Krull の標高定理により $\dim A[X]_{\mathfrak{m}'} \leq r + 1$ である．これらに命題 5.7.17 をあわせて；

$$\dim A[X]_{\mathfrak{m}'} \leq r + 1 \leq \operatorname{depth}_{\mathfrak{m}'} A[X] = \operatorname{depth} A[X]_{\mathfrak{m}'}$$

がわかり，$A[X]_{\mathfrak{m}'}$ は CM 局所環である．（証明終）

系 5.8.11（Macaulay）

体上の多項式環 $k[X_1, \dots, X_n]$ は CM 環である．

系 5.8.12

CM 環は強鎖状環である．

それでは，いよいよ次の章からはホモロジー代数を導入し，より現代的な手法を用いた可換環の考察についてみていこう．

第6章　ホモロジー代数

—*Homological algebra*

ホモロジー代数とは圏の手法を用いてホモロジーの考察を行うものだが，その手法が Serre らの手によって可換環論に応用され革命をもたらした．現代では代数を研究する際の非常に有用な道具として使われている．初等的には完全列とその乱れを調べる手法のことだと思って構わない．この章以降**圏の簡単な知識を仮定する**．その内容については付録，特に圏，関手，Abel 圏の節を見よ．

§1　基本命題

この章では Abel 圏 $\mathscr{A}$ で考えていくが，それではあまりにも $\mathscr{A}$ が抽象的にすぎる．ここで次の定理が大切である（証明は非常に長大であるので省く．志甫 (2016) 定理 2.160 をみよ）．

定理 *6.1.1*（Freyd–Mitchell の埋め込み定理）

$\mathscr{A}$ を小さい Abel 圏とすると，Abel 群の圏 **Ab** への加法的完全忠実充満関手 $F : \mathscr{A} \to \mathbf{Ab}$ が存在する．

これにより Abel 圏を考えるときには，加群の圏などで図式追跡により示せる事実は（一般の Abel 圏では図式追跡はできないにもかかわらず！）正しいということに注意する必要がある．むしろそれは恩恵であって，元を考えたくなったらすべて加群だと思ってよい，ということをこの定理は主張している．つまり核，余核は今までどおりの見知った対象であると考え，元についての操作を行う．

この節では完全列について考えるときの基本的な道具となる，**5 項補題 (five lemma)**，**蛇の補題 (snake's lemma)**，**分裂補題 (splitting lemma)** を紹介しよう．

補題 *6.1.2*

Abel 圏 $\mathscr{A}$ における図式 Figure.7 が可換ならば，核，余核に誘導される可換図式，Figure.8 がある．

$$\begin{array}{ccc} M_1 & \xrightarrow{f} & M_2 \\ \downarrow{\scriptstyle h_1} & & \downarrow{\scriptstyle h_2} \\ N_1 & \xrightarrow{g} & N_2 \end{array}$$

Figure.7

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 & \longrightarrow & \ker f & \longrightarrow & M_1 & \xrightarrow{f} & M_2 & \longrightarrow & \operatorname{Coker} f & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \varphi} & & \downarrow{\scriptstyle h_1} & & \downarrow{\scriptstyle h_2} & & \downarrow{\scriptstyle \psi} & & \\ 0 & \longrightarrow & \ker g & \longrightarrow & N_1 & \xrightarrow{g} & N_2 & \longrightarrow & \operatorname{Coker} g & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Figure.8

証明.

任意の $x \in \ker f$ について $h_1(x) \in \ker g$ であるので，$\varphi : \ker f \to \ker g; x \mapsto h_1(x)$ が定まる．

また，$\psi : \operatorname{Coker} f \to \operatorname{Coker} g; y + \operatorname{Im} f \mapsto h_2(y) + \operatorname{Im} g$ が求める線型写像を与える．実際 $y + \operatorname{Im} f = y' + \operatorname{Im} f$ ならば $y - y' \in \operatorname{Im} f$ なので，ある $x \in M_1$ がとれて $h_2(y) - h_2(y') = g(h_1(x)) \in \operatorname{Im} g$ である．よって well-defined.　（証明終）

補題 *6.1.3*（5 項補題）

Abel 圏 $\mathscr{A}$ における，各行が完全であるような次の可換図式；

$$
\begin{tikzcd}
M_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "h_1"] & M_2 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "h_2"] & M_3 \arrow[r, "f_3"] \arrow[d, "h_3"] & M_4 \arrow[r, "f_4"] \arrow[d, "h_4"] & M_5 \arrow[d, "h_5"] \\
N_1 \arrow[r, "g_1"] & N_2 \arrow[r, "g_2"] & N_3 \arrow[r, "g_3"] & N_4 \arrow[r, "g_4"] & N_5
\end{tikzcd}
$$

について次が成り立つ．

(i) h_1 が全射で h_2, h_4 が単射ならば h_3 は単射．

(ii) h_5 が単射で h_2, h_4 が全射ならば h_3 は全射．

特に h_1, h_2, h_4, h_5 が同型ならば h_3 も同型である．

証明.

(i) $h_3(x_3) = h_3(x_3')$ とする．すると $f_3(x_3 - x_3') \in \ker h_4 = 0$ である．よって $x_3 - x_3' \in \ker f_3 = \operatorname{Im} f_2$ であるので，$x_3 - x_3' = f_2(x_2)$ とかける．ここで $g_2(h_2(x_2)) = h_3(x_3 - x_3') = 0$ より $h_2(x_2) \in \ker g_2 = \operatorname{Im} g_1$ である．よって $h_2(x_2) = g_1(y_1)$ とかけている．すると h_1 が全射なので $h_2(x_2) = g_1(h_1(x_1)) = h_2(f_1(x_1))$ とかけている．よって h_2 が単射だから $x_2 - f_1(x_1) = 0$ である．すると $f_2(x_2 - f_1(x_1)) = x_3 - x_3' = 0$ である．よって h_3 は単射．

(ii) 任意の $y_3 \in N_3$ に対して， h_4 が全射なので $g_3(y_3) = h_4(x_4)$ となる x_4 がとれる．すると $h_5(f_4(x_4)) = g_4(h_4(x_4)) = 0$ より h_5 が単射であるから， $f_4(x_4) = 0$ である．よって $x_4 \in \ker f_4 = \operatorname{Im} f_3$ である．ゆえに $f_3(x_3) = x_4$ となる x_3 がとれる．このとき $g_3(y_3) = h_4(x_4) = h_4(f_3(x_3)) = g_3(h_3(x_3))$ であるので， $y_3 - h_3(x_3) \in \ker g_3 = \operatorname{Im} g_2$ である．よって h_2 の全射性から $y_3 - h_3(x_3) = g_2(y_2) = g_2(h_2(x_2)) = h_3(f_2(x_2))$ とかける x_2, y_2 が存在する．ゆえに $y_3 = h_3(x_3 + f_2(x_2))$ となり全射である．

（証明終）

補題 *6.1.4*（蛇の補題）

Abel 圏 $\mathscr{A}$ における，各行が完全であるような可換図式；

$$
\begin{tikzcd}
 & M_1 \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "f_1"] & M_2 \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "f_2"] & M_3 \arrow[r] \arrow[d, "f_3"] & 0 \\
0 \arrow[r] & N_1 \arrow[r, "\varphi'"] & N_2 \arrow[r, "\psi'"] & N_3 &
\end{tikzcd}
$$

を考えると，自然に誘導される射たちが存在して；

$$
\ker f_1 \xrightarrow{\overline{\varphi}} \ker f_2 \xrightarrow{\overline{\psi}} \ker f_3
$$

$$
\xrightarrow{d} \operatorname{Coker} f_1 \xrightarrow{\overline{\varphi'}} \operatorname{Coker} f_2 \xrightarrow{\overline{\psi'}} \operatorname{Coker} f_3
$$

が完全になる．

また φ が単射であることと $\overline{\varphi}$ が単射であること，ψ' が全射であることと $\overline{\psi'}$ が全射であることは同値である．

$$
\begin{tikzcd}
(0 \arrow[r] &) \ker f_1 \arrow[r, "\overline{\varphi}"] \arrow[d] & \ker f_2 \arrow[r, "\overline{\psi}"] \arrow[d] & \ker f_3 \arrow[d] \arrow[dddll, rounded corners, "d"] & \\
(0 \arrow[r] &) \ M_1 \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "f_1"] & M_2 \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "f_2"] & M_3 \arrow[r] \arrow[d, "f_3"] & 0 \\
0 \arrow[r] & N_1 \arrow[r, "\varphi'"] \arrow[d] & N_2 \arrow[r, "\psi'"] \arrow[d] & N_3 \quad (\arrow[r] \arrow[d] & 0) \\
 & \mathrm{Coker}\, f_1 \arrow[r, "\overline{\varphi'}"] & \mathrm{Coker}\, f_2 \arrow[r, "\overline{\psi'}"] & \mathrm{Coker}\, f_3 (\arrow[r] & 0)
\end{tikzcd}
$$

Figure.9　蛇の補題

証明.

Step 1. $\overline{\varphi}, \overline{\psi}$ の定義.

φ, ψ を制限することで定義しよう．実際，$x \in \ker f_1$ について $f_2(\varphi(x)) = \varphi'(f_1(x)) = 0$ であるので，$\varphi(x) \in \ker f_2$ である．ψ についても同様.

Step 2. $\overline{\varphi'}, \overline{\psi'}$ の定義.

φ', ψ' を Coker に誘導することで定義しよう． well-definedness を確認しておく． $\overline{y} = \overline{y'}$ と仮定すると，$y - y' \in \mathrm{Im}\, f_1$ よりある $x \in M_1$ で $y - y' = f_1(x)$ となるものが存在する．すると $\varphi'(y - y') = f_2(\varphi(x)) \in \mathrm{Im}\, f_2$ より $\overline{\varphi'(y)} = \overline{\varphi'(y')}$ である．

Step 3. d の定義.

$d : \ker f_3 \to \mathrm{Coker}\, f_1$ を次のように定めよう．$x \in \ker f_3$ に対し ψ が全射なので $\psi(x_2) = x$ となる $x_2 \in M_2$ がとれる．このとき $f_2(x_2) \in \ker\psi' = \mathrm{Im}\,\varphi'$ となり，ただ 1 つの $y_1 \in N_1$ が存在して $f_2(x_2) = \varphi'(y_1)$ である． $d(x) = \overline{y_1} \in \mathrm{Coker}\, f_1$ と定義する．

この定義において well-deinfedness を確かめるには，x_2 のとり方によらないことを見ればよい．$\psi(x_2) = \psi(x_2') = x$ となっているとしよう．このとき $\varphi'(y_1') = f_2(x_2')$ となる y_1' をとると，$\varphi'(y_1' - y_1) = f_2(x_2' - x_2)$ であり， $x_2' - x_2 \in \ker\psi = \mathrm{Im}\,\varphi$ より $\varphi(x_1) = x_2' - x_2$ となる $x_i \in M_1$ がとれる．すると $\varphi'(f_1(x_1)) = f_2(x_2' - x_2) = \varpi'(y_1' - y_1)$ となり， φ' は単射だから $y_1' - y_1 = f_1(x_1) \in \mathrm{Im}\, f_1$ である．

Step 4. d の完全性のみ確認しておこう．

(i) $\mathrm{Im}\,\overline{\psi} = \ker d$ であること．

任意の $x \in \mathrm{Im}\,\overline{\psi}$ について $d(x) = 0$ を示せばよい． 定義から $x_2 \in \ker f_2$ が存在して $x_3 = \psi(x_2)$ とかけている．すると $\varphi'(y_1) = f_2(x_2) = 0$ となる y_1 をとれば $d(x) = \overline{y_1}$ だが， $y_1 \in \ker\varphi' = 0$ である．よって $d(x) = 0$ である．

$x \in \ker d$ をとると，$x = \psi(x_2)$ となる $x_2 \in M_2$ がとれる． $f_2(x_2) = \varphi'(y_1)$ となる y_1 について， $\overline{y_1} = d(x) = 0$ より $y_1 \in \mathrm{Im}\, f_1$ である．よって $y_1 = f_1(x_1)$ となる $x_1 \in M_1$ をとる．すると $f_2(x_2) = \varphi'(y_1) = \varphi'(f_1(x_1)) = f_2(\varphi(x_1))$ であるので，$x_2 - \varphi(x_1) \in \ker f_2$ となる．このとき $\psi(x_2 - \varphi(x_1)) = \psi(x_2) = x_3$ であるので，$x_3 \in \mathrm{Im}\,\overline{\psi}$ である．

(ii) $\mathrm{Im}\, d = \ker\overline{\varphi'}$ であること．

$\overline{y_1} \in \mathrm{Im}\, d$ をとる．$d(x) = \overline{y_1}$ とすると， $\psi(x_2) = x_3$ となる x_2 をとったとき， $f_2(x_2) = \varphi'(y_1')$ となる y_1' について $\overline{y_1} = \overline{y_1'}$ である．いま $\varphi(y_1') \in \mathrm{Im}\, f_2$ なので， $\overline{\varphi'}(\overline{y_1}) = 0$ である．

$\overline{y_1} \in \ker \overline{\varphi'}$ をとる．すると $\varphi'(y_1) \in \operatorname{Im} f_2$ である．よって $\varphi'(y_1) = f_2(x_2)$ となる $x_2 \in M_2$ がとれる．このとき $d(\psi(x_2)) = \overline{y_1}$ となる．

（証明終）

定義 *6.1.5*（分裂完全列）

Abel 圏 $\mathscr{A}$ における完全列；

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{\iota} M \xrightarrow{\pi} M_2 \longrightarrow 0 \tag{$*$}$$

について，次の条件；

(i) $i : M_2 \to M$ が存在して $\pi \circ i = \mathrm{id}_{M_2}$ が成り立つ．
(ii) $p : M \to M_1$ が存在して $p \circ \iota = \mathrm{id}_{M_1}$ が成り立つ．

のどちらかが成り立つとき，完全列 $(*)$ は**分裂 (split)** するという. 特に (i) を**左分裂 (left split)**，(ii) を**右分裂 (right split)** という．

補題 *6.1.6*（分裂補題）

Abel 圏 $\mathscr{A}$ における完全列　$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{\iota} M \xrightarrow{\pi} M_2 \longrightarrow 0$　について，以下の 3 つ；

(i) M は $M_1 \oplus M_2$ と同型で，ι, π はそれぞれ自然な移入と射影に一致する．
(ii) $i : M_2 \to M$ が存在して $\pi \circ i = \mathrm{id}_{M_2}$ が成り立つ．
(iii) $p : M \to M_1$ が存在して $p \circ \iota = \mathrm{id}_{M_1}$ が成り立つ．

は同値である．すなわち完全列が分裂していることと，中央の項が左右の項の直和であることが同値である．

証明.

(i) $\Longrightarrow$ (ii)

自然な $i : M_2 \to M_1 \oplus M_2$ によって得られる．

(ii) $\Longrightarrow$ (iii)

任意の $x \in M$ について $x - i(\pi(x)) \in \ker \pi = \operatorname{Im} \iota$ より，$y \in M_1$ で $\iota(y) = x - i(\pi(x))$ となるものが一意的に定まる．これによって $p : M \to M_1$ を $p(x) = y$ と定めると題意を満たす．

(iii) $\Longrightarrow$ (i)

$\varphi : M \to M_1 \oplus M_2; x \mapsto (p(x), \pi(x))$ が同型射となる．

Step 1. 単射であること．

$\varphi(x) = 0$ とすると $p(x) = \pi(x) = 0$ であるので，$x \in \ker \pi = \operatorname{Im} \iota$ よりある $y \in M_1$ が存在して $\iota(y) = x$ とかける．すると $p(x) = y = 0$ なので $x = 0$ である．

Step 2. 全射であること．

任意の $(x_1, x_2) \in M_1 \oplus M_2$ について，π が全射なのである $x \in M$ が存在して $\pi(x) = x_2$ である．このとき $\varphi(x + \iota(x_1)) = (x_1, x_2)$ となる．

（証明終）

定理 6.1.7

Abel 圏 $\mathscr{A}$ における完全列 $0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M \longrightarrow M_2 \longrightarrow 0$ が分裂しているとする．加群の圏への半完全関手 F に対して；

$$0 \longrightarrow F(M_1) \longrightarrow F(M) \longrightarrow F(M_2) \longrightarrow 0$$

は完全である．

証明.

$F(p \circ \iota) = F(p) \circ F(\iota) = F(\mathrm{id}_{M_1}) = \mathrm{id}_{F(M_1)}$ より $F(\iota)$ が単射であることがわかり，同様にして $F(\pi)$ は全射である．（証明終）

§2　複体とホモロジー，コホモロジー

圏論的な考え方で議論を押し切って行くことを「アブストラクト・ナンセンス (abstract nonsense)」とよく言うが, これはごちゃごちゃした計算に頼ることなく，いわば考えている対象を「上に」あげて，コホモロジーやスペクトル系列などの道具で計算してから地上に戻してみると証明したかったことがわかっている，といった状況のことをいう．加藤 (2003) によれば「使われているすべてのコホモロジーは，みな導来関手」である．まずは導来関手を考えるためにホモロジー代数の基礎知識を集め，定義していこう．

定義 6.2.1（複体）

Abel 圏 $\mathscr{A}$ の対象の族 $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ と射 $d_i : A_i \to A_{i-1}$ の族 $\{d_i\}$ で，$d_i \circ d_{i+1} = 0$ を満たすものを**鎖複体 (chain complex)** という．これらをまとめて $A_\bullet$ とかく．また $\mathscr{A}$ の対象の族 $\{A^i\}_{i\in\mathbb{N}}$ と射 $d^i : A^i \to A^{i+1}$ の族 $\{d^i\}$ で，$d^{i+1} \circ d^i = 0$ を満たすものを**余鎖複体 (cochain complex)** といい，これらを $A^\bullet$ とかく．

射 d_i を i 次**境界作用素 (boundary operator)**, 俗に**微分 (differential)** ともいう．この定義における $d_i \circ d_{i+1} = 0$，すなわち２回微分したらゼロということの意味は，列；

$$\cdots \xrightarrow{d_{i+2}} A_{i+1} \xrightarrow{d_{i+1}} A_i \xrightarrow{d_i} A_{i-1} \xrightarrow{d_{i-1}} \cdots \xrightarrow{d_1} A_0 \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow A_0 \xrightarrow{d^0} \cdots \longrightarrow A^{i-1} \xrightarrow{d^{i-1}} A^i \xrightarrow{d^i} A^{i+1} \xrightarrow{d^{i+1}} \cdots$$

があったときここから情報としてホモロジー，コホモロジーを取りたいのだが，次に定義する通りその定義は ker を Im で割ったものであるので，$\mathrm{Im}\, d_{i+1} \subset \ker d_i$ でなければそもそもホモロジーを考えることができない．つまり $d_i \circ d_{i+1} = 0$ である必要がある．

以後，単に複体といえば基本的には鎖複体を表すものとする．

定義 6.2.2（ホモロジー，コホモロジー）

$A_\bullet$ を複体とする．各 i に対して $\ker d_i / \mathrm{Im}\, d_{i+1}$ を $A_\bullet$ の i 次**ホモロジー (homology)** といい，$H_i(A_\bullet)$ で表す．余鎖複体 $A^\bullet$ については $H^i(A^\bullet) = \ker d^i / \mathrm{Im}\, d^{i-1}$ を i 次**コホモロジー (cohomology)** という．

定義 6.2.3

すべての $i > 0$ について $H_i(A_\bullet) = 0$ となるとき，つまり $\ker d_i = \operatorname{Im} d_{i+1}$ となるとき $A_\bullet$ を **acyclic** であるという．$A^\bullet$ についても同様.

acyclic とは幾何に由来する用語であって，定訳は**非輪状**である．また H_0, H^0 については消えていなくてもよいことに注意せよ．完全列そのものではどこのホモロジー，コホモロジーをとっても消えてしまう．しかし，見方を返せば完全列に関手を施して複体を作ったとき，そこでホモロジーが消えないということは完全性が乱れてしまったということにほかならない．以前取り上げた左（右）完全関手はその一例である．このようにホモロジーは鎖がどれだけ完全列から離れているかという「乱れ」を計測する手段であるといえる．

次に複体の圏について考えたい．そのために複体の間の射 $f_\bullet : A_\bullet \to B_\bullet$ を考えねばならない．射 $f_i : A_i \to B_i$ の族 $\{f_i\}$ ないし $\{f^i\}$ で，次の図式；

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & A_{i+1} \arrow[r, "d_{i+1}"] \arrow[d, "f_{i+1}"] & A_i \arrow[r, "d_i"] \arrow[d, "f_i"] & A_{i-1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{i-1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & B_{i+1} \arrow[r, "d'_{i+1}"] & B_i \arrow[r, "d'_i"] & B_{i-1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

を可換にするものを**複体の射**といい $f_\bullet$ とかく．余複体についても双対的に考え $f^\bullet$ とかく．まとめよう．

定義 6.2.4（複体の圏）

$\mathscr{A}$ を Abel 圏とする．対象を $\mathscr{A}$ の複体，射を $f_\bullet$ として定める圏を $\mathrm{Ch}(\mathscr{A})$ とかき，**複体の圏**という．また余鎖複体と $f^\bullet$ のなす圏を $\mathrm{CoCh}(\mathscr{A})$ とかく．

ホモロジー，コホモロジーをとることは関手になることをみよう．

命題 6.2.5

各 i に対し，ホモロジー H_i は $\mathrm{Ch}(\mathscr{A})$ から $\mathscr{A}$ への関手になる．

証明.

複体の射 $f_\bullet$ について $H_i(f_\bullet)$ を次で定めよう；

$$H_i(f_\bullet) = \widetilde{f_i} : H_i(A_\bullet) \to H_i(B_\bullet); x + \operatorname{Im} d_{i+1} \mapsto f_i(x) + \operatorname{Im} d'_{i+1}$$

$x \in \ker d_i$ ならば $f_i(x) \in \ker d'_i$ であるので，この定義は意味を持つ．well-definedness についても計算すれば明らかである．（証明終）

コホモロジーについても同様に $\mathrm{CoCh}(\mathscr{A})$ から $\mathscr{A}$ への関手になる．ではいつ $H_i(f_\bullet) = H_i(g_\bullet)$ となるかを考えよう．まず $H_i(f_\bullet) = H_i(g_\bullet)$ であることと，任意の $x \in \ker d_i$ に対して $f_i(x) - g_i(x) \in \operatorname{Im} d'_{i+1}$ であることは同値である．ここで射 $s_i : A_i \to B_{i+1}$ が存在して $f_i - g_i = (d'_{i+1} \circ s_i) + (s_{i-1} \circ d_i)$ となるとき，$x \in \ker d_i$ なら $f_i(x) - g_i(x) \in \operatorname{Im} d'_{i+1}$ である．このような s^i がすべての i でとれるとき，任意の次数のホモロジーが一致する．このとき $f_\bullet$ と $g_\bullet$ は**ホモトピー同値**であるという．

定義 6.2.6（ホモトピー同値）

複体の射 $f_\bullet, g_\bullet$ に対し，射 $s_i : A_i \to B_{i+1}$ の族 $\{s_i\}$ で，各 i に対し $f_i - g_i = (d'_{i+1} \circ s_i) + (s_{i-1} \circ d_i)$ となるものが存在するとき $f_\bullet$ と $g_\bullet$ は**ホモトピー同値**，**ホモトピック (homotopic)** であるという．

命題 6.2.7

複体の射 $f_\bullet, g_\bullet$ がホモトピックなら，任意の i に対して $H_i(f_\bullet) = H_i(g_\bullet)$ である．

証明は上に書いたとおり．

$$
\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & A_{i+1} \arrow[r, "d_{i+1}"] \arrow[dl, "s_{i+1}"'] \arrow[d, shift right, "g_{i+1}"'] \arrow[d, shift left, "f_{i+1}"] & A_i \arrow[r, "d_i"] \arrow[dl, "s_i"'] \arrow[d, shift right, "g_i"'] \arrow[d, shift left, "f_i"] & A_{i-1} \arrow[r] \arrow[dl, "s_{i-1}"'] \arrow[d, shift right, "g_{i-1}"'] \arrow[d, shift left, "f_{i-1}"] & \cdots \arrow[dl] \\
\cdots \arrow[r] & B_{i+1} \arrow[r, "d'_{i+1}"] & B_i \arrow[r, "d'_i"] & B_{i-1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}
$$

余鎖複体についても同様に少し調整し，$f^i - g^i = (d'^{i-1} \circ s^i) + (s^{i+1} \circ d^i)$ とすればよい．

$$
\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & A^{i-1} \arrow[r, "d^{i-1}"] \arrow[dl, "s^{i-1}"'] \arrow[d, shift right, "g^{i-1}"'] \arrow[d, shift left, "f^{i-1}"] & A^i \arrow[r, "d^i"] \arrow[dl, "s^i"'] \arrow[d, shift right, "g^i"'] \arrow[d, shift left, "f^i"] & A^{i+1} \arrow[r] \arrow[dl, "s^{i+1}"'] \arrow[d, shift right, "g^{i+1}"'] \arrow[d, shift left, "f^{i+1}"] & \cdots \arrow[dl] \\
\cdots \arrow[r] & B^{i-1} \arrow[r, "d'^{i-1}"] & B^i \arrow[r, "d'^i"] & B^{i+1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}
$$

問 1.

ホモトピー同値は同値関係である．

複体に加法的関手を施すことを考えよう．というのも，加法的関手 F に対して $\mathscr{A}$ の対象 A における導来関手 $R^iF(A)$ を対応させたいからである．前述の通り F が完全関手でなければ acyclic な複体は，移した先ではもはや acyclic ではない．そこでのホモロジーを見ることで，どの程度関係が乱れたかを測りたい．そのためには移した先でも複体になっていることが必要である．

命題 6.2.8

$\mathscr{A}, \mathscr{B}$ を Abel 圏とし，$F : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ を加法的関手とする．複体 $A_\bullet \in \mathrm{Ch}(\mathscr{A})$ に対し；

$$
\cdots \longrightarrow FA_{i+1} \xrightarrow{Fd_{i+1}} FA_i \xrightarrow{Fd_i} FA_{i-1} \xrightarrow{Fd_{i-1}} \cdots
$$

は $\mathscr{B}$ の複体となる．これを $FA_\bullet$ とかく．

証明.

$A_\bullet$ が複体なので $d_i \circ d_{i+1} = 0$ である．F が加法的関手なので $F(d_i) \circ F(d_{i+1}) = F(d_i \circ d_{i+1}) = F(0) = 0$ である．ゆえに複体となる．（証明終）

問 2.

ホモトピー同値は加法的関手で保たれることを示せ．

これにより複体に対して関手を施してからホモロジーを取ることができるが，ここで大切なことの 1 つに完全関手とホモロジーをとることは可換であるという事実がある．

命題 *6.2.9*（FHHF 定理）

$\mathscr{A}, \mathscr{B}$ を Abel 圏とし，$F : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ を完全関手とする．$\mathscr{A}$ の複体 $A_\bullet$ に対して，任意の i について；

$$F(H_i(A_\bullet)) \cong H_i(F(A_\bullet))$$

が成り立つ．

証明.

$\longrightarrow A_{i+1} \xrightarrow{d_{i+1}} A_i \xrightarrow{d_i} A_{i-1}$ において，ホモロジーの定義から；

$$0 \longrightarrow \mathrm{Im}\, d_{i+1} \longrightarrow \ker d_i \longrightarrow H_i(A_\bullet) \longrightarrow 0$$

が完全で，これに F を施して；

$$0 \longrightarrow F(\mathrm{Im}\, d_{i+1}) \longrightarrow F(\ker d_i) \longrightarrow F(H_i(A_\bullet)) \longrightarrow 0$$

が完全なので $F(H_i(A_\bullet)) \cong F(\ker d_i)/F(\mathrm{Im}\, d_{i+1})$ だが，命題 A.3.10 によりこれは $H_i(F(A_\bullet))$ に等しい．

（証明終）

しかし，そもそもは対象 A の情報を取りたかったのである. では A から定まる自然な複体についてコホモロジーを考えてみるのはどうだろうか.

命題 *6.2.10*

Abel 圏 $\mathscr{A}$ は $\mathrm{Ch}(\mathscr{A})$ の部分圏になる.

証明.

次の自然な鎖；

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow A \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots \tag{$*$}$$

は複体になる.　（証明終）

とはいえこの構成はあまりに自然すぎて，ここに加法的関手を施してもたかだか A の前後でしか完全性は乱れない（加法的関手は 0 を 0 に移すから）．そこで A を分解してみよう．とはいえその分解はあくまで A の代わりであるので，（移す前の）ホモロジーは $(*)$ と一致することを要求する．それを実現してくれるのがここから話す**射影分解**である（コホモロジーでは**入射分解**を用いる）.

§ 3　射影分解と入射分解

前節の最後に話したことを図式で書いてみよう；

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & P_2 \arrow[r, "d_2"] \arrow[d] & P_1 \arrow[r, "d_1"] \arrow[d] & P_0 \arrow[r, "d_0"] \arrow[d, "\varepsilon"] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & A \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

となる複体 $P_\bullet$ で，ホモロジーを取ると $H_0(P_\bullet) = \ker d_0/\operatorname{Im} d_1 = A, H_i(P_\bullet) = \ker d_i/\operatorname{Im} d_{i+1} = 0\ (i \geq 1)$ となるものをうまく取りたいということであった．高次のホモロジーが消えているような $P_\bullet$ を定義するために，まずはうまい P_i を取る必要がある．

定義 6.3.1（射影対象）

Abel 圏の対象 P で，任意の完全列；

$$A \xrightarrow{\varepsilon} A'' \longrightarrow 0$$

と $f : P \to A''$ が与えられたとき，$\varepsilon \circ \widetilde{f} = f$ となる $f : P \to A$ が必ず存在するような P を**射影対象 (projective object)** という．

射影加群の定義を思い出そう．一般の Abel 圏でも関手 $\mathrm{Hom}(M, -)$ は左完全関手になる．射影加群の定義はこの関手を完全にする M のことであったが，射影対象も $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(P, -)$ が完全関手になる対象のことであるといってよい．これを用いて A の都合のよい分解を与える．

定義 6.3.2（射影分解）

Abel 圏 $\mathscr{A}$ の対象 A について，射影対象 $P^i\ (i \geq 0)$ がとれて；

$$\cdots \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} A \longrightarrow 0$$

が完全列であるとき，d_0 を自然な零射とする複体；

$$\cdots \longrightarrow P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} 0$$

を $P_\bullet$ と書いて A の**射影分解 (projective resolution)** という．

このとき $H_0(P_\bullet) = \ker d_0/\operatorname{Im} d_1 = P_0/\ker \varepsilon = A$ となっていることに注意しよう．どんな A でも射影分解が行えるとは限らないが，分解の存在を保証してくれる条件がある．

定義 6.3.3

Abel 圏 $\mathscr{A}$ の任意の対象 A について，$\mathscr{A}$ の射影対象 P が存在して；

$$P \xrightarrow{\varepsilon} A \longrightarrow 0$$

が完全になるような ε が存在するとき，$\mathscr{A}$ は**射影対象を十分に持つ (has enough projectives)** という．

射影対象を十分に持つなら A の射影分解が構成できることは演習問題としよう．

命題 6.3.4

A 加群の圏 $\mathbf{Mod}(A)$ は射影対象を十分に持つ．

証明.

A 加群 M について自由加群 F からの全射 $\varepsilon : F \to M$ が存在し，自由加群は射影加群（命題 1.7.3）なので題意は満たされる．（証明終）

次に入射分解について考えよう．A の射影分解の余鎖複体バージョンを考えると，次のようになる；

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon"] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & I^0 \arrow[r, "d^0"] & I^1 \arrow[r, "d^1"] & I^2 \arrow[r, "d^2"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

このような複体 $I^\bullet$ で，コホモロジーを取ると $H^0(I^\bullet) = \ker d^0 = A, H^i(I^\bullet) = \ker d^i / \operatorname{Im} d^{i-1} = 0\ (i \geq 1)$ となるものをうまく取りたい．

定義 6.3.5（入射対象）

Abel 圏の対象 I で，任意の完全列；

$$0 \longrightarrow A' \xrightarrow{\ \varepsilon\ } A$$

と $f' : A' \to I$ が与えられたとき，$f \circ \varepsilon = f'$ となる $f : A \to I$ が必ず存在するような I を**入射対象 (injective object)** という．

これは次の図式が可換になる f の存在といえる．

$$\begin{tikzcd}
 & & I \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[ur, "f'"] \arrow[r, "\varepsilon"] & A \arrow[u, dashed, "f"']
\end{tikzcd}$$

定義 6.3.6（入射分解）

Abel 圏 $\mathscr{A}$ の対象 A について，入射対象 $I^i\ (i \geq 0)$ がとれて；

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\ \varepsilon\ } I^0 \xrightarrow{\ d^0\ } I^1 \xrightarrow{\ d^1\ } \cdots$$

が完全列であるとき，複体；

$$0 \longrightarrow I^0 \xrightarrow{\ d^0\ } I^1 \xrightarrow{\ d^1\ } I^2 \xrightarrow{\ d^2\ } \cdots$$

を $I^\bullet$ と書いて，A の**入射分解 (injective resolution)** という．

同様に $H^0(I^\bullet) = \ker d^0 = \operatorname{Im} \varepsilon = A$ であることに注意しよう．また射影分解と同様に**入射対象を十分に持つ**なら入射分解が必ずできる．

定義 6.3.7

Abel 圏 $\mathscr{A}$ の任意の対象 A について $\mathscr{A}$ の入射対象 I が存在して；

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\ \varepsilon\ } I$$

が完全になるような ε が存在するとき，$\mathscr{A}$ は**入射対象を十分に持つ (has enough injectives)** という．

§ 4　入射加群と双対加群

A 加群の圏 Mod(A) が入射対象を十分に持つことを示すには，射影加群の場合と違って多少手間がかかる．この節ではそれに関連して，加群の双対について簡単に触れることにする．

定義 *6.4.1*（双対加群）

A を環，M を A 加群とする．$M^\vee = \mathrm{Hom}(M, A)$ を M の**双対加群 (dual module)** という．

次に定義する **torsionless** は群論などで使われる**無捻 (torsion free) とは異なるので注意せよ．**

定義 *6.4.2*（torsionless，反射加群）

A を環，M を A 加群とする．

$$\varphi : M \to M^{\vee\vee}; x \mapsto (f \mapsto f(x))$$

について φ_M が単射である M を **torsionless** であるといい，全単射である M を**反射 (reflexive) 加群**であるという．

明らかに有限生成自由加群は反射的であり，また射影加群はこれらの条件を満たす代表的な加群であることを注意しておく．

命題 *6.4.3*

A を環とし，P を射影加群とすると P は torsionless であり，さらに P が有限生成ならば反射的である．

証明.

まず（有限生成とは限らない）射影加群は torsionless であることを示す．$\varphi(x) = 0$ すなわち任意の $f \in \mathrm{Hom}(P, A)$ について $f(x) = 0$ であると仮定する．P は射影的なので，$\{e_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を基底とする自由 A 加群 F が存在して，P は F の直和因子である．$x = \sum a_\lambda e_\lambda$ と表示すると，e_λ に対応する射影 $\pi_\lambda : F \to A$ の x の像は a_λ であり，これを P に制限すると Hom(P, A) の元になるから，仮定より $a_\lambda = 0$ である．よって $x = 0$ である．

次に P が有限生成であるとする．F を P を直和因子として持つ自由加群とすると，分裂完全列；

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow F \longrightarrow P \longrightarrow 0$$

について Hom($-, A$) を２回施して，定理 6.1.7 により；

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & K & \longrightarrow & F & \longrightarrow & P & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & K^{\vee\vee} & \longrightarrow & F^{\vee\vee} & \longrightarrow & P^{\vee\vee} & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

が可換な完全列である．$F \to F^{\vee\vee}$ が同型であること，また蛇の補題から $P \to P^{\vee\vee}$ は全射である．よって示された．（証明終）

定義 *6.4.4*（Auslander–Bridger 転置）

A を環，M を有限表示 A 加群とする．このとき有限自由加群 F_0, F_1 が存在して；

$$F_1 \longrightarrow F_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

が完全である．これに対して A 加群 $\operatorname{Tr} M$ であって；

$$0 \longrightarrow M^\vee \longrightarrow F_0^\vee \longrightarrow F_1^\vee \longrightarrow \operatorname{Tr} M \longrightarrow 0$$

が完全であるものを M の **Auslander–Bridger 転置 (transpose)** という．

これはもちろん M から一意に定まるものではなく，F_0, F_1 のとりかたによる．

補題 *6.4.5*

A を環，M を有限表示 A 加群，N を A 加群とする．このとき，完全列；

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}(\operatorname{Tr} M, N) \longrightarrow F_1 \otimes N \longrightarrow F_0 \otimes N \longrightarrow M \otimes N \longrightarrow 0$$

が得られる．またこの完全列は N に対して関手的である．

証明.

完全列；

$$0 \longrightarrow M^\vee \longrightarrow F_0^\vee \longrightarrow F_1^\vee \longrightarrow \operatorname{Tr} M \longrightarrow 0$$

ここに $\operatorname{Hom}(-, N)$ を施して；

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}(\operatorname{Tr} M, N) \longrightarrow \operatorname{Hom}(F_1^\vee, N) \longrightarrow \operatorname{Hom}(F_2^\vee, N)$$

を得る．ここで一般に A 加群に対して；

$$M \otimes N \to \operatorname{Hom}(M^\vee, N); x \otimes y \mapsto (\varphi \mapsto \varphi(x)y)$$

が定まり，これは M について関手的である．M が自由ならこれは同型なので，完全列；

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}(\operatorname{Tr} M, N) \longrightarrow F_1 \otimes N \longrightarrow F_0 \otimes N$$

を得る．テンソル積は右完全なので余核 $M \otimes N$ を加えて，求める完全列を得る．（証明終）

命題 *6.4.6*

A を環とする．有限表示で平坦な加群は射影的である．

証明.

M を有限表示で平坦であると仮定する．定義から有限自由加群 F_0, F_1 が存在して；

$$0 \longrightarrow M^\vee \longrightarrow F_0^\vee \xrightarrow{d_1^\vee} F_1^\vee \longrightarrow \operatorname{Tr} M \longrightarrow 0$$

が完全である．さて任意の A 加群の完全列；

$$0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_2 \longrightarrow M_3 \longrightarrow 0$$

を取る．このとき M, F_i の平坦性と補題から，各行が完全な次の可換図式；

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}(\mathrm{Tr}\,M, M_1) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}(\mathrm{Tr}\,M, M_2) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}(\mathrm{Tr}\,M, M_3) \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & M_1 \otimes F_1 \arrow[r] \arrow[d] & M_2 \otimes F_1 \arrow[r] \arrow[d] & M_3 \otimes F_1 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & M_1 \otimes F_0 \arrow[r] \arrow[d] & M_2 \otimes F_0 \arrow[r] \arrow[d] & M_3 \otimes F_0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & M_1 \otimes M \arrow[r] \arrow[d] & M_2 \otimes M \arrow[r] \arrow[d] & M_3 \otimes M \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

を得る．この図式に対して蛇の補題を使うことで $\mathrm{Hom}(\mathrm{Tr}\,M, -)$ が完全関手であることがわかる．よって $\mathrm{Tr}\,M$ は射影的である．

すると完全列；

$$0 \longrightarrow \mathrm{Im}\, d_1^\vee \longrightarrow F_1^\vee \longrightarrow \mathrm{Tr}\,M \longrightarrow 0$$

は分裂していて，$\mathrm{Im}\, d_1^\vee$ も射影的である．すると；

$$0 \longrightarrow M^\vee \longrightarrow F_0^\vee \longrightarrow \mathrm{Im}\, d_1^\vee \longrightarrow 0$$

も分裂しており，次の図式；

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M^\vee \arrow[r] & \mathrm{Im}\, d_1^\vee \oplus M^\vee \arrow[r, "d_1^\vee"] \arrow[d] & \mathrm{Im}\, d_1^\vee \oplus \mathrm{Tr}\,M \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathrm{Tr}\,M \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
 & 0 \arrow[r] & \mathrm{Im}\, d_1^\vee \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Im}\, d_1^\vee \oplus \mathrm{Tr}\,M \arrow[r] & \mathrm{Tr}\,M \arrow[r] & 0 \\
 & & 0 & & &
\end{tikzcd}$$

を得る．よって $d_1 : (\mathrm{Im}\, d_1^\vee)^\vee \oplus (\mathrm{Tr}\,M)^\vee \to (\mathrm{Im}\, d_1^\vee)^\vee \oplus M^{\vee\vee}$ と表示でき，これの余核をとって $M \cong M^{\vee\vee}$ である．いま $M^\vee$ が射影的なので M も射影的であることがわかった．（証明終）

次に $-^\vee$ とは異なる双対，Pontrjagin 双対について説明しよう．

定義 *6.4.7*（Pontrjagin 双対）

A を環，M を A 加群とする．M を Abel 群としてみたときの Hom；

$$M^\wedge = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

は $a \in A, f \in M^\wedge$ に対して $af : M \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}; x \mapsto f(ax)$ と定めることで A 加群となる．これを M の **Pontrjagin 双対 (dual)** という．

M に付随する**特徴加群 (character module associated to M)** とも呼ばれる．$\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ という加群を使う動機の 1 つを説明しよう．まず A が PID という特殊な場合には入射加群はよりわかりやすい表示を持つということをみる．

定義 *6.4.8*（可除加群）

A を環，M を A 加群とする．任意の $x \in M$ と $a \neq 0 \in A$ について $ay = x$ となる $y \in M$ が存在するような M を**可除加群 (divisible module)** という．

命題 *6.4.9*

A を PID とする．A 加群 I が可除加群であることと，入射加群であることは同値である．

証明.

($\Longrightarrow$)

A のイデアルはすべて (a) の形をしている．このとき A 線型写像 $f' : (a) \to I$ は $f(a)$ で決まる．I が可除なのである $y \in I$ が存在して $ay = f(a)$ とかけるから，$f : A \to I; x \mapsto xy$ が f' の延長になる．よって I は入射的となる．

($\Longleftarrow$)

任意の $x \in I, a \neq 0 \in A$ をとると，$f' : (a) \to I; a \mapsto x$ は $f : A \to I$ に延びる．すると $x = f(a) = af(1)$ となるので I は可除加群である．

（証明終）

この命題により $\mathbb{Z}$ 加群 $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ が入射的であることがわかる．それだけでなく，Abel 群の圏（$\mathbf{Mod}(\mathbb{Z})$）で余生成子と呼ばれる性質を持つ．

定義 *6.4.10*（生成子）

$\mathscr{A}$ を零対象を持つ圏とする．ある $A \in \mathscr{A}$ について，任意の $B \neq 0 \in \mathscr{A}$ に対して 0 でない射 $f : A \to B$ が存在するとき，A を $\mathscr{A}$ の**生成子 (generator)** という．双対的に，0 でない $B \to A$ が存在するとき A を**余生成子 (cogenerator)** という．

$\mathscr{A}$ が加法圏なら，A が生成子であるとは任意の $B \neq 0$ に対して $\mathrm{Hom}(A, B) \neq 0$ であること，余生成子であるとは任意の $B \neq 0$ に対して $\mathrm{Hom}(B, A) \neq 0$ であること，と表現できる．

命題 *6.4.11*

圏 $\mathbf{Mod}(\mathbb{Z})$ は余生成子 $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ を持つ．

証明.

0 でない任意の Abel 群 M と $x \in M$ をとる．$f : x\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ を，x の位数が無限ならば $f(x) = 1/2 + \mathbb{Z}$，x の位数が $n < \infty$ ならば $f(x) = 1/n + \mathbb{Z}$ と定めることで f は $\mathbb{Z}$ 線型となり，$\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ が入射的なので $\widetilde{f} : M \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ に伸びる．（証明終）

この加群を用いることで任意の環 A について $\mathbf{Mod}(A)$ が入射対象を十分にもつことを示そう．A 加群としての構造の定義から；

$$\mathrm{Hom}_A(N, M^\wedge) = (M \otimes N)^\wedge$$

であることに注意する．

命題 *6.4.12*

A を環とし，M を A 加群とする．M が平坦 A 加群であることと，Pontrjagin 双対 $M^\wedge$ が入射的 A 加群であることは同値．

証明．

($\Longrightarrow$)

$-\otimes_A M$ と $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(-, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ が完全関手なので $\mathrm{Hom}_A(-, M^\wedge)$ も完全である．

($\Longleftarrow$)

$f: M_1 \to M_2$ を単射とする．完全列；

$$0 \longrightarrow \ker \longrightarrow M_1 \otimes M \longrightarrow M_2 \otimes M$$

に対して $\mathrm{Hom}_A(-, M^\wedge)$ を施して；

$$\begin{tikzcd}
(M_2 \otimes M)^\wedge \arrow[r] \arrow[d, equal] & (M_1 \otimes M)^\wedge \arrow[r] \arrow[d, equal] & \ker^\wedge \arrow[r] & 0 \\
\mathrm{Hom}(M_2, M^\wedge) \arrow[r, "\mathrm{surj}"] & \mathrm{Hom}(M_1, M^\wedge) & &
\end{tikzcd}$$

を得るから $\ker^\wedge = 0$ である．ここで $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ は余生成子なので $\ker = 0$ であり，M は平坦である．

（証明終）

補題 *6.4.13*

A 加群 M に対して単射 $M \to M^{\wedge\wedge}$ が存在する．

証明．

次の線型写像；

$$i: M \to M^{\wedge\wedge}; x \mapsto (f \mapsto f(x))$$

が単射になる．実際 $x \neq 0$ ならば $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ が余生成子なので $f(x) \neq 0$ となるような $f: M \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ が存在する．

（証明終）

定理 *6.4.14*

A 加群の圏 $\mathbf{Mod}(A)$ は入射対象を充分に持つ．

証明．

M を A 加群とする．M の Pontrjagin 双対 $M^\wedge$ に対して，自由加群 F からの全射 $s: F \to M^\wedge$ をとる．Pontrjagin 双対をとって $s^\wedge: M^{\wedge\wedge} \to F^\wedge; \varphi \mapsto \varphi \circ s$ を考える．これは s が全射なので単射である．また $F^\wedge$ は入射的で，単射 $M \hookrightarrow M^{\wedge\wedge}$ が存在するので $M \hookrightarrow F^\wedge$ が存在する．

（証明終）

§ 5　導来関手

いよいよ導来関手の定義である.

定義 *6.5.1*（左導来関手）

$\mathscr{A},\mathscr{B}$ を Abel 圏とし，対象 $A \in \mathscr{A}$ と加法的右完全関手 $F:\mathscr{A} \to \mathscr{B}$ を考える．A の射影分解 $P_\bullet$ について，$FP_\bullet$ も複体になる．これに対する $\mathscr{B}$ の中でのホモロジー $H_i(FP_\bullet)$ を $L_iF(A)$ とかいて，L_iF を F の A における i 次**左導来関手 (left derived functor)** という.

左導来関手は**誤植ではない.** 右完全関手によって，複体（左に伸びる鎖）が左に伸びるホモロジーの列を作る（定理 6.5.10 をみよ）から左導来関手と呼ぶ.

この定義では $P_\bullet$ を無視して $L_iF(A)$ と書いているのだから, 射影分解のとり方によらないことを証明する必要がある（命題 6.5.3)．つまり $J_\bullet$ を A の別の射影分解とすると，F で送ったときにホモロジーが一致せねばならない．このことを**擬同型**であるという.

定義 *6.5.2*（擬同型）

複体 $A_\bullet, B_\bullet$ に対し，各 i について $H_i(A_\bullet) = H_i(B_\bullet)$ であるとき $A_\bullet$ と $B_\bullet$ は**擬同型 (quasi-isomorphic)** であるという.

この用語は余鎖複体 $A^\bullet, B^\bullet$ についてコホモロジーが一致するときにも用いられる.

命題 *6.5.3*

$P_\bullet, Q_\bullet$ を A の射影分解とすると，加法的右完全関手 F について $FP_\bullet$ と $FQ_\bullet$ は擬同型である.

証明.

まず，複体の射 $f_\bullet : P_\bullet \to Q_\bullet, g_\bullet : Q_\bullet \to P_\bullet$ を構成しよう.

全射 $\varepsilon : P_0 \to A, \varepsilon' : Q_0 \to A$ を考える．P_0 は射影的なので，ε' に対して $f_0 : P_0 \to Q_0$ が存在する．次に $d_1' \circ f_1 = f_0 \circ d_1$ となるような $f_1 : P_1 \to Q_1$ を作りたい.

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & P_2 \arrow[r, "d_2"] \arrow[d, dashed, "f_2"] & P_1 \arrow[r, "d_1"] \arrow[d, dashed, "f_1"] & P_0 \arrow[d, "f_0"] \arrow[dr, "\varepsilon"] & & \\
 & & & & A \arrow[r] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & Q_2 \arrow[r, "d_2'"] & Q_1 \arrow[r, "d_1'"] & Q_0 \arrow[ur, "\varepsilon'"] & &
\end{tikzcd}$$

ここで，$\mathrm{Im}(f_0 \circ d_1) \subset \mathrm{Im}\, d_1'$ であるので次の図式を考えることができ，P_1 の射影性から f_1 がとれる．可換性は構成から明らか.

$$\begin{tikzcd}
P_1 \arrow[d, dashed, "f_1"'] \arrow[dr, "f_0 \circ d_1"] & & \\
Q_1 \arrow[r, "d_1'"] & \mathrm{Im}\, d_1' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

これを続けることで $f_\bullet$ が構成され，$g_\bullet$ も同様に作ることができる.

関手 F を施してホモロジーをとることで，$H_i(Fg_\bullet), H_i(Ff_\bullet)$ が同型射であることを示せばよい．ここで；

$$H_i(Fg_\bullet) \circ H_i(Ff_\bullet) = H_i(F(g_\bullet \circ f_\bullet))$$

であるので，$F(g_\bullet \circ f_\bullet)$ と $F(\mathrm{id}_{P_\bullet}), F(f_\bullet \circ g_\bullet)$ と $F(\mathrm{id}_{Q_\bullet})$ がホモトピックであることを示せばよい． $g_\bullet \circ f_\bullet$ と $\mathrm{id}_{P_\bullet}$ がホモトピックであることを示そう．

$h_n = \mathrm{id}_{P_n} - (f_n \circ g_n)$ とおき，$d_{n+1} \circ s_n = h_n - (s_{n-1} \circ d_n)$ となる $\{s_n\}$ を帰納的に作ろう．

Step 1. $n = 0$ のとき．

$\mathrm{Im}\, h_0 \subset \mathrm{Im}\, d_1 = \ker \varepsilon$ なので，P_1 の射影性から次の図式のように $s_0 : P_0 \to P_1$ が $d_1 \circ s_0 = h_0$ となるように作れる．

$$\begin{tikzcd} & P_0 \arrow[dl, dashed, "s_0"'] \arrow[d, "h_0"] & \\ P_1 \arrow[r, "d_1"] & \mathrm{Im}\, d_1 \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Step 2. $n = 1$ のとき．

$\mathrm{Im}(h_1 - s_0 \circ d_1) \subset \mathrm{Im}\, d_2 = \ker d_1$ より，P_2 の射影性から次の図式；

$$\begin{tikzcd} & P_1 \arrow[dl, dashed, "s_1"'] \arrow[d, "h_1-(s_0\circ d_1)"] & \\ P_2 \arrow[r, "d_2"] & \mathrm{Im}\, d_2 \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

のように $s_1 : P_1 \to P_2$ を $d_2 \circ s_1 = h_1 - (s_0 \circ d_1)$ となるようにできる．

Step 3. $n - 1$ まで正しいとき．

同様に $\mathrm{Im}(h_n - (s_{n-1} \circ d_n)) \subset \mathrm{Im}\, d_{n+1} = \ker d_n$ なので，P_{n+1} の射影性から s_n が定まる．

よって $g_\bullet \circ f_\bullet$ と $\mathrm{id}_{P_\bullet}$ はホモトピックで， $f_\bullet \circ g_\bullet$ と $\mathrm{id}_{Q_\bullet}$ についても同様．以上から $H_i(FI_\bullet) = H_i(FJ_\bullet)$ であることがわかった．（証明終）

これにより，左導来関手は射影分解のとり方によらない．次に右導来関手を考えよう．

定義 6.5.4（右導来関手）

$\mathscr{A}, \mathscr{B}$ を Abel 圏とし，対象 $A \in \mathscr{A}$ と加法的左完全関手 $F : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ を考える．A の入射分解 $I^\bullet$ について，$FI^\bullet$ も（余鎖）複体になる．これに対する $\mathscr{B}$ の中でのコホモロジー $H^i(FI^\bullet)$ を $R^iF(A)$ とかいて，F の A における i 次**右導来関手 (right derived functor)** という．

右導来関手も入射分解のとり方によらない．

命題 6.5.5

$I^\bullet, J^\bullet$ を A の入射分解とすると，$FI^\bullet$ と $FJ^\bullet$ は擬同型である．

証明.

単射 $\varepsilon : A \to I^0, \varepsilon' : A \to J^0$ を考える．このとき J^0 が入射対象なので $f^0 : I^0 \to J^0$ が存在する．

$$\begin{tikzcd} & & I^0 \arrow[r, "d^0"] \arrow[d, dashed, "f^0"] & I^1 \arrow[r, "d^1"] & \cdots \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[ur, "\varepsilon"] \arrow[dr, "\varepsilon'"'] & J^0 \arrow[r, "d'^0"] & J^1 \arrow[r, "d'^1"] & \cdots \end{tikzcd}$$

$\ker d^0 \subset \ker(d'^0 \circ f^0)$（たしかめよ）であるので，$\varphi : \mathrm{Im}\, d^0 \to \mathrm{Im}(d' \circ f^0) \subset J^1$ が $\varphi \circ d^0 = d'^0 \circ f^0$ となるように定まる．これを J^1 の入射性から持ち上げて f^1 を得る．

$$\begin{tikzcd}
I^0 \arrow[r, "d^0"] \arrow[drr, bend right, "d'^0\circ f^0"'] & \mathrm{Im}\, d^0 \arrow[r] \arrow[dr, "\varphi"] & I^1 \arrow[d, dashed, "f^1"] \\
& & J^1
\end{tikzcd}$$

これを繰り返して複体の射 $f^\bullet$ を作ることができる．$g^\bullet$ も同様．

$H^i(Fg^\bullet), H^i(Ff^\bullet)$ が同型射であることを示せばよい．左導来関手のときと同様に $g^\bullet \circ f^\bullet$ と $\mathrm{id}_{I^\bullet}$ がホモトピックであることを示そう．

$h_n = \mathrm{id}_{I^n} - (g^n \circ f^n)$ とおき，$s^n \circ d^{n-1} = h_{n-1} - (d^{n-1} \circ s^{n-1})$ となるような $\{s^n\}$ を帰納的に作ろう．左導来関手と違い $n = 1$ からの議論なことに注意する．

まず $n = 1$ のとき，$\ker d^0 \subset \ker h^0$ なので $\varphi : \mathrm{Im}\, d^0 \to \mathrm{Im}\, h^0 \subset I$ が $\varphi \circ d^0 = h^0$ となるように定まる．これを I^1 の入射性から持ち上げて s^1 を得る．

$$\begin{tikzcd}
I^0 \arrow[r, "d^0"] \arrow[d, "h^0"] & \mathrm{Im}\, d^0 \arrow[r] \arrow[dl, "\varphi"] & I^1 \arrow[dll, dashed, bend left, "s^1"] \\
I^0 & &
\end{tikzcd}$$

次に s^{n-1} まで存在するとする．このとき $s^{n-1} \circ d^{n-2} = h_{n-2} - (d^{n-3} \circ s^{n-2})$ であることに注意すると，$\ker d^{n-2} \subset \ker(h_{n-1} - (d^{n-2} \circ s^{n-1}))$ であることが確かめられる．よって次の図式から s^n の存在がわかる．

$$\begin{tikzcd}
I^{n-1} \arrow[r, "d^{n-1}"] \arrow[d, "h_{n-1}-(d^{n-2}\circ s^{n-1})"'] & \mathrm{Im}\, d^{n-1} \arrow[r] \arrow[dl] & I^n \arrow[dll, dashed, bend left, "s^n"] \\
I^{n-1} & &
\end{tikzcd}$$

これを繰り返して $\mathrm{id}_{I^\bullet}$ と $g^\bullet \circ f^\bullet$ がホモトピックであることを得る．よって $H^i(FI^\bullet) = H^i(FJ^\bullet)$ であることがわかった．（証明終）

ここでは共変関手のみ考えていたが，加法的反変右完全関手は入射分解から左導来関手を導き，加法的反変左完全関手は射影分解から右導来関手を導く．以後証明は共変関手のことしか考えない．また，これらの証明における $f_\bullet, f^\bullet$ の構成を真似することで次の補題を得る．

補題 6.5.6

任意の射 $\varphi : A \to B$ と A, B の射影分解 $P_\bullet, Q_\bullet$ について, 複体の射 $\varphi_\bullet : P_\bullet \to Q_\bullet$ を次の図式が可換になるようにとれる（入射分解についても同様）；

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & P_2 \arrow[r, "d_2"] \arrow[d, dashed, "\varphi_2"] & P_1 \arrow[r, "d_1"] \arrow[d, dashed, "\varphi_1"] & P_0 \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, dashed, "\varphi_0"] & A \arrow[d, "\varphi"] \arrow[dr] & \\
\cdots \arrow[r] & Q_2 \arrow[r, "d'_2"] & Q_1 \arrow[r, "d'_1"] & Q_0 \arrow[r, "\varepsilon'"] & B \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Figure.10

この複体の射については，ある種の一意性が言える．

命題 6.5.7

任意の射 $\varphi : A \to B$ と A, B の射影分解 $P_\bullet, Q_\bullet$ について，複体の射 $f_\bullet, g_\bullet$ が存在して，φ と可換（すなわち，Figure.10 において φ_i を f_i, g_i に置き換えたものがそれぞれ可換）ならば，$f_\bullet, g_\bullet$ はホモトピックである．

証明.

$\mathrm{Im}(f_0 - g_0) \in \ker \varepsilon' = \mathrm{Im}\, d_1'$ なので，$s_0 : P_0 \to Q_1$ を $f_0 - g_0 = d_1' \circ s_0$ となるようにとれる．次に $f_1 - g_1 - (s_0 \circ d_1)$ を考えると，これの像も $\ker d_1' = \mathrm{Im}\, d_2'$ に含まれるので $s_1 : P_1 \to Q_1$ がとれ，同様．（証明終）

次に，複体の完全列について H_n を施すとどうなるのかを観察しよう．

命題 6.5.8（ホモロジー長完全列と連結射の存在）

複体の完全列 $0 \longrightarrow A_\bullet \xrightarrow{\varphi_\bullet} B_\bullet \xrightarrow{\psi_\bullet} C_\bullet \longrightarrow 0$ について，任意の n について $\delta_n : H_n(C_\bullet) \to H_{n-1}(A_\bullet)$ が存在して（この δ_n を**連結射 (connecting morphism)** という）；

$$\cdots \xrightarrow{\delta_{n+1}} H_n(A_\bullet) \xrightarrow{\varphi_n} H_n(B_\bullet) \xrightarrow{\psi_n} H_n(C_\bullet) \xrightarrow{\delta_n} \cdots$$

$$\xrightarrow{\delta_1} H_0(A_\bullet) \xrightarrow{\varphi_0} H_0(B_\bullet) \xrightarrow{\psi_0} H_0(C_\bullet) \longrightarrow 0$$

が完全．

この長完全列を**ホモロジー長完全列 (long exact sequence of homologies)** という．

証明.

Step 1. $A_\bullet$ において，$d_n : A_n \to A_{n-1}$ に対して；

$$\widetilde{d_n} : \mathrm{Coker}\, d_{n+1} \to \ker d_{n-1}; x + \mathrm{Im}\, d_{n+1} \mapsto d_n(x)$$

と定めるとこれは well-defined である．このとき；

$$0 \longrightarrow \ker \widetilde{d_n} \longrightarrow \mathrm{Coker}\, d_{n+1} \xrightarrow{\widetilde{d_n}} \ker d_{n-1} \longrightarrow \mathrm{Coker}\, \widetilde{d_n} \longrightarrow 0$$

は完全で，構成から $\ker \widetilde{d_n} = \ker d_n / \mathrm{Im}\, d_{n+1} = H_n(A_\bullet), \mathrm{Coker}\, \widetilde{d_n} = \ker / d_{n-1} / \mathrm{Im}\, \widetilde{d_n} = H_{n-1}(A_\bullet)$ なので，完全列；

$$0 \longrightarrow H_n(A_\bullet) \longrightarrow \mathrm{Coker}\, d_{n+1} \xrightarrow{\widetilde{d_n}} \ker d_{n-1} \longrightarrow H_{n-1}(A_\bullet) \longrightarrow 0$$

が得られた．

Step 2. それぞれの複体の境界作用素を $d_{n,1}, d_{n,2}, d_{n,3}$ とおくと，蛇の補題から次の可換図式がある．

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \ker d_{n,1} \arrow[r] \arrow[d] & \ker d_{n,2} \arrow[r] \arrow[d] & \ker d_{n,3} \arrow[d] \arrow[dddll, rounded corners] & \\
0 \arrow[r] & A_n \arrow[r, "\varphi_n"] \arrow[d] & B_n \arrow[r, "\psi_n"] \arrow[d] & C_n \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_{n-1} \arrow[r, "\varphi_{n-1}"] \arrow[d] & B_{n-1} \arrow[r, "\psi_{n-1}"] \arrow[d] & C_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & \operatorname{Coker} d_{n-1,1} \arrow[r] & \operatorname{Coker} d_{n-2,2} \arrow[r] & \operatorname{Coker} d_{n-1,3} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

特に；

$$
\operatorname{Coker} d_{n+1,1} \longrightarrow \operatorname{Coker} d_{n+1,2} \longrightarrow \operatorname{Coker} d_{n+1,3} \longrightarrow 0
$$

$$
0 \longrightarrow \ker d_{n-1,1} \longrightarrow \ker d_{n-1,2} \longrightarrow \ker d_{n-1,3}
$$

が完全である．すると再び蛇の補題と Step.1 から；

$$
\begin{tikzcd}
 & H_n(A_\bullet) \arrow[r, "\varphi_n"] \arrow[d] & H_n(B_\bullet) \arrow[r, "\psi_n"] \arrow[d] & H_n(C_\bullet) \arrow[d] \arrow[dddll, rounded corners, "\delta_n"] & \\
 & \operatorname{Coker} d_{n+1,1} \arrow[r] \arrow[d, "\widetilde{d_{n,1}}"] & \operatorname{Coker} d_{n+1,2} \arrow[r] \arrow[d, "\widetilde{d_{n,2}}"] & \operatorname{Coker} d_{n+1,3} \arrow[r] \arrow[d, "\widetilde{d_{n,3}}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \ker d_{n-1,1} \arrow[r] \arrow[d] & \ker d_{n-1,2} \arrow[r] \arrow[d] & \ker d_{n-1,3} \arrow[d] & \\
 & H_{n-1}(A_\bullet) \arrow[r, "\varphi_{n-1}"] & H_{n-1}(B_\bullet) \arrow[r, "\psi_{n-1}"] & H_{n-1}(C_\bullet) &
\end{tikzcd}
$$

が得られる．

（証明終）

連結射 δ_n は記号的には $\varphi_{n-1}^{-1} \circ d_{n,2} \circ \psi_n^{-1}$ と書くことができることに注意しよう．

命題 *6.5.9*（連結射の可換性）

各行が完全であるような複体の可換図式；

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A_\bullet \arrow[r, "\varphi_\bullet"] \arrow[d, "f_\bullet"] & B_\bullet \arrow[r, "\psi_\bullet"] \arrow[d, "g_\bullet"] & C_\bullet \arrow[r] \arrow[d, "h_\bullet"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A'_\bullet \arrow[r, "\varphi'_\bullet"] & B'_\bullet \arrow[r, "\psi'_\bullet"] & C'_\bullet \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

について，各 n と連結射 $\delta_n : H_n(C_\bullet) \to H_{n-1}(A_\bullet), \delta_n : H_n(C'_\bullet) \to H_{n-1}(A'_\bullet)$ に対して；

$$\begin{tikzcd}
H_n(C_\bullet) \arrow[r, "\delta_n"] \arrow[d, "H_n(h_n)"] & H_{n-1}(A_\bullet) \arrow[d, "H_n(f_n)"] \\
H_n(C'_\bullet) \arrow[r, "\delta_n"] & H_{n-1}(A'_\bullet)
\end{tikzcd}$$

が可換である．

証明.

$\delta_n = \varphi_{n-1}^{-1} \circ d_{n,2} \circ \psi_n^{-1}, \delta_n = {\varphi'_{n-1}}^{-1} \circ {d_{n,2}}' \circ {\psi'_n}^{-1}$ に注意すると, $\ker d_{n,3} / \operatorname{Im} d_{n+1,3}$ 上で ${\varphi'_{n-1}}^{-1} \circ d'_{n,2} \circ {\psi'_n}^{-1} \circ h_n = f_{n-1} \circ \varphi_{n-1}^{-1} \circ d_{n,2} \circ \psi_n^{-1}$ に帰着するが，これは次の図式を追うことでわかる．

$$\begin{tikzcd}
& A_n \arrow[rr] \arrow[dl] \arrow[dd] & & B_n \arrow[rr, "\psi_n"] \arrow[dl, "d_{n,2}"'] \arrow[dd] & & C_n \arrow[dl] \arrow[dd, "h_n"] \\
A_{n-1} \arrow[rr, "\varphi_{n-1}"] \arrow[dd, "f_{n-1}"] & & B_{n-1} \arrow[rr] \arrow[dd] & & C_{n-1} \arrow[dd] & \\
& A'_n \arrow[rr] \arrow[dl] & & B'_n \arrow[rr, "\psi'_n"] \arrow[dl, "d'_{n,2}"] & & C'_n \arrow[dl] \\
A'_{n-1} \arrow[rr, "\varphi'_{n-1}"] & & B'_{n-1} \arrow[rr] & & C'_{n-1} &
\end{tikzcd}$$

（証明終）

以上 2 つの結果はコホモロジーについても同様に成り立ち，**コホモロジー長完全系列**と連結射 δ^n の存在と可換性がいえる．

定理 *6.5.10*（左導来関手の特徴付け）

F を $\mathscr{A} \to \mathscr{B}$ の加法的右完全関手とする．このとき F の左導来関手 L_iF に対し次が成り立つ．

(LDF1) $L_0F \cong F$ である．

(LDF2) $\mathscr{A}$ の任意の完全列 $0 \longrightarrow A_1 \xrightarrow{\varphi} A_2 \xrightarrow{\psi} A_3 \longrightarrow 0$ に対し，各 $i \geq 0$ について連結射 $\delta_{i+1} : L_{i+1}F(A_3) \to L_iF(A_1)$ が存在して；

$$\begin{aligned}
\cdots &\xrightarrow{\delta_{n+1}} L_nF(A_1) \xrightarrow{L_nF(\varphi)} L_nF(A_2) \xrightarrow{L_nF(\psi)} L_nF(A_3) \\
&\xrightarrow{\delta_n} \quad \cdots \\
&\xrightarrow{\delta_2} L_1F(A_1) \xrightarrow{L_1F(\varphi)} L_1F(A_2) \xrightarrow{L_1F(\psi)} L_1F(A_3) \\
&\xrightarrow{\delta_1} F(A_1) \xrightarrow{F(\varphi)} F(A_2) \xrightarrow{F(\psi)} F(A_3) \longrightarrow 0
\end{aligned}$$

が $\mathscr{B}$ の完全列になる．

(LDF3) $\mathscr{A}$ の可換図式で，各行が完全なもの；

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & A_1 & \longrightarrow & A_2 & \longrightarrow & A_3 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle g} & & \downarrow{\scriptstyle h} & & \\
0 & \longrightarrow & B_1 & \longrightarrow & B_2 & \longrightarrow & B_3 & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

に対して，下の列についての連結射を $\partial_i : L_{i+1}F(B_3) \to L_iF(B_1)$ とすると，図式；

$$\begin{array}{ccc}
L_{i+1}F(A_3) & \xrightarrow{\delta_i} & L_iF(A_1) \\
\downarrow{\scriptstyle L_{i+1}F(h)} & & \downarrow{\scriptstyle L_iF(f)} \\
L_{i+1}F(B_3) & \xrightarrow{\partial_i} & L_iF(B_1)
\end{array}$$

が可換である．

(LDF4) P を射影的対象とすると，$i > 0$ について $L_iF(P) = 0$ である．

定理 *6.5.10* の証明.

(LDF1) A の射影分解 $P_\bullet$ について， $L_0F(A) = H_0(FP_\bullet) = \ker F(d_0)/\operatorname{Im} F(d_1) = F(P_0)/\operatorname{Im} F(d_1)$ であるが，F は右完全なので $F(P_1) \xrightarrow{F(d_1)} F(P_0) \xrightarrow{F(\varepsilon)} F(A) \longrightarrow 0$ は完全．よって $\operatorname{Im} F(d_1) = \ker F(d_1)$ であるので，$L_0F(A) = F(P_0)/\ker F(d_1) = F(A)$ である．

(LDF2) A_1, A_2, A_3 の射影分解からなる複体の完全列で，分裂しているものを作りたい（これ自身は**蹄鉄 (horseshoe) の補題**と呼ばれる）． A_1, A_3 の射影分解の初項を $P_{0,1}, P_{0,3}$ とする．ここで $P_{0,2} = P_{0,1} \oplus P_{0,3}$ とおくと，これは射影的である．また自然な単射，全射があって次の図式が考えられる；

$$\begin{tikzcd}
 & P_{0,1} \arrow[r, shift left, "\iota_0"] \arrow[d, "\varepsilon_1"] & P_{0,2} \arrow[l, shift left, "p_0"] \arrow[r, shift left, "\pi_0"] \arrow[d, dashed, "\varepsilon_2"] & P_{0,3} \arrow[l, shift left, "i_0"] \arrow[d, "\varepsilon_3"] & \\
0 \arrow[r] & A_1 \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] & A_2 \arrow[r, "\psi"] \arrow[d] & A_3 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Figure.11

これが可換になるような全射 $\varepsilon_2 : P_{0,2} \to A_2$ を作りたい．まず $P_{0,2}$ の射影性から，$\varepsilon_3 \circ \pi_0 : P_{0,2} \to A_3$ の拡張 $\varepsilon_2' : P_{0,2} \to A_2$ が定まる．ここで $\varepsilon_2 = \varphi \circ \varepsilon_1 \circ p_0 + \varepsilon_2'$ とおくと，これは図式を可換にする全射となる（ε_2' だけみていると $P_{0,3}$ の情報はでてくるが $P_{0,1}$ の情報はでてこないので，そこを補おうという気持ち）．すると蛇の補題から；

$$0 \longrightarrow \ker \varepsilon_1 \longrightarrow \ker \varepsilon_2 \longrightarrow \ker \varepsilon_3 \longrightarrow 0$$

は完全．ここで A_1, A_3 の射影分解について境界作用素をそれぞれ $d_{i,1}, d_{i,3}$ としたとき $\ker \varepsilon_1 = \operatorname{Im} d_{1,1}, \ker \varepsilon_3 = \operatorname{Im} d_{1,3}$ であるので，$P_{1,2} = P_{1,1} \oplus P_{1,3}$ とおくことで次の可換図式がある．

$$\begin{tikzcd}
 & P_{1,1} \arrow[r, shift left, "\iota_1"] \arrow[d, "d_{1,1}"] & P_{1,2} \arrow[l, shift left, "p_1"] \arrow[r, shift left, "\pi_1"] \arrow[d, dashed, "d_{1,2}"] & P_{1,3} \arrow[l, shift left, "i_1"] \arrow[d, "d_{1,3}"] & \\
0 \arrow[r] & \operatorname{Im} d_{1,1} \arrow[r] \arrow[d] & \ker \varepsilon_2 \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Im} d_{1,3} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

これは Figure.11 と全く同様にして全射 $d_{1,2}$ の存在を導く．ゆえに，A_1, A_2, A_3 の射影分解 $P_{\bullet,1}, P_{\bullet,2}, P_{\bullet,3}$ からなる複体の完全列で，分裂しているものができる．すると定理 6.1.7 により F を施しても完全なので，命題 6.5.8 を適用することができる．

(LDF3) 補題 6.5.6 と (LDF1) の証明から，それぞれの射影分解からなる複体の完全列で，行は分裂しているものができる．これに F と命題 6.5.9 を施して求める結果を得る．

(LDF4) $\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow P \longrightarrow 0$ 自体が射影分解となることから明らか．

（証明終）

右導来関手についても同様に得られる．証明は省略するが，結果だけ述べておこう．

定理 *6.5.11*（右導来関手の特徴付け）

F を $\mathscr{A} \to \mathscr{B}$ の加法的左完全関手とする．このとき F の導来関手 R^iF に対し；

(RDF1) $R^0F \cong F$ である．

(RDF2) $\mathscr{A}$ の任意の完全列 $0 \longrightarrow A_1 \xrightarrow{\varphi} A_2 \xrightarrow{\psi} A_3 \longrightarrow 0$ に対し，各 $i \geq 0$ について連結射 $\delta^i : R^iF(A_3) \to R^{i+1}F(A_1)$ が存在して；

$$0 \longrightarrow F(A_1) \xrightarrow{F(\varphi)} F(A_2) \xrightarrow{F(\psi)} F(A_3) \xrightarrow{\delta^0} \cdots$$
$$\xrightarrow{\delta^{i-1}} R^iF(A_1) \xrightarrow{R^iF(\varphi)} R^iF(A_2) \xrightarrow{R^iF(\psi)} R^iF(A_3) \xrightarrow{\delta^i} \cdots$$

が $\mathscr{B}$ の完全列になる．

(RDF3) $\mathscr{A}$ の可換図式で，各行が完全なもの；

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A_1 \arrow[r] \arrow[d, "f"] & A_2 \arrow[r] \arrow[d, "g"] & A_3 \arrow[r] \arrow[d, "h"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & B_1 \arrow[r] & B_2 \arrow[r] & B_3 \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

に対して，下の列についての連結射を $\partial^i : R^iF(B_3) \to R^{i+1}F(B_1)$ とすると，図式；

$$\begin{tikzcd} R^iF(A_3) \arrow[r, "\delta^i"] \arrow[d, "R^iF(h)"] & R^{i+1}F(A_1) \arrow[d, "R^{i+1}F(f)"] \\ R^iF(B_3) \arrow[r, "\partial^i"] & R^{i+1}F(B_1) \end{tikzcd}$$

が可換である．

(RDF4) I を入射対象とすると，$i > 0$ について $R^iF(I) = 0$ である．

§6　δ 関手

先の節の最後の２つの定理において，その主張を導来関手の特徴づけと述べたからにはあのような性質を持った関手の族は，しかるべき関手の導来関手であるべきであろう．この節では具体的な導来関手の紹介をする前に，関手の族が導来関手と一致することを示す際に有用な δ **関手**についてまとめておこう．本書で主に扱うのは Ext（定義 6.7.7）などのコホモロジーであるので，本節は右導来関手についての説明を行うことにする．

まず，準備として加群の余ファイバー積を思い出し，図式追跡で簡単な性質を確認しよう．正確な定義は定義 A.1.16 をみよ．A 加群 X, Y, Z の $f : Z \to X, g : Z \to Y$ による X, Y の Z 上の余ファイバー積は；

$$X \sqcup Y = (X \times Z)/\{(f(z), -g(z)) \mid z \in Z\}$$

であり，自然な i_X, i_Y を g', f' と書くことにすると，次の図式が可換であって，核の間に導かれる自然な射は全射，余核の間の射は同型である．

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
 & & \ker f \arrow[r, two heads] \arrow[d] & \ker f' \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & \ker g \arrow[r] \arrow[d, two heads] & Z \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"] & Y \arrow[r] \arrow[d, "f'"] & \operatorname{Coker} g \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \ker g' \arrow[r] & X \arrow[r, "g'"] \arrow[d] & X \sqcup_Z Y \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Coker} g' \arrow[r] & 0 \\
 & & \operatorname{Coker} f \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] & \operatorname{Coker} f' \arrow[d] & & \\
 & & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

特に $\ker f' = g(\ker f)$ であって f が単射（全射）であることと f' が単射（全射）であることは同値である．もちろん f を g に変えても成り立つ．以上の結果は一般の Abel 圏でもいえる．

定義 *6.6.1*（δ 関手）

$\mathscr{A}, \mathscr{B}$ を Abel 圏とする．加法的関手 $T^i : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ の族 $T^\bullet = \{T^i\}$ で，以下の条件；

(δ1) $\mathscr{A}$ の任意の完全列 $0 \longrightarrow A_1 \longrightarrow A_2 \longrightarrow A_3 \longrightarrow 0$ に対し，各 $i \geq 0$ について連結射 $\delta^i : T^i(A_3) \to T^{i+1}(A_1)$ が存在して；

$$\begin{aligned}
0 \longrightarrow T^0(A_1) \longrightarrow T^0(A_2) \longrightarrow T^0(A_3)& \\
\xrightarrow{\delta^0} \quad \cdots& \\
\xrightarrow{\delta^{i-1}} T^i(A_1) \longrightarrow T^i(A_2) \longrightarrow T^i(A_3) \xrightarrow{\delta^i} \cdots&
\end{aligned}$$

が $\mathscr{B}$ の完全列になる．

(δ2) $\mathscr{A}$ の可換図式で，各行が完全なもの；

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A_1 \arrow[r] \arrow[d] & A_2 \arrow[r] \arrow[d] & A_3 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & B_1 \arrow[r] & B_2 \arrow[r] & B_3 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

に対して，図式；

$$\begin{tikzcd}
T^i(A_3) \arrow[r] \arrow[d] & T^{i+1}(A_1) \arrow[d] \\
T^i(B_3) \arrow[r] & T^{i+1}(B_1)
\end{tikzcd}$$

が可換である．

を満たすものを（コホモロジーに関する）δ **関手 (δ–functor)** という．

そもそも δ 関手とは導来関手の定義を抜き出したものである．δ 関手の間の射については，次のように定義しよう．$\mathscr{A}, \mathscr{B}$ を Abel 圏とし，$(T^\bullet, \delta^\bullet), (U^\bullet, \partial^\bullet)$ を δ 関手とする．自然変換 $\theta^i : T^i \Rightarrow U^i$ の族 $\theta^\bullet : T^\bullet \Rightarrow U^\bullet$

で，$\mathscr{A}$ の任意の完全列 $0 \longrightarrow A_1 \longrightarrow A_2 \longrightarrow A_3 \longrightarrow 0$ に対して；

$$\begin{CD} T^i(A_3) @>{\delta^i}>> T^{i+1}(A_1) \\ @V{\theta^i_{A_3}}VV @VV{\theta^{i+1}_{A_1}}V \\ U^i(A_3) @>{\partial^i}>> U^{i+1}(A_1) \end{CD}$$

が可換であるものを δ 関手の自然変換（δ 関手の射）という．

定義 6.6.2（普遍的 δ 関手）

$\mathscr{A}, \mathscr{B}$ を Abel 圏とし，$T^\bullet$ を δ 関手とする．任意の δ 関手 $U^\bullet$ と，自然変換 $\theta : T^0 \Rightarrow U^0$ について，δ 関手の自然変換 $\theta^\bullet : T^\bullet \to U^\bullet$ で $\theta^0 = \theta$ となるものが一意的に存在するとき，$T^\bullet$ は**普遍的 (universal)** であるという．

定義から $T^0 = U^0$ であるような普遍的 δ 関手は一意的に定まる同型によって $T^\bullet \cong U^\bullet$ である．ここから，加法的関手 $F : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ について $T^0 = F$ となるような普遍的 δ 関手 $T^\bullet$ は存在すれば（一意的な同型を除いて）一意であり，これを F の**右衛星関手 (right satellite functor)** という．

$\mathscr{A}$ が入射的対象を十分に持つ Abel 圏なら，左完全関手 $F : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ の導来関手 $R^\bullet F$ は δ 関手になるが，次の性質が δ 関手が普遍的であることの十分条件を与えており，これから導来関手が普遍的であることがわかる．

定義 6.6.3（消去的）

$\mathscr{A}, \mathscr{B}$ を Abel 圏とし，$F : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ を加法的関手とする．任意の $A \in \mathscr{A}$ に対して，ある $M \in \mathscr{A}$ と単射 $u : A \to M$ が存在して $F(u) = 0$ であるとき，F は**消去的 (effaceable)** であるという．

定理 6.6.4

$\mathscr{A}, \mathscr{B}$ を Abel 圏とし，$T^\bullet$ を δ 関手とする．任意の $i > 0$ について T^i が消去的ならば $T^\bullet$ は普遍的である．

証明.

$U^\bullet$ を δ 関手とし，$\theta : T^0 \Rightarrow U^0$ を自然変換とする．δ 関手の自然変換 $\theta^\bullet : T^\bullet \Rightarrow U^\bullet$ で $\theta^0 = \theta$ であるものが一意的に存在することを示そう．帰納的に作っていく．任意の $A \in \mathscr{A}$ について，T^1 が消去的だから単射 $u : A \to M$ が存在して $T^1(u) = 0$ である．完全列；

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{u} M \xrightarrow{\pi} C \longrightarrow 0$$

が誘導する長完全列を考えると，各行が完全な可換図式；

$$\begin{CD} T^0(M) @>{T^0(\pi)}>> T^0(C) @>{\delta^0_T}>> T^1(A) @>{T^1(u)=0}>> 0 \\ @V{\theta_M}VV @V{\theta_C}VV @VVV \\ U^0(M) @>{U^0(\pi)}>> U^0(C) @>{\delta^0_U}>> U^1(A) \end{CD}$$

を得る．各行が可換なので $\delta^0_U \circ \theta_C \circ {\delta^0_T}^{-1} : T^1(A) \to U^1(A)$ が well-defined に定まる．これを $\theta^1_{A,u}$ とおく．これが単射 $u : A \to M$ のとり方によらないことを示そう．これとは異なる単射 $u' : A \to M'$ で $T^1(u') = 0$ であるものが存在するとする．このとき余ファイバー積 $M \sqcup_A M'$ をとると，単射 $u'' : A \to M \sqcup M'$ が定まり，

また $T^1(u'') = 0$ である．この余核を C'' とすると，先ほどと同様の議論で $C \to C'', C' \to C''$ が定まる．これにより，可換な図式；

$$
\begin{tikzcd}
& T^0(C) \arrow[rr] \arrow[dl] \arrow[dd, "\theta_C"] & & T^1(A) \arrow[rr] \arrow[dl, equal] \arrow[dd, "\theta^1_{A,u}"] & & 0 \\
T^0(C'') \arrow[rr, crossing over] \arrow[dd, "\theta_{C''}"] & & T^1(A) \arrow[rr, crossing over] & & 0 \\
& U^0(C) \arrow[rr] \arrow[dl] & & U^1(A) \arrow[dl, equal] \\
U^0(C'') \arrow[rr] & & U^1(A) \arrow[from=uu, crossing over, "\theta^1_{A,u''}"]
\end{tikzcd}
$$

を得るので，$\theta^1_{A,u} = \theta^1_{A,u''}$ である．同様に $\theta^1_{A,u''} = \theta^1_{A,u'}$ であることがわかり，$\theta^1_{A,u} = \theta^1_{A,u'}$ である．ゆえに $u : A \to M$ のとりかたによらず θ^1_A が定まる．

次に θ^1 が自然変換であることを示す．任意の $f : A \to B$ について；

$$
\begin{tikzcd}
T^1(A) \arrow[r, "T^1(f)"] \arrow[d, "\theta^1_A"] & T^1(B) \arrow[d, "\theta^1_B"] \\
U^1(A) \arrow[r, "U^1(f)"] & U^1(B)
\end{tikzcd}
$$

が可換ならよい．単射 $u : A \to M, v : B \to N$ で $T^1(u) = T^1(v) = 0$ となるものがあったとき，余ファイバー積；

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "u"] \arrow[d, "v \circ f"] & M \arrow[d] \\
N \arrow[r, "u'"] & M \sqcup_A N
\end{tikzcd}
$$

をとると u' は単射なので，単射 $B \to M \sqcup N$ で T^1 で消えるものが定まる．よって，N を $M \sqcup N$ でとりかえて，各行が完全な可換図式；

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, "f"] & M \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d, dashed] & 0 \\
0 \arrow[r] & B \arrow[r] & N \arrow[r] & C' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

が得られる．ここから；

$$
\begin{tikzcd}
& T^0(C) \arrow[rr] \arrow[dl] \arrow[dd] & & T^1(A) \arrow[rr] \arrow[dl, "T^1(f)"'] \arrow[dd, "\theta^1_A"] & & 0 \\
T^0(C') \arrow[rr, crossing over] \arrow[dd] & & T^1(B) \arrow[rr, crossing over] & & 0 \\
& U^0(C) \arrow[rr] \arrow[dl] & & U^1(A) \arrow[dl, "U^1(f)"] \\
U^0(C') \arrow[rr] & & U^1(B) \arrow[from=uu, crossing over, "\theta^1_B"]
\end{tikzcd}
$$

が可換なので自然変換となっていることがわかる．

最後に連結射と可換であることを示そう．$\mathscr{A}$ の短完全列；

$$0 \longrightarrow A_1 \longrightarrow A_2 \longrightarrow A_3 \longrightarrow 0$$

をとる．上と同じ方法で，単射 $u : A_1 \to M$ で $T^1(u) = 0$ であるものを；

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & A_2 \arrow[r] \arrow[d] & A_3 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_1 \arrow[r] & M \arrow[r] & C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

が各行が完全な可換図式であるようにとれる．このとき，次の図式；

$$\begin{tikzcd}
& T^0(A_3) \arrow[rr, "\delta"] \arrow[dl, "\theta_{A_3}"'] \arrow[dd] & & T^1(A_1) \arrow[dl, "\theta^1_{A_1}"] \arrow[dd, equal] \\
U^0(A_3) \arrow[rr, "\delta"] \arrow[dd] & & U^1(A_1) \arrow[dd, equal] & \\
& T^0(C) \arrow[rr, "\delta"] \arrow[dl, "\theta_C"'] & & T^1(A_1) \arrow[dl, "\theta^1_{A_1}"] \\
U^0(C) \arrow[rr, "\delta"] & & U^1(A_1) &
\end{tikzcd}$$

について，底面は $\theta^1_{A_1}$ の構成から可換で，手前と奥は $T^\bullet, U^\bullet$ は δ 関手なので可換．また左の面は θ が自然変換なので可換．よって上も可換である．

以上により θ^1 は連結射と可換な自然変換であり，その一意性は構成（余核の普遍性）から従う．（証明終）

系 *6.6.5*

$\mathscr{A}, \mathscr{B}$ を Abel 圏とし，$\mathscr{A}$ は入射的対象を十分に持つとする．普遍的 δ 関手 $T^\bullet : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ について，T^0 は左完全関手であって，一意的な同型 $T^i \cong R^i T^0 \ (i \geq 0)$ が存在する．

証明.

δ 関手の定義から T^0 は左完全で，右導来関手 $R^i T^0$ が存在する．導来関手は入射的対象を消すので $R^i T^0$ は $i > 0$ のとき消去的だから，$R^\bullet T^0$ は普遍的 δ 関手となる．また $R^0 T^0 = T^0$ なので，普遍性から一意的な同型 $R^\bullet T^0 \cong T^\bullet$ が存在する．（証明終）

反変左完全関手 $G : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ が誘導する右導来関手を考える場合には定義を多少修正する必要がある．短完全列 $0 \longrightarrow A_1 \longrightarrow A_2 \longrightarrow A_3 \longrightarrow 0$ が誘導する長完全列は；

$$0 \longrightarrow G(A_3) \longrightarrow G(A_2) \longrightarrow G(A_1) \xrightarrow{\delta^0} R^1G(A_3) \longrightarrow R^1G(A_2) \longrightarrow R^1G(A_1) \xrightarrow{\delta^1} \cdots$$

のような形をしているので，**反変 δ 関手**を次のように定めよう．

定義 *6.6.6*（反変 δ 関手）

$\mathscr{A}, \mathscr{B}$ を Abel 圏とする．加法的反変関手 $T^i : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ の族 $T^\bullet = \{T^i\}$ で，δ 関手の定義において $\mathscr{B}$ の可換図式の A_1, A_3 を入れ替えたものを（コホモロジーに関する）**反変 δ 関手 (contravariant δ–functor)** という．

反変 δ 関手の間の自然変換と，反変 δ 関手が普遍的であることもまったく同様に定める．

定義 *6.6.7*（余消去的）

$\mathscr{A},\mathscr{B}$ を Abel 圏とし，$F:\mathscr{A}\to\mathscr{B}$ を加法的反変関手とする．任意の $A\in\mathscr{A}$ に対して，ある $M\in\mathscr{A}$ と全射 $u:M\to A$ が存在して $F(u)=0$ であるとき，F は**余消去的 (coeffaceable)** であるという．

定理 *6.6.8*

$\mathscr{A},\mathscr{B}$ を Abel 圏とし，$T^\bullet$ を反変 δ 関手とする．任意の $i>0$ について T^i が余消去的ならば $T^\bullet$ は普遍的である．

証明.

定理 6.6.4 の証明と同様である．（証明終）

系 *6.6.9*

$\mathscr{A},\mathscr{B}$ を Abel 圏とし，$\mathscr{A}$ は射影的対象を十分に持つとする．普遍的反変 δ 関手 T^i について，T^0 は反変左完全関手であって，一意的な同型 $T^i\cong R^iT^0$ $(i\geq 0)$ が存在する．

証明.

R^iT^0 が射影的対象を消すことに注意すれば，系 6.6.5 とほぼ同じである．（証明終）

§ 7　二重複体

導来関手の例として Tor, Ext を定義したいのだが，計算の必要性から**二重複体**についての知識が必要となる．

定義 *6.7.1*（二重複体）

Abel 圏 $\mathscr{A}$ の対象の族 $\{X_{p,q}\}_{p,q\in\mathbb{N}}$ と，射 $d'_{p,q}:X_{p,q}\to X_{p-1,q}$，$d''_{p,q}:X_{p,q}\to X_{p,q-1}$ の族 $\{d'_{p,q}\},\{d''_{p,q}\}$ について；

$$d'_{p-1,q}\circ d'_{p,q}=0,\quad d''_{p,q-1}\circ d''_{p,q}=0,\quad d''_{p-1,q}\circ d'_{p,q}+d'_{p,q-1}\circ d''_{p,q}=0$$

が成り立つとき，これらをまとめて $X_{\bullet,*}$ とかいて**二重複体 (double chain complex)** という．

$$
\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \\
\cdots \arrow[r] & X_{p+1,q+1} \arrow[r, "d'_{p+1,q+1}"] \arrow[d, "d''_{p+1,q+1}"] & X_{p,q+1} \arrow[r, "d'_{p,q+1}"] \arrow[d, "d''_{p,q+1}"] & X_{p-1,q+1} \arrow[r] \arrow[d, "d''_{p-1,q+1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & X_{p+1,q} \arrow[r, "d'_{p+1,q}"] \arrow[d, "d''_{p+1,q}"] & X_{p,q} \arrow[r, "d'_{p,q}"] \arrow[d, "d''_{p,q}"] & X_{p-1,q} \arrow[r] \arrow[d, "d''_{p-1,q}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & X_{p+1,q-1} \arrow[r, "d'_{p+1,q-1}"] \arrow[d] & X_{p,q-1} \arrow[r, "d'_{p,q-1}"] \arrow[d] & X_{p-1,q-1} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
 & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{tikzcd}
$$

Figure.12　二重複体

双対的に**二重余鎖複体**についても同様の定義ができる．

$$
\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \\
\cdots \arrow[r] & X^{p-1,q-1} \arrow[r, "d'^{p-1,q-1}"] \arrow[d, "d''^{p-1,q-1}"] & X^{p,q-1} \arrow[r, "d'^{p,q-1}"] \arrow[d, "d''^{p,q-1}"] & X^{p+1,q-1} \arrow[r] \arrow[d, "d''^{p+1,q-1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & X^{p-1,q} \arrow[r, "d'^{p-1,q}"] \arrow[d, "d''^{p-1,q}"] & X^{p,q} \arrow[r, "d'^{p,q}"] \arrow[d, "d''^{p,q}"] & X^{p+1,q} \arrow[r] \arrow[d, "d''^{p+1,q}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & X^{p-1,q+1} \arrow[r, "d'^{p-1,q+1}"] \arrow[d] & X^{p,q+1} \arrow[r, "d'^{p,q-1}"] \arrow[d] & X^{p+1,q+1} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
 & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{tikzcd}
$$

Figure.13　二重余鎖複体

本によって射が満たすべき性質が異なることに注意しておく．ここでは河田 (1976)，志甫 (2016) に合わせた．加藤 (2003) では Figure.12 が可換であることを要請している．加藤 (2003) のように；

$$d'_{p-1,q} \circ d'_{p,q} = 0, \quad d''_{p,q-1} \circ d''_{p,q} = 0, \quad d''_{p-1,q} \circ d'_{p,q} = d'_{p,q-1} \circ d''_{p,q}$$

を仮定すると，これは複体の複体となるので $\mathrm{Ch}(\mathrm{Ch}(\mathscr{A}))$ の対象となる．一般にこれは二重複体にはならないが，$d''_{p,q}$ を $-d''_{p,q}$ に変えることにより二重複体が得られる．この対応は $\mathrm{Ch}(\mathrm{Ch}(\mathscr{A}))$ と二重複体の圏の間の圏同値を与える．

複体を二重複体とみなす自然な方法は（２つ）あることがすぐにわかるが，二重複体から複体を得ることもできる．以下ではとりあえず３通り紹介しよう．

定義 6.7.2（全複体）

二重複体 $X_{\bullet,*}$ について；

$$T_n = \bigoplus_{p+q=n} X_{p,q}, \quad d_n = \sum_{p+q=n} (d'_{p,q} + d''_{p,q}) : T_n \to T_{n-1}$$

と定めると $T_\bullet$ は複体となる．これを $X_{\bullet,*}$ の**全複体 (total chain complex)** という．

また，各行，列からも複体が作られる．

定義 6.7.3

二重複体 $X_{\bullet,*}$ について；

$$A_q = \operatorname{Coker} d'_{1,q}, \quad B_p = \operatorname{Coker} d''_{p,1}$$

とおくと，補題 6.1.2 より定まる $d^A_q : A_q \to A_{q-1}, d^B_p : P_p \to B_{p-1}$ によって $\{A_q, d^A_q\}, \{B_p, d^B_p\}$ は複体となる．これを $X_{\bullet,*}$ の**辺複体 (bordered chain complex)** という．

$$\begin{tikzcd}
 & & & & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \\
\cdots \arrow[rrrr] & & & & X_{1,q} \arrow[r, "d'_{1,q}"] \arrow[d, "d''_{1,q}"] & X_{0,q} \arrow[r, "\varepsilon'_q"] \arrow[d, "d''_{0,q}"] & A_q \arrow[r] \arrow[d, "d^A_q"] & 0 \\
\cdots \arrow[rrrr] & & & & X_{1,q-1} \arrow[r, "d'_{1,q-1}"] \arrow[d] & X_{0,q-1} \arrow[r, "\varepsilon'_{q-1}"] \arrow[d] & A_{q-1} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \\
\cdots \arrow[r] & X_{p,1} \arrow[r, "d'_{p,1}"] \arrow[d, "d''_{p,1}"] & X_{p-1,1} \arrow[r] \arrow[d, "d''_{p-1,1}"] & \cdots \arrow[r] & X_{1,1} \arrow[r, "d'_{1,1}"] \arrow[d, "d''_{1,1}"] & X_{0,1} \arrow[r, "\varepsilon'_1"] \arrow[d, "d''_{0,1}"] & A_1 \arrow[r] \arrow[d, "d^A_1"] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & X_{p,0} \arrow[r, "d'_{p,0}"] \arrow[d, "\varepsilon_q''"] & X_{p-1,0} \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon_{p-1}''"] & \cdots \arrow[r] & X_{1,0} \arrow[r, "d'_{1,0}"] \arrow[d, "\varepsilon''_1"] & X_{0,0} \arrow[r, "\varepsilon'_0"] \arrow[d, "\varepsilon''_0"] & A_0 \arrow[r] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & B_p \arrow[r, "d^B_p"] \arrow[d] & B_{p-1} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & B_1 \arrow[r, "d^B_1"] \arrow[d] & B_0 \arrow[d] & & \\
 & 0 & 0 & & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

Figure.14　辺複体

定理 6.7.4

二重複体 $X_{\bullet,*}$ の全複体 $T_\bullet$，辺複体 $A_\bullet, B_\bullet$ について，各 p, q に対して次の列；

$$\cdots \xrightarrow{d'_{2,q}} X_{1,q} \xrightarrow{d'_{1,q}} X_{0,q} \xrightarrow{\varepsilon'_q} A_q \longrightarrow 0\ , \qquad \cdots \xrightarrow{d''_{p,2}} X_{p,1} \xrightarrow{d''_{p,1}} X_{p,0} \xrightarrow{\varepsilon''_q} B_q \longrightarrow 0$$

が完全であるならば，ホモロジーについて $H_n(T_\bullet) = H_n(A_\bullet) = H_n(B_\bullet)$ が成り立つ．

証明.

全複体 $T_\bullet$，辺複体 $A_\bullet, B_\bullet$ の間に複体の射；

$$\varphi_n : T_n \to A_n; (x_{p,q})_{p+q=n} \mapsto \varepsilon'_n(x_{0,n}), \quad \psi_n : T_n \to B_n; (x_{p,q})_{p+q=n} \mapsto \varepsilon''_n(x_{n,0})$$

が定義できる．例えば，φ について $\varphi_{n+1} \circ d_{n+1} = d^A_{n+1} \circ \varphi_n$ を確かめることは簡単である．ψ も同様.

$H_n(\varphi_n) : H_n(T_\bullet) \to H_n(A_\bullet)$ が全単射であることを示そう．$H_n(\psi_n)$ についても同様に示すことができる.

Step 1. 単射であること.

$(x_{p,q})_{p+q=n} \in \ker d_n$ に対して，$\varepsilon'_n(x_{0,n}) \in \operatorname{Im} d^A_{n+1}$ ならば $(x_{p,q}) \in \operatorname{Im} d_{n+1}$ を示せばよい．まず ε'_{n+1} は全射なので，ある $x_{0,n+1} \in X_{0,n+1}$ が存在して $x_{0,n} - d''_{0,n+1}(x_{0,n+1}) \in \ker \varepsilon'_n = \operatorname{Im} d_{1,n}$ である．ゆえに，ある $x_{1,n} \in X_{1,n}$ が存在して $x_{0,n} = d'_{1,n}(x_{1,n}) + d''_{0,n+1}(x_{0,n+1})$ である.

次に，$x_{1,n-1}$ について，仮定から $d'_{1,n-1}(x_{1,n-1}) + d''_{0,n}(x_{0,n}) = 0$ である．すると $x_{0,n} = d'_{1,n}(x_{1,n}) + d''_{0,n+1}(x_{0,n+1})$ であったので；

$$d'_{1,n-1}(x_{1,n-1}) + d''_{0,n}(x_{0,n}) = d'_{1,n-1}(x_{1,n-1}) + d'_{1,n-1}(d''_{1,n}(x_{1,n})) = 0$$

となる．すなわち $x_{1,n-1} - d''_{1,n}(x_{1,n}) \in \ker d'_{1,n-1} = \operatorname{Im} d'_{2,n-1}$ であるから，$x_{1,n-1} = d''_{1,n}(x_{1,n}) + d'_{2,n-1}(x_{2,n-1})$ となる $x_{2,n-1} \in X_{2,n-1}$ がみつかる.

以後帰納的に $x_{n,0}$ まで続けることで $(x_{p,q}) \in \operatorname{Im} d_{n+1}$ を示すことができる.

Step 2. 全射であること.

任意の $x_n + \operatorname{Im} d^A_{n+1} \in \ker d^A_n$ について，$(x_{p+q})_{p+q=n}$ を $(x_{p+q}) \in \ker d_n, \varepsilon'_n(x_{0,n}) = x_n$ となるようにとりたい.

まず ε'_n は全射なので，ある $x_{0,n}$ で $\varepsilon'_n(x_{0,n}) = x_n$ となるものが存在する．次に $d'_{1,n-1}(x_{1,n-1}) + d''_{0,n}(x_{0,n}) = 0$ となる $x_{1,n-1}$ の存在を言いたいので，$-d''_{0,n}(x_{0,n}) \in \operatorname{Im} d'_{1,n-1} = \ker \varepsilon'_{n-1}$ を示せばよいが，d^A_n の定義から $\varepsilon'_{n-1} \circ d''_{0,n} = d^A_n \circ \varepsilon'_n$ であるので，$\varepsilon'_n(x_{0,n}) = x_n \in \ker d_A$ より成り立っていることがわかる．以後帰納的に続けることで条件を満たす $(x_{p,q})_{p+q=n}$ を構成することができる.

（証明終）

全複体，辺複体の定義と定理 6.7.4 は余鎖複体についても双対的に行うことができる.

満を持して Tor と Ext の登場である.

定義 *6.7.5*（Tor 関手）

加群 M について，関手 $M \otimes -$ は右完全である．これによる左導来関手を $\mathrm{Tor}_n(M, -)$ とかく．これを Tor **関手 (Tor functor, torsion functor)** という.

この定義からは $\mathrm{Tor}(M, N)$ を計算するには N の射影分解 $P_\bullet$ を計算する必要があるように思われるが，定理 6.7.4 より次の定理を言うことができる.

定理 *6.7.6*（Tor の可換性）

A 加群 M, N について，M の射影分解に N をテンソルした複体；

$$\cdots Q_2 \otimes N \longrightarrow Q_1 \otimes N \longrightarrow Q_0 \otimes N \longrightarrow 0$$

の n 次のホモロジーは $\mathrm{Tor}_n(M, N)$ と同型である．特に $\mathrm{Tor}(M, N) \cong \mathrm{Tor}(N, M)$ である.

証明.

M, N の射影分解からなる複体を $Q_\bullet, P_\bullet$ とする．ここで射影加群は平坦であることに注意すると，各 i, j について次の複体たちは完全である；

$$\cdots \longrightarrow P_1 \otimes Q_j \xrightarrow{d_1 \otimes \mathrm{id}_{Q_j}} P_0 \otimes Q_j \xrightarrow{\varepsilon \otimes \mathrm{id}_{Q_j}} N \otimes Q_j \longrightarrow 0$$

$$\cdots \longrightarrow P_i \otimes Q_1 \xrightarrow{\mathrm{id}_{P_i} \otimes d_1'} P_i \otimes Q_0 \xrightarrow{\mathrm{id}_{P_i} \otimes \varepsilon'} P_i \otimes M \longrightarrow 0$$

よって，辺複体が $M \otimes P_\bullet, N \otimes Q_\bullet$ である二重複体 $P_\bullet \otimes Q_*$ で各行，列が完全なものができる．これに定理 6.7.4 を適用して $\mathrm{Tor}(M, N) \cong \mathrm{Tor}(N, M)$ を得る．（証明終）

定義 6.7.7（Ext 関手）

加群 M について，関手 $\mathrm{Hom}(M, -)$ は左完全である．これによる右導来関手を $\mathrm{Ext}^n(M, -)$ とかき，Ext **関手 (Ext functor, extension functor)** という．

Tor と同様に，$\mathrm{Ext}(M, N)$ の計算は N の単射分解と M の射影分解のどちらを計算してもよい（$\mathrm{Hom}(-, N)$ は反変左完全であるから）．

ここで普遍性と命題 1.5.5 より次が成り立っている．

命題 6.7.8

A 加群の圏において，以下が成り立つ．

(i) $\mathrm{Hom}(\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda, N) \cong \prod_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{Hom}(M_\lambda, N)$
(ii) $\mathrm{Hom}(M, \prod_{\lambda\in\Lambda} N_\lambda) \cong \prod_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{Hom}(M, N_\lambda)$
(iii) $M \otimes \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} N_\lambda \cong \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} (M \otimes N_\lambda)$

M が有限生成なら次も正しい．

(iv) $\mathrm{Hom}(M, \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} N_\lambda) \cong \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{Hom}(M, N_\lambda)$

証明.

(i) から (iii) についてはまさに直積，直和（余積）の普遍性と命題 1.5.5 による．(iv) は M が有限生成なら $f \in \mathrm{Hom}(M, \bigoplus N_\lambda)$ について有限部分集合 $I \subset \Lambda$ が存在して，$f(M) \subset \bigoplus_{i\in I} N_i$ が成り立つ．（証明終）

ここから導来関手たちにも次が言えることがわかる．

命題 6.7.9

A 加群の圏において，以下が成り立つ．

(i) $\mathrm{Ext}(\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda, N) \cong \prod_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{Ext}(M_\lambda, N)$
(ii) $\mathrm{Ext}(M, \prod_{\lambda\in\Lambda} N_\lambda) \cong \prod_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{Ext}(M, N_\lambda)$
(iii) $\mathrm{Tor}(M, \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} N_\lambda) \cong \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{Tor}(M, N_\lambda)$

M が有限表示なら次も正しい．

(iv) $\mathrm{Ext}(M, \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} N_\lambda) \cong \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{Ext}(M, N_\lambda)$

証明.

(i) だけ示す．M_λ の射影分解を $P_{\bullet,\lambda}$ とすると，$\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} P_{\bullet,\lambda}$ は $\bigoplus M_\lambda$ の射影分解になる．すると $\mathrm{Hom}(-,N)$ によって次の余鎖複体；

$$\longrightarrow \bigoplus \mathrm{Hom}(P_{n,\lambda},N) \longrightarrow \bigoplus \mathrm{Hom}(P_{n+1,\lambda},N) \longrightarrow$$

を得るが，これの各成分は $\prod \mathrm{Hom}(P_{n,\lambda},N)$ と同型である．よって主張が従う．（証明終）

最後に，Ext の計算についていくつか技術的な補題を用意しておこう．

命題 *6.7.10*

A を環とし，M,N を A 加群とする．$a\in\mathrm{Ann}(M)\cup\mathrm{Ann}(N)$ について，各 i に対し $a\in\mathrm{Ann}(\mathrm{Ext}^i(M,N))$ である．

証明.

M の射影分解を $P_\bullet$ とする．まず $a\in\mathrm{Ann}\,N$ とすると，任意の i と $f\in\mathrm{Hom}(P_i,N)$ について明らかに $af=0$ であるから，$\mathrm{Ann}\,N\subset\mathrm{Ann}(\mathrm{Ext}^i(M,N))$ である．また $a\in\mathrm{Ann}\,M$ なら，a 倍写像 $M\to M$ は 0 で，すると；

$$\begin{array}{ccccccccc}\cdots & \longrightarrow & P_1 & \longrightarrow & P_0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0\\ & & \downarrow{\scriptstyle 0} & & \downarrow{\scriptstyle 0} & & \downarrow{\scriptstyle a\cdot=0} & & \\ \cdots & \longrightarrow & P_1 & \longrightarrow & P_0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0\end{array}$$

が可換だから，命題 6.5.7 より $\mathrm{Ext}^i(M,N)\to\mathrm{Ext}^i(M,N)$ はゼロ射である．よって主張が従う．（証明終）

命題 *6.7.11*

A を Noether 環とし，M,N を A 加群，M を有限生成とする．平坦 A 代数 B に対して，任意の $i>0$ に対して；

$$\mathrm{Ext}^i_A(M,N)\otimes B\cong\mathrm{Ext}^i_B(M\otimes B,N\otimes B)$$

である．

証明.

A が Noether で M が有限生成なので，M の射影分解に現れる P_i をすべて有限生成，特に有限表示にできる．このとき $\mathrm{Ext}^i_A(M,N)\otimes B=H^i(\mathrm{Hom}(P_i,N))\otimes B$ であり，補題からこれは $H^i(\mathrm{Hom}(P_i,N)\otimes B)$ に等しく，また補題 1.7.7 より $\mathrm{Ext}^i_A(M,N)\otimes B=H^i(\mathrm{Hom}_B(P_i\otimes B,N\otimes B))$ である．

さて，射影 A 加群 P について，$P\otimes B$ は射影的 B 加群である．実際 B 加群の完全列 $N_1\xrightarrow{\psi}N_2\longrightarrow 0$ に対して，$g:P\otimes B\to N_2$ が存在すると A 線型写像 $f:P\to N_2;x\mapsto g(x\otimes 1)$ が定まり，P が射影的だから $\widetilde{f}:P\to N_1$ で可換なものが存在する．これにより $\widetilde{g}:P\otimes B\to N_1;x\otimes b\mapsto b\widetilde{f}(x)$ が定まる．これは構成から可換である．

すると $P_\bullet\otimes B$ は $M\otimes B$ の射影分解になり，$\mathrm{Ext}^i_A(M,N)\otimes B=H^i(\mathrm{Hom}_B(P_i\otimes B,N\otimes B))=\mathrm{Ext}^i_B(M\otimes B,N\otimes B)$ である．（証明終）

系 *6.7.12*

A を Noether 環とし，M, N を A 加群，M を有限生成とする．任意の $P \in \operatorname{Spec} A$ と $i > 0$ に対して；

$$(\operatorname{Ext}^i_A(M, N))_P \cong \operatorname{Ext}^i_{A_P}(M_P, N_P)$$

である．

第7章　ホモロジー次元とSerreの定理

—Homological dimension and Serre's theorem

前章で定義した射影分解，Tor, Ext などの道具を使って可換環の理論にホモロジー代数的手法を持ち込もう．この章では**ホモロジー次元**とも呼ばれる**射影次元 (projective dimension)**，その双対概念であるところの**入射次元 (injective dimension)**，また**大域次元 (global dimension)** を定義し，５章で予告しておいたとおり **Serre の定理**（定理 5.6.9）を証明しよう．

§ 1　Ext と加群の深さ

この節ではホモロジー代数の最初の応用として，Cohen–Macaulay 性を議論するために必要不可欠な深さの概念について，Ext を使った言い換えを与え，ホモロジー代数の道具を用いて考察していく．最初は簡単な場合として正則元と Hom のつながりについて調べてみる．

補題 *7.1.1*

A を Noether 環とし，M を有限生成 A 加群，I を $IM \neq M$ となる A のイデアルとする．このとき，次の条件；

(i) M 正則元である $a \in I$ が存在する．
(ii) 任意の有限生成 A 加群 N について，$\operatorname{Supp} N \subset V(I)$ ならば $\operatorname{Hom}(N, M) = 0$ である．
(iii) ある有限生成 A 加群 N が存在して，$\operatorname{Supp} N = V(I)$ かつ $\operatorname{Hom}(N, M) = 0$ となる．

は同値である．

証明.

(i) $\Longrightarrow$ (ii)

a 倍写像 $a\cdot : M \to M$ は単射である．すると，これを合成する線型写像 $a\cdot_* : \operatorname{Hom}(N, M) \to \operatorname{Hom}(N, M)$ も単射である．任意の $\varphi \in \operatorname{Hom}(N, M)$ をとると，$a\cdot_*(\varphi)$ は $x \mapsto \varphi(ax)$ という線型写像であることに注意する．ここで $\operatorname{Supp} N = V(\operatorname{Ann} N) \subset V(I)$ なので，命題 1.8.2 より $I \subset \sqrt{\operatorname{Ann} N}$ である．よってある $n > 0$ が存在して $a^n N = 0$ である．すると φ に $a\cdot_*$ を n 回施すとそれは 0 になり，これは単射なので φ は 0 でなければならない．

(ii) $\Longrightarrow$ (iii)

$N = A/I$ とすればよい．

(iii) $\Longrightarrow$ (i)

I は M 正則元を持たないとする．すると補題 5.7.6 より $P \in \operatorname{Ass} M \cap V(I)$ となる $P \in \operatorname{Spec} A$ が存在する．このとき単射 $A/P \to M$ が存在する（$P = \operatorname{Ann} x$ とするとき，$A/P \to M; a + P \mapsto ax$ とすればよい）．これを P で局所化して $k(P) \to M_P$ が存在する．また，$P \in V(I) = \operatorname{Supp} N$ であるので $N_P \neq 0$ であり，中山の補題より $N_P/PN_P = N \otimes_A k(P)$ は 0 でない $k(P)$ 線型空間である．よって 0 でない $N_P/PN_P \to k(P)$ がある．以上のことを組み合わせて $\operatorname{Hom}_{A_P}(N_P, M_P) = \operatorname{Hom}(N, M)_P \neq 0$ である．すると命題 1.6.12 より $\operatorname{Hom}(N, M) \neq 0$ であるので矛盾である．

（証明終）

これを正則列について一般化しよう．

命題 *7.1.2*

A を Noether 環とし，M を有限生成 A 加群，I を $IM \neq M$ となる A のイデアルとする．任意の $n > 0$ について，次の条件；

(i) $n \leq \operatorname{depth}_I M$ である．
(ii) 任意の有限生成 A 加群について，$\operatorname{Supp} N \subset V(I)$ ならば任意の $0 \leq i < n$ について $\operatorname{Ext}^i(N, M) = 0$ である．
(iii) ある有限生成 A 加群 N が存在して，$\operatorname{Supp} N = V(I)$ かつ任意の $0 \leq i < n$ について $\operatorname{Ext}^i(N, M) = 0$ である．
(iv) 任意の $0 < i < n$ について，$a_1, \ldots, a_i \in I$ が M 正則列であるならば，ある $a_{i+1}, \ldots, a_n \in I$ が存在して $a_1, \ldots, a_n$ が M 正則列をなす．

は同値である．

証明.

(i) $\Longrightarrow$ (ii)

n についての帰納法で示す．$n = 1$ のときは先の補題でみたので，$n > 1$ とする．$a_1, \ldots, a_n \in I$ を M 正則列とする．完全列；

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{a_1 \cdot} M \longrightarrow M/a_1M \longrightarrow 0$$

について Ext が導く完全列を考えて；

$$\operatorname{Ext}^{i-1}(N, M/a_1M) \xrightarrow{\partial^{i-1}} \operatorname{Ext}^i(N, M) \xrightarrow{a_1 \cdot} \operatorname{Ext}^i(N, M)$$

が完全である（$\operatorname{Ext}^i(N, M)$ の間の線型写像は $a_1 \cdot$ が誘導するコホモロジーの間の線型写像だが，これは $a_1 \in A$ なので $a_1 \cdot$ のまま変わらない）．ここで $a_2, \ldots, a_n$ が M/a_1M 正則列なので $n-1 \leq \operatorname{depth}_I M/a_1M$ だから，帰納法の仮定より $a_1 \cdot : \operatorname{Ext}^i(N, M) \to \operatorname{Ext}^i(N, M)$ は単射である．また命題 6.7.10 から $\operatorname{Ann} N \subset \operatorname{Ann}(\operatorname{Ext}^i(N, M))$ であるので，補題と同様の議論で $\operatorname{Ext}^i(N, M) = 0$ である．

(ii) $\Longrightarrow$ (iii)

$N = A/I$ とすればよい．

(iii) $\Longrightarrow$ (iv)

これも n についての帰納法で示す．$n = 1$ のときは見た．$n > 1$ とし，$i < n$ について $a_1, \ldots, a_i \in I$ が M 正則列であるとする．(iii) の条件を満たす有限生成 A 加群 N と a_1 倍写像についての完全列が導く Ext の完全列；

$$\operatorname{Ext}^j(N, M) \longrightarrow \operatorname{Ext}^j(N, M/a_1M) \xrightarrow{\partial^i} \operatorname{Ext}^{j+1}(N, M)$$

を考える．$j+1 < n$ のとき，仮定から完全列の両端は 0 となり，任意の $j < n-1$ について $\operatorname{Ext}^j(N, M/a_1M) = 0$ である．$\operatorname{Supp} N = V(I)$ であるから，帰納法の仮定から M/a_1M 正則列 $a_2, \ldots, a_i \in I$ を長さ $n-1$ に延長できる．よって，番号のズレに気をつけて $a_1, \ldots, a_n \in I$ を M 正則列となるようにできることがわかった．

（証明終）

この命題から即座に次の定理が従う．

定理 *7.1.3*（Rees）

A を Noether 環とし，M を有限生成 A 加群，I を $IM \neq M$ となる A のイデアルとする．I の元からなる極大な M 正則列の長さは一定であり，また；

$$\operatorname{depth}_I M = \inf\left\{i \in \mathbb{N} \,\middle|\, \operatorname{Ext}^i(A/I, M) \neq 0\right\}$$

である．

CM 局所環とは $\dim A = \operatorname{depth} A$ となっている環のことであったことを思い出すと，この定義は Krull 次元がホモロジカルな量で与えられている局所環のことである，と言い換えることができる．Krull 次元をホモロジカルな量に翻訳することで可換環論に新たな視点が持ち込まれ．**ホモロジカル予想**と呼ばれる一連の予想群が生まれることとなった．これらの予想については本書のところどころで目にすることになるだろう．

§ 2　ホモロジー次元

この節ではホモロジー次元を定義し，その基本的な性質について考察する．この章のはじめに述べたとおり，次に定義する射影次元，入射次元はホモロジー次元ともよばれ，Krull 次元とは異なり環と加群のホモロジカルな情報を引き出す．射影次元のことをホモロジー代数と呼ぶことも多いが，本書ではホモロジカルな方法で定義される次元のことをまとめてホモロジー次元と呼ぶことにする．

定義 *7.2.1*（射影次元）

A を環とし，M を A 加群とする．M の射影分解の長さの最小値を M の**射影次元 (projective dimension)** といい，$\operatorname{prj.dim}_A M$ とかく．$M = 0$ のときは $\operatorname{prj.dim} M = -1$ とする．

定義から $\operatorname{prj.dim} M \leq 0$ であることと M が射影的であることは同値である．双対的に入射次元も定義しておこう．

定義 *7.2.2*（入射次元）

M を A 加群とする．M の入射分解の長さの最小値を M の**入射次元 (injective dimension)** といい，$\operatorname{inj.dim}_A M$ とかく．$M = 0$ のときは $\operatorname{inj.dim} M = -1$ とする．

定義からホモロジー次元について次が従う．

補題 *7.2.3*

A を環，M を A 加群とする．このとき；

(i) $\operatorname{prj.dim} M \leq n$ であるとき，任意の $i > n$ と A 加群 N について $\operatorname{Ext}^i(M, N) = 0$ である．
(ii) $\operatorname{inj.dim} M \leq n$ であるとき，任意の $i > n$ と A 加群 N について $\operatorname{Ext}^i(N, M) = 0$ である．

が成り立つ．

この逆が成り立つだけでなく，$n + 1$ についてのみ確かめればよいことがわかる（命題 7.2.5）．まず Ext の長完全列を考えることにより次の補題が従うことを注意しておこう．

補題 *7.2.4*

A 加群 P が射影的であることと，任意の A 加群 N について $\mathrm{Ext}^1(P,N)=0$ であることは同値である．また I が入射的であることは任意の N について $\mathrm{Ext}^1(N,I)=0$ であることと同値である．

証明.

P についてのみ示す．A 加群の完全列；

$$0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_2 \longrightarrow M_3 \longrightarrow 0$$

から得られる Ext の長完全列；

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(P,M_1) \longrightarrow \mathrm{Hom}(P,M_2) \longrightarrow \mathrm{Hom}(P,M_3) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(P,M_1) \longrightarrow \cdots$$

を考えれば $\mathrm{Hom}(P,-)$ が完全関手であることと $\mathrm{Ext}^1(P,M_1)=0$ が同値であることがわかる．（証明終）

これと全く同様にして，A 加群 M が平坦であることと，任意の A 加群 N について $\mathrm{Tor}_1(M,N)=0$ であることが同値だとわかることを注意しておく．

命題 *7.2.5*

A を環，M を A 加群とする．このとき；

(i) $\mathrm{prj.dim}\,M \leq n$ であることと，任意の A 加群 N について $\mathrm{Ext}^{n+1}(M,N)=0$ であることは同値である．
(ii) $\mathrm{inj.dim}\,M \leq n$ であることと，任意の A 加群 N について $\mathrm{Ext}^{n+1}(N,M)=0$ であることは同値である．

が成り立つ．

証明.

(i) のみ示す．($\Longrightarrow$) は明らかなので，逆を見ればよい．M の射影分解 $P_\bullet$ を考える．$P=\mathrm{Im}\,d_n$ ($d_n : P_n \to P_{n-1}$) とおくと，次の２つの完全列；

$$0 \longrightarrow P \longrightarrow P_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} P_{n-2} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0\ ;$$

$$\cdots \longrightarrow P_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} P_n \xrightarrow{d_n} P \longrightarrow 0$$

がある．１つめの完全列より，P が射影的ならば $\mathrm{prj.dim}\,M \leq n$ が従うので，これを示そう．２つめの完全列を P の射影分解とみなすと，$\mathrm{Ext}^1(P,N)=\mathrm{Ext}^{n+1}(M,N)=0$ となっており，P は射影的である．（証明終）

自明ではあるが，この命題の言い換えの形もよく使われるので述べておく．

系 *7.2.6*

A を環，M を A 加群とする．このとき；

(i) $n < \mathrm{prj.dim}\,M$ であることと，ある A 加群 N について $\mathrm{Ext}^n(M,N) \neq 0$ であることは同値である．
(ii) $n < \mathrm{inj.dim}\,M$ であることと，ある A 加群 N について $\mathrm{Ext}^n(N,M) \neq 0$ であることは同値である．

が成り立つ．

同様に Ext の長完全列を考えることで次の２つの命題がわかる．

系 7.2.7

A 加群の完全列；

$$0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_2 \longrightarrow M_3 \longrightarrow 0$$

について，２つの加群の射影元が有限なら残りの 1 つの射影次元も有限．

系 7.2.8

A 加群の完全列；

$$0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_2 \longrightarrow M_3 \longrightarrow 0$$

について，$\mathrm{prj.dim}\, M_2 < \infty$ であるとき，$\mathrm{prj.dim}\, M_1 = \mathrm{prj.dim}\, M_2$ ならば $\mathrm{prj.dim}\, M_3 \leq \mathrm{prj.dim}\, M_1 + 1$ であり，$\mathrm{prj.dim}\, M_1 > \mathrm{prj.dim}\, M_2$ ならば $\mathrm{prj.dim}\, M_3 = \mathrm{prj.dim}\, M_1 + 1$ である．

実際の計算において，Noether 局所環 $(A, \mathfrak{m}, k)$ の上の有限生成加群 M について，長さが $\mathrm{prj.dim}\, M$ であるような（すなわち極小な）射影分解 $P_\bullet$ が同型を除いて一意的に存在することを示すことができる（定理 7.3.7）．それを証明するために，まずは一般の場合について少し考察してみよう．

補題 7.2.9

A を環，M を射影的でない A 加群とする．射影加群 P と全射 $\varepsilon : P \to M$ について；

$$\mathrm{prj.dim}\, M = \mathrm{prj.dim} \ker \varepsilon + 1$$

である．

証明.

$\mathrm{prj.dim}\, M = n \geq 1, K = \ker \varepsilon$ とおく．任意の A 加群 N について，完全列；

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow P \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

が誘導する Ext の完全列（$i \geq 0$）；

$$\longrightarrow \mathrm{Ext}^i(P, N) \longrightarrow \mathrm{Ext}^i(K, N) \longrightarrow \mathrm{Ext}^{i+1}(M, N) \longrightarrow \mathrm{Ext}^{i+1}(P, N) = 0 \longrightarrow$$

について，$i > 0$ とすると P が射影的だから $\mathrm{Ext}^i(K, N) \cong \mathrm{Ext}^{i+1}(M, N)$ がわかる．よって命題 7.2.5 により $n = \infty$ なら $\mathrm{prj.dim}\, K = \infty$ であるからよい．$n < \infty$ のときは $i = n + 1$ とすれば $\mathrm{prj.dim}\, K \leq n - 1$ がわかる．

次に上の完全列を $i = 0$ の場合に考えると，全射；

$$\mathrm{Ext}^0(K, N) = \mathrm{Hom}(K, N) \to \mathrm{Ext}^1(M, N)$$

が存在するから，すべての $i \geq 0$ について $\mathrm{Ext}^{i+1}(M, N) \neq 0$ ならば $\mathrm{Ext}^i(K, N) \neq 0$ である．さて $\mathrm{prj.dim}\, M \not\leq n - 1$ なので $\mathrm{Ext}^n(M, N') \neq 0$ となる A 加群 N' が存在し，$i = n - 1$ とすれば $\mathrm{Ext}^{n-1}(K, N') \neq 0$ がわかる．よって $\mathrm{prj.dim}\, K \not\leq n - 2$ であり，$\mathrm{prj.dim}\, K = n - 1$ が成り立つ．（証明終）

この補題を繰り返し適用するには $\ker d_n$ が射影的にならないような射影分解を構築する必要がある．そこで，次節では射影被覆を導入し，極小な射影分解を定義する．

§ 3　射影被覆と極小射影分解

この節では，前節に引き続きホモロジー次元についての基本的な性質を示す．本節の目標は Auslander–Buchsbaum の公式（定理 7.3.12）であり，そのために極小な射影分解を考察する．前節の最後で示した補題を繰り返し適用するために，**射影被覆**というものを導入しよう．

定義 *7.3.1*（射影被覆）

A を環とし，M を A 加群とする．M の部分加群 N が；

$$\text{任意の } M \text{ の部分加群 } L \text{ について } N + L = M \text{ なら } L = M.$$

を満たすとき，N を M の**余剰部分加群 (superfluous submodule)** という．A 加群 M について射影加群 P と全射 $\varepsilon : P \to M$ が存在して $\ker\varepsilon$ が P の余剰加群のとき，(P, ε) は M の**射影被覆 (projective cover)** であるという．

射影被覆の定義を，余剰部分加群を使わずに射の言葉だけで言い換えよう．

命題 *7.3.2*

A を環とする．A 加群 M と，射影加群 P からの全射 $\varepsilon : P \to M$ があるとする．このとき，以下の条件；

(i) $\varepsilon : P \to M$ は射影被覆である．
(ii) 任意の A 加群 N と，A 線型写像 $\varphi : N \to P$ に対して，$\varepsilon \circ \varphi$ が全射ならば φ は全射である．
(iii) 任意の A 線型写像 $\varphi : P \to P$ に対して，$\varepsilon \circ \varphi = \varepsilon$ ならば φ は同型である．

は同値である．

証明.

(i) $\Longrightarrow$ (ii)

任意の $x \in P$ についてある $y \in N$ が存在して $\varepsilon(\varphi(y)) = \varepsilon(x)$ である．すると $x - \varphi(y) \in \ker\varepsilon$ なので，$\ker\varepsilon + \operatorname{Im}\varphi = P$ となり，$\ker\varepsilon$ が P の余剰部分加群だから $\operatorname{Im}\varphi = P$ である．

(ii) $\Longrightarrow$ (iii)

仮定より φ は全射なので，P が射影的だから $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_P$ となる $\psi : P \to P$ が存在する．すると，次の図式；

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[d, "\psi"] \arrow[dr, "\mathrm{id}"] & \\
P \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\varepsilon"] & P \arrow[dl, "\varepsilon"] \\
M &
\end{tikzcd}$$

が可換なので，$\varepsilon = \varepsilon \circ \psi$ だから (ii) より ψ は全射となり，φ, ψ は同型である．

(iii) $\Longrightarrow$ (i)

L を $L + \ker\varepsilon = P$ となる P の部分加群とする．自然な包含 $\iota : L \to P$ を考えると，$\varepsilon \circ \iota : L \to M$ は全射で

ある．すると，P が射影的なのである $f : P \to L$ が存在して；

$$\begin{tikzcd} P \arrow[d, "f"] \arrow[dr, "\varepsilon"] & & \\ L \arrow[r, "\varepsilon\circ\iota"] \arrow[d, "\iota"] & M \arrow[r] & 0 \\ P \arrow[ur, "\varepsilon"] & & \end{tikzcd}$$

が可換である．よって $\iota \circ f$ は同型で，特に ι は全射である．ゆえに $L = P$ である．

（証明終）

この言い換えにより，射影被覆は存在すれば同型を除いて一意であることがわかる．

命題 *7.3.3*

A を環とする．A 加群 M の射影被覆 $\varepsilon : P \to M$ は，もし存在すれば同型を除いて一意に定まる．

証明.

M が射影被覆 $\varepsilon : P \to M$ を持つとする．ここで射影加群 P' が存在して，$\varepsilon' : P' \to M$ も射影被覆になっていると仮定しよう．すると，P' が射影的だから，次の図式；

$$\begin{tikzcd} P' \arrow[d, dashed, "f"] \arrow[dr, "\varepsilon'"] & & \\ P \arrow[r, "\varepsilon"] & M \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

を可換にするような $f : P' \to P$ が存在する．この図式の P, P' を入れ替えれば $g : P \to P'$ が存在して，それぞれ $\varepsilon' = \varepsilon \circ f, \varepsilon = \varepsilon' \circ g$ である．すると $\varepsilon = \varepsilon \circ (f \circ g)$ なので，射影被覆の言い換えから $f \circ g$ は同型であり，また入れ替えれば $g \circ f$ も同型である．よってそれぞれ全単射で，$P \cong P'$ がわかる．　（証明終）

しかしながら，一般には射影被覆が存在するかどうかわからないという問題がある（例 B.3.1 を見よ．双対概念である入射包絡（定義 8.2.1）は必ず存在する）．すると，次に定義する**極小射影分解**が必ず存在するかわからないという問題が残ってしまう．

定義 *7.3.4*（極小射影分解）

A を環とし，M を A 加群とする．M の射影分解；

$$\cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} 0$$

について，各 $d_i : P_i \to \ker d_{i-1}$（$i = 0$ については全射 $\varepsilon : P_0 \to M$ が射影被覆とし，$d = 1$ については $d_1 : P_i \to \ker \varepsilon$ が射影被覆とする）が射影被覆であるとき，これを**極小射影分解 (minimal projective resolution)** であるという．

射影被覆は存在すれば同型を除いて一意に定まるので，M の極小射影分解は存在すれば同型である．これが極小であることを示すために次の補題を用意する．

補題 *7.3.5*

A を環，M を射影的 A 加群とする．このとき，M の射影被覆 P が存在すれば M と同型である．

証明.
全射 $\varepsilon : P \to M$ があり，$\ker\varepsilon$ は P の余剰部分加群になっているとする．M は射影的なので，図式；

$$\begin{tikzcd} M \arrow[d, dashed, "\varphi"'] \arrow[dr, "\mathrm{id}"] & & \\ P \arrow[r, "\varepsilon"] & M \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

を可換にする $\varphi : M \to P$ があり，ε は分裂全射である．よって $P = \ker\varepsilon + M$ であるが，射影被覆であったことから $P = M$ となる．（証明終）

> 命題 *7.3.6*
>
> A 加群 M について，M は射影的でないとする．M の極小射影分解 $P_\bullet$ が存在して，長さ n であるとする．このとき $\mathrm{prj.dim}\, M = n$ である．

証明.
まず，$\varepsilon : P_0 \to M$ は射影被覆である．M は射影的でないので，補題 7.2.9 より；

$$\mathrm{prj.dim}\, M = \mathrm{prj.dim}\ker\varepsilon + 1$$

である．さて，$d_1 : P_1 \to \ker\varepsilon$ は射影被覆である．ここでもし $\ker\varepsilon$ が射影的であるとすると，補題から $P_1 = \ker\varepsilon$ であり；

$$0 \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \longrightarrow 0$$

が完全となるので矛盾．ゆえに $\ker\varepsilon$ は射影的でなく，補題 7.2.9 から；

$$\mathrm{prj.dim}\, M = \mathrm{prj.dim}\ker d_1 + 2$$

である．これを続けていくと，$\mathrm{prj.dim}\ker d_{n-2} = \mathrm{prj.dim}\ker d_{n-1} + 1$，すなわち；

$$\mathrm{prj.dim}\, M = \mathrm{prj.dim}\ker d_{n-1} + n$$

までは問題なく続けることができる．さて仮定から；

$$0 \longrightarrow P_n \xrightarrow{d_n} P_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \cdots$$

は完全で，$P_n \cong \ker d_{n-1}$ となる．すると $\ker d_{n-1}$ は 0 でない射影加群だから $\mathrm{prj.dim}\ker d_{n-1} = 0$ であり $\mathrm{prj.dim}\, M = n$ となることがわかった．（証明終）

もし長さが無限である（任意の P_n が 0 でない）ような極小射影分解が存在すれば，証明から補題 7.2.9 を無限に適用できるので，この命題は $\mathrm{prj.dim}\, M = \infty$ の場合も成り立っている．これにより，極小射影分解を見つけることができれば $\mathrm{prj.dim}\, M$ を決定することができることがわかった．先程も述べたように最大の問題は射影被覆が存在するかわからないというところにあるが，Noether 局所環上の有限生成加群については極小射影分解になるような射影分解が必ず存在することがわかる．

定理 *7.3.7*（極小自由分解）

Noether 局所環 $(A, \mathfrak{m}, k)$ 上の有限生成加群 M の射影分解 $P_\bullet$ であって，次の条件；

(i) $P_\bullet$ は極小射影分解である．
(ii) 各 P_i は有限生成な自由加群である．
(iii) $P_0 \otimes k = M \otimes k = M/\mathfrak{m}M$ である．

をみたすものが存在する．これを M の**極小自由分解 (minimal free resolution)** という．特に極小射影分解であるから，同型を除いて一意に定まる．

証明.
$M \otimes k = M/\mathfrak{m}M$ の k 線型空間としての生成系 $\{e_i\}$ との代表元 $u_i \in M$ を固定し，$P_0 = \oplus Ae_i$ とおく．このとき，次の A 線型写像；

$$\varepsilon : P_0 \to M; e_i \mapsto u_i$$

を考えると，これは全射である．実際 $M = \mathrm{Im}\,\varepsilon + \mathfrak{m}M$ であることが容易に確かめられ，中山の補題より $M = \mathrm{Im}\,\varepsilon$ であることがわかる．またこれは射影被覆になる．これも $\ker\varepsilon \subset \mathfrak{m}P_0$ であることに注意して中山の補題から従う．同様に $\ker\varepsilon$ について射影被覆 $d_1 : P_1 \to \ker\varepsilon$ がとれる．これを繰り返して完全列；

$$\cdots \longrightarrow P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \longrightarrow 0$$

を得，各 $\ker d_i$ は P_i の余剰部分加群である．よって $P_\bullet$ を各 P_i が自由でありかつ極小射影分解となっているようにとることができた．（証明終）

ここから射影次元を次のように言い換えることができる．

定理 *7.3.8*

$(A, \mathfrak{m})$ を Noether 局所環とし，$M \neq 0$ をその上の有限生成加群とする．このとき；

$$\mathrm{prj.dim}\, M = \sup\{i \in N \mid \mathrm{Tor}_i(M, A/\mathfrak{m}) \neq 0\}$$

である．

ここから，ある $n \geq 0$ を固定したとき，ある $i \geq n$ について $\mathrm{Tor}_i(M, A/\mathfrak{m}) \neq 0$ ならば $n \leq i \leq \mathrm{prj.dim}\, M$ であることがわかり，対偶をとって $\mathrm{prj.dim}\, M < n$ ならばすべての $i \geq n$ について $\mathrm{Tor}_i(M, A/\mathfrak{m}) = 0$ である．これを一般化したものがホモロジカル予想の 1 つ，**剛性 (rigidty) 予想**である．

予想 *7.3.9*（剛性予想）

$(A, \mathfrak{m})$ を局所環とし，M, N を有限生成 A 加群とする．$\mathrm{prj.dim}\, M < \infty$ かつ $\mathrm{Tor}_n(M, N) = 0$ となる n が存在するならば，任意の $i \geq n$ について $\mathrm{Tor}_i(M, N) = 0$ であろう．

A が正則局所環のときには Lichtenbaum (1966) によって証明されている．その他いくつかの条件のもとでは成り立つことがわかっているが，一般には反例が存在する（Heitmann (1993)）．一方 $\mathrm{prj.dim}\, N < \infty$ も仮定すると未解決である．

また，次のように驚くべき性質を示すことができる．

命題 *7.3.10*

$(A, \mathfrak{m})$ を Noether 局所環とし，M をその上の加群とする．このとき，次の条件；

(i) M は自由である．
(ii) M は射影的である．
(iii) M は平坦である．
(iv) $\mathrm{Tor}_1(A/\mathfrak{m}, M) = 0$ である．

は同値である．

証明.

(iv) が (i) を導くことのみ見れば良い．極小自由分解の構成と同じように $\varepsilon : P_0 \to M$ を構成する．ε は全射であったので，$\mathrm{Tor}_1(A/\mathfrak{m}, M) = 0$ ならば $\ker \varepsilon = 0$ であることを示す．完全列；

$$0 \longrightarrow \ker \varepsilon \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

に $- \otimes A/\mathfrak{m}$ を作用させて，Tor の長完全列；

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{Tor}_1(A/\mathfrak{m}, M) \longrightarrow \ker \varepsilon \otimes A/\mathfrak{m} \longrightarrow P_0 \otimes A/\mathfrak{m} \longrightarrow M \otimes A/\mathfrak{m} \longrightarrow 0$$

を得る．P_0 の構成から $P_0 \otimes A/\mathfrak{m} = M \otimes A/\mathfrak{m}$ であるので，$\mathrm{Tor}_1(A/\mathfrak{m}, M) = 0$ だから $\ker \varepsilon \otimes A/\mathfrak{m} = \ker \varepsilon / \mathfrak{m} \ker \varepsilon = 0$ である．よって中山の補題から $\ker \varepsilon = 0$ である．（証明終）

このように Noether 局所環上の有限生成加群では射影的であることと自由であることが同値になるが，Noether 性という条件は外すことができる（それだけでなく有限生成である必要すらないが，長くなるのでここでは省く．松村 (1980)，定理 2.5 をみよ）．

定理 *7.3.11*

$(A, \mathfrak{m})$ を局所環，M を有限生成 A 加群とする．このとき，M が射影加群であることと自由加群であることは同値である．

証明.

M を射影加群とする．極小自由分解の構成から，有限生成自由加群 P_0 からの全射 $\varepsilon : P_0 \to M$ が存在する．前命題と同様の議論から $\ker \varepsilon \otimes A/\mathfrak{m} = 0$ である（ここまで Noether 性は要らず，$\ker \varepsilon$ が有限生成であることに Noether 性を使った）．ここで射影的であることと自由加群の直和因子であることは同値であったことと，その証明（定理 1.7.4）を思い出すと，$P_0 \cong M \oplus \ker \varepsilon$ であるので，とくに $\ker \varepsilon \cong P_0/M$ であり，P_0 は有限生成自由加群なので $\ker \varepsilon$ も有限生成である．よって中山の補題が使えて $\ker \varepsilon = 0$ である．（証明終）

定理 *7.3.12*（Auslander–Buchsbaum の公式）

$(A, \mathfrak{m})$ を Noether 局所環とし，$M \neq 0$ をその上の射影次元有限な有限生成加群とする．このとき；

$$\mathrm{prj.dim}\, M + \mathrm{depth}\, M = \mathrm{depth}\, A$$

が成り立つ．

証明.

$d = \operatorname{depth} A$ とおく．$r = \operatorname{prj.dim} M$ についての帰納法で示す．$r = 0$ のとき，M は前定理より自由加群だから，$\operatorname{depth} M = \operatorname{depth} A$ である．

$r = 1$ のときは，M の極小自由分解を考えて；

$$0 \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

とする．$\operatorname{Ext}^{d-1}(A/\mathfrak{m}, M) \neq 0$ を示す．

$$0 \longrightarrow \operatorname{Ext}^{d-1}(A/\mathfrak{m}, M) \longrightarrow \operatorname{Ext}^{d}(A/\mathfrak{m}, P_1) \longrightarrow \operatorname{Ext}^{d}(A/\mathfrak{m}, P_0) \longrightarrow \cdots$$

において $\operatorname{Ext}^d(A/\mathfrak{m}, P_1) \to \operatorname{Ext}^d(A/\mathfrak{m}, P_0)$ を考える．$d_1 : P_1 \to P_0$ において極小自由分解の構成から $\operatorname{Im} d_1 = \ker \varepsilon \subset \mathfrak{m}P_0$ であったので，$P_1 \to P_0$ の誘導する $\operatorname{Hom}(A/\mathfrak{m}, P_1) \to \operatorname{Hom}(A/\mathfrak{m}, P_0)$ は 0 である．実際，任意の $f : K \to P_1$ に対して，$d_1(f(k)) \subset \mathfrak{m}P_0$ であり，これに k をテンソルすると $d_1(f(k))/\mathfrak{m}d_1(f(k)) \subset \mathfrak{m}(M/\mathfrak{m}M) = 0$ であるから $d_1(f(k)) = \mathfrak{m}d_1(f(k))$ となり，中山の補題から $d_1(f(k)) = 0$ である．ゆえにゼロ射の持ち上げだから $\operatorname{Ext}^d(A/\mathfrak{m}, P_1) \to \operatorname{Ext}^d(A/\mathfrak{m}, P_0)$ は 0 であり，上の完全列から $\operatorname{Ext}^{d-1}(A/\mathfrak{m}, M) = \operatorname{Ext}^d(A/\mathfrak{m}, P_1) \neq 0$ である．

次に $1 < r$ とし，$r - 1$ まで成立しているとする．適当な n について全射 $A^n \to M$ が存在し，その核を K とおけば；

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow A^n \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

が完全である．系 7.2.8 より $\operatorname{prj.dim} K = r - 1$ である．帰納法の仮定から $\operatorname{depth} K = d - r + 1$ である．よって $\operatorname{depth} M = d - r$ を示せばよい．定理 7.1.3 より $i < d - r + 1$ なら $\operatorname{Ext}^i(A/\mathfrak{m}, K) = 0, \operatorname{Ext}^{d-r+1}(A/\mathfrak{m}, K) \neq 0$ である．上の完全列が導く Ext の長完全列；

$$\cdots \longrightarrow \operatorname{Ext}^i(A/\mathfrak{m}, A^n) \longrightarrow \operatorname{Ext}^i(A/\mathfrak{m}, M) \longrightarrow \operatorname{Ext}^{i+1}(A/\mathfrak{m}, K) \longrightarrow \operatorname{Ext}^{i+1}(A/\mathfrak{m}, A^n) \longrightarrow \cdots$$

を考えると，$i < d - r$ ならば $i + 1 < d - r + 1 \leq d$ なので；

$$0 \longrightarrow \operatorname{Ext}^i(A/\mathfrak{m}, M) \longrightarrow \operatorname{Ext}^{i+1}(A/\mathfrak{m}, K) \longrightarrow 0$$

となり $\operatorname{Ext}^i(A/\mathfrak{m}, M) = \operatorname{Ext}^{i+1}(A/\mathfrak{m}, K) = 0$ である．また $i = d - r$ のとき；

$$0 \longrightarrow \operatorname{Ext}^{d-r}(A/\mathfrak{m}, M) \longrightarrow \operatorname{Ext}^{d-r+1}(A/\mathfrak{m}, K) \longrightarrow \operatorname{Ext}^{d-r+1}(A/\mathfrak{m}, A^n) \longrightarrow \cdots$$

であり，$r > 1$ だから $d - r + 1 < d$ となり $\operatorname{Ext}^{d-r}(A/\mathfrak{m}, M) = \operatorname{Ext}^{d-r+1}(A/\mathfrak{m}, K) \neq 0$ である．

以上を組み合わせて証明が完了した．（証明終）

§ 4　大域次元と Serre の定理

この節では，環の**大域次元 (global dimension)** を導入して，Serre による正則局所環の特徴づけと Serre の定理（定理 5.6.9）の証明を行おう．まず次の事実を注意しておく．

命題 *7.4.1*

A を環とする．$\sup\{\operatorname{prj.dim} M \mid M : A \in \mathbf{Mod}(A)\} = \sup\{\operatorname{inj.dim} M \mid M \in \mathbf{Mod}(A)\}$ である．

証明.

$s = \mathrm{gl.dim}\, A, t = \sup\{\mathrm{inj.dim}\, M \mid M \in \mathbf{Mod}(A)\}$ とおく．まず $s = \infty$ であるとすると，任意の $n \geq 0$ に対して $n < \mathrm{prj.dim}\, M$ なる A 加群 M が存在する．すると系 7.2.6 よりある A 加群 N が存在して $\mathrm{Ext}^{n+1}(M, N) \neq 0$ となり，これは $n < \mathrm{inj.dim}\, M$ を意味する．よって t も有限ではありえない．

次に $s < \infty$ であるとする．$s < t$ すなわち $s < \mathrm{inj.dim}\, M$ なる A 加群 M があるとすると，ある A 加群 N が存在して $\mathrm{Ext}^{s+1}(N, M) \neq 0$ であるので，これは $s < \mathrm{prj.dim}\, N$ を導き矛盾する．同様に $s > t$ を仮定すると，$t < \mathrm{inj.dim}\, N$ であるような N が存在して矛盾する．（証明終）

これによって定まる量を環の大域次元という．

定義 *7.4.2*（大域次元）

環 A について；

$$\mathrm{gl.dim}\, A = \sup\{\mathrm{prj.dim}\, M \mid M : A \in \mathbf{Mod}(A)\} = \sup\{\mathrm{inj.dim}\, M \mid M \in \mathbf{Mod}(A)\}$$

と定義する．これを A の**大域次元 (global dimension)** という．

大抵の環は $\mathrm{gl.dim}\, A = \infty$ なので，大域次元が有限となる環に興味がある．大域次元は A のイデアルによる商環のみを確かめればよいことを示そう．

命題 *7.4.3*

A を環，M を A 加群とする．このとき，与えられた n について $\mathrm{inj.dim}\, M \leq n$ であることと，任意の A のイデアル I について $\mathrm{Ext}_A^{n+1}(A/I, M) = 0$ であることは同値である．

証明.

A 加群 M が入射的であることと，任意の A のイデアル I について $\mathrm{Ext}^1(A/I, M) = 0$ であることが同値であることを示せば十分である．M が入射的なら Ext^1 が消えることは明らかなので，逆を見ればよい．Baer の判定法（定理 1.7.6）より，$\mathrm{Hom}(-, M)$ が自然な $0 \to I \to A$ の完全性を保てばよい．それは完全列；

$$0 \longrightarrow I \longrightarrow A \longrightarrow A/I \longrightarrow 0$$

に対して $\mathrm{Hom}(-, M)$ が導く長完全列；

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(A/I, M) \longrightarrow \mathrm{Hom}(A, M) \longrightarrow \mathrm{Hom}(I, M) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(A/I, M) = 0 \longrightarrow \cdots$$

より成り立つことがわかり，M は入射的である．（証明終）

系 *7.4.4*（Auslander）

$\mathrm{gl.dim}\, A = \sup\left\{\mathrm{prj.dim}\, A/I \,\middle|\, I : A \text{ のイデアル}\right\}$ が成り立つ．

証明.

右辺を n とおく．明らかに $n \leq \mathrm{gl.dim}\, A$ だから逆をみればよい．$n < \infty$ としてよい．任意の A 加群 N について，$\mathrm{Ext}^{n+1}(A/I, N) = 0$ であるので，先の命題から $\mathrm{inj.dim}\, N \leq n$ である．よって任意の A 加群 M について $\mathrm{Ext}^{n+1}(M, N) = 0$ であり，$\mathrm{prj.dim}\, M \leq n$ である．よって示された．（証明終）

Noether 性を課すことでさらに話は簡単になる．

定理 *7.4.5*

$(A, \mathfrak{m})$ を Noether 局所環とする．このとき $\mathrm{gl.dim}\, A = \mathrm{prj.dim}\, A/\mathfrak{m}$ である．

証明.

$\mathrm{prj.dim}\, A/\mathfrak{m} = \infty$ なら明らかであるので，有限であると仮定する．$n = \mathrm{prj.dim}\, A/\mathfrak{m}$ とおき，任意の有限生成 A 加群 M について $\mathrm{prj.dim}\, M \leq n$ であることを，$\dim M$ についての帰納法で示す（系 7.4.4 により M は有限生成に限ってよい）．

$\dim M = 0$ とする．このとき M を $A/\mathrm{Ann}\, M$ 加群とみると，M は Noether かつ Artin 加群なので組成列；

$$0 = M_0 \subsetneq M_1 \subsetneq \cdots \subsetneq M_r = M$$

を持つ（命題 2.2.7）．$A/\mathrm{Ann}\, M$ は唯一の極大イデアルを $\mathfrak{m}$ とする局所環であるから，命題 2.2.4 により各 $1 \leq i \leq r$ について $M_i/M_{i-1} \cong A/\mathfrak{m}$ である．よって；

$$0 \longrightarrow M_{i-1} \longrightarrow M_i \longrightarrow A/\mathfrak{m} \longrightarrow 0$$

が完全である．任意の A 加群 N について $\mathrm{Ext}^{n+1}(A/\mathfrak{m}, N) = 0$ であるので，$i = 1$ から順に考えて $\mathrm{Ext}^{n+1}(M, N) = 0$ である．よって $\mathrm{prj.dim}\, M \leq n$ である．

次に $d = \dim M > 0$ とし，$d-1$ まで正しいと仮定する．まずは $\mathrm{depth}\, M > 0$ のときを考えると，M 正則元 $a \in \mathfrak{m}$ が存在する．このとき $\dim M/aM = \dim M - 1$ である．よって帰納法の仮定から $\mathrm{prj.dim}\, M/aM \leq n$ である．次の完全列；

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{a\cdot} M \longrightarrow M/aM \longrightarrow 0$$

が誘導する Ext の長完全列を考えると，任意の A 加群 N について $\mathrm{Ext}^{n+1}(M/aM, N) = 0$ であり；

$$\mathrm{Ext}^n(M/aM, N) \longrightarrow \mathrm{Ext}^n(M, N) \xrightarrow{a\cdot} \mathrm{Ext}^n(M, N) \longrightarrow \mathrm{Ext}^{n+1}(M/aM, N) = 0$$

から $a\,\mathrm{Ext}^n(M, N) = \mathrm{Ext}^n(M, N)$ であるので，中山の補題から $\mathrm{Ext}^n(M, N) = 0$ である．よって $\mathrm{prj.dim}\, M \leq n-1$ である．

次に $\mathrm{depth}\, M = 0$ と仮定する．$\Gamma_{\mathfrak{m}}(M) = \left\{x \in M \,\middle|\, \text{ある } n \geq 0 \text{ について } \mathfrak{m}^n x = 0 \text{ である.}\right\}$ とおく．補題 5.7.6 を局所環の場合に考えると $\mathrm{depth}\, M = 0$ であることと $\mathfrak{m} \in \mathrm{Ass}\, M$ であることは同値であるから，これは 0 ではない．短完全列；

$$0 \longrightarrow \Gamma_{\mathfrak{m}}(M) \longrightarrow M \longrightarrow M/\Gamma_{\mathfrak{m}}(M) \longrightarrow 0$$

を考えよう．まず $\dim \Gamma_{\mathfrak{m}}(M) = 0$ であることを示す．$\Gamma_{\mathfrak{m}}(M)$ の生成系 $\{u_1, \ldots, u_r\}$ をとる．各 i について $\mathfrak{m}^{n_i} u_i = 0$ となる n_i がある．その最大値を n とすれば $\mathfrak{m}^n \subset \mathrm{Ann}\, \Gamma_{\mathfrak{m}}(M)$ である．よって命題 5.2.5 より $A/\mathrm{Ann}\, \Gamma_{\mathfrak{m}}(M)$ は Artin，すなわち $\dim \Gamma_{\mathfrak{m}}(M) = 0$ である．よって $\mathrm{prj.dim}\, \Gamma_{\mathfrak{m}}(M) \leq n$ となる．ゆえに $M = \Gamma_{\mathfrak{m}}(M)$ のときは題意が正しい．そうでないとしたとき，$M/\Gamma_{\mathfrak{m}}(M)$ について $\mathrm{depth}\, M/\Gamma_{\mathfrak{m}}(M) > 0$ であることを示す．補題 5.7.6 より $\mathfrak{m} \notin \mathrm{Ass}\, M/\Gamma_{\mathfrak{m}}(M)$ であることを示せばよい．ある $x \in M$ について $\mathfrak{m} = \mathrm{Ann}(x + \Gamma_{\mathfrak{m}}(M))$ であるとする．$\mathfrak{m}$ の生成系 $\{a_i\}$ をとれば，任意の i について $a_i \mathfrak{m}^{n_i} x = 0$ となる x_i がとれるので，最大値を n として $\mathfrak{m} \cdot \mathfrak{m}^n x = \mathfrak{m}^{n+1} x = 0$ である．よって $x \in \Gamma_{\mathfrak{m}}(M)$ となる．ゆえに $\mathfrak{m} \notin \mathrm{Ass}\, M/\Gamma_{\mathfrak{m}}(M)$ となり，$\mathrm{depth}\, M/\Gamma_{\mathfrak{m}}(M) > 0$ である．よって $\mathrm{prj.dim}\, M/\Gamma_{\mathfrak{m}}(M) \leq n-1$ である．よっ

て，$\mathrm{Ext}^{n+1}(M/\Gamma_{\mathfrak{m}}(M), N) = \mathrm{Ext}^{n+1}(\Gamma_{\mathfrak{m}}(M), N) = 0$ であるから $\mathrm{Ext}^{n+1}(M, N) = 0$ となり $\mathrm{prj.dim}\, M \le n$ である．（証明終）

証明中に登場する $\Gamma_{\mathfrak{m}}(M)$ は左完全関手であり，これが導く右導来関手は**局所コホモロジー**と呼ばれることを注意しておく．

Auslander–Buchsbaum の公式（定理 7.3.12）より容易に次の補題を得る．

補題 *7.4.6*

$(A, \mathfrak{m})$ を Noether 局所環とし，M をそのうえの有限生成 A 加群とする．M 正則元 $a \in \mathfrak{m}$ について；

$$\mathrm{prj.dim}\, M/aM = \mathrm{prj.dim}\, M + 1$$

が成り立つ．

証明.

まず $\mathrm{prj.dim}\, M = \infty$ のときを考える．もし $\mathrm{prj.dim}\, M/aM = n < \infty$ ならば，短完全列；

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{a\cdot} M \longrightarrow M/aM \longrightarrow 0$$

を考えて $\mathrm{Ext}^{n+1}(M/aM, N) = 0$ であるから，先の定理と同様に $\mathrm{Ext}^{n}(M, N) = 0$ となり仮定に反する．よって $\mathrm{prj.dim}\, M/aM = \infty$ となり仮定は成り立つ．

次に有限個の場合を考えよう．$\mathrm{prj.dim}\, M = n < \infty$ とおく．系 7.2.7 より $\mathrm{prj.dim}\, M/aM$ も有限である．よって Auslander–Buchsbaum の公式から；

$$\mathrm{prj.dim}\, M/aM = \mathrm{depth}\, A - \mathrm{depth}\, M/aM = \mathrm{depth}\, A - (\mathrm{depth}\, A - 1) = \mathrm{prj.dim}\, M + 1$$

であることがわかる．（証明終）

また，$a \in \mathfrak{m}$ が A 正則という条件を足すことで A/aA 加群としての射影次元を上から抑えることができる．

補題 *7.4.7*

$(A, \mathfrak{m})$ を Noether 局所環とし，M をそのうえの有限生成 A 加群とする．M 正則元 $a \in \mathfrak{m}$ について A 正則でもあるならば；

$$\mathrm{prj.dim}_{A/aA}\, M/aM \le \mathrm{prj.dim}_{A}\, M$$

が成り立つ．

証明.

$h = \mathrm{prj.dim}_A\, M$ とおく．$h < \infty$ と仮定してよい．h についての帰納法で示す．$h = 0$ のとき，M は自由なので $M \cong A^n$ とすると $M/aM \cong (A/aA)^n$ より A/aA 加群として自由だから $\mathrm{prj.dim}_{A/aA}\, M/aM = 0$ となり正しい．$h > 1$ とし，$h - 1$ まで正しいと仮定する．自由加群からの全射 $\varphi : F \to M$ を考えよう．次の図式；

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \ker\varphi & \longrightarrow & F & \xrightarrow{\varphi} & M & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle a\cdot} & & \downarrow{\scriptstyle a\cdot} & & \downarrow{\scriptstyle a\cdot} & & \\
0 & \longrightarrow & \ker\varphi & \longrightarrow & F & \xrightarrow{\varphi} & M & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

を考える．a は M 正則だから $a\cdot : M \to M$ は単射で，蛇の補題から；

$$0 \longrightarrow \ker\varphi/a\ker\varphi \longrightarrow F/aF \longrightarrow M/aM \longrightarrow 0$$

が完全．系 7.2.8 より $\operatorname{prj.dim}\ker\varphi = h-1$ だから，帰納法の仮定から $\operatorname{prj.dim}_{A/aA}\ker\varphi/a\ker\varphi \leq h-1$ である．再び系 7.2.8 より $\operatorname{prj.dim}_{A/aA}\ker\varphi/a\ker\varphi = \operatorname{prj.dim}_{A/aA} M/aM-1$ なので $\operatorname{prj.dim}_{A/aA} M/aM \leq h-1+1 = h$ である．（証明終）

補題 7.4.6 により次の定理が従う．

定理 *7.4.8*（Auslander–Buchsbaum）

$(A, \mathfrak{m})$ を d 次元の正則局所環とすると，$\operatorname{gl.dim} A = d$ である．

証明.

$x_1, \ldots, x_d \in \mathfrak{m}$ を正則巴系とすると，これは A 正則列をなし $\operatorname{prj.dim} A/\mathfrak{m} = \operatorname{prj.dim} A + d = d$ である．よって定理 7.4.5 より $\operatorname{gl.dim} A = \operatorname{prj.dim} A/\mathfrak{m} = d$ である．（証明終）

驚くべきはこれの逆が成り立つ．すなわち，局所環の大域次元が有限であることと正則であることは同値である．

定理 *7.4.9*（Serre）

$(A, \mathfrak{m}, k)$ を $\operatorname{gl.dim} A = d < \infty$ となる Noether 局所環とする．このとき A は d 次元の正則局所環である．

証明.

$d = \operatorname{gl.dim} A$ とおく．また $r = \operatorname{em.dim} A = \dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ とおこう．まず $r = 0$ とする．$\mathfrak{m} = \mathfrak{m}^2$ であるので，中山の補題から $\mathfrak{m} = 0$ である．よって A は体となり，$\operatorname{gl.dim} A = \operatorname{prj.dim} A = 0$ なので題意が成り立つ．逆に $\operatorname{gl.dim} A = 0$ とすると，$\operatorname{prj.dim} k = 0$ となり k は自由だから $k \cong A$ となり，A は体となる．

よって $r, d > 0$ と仮定してよい．r についての帰納法で示す．$r-1$ まで正しいとしよう．$\mathfrak{m} \neq 0$ であり，中山の補題から $\mathfrak{m} \neq \mathfrak{m}^2$ である．まず $a \in \mathfrak{m} \setminus \mathfrak{m}^2$ を A 正則にとれることを示す．任意の a が A 正則でないと仮定する．すると $\mathfrak{m} \setminus \mathfrak{m}^2 \subset \bigcup_{P \in \operatorname{Ass} A} P$ である．よって $\mathfrak{m} \subset \bigcup_{P \in \operatorname{Ass} A} P \cup \mathfrak{m}^2$ であるので，Prime avoidance からある $P \in \operatorname{Ass} A$ について $\mathfrak{m} \subset P$ である（$\mathfrak{m} \not\subset \mathfrak{m}^2$ であるから）．$\mathfrak{m}$ は極大なので $\mathfrak{m} \in \operatorname{Ass} A$ となり，単射 $k \hookrightarrow A$ が存在する（$\mathfrak{m} = \operatorname{Ann} x$ としたとき $a + \mathfrak{m} \mapsto ax$ とすればよい）．よって短完全列；

$$0 \longrightarrow k \longrightarrow A \longrightarrow A/k \longrightarrow 0$$

について，$\operatorname{Tor}_d(A, k) = \operatorname{Tor}_{d+1}(A, k) = 0, \operatorname{Tor}_d(k, k) \neq 0$ だから Tor の長完全列を考えて；

$$0 \longrightarrow \operatorname{Tor}_{d+1}(A/k, k) \longrightarrow \operatorname{Tor}_d(k, k) \longrightarrow 0$$

が完全であり $\operatorname{Tor}_{d+1}(A/k, k) \neq 0$ となるので定理 7.3.8 より $d+1 \leq \operatorname{prj.dim} A/k$ であるが，これは $d = \operatorname{gl.dim} A$ であるので矛盾．

このとき，A/aA が $\operatorname{em.dim} A/aA = r-1$ となる大域次元有限な環であることを示そう．$r = \dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ であるので，$a_1, \ldots, a_r \in \mathfrak{m}$ を $a_i + \mathfrak{m}^2$ が $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ の基底になるようにとれる．ここで $a_1 = a$ としてよい．$I = (a_2, \ldots, a_r)$ とおくと，$aA + I = \mathfrak{m}$ であり，$\operatorname{em.dim} A/aA = \dim_k(\mathfrak{m}/aA)/(\mathfrak{m}/aA)^2 = r-1$ である．また $\mathfrak{m}/aA = (aA + I)/aA \cong I/(I \cap aA)$ である．ここで任意の $ab \in aA \cap I$ をとると，ある $c_i \in A$ により

$ab = c_2a_2 + \cdots + c_ra_r$ とかけている．よって $ba_1 - c_2a_2 - \cdots - c_ra_r = 0$ である．これを k 加群 $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ におとすと，$a_i + \mathfrak{m}^2$ は線型独立であるからすべての係数は k でゼロ，つまり $b, c_i \in \mathfrak{m}$ でなければならない．よって $I \cap aA \subset a\mathfrak{m}$ である．よって；

$$\mathfrak{m}/a\mathfrak{m} \to \mathfrak{m}/aA = I/(I \cap aA) \to \mathfrak{m}/a\mathfrak{m}$$

が恒等だから $\mathfrak{m}/a\mathfrak{m} \to \mathfrak{m}/aA$ は分裂する．よって $\mathfrak{m}/aA$ は $\mathfrak{m}/a\mathfrak{m}$ の直和因子である．ゆえに $\mathrm{prj.dim}_{A/aA}\,\mathfrak{m}/aA \le \mathrm{prj.dim}_{A/aA}\,\mathfrak{m}/a\mathfrak{m}$ であり，補題 7.4.7 より；

$$\mathrm{prj.dim}_{A/aA}\,k - 1 = \mathrm{prj.dim}_{A/aA}\,\mathfrak{m}/aA \le \mathrm{prj.dim}_A\,\mathfrak{m} = \mathrm{prj.dim}_A\,k - 1$$

よって $\mathrm{gl.dim}\,A/aA < \infty$ であり，帰納法の仮定から A/aA は正則である．ゆえに $\dim A/aA = d - 1$ となり，$\dim A = \dim A/aA + 1$ だから A も d 次元の正則局所環である．最後に前の定理を使えばよい．（証明終）

これが可換環論にホモロジー代数を導入したことによる大結果の最初の 1 つである．この定理により次の定理がほぼ自明と化した．

定理 *7.4.10*（Serre の定理）

A を正則局所環とすると，任意の $P \in \mathrm{Spec}\,A$ について A_P も正則局所環である．

証明.

前定理から $\mathrm{prj.dim}_A\,A/P < \infty$ であり，有限な極小自由分解を得る．これを P で局所化して A_P/PA_P の極小自由分解を得て，$\mathrm{prj.dim}_{A_P}\,A_P/PA_P < \infty$ であることがわかる．（証明終）

第8章　Gorensteinホモロジー代数入門

—Introduction of Gorenstein Homological Algebra

§ 1　Gorenstein 環

この節では，Noether 局所環についての入射次元について考察することで，CM 環のうちでも重要なクラスをなす **Gorenstein 環**を定義し，その特徴づけを与えよう．

定義 *8.1.1*（Gorenstein 環）

Noether 局所環 $(A, \mathfrak{m})$ について $\mathrm{inj.dim}\, A < \infty$ であるとき，A は **Gorenstein 局所環**であるという．一般の Noether 環 A については，任意の $P \in \mathrm{Spec}\, A$ について A_P が Gorenstein のとき A は **Gorensitein 環**であるという．

まず Gorenstein 局所環が Gorenstein であることを示さねばならない．

補題 *8.1.2*

A を Noether 環とし，$S \subset A$ を積閉集合とする．E が入射的 A 加群ならば，局所化 E_S も入射的 A_S 加群である．

証明.

A_S のイデアルはすべて A のイデアル I により I_S とかけている．$0 \longrightarrow I \longrightarrow A$ について；

$$\mathrm{Hom}(A, E) \longrightarrow \mathrm{Hom}(I, E) \longrightarrow 0$$

が完全で，I が有限生成だから $- \otimes A_S$ を施して；

$$\mathrm{Hom}_{A_S}(A_S, E_S) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{A_S}(I_S, E_S) \longrightarrow 0$$

が完全である．よって E_S は入射的 A_S 加群．（証明終）

命題 *8.1.3*

A が Gorenstein 局所環ならば，任意の $P \in \mathrm{Spec}\, A$ に対して，A_P も Gorenstein である．

証明.

A の入射分解を；

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow I^0 \longrightarrow \dots \longrightarrow I^n \longrightarrow 0$$

とすると，P で局所化して；

$$0 \longrightarrow A_P \longrightarrow I^0_P \longrightarrow \dots \longrightarrow I^n_P \longrightarrow 0$$

が A_P の入射分解となり，$\mathrm{inj.dim}_{A_P} A_P \leq n$ である．（証明終）

命題 7.4.3 を Noether 性を課すことでより簡単に書き換えるところから始めよう．

命題 *8.1.4*

A を Noether 環とし，M を A 加群とする．このとき，与えられた n について $\operatorname{inj.dim} M \leq n$ であることと，任意の $P \in \operatorname{Spec} A$ について $\operatorname{Ext}^{n+1}(A/P, M) = 0$ であることは同値である．

証明.

$(\Longrightarrow)$ は明らか．任意のイデアル I について $\operatorname{Ext}^{n+1}(A/I, M) = 0$ を示せばよい．系 2.3.11 より；

$$A/I = N_r \supset \cdots \supset N_1 \supset N_0 = 0$$

で, 各 i について $N_i/N_{i-1} \cong A/P_i$ となる $P_i \in \operatorname{Spec} A$ が存在するものがとれる．これから $\operatorname{Ext}^{n+1}(A/P_i, M) = 0$ により $\operatorname{Ext}^{n+1}(A/I, M) = 0$ となることがわかり，題意が従う．（証明終）

この証明から次の補題を定式化することができる．

補題 *8.1.5*

A を Noether 環とし，M を A 加群，N を有限生成 A 加群とする．与えられた n について，任意の $P \in \operatorname{Supp} N$ について $\operatorname{Ext}^n(A/P, M) = 0$ ならば $\operatorname{Ext}^n(N, M) = 0$ である．

補題 *8.1.6*

$(A, \mathfrak{m})$ を Noether 局所環とする．$\mathfrak{m} \neq P \in \operatorname{Spec} A$ と有限生成 A 加群 M について，任意の $P \neq Q \in V(P)$ に対して $\operatorname{Ext}^{n+1}(A/Q, M) = 0$ ならば $\operatorname{Ext}^n(A/P, M) = 0$ である．

証明.

任意の $a \in \mathfrak{m} \setminus P$ をとる．このとき；

$$0 \longrightarrow A/P \xrightarrow{a\cdot} A/P \longrightarrow A/(P+aA) \longrightarrow 0$$

が完全である．よって；

$$\operatorname{Ext}^n(A/P, M) \xrightarrow{a\cdot} \operatorname{Ext}^n(A/P, M) \longrightarrow \operatorname{Ext}^{n+1}(A/(P+aA), M)$$

が誘導される．ここで $V(P+aA) \subset V(P) \setminus \{P\}$ であるから，仮定と補題により $\operatorname{Ext}^{n+1}(A/(P+aA), M) = 0$ である．ゆえに中山の補題から $\operatorname{Ext}^n(A/P, M) = 0$ となる．（証明終）

定理 *8.1.7*

$(A, \mathfrak{m}, k)$ を Noether 局所環とし，M を有限生成 A 加群とする．このとき；

$$\operatorname{inj.dim} M = \sup \left\{ i \in \mathbb{N} \,\middle|\, \operatorname{Ext}^i(k, M) \neq 0 \right\}$$

である．

証明.

$n = \sup \left\{ i \in \mathbb{N} \,\middle|\, \operatorname{Ext}^i(k, M) \neq 0 \right\}$ とおこう．$n \leq \operatorname{inj.dim} M$ は明らかである．逆を示そう．任意の $P \in \operatorname{Spec} A$ をとる．また $\operatorname{coht} P = d$ とし；

$$P = P_0 \subsetneq \cdots \subsetneq P_d = \mathfrak{m}$$

を考える．ここで $\mathrm{Ext}^{n+d+1}(k, M) = 0$ なので，補題から $\mathrm{Ext}^{n+d}(A/P_{d-1}, M) = 0$ である．次に，構成から同様に $P_{d-2} \subsetneq Q \subsetneq \mathfrak{m}$ となる Q について $\mathrm{Ext}^{n+d}(A/Q, M) = 0$ なので，補題から $\mathrm{Ext}^{n+d-1}(A/P_{d-2}, M) = 0$ である．これを繰り返して $\mathrm{Ext}^{n+1}(A/P, M) = 0$ となる．よって命題 8.1.4 より $\mathrm{inj.dim}\, M \leq n$ である．（証明終）

補題 *8.1.8*

A を環とし，M を A 加群とする．M 正則元 $a \in A$ について A 正則でもあるならば，$aN = 0$ となる任意の A 加群 N について；

$$\mathrm{Ext}_A^{i+1}(N, M) \cong \mathrm{Ext}_{A/aA}^{i}(N, M/aM)$$

である．

証明.

$T^i = \mathrm{Ext}_A^{i+1}(-, M) : \mathbf{Mod}(A/aA) \to \mathbf{Ab}$ とおく．これが $\mathrm{Hom}_{A/aA}(-, M/aM)$ の導来関手に一致することを示そう．系 6.6.9 により，$T^\bullet$ が $T^0 = \mathrm{Hom}_{A/aA}(-, M/aM)$ であるような普遍的反変 δ 関手であることを見ればよい．まず N が $aN = 0$，すなわち A/aA 加群であるとき $\mathrm{Hom}_A(N, M) = 0$ であることを注意しておく．A 加群の完全列；

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{a\cdot} M \longrightarrow M/aM \longrightarrow 0$$

から；

$$\mathrm{Hom}_A(N, M) = 0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(N, M/aM) \longrightarrow \mathrm{Ext}_A^1(N, M) \xrightarrow{a\cdot} \cdots$$

が誘導され，命題 6.7.10 により $a\cdot$ は 0 なので；

$$T^0(N) = \mathrm{Ext}_A^1(N, M) = \mathrm{Hom}_A(N, M/aM) = \mathrm{Hom}_{A/aA}(N, M/aM)$$

である．また A/aA 加群の任意の短完全列;

$$0 \longrightarrow N_1 \longrightarrow N_2 \longrightarrow N_3 \longrightarrow 0$$

について $\mathrm{Hom}_A(N_i, M) = 0$ なので，$\mathrm{Hom}_A(-, M)$ の導く長完全列；

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ext}_A^1(N_3, M) \longrightarrow \mathrm{Ext}_A^1(N_2, M) \longrightarrow \mathrm{Ext}_A^1(N_1, M) \longrightarrow \cdots$$

が得られる．連結射と可換なことは明らかなので，$T^\bullet$ が反変 δ 関手になる．普遍的であることを示すために，余消去的であることを見よう．a が A 正則なので，A 加群の完全列；

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{a\cdot} A \longrightarrow A/aA \longrightarrow 0$$

から $\mathrm{prj.dim}_A\, A/aA = 1$ である．よって $i > 0$ について $\mathrm{Ext}_A^{i+1}(A/aA, M) = 0$ だからすべての A/aA 自由加群 F について $\mathrm{Ext}_A^{i+1}(F, M) = 0$ である．ゆえに各 T^i は余消去的である．よって $T^\bullet$ は普遍的であることがわかった．（証明終）

定理 8.1.7 と上の補題から次の定理を得る．

定理 *8.1.9*

$(A,\mathfrak{m},k)$ を Noether 局所環，M を有限生成 A 加群とする．A 正則元 $a\in\mathfrak{m}$ について M 正則でもあるならば；

$$\operatorname{inj.dim}_{A/aA}(M/aM)=\operatorname{inj.dim}_A M-1$$

である．

これらの準備により，次の結果を示すことができる．

定理 *8.1.10*（Gorenstein 環の特徴づけ）

$(A,\mathfrak{m},k)$ を d 次元の Noether 局所環とする．このとき次の条件；

(i) A は Gorenstein である．
(ii) $\operatorname{inj.dim}A=d$ である．
(iii) $\operatorname{Ext}_A^d(k,A)\cong k$ であり，任意の $i\neq d$ について $\operatorname{Ext}_A^i(k,A)=0$ である．
(iv) A は CM 環であり，$\operatorname{Ext}_A^d(k,A)\cong k$ である．
(v) A は CM 環であり，すべての巴系で生成されるイデアルは既約である．
(vi) A は CM 環であり，巴系から生成されるイデアルで既約なものが存在する．
(vii) ある $i>d$ が存在して，$\operatorname{Ext}_A^i(k,A)=0$ となる．

は同値である．

証明.

(i) $\Longrightarrow$ (ii)

$\operatorname{inj.dim}A=r,\dim A=d$ とおく．$P\in\operatorname{Spec}A$ を；

$$P=P_0\subsetneq P_1\subsetneq\cdots\subsetneq P_d=\mathfrak{m}$$

となるようにとる．このとき P は極小だから $PA_P\in\operatorname{Ass}_{A_P}A_P$ で，$\operatorname{Hom}_{A_P}(k(P),A_P)\neq 0$ であるから，ここで $\operatorname{Ext}_A^d(k,A)=0$ ならば補題 8.1.6 から $\operatorname{Ext}_A^{d-1}(A/P_{d-1},A)=0$ であり，局所化して $\operatorname{Ext}_{A_{P_2}}^{d-1}(k(P_2),A_{P_2})=0$ である．これを繰り返して $\operatorname{Hom}_{A_P}(k(P),A_P)=0$ となるので矛盾する．よって $\operatorname{Ext}_A^d(k,A)\neq 0$ であり，$d\leq r$ である．逆を r についての帰納法で示そう．$r=0$ のとき $d=r=0$ となり明らかなので，$r>0$ とする．このとき定理 8.1.7 より $\operatorname{Ext}^r(k,A)\neq 0$ である．また $\operatorname{depth}A>0$ である．実際 $\operatorname{depth}A=0$ なら $\mathfrak{m}\in\operatorname{Ass}A$ で，単射 $k\to A$ がある．すると $\operatorname{inj.dim}A=r$ であるから完全列；

$$\operatorname{Ext}^r(A,A)\longrightarrow\operatorname{Ext}^r(k,M)\longrightarrow 0$$

が誘導され，また A 自身が射影的であるから $\operatorname{Ext}^r(A,A)=0$ である．よって $\operatorname{Ext}^r(k,M)=0$ となり矛盾し，$\operatorname{depth}A>0$ であることがわかった．よって A 正則元 $a\in\mathfrak{m}$ がとれる．そこで定理 8.1.9 より $\operatorname{inj.dim}_{A/aA}A/aA=r-1$ であるから，帰納法の仮定より $\dim A/aA=d-1=r-1$ である．よって $r=d$ となることがわかった．

(ii) $\Longrightarrow$ (iii)

d についての帰納法で示す．まず $d=0$ とすると，$\mathfrak{m}\in\operatorname{Ass}A$ より $\mathfrak{m}=\operatorname{Ann}x$ とかける $x\in A$ が存在する．このとき，単射 $\iota:k\to A;a+\operatorname{Ann}x\mapsto ax$ が誘導する $\iota^*:\operatorname{Hom}(A,A)=A\to\operatorname{Hom}(k,A)$ を考えると，これは a 倍写像を ax 倍写像に対応させるものにほかならず，その核は $\mathfrak{m}$ である．また $\operatorname{inj.dim}A=0$ より A が入

射的なので全射なので．$\mathrm{Hom}(k,A)\cong k$ である．また $\mathrm{inj.dim}\,A=0$ だから $i>0$ について $\mathrm{Ext}^i(k,A)=0$ となる．次に $d-1$ まで正しいとすると，(i)$\Longrightarrow$(ii) と同様の議論から A 正則元 $a\in\mathfrak{m}$ が存在し，A/aA は $d-1$ 次元の Gorenstein 環である．補題 8.1.8 と帰納法の仮定から；

$$\mathrm{Ext}_A^i(k,A)=\mathrm{Ext}_{A/aA}^{i-1}(k,A/aA)=\begin{cases}k & \text{if } i=d\\ 0 & \text{if } i\neq d\end{cases}$$

であるので題意が成り立つ．

(iii) $\Longrightarrow$ (iv)

depth $A=\min\left\{i\in\mathbb{N}\,\middle|\,\mathrm{Ext}^i(K,A)\neq 0\right\}$ であったことを思い出すと，$\operatorname{depth}A=\dim A=d$ であることがわかる．

(iv) $\Longrightarrow$ (v)

$a_1,\ldots,a_d$ を A の巴系とすると，命題 5.8.6 から $a_1,\ldots,a_d$ は A 正則列である．$A'=A/(a_1,\ldots,a_d)A$ とおくと，補題 8.1.8 から；

$$\mathrm{Hom}_{A'}(k,A')\cong\mathrm{Ext}_A^n(k,A)\cong k$$

である．ここで $(A',\mathfrak{m})$ は Artin で，$0\neq I$ を A' の極小なイデアルとすると，$0\neq x\in I$ をとると $f:k\to A;1\mapsto x$ が定まる．このとき明らかに $f(k)\subset I$ であり，I の極小性から $I=f(k)$ である．定数倍は同じイデアルを定めるので，$\mathrm{Hom}_{A'}(k,A')\cong k$ だから A' は 0 でない極小なイデアル I_0 を唯 1 つもつことがわかる．すると，A' において 0 は既約である．実際 $I,J\neq 0$ とすると，どちらも I_0 を含むから $I\cap J\neq 0$ である．よって A において $(a_1,\ldots,a_d)$ は既約である．

(v) $\Longrightarrow$ (vi)

自明．

(vi) $\Longrightarrow$ (vii)

I を巴系で生成される既約なイデアルとすると，$A'=A/I$ とおけば A' は Artin で，上と同様にして；

$$\mathrm{Ext}_A^{d+i}(k,A)\cong\mathrm{Ext}_{A'}^i(k,A')$$

がわかる．よって $\mathrm{Ext}_{A'}^1(k,A')=0$ を示せばよい．

まず A' は Artin だから $\mathrm{Hom}_{A'}(k,A')\neq 0$ であり，明らかに任意の $f\neq 0\in\mathrm{Hom}_{A'}(k,A')$ に対して $f(k)$ は A' の 0 でない極小なイデアルを定めることがわかる．すると任意の $f,g\neq 0\in\mathrm{Hom}_{A'}(k,A')$ に対して $f(k)\neq g(k)$ ならば $f(k)\cap g(k)=0$ であり，A' において定義から 0 は既約なので矛盾するから，$f(k)=g(k)$ である．すると $f(1)=g(\alpha)$ となる $\alpha\in k$ があり，$f=\alpha g$ である．ゆえに $\mathrm{Hom}_{A'}(k,A')\cong k$ である．

次に A' は Artin なので，組成列となるイデアル鎖 $0=I_0\subsetneq I_1\subsetneq\cdots\subsetneq I_r=A'$ がとれる．ここで命題 2.2.4 より，各 $1\leq i\leq r-1$ について完全列；

$$0\longrightarrow I_i\longrightarrow I_{i+1}\longrightarrow k\longrightarrow 0$$

があり，$\mathrm{Hom}_{A'}(k,A')\cong k$ がわかっていることに気をつけて，$\mathrm{Hom}_{A'}(-,A')$ が誘導する長完全列；

$$0\longrightarrow k\longrightarrow\mathrm{Hom}_{A'}(I_{i+1},A')\xrightarrow{\varphi_{i+1}}\mathrm{Hom}_{A'}(I_i,A')\xrightarrow{\partial_i}\mathrm{Ext}^1(k,A')\longrightarrow$$

を考える．

i についての帰納法で $\ell(\mathrm{Hom}_{A'}(I_i, A')) \leq i$ を示そう．まず $i = 1$ のときは $I_1 = k$ なので明らか．$\ell(\mathrm{Hom}_{A'}(I_{i-1}, A')) = l_i \leq i - 1$ と仮定する．もし $\partial_{i-1} = 0$ とすると；

$$0 \longrightarrow k \longrightarrow \mathrm{Hom}(I_i, A') \longrightarrow \mathrm{Hom}(I_{i-1}, A') \longrightarrow 0$$

が完全なので $\mathrm{Hom}(I_i, A')/k \cong \mathrm{Hom}(I_{i-1}, A')$ であるから $\ell(\mathrm{Hom}(I_i, A')) = l + 1 \leq i$ である．$\partial_{i-1} \neq 0$ なら，$\ker\varphi_i = k$ で，$\mathrm{Im}\,\varphi_i = \mathrm{Hom}(I_i, A')/k \subsetneq \mathrm{Hom}(I_{i-1}, A')$ なので $\ell(\mathrm{Hom}(I_i, A')/k) < l - 1 \leq i - 1$ であり，$\ell(\mathrm{Hom}(I_i, A')) \leq i$ となる．

これらの証明から，$\ell(\mathrm{Hom}(I_i, A') = i$ となるのは $\partial_1, \ldots, \partial_{i-1}$ がすべて 0 であるときに限ることがわかる．いま $\ell(\mathrm{Hom}(I_r, A')) = \ell(\mathrm{Hom}(A', A') = r$ だから，$\partial_1 = \cdots = \partial_{r-1} = 0$ となり；

$$0 \longrightarrow I_{r-1} \longrightarrow A' \longrightarrow k \longrightarrow 0$$

が導く Ext の長完全列を考えると；

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(k, A') \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(A', A') = 0$$

となり $\mathrm{Ext}^1(k, A') = 0$ である．

(vii) $\Longrightarrow$ (i)

d についての帰納法で示す．$d = 0$ のときは，$\mathrm{Spec}\,A = \{\mathfrak{m}\}$ なので命題 8.1.4 より $\mathrm{inj.dim}\,A < i$ である．

$d - 1$ まで正しいとしよう．任意の $P \in \mathrm{Spec}\,A$ について，$\mathrm{Ext}^i_A(A/P, A) = 0$ を示す．

$$\left\{P \in \mathrm{Spec}\,A \;\middle|\; \mathrm{Ext}^i_A(A/P, A) \neq 0\right\} \neq \emptyset$$

と仮定しよう．極大元 P が存在する．いま $\mathrm{Ext}^i_A(A/\mathfrak{m}, A) = 0$ なので $P \neq \mathfrak{m}$ だから，ある $a \in \mathfrak{m} \setminus P$ がとれて；

$$0 \longrightarrow A/P \xrightarrow{\ a\cdot\ } A/P \longrightarrow A/(P + aA) \longrightarrow 0$$

が完全である．ここで系 2.3.11（定理 2.3.9 の証明）から；

$$A/(P + aA) = M_r \supset \cdots \supset M_1 \supset M_0 = 0$$

で，$M_i/M_{i-1} \cong A/P_i$ $(P_i \in \mathrm{Spec}\,A)$ であるものがとれるが，その構成は $P_1 \in \mathrm{Ass}\,A/(P{+}aA) \subset V(P{+}aA), P_2 \in \mathrm{Ass}(M_r/M_1) = \mathrm{Ass}\,A/P_1 \subset V(P_1)$ であり，$A/P_1 \subset M_2 \subset A/(P + aA)$ だから $M_2 = A/I$ $(P + aA \subset I \subset P_1)$ とでき，$P_3 \in \mathrm{Ass}(M_r/M_2) = \mathrm{Ass}\,A/I \subset V(I)$ のように続いていくので，特に P_i はすべて $V(P)$ に含まれるようにとれる．仮定から $\mathrm{Ext}^i_A(A/P_i, A) = 0$ であり，これは $\mathrm{Ext}^i_A(A/(P + aA), A) = 0$ を導く．すると；

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ext}^i_A(A/P, A) \xrightarrow{\ a\cdot\ } \mathrm{Ext}^i_A(A/P, A)$$

が完全である．この $a\cdot$ が全射ならば，中山の補題より $\mathrm{Ext}^i_A(A/P, A) = 0$ となり矛盾する．

それを示すためには $\mathrm{Ext}^i_A(A/P, A)$ が Artin であることみればよい．より強く，任意の有限生成 A 加群 M について $\mathrm{Ext}^i_A(M, A)$ が組成列を持つことを示そう．任意の極大でない素イデアル P に対して；

$$P = P_0 \subsetneq P_1 \subsetneq \cdots \subsetneq P_l = \mathfrak{m}$$

を極大な鎖とすると，$\mathrm{Ext}^i_A(A/\mathfrak{m}, A) = 0$ より補題 8.1.6 を繰り返し用いて $\mathrm{Ext}^{i-l}_A(A/P, A) = 0$ である．これを P で局所化して $\mathrm{Ext}^{i-l}_{A_P}(k(P), A_P) = 0$ となり，$\dim A_P \leq d - l < i - l$ なので．帰納法の仮定から $\mathrm{inj.dim}\,A_P < \infty$ である．すると，任意の有限生成 A 加群 M に対して；

$$(\mathrm{Ext}^i_A(M, A))_P = \mathrm{Ext}^i_{A_P}(M_P, A_P) = 0$$

であるので，$\mathrm{Supp}(\mathrm{Ext}^i_A(M,A)) \subset \{\mathfrak{m}\}$ である．$\mathrm{Ext}^i_A(M,A) \neq 0$ のとき必ず素因子をもつから，$\mathrm{Ass}(\mathrm{Ext}^i_A(M,A)) = \{\mathfrak{m}\}$ としてよい．再び系 2.3.11 により；

$$\mathrm{Ext}^i_A(M,A) = M_r \supset \cdots \supset M_1 \supset M_0 = 0$$

で，$M_i/M_{i-1} \cong A/P_i$ ($P_i \in \mathrm{Spec}\,A$) であるものがとれるが，構成から $P_1 = \mathfrak{m}$ であり，また $M_r \neq M_1$ のとき $P_2 \in \mathrm{Ass}(M_r/M_1) \subset \mathrm{Supp}(M_r/M_1) \subset \{\mathfrak{m}\}$ だから，$P_2 = \mathfrak{m}$ である．同様にもし $M_r \neq M_2$ なら $P_3 \in \mathrm{Supp}(M_r/M_2) \subset \{\mathfrak{m}\}$ なので，以下同様に続けることでこれは組成列をなす．

（証明終）

§ 2　入射包絡

射影被覆（定義 7.3.1）の双対として入射加群について考えたものが**入射包絡**であり，こちらは必ず存在する．それだけでなく，Noether 環上の入射加群の構造を入射包絡によって決定することさえできる（定理 8.2.14）．

定義 *8.2.1*（入射包絡）

A を環とし，M を A 加群とする．M の部分加群 N が；

任意の M の部分加群 L について $N \cap L = 0$ なら $L = 0$.

を満たすとき，N は M の**本質的 (essential)** な部分加群であるという．A 加群 M について入射加群 I と単射 $\varepsilon : M \to I$ が存在して $\mathrm{Im}\,\varepsilon$ が I の本質加群のとき，(I, ε) は M の**入射包絡 (injective hull)** であるという．

本質部分加群については次の判定条件が強力である．

命題 *8.2.2*

A 加群 M の部分加群 N が本質的であることと，任意の $x \neq 0 \in M$ について $Ax \cap N \neq 0$ であることは同値である．

証明.

($\Longleftarrow$) のみ示す．$N \cap L = 0$ かつ $L \neq 0$ とすると，$x \neq 0 \in L$ がとれ，このとき $Ax \subset L$ より $Ax \cap N \subset L \cap N = 0$ であるので $Ax \cap N = 0$ だがこれは矛盾．よって $L = 0$ である．（証明終）

射影被覆の場合と同様に，入射包絡の同値な言い換えを与え，存在すれば同型を除いて一意であることを示そう．

命題 *8.2.3*

A を環とする．A 加群 M と，入射加群 I への単射 $\varepsilon : M \to I$ があるとする．このとき，以下の条件；

(i) $\varepsilon : M \to I$ が入射包絡である．
(ii) 任意の A 加群 N と，A 線型写像 $\varphi : I \to N$ に対して，$\varphi \circ \varepsilon$ が単射ならば φ も単射である．
(iii) 任意の A 線型写像 $\varphi : I \to I$ に対して，$\varphi \circ \varepsilon = \varepsilon$ ならば φ は同型である．

は同値である．

証明.

(i) $\Longrightarrow$ (ii)

任意の $x \neq 0 \in I$ について $\varphi(x) \neq 0$ ならばよい．いま $\mathrm{Im}\,\varepsilon$ は I で本質的なので，命題 8.2.2 から $Ax \cap \mathrm{Im}\,\varepsilon \neq 0$ である．よって，ある $y \in M$ と $a \in A$ が存在して $\varepsilon(y) = ax \neq 0$ である．すると $\varphi(\varepsilon(y)) = a\varphi(x) \neq 0$ なので $\varphi(x) \neq 0$ である．

(ii) $\Longrightarrow$ (iii)

仮定より φ は単射なので，I が入射的だから $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_I$ となる $\psi : I \to I$ がある．すると，次の図式；

$$\begin{tikzcd}
 & & I \\
0 \arrow[r] & I \arrow[ur, "\mathrm{id}"] \arrow[r, "\varphi"] & I \arrow[u, "\psi"] \\
 & & M \arrow[ul, "\varepsilon"] \arrow[u, "\varepsilon"]
\end{tikzcd}$$

が可換なので，$\varepsilon = \psi \circ \varepsilon$ だから (ii) より ψ は単射となり，φ, ψ は同型である．

(iii) $\Longrightarrow$ (i)

L を $\mathrm{Im}\,\varepsilon \cap L = 0$ となる I の部分加群とする．自然な全射 $\pi : I \to I/L$ を考えると，$\pi \circ \varepsilon$ は単射である．すると，I が単射的なのである $f : I/L \to I$ が存在して；

$$\begin{tikzcd}
 & & I \\
0 \arrow[r] & M \arrow[ur, "\varepsilon"] \arrow[r, "\pi\circ\varepsilon"] \arrow[dr, "\varepsilon"] & I/L \arrow[u, "f"] \\
 & & I \arrow[u, "\pi"]
\end{tikzcd}$$

が可換である．よって $f \circ \pi$ は同型で，特に π は単射である．ゆえに $L = 0$ である．

（証明終）

射影被覆の場合（命題 7.3.3）の証明と全く双対に，入射包絡は存在すれば必ず一意であることがわかる．射影被覆と異なるのは入射包絡が必ず存在することである．

定理 *8.2.4*（入射包絡の存在）

A 加群 M について入射包絡が必ず存在する．

証明.

A 加群の圏は入射的対象を十分に持つ（定理 6.4.14）ので，入射加群 I と単射 $\varepsilon : M \to I$ が存在する．次の集合；

$$\mathscr{E} = \left\{ E : I \text{ の部分加群} \;\middle|\; M \subset E, M \text{ は } E \text{ の本質部分加群} \right\}$$

は $M \in \mathscr{E}$ なので空ではなく，帰納的順序集合をなす．よって Zorn の補題から極大元がとれ，それを E としよう．次に；

$$\mathscr{L} = \left\{ L : I \text{ の部分加群} \;\middle|\; L \cap E = 0 \right\}$$

は $0 \in \mathscr{L}$ より空でなく，帰納的順序集合をなすなので極大元を L とおく．埋め込み $\iota : E \to I$ と自然な全射 $\pi : I \to I/L$ を考える．合成 $\pi \circ \iota$ は単射であり，$\pi(E)$ は I/L で本質的．実際 $L \subset N \subset I$ を I の部分加群とすると，$\pi(E) \cap N/L = 0$ なら $E \cap N \subset L$ だが $E \cap L = 0$ より $E \cap N = 0$ となり，L の極大性より $N = L$ である．

I が入射的なので，次の図式；

$$\begin{tikzcd} & & I \\ 0 \arrow[r] & E \arrow[ur, "\iota"] \arrow[r, "\pi\circ\iota"] & I/L \arrow[u, dashed, "\varphi"'] \end{tikzcd}$$

が可換になる $\varphi : I/L \to I$ が存在する．次に E は $\varphi(I/L)$ の本質部分加群であることを示そう．$\varphi(I/L)$ の部分加群 N について $E \cap N = 0$ であるとする．このとき $\pi(E) \cap \varphi^{-1}(N) = 0$ である．実際 $x \in \pi(E) \cap \varphi^{-1}(N)$ とすると，ある $y \in E$ が存在して $\pi(y) = x$ である．このとき $\varphi(\pi(y)) = y \in N \cap E$ より $y = 0$ であり，ゆえに $x = 0$ となる．すると $\pi(E)$ は I/L の本質部分加群なので $\varphi^{-1}(N) = 0$ となり $N \subset \operatorname{Im}\varphi$ だから $N = 0$ となる．すると E は M の本質拡大で，$\varphi(I/L)$ は E の本質拡大なので $\varphi(I/L)$ は M の本質拡大だから（命題 8.2.2 を用いて確かめよ）E の極大性より $E = \varphi(I/L)$ である．よって $\iota : E \to I$ は分裂単射となる．ゆえに E は入射加群であり，これが M の入射包絡にほかならない．（証明終）

この定理により，A 加群 M の入射包絡は同型を除いて必ず一意に存在するので $\mathrm{E}_A(M)$ とかくことにしよう．

補題 *8.2.5*

A を Noether 環，M を A 加群，$\mathrm{E}(M)$ を M の入射包絡とする．このとき $\operatorname{Ass} M = \operatorname{Ass} \mathrm{E}(M)$ である．

証明.

命題 2.3.8 より $\operatorname{Ass} M \subset \operatorname{Ass} \mathrm{E}(M)$ は明らかで，任意の $P \in \operatorname{Ass} \mathrm{E}(A)$ に対して $A/P \subset \mathrm{E}(M)$ で，M は $\mathrm{E}(M)$ で本質的なので $A/P \cap M \neq 0$ であるから，$x \neq 0 \in A/P \cap M$ をとれば，$P = \operatorname{Ann} x$ である．（証明終）

補題 *8.2.6*

A を Noether 環とし，$S \subset A$ を積閉集合，M を A 加群とする．このとき；

$$(\mathrm{E}_A(M))_S = \mathrm{E}_{A_S}(M_S)$$

が成り立つ．

証明.

$E = \mathrm{E}_A(M)$ とおこう．補題 8.1.2 により E_S は入射的で，単射 $M_S \to E_S$ があるので，M_S が E_S で本質的であることを示せばよい．そのために任意の $x/s \in E_S$ に対して $A_S(x/s) \cap M_S \neq 0$ をみる．ここで $A_S(x/s) = A_S x$ なので x/s を $x \in E$ で置き換えてよく，また，A のイデアルの族；

$$\Sigma = \{\operatorname{Ann}_A(sx) \mid s \in S\}$$

の極大元 $\operatorname{Ann}(sx)$ をとると，また $A_S x = A_S(sx)$ なので，x を sx でとりかえて $A_S x \cap M_S \neq 0$ を $\operatorname{Ann} x$ が Σ で極大という仮定のもとで示せばよい．$I = \{a \in A \mid ax \in M\}$ とおくと，$Ix = Ax \cap M$ であり，M が E で本質的なので，$Ix \neq 0$ である．$I = (a_1, \ldots, a_n)$ とおく．ある i があって $a_i x/1 \neq 0 \in M_S$ ならばよいので，任意の i について $a_i x/1 = 0$ と仮定する．するとある $t \in S$ があって $a_i tx = 0$ で，これは $a_i \in \operatorname{Ann} tx$ で意味する．ここで $\operatorname{Ann} x \subset \operatorname{Ann} tx$ だが，$\operatorname{Ann} x$ は Σ で極大なので $a_i \in \operatorname{Ann} x$ であり，矛盾．ゆえに $A_S x \cap M_S \neq 0$ である．（証明終）

定義 *8.2.7*（礎石）

$(A, \mathfrak{m}, k)$ を局所環とする．A 加群 M について；

$$\operatorname{Soc} M = \operatorname{Hom}_A(k, M)$$

と定義し，これを M の**礎石 (socle)** という．

礎石はあまり浸透していない訳語に思え，本書では主に Socle の語を用いることにする．$\operatorname{Soc} M$ は $(0 :_M \mathfrak{m}) = \{x \in M \mid \mathfrak{m}x = 0\}$ と書き換えることもできる．

補題 *8.2.8*

A を局所環，M を A 加群とする．M の任意の本質的な部分加群 N について，$\operatorname{Soc} M \subset N$ である．

証明.

$N \subset M$ を本質的とすると，任意の $x \neq 0 \in \operatorname{Soc} M$ について $Ax \cap N \neq 0$ で，ある $a \in A$ が存在して $ax \neq 0 \in N$ である．すると $x \in \operatorname{Soc} M$ だから a は単元で，$x \in N$ である．（証明終）

命題 *8.2.9*

$(A, \mathfrak{m}, k)$ を Noether 局所環，N を Artin A 加群とすると，$\operatorname{Soc} N \subset N$ は本質的である．

証明.

任意の $0 \neq x \in N$ に対し，$Ax \cap \operatorname{Soc} N = \operatorname{Soc} Ax$ である．ここで Ax は Noether かつ Artin なので組成列を持ち，明らかに $\operatorname{Soc} Ax = \operatorname{Hom}(k, Ax) \neq 0$ である．（証明終）

補題と合わせることで，Noether 局所環上の Artin 加群においては，Socle が本質的な部分加群の中で最小なものを与えることがわかる．

補題 *8.2.10*

A を Noether 環とする．任意の $P \in \operatorname{Spec} A$ について；

$$k(P) \cong \operatorname{Hom}_{A_P}(k(P), \mathrm{E}(A/P)_P)$$

が成り立つ．

証明.

$\mathrm{E}(A/P)_P = \mathrm{E}_{A_P}(k(P))$ だから，Noether 局所環 $(A, \mathfrak{m}, k)$ において；

$$k \cong \operatorname{Hom}_A(k, E(k)) = \operatorname{Soc} \mathrm{E}(k)$$

を示せば十分である．いま $k \subset \mathrm{E}(k)$ が本質的だから $\operatorname{Soc} \mathrm{E}(k) \subset k$ であり，逆も簡単に確かめられる．（証明終）

命題 *8.2.11*

A を環とする．任意の $P \in \operatorname{Spec} A$ に対して $\mathrm{E}(A/P)$ は直既約である．

証明.

まず，$\mathrm{E}(A/P) = E_1 \oplus E_2$ であると仮定する．このとき $E_i \cap A/P \neq 0$ はあるイデアル $P \subset I_i$ によって $I_i + P$ とかけている．すると $E_1 \cap E_2 \subset I_1 I_2 + P \neq 0$ であり，これは内部直和であることに矛盾している．（証明終）

Noether 性を課すことで逆が成り立つことがわかる．

命題 *8.2.12*

A が Noether でありかつ E が直既約な入射加群ならば，ある $P \in \operatorname{Ass} E$ が存在して $E \cong \mathrm{E}(A/P)$ である．また $P \neq Q \in \operatorname{Spec} A$ なら $\mathrm{E}(A/P) \not\cong \mathrm{E}(A/Q)$ である．

証明.

ここからは A に Noether 性を課す．E を直既約な入射加群とする．$P \in \operatorname{Ass} E$ をとり，$\mathrm{E}(A/P)$ を考える．命題 8.2.3 より $\mathrm{E}(A/P)$ は E の直和因子だが，E が直既約なので $E \cong \mathrm{E}(A/P)$ である．また，$P \neq Q \in \operatorname{Spec} A$ とすると，補題 8.2.5 から $\operatorname{Ass}\mathrm{E}(A/P) = \{P\} \neq \{Q\} = \operatorname{Ass}\mathrm{E}(A/Q)$ であり，同型になりえないことがわかる．（証明終）

これらの準備をもとに，Noether 環上の入射加群の構造を決定する．それを記述するためのホモロジカルな不変量を定義しよう．

いくつかのホモロジカルな不変量を定義しておこう．

定義 *8.2.13*（Bass 数，型）

A を Noether 環とする．有限生成 A 加群 M と $P \in \operatorname{Spec} A$ について；

$$\mu^i(P, M) = \dim_{k(P)} \operatorname{Ext}^i_{A_P}(k(P), M_P)$$

を M の P に関する i 番目の **Bass 数 (Bass number)** という．また，Noether 局所環 $(A, \mathfrak{m})$ 上の有限生成 A 加群 M について $\operatorname{depth} M = d$ であるとき；

$$r(M) = \mu^d(\mathfrak{m}, M)$$

を M の**型 (type)** という．

この記号のもとで，例えば Gorenstein 環とは 1 型の CM 環のことである，と述べることができる．

定理 *8.2.14*

A を Noether 環とすると，A 上の入射加群 E は $\mathrm{E}_A(A/P)$ $(P \in \operatorname{Spec} A)$ の直和でかける．さらに，その分解は；

$$E = \bigoplus_{P \in \operatorname{Spec} A} \mathrm{E}_A(A/P)^{\mu^0(P,E)}$$

で与えられる．

証明.

E を入射加群とする．先の命題より，E は直既約な加群の直和であればよい．

$$\Sigma = \left\{ E' \subset E \;\middle|\; E' \text{は入射的で，直既約な加群の（内部）直和} \right\}$$

と定義すると，$E_1' < E_2'$ を E_1' は E_2' の直和因子であることと定めると，これは帰納的順序集合であり，極大元 E' をとる．E' も入射的なので，次の図；

$$\begin{tikzcd} & & E' \\ 0 \arrow[r] & E' \arrow[r] \arrow[ur, "\mathrm{id}"] & E \arrow[u, dashed] \end{tikzcd}$$

が可換なので，E' は E の直和因子．$E = E' \oplus N$ とおく．$N \neq 0$ とおくと，$P \in \operatorname{Ass} N$ について $\mathrm{E}(A/P)$ は N の直和因子で，$E = (E' \oplus \mathrm{E}(A/P)) \oplus N'$ となって E' の極大性に矛盾するから，$N = 0$ で E は直既約な加群の直和である．

次に；

$$E \cong \bigoplus_{P \in \operatorname{Spec} A} \mathrm{E}(A/P)^{n_P}$$

とおくと，固定した $P \in \operatorname{Spec} A$ について；

$$\begin{aligned} \operatorname{Hom}_{A_P}(k(P), E_P) &\cong \bigoplus_{P \in \operatorname{Spec} A} \operatorname{Hom}_{A_P}(k(P), \mathrm{E}_{A_P}(A_P/QA_P)^{n_Q}) \\ &\cong \bigoplus_{Q \subset P} \operatorname{Hom}_{A_P}(k(P), \mathrm{E}_{A_P}(A_P/QA_P)^{n_Q}) \end{aligned}$$

である．ここで $\operatorname{Hom}_{A_P}(k(P), \mathrm{E}_{A_P}(A_P/QA_P)) = (\operatorname{Hom}_A(A/P, \mathrm{E}(A/Q)))_P$ なので，$\operatorname{Hom}_A(A/P, \mathrm{E}(A/Q)) \neq 0$ と仮定する．$f : A/P \to \mathrm{E}(A/Q)$ が 0 でないとすると，$f(A/P) \cap A/Q \neq 0$ で，ある $x \neq 0 \in f(A/P) \cap A/Q$ をとると，$Q = \operatorname{Ann} x \supset P$ であるから，$P = Q$ である．よって，補題 8.2.10 から；

$$\operatorname{Hom}_{A_P}(k(P), E_P) = \operatorname{Hom}_{A_P}(k(P), \mathrm{E}(A/P)_P^{n_P}) = k(P)^{n_P}$$

となり，$n_P = \mu^0(P, E)$ である．　（証明終）

このように，Noether 環上の入射加群はすべて入射包絡の直和であることがわかるが，一般の環では入射加群の無限直和がまた入射加群かどうかはまったく明らかではないことを，次の定理とともに紹介しておく．

命題 8.2.15

環 A が Noether であることと，任意の入射加群の族 $\{E_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ について，$\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} E_\lambda$ であることは同値である．

証明.

$(\Longrightarrow)$

I を A のイデアルとし，$\varphi : I \to \bigoplus E_\lambda$ を A 線型写像とする．φ_λ を φ と $\bigoplus E_\lambda \to E_\lambda$ の合成とする．I が有限生成なので，有限個の λ 以外では I の生成系が φ_λ で消える．よって，有限部分集合 $\Lambda' \subset \Lambda$ が存在して $\varphi(I) \subset \bigoplus_{\lambda \in \Lambda'} E_\lambda$ とできる．$\Lambda' = \{1, \ldots, n\}$ としよう．各 $1 \leq i \leq n$ について φ_i を $\widetilde{\varphi}_i : A \to E_i$ に拡張すると；

$$\widetilde{\varphi} : A \to \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} E_\lambda ; 1 \mapsto \sum_{i=1}^{n} \widetilde{\varphi}_i(1)$$

は φ の拡張である．

($\Longleftarrow$)

$I_1 \subset \cdots \subset I_i \subset \cdots$ を A のイデアルの昇鎖とする．$I = \bigcup I_i$ とおこう．各 i について A/I_i の入射包絡を $E_i = \mathrm{E}(A/I_i)$ とおくと，$A/I_i \subset E_i$ であって；

$$\varphi : I \to \bigoplus E_i; a \mapsto (a + I_i)_i$$

が A 線型である．$\bigoplus E_i$ は入射的だから $\widetilde{\varphi} : A \to \bigoplus E_i$ に拡張できる．ここで $\widetilde{\varphi}(1) = (x_i)$ とおくと，$x_i \neq 0$ となる i は有限個で，その最大値を n とする．すると任意の $i > n$ について．任意の $a \in I$ に対し $a + I_i = 0$ となるから，$I \subset I_i$ で A は Noether である．

（証明終）

定義 7.3.4 で極小射影分解を定義したが，射影被覆の代わりに入射包絡をとることでまったく双対に極小入射分解が定義でき，またそれは必ず存在する．

定義 *8.2.16*（極小入射分解）

A を環とし，M を A 加群とする．M の入射分解；

$$0 \longrightarrow I^0 \xrightarrow{d^0} I^1 \xrightarrow{d^2} \cdots$$

について，各 I^i が $\mathrm{Coker}\, d^{i-1}$ の入射包絡になっているとき，それを M の**極小入射分解 (minimal injective resolution)** という．

定理 8.2.14 により，Noether 環上の有限生成加群について，極小入射分解の各成分の構造を決定でき，それは M のみによって定まる．特に，これは定理 8.2.14 の改良である．

定理 *8.2.17*（極小入射分解の構造定理）

A を Noether 環とし，M を有限生成 A 加群，$I^\bullet$ を M の極小入射分解とする．このとき；

$$I^i \cong \bigoplus_{P \in \mathrm{Spec}\, A} E(A/P)^{\mu^i(P,M)}$$

である．

証明．

I^i を M の極小入射分解とすると，補題 8.2.6 より $P \in \mathrm{Spec}\, A$ について；

$$0 \longrightarrow M_P \longrightarrow I^0_P = E(M_P) \xrightarrow{d^0_P} I^1_P \xrightarrow{d^1_P} \cdots$$

は M_P の極小入射分解である．ここで $\mathrm{Hom}_{A_P}(k(P), I^i_P) \cong \mathrm{Ext}^i_{A_P}(k(P), M_P)$ を示そう．$\mathrm{Hom}_{A_P}(k(P), I^i_P) = \mathrm{Soc}_{A_P} I^i_P$ で, $\mathrm{Im}\, d^{i-1}_P \subset I^i_P$ は本質的なので, $\mathrm{Hom}_{A_P}(k(P), I^i_P) \subset \mathrm{Im}\, d^{i-1}_P = \ker d^i_P$ である．これがすべての i で成り立つから, 関手 $\mathrm{Hom}_{A_P}(k(P), -)$ を d_i に施すと $\mathrm{Im}\, d_{i*} = 0$ となり, $\mathrm{Ext}^i_{A_P}(k(P), M_P) = \mathrm{Hom}_{A_P}(k(P), I^i_P)$ であることがわかる．よって，定理 8.1.7 の証明と同様に示された．（証明終）

最後に，この定理の $i = 0$ の部分は M が有限生成であることを必要としないことを示しておこう．

系 8.2.18

A を Noether 環とし，M を A 加群とする．このとき；

$$\mathrm{E}(M) \cong \bigoplus_{P \in \operatorname{Spec} A} \mathrm{E}(A/P)^{\mu^0(P,M)}$$

である．

証明.

定理 8.2.14 から，各 $P \in \operatorname{Spec} A$ において $\mu^0(P,M) = \mu^0(P,\mathrm{E}(M))$，すなわち $\mathrm{Hom}_{A_P}(k(P),M_P) = \mathrm{Hom}_{A_P}(k(P),\mathrm{E}_{A_P}(M_P))$ を示せばよい．さて上の定理の証明と同様に；

$$0 \longrightarrow M_P \longrightarrow \mathrm{E}(M_P) \xrightarrow{d_P^0} I_P^1 \longrightarrow \cdots$$

を考えると，$M_P \subset \mathrm{E}(M_P)$ は本質的だから $\mathrm{Hom}_{A_P}(k(P),\mathrm{E}(M_P)) \subset M_P = \ker d_P^0$ なので；

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{A_P}(k(P),M_P) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{A_P}(k(P),\mathrm{E}(M_P)) \longrightarrow 0$$

が完全である．よって示された．（証明終）

M が有限生成ならばより強く有限和であることまで証明できる．

系 8.2.19

A を Noether 環とし，M を有限生成 A 加群とする．このとき；

$$\mathrm{E}(M) \cong \bigoplus_{P \in \operatorname{Ass} M} \mathrm{E}(A/P)^{\mu^0(P,M)}$$

であり，特に右辺は有限和である．

証明.

$P \notin \operatorname{Ass} M$ とする．$\mathrm{Hom}_{A_P}(A_P/PA_P, M_P) \neq 0$ であると仮定する．すると 0 でない $f : A_P/PA_P \to M_P$ がとれる．このとき任意の $x = f(a/s + PA_P) \in \operatorname{Im} f$ に対して $P \neq \operatorname{Ass} x$ であるから，ある $b \neq 0 \in P$ が存在して $bx = f(ba/s + PA_P) = 0$ となり，これは矛盾である．よって $\mu_0(P,M) = 0$ となる．（証明終）

§ 3　Matlis の双対定理

この節では，Matlis の双対定理について述べようと思う．Matlis の双対定理とは，Noether 完備局所環 $(A,\mathfrak{m},k)$ において k の入射包絡を $E = E_A(k)$ とおくとき，関手 $\mathrm{Hom}_A(-,E)$ が Noether 加群と Artin 加群の間に双対を与えるという主張である．この節では，$\mathrm{Hom}(M,E)$ を $M^\vee$ とかくことにする．

極小入射加群の構造は Bass 数により決定されることを見た．それに対応して，極小射影分解の構造を決定する数を定義しよう．

定義 *8.3.1*（Betti 数）

$(A, \mathfrak{m}, k)$ を Noether 局所環とし，M を有限生成 A 加群とする．M の極小自由（極小射影）分解 $P_\bullet$ について，各 i における $\mathrm{rank}(P_i)$ を $\beta_i(M)$ とかき，M の i 次の **Betti 数 (Betti number)** という．とくに $\beta_0(M) = \dim_k M/\mathfrak{m}M$ を $\mu(M)$ とかく．

これによって，まずは Noether 局所環上の，有限生成 Artin 加群に関する双対を見ていこう．

命題 *8.3.2*（Noether かつ Artin 加群についての双対定理）

$(A, \mathfrak{m}, k)$ を Noether 局所環，M を Noether かつ Artin 加群，すなわち組成列を持つ加群とする．このとき；

(i) $M^\vee$ も Noether かつ Artin であり，$\ell(M) = \ell(M^\vee)$ が成り立つ．

(ii) 自然な；

$$M \to M^{\vee\vee}; x \mapsto (f \mapsto f(x))$$

は同型である．

(iii) $\mu(M) = r(M^\vee)$ であり，$r(M) = \mu(M^\vee)$ である．

証明.

(i) $\ell(M)$ についての帰納法．$\ell(M) = 1$ なら $M = k$ であり，補題 8.2.10 から $k = k^\vee$ なのでよい．$\ell(M) = l > 1$ とする．

$$M = M_l \supset M_{l-1} \supset \cdots \supset M_0 = 0$$

を M の組成列とすると；

$$0 \longrightarrow M_{l-1} \longrightarrow M \longrightarrow k \longrightarrow 0$$

が完全で，E は入射加群だから；

$$0 \longrightarrow k \longrightarrow M^\vee \longrightarrow M_{l-1}^\vee \longrightarrow 0$$

も完全で，帰納法の仮定より $M_{l-1}^\vee$ は長さ $l-1$ の組成列をもち，また $M^\vee/k \cong M_{l-1}^\vee$ だから $M^\vee$ も長さ l の組成列を持つ．

(ii) $\ell(M)$ についての帰納法．$\ell(M) = 1$ のとき，すなわち $M = k$ のときは $k^{\vee\vee} = k$ なので自然な射が 0 でなければよいが，これは明らか．$\ell(M) > 1$ とすると，組成列をとって；

$$0 \longrightarrow M_{l-1} \longrightarrow M \longrightarrow k \longrightarrow 0$$

が完全で，$M_{l-1}^{\vee\vee} \cong M_{l-1}$ だから，次の可換図式；

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M_{l-1} \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d] & k \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & M_{l-1}^{\vee\vee} \arrow[r] & M^{\vee\vee} \arrow[r] & k^{\vee\vee} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

において，左と右の縦の射は同型だから，蛇の補題より中央も同型．

(iii) 自然な単射 $\mathfrak{m}M \to M$ に対して，$\mathrm{Hom}(-, E)$ を施して $\varphi : M^\vee \to (\mathfrak{m}M)^\vee$ が得られるが，これによる $f : M \to E$ の像は f の $\mathfrak{m}M$ への制限であり，$(M/\mathfrak{m}M)^\vee = \ker \varphi$ だが，$f \in (M/\mathfrak{m}M)^\vee$ であること

は $\varphi(f) = 0$ すなわち $\mathfrak{m}f = 0$ であることと同値であり，$(M/\mathfrak{m}M)^\vee = \operatorname{Soc} M^\vee$ である．よって $M^\vee$ も Artin だから；

$$\mu(M) = \dim_k M/\mathfrak{m}M = \dim_k (M/\mathfrak{m}M)^\vee = \dim_k \operatorname{Soc} M^\vee = \dim_k \operatorname{Hom}(k, M^\vee) = r(M^\vee)$$

である．すると $\mu(M^\vee) = r(M^{\vee\vee}) = r(M)$ であることもわかる．

（証明終）

定理 *8.3.3*（Matlis の双対定理）

$(A, \mathfrak{m}, k)$ を完備 Noether 局所環とする．それぞれ M を Noether，N を Artin な A 加群とする．k の入射包絡を E とおいたとき，完全反変関手 $-^\vee = \operatorname{Hom}(-, E)$ について；

(i) $M^\vee$ は Artin で，$N^\vee$ は Noether である．
(ii) $M^{\vee\vee} \cong M, N^{\vee\vee} \cong N$ である．

が成り立つ．

これを証明するために，主張を分割しよう．

命題 *8.3.4*

$(A, \mathfrak{m}, k)$ を完備 Noether 局所環とすると，$A^{\vee\vee} \cong A$ である．

証明.

$E^\vee \cong A$ を示せばよい．$n \geq 0$ について，$E_n = \operatorname{Hom}_A(A/\mathfrak{m}^n, M) = \{x \in E \mid \mathfrak{m}^n x = 0\}$ とおく．すると，$A/\mathfrak{m}^n$ における k の入射包絡は E_n である．これを示すには E_n が入射的 $A/\mathfrak{m}^n$ 加群であることをみればよい．$\varphi : M_1 \to M_2$ を単射な $A/\mathfrak{m}^n$ 線型写像，$f : M_1 \to E_n$ を $A/\mathfrak{m}^n$ 線型とすると，これを A 線型とおもうことで，A 加群の可換図式；

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[r, hook] & E \\ 0 \arrow[r] & M_1 \arrow[u, "f"] \arrow[r, "\varphi"] & M_2 \arrow[u, dashed, "\widetilde{f}"'] \end{tikzcd}$$

が得られる．ここで $\mathfrak{m}^n \widetilde{f}(M_2) = 0$ なので，$\operatorname{Im} \widetilde{f} \subset E_n$ であるから，$\widetilde{f}$ を $A/\mathfrak{m}^n$ 線型とみなせばよい．

さて，$A/\mathfrak{m}^n$ は Artin なので，命題 8.3.2 から $A/\mathfrak{m}^n \cong E_n^\vee$ であり；

$$A = \varprojlim A/\mathfrak{m}^n = \varprojlim E_n^\vee = \varprojlim \operatorname{Hom}(E_n, E) = \operatorname{Hom}(\varinjlim E_n, E)$$

であるので，$\varinjlim E_n = \bigcup_{n \geq 0} E_n$ だから $E \subset \bigcup_{n \geq 0} E_n$ を示せばよい．任意の $x \neq 0 \in E$ をとると，$\operatorname{Ass} Ax \subset \operatorname{Ass} E = \{\mathfrak{m}\}$ なので，命題 2.4.5 により $\operatorname{Ann} x$ は $\mathfrak{m}$ 準素イデアルで，$\sqrt{\operatorname{Ann} x} = \mathfrak{m}$ だから，ある n について $\mathfrak{m}^n x = 0$ である．よって示された．（証明終）

命題 *8.3.5*

$(A, \mathfrak{m}, k)$ を完備 Noether 局所環とすると，E は Artin である．

証明.

E の降鎖列 $E = N_0 \supset N_1 \supset \cdots$ をとる．すると，$E^\vee \cong A$ なので，命題 8.3.4 より；

$$E^\vee \cong A \longrightarrow N_1^\vee \longrightarrow N_2^\vee \longrightarrow \cdots$$

が得られ，各 $N_i^\vee \to N_{i+1}^\vee$ は全射である．すると $N_i^\vee = A/I_i$ とかけるイデアル I_i がとれ，イデアルの昇鎖 $0 = I_0 \subset I_1 \subset \cdots$ を与える．A は Noether なのでこれは止まり，ある n について $N_i^\vee = N_{i+1}^\vee$ とできる．ここで $N_i = N_{i+1}$ を示したいので，そうでないと仮定しよう．すると $N = N_i/N_{i+1} \neq 0$ であるが，完全列；

$$0 \longrightarrow N_{i+1} \longrightarrow N_i \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

に $-^\vee$ を適用して $N^\vee = 0$ である．一方で $N_i \subset E$ なので $\operatorname{Ass} N_i = \{\mathfrak{m}\}$ であるから，$\operatorname{Ass} N \subset \operatorname{Supp} N = \{\mathfrak{m}\}$ で，極小元は一致するので $\mathfrak{m} \in \operatorname{Ass} N$，すなわち単射 $k \to N$ が存在し，全射 $0 = N^\vee \to k^\vee = k$ が存在する．これは矛盾である．（証明終）

命題 *8.3.6*

$(A, \mathfrak{m}, k)$ を完備 Noether 局所環とする．N を Artin 加群であることは，ある n が存在して，単射 $N \to E^n$ が存在することと同値である．

証明.

命題 8.3.5 から E^n は Artin だから，$(\Longrightarrow)$ のみみればよい．N を Artin とすると，$\operatorname{Soc} N$ も Artin で，これは k 線型空間としても Artin だから，命題 2.2.8 より $r(N) = \dim_k \operatorname{Soc} N < \infty$ である．また，任意の $x \neq 0 \in N$ に対して $Ax \cap \operatorname{Soc} N = \operatorname{Soc} Ax$ で，また Ax も Artin だから $\operatorname{depth} Ax = 0$ で，$\operatorname{Soc} Ax \neq 0$ である．よって $\operatorname{Soc} N \subset N$ は本質的で，入射包絡のとり方から $N \subset \mathrm{E}(\operatorname{Soc} N) \cong \mathrm{E}^{r(N)}$ である．（証明終）

命題 *8.3.7*

$(A, \mathfrak{m}, k)$ を Noether 局所環とする．M を A 加群とすると，自然な写像；

$$\varphi : M \to M^{\vee\vee}; x \mapsto (f \mapsto f(x))$$

は単射である．

証明.

$x \in \ker \varphi$ とし，$x \neq 0$ とする．すると，$0 \neq y \in E$ により；

$$f : Ax \to E; x \mapsto y$$

が定まり，これはゼロでない．このとき，E が入射的だからこれは $\widetilde{f} : M \to E$ に持ち上がり，$\widetilde{f}(x) \neq 0$ となるが，これは矛盾である．（証明終）

これらの準備を踏まえれば，Matlis の双対定理は簡単に示すことができる．

定理 *8.3.3* の証明.

(i) M を Noether 加群とすると，ある $n \geq 0$ について全射 $A^n \to M$ があり，これにより単射 $M^\vee \to E^n$ があることになって $M^\vee$ は Artin である．また N を Artin とすると，命題 8.3.6 から単射 $N \to E^n$ があって，全射 $A^n \to N^\vee$ が得られるので $N^\vee$ は Noether である．

(ii) M を Noether とすると，自然な；

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & K & \longrightarrow & A^n & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & K^{\vee\vee} & \longrightarrow & A^n & \longrightarrow & M^{\vee\vee} & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

において命題 8.3.7 から $M \to M^{\vee\vee}$ は単射で，また蛇の補題から全射であることもわかる．また N を Artin とすると；

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & E^n & \longrightarrow & C & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & N^{\vee\vee} & \longrightarrow & E^n & \longrightarrow & C^{\vee\vee} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

についても命題 8.3.7 と蛇の補題から $N \to N^{\vee\vee}$ は同型である．

（証明終）

Matlis の双対定理は完備な場合に証明したが，次の事実により一般の Noether 環においても適用できる場合があることを注意しておく．

定理 *8.3.8*

$(A, \mathfrak{m}, k)$ を Noether 局所環，$E = \mathrm{E}_A(k)$ とする．このとき E は $\widehat{A}$ 加群とみなせ，また $E = \mathrm{E}_A(k) \cong \mathrm{E}_{\widehat{A}}(k)$ である．

証明.

A 線型写像 $E \to \mathrm{E} \otimes_A \widehat{A}; x \mapsto x \otimes 1$ を考える．$x \neq 0$ であるとき，$Ax \otimes_A \widehat{A} \cong (x \otimes 1)\widehat{A}$ であって，$\widehat{A}$ は A 上忠実平坦（命題 4.4.5）なので命題 1.5.10 から $Ax \otimes \widehat{A} \neq 0$ であるから $x \otimes 1 \neq 0$ である．よってこれは単射．また任意の $x \otimes (a_i) \in E \otimes_A \widehat{A}$ をとると，$x \in E$ よりある $n \geq 0$ が存在して $\mathfrak{m}^n x = 0$ である．このとき (a_n) と (a_i) は $i \geq n$ のとき $a_i - a_n \in \mathfrak{m}^i$ で，$\mathfrak{m}^n x = 0$ だから $x \otimes (a_n) = x \otimes (a_i)$ である．よって $E \to E \otimes_A \widehat{A}$ は全射となり，同型である．これによって E は $\widehat{A}$ 加群とみなせる．

さて $\widehat{A}/\widehat{\mathfrak{m}} \cong k \subset E$ は本質的なので，E が $\widehat{A}$ 加群として入射的であることを示せばよい．I を $\widehat{A}$ のイデアルとする．$\widehat{A}$ 線型写像 $\varphi : I \to E$ を考える．ここで $\widehat{A}$ は Noether なので I は有限生成だから，ある $n \geq 0$ が存在して $\varphi(\widehat{\mathfrak{m}}^n I) = \widehat{\mathfrak{m}}^n \varphi(I) = 0$ である．いま，Artin–Rees の補題（定理 4.3.10）から，ある $k \geq 0$ が存在して，任意の $i \geq k$ に対して；

$$\widehat{\mathfrak{m}}^k \widehat{A} \cap I = \widehat{\mathfrak{m}}^{i-k}(\widehat{\mathfrak{m}}^k \widehat{A} \cap I)$$

であるので，$i = n+k$ とすれば $\widehat{\mathfrak{m}}^k \widehat{A} \cap I \subset \widehat{\mathfrak{m}}^n I$ であるので $\varphi(\widehat{\mathfrak{m}}^k \widehat{A} \cap I) = 0$ となり，$I/(\widehat{\mathfrak{m}}^k \cap I) \cong (I + \widehat{\mathfrak{m}}^k \widehat{A})/\widehat{\mathfrak{m}}^k \widehat{A}$ に注意して $\varphi : (I + \widehat{\mathfrak{m}}^k \widehat{A})/\widehat{\mathfrak{m}}^k \widehat{A} \to E$ とみなせる．ここで定義域は $\widehat{A}/\widehat{\mathfrak{m}}^k \widehat{A} \cong A/\mathfrak{m}^k$ のイデアルなので，これは $A/\mathfrak{m}^k$ にのびる．よって $\widehat{A} \to E$ とでき，E は入射的 $\widehat{A}$ 加群である．k を本質的に含むことは明らかなので，E は $\widehat{A}$ 加群として k の入射包絡であることがわかった．　（証明終）

§ 4　外積代数

この節では，外積代数と呼ばれる**非可換環**を定義し，Koszul 複体を扱うための準備をする．非可換環とはいっても，可換環上の加群になっている場合を扱うため，環構造が本質なわけではない．従来どおり，**単に環といった場合には可換環を指す．**

定義 *8.4.1*（多元環）

A を環，E を A 加群とする．乗法 $\cdot : E \times E \to E$ で，任意の $x, y, z \in E, a, b \in A$ に対して；

(i)（結合的） $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$.

(ii)（単位的） ある $e \in E$ が存在して，$e \cdot x = x \cdot e = x$ である．

(iii)（A-双線型） $(ax + by) \cdot z = ax \cdot z + by \cdot z, x \cdot (ay + bz) = ax \cdot y + bx \cdot z$.

を満たすものがあるとき，組 $(E, \cdot)$ を A **多元環 (associative A–algebra)** という．

この定義によって，E は非可換環である．多元環とは，スカラー倍と整合性のあるような環構造を持つ A 加群，ととらえることができる．

多元環のなかでも代表的なものを紹介しよう．

定義 *8.4.2*（行列多元環）

A を環とする．A の元を整数とする $n \times n$ 正方行列全体を $\mathrm{M}_n(A)$ で表す．これは A 多元環の構造を持ち，**行列多元環 (Matrix algebra)** と呼ばれる．

これは可換とは限らない環 R 上考えることができるが，$\mathrm{M}_n(R)$ が可換であることと $n = 1$ かつ R が可換であることを注意しておく．単位行列を $E_n = (\delta_{ij})$ とおく．ここで δ_{ij} は Kronecker のデルタである．行列 $A \in \mathrm{M}_n(A)$ が**正則** (regular) であるとは，ある $B \in \mathrm{M}_n(A)$ が存在して $AB = E_n$ とかけることをいう．正則行列全体を $\mathrm{GL}_n(A)$ で表す．これは**一般線型群 (general linear group)** と呼ばれる．

定義 *8.4.3*（テンソル代数）

A を環，M を A 加群とする．M の i 個のテンソル積を；

$$M^{\otimes i} = \underbrace{M \otimes \cdots \otimes M}_{i\ \text{個}}, M^{\otimes 0} = A$$

とおき；

$$\bigotimes M = \bigoplus_{i=0}^{\infty} M^{\otimes i}$$

を M の**テンソル代数** (tensor algebra) という．

多元環としての積は；

$$M^{\otimes m} \times M^{\otimes n} \to M^{\otimes m+n}; (x_1 \otimes \cdots \otimes x_m, y_1 \otimes \cdots \otimes y_n) \mapsto x_1 \otimes \cdots \otimes x_m \otimes y_1 \otimes \cdots \otimes y_n$$

を線型に拡張することで定める．またこれによりテンソル代数は次数構造を持つ．

命題 *8.4.4*（テンソル代数の普遍性）

A を環，M を A 加群，E を A 多元環，$\varphi : M \to E$ を A 線型とする．このとき，多元環の準同型；

$$\widetilde{\varphi} : \bigotimes M \to E$$

で，自然な包含 $\iota : M \to \bigotimes M$ に対して $\varphi = \widetilde{\varphi} \circ \iota$ が成り立つものが一意的に存在する．

証明.

$n \geq 2$ とする．

$$\varphi_n : \underbrace{M \times \cdots \times M}_{n\text{ 個}} \to E; (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \varphi(x_1) \cdots \varphi(x_n)$$

は A 多重線型となり，テンソル積の普遍性から $\widetilde{\varphi}_n : M^{\otimes n} \to N$ が存在して；

$$\begin{tikzcd} M \times \cdots \times M \arrow[r, "\varphi_n"] \arrow[d, hook] & E \\ M^{\otimes n} \arrow[ur, "\widetilde{\varphi}_n"'] & \end{tikzcd}$$

Figure.15

が可換となる．$n = 0, 1$ については e を E の単位元として；

$$\widetilde{\varphi}_0 : A \to E; a \mapsto ae,\ \widetilde{\varphi}_1 = \varphi$$

とする．これらにより；

$$\widetilde{\varphi} : \bigotimes M \to E; x_1 \otimes \cdots \otimes x_n \mapsto \widetilde{\varphi}_i(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n)$$

を定めると，これが求める条件を満たす．

A 多元環の準同型であることは構成から明らかであり，また $\psi : \bigotimes M \to E$ が同じ可換性を持つとすると，A 多元環の準同型であることから；

$$\psi(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) = \psi(x_1) \cdots \psi(x_n)$$

であるが，可換性より $\psi(x_i) = \varphi(x_i)$ でなければならないので，$\psi = \widetilde{\varphi}$ である．（証明終）

定義 *8.4.5*（外積代数）

A を環，M を A 加群とする．I_M を $\{x \otimes x \mid x \in M\}$ が生成する $\bigotimes M$ の両側イデアルとする．このとき；

$$\bigwedge M = (\bigotimes M)/I_M$$

を M の**外積代数 (exterior algebra)** という．$x_1 \otimes \cdots \otimes x_n$ の像を $x_1 \wedge \cdots \wedge x_n$ とかく．

定義より，任意の $x \in M$ について $x \wedge x = 0$ である．また；

$$(x + y) \otimes (x + y) = x \otimes x + x \otimes y + y \otimes x + y \otimes y$$

であるから，つねに $x \wedge y = -y \wedge x$ が成り立つ．これを一般化した計算規則が次である．

命題 *8.4.6*

A を環，M を A 加群とする．$x_1 \wedge \cdots \wedge x_n \in \bigwedge M$ について；

(i) ある $1 \leq i \neq j \leq n$ について $x_i = x_j$ ならば，$x_1 \wedge \cdots \wedge x_n = 0$ である．
(ii) 任意の $\sigma \in S_n$ について，$x_{\sigma(1)} \wedge \ldots x_{\sigma(n)} = \mathrm{sgn}(\sigma) x_1 \wedge \cdots \wedge x_n$ である．

が成り立つ．

証明.

(i) $n=2$ のときは自明である．n についての帰納法で示す．$n-1$ まで正しいとする．$i=1, j=n$ の場合以外は帰納法の仮定からすでに示されている．

$$x_1 \otimes x_2 \otimes \cdots \otimes x_{n-1} \otimes x_1 + x_1 \otimes \cdots \otimes x_1 \otimes x_{n-1} = (x_1 \otimes \cdots \otimes x_{n-2}) \otimes (x_{n-1} \otimes x_1 + x_1 \otimes x_{n-1})$$

であって，先の計算から $x_{n-1} \otimes x_1 + x_1 \otimes x_{n-1} \in I_M$ である．また帰納法の仮定から $x_1 \otimes \cdots \otimes x_1 \otimes x_{n-1} \in I_M$ であるので，$x_1 \otimes x_2 \otimes \cdots \otimes x_{n-1} \otimes x_1 \in I_M$ となる．よって示された．

(ii) (i) のように元をひっくり返すことを繰り返せばよい．

（証明終）

$x_1, \ldots, x_n \in M$ を固定する．有限集合 $I = \{i_1, \ldots, i_m\} \subset \{1, \ldots, n\}$ $(i_1 < \cdots < i_m)$ について，$x_I = x_{i_1} \wedge \cdots \wedge x_{i_m}$ とおく．また $x_\emptyset = 1$ と約束する．

命題 *8.4.7*

A を環，M を A 加群とする．$x_1, \ldots, x_n \in M$ について，$J, K \subset \{1, \ldots, n\}$ に対し；

$$i = \#\{(j,k) \in J \times K \mid j > k\},\ \operatorname{sgn}(J,K) = \begin{cases} (-1)^i & \text{if } J \cap K = \emptyset \\ 0 & \text{if } J \cap K \neq \emptyset \end{cases}$$

とおくと，$x_J \wedge x_K = \operatorname{sgn}(J,K) x_{J \cup K}$ である．

証明は明らかであろう．ところで，I_M は斉次イデアルであるので，$\bigwedge M$ には $M^{\otimes i}$ の像を $\bigwedge^i M$ とおくことで；

$$\bigwedge M = \bigoplus_{i=0}^{\infty} \bigwedge^i M$$

となり，次数構造が入る．

命題 *8.4.8*（外積代数の普遍性）

A を環，M を A 加群，E を A 多元環，$\varphi : M \to E$ を A 線型とする．また，任意の $x \in M$ について $\varphi(x)^2 = 0$ であるとき，多元環の準同型；

$$\widetilde{\varphi}' : \bigwedge M \to E$$

が存在して，自然な $M \hookrightarrow \bigwedge M$ との合成が φ となる．

証明.

テンソル代数の普遍性から $\widetilde{\varphi} : \bigotimes M \to E$ が存在し，$I_M \subset \ker \widetilde{\varphi}$ なので $\bigwedge M$ に well-defined に誘導できる．

（証明終）

命題 *8.4.9*

A を環とし，M を A 加群とする．r を M の生成系の個数とすると，任意の $i > r$ について $\bigwedge^i M = 0$ である．

証明.

r が有限の場合のみを考えれば十分である．$u_1, \dots, u_r$ を M の生成系とすると，

$$\bigwedge^r M = \{au_1 \wedge \cdots \wedge u_r \mid a \in A\}$$

であるので，$\bigwedge^{r+1} M = 0$ がわかる．よって題意が従う．（証明終）

命題 *8.4.10*

A を環とし，M, N を A 加群とする．$\varphi : M \to N$ を A 線型とする．このとき；

$$\bigwedge \varphi : \bigwedge M \to \bigwedge N; x_1 \wedge \cdots \wedge x_n \mapsto \varphi(x_1) \wedge \cdots \wedge \varphi(x_n)$$

が well-defined に定まる．

証明.

$x_1 \otimes \cdots \otimes x_n \in I_M$ ならば，これはある $1 \leq i \neq j \leq n$ について $x_i = x_j$ となっている元の線型和だから $\varphi(x_1) \otimes \cdots \otimes \varphi(x_n) \in I_N$ であるから，$\bigwedge \varphi$ が well-defined に定まる．（証明終）

これにより外積代数は関手的である．$\bigwedge(f \circ g) = \bigwedge f \circ \bigwedge g, \bigwedge \mathrm{id}_M = \mathrm{id}_{\bigwedge M}$ であることを確かめよ．また明らかに φ が全射なら，$\bigwedge \varphi$ も全射である．一方で単射が単射に移るとは限らない（例 B.3.2）．

外積代数のテンソル積もまた外積代数になることが知られている．まずはテンソル積に多元環としての構造を入れよう．M_1, M_2 を A 加群とする．演算を；

$$\begin{aligned}(x_1 \wedge \cdots \wedge x_m) \otimes (y_1 \wedge \cdots \wedge y_n) \cdot (x'_1 \wedge \cdots \wedge x'_k) \otimes (y'_1 \wedge \cdots \wedge y'_l) \\ = (-1)^{nk}(x_1 \wedge \cdots \wedge x_m \wedge x'_1 \wedge \cdots \wedge x'_k) \otimes (y_1 \wedge \cdots \wedge y_n \wedge y'_1 \wedge \cdots \wedge y'_l)\end{aligned}$$

で定めると；

$$\bigwedge M_1 \otimes \bigwedge M_2 \cong \bigoplus_{i=1}^{\infty} \bigwedge^i M_1 \otimes \bigoplus_{j=1}^{\infty} \bigwedge^j M_2 \cong A \oplus M_1 \otimes A \oplus A \otimes M_2 \oplus \cdots$$

であるから，n 次斉次部分を $\bigoplus_{i+j=n} \bigwedge^i M_1 \otimes \bigwedge^j M_2$ とする次数付き A 多元環になる．

命題 *8.4.11*

A を環とし，M_1, M_2 を A 加群とすると，次数構造も含めての同型；

$$\bigwedge M_1 \otimes \bigwedge M_2 \cong \bigwedge (M_1 \oplus M_2)$$

が存在する．

証明.

1 次部分の間の射；

$$M_1 \oplus M_2 \to M_1 \otimes A \oplus A \otimes M_2; x + y \mapsto (x \otimes 1) + (1 \otimes y)$$

を考えると，$((x \otimes 1) + (1 \otimes y))((x \otimes 1) + (1 \otimes y)) = 0$ であるので命題 8.4.8 より；

$$\varphi : \bigwedge (M_1 \oplus M_2) \to \bigwedge M_1 \otimes \bigwedge M_2$$

が定まる．逆は；

$$\psi : \bigwedge M_1 \otimes \bigwedge M_2 \to \bigwedge(M_1 \oplus M_2); (x_1 \wedge \cdots \wedge x_m) \otimes (y_1 \wedge \cdots \wedge y_n) \mapsto x_1 \wedge \cdots \wedge x_m \wedge y_1 \wedge \cdots \wedge y_n$$

が与える．（証明終）

命題 *8.4.12*

A を環，F を $\{e_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を基底とする A 自由加群とする．Λ を整列させて，有限部分集合 $I \subset \Lambda$ の元を $I = \{\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n\}$ と表示する．$\mathcal{F}(\Lambda) = \{I \subset \Lambda \mid \#I < \infty\}$ とおくと，$\bigwedge F$ は $\{e_I\}_{I\in\mathcal{F}(\Lambda)}$ を基底とする自由 A 加群となる．

証明.

F が有限生成の場合に証明すれば十分である．なぜなら有限生成の場合に正しいとし，$\{e_I\}_{I\in\mathcal{F}(\Lambda)}$ が基底でないとすると，自明でない関係式 $\sum a_j e_{I_j} = 0$ がある．このとき，Λ' を $a_j \neq 0$ となる j についての I_j の和集合とすると Λ' は空でない有限集合で，F' を $\{e_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda'}$ で生成される有限生成自由 A 加群とすると，$\mathcal{F}(\Lambda')$ は Λ' の冪集合にほかならず，$\bigwedge F$ は $\{e_I\}_{I\subset\Lambda'}$ を基底とする自由加群になるが，これは Λ' の構成に矛盾する．

よって F を有限生成としてよい．$F = \bigoplus_{i=1}^n Ae_i$ とすると，$\bigwedge Ae_i = A \oplus Ae_i$ であり（命題 8.4.9）；

$$\bigwedge F \cong \bigwedge Ae_1 \otimes \cdots \otimes \bigwedge Ae_n \cong (A \oplus Ae_1) \otimes \cdots \otimes (A \oplus Ae_n)$$

であるから $\bigwedge F$ は自由であり，右辺の基底は；

$$\{u_1 \otimes \cdots \otimes u_n \mid u_i \in \{1, e_i\}\}$$

なので，対応する $\bigwedge F$ の基底は $u_1 \wedge \cdots \wedge u_n$ だから，証明が完了した．（証明終）

系 *8.4.13*

A を環とし，P を射影的 A 加群とする．このとき $\bigwedge P$ も射影的 A 加群である．特に各 i について $\bigwedge^i P$ も射影的である．

証明.

F を P を直和因子とする自由 A 加群とする．自然な移入と射影 $\iota : P \to F, \pi : F \to P$ を考えると，$\pi \circ \iota = \mathrm{id}_P$ であって，$(\bigwedge \pi) \circ (\bigwedge \iota) = \mathrm{id}_{\bigwedge P}$ となるので $\bigwedge \pi$ は分裂全射であり，$\bigwedge P$ は自由加群 $\bigwedge F$ の直和因子となるので射影的である．（証明終）

補題 *8.4.14*

A を環，M, N を A 加群とする．$x_1, \ldots, x_n \in M$ について $x_1 \wedge \cdots \wedge x_n = 0$ とすると，n 重交代線型写像 $f : M^n \to N$ について $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$ である．

証明.

テンソル積の普遍性から A 線型写像 $\widetilde{f} : M^{\otimes n} \to N$ が存在して $\widetilde{f}(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) = f(x_1, \ldots, x_n)$ である．ここで $x_1 \otimes \cdots \otimes x_n \in I_M$ より，$x \otimes x$ の倍元の線型和だから $I_M \subset \ker \widetilde{f}$ に注意して；

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \widetilde{f}(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) = 0$$

が成り立つ．（証明終）

命題 *8.4.15*

A を環，P を射影的 A 加群とする．$x_1, \ldots, x_n \in P$ について，ある $a \neq 0 \in A$ が存在して $ax_1 \wedge \cdots \wedge x_n = 0$ ならば，$x_1, \ldots, x_n$ は線型従属である．

証明.

n についての帰納法で示す．$n = 1$ のときは自明なので，$n > 1$ とする．もし $ax_2 \wedge \cdots \wedge x_n = 0$ なら帰納法の仮定から明らかなので，$ax_2 \wedge \cdots \wedge x_n \neq 0$ と仮定する．すると系 8.4.13 より $\bigwedge^{n-1} P$ も射影的だから，$f(ax_2 \wedge \cdots \wedge x_n) = b \neq 0$ となる $f \in \mathrm{Hom}(\bigwedge^{n-1} P, A)$ が存在する（命題 6.4.3）．ここで；

$$P^n \to P; (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} x_i f(x_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{x_i} \wedge \cdots \wedge x_n)$$

は n 重交代線型写像であるので，$x_1 \wedge ax_2 \wedge \cdots \wedge x_n = 0$ に補題を適用して；

$$bx_1 + ax_2 f(x_1 \wedge x_3 \wedge x_4 \wedge \cdots \wedge x_n)x_3 + \cdots + (-1)^n f(x_1 \wedge \cdots \wedge x_{n-1}) = 0$$

であるから $x_1, \ldots, x_n$ は線型従属であることがわかった．（証明終）

定理 *8.4.16*

M, N を射影的 A 加群とすると，単射 A 線型写像 $\varphi : M \to N$ に対して $\bigwedge \varphi$ も単射である．

証明.

まず M を自由であるとする．$\{e_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を M の基底とすると，$\{e_J\}_{J \in \mathcal{F}(\Lambda)}$ が $\bigwedge M$ の基底である．$u = \sum a_J e_J \in \ker \bigwedge f$ をとり，$u \neq 0$ と仮定する．$a_J \neq 0$ となる J は有限個なので，$\bigcup_{a_J \neq 0} J = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ とおく．極小な J_0 を 1 つ固定し，$K = \bigcup_{a_J \neq 0} J \setminus J_0$ とすると；

$$u \wedge e_K = \mathrm{sgn}(J_0, K) e_{J_0 \cup K}$$

となり，$\mathrm{sgn}(J_0, K) f(e_{\lambda_1}) \wedge \cdots \wedge f(e_{\lambda_n}) = 0$ がわかるので，先の命題から $\{f(e_{\lambda_i})\}$ は線型従属となるが，これは f が単射であることに矛盾する．よって $\bigwedge f$ は単射である．

次に M が一般の射影加群であるとすると，M は自由加群 F の直和因子である．$F \cong M \oplus K$ と表し，単射線型写像 $g : F \to N \oplus F; (x, y) \mapsto (f(x), 0, y)$ を考えると，次の図式；

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & N \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ F & \xrightarrow{g} & N \oplus F \end{array}$$

Figure.16

が可換である．ここで F は自由だから $\bigwedge g$ は単射で，$M \to F$ は分裂しているので単射（系 8.4.13 の証明もみよ）であるから，$\bigwedge f$ も単射でなければならない．（証明終）

一般に A, B を環とし，$f : A \to B$ を環準同型（すなわち B は A 代数）とする．このとき，A 多元環 E の係数拡大 $E \otimes_A B$ は $(x \otimes b)(y \otimes b') = xy \otimes bb'$ により B 多元環となる．

命題 *8.4.17*（係数環の拡大）

A, B を環とし，$f : A \to B$ を環準同型とする．このとき，A 加群 M について，B 加群として；

$$(\bigwedge M) \otimes_A B \cong \bigwedge (M \otimes_A B)$$

が成り立つ．

証明.

$\iota : M \to \bigwedge M$ と id_B のテンソル積 $M \otimes_A B \to (\bigwedge M) \otimes_A B$ は B 線型である．またこれは 2 乗すると 0 であるので，外積代数の普遍性から；

$$\varphi : \bigwedge (M \otimes_A B) \to (\bigwedge M) \otimes_A B$$

が得られる．これの逆は；

$$\psi : (\bigwedge M) \otimes_A B \to \bigwedge (M \otimes_A B); x_1 \wedge \cdots \wedge x_n \otimes b \mapsto b(x_1 \otimes 1) \wedge \cdots \wedge (x_n \otimes 1)$$

が与える．（証明終）

§ 5　Koszul 複体

定義 *8.5.1*（Koszul 複体）

A を環とし，L を A 加群，$f : L \to A$ を A 線型写像とする．

$$d_{f,n} : \bigwedge^n L \to \bigwedge^{n-1} L; x_1 \wedge \cdots \wedge x_n \mapsto \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} f(x_i) x_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{x_i} \wedge \cdots \wedge x_n$$

が定める複体；

$$\cdots \longrightarrow \bigwedge^n L \xrightarrow{d_{f,n}} \bigwedge^{n-1} L \longrightarrow \cdots \longrightarrow \bigwedge^2 L \xrightarrow{d_{f,2}} L \xrightarrow{f} A \longrightarrow 0$$

を $K_\bullet(f)$ とかき，これを f の **Koszul 複体 (Koszul complex)** という．また，A 加群 M について；

$$K_\bullet(f, M) = K_\bullet \otimes_A M, d_{f,M} = d_f \otimes \mathrm{id}_M$$

を f の M 係数 Koszul 複体という．

$\bigwedge L = \bigoplus_{i=1}^{\infty} \bigwedge^i L$ により，Koszul 複体は多元環としての次数構造をもつ．以後，単に $\bigwedge L$ とかいたら A 線型写像 $f : L \to A$ とともに Koszul 複体としての構造も備えているものと考えていることに注意してほしい．また，$K_\bullet(f, M)$ を $\bigwedge L \otimes M$ の定める複体として定義しているが $\bigwedge L \otimes M$ は（左）$\bigwedge L$ 加群としての構造をもつ．すなわち $\bigwedge L \otimes M$ の元は $y \otimes m$ の形の元の線型和であるので，$x \in \bigwedge L$ について $x(y \otimes m) = (x \wedge y) \otimes m$ と定めればよい．

複体 $K_\bullet(f)$ の n 次のホモロジーを $H_n(f)$ とかく．次の命題（計算規則）により，$\ker d_f = \bigoplus \ker d_{f,n}$ と $H_\bullet(f) = \bigoplus H_n(f)$ は次数付き構造をもつことがわかる．

補題 *8.5.2*

環 A 上で線型写像 $f : L \to A$ が定める Koszul 複体 $K_\bullet(f)$ を考える．$x, y \in \bigwedge L, z \in \bigwedge L \otimes M$ とし，x を斉次元とする．このとき；

(i) $d_f(x \wedge y) = d_f(x) \wedge y + (-1)^{\deg x} x \wedge d_f(y)$
(ii) $d_{f,M}(x\,z) = d_f(x)\,z + (-1)^{\deg x} x d_{f,M}(z)$

が成り立つ．

証明.

線型性から y, z を和に分解して $y = y_1 \wedge \cdots \wedge y_m, z = y' \otimes m$ としてよいことに気をつければ，ただの単純計算である．（証明終）

命題 *8.5.3*

環 A 上で線型写像 $f : L \to A$ が定める Koszul 複体 $K_\bullet(f)$ を考える．$\ker d_f$ は $\bigwedge L$ の次数付き A 部分多元環になり，$H_\bullet(f)$ はそこから誘導される次数付き（交代）A 多元環の構造を持つ．

証明.

先の計算規則から一般に A 加群 M に対して；

(i) $\ker d_f \ker d_{f,M} \subset \ker d_{f,M}$
(ii) $\ker d_f \operatorname{Im} d_{f,M} \subset \operatorname{Im} d_{f,M}$
(iii) $\operatorname{Im} d_f \ker d_{f,M} \subset \operatorname{Im} d_{f,M}$

が成り立つことがわかる．$M = A$ のときの $K_\bullet(f, M)$ が $K_\bullet(f)$ にほかならないことから $\ker d_f$ が A 多元環の構造を持つこと．また $\operatorname{Im} d_f$ が $\ker d_f$ の両側イデアルとなることがわかる．（証明終）

定義 *8.5.4*（Koszul 余鎖複体）

A を環，$f : L \to A$ を線型写像とする．反変関手 $\mathrm{Hom}(-, A)$ により，余鎖複体；

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow \mathrm{Hom}(L, A) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\textstyle\bigwedge^2 L, A) \longrightarrow \cdots$$

が得られる．これを $K^\bullet(f)$ とかき，**Koszul 余鎖複体 (Koszul cohain complex)** という．

M 係数については，$K^\bullet(f, M) = \mathrm{Hom}(K_\bullet(f), M)$ で定める．

さて，一般に $f_1 : L_1 \to A, f_2 : L_2 \to A$ があったとき，$f : L_1 \oplus L_2 \to A; (x_1, x_2) \mapsto f_1(x_1) + f_2(x_2)$ により A 線型写像が定まる．命題 8.4.11 により，$K_\bullet(f)$ と $K_\bullet(f_1), K_\bullet(f_2)$ の間にはテンソル積を介した関係があるのでは，と推測することは自然であろう．これを定式化するために複体のテンソル積を定義する．

定義 8.5.5（複体のテンソル積）

$K_\bullet, L_\bullet$ を A 加群の複体とする．二重複体 $W_{p,q} = K_p \otimes L_q$ の全複体；

$$T_n = \bigoplus_{i=0}^{n} K_i \otimes L_{n-i}, \quad d_n = \sum_{i=0}^{n} d'_i \otimes \mathrm{id}_{L_{n-1}} + (-1)^i \mathrm{id}_{K_i} \otimes d''_{n-i}$$

を $K_\bullet, L_\bullet$ の**テンソル積複体**といい，$K_\bullet \otimes L_\bullet$ で表す．

命題 8.5.6

複体のテンソル積は可換である，すなわち $K_\bullet \otimes L_\bullet = L_\bullet \otimes K_\bullet$ が成り立つ．

証明.

$x_i \otimes y_{n-i} \mapsto (-1)^{i(n-i)} y_{n-i} \otimes x_i$ を線型に拡張したものが複体の同型射を与える．（証明終）

命題 8.5.7

上の記号のもとに $K_\bullet(f_1) \otimes K_\bullet(f_2) \cong K_\bullet(f)$ である．

証明.

命題 8.4.11 の証明によって；

$$\bigwedge L_1 \otimes \bigwedge L_2 \to \bigwedge (L_1 \oplus L_2) : (x_1 \wedge \cdots \wedge x_m) \otimes (y_1 \wedge \cdots \wedge y_n) \mapsto x_1 \wedge \cdots \wedge x_m \wedge y_1 \wedge \cdots \wedge y_n$$

が同型射だった．これが複体の射にもなる．（証明終）

$a_1, \ldots, a_n \in A$ について，自由加群 A^n の基底を $\{e_i\}$ とおいたとき，$f : A^n \to A; e_i \mapsto a_i$ により Koszul 複体 $K_\bullet(f)$ が定まる．これは $K_\bullet(a_1, \ldots, a_n)$ ないし $K_\bullet(\underline{a})$ とかかれ，この形の Koszul 複体がよく使われる．上の命題により，即座に a_i の順番によらないことがわかる．

系 8.5.8

A を環とする．$a_1, \ldots, a_r \in A$ について，$K_\bullet(\underline{a}) = K_\bullet(a_1, \ldots, a_r)$ は順番によらない．

$K_\bullet(\underline{a}, M) = K_\bullet(\underline{a}) \otimes M$ のホモロジーを $H_i(\underline{a}, M)$，また $K^\bullet(\underline{a}, M) = \mathrm{Hom}(K_\bullet(\underline{a}), M)$ のコホモロジーを $H^i(\underline{a}, M)$ とかく．

命題 8.5.9

A を環とする．$a_1, \ldots, a_r \in A$ と A 加群 M について，$I = (a_1, \ldots, a_r)$ とすると，任意の i について $IH_i(\underline{a}, M) = 0$ である．

証明.

定義から $H_0(\underline{a}, M) = M/IM$, $H_r(\underline{a}, M) = \{x \in M \mid Ix = 0\}$ である．また $0 < i < r$ について $x \in \ker d_i$ とすると；

$$x = \sum c_j (e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_i}) \otimes y_j \ (c_j \in A, y_j \in M)$$

とかけている．この式の j 成分を x_j とおくとき，各 $1 \le k \le r$ について；

$$d_{i+1}(\sum c_j (e_k \wedge e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_i}) \otimes y_j) = \sum d_{i+1}(c_j (e_k \wedge e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_i}) \otimes y_j) = \sum a_k x_j - e_k \wedge d_i(x_j) = a_k x$$

となり，$a_k x \in \operatorname{Im} d_{i+1}$ である．よって $IH_i(\underline{a}, M) = 0$ である．（証明終）

命題 8.5.10

A を環とし，$a_1, \dots, a_r \in A$ について $I = (a_1, \dots, a_r)$ とおくと，自然な A 線型写像；

$$H_i(\underline{a}, M) \to \operatorname{Tor}_i(A/I, M), \quad \operatorname{Ext}^i(A/I, M) \to H^i(\underline{a}, M)$$

がある．

証明.

A/I の射影分解を $P_\bullet$ とする．$\mathrm{id}_{A/I}$ の持ち上げを考えて，次の各行が可環な図式；

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \bigwedge^2 A^r \arrow[r] \arrow[d, dashed, "f_2"] & A^r \arrow[r] \arrow[d, dashed, "f_1"] & A \arrow[dr, "\varepsilon"] \arrow[d, "f_0"] & & \\
 & & & & A/I \arrow[r] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & P_2 \arrow[r] & P_1 \arrow[r] & P_0 \arrow[ur, "\varepsilon'"] & &
\end{tikzcd}$$

を得る．よって複体の射 $f_\bullet : K_\bullet(\underline{a}) \to P_\bullet$ に対して $- \otimes M, \operatorname{Hom}(-, M)$ を施して題意を得る．（証明終）

これが同型になるための条件として，$a_1, \dots, a_r$ が正則列ならよいことを示していこう．まず Koszul ホモロジーとコホモロジーの間に自然な同型があることをみる．階数 r の自由加群 F について，$\bigwedge^i L$ は階数が $\binom{r}{i}$ であるから，自然な同型 $\bigwedge^i L \cong \bigwedge^{r-1} L$ に注意しよう．特に自然な同型 $\omega_r : \bigwedge^r L \to A; e_1 \wedge \cdots \wedge e_r \mapsto 1$ が存在する．

命題 8.5.11

A を環とし，$a_1, \dots, a_r$ が定める Koszul 複体を考える．任意の $0 \le i \le r$ について；

$$\omega_i : \bigwedge^i L \to (\bigwedge^{r-i} L)^*; x \mapsto (y \mapsto \omega_n(x \wedge y))$$

と定めると，これは同型射であり，また $\tau_i = (-1)^{i(i-1)/2} \omega_i$ は $K_\bullet(\underline{a})$ と $K^\bullet(\underline{a})$ の間の複体の同型射を与える．

証明.

まず同型射であることを確かめよう．$\mathscr{G}_i = \{I \subset \{1, \dots, r\} \mid \# I = i\}$ とおくと $\{e_I\}_{I \in \mathscr{G}_i}$ が $\bigwedge^i L$ の基底であることに注意する．

$x \in \bigwedge^i L$ に対して，$\omega_i(x) = 0$ であるとする．$x = \sum_{I \in \mathscr{G}_i} a_I e_I$ とおく．各 I に対して $J_I = \{1, \dots, r\} \setminus I$ とおくと，$\operatorname{sgn}(I, J_I) \neq 0$ であって $e_I \wedge e_{J_I} = \operatorname{sgn}(I, J_I) = e_1 \wedge \cdots \wedge e_n$ である．また $I \neq I' \in \mathscr{G}_i$ に対して $I' \cap J_I \neq \emptyset$ だから；

$$x \wedge e_{J_I} = a_I \operatorname{sgn}(I, J_I) e_1 \wedge \cdots \wedge e_r$$

であるので，$w_r(x \wedge e_{J_I}) = a_I \operatorname{sgn}(I, J_I) = 0$ だから $a_I = 0$ である．よって $x = 0$ となる．これで単射であることが示された．また任意の $f : \bigwedge^{n-i} L \to A$ に対して，基底 $\{e_I\}_{I \in \mathscr{G}_{r-i}}$ の像をそれぞれ a_I と，また $J_I = \{1, \dots, n\} \setminus I$ とおくと，$x = a_I \operatorname{sgn}(I, J_I) e_{J_I}$ とおけば $x \in \bigwedge^i L$ であって，$f = \omega_i(x)$ である．よって同型であることがわかった．

複体の射であること，すなわち；

$$\begin{CD} 0 @>>> \bigwedge^r L @>d>> \bigwedge^{r-1} L @>d>> \cdots @>d>> L @>d>> A @>>> 0 \\ @. @VV\tau_rV @VV\tau_{r-1}V @. @VV\tau_1V @VV\tau_0V \\ 0 @>>> A @>d^*>> L^* @>d^*>> \cdots @>d^*>> (\bigwedge^{r-1} L)^* @>d^*>> (\bigwedge^r L)^* @>>> 0 \end{CD}$$

が可換であることについては計算によって確かめられる．（証明終）

系 *8.5.12*

A を環とし，$a_1, \ldots, a_r \in A$ について，$H_i(\underline{a}, M) \cong H^{r-i}(\underline{a}, M)$ が成り立つ．

証明.

先の命題より $K_\bullet(\underline{a}) = K^\bullet(\underline{a})$ である．ここで，有限階数の自由加群 F と A 加群 M について，$\{e_i\}$ を F の基底とすると，同型 $F^* \otimes M \cong F \otimes M \cong \mathrm{Hom}(F, M)$ がある．これにより $K_\bullet(\underline{a}, M) \cong K^\bullet(\underline{a}, M)$ となって，これのホモロジーが一致することから題意を得る．（証明終）

A 加群の複体 $C_\bullet$ について，$C'_n = C_{n-1}$ となる複体 $C'_\bullet$ を $C_\bullet(-1)$ とかく．

補題 *8.5.13*

A を環とし，$a \in A$，$C_\bullet$ を A 加群の複体とする．このとき，複体の完全列；

$$0 \longrightarrow C_\bullet \longrightarrow C_\bullet \otimes K_\bullet(a) \longrightarrow C_\bullet(-1) \longrightarrow 0$$

があり，ホモロジーの間の長完全列；

$$\cdots \longrightarrow H_n(C_\bullet) \longrightarrow H_n(C_\bullet \otimes K_\bullet(a)) \longrightarrow H_{n-1}(C_\bullet) \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(C_\bullet) \longrightarrow \cdots$$

の連結射は $(-1)^{n-1}a$ 倍で与えられる．

証明.

$K_\bullet(a)$ は；

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{a\cdot} A \longrightarrow 0$$

なので，$C_\bullet \otimes K_\bullet(a)$ の n 次部分は $\bigoplus_{i=0}^n C_i \otimes K_{n-i}(a) = C_n \oplus C_{n-1}$ より，自然な；

$$0 \longrightarrow C_n \xrightarrow{\iota_n} C_n \oplus C_{n-1} \xrightarrow{\pi_n} C_{n-1} \longrightarrow 0$$

が複体の射であればよいが，これは定義から明らかである．また命題 6.5.8 の証明とその後の注意から，$C_\bullet \otimes K_\bullet(a)$ の微分を d'_n とすれば，$x_{n-1} \in C_{n-1}$ に対して；

$$\partial_n x_{n-1} = \iota_{n-1}^{-1} \circ d'_n \circ \pi_n^{-1}(x_{n-1}) = (-1)^{n-1} a x_{n-1}$$

となる．（証明終）

命題 *8.5.14*

A を環とし，M を A 加群とする．$a_1, \ldots, a_r \in A$ を M 正則列とすると，$K_\bullet(\underline{a}, M)$ は acyclic である．

証明.

n についての帰納法で示す．$r = 1$ のときは $K_\bullet(\underline{a}, M)$ は $0 \longrightarrow M \xrightarrow{a\cdot} M \longrightarrow 0$ なので明らか．$r-1$ まで正しいとする．補題 8.5.13 を $C_\bullet = K_\bullet(a_1, \ldots, a_{r-1}, M), a = a_r$ として適用すると $C_\bullet \otimes K_\bullet(a_r) = K_\bullet(\underline{a}, M)$ であるから；

$$\longrightarrow H_1(a_1, \ldots, a_{r-1}, M) \longrightarrow H_1(a_1, \ldots, a_r, M) \longrightarrow H_1(a_1, \ldots, a_{r-1}, M) \xrightarrow{-a_r}$$

$$\longrightarrow H_0(a_1, \ldots, a_{r-1}, M) \longrightarrow H_0(a_1, \ldots, a_r, M) \longrightarrow \qquad 0$$

が完全で，仮定より $H_1(a_1, \ldots, a_{r-1}, M) = 0$ であり，$K_\bullet(a_1, \ldots, a_{r-1}, M)$ を考えると $H_0(a_1, \ldots, a_{r-1}, M) \cong M/(a_1, \ldots, a_{r-1})M$ であるから，H_0 の上で $-a_r$ 倍は単射なので $H_1(a_1, \ldots, a_r, M) = 0$ であることがわかる．$i > 1$ は自然に消えているから，証明が終わる．（証明終）

系 *8.5.15*

A を環とし，A 正則列 $a_1, \ldots, a_r$ について $I = (a_1, \ldots, a_r)$ とおくと，A 加群 M について；

$$H_i(\underline{a}, M) \cong \mathrm{Tor}_i(A/I, M),\ H^i(\underline{a}, M) \cong \mathrm{Ext}^i(A/I, M)$$

であって，特に $\mathrm{Tor}_i(A/I, M) \cong \mathrm{Ext}^{r-i}(A/I, M)$ が成り立つ．

証明.

上の命題より $K_\bullet(\underline{a})$ が A/I の射影分解になるので，$\mathrm{Tor}_i(A/I, M) \cong H_i(\underline{a}, M), H^i(\underline{a}, M) \cong \mathrm{Ext}^i(A/I, M)$ であり，また系 8.5.12 と合わせて $\mathrm{Tor}_i(A/I, M) \cong \mathrm{Ext}^{r-i}(A/I, M)$ である．（証明終）

系 *8.5.16*

$(A, \mathfrak{m}, k)$ を Noether 局所環とする．$a_1, \ldots, a_d$ を極大な A 正則列とし，$I = (a_1, \ldots, a_d)$ とおくと，$\operatorname{prj.dim} A/I = d$ である．

証明.

まず $\operatorname{depth}_I A = d$ だから $\mathrm{Ext}^d(A/I, A) \neq 0$ なので，$d \leq \operatorname{prj.dim} A/I$ である．いま $K_\bullet(\underline{a})$ は長さ d の A/I の射影（自由）分解を与えるから，$\operatorname{prj.dim} A/I = d$ であることがわかる．（証明終）

§ 6　標準加群

定義 *8.6.1*（標準加群）

$(A, \mathfrak{m}, k)$ を CM 局所環とする．CM 加群 C であって，$\dim C = \dim A$ であり，入射次元が有限かつ 1 型であるものを**標準加群 (canonical module)** という．標準加群はよく ω_A と書かれる．

例えば，$(A, \mathfrak{m}, k)$ を Artin 局所環とすると，入射包絡 $\mathrm{E}(k)$ が標準加群である．逆に ω_A が Artin 局所環の標準加群であったとすると，定義から $\mathrm{Hom}(k, \omega_A) = \mathrm{Soc}\,\omega_A \cong k$ であって，命題 8.2.9 により $k \subset \omega_A$ は本質的だから $\omega_A \cong \mathrm{E}(k)$ となり，標準加群は同型を除いて一意的に存在する．また，Gorenstein 局所環は自身を標準加群として持つ．

ω_A という記号の使い方から分かる通り，一般の環がもし標準加群を持てばそれは一意に定まる．本節ではまずそのことを示し，存在するための条件を決定しよう．

定義 *8.6.2*（極大 CM 加群）

$(A, \mathfrak{m})$ を CM 局所環とする．有限生成 A 加群 M であり，$\operatorname{depth} M = \dim A$ であるものを**極大 (maximal) Cohen–Macaulay 加群**という．

一般に $\operatorname{depth} M \leq \dim M \leq \dim A$ であるので，この定義は $\dim M = \dim A$ である CM 加群といってもよい．またこの定義のもとで標準加群とは，入射次元が有限な極大 CM 加群で 1 型のもの，と表現できる．

命題 *8.6.3*

M を Noether 局所環 $(A, \mathfrak{m})$ 上の極大 CM 加群とすると，任意の A 正則元 $a \in A$ について a は M 正則でもある（すなわち，M は **torsion free** である）．

証明.

$a \notin \bigcup_{P \in \operatorname{Ass} M} P$ を示せばよい．そうでないと仮定すると，Prime avoidance から $a \in P$ となる $P \in \operatorname{Ass} M$ が存在する．すると，命題 5.5.5 により $\operatorname{coht} P \leq \dim A - 1$ である．一方で命題 5.7.9 から；

$$\dim A = \operatorname{depth} M \leq \dim A/P \leq \dim A$$

であるので $\dim A/P = \operatorname{coht} P = \dim A$ であり，これは矛盾．　（証明終）

標準加群の定義の書き換えを与えよう．まず，Auslander–Buchsbaum の公式の入射次元版を示す．

定理 *8.6.4*

$(A, \mathfrak{m}, k)$ を Noether 局所環とする．M を $\operatorname{inj.dim} M < \infty$ である有限生成 A 加群とすると；

$$\operatorname{inj.dim} M = \operatorname{depth} A$$

である．

証明.

$d = \operatorname{depth} A$ とおき，$a_1, \ldots, a_d$ を極大な A 正則列，$I = (a_1, \ldots, a_d)$ とおく．系 8.5.15 により $\operatorname{Ext}^d(A/I, M) \cong M/IM \neq 0$ なので $d \leq \operatorname{inj.dim} M$ である．ここで $d < \operatorname{inj.dim} M$ と仮定して矛盾を導こう．$\operatorname{depth} A/I = 0$ なので，単射 $k \to A/I$ がある．短完全列；

$$0 \longrightarrow k \longrightarrow A/I \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

が導く完全列；

$$\begin{aligned} \cdots \longrightarrow \operatorname{Ext}^d(C, M) &\longrightarrow \operatorname{Ext}^d(A/I, M) \longrightarrow \operatorname{Ext}^d(k, M) \\ \longrightarrow & \quad \cdots \\ \longrightarrow \operatorname{Ext}^r(C, M) &\longrightarrow \operatorname{Ext}^r(A/I, M) \longrightarrow \operatorname{Ext}^r(k, M) \\ \longrightarrow \operatorname{Ext}^{r+1}(C, M) &\longrightarrow \quad \cdots \end{aligned}$$

を考えると，系 8.5.16 より $\mathrm{prj.dim}\, A/I = d$ だから，$i > d$ について $\mathrm{Ext}^i(A/I, M) = 0$ である．よって $\mathrm{Ext}^r(k, M) \cong \mathrm{Ext}^{r+1}(C, M)$ だが，定理 8.1.7 により $\mathrm{Ext}^{r+1}(C, M) \neq 0$ となって矛盾．よって $d = r$ である．（証明終）

系 *8.6.5*

$(A, \mathfrak{m}, k)$ を CM 局所環とする．有限生成 A 加群 C が標準加群であることと；

$$\mathrm{Ext}^i(k, C) = \begin{cases} k & \text{if } i = \dim A \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

であることは同値である．

定理 *8.6.6*

$(A, \mathfrak{m}, k)$ を Noether 局所環とする．有限生成で入射的な A 加群 I が存在するならば A は Artin である．

証明.

I は有限生成なので，系 8.2.19 から；

$$I = \mathrm{E}(I) \cong \bigoplus_{P \in \mathrm{Ass}\, I} \mathrm{E}(A/P)^{\mu_0(P, I)}$$

である．定理 8.1.7 により $\mathrm{Hom}_A(k, I) \neq 0$ だから $\mu_0(\mathfrak{m}, I) \neq 0$ であり，よって $\mathrm{E}(k)$ は有限生成である．すると定理 8.3.8 により完備化して考えると $\widehat{A}$ 加群としても $\mathrm{E}(k)$ は有限生成で，Matlis の双対定理（定理 8.3.3）により $\mathrm{E}(\mathrm{E}(k)) \cong \widehat{A}$ は Arrtin で，Noether 環は完備化しても次元が変わらない（定理 5.5.6）から A は Artin である．（証明終）

次に，環が標準加群を持つならばそれは一意に定まることを示そう．補題をいくつか用意する．

補題 *8.6.7*

$(A, \mathfrak{m})$ を Noether 局所環とする．M, N を有限生成 A 加群とし，$a_1, \ldots, a_r$ が N 正則であるとする．A 線型写像 $f : M \to N$ に対して，$I = (a_1, \ldots, a_r)$ とおいたとき；

$$\widetilde{f} : M/IM \to N/IN; x + IM \mapsto f(x) + IN$$

が同型ならば f も同型である．

証明.

まず $N = f(M) + IN$ であるので，中山の補題から f は全射である．f が単射であることを r についての帰納法で示す．$r = 1$ のときは，$K = \ker f$ とおくと；

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \longrightarrow 0$$

が完全で，$- \otimes A/a_1 A$ が導く長完全列において $\widetilde{f}$ が同型だから $K/a_1 K = 0$ となり，中山の補題から $K = 0$ である．$n > 1$ の場合も $n = 1$ の場合を繰り返せばよい．（証明終）

補題 8.6.8

$(A, \mathfrak{m})$ を d 次元の CM 局所環とする．M, N を有限生成 A 加群とし，N は入射次元が有限な極大 CM 加群で，$\operatorname{depth} M = r$ であるとする．このとき，任意の $i > d - r$ に対して $\operatorname{Ext}^{d-r}(M, N) = 0$ である．

証明.

r についての帰納法で示す．まず一般に定理 8.6.4 から $i > d$ なら $\operatorname{Ext}^d(M, N) = 0$ なので，$r = 0$ のときは正しい．

$r > 0$ とする．$a \in \mathfrak{m}$ を M 正則元とすると；

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{a\cdot} M \longrightarrow M/aM \longrightarrow 0$$

が導く長完全列；

$$\cdots \longrightarrow \operatorname{Ext}^i(M, N) \xrightarrow{a\cdot} \operatorname{Ext}^i(M, N) \longrightarrow \operatorname{Ext}^{i+1}(M/aM, N) \longrightarrow \cdots$$

において，$i > d - r$ のとき $i + 1 > d - (r - 1)$ で，$\operatorname{depth} M/aM = r - 1$ だから，帰納法の仮定より $\operatorname{Ext}^{i+1}(M/aM, N) = 0$ となって，中山の補題から $\operatorname{Ext}^i(M, N) = 0$ である．（証明終）

命題 8.6.9

$(A, \mathfrak{m})$ を CM 局所環する．M, N を極大 CM 加群であって，$\operatorname{inj.dim} N < \infty$ とする．すると，A 正則列 $a_1, \ldots, a_r$ $(r \leq \dim A)$ について $I = (a_1, \ldots, a_r)$ とおくと；

$$\operatorname{Hom}(M, N) \otimes A/IA \cong \operatorname{Hom}_{A/I}(M/IM, N/IN) \qquad (*)$$

であって，$\operatorname{Hom}(M, N)$ は極大 CM 加群である．

証明.

帰納的に示せるので，$r = 1$ の場合のみ示そう．a を A 正則とすると，N は極大なので N 正則でもあり；

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{a\cdot} N \longrightarrow N/aN \longrightarrow 0$$

が完全．すると補題から；

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}(M, N) \xrightarrow{a\cdot} \operatorname{Hom}(M, N) \longrightarrow \operatorname{Hom}(M, N/aN) \longrightarrow 0$$

も完全．よって $\operatorname{Hom}_{A/aA}(M/aM, N/aN) \cong \operatorname{Hom}_A(M, N/aN) \cong \operatorname{Hom}(M, N) \otimes A/aA$ であることがわかる．

また a が M, N 正則なら a は $\operatorname{Hom}(M, N)$ 正則であることは簡単に確かめられ，A 正則列が $\operatorname{Hom}(M, N)$ 正則列になることが $(*)$ からわかるので，極大 CM 加群であることもわかる．（証明終）

定理 8.6.10

Noether 局所環 $(A, \mathfrak{m}, k)$ において，C, C' が標準加群ならば $C \cong C'$ である．

証明.

$d = \dim A$ とおく．定理 8.6.4 より $\operatorname{inj.dim} C = \operatorname{inj.dim} C' = d$ に注意する．$a_1, \ldots, a_d$ を極大 A 正則列とし，$I = (a_1, \ldots, a_d)$ とすると，Artin 環 A/I の上で C/IC は入射的である．また $\operatorname{Ext}^d(k, C) \cong k$ に補題 8.1.8

を用いると $\mathrm{Hom}_{A/I}(k, C/IC) \cong k$ である．よって C/IC は A/I の標準加群で，同様に C'/IC' もそうだから，特に $C/IC \cong C'/IC' \cong \mathrm{E}_{A/I}(k)$ である．すると，命題 8.6.9 から；

$$\mathrm{Hom}(C, C') \otimes A/I \cong \mathrm{Hom}_{A/I} \cong \mathrm{Hom}_{A/I}(C/IC, C'/IC')$$

である．すると，$\varphi \in \mathrm{Hom}(C, C')$ を $\widetilde{\varphi} : C/IC \to C'/IC'$ が同型であるようにとると，補題 8.6.7 からこれは同型であることがわかった．　（証明終）

これにより，標準加群は存在すれば同型を除いて一意に定まるので，標準加群を ω_A と書くことにしよう．

命題 8.6.11

$(A, \mathfrak{m})$ を CM 局所環とし，ω_A を A 上の極大 CM 加群とする．任意の A 正則列 $a_1, \ldots, a_r$ $(r \leq \dim A)$ について $I = (a_1, \ldots, a_r)$ とおく．このとき，ω_A が A の標準加群であることと，$\omega_A/I\omega_A$ は A/IA の標準加群であることは同値である．

証明.

ω_A は極大 CM 加群なので a_1 は ω_A 正則であり，$\omega_A/a_1\omega_A$ も $\dim \omega_A/a_1\omega_A = \dim \omega_A - 1 = \dim A - 1 = \dim A/a_1A$ である A/a_1A 上の極大 CM 加群だから，帰納的に $a_1, \ldots, a_t$ は ω_A 正則列になり，$\omega_A/I\omega_A$ は A/IA 上の極大 CM 加群である．また定理 8.1.9 から $\mathrm{inj.dim}\, \omega_A/I\omega_A < \infty$ であり，$d = \dim A$ とおけば補題 8.1.8 から $\mathrm{Ext}^{d-r}_{A/IA}(k, \omega_A/I\omega_A) = \mathrm{Ext}^d(k, \omega_A) \cong k$ である．

この議論は A 正則元でわると次元，入射次元が 1 下がる，また Ext の次数を 1 下げたものと同型になるという事実に基づいており，逆が成り立つこともすぐにわかる．　（証明終）

補題 8.6.12

B を A 代数とする．I を入射的 A 加群とすると，$\mathrm{Hom}_A(B, I)$ は入射的 B 加群である．

証明.

M を B 加群とする．このとき；

$$\mathrm{Hom}_A(M, I) \cong \mathrm{Hom}_B(M, \mathrm{Hom}_A(B, I))$$

である．実際；

$$\varphi : \mathrm{Hom}_A(M, I) \to \mathrm{Hom}_B(M, \mathrm{Hom}_A(B, I)); (f : M \to I) \mapsto (x \mapsto (1 \mapsto f(x))$$

$$\psi : \mathrm{Hom}_B(M, \mathrm{Hom}_B(B, I)) \to \mathrm{Hom}_A(M, I); (g : M \to \mathrm{Hom}_A(B, I)) \mapsto (x \mapsto g(x)(1))$$

がそれぞれ逆を与える．　（証明終）

定理 8.6.13

$\varphi : (A, \mathfrak{m}, k) \to (B, \mathfrak{n})$ を局所準同型とする．A, B が CM 局所環，B が有限生成 A 加群で，かつ A の標準加群 ω_A が存在するならば，$t = \dim A - \dim B$ とおくと $\mathrm{Ext}^t_A(B, \omega_A)$ が B の標準加群である．

証明.

まず $\dim A = \dim B$ の場合を示そう．$d = \dim A$ とおくと，A 正則列 $a_1, \ldots, a_d$ がとれる．このとき命題 8.6.9 より $\omega_A, \mathrm{Hom}_A(B, \omega_A)$ は極大 CM 加群だからこの正則列は $\omega_A, \mathrm{Hom}_A(B, \omega_A)$ 正則列でもある．また $I = (a_1, \ldots, a_d)$ とおけば；

$$\mathrm{Hom}_A(B, \omega_A) \otimes A/I \cong \mathrm{Hom}_{A/I}(B/IB, \omega_A/I\omega_A)$$

である．いま B は A 加群として極大 CM 加群だから，$\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_d)$ は B の正則列で，B/IB 加群として；

$$\mathrm{Hom}_A(B, \omega_A)/(\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_d)) \mathrm{Hom}_A(B, \omega_A) \cong \mathrm{Hom}_{A/I}(B/IB, \omega_A/I\omega_A)$$

である．命題 8.6.11 により $\mathrm{Hom}_{A/I}(B/IB, \omega_A/I\omega_A)$ が Artin 環 B/IB の標準加群ならよい．極大 CM 加群であることはわかっている．いま $\omega_A/I\omega_A$ は A/I の標準加群だから $\omega_A/I\omega_A \cong \mathrm{E}_{A/I}(k)$ で，$\mathrm{Hom}_{A/I}(B/IB, \omega_A/I\omega_A)$ は補題 8.6.12 より入射的 B/IB 加群である．すると定理 8.2.14 から $\mathrm{Hom}_{A/I}(B/IB, \omega_A/I\omega_A) \cong \mathrm{E}_{B/IB}(k)^r$ となる $r > 0$ がとれ，命題 8.3.2 から；

$$\ell(\mathrm{E}_{B/IB}(k)) = \ell(B/IB) = \ell(\mathrm{Hom}_{A/I}(B/IB, \omega_A/I\omega_A)) = r\ell(\mathrm{E}_{B/IB}(k))$$

なので $r = 1$ である．ここで２つめの等号には φ が局所準同型であることから B/IB 加群としての組成列が A/I 加群としての組成列になることを用いた．以上より $\mathrm{Hom}_{A/I}(B/IB, \omega_A/I\omega_A)$ は B/IB の標準加群であり，$\mathrm{Hom}_A(B, \omega_A)$ は B の標準加群である．

一般のときは，単射 $A/\ker\varphi \to B$ において B が A 上有限生成なので，上昇定理により $\dim A/\ker\varphi = \dim B$ であるから，命題 5.7.16 により $\mathrm{depth}_{\ker\varphi} A = \dim A - \dim B$ なので，A 正則列 $a_1, \ldots, a_t \in \ker\varphi$ がとれる．すると $I = (a_1, \ldots, a_t)$ とおけば補題 8.1.8 から $\mathrm{Ext}^t_A(B, \omega_A) \cong \mathrm{Hom}_{A/I}(B, \omega_A/I\omega_A)$ なので，$\dim A = \dim B$ の場合に帰着する．　（証明終）

この定理の特別な場合として，$(A, \mathfrak{m})$ を Gorenstein 局所環とし，B をその準同型像とすると Gorenstein 局所環の準同型像は標準加群を持つことがわかる．実際にはこれこそが標準加群を持つための条件である．すなわち標準加群を持つことと，Gorenstein 局所環の準同型像であることは同値である（定理 8.7.5）．これを示すために加群の**イデアル化**について少し考える必要がある．これを次の節で紹介し，上の定理の証明を与えよう．

§7　イデアル化

定義 *8.7.1*（イデアル化）

A を環とし，M を A 加群とする．A 加群としての直和 $A \oplus M$ に対して；

$$(a, x) + (b, y) = (a + b, x + y)$$
$$(a, x)(b, y) = (ab, ay + bx)$$

と定めるとこれは環をなす．これを $A * M$ とかいて，M の A による**イデアル化 (idealisation)**，または A の M による **trivial extension** という．

まずイデアル化についての簡単な性質を列挙する．

命題 *8.7.2*

A を環とし，M を A 加群とする．このとき；

(i) $0 * M = \{(0, x) \in A * M \mid x \in M\}$ は $(0 * M)^2 = 0$ であるような $A * M$ のイデアルである．
(ii) $A \to A * M; a \mapsto (a, 0)$ は単射で，A は $A * M$ の部分環とみなすことができる．
(iii) $\mathrm{Spec}(A * M) = \{P * M \mid P \in \mathrm{Spec}\, A\}$ である．特に $\dim A = \dim A * M$．
(iv) A が Noether であるとき，M が有限生成であることと $A * M$ が Noether であることは同値である．
(v) A が $\mathfrak{m}$ を極大イデアルとする局所環であるとき，$(A * M, \mathfrak{m} * M)$ も局所環である．

が成り立つ．

証明.

(iii) のみ示す．まず $P \in \mathrm{Spec}\, A$ とすると $P * M \in \mathrm{Spec}\, A * M$ となることはすぐに分かる．逆に $Q \in \mathrm{Spec}\, A * M$ とする．任意の $a \in A$ で，ある $x \in M$ について $(a, x) \in Q$ であるものをとると，$a * M \subset Q$ である．実際 $(a, 0)^2 = (a^2, 0) = (a, -x)(a, x) \in Q$ なので $(a, 0) \in Q$ であり，またこのとき (i) から $0 * M \subset Q$ だから任意の $y \in M$ について $(a, 0) + (0, y) = (a, y) \in Q$ である．よって $P = \{a \in A \mid a * M \subset Q\}$ とおけばこれは A の素イデアルをなし，$Q = P * M$ である．（証明終）

命題 *8.7.3*

A を環とし，M を A 加群とする．$(a, x) \in A * M$ が $A * M$ の正則元であることと，a が A 正則かつ M 正則であることは同値である．

証明.

それぞれ対偶を示す．

$(\Longrightarrow)$

a が A の零因子または M の零因子ならば $A * M$ の零因子であることを示す．

まず M の零因子であるときは簡単で，ある $y \neq 0$ が存在して $ay = 0$ であるから，$(a, x)(0, y) = (0, 0)$ である．次に A の零因子であると仮定すると，ある $b \neq 0 \in A$ が存在して $ab = 0$ である．もし $b \in \mathrm{Ann}\, M$ ならば $(a, x)(b, 0) = 0$ なのでよい．$b \notin \mathrm{Ann}\, M$ ならば，ある $y \in M$ が存在して $by \neq 0$ かつ $(a, x)(0, by) = 0$ となる．

$(\Longleftarrow)$

$(a, x)(b, y) = 0$ となる $(b, y) \neq 0 \in A * M$ が存在するとする．ここで $b \neq 0$ のとき $ab = 0$ なのでよい．次に $b = 0$ とすると $y \neq 0$ で，$(a, x)(0, y) = (0, ay) = 0$ なので a は M の零因子である．

（証明終）

すると，A 正則元 a について M 正則でもあれば $(a, 0)$ が $A * M$ 正則である．このとき；

$$A * M/(a, 0)A * M \cong (A/aA) * (M/aM)$$

であるから（一般の単項イデアルによる剰余加群がきれいな形をしているとは限らない），次のような結果が成り立つ．

命題 *8.7.4*

$(A,\mathfrak{m})$ を d 次元 CM 局所環とし，M を有限生成 A 加群とする．このとき，M が極大 CM 加群であることと，$A*M$ が CM 局所環であることは同値である．

証明.

$(\Longrightarrow)$

$a_1,\ldots,a_d$ を A 正則列とする．このとき a_1 は M 正則だから $(a_1,0)$ は $A*M$ 正則で $A*M/(a_1,0)A*M=(A/a_1A)*(M/a_1M)$ である．このとき M/a_1M は A/a_1A 加群として極大 CM 加群で，a_2 は A/a_1A 正則だから，同様に続けることで $(a_1,0),\ldots,(a_d,0)$ は $A*M$ 正則列をなし，$d=\operatorname{depth}A*M=\dim A*M$ である．

$(\Longleftarrow)$

d についての帰納法で示す．$d=0$ のときは明らか．$d>0$ とする．$A*M$ 正則元 (a_1,x_1) を $A*M$ 正則とると，先の命題より $(a_1,0)$ も $A*M$ 正則で，$A*M/(a_1,0)A*M=(A/a_1A)*(M/a_1M)$ は $d-1$ 次の CM 局所環である．すると，仮定から M/a_1M は A/a_1A 加群として極大 CM であるので，M/a_1M 正則列 $a_2,\ldots,a_d$ がとれる．すると $a_1,\ldots,a_d$ が M 正則列となって，M は極大 CM 加群である．

（証明終）

これらの準備により，予告しておいた通り標準加群を持つ条件を決定しよう．

定理 *8.7.5*

$(A,\mathfrak{m},k)$ を d 次元 CM 局所環とする．A が標準加群 ω_A を持つことと，Gorenstein 局所環の準同型像であることは同値である．

証明.

前述の通り，Gorenstein 局所環の準同型像なら標準加群を持つことはわかっている．A が標準加群 ω_A を持つとしよう．このとき $A*\omega_A$ が Gorenstein であることを示す．いま命題 8.7.4 から $A*\omega_A$ は CM 局所環なので，$r(A*M)=1$ を示せばよい．いま $a_1,\ldots,a_d$ を A 正則列とすると，命題 8.6.11 により $A*\omega_A/(a_1,\ldots,a_d)A*\omega_A\cong(A/(a_1,\ldots,a_d)A)*\omega_{A/(a_1,\ldots,a_d)A}$ であるから，$\dim A=0$，すなわち A が Artin の場合に帰着する．

このとき $\omega_A=\mathrm{E}_A(k)$ であることに注意する．

$$\operatorname{Soc}(A*\mathrm{E}(k))=\{(a,x)\in A*\mathrm{E}(k)\mid(a,x)\mathfrak{m}*M=0\}\cong k$$

を示せばよい．任意の $(a,x)\in\operatorname{Soc}(A*\mathrm{E}(k))$ をとると，任意の $r\in\mathfrak{m}$ について $(r,0)(a,x)=(ra,rx)=0$ なので $a\in\operatorname{Soc}A, x\in\operatorname{Soc}\mathrm{E}(k)$ である．ここで $a\neq 0$ と仮定すると，完全列；

$$A\xrightarrow{a\cdot}A\longrightarrow A/aA\longrightarrow 0$$

に $\operatorname{Hom}_A(-,\mathrm{E}(k))$ を適用すると，定理 8.6.13 により，完全列；

$$0\longrightarrow\mathrm{E}_{A/aA}(k)\longrightarrow\mathrm{E}_A(k)\xrightarrow{a\cdot}\mathrm{E}_k(A)$$

が得られるが，Matlis の双対定理から $\ell(\mathrm{E}_{A/aA}(k))=\ell(A/aA)<\ell(A)=\ell(\mathrm{E}_A(k))$ だから $a\cdot:\mathrm{E}_A(k)\to\mathrm{E}_A(k)$ は 0 射ではない．するとある $y\neq 0\in\mathrm{E}_A(k)$ があって $ay\neq 0$ である．このとき $(0,y)(a,x)=(0,ay)\neq 0$ とな

り $(a, x) \in \operatorname{Soc} A * \mathrm{E}_A(k)$ に矛盾する．よって $a = 0$ であり，$\operatorname{Soc}(A * \mathrm{E}_A(k)) \cong \operatorname{Soc} \mathrm{E}_A(k) \cong k$ である．よって $A * \mathrm{E}_A(k)$ は Gorenstein であることがわかった．

よって，一般に $A * \omega_A$ は Gorenstein で，$A * \omega_A \to A; (a, x) \mapsto a$ が準同型になり，A は Gorenstein 局所環の準同型像である．（証明終）

第9章 局所コホモロジー入門

—*Introduction of Local Cohomology*

この章では，Grothendieck (1966) によって導入された**局所コホモロジー**の考え方を説明する．

§ 1 Čech コホモロジー

この節では，環とその上の加群についての **Čech コホモロジー**を定義しよう．A を環とし，その元の列 $a_1,\dots,a_r$ を固定する．$I=\{j_1,\dots,j_i\}\subset\{1,\dots,r\}$ について $a_I=a_{j_1}\dots a_{j_i}$ とおく．同様に A^r の基底を $e_1,\dots,e_r$ とし，$e_I=e_{j_1}\wedge\cdots\wedge e_{j_i}$ とする．

定義 *9.1.1*（Čech 複体）

A を環とし，$a_1,\dots,a_r\in A$ をとる．各 $1\le i\le r$ について；

$$C^i(\underline{a})=\sum_{\#I=i}A_{a_I}e_I$$

$$d^i:C^i(\underline{a})\to C^{i+1}(\underline{a});xe_I\mapsto\sum_{j=1}^{n}xe_I\wedge e_j$$

で定義する（ただし，x の像は $a_{I\cup\{j\}}$ による局所化 $A_{a_{I\cup\{j\}}}$ への像とする）．$i=0$ について $C^0(\underline{a})=A, d^0: a\mapsto\sum_{j=1}^r ae_j$ として定義すると，これは複体をなす．これを **Čech 複体 (Čech complex)** という．この複体のコホモロジーを $\check{H}^i(\underline{a})$ とかき，**Čech コホモロジー**という．

A 加群 M については $C^\bullet(\underline{a},M)=C^\bullet(\underline{a})\otimes M$ で定義する．その定義から Čech コホモロジーは δ 関手である．

命題 *9.1.2*

A を環とする．$a_1,\dots,a_r\in A$ と A 加群 M について，$\check{H}^\bullet(\underline{a},M)$ は δ 関手である．

証明.

A 加群の完全列；

$$0\longrightarrow M_1\longrightarrow M_2\longrightarrow M_3\longrightarrow 0$$

を考える．Čech 複体 $C^\bullet(\underline{a})$ は各成分が平坦 A 加群からなるので，$C^\bullet(\underline{a},M)=C^\bullet(\underline{a})\otimes M$ だから；

$$0\longrightarrow C^\bullet(\underline{a},M_1)\longrightarrow C^\bullet(\underline{a},M_2)\longrightarrow C^\bullet(\underline{a},M_3)\longrightarrow 0$$

は複体の完全列をなす．よって命題 6.5.8 から連結射が存在し，命題 6.5.9 から $\check{H}^\bullet(\underline{a},M)$ は δ 関手である．（証明終）

次に Koszul（余鎖）複体から Čech 複体への複体の射を自然に定義できることを見よう．

補題 9.1.3

A を環とし，$a_1, \ldots, a_r \in A$ に対して，$1 \leq i \leq r$ について；

$$\varphi^i : K^i(\underline{a}) \to C^i(\underline{a}); (e_I)^* \mapsto (1/a_I)e_I$$

と定義するとこれは複体の射をなす．

証明.

Koszul 複体 $K^\bullet(\underline{a})$ における微分を δ^i とすると；

$$\delta^i(e_I^*) = (e_J \mapsto e_I^*(\delta_{i+1}(e_j)))$$

で，これは $j \notin I$ を用いて $J = I \cup \{j\}$ と表せるとき $e_J = e_I \wedge e_j$ を a_j に対応させ，それ以外の場合 0 に送る線型写像なので；

$$\varphi^{i+1} \circ \delta^i(e_I^*) = \sum_{j \notin I} \frac{a_j}{a_I a_j} e_I \wedge e_j = \sum_{j \notin I} \frac{1}{a_I} e_I \wedge e_j$$

であり，これは $d^i \circ \varphi^i(e_I^*)$ と一致する．（証明終）

任意の $n \geq 0$ について，列 $a_1^n, \ldots, a_r^n$ を $\underline{a}^n$ と略記することにする．このとき任意の $n \leq m$ に対して；

$$\varphi_{mn}^\bullet : K^\bullet(\underline{a}^n) \to K^\bullet(\underline{a}^m); (e_I)^* \mapsto (a_I)^{m-n}(e_I)^*$$

と定めることで $\{K^\bullet(\underline{a}^n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ は帰納系をなす．上の補題によって，$C^\bullet(\underline{a})$ はこの帰納系の極限としてかけることを確かめよう．

命題 9.1.4

A を環とし，$a_1, \ldots, a_r \in A$ をとる．このとき；

$$\varinjlim_n K^\bullet(\underline{a}^n) \cong C^\bullet(\underline{a})$$

である．

証明.

まず，補題 9.1.3 と同様にして $\varphi_n^\bullet : K^\bullet(\underline{a}^n) \to C^\bullet(\underline{a}^n) = C^\bullet(\underline{a})$ を定めると，$n \leq m$ のとき $\varphi_m^\bullet \circ \varphi_{nm}^\bullet = \varphi_n^\bullet$ であることが簡単に確かめられる．これにより $\varinjlim K^\bullet(\underline{a}^n) \to C^\bullet(\underline{a})$ が定まる．各 $C^i(\underline{a})$ の元は $b_I/a_I^{n_I} e_I$ の有限和の形でかけているので，n_I の最大値をとって b_I を取り替えれば $\sum 1/a_I^n(b_I e_I)$ とかけるから，これは $\sum(b_I e_I) \in K^i(\underline{a}^n)$ の像である．よって $\varinjlim K^\bullet(\underline{a}^n) \to C^\bullet(\underline{a})$ は全射．

また，$x \in K^i(\underline{a}^n)$ について $\varphi_n^i(x) = 0$ であったとすると，$x = \sum b_I e_I^*$ としたとき $\varphi_n^i(x) = \sum b_I/a_I^n e_I^* = 0$ なので，$A_{a_I^n}$ において $b_I/a_I^n = 0$ である．これは十分大きな $l \geqq 0$ により $a_I^l b_I = 0$ であることを主張しているので，x は有限和だから l を（必要なら）さらに大きくすることで $\varphi_{nm}^i(x) = 0$ とできる．よって $\varinjlim K^\bullet(\underline{a}^b) \to C^\bullet(\underline{a})$ は単射でもあることがわかった．（証明終）

帰納極限を取ることは完全関手なので，Čech コホモロジーは次のようにかける．

系 9.1.5

A を環，$a_1, \ldots, a_n \in A$ とする．A 加群 M に対して；

$$\check{H}^i(\underline{a}, M) \cong \varinjlim_n H^i(\underline{a}^n, M)$$

である．

§ 2　弱副正則列

次の節において**局所コホモロジー**を導入するが，A が Noether なら Čech コホモロジーと局所コホモロジーが一致する，すなわち $a_1, \ldots, a_r \in A$ について $I = (a_1, \ldots, a_r)$ とおいたとき，A 加群 M について $\check{H}^i(\underline{a}, M) \cong H^i_I(M)$ であることはよく知られている．実は Noether でない場合は一般に成り立たず，Schenzel (2003) は，任意の i と A 加群 M について Čech コホモロジーと局所コホモロジーが一致するための必要十分条件として**弱副正則列**を定義した．本節ではそれについて紹介しよう．

定義 9.2.1（本質的零）

Abel 圏 $\mathscr{A}$ 上の射影系 (X_n) について，任意の n に対してある $m \geq n$ が存在して，$\varphi_{mn} : X_m \to X_n$ が零射であるとき，(X_n) は**本質的零 (essentially zero)** または**副零 (pro-zero)** であるという．

明らかに (X_n) が本質的零なら $\varprojlim X_n = 0$ である．これの逆が成り立たない例は，例えば 1 次元以上の Noether 局所環の極大イデアル $\mathfrak{m}$ をとると $\mathfrak{m}^n \neq 0$ かつ $\bigcap \mathfrak{m}^n = 0$ なので $\{\mathfrak{m}^n\}_{n \geq 0}$ がその例を与える．

命題 9.2.2

射影系の完全列 $0 \longrightarrow (X_n) \xrightarrow{(f_n)} (Y_n) \xrightarrow{(g_n)} (Z_n) \longrightarrow 0$ について，(Y_n) が本質的零であることと，$(X_n), (Z_n)$ が本質的零であることは同値である．

証明.

$(\Longrightarrow)$

明らかに成り立つ．

$(\Longleftarrow)$

任意の n に対して，(X_n) が本質的零だからある $m \geq n$ が存在して $X_m \to X_n$ が零射であるようにできる．さらに m に対して $l \geq m$ を $Z_l \to Z_m$ が零射であるようにとると，次の各行が完全な可換図式；

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X_l \arrow[r, "f_l"] \arrow[d] & Y_l \arrow[r, "g_l"] \arrow[d, "\varphi_{lm}"] & Z_l \arrow[r] \arrow[d, "0"] & 0 \\
0 \arrow[r] & X_m \arrow[r, "f_m"] \arrow[d, "0"] & Y_m \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_{mn}"] & Z_m \arrow[r] \arrow[d, "g_m"] & 0 \\
0 \arrow[r] & X_n \arrow[r, "f_n"] & Y_n \arrow[r, "g_n"] & Z_n \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

を得る．簡単な図式追跡によって $\varphi_{ln} = \varphi_{mn} \circ \varphi_{lm} = 0$ であることがわかる．

（証明終）

$(\Longleftarrow)$ の証明には中央の完全性しか用いていないことに注意しておく．

Koszul 複体，Čech 複体についてこれまでと同様の言葉使いをする．すなわち A を環とし，その元の列 $a_1, \ldots, a_r$ を固定する．$I = \{j_1, \ldots, j_i\} \subset \{1, \ldots, r\}$ について $a_I = a_{j_1} \ldots a_{j_i}$ とおく．同様に A^n の基底を $e_1, \ldots, e_n$ とし，$e_I = e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_i}$ とする．また $n \geq 0$ について列 $a_1^n, \ldots, a_r^n$ を $\underline{a}^n$ で表す．この記号のもと，$n \leq m$ なら $K_i(\underline{a}^m) \to K_i(\underline{a}^n); e_I \mapsto a_I^{m-n} e_I$ によって $(K_i(\underline{a}^n))_{n \in \mathbb{N}}$ は射影系をなす．

定義 9.2.3（弱副正則列）

A を環とする．$a_1, \ldots, a_r \in A$ について，任意の $1 \leq i \leq r$ に対して $(H_i(\underline{a}^n))_{n \in \mathbb{N}}$ が本質的零であるとき，$a_1, \ldots, a_r$ は**弱副正則列 (weakly proregular sequence)** であるという．

定義から弱副正則列は並び替えによらない．$a \in A$ が弱副正則であることは，$H_1(a^n) = \operatorname{Ann} a^n$ なので $\operatorname{Ann} a^m \to \operatorname{Ann} a^n; x \mapsto a^{m-n} x$ で定まる $\{\operatorname{Ann} a^n\}$ が本質的零であることと同値．また正則列は弱副正則列であることに注意する．実際 $a_1, \ldots, a_r$ が正則列なら $a_1^n, \ldots, a_r^n$ もそうで，$H_i(\underline{a}^n) \cong H^{r-i}(\underline{a}^n) \cong \operatorname{Ext}^{r-i}(A/(a_1^n, \ldots, a_r^n)A, A)$ だから，$0 < i$ なら $H_i(\underline{a}^n) = 0$ である．

命題 9.2.4

A を環とし，$a_1, \ldots, a_r \in A$ とする．このとき $a_1, \ldots, a_r$ は弱副正則列であることと，$\check{H}^\bullet(\underline{a}, -)$ が消去的な δ 関手であること，すなわち任意の $i > 0$ に対して，I が入射的 A 加群ならば $\check{H}^i(\underline{a}, I) = 0$ であることは同値である．

証明.

$\check{H}^i(\underline{a}, I) = \varinjlim H^i(\underline{a}^n, I)$ であることに注意しよう．

$(\Longrightarrow)$

$K^\bullet(\underline{a}^n, I) = \operatorname{Hom}(K_\bullet(\underline{a}^n), I)$ であって，$\operatorname{Hom}(-, I)$ が完全関手なのでコホモロジーと可換だから $H^i(\underline{a}^n, I) \cong \operatorname{Hom}(H_i(\underline{a}^n, I))$ である．いま $(H_i(\underline{a}^n))$ が本質的に零なので，任意の $n \geq 0$ に対して $m \geq n$ が存在して $H_i(\underline{a}^m) \to H_i(\underline{a}^n)$ が零射であるから，これに $\operatorname{Hom}(-, I)$ を施しても零射なので $\varinjlim \operatorname{Hom}(H_i(\underline{a}^n, I) = 0$ である．

$(\Longleftarrow)$

任意の $n \geq 0$ に対して，入射加群への埋め込み $\varepsilon : H_i(\underline{a}^n) \to I$ をとる．このとき $\varepsilon \in H^i(\underline{a}^n, I)$ と思え，$\varinjlim H^i(\underline{a}^n, I) = 0$ より，ある $m \geq n$ が存在して ε の $H^i(\underline{a}^m, I)$ への像は 0 である．これは；

$$H_i(\underline{a}^m) \longrightarrow H_i(\underline{a}^n) \xrightarrow{\varepsilon} I$$

が零射ということにほかならず，ε が単射なので前の射も零射である．

（証明終）

この命題により，$\underline{a}$ が弱副正則列なら Čech コホモロジーは $\check{H}^0(\underline{a}, -)$ の右導来関手であることがわかる．次の関心はいつ点列が弱副正則になるか，ということにある．弱副正則列は，その名前から分かる通り**副正則列**という概念の一般化である．

定義 9.2.5（副正則列）

A を環とする．$a_1, \ldots, a_r \in A$ について，任意の $1 \leq i \leq r$ と任意の $n > 0$ について，ある $m \geq n$ が存在して，任意の $a \in A$ に対して $a a_i^m \in (a_1^m, \ldots, a_{i-1}^m)$ ならば $a a_i^{m-n} \in (a_1^n, \ldots, a_{i-1}^n)$ とできるとき，$a_1, \ldots, a_r$ を**副正則列 (proregular sequence)** という．

この条件はイデアル商の記号を使えば $((a_1^m,\dots,a_{i-1}^m):a_i^mA)\subset((a_1^n,\dots,a_{i-1}^n):a_i^{m-n}A)$ と書くこともできることに注意する（記号が煩雑ではあるが）．無論これも正則列の一般化である．実際 $a_1,\dots,a_r$ が正則列なら任意の $n>0$ について $m=n$ とすればよい．

また $a\in A$ が副正則列であることは，任意の $n>0$ について，ある $m\geq n$ が存在して $\operatorname{Ann}a^m\subset\operatorname{Ann}a^{m-n}$ であることと同値であることから，次の事実を注意しておく．

命題 9.2.6

A を環とする．任意の $a\in A$ について a が弱副正則であることと，副正則であることは同値である．

次に示すとおり，この概念は非 Noether 環に特有の現象である．

命題 9.2.7

A を Noether 環とすると，任意の $a_1,\dots,a_r\in A$ は副正則列である．

証明.

$J_m=((a_1^m,\dots,a_{i-1}^m):a_i^mA), I_{n,m}=((a_1^n,\dots,a_{i-1}^n):a_i^{m-n}A)$ とおく（添字 i は省略する）と，上にも注意したとおり $a_1,\dots,a_r$ が副正則であることは任意の $1\leq i\leq n$ と任意の $n>0$ についてある $m\geq n$ が存在して $J_m\subset I_{n,m}$ となることと同値である．ここで $\{I_{n,m}\}_{m\geq n}$ はイデアルの昇鎖をなし，A が Noether なのである $m_0\geq n$ でとまる．ここで $a\in J_{m_0}$ とする．$m=m_0+n$ とおくと，$aa_i^{m-n}=aa_i^{m_0}\in(a_1^{m_0},\dots,a_{i-1}^{m_0})\subset(a_1^n,\dots,a_{i-1}^n)$ なので $a\in I_{n,m}=I_{n,m_0}$ となることがわかる．（証明終）

命題 9.2.8

A を環とする．$a_1,\dots,a_r\in A$ が副正則列なら弱副正則列である．

証明.

r についての帰納法で示す．$r=1$ のとき，a が副正則とすると，任意の $n>0$ に対して，ある $m\geq n$ が存在して $\operatorname{Ann}a^m\subset\operatorname{Ann}a^{m-n}$ である．よって $H_1(a^n)=\operatorname{Ann}a^n$ なので，射影系 $(H_1(a^n))$ は本質的零である．

$r-1$ まで正しいとする．補題 8.5.13 により，複体の完全列；

$$0\longrightarrow K_\bullet(a_1^n,\dots,a_{r-1}^n)\longrightarrow K_\bullet(a_1^n,\dots,a_r^n)\longrightarrow K_\bullet(a_1^n,\dots,a_{r-1}^n)(-1)\longrightarrow 0$$

からホモロジーの長完全列；

$$\begin{array}{ccc} \cdots & \longrightarrow H_i(a_1^n,\dots,a_{r-1}^n)\xrightarrow{(-1)^i a_r^n} \\ H_1(a_1^n,\dots,a_{r-1}^n)\longrightarrow H_1(a_1^n,\dots,a_r^n) & \longrightarrow H_{i-1}(a_1^n,\dots,a_{r-1}^n)\xrightarrow{(-1)^{i-1}a_r^n} \\ H_{i-1}(a_1^n,\dots,a_{r-1}^n)\longrightarrow & \cdots \end{array}$$

が得られる．ゆえに；

$$0\longrightarrow H_0(a_r^n,H_i(a_1^n,\dots,a_{r-1}^n))\longrightarrow H_i(a_1^n,\dots,a_r^n)\longrightarrow H_1(a_r^n,H_{i-1}(a_1^n,\dots,a_{r-1}^n))\longrightarrow 0$$

が完全であり，これは射影系の間の完全列を誘導する．帰納法の仮定から 1 つ目の射影系は本質的零で，$H_1(a_r^n, H_{i-1}(a_1^n, \dots, a_{r-1}^n)) = \left\{x \in H_{i-1}(a_1^n, \dots, a_{r-1}^n) \,\middle|\, a_r^n x = 0\right\}$ であるから $i > 1$ のとき 3 つ目も本質的零である．よって $i = 1$ のとき，$\left\{x \in H_0(a_1^n, \dots, a_{r-1}^n) \,\middle|\, a_r^n x = 0\right\}$ を考えればよいが，これが本質的零であることはまさしく $a_1, \dots, a_r$ が副正則列であることである．（証明終）

これで本節の主定理が得られた．

系 9.2.9

A を Noether 環とする．任意の $a_1, \dots, a_r \in A$ は弱副正則列をなす．

証明.

命題 9.2.7 と上の命題から従う．（証明終）

§ 3　局所コホモロジー

環 A と，イデアル I について，関手 $\Gamma_I : \mathbf{Mod}(A) \to \mathbf{Mod}(A)$ を；

$$\Gamma_I(-) = \varinjlim \mathrm{Hom}_A(A/I^n, -)$$

で定義する．計算上は次の形が便利である．

命題 9.3.1

A を環とし，I をイデアルとする．関手 $\mathscr{E} : \mathbf{Mod}(A) \to \mathbf{Mod}(A)$ を；

$$\mathscr{E}(M) = \left\{x \in M \,\middle|\, \text{ある } n \in \mathbb{N} \text{ について } I^n x = 0 \text{ である．}\right\}$$

で定義すると，Γ_I と $\mathscr{E}$ は自然同型である．

証明.

A 加群 M について $\mathrm{Hom}_A(A/I^n, M) \cong \{x \in M \mid I^n x = 0\}$ であり，右辺の順極限は $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{x \in M \mid I^n x = 0\} = \mathscr{E}(M)$ なので同型が従う．また，$f : M \to N$ について；

$$\Gamma_I(f) : \Gamma_I(M) \to \Gamma_I(N); \{\varphi_i : A/I^i \to M\} \mapsto \{f \circ \varphi_i : A/I^i \to N\}$$

$$\mathscr{E}(f) : \mathscr{E}(M) \to \mathscr{E}(N); x \mapsto f(x)$$

であるので，これは明らかに可換である．（証明終）

定義により Γ_I は左完全な加法的関手である．これの導来関手を**局所コホモロジー**という．

定義 9.3.2（局所コホモロジー）

A を環とし，I をイデアルとする．関手 Γ_I の導来関手を**局所コホモロジー (local cohomology)** といい，H_I^i で表す．

$\Gamma_I(M) = \varinjlim_n \mathrm{Hom}(A/I^n, M)$ であって，帰納極限が完全関手であることから；

$$H_I^i(M) \cong \varinjlim_n \mathrm{Ext}^i(A/I^n, M)$$

であることに注意しよう．次に局所コホモロジーと Čech コホモロジーの間の関係について整理する．まず各コホモロジーの 0 次部分は自然に一致していることに注意しよう．

補題 *9.3.3*

A を環とし，$a_1, \ldots, a_r \in A$ について $I = (a_1, \ldots, a_r)$ とおく．任意の A 加群 M に対して；

$$\Gamma_I(M) = \check{H}^0(\underline{a}, M)$$

が成り立つ．

証明.

$\check{H}^0(\underline{a}, M)$ は；

$$M \to \bigoplus M_{a_i} e_i; x \mapsto (x/1)e_i$$

の核である．ゆえに $x \in \check{H}^0(\underline{a}, M)$ とおくと，任意の $1 \leq i \leq r$ についてある $n_i \geq 0$ が存在して $a_i^{n_i} x = 0$ である．ゆえに $I^n x = 0$ となる $n \geq 0$ がとれ，$x \in \Gamma_I(M)$ である．もちろん逆も成り立ち，M の部分加群として等しい．（証明終）

前節における準備によって，Noether 環上では常に局所コホモロジーと Čech コホモロジーが一致することを示すことができる．

定理 *9.3.4*

A を環とし，$a_1, \ldots, a_r \in A$ について $I = (a_1, \ldots, a_r)$ とおく．$\underline{a}$ が弱副正則列であることと，任意の A 加群 M と i に対して $H_I^i(M) \cong \check{H}^i(\underline{a}, M)$ であることは同値．

証明.

$(\Longrightarrow)$

Čech コホモロジーは δ 関手であり，上の注意から $H_I^0(M) = \check{H}^0(\underline{a}, M)$ なので Čech コホモロジーが普遍的ならよいが，命題 9.2.4 により消去的なので定理 6.6.4 により成り立っている．

$(\Longleftarrow)$

命題 9.2.4 から明らかである．

（証明終）

系 *9.3.5*

A を Noether 環とする．任意の $a_1, \ldots, a_r \in A$ について $I = (a_1, \ldots, a_r)$ とおくと，任意の A 加群 M と i について $H_I^i(M) \cong \check{H}^i(\underline{a}, M)$ である．

証明.

系 9.2.9 と上の定理から従う．（証明終）

この結果から，例えば Noether 環上の局所コホモロジーは根基によらないことなどがすぐにわかる（もちろん定義から直接示すこともできる）．

§ 4　完備局所環の構造定理の概略

局所環の理論では，示したい性質が完備化で保たれることを見ることで，完備な環に帰着させることは有力な論法である（例えば定理 9.5.7）．この節では完備局所環の持つよい性質の 1 つとして，非常に強力な Hensel の補題と，完備局所環の構造定理（Cohen の定理）を紹介したい．のだが，完備局所環の構造定理の証明は一般の場合には難しく，ここでは体を含む場合にのみ証明を述べたいと思う．

定理 *9.4.1*（Hensel の補題）

$(A, \mathfrak{m}, k)$ を完備局所環とする．多項式の係数を $\mathfrak{m}$ で割ることにより得られる全射 $\pi : A[X] \to k[X]$ を考える．任意のモニック多項式 $F \in A[X]$ に対して，$f = \pi(F) \in k[X]$ とおく．モニックで互いに素な $g, h \in k[X]$ が存在して，$f = gh$ とかけているとき，モニックな $G, H \in A[X]$ が存在して，$F = GH$ かつ $\pi(G) = g, \pi(H) = h$ を満たす．

証明.

任意の $n \geq 0$ に対して，モニック多項式 $G_n, H_n \in A[X]$ を；

$$\pi(G_n) = g, \pi(H_n) = h, F - G_nH_n \in \mathfrak{m}^n A[X], G_{n+1} - G_n, H_{n+1} - H_n \in \mathfrak{m}^n A[X]$$

となるように作ればよい．G_1, H_1 は単に $\pi(G_1) = g, \pi(H_1) = h$ となるモニック多項式をとればよい．帰納的に G_n, H_n までとれているとする．いま；

$$F - G_nH_n = \sum a_i\Phi_i \ (a_i \in \mathfrak{m}^n)$$

とおくと，$k[X]$ において $(g, h) = 1$ なので，$\pi(\Phi_i) = g\psi_i + h\psi'_i$ とおける．いま $\Psi_i, \Psi'_i \in A[X]$ を $\pi(\Psi_i) = \psi_i, \pi(\Psi'_i) = \psi'_i$ となるようにとり，$G_{n+1} = G_n - \sum a_i\Psi'_i, H_{n+1} = H_n - \sum a_n\Psi_i$ とおけば；

$$F - G_{n+1}H_{n+1} = \sum a_i(\Phi_i - G_n\Psi_i - H_n\Psi'_i) + (\sum a_i\Phi_i)(\sum a_i\Psi'_i)$$

であるので，題意を満たす．（証明終）

ここで局所環 $(A, \mathfrak{m}, k)$ の標数について注意をしておく．A と k の標数が同じとき A は**等標数 (equicharacteristic)** であるといい，A と k の標数が異なるとき A は**混標数 (mixed characteristic)** であるという．

命題 *9.4.2*

局所環 $(A, \mathfrak{m}, k)$ の標数について，A, k 標数の組は；

	A の標数	k の標数
等標数 0	0	0
等標数 p	p	p
混標数 $(0, p)$	0	p
混標数 (p^n, p)	p^n	p

の 4 通りしかない．ここで p は素数，$n \geq 2$ である．

証明.

整域の標数が $0, p$ に限ることはわかっている．$\mathrm{Char}\, k \le \mathrm{Char}\, A$ であることに注意すると，$\mathrm{Char}\, k = 0$ なら $\mathrm{Char}\, A = 0$ であることはすぐにわかる．次に $\mathrm{Char}\, k = p$ であるとすると，$\mathrm{Char}\, A = n$ としたとき $\mathbb{Z} \to A \to k$ の核を考えて $(n) \subset (p)$ であるので $n = p^i n'$ $(n' \notin (p))$ とかける．ここで A において $p^i n \cdot 1 = 0$ で，$n' \cdot 1 \in \mathfrak{m}$ なら $n'(1+\mathfrak{m}) = 0$ だからこれは $n' \notin (p)$ に反する．よって $n \cdot 1 \notin \mathfrak{m}$ でなければならず，$n' \cdot 1$ は単元なので $p^i \cdot 1 = 0$ となり，n の最小性から $n = p^i$ であったことがわかる．（証明終）

命題 *9.4.3*

局所環 $(A, \mathfrak{m}, k)$ において，体を含むことと等標数であることは同値である．

証明.

体を含むなら等標数であることは明らか．逆に等標数であるとする．$\mathrm{Char}\, k = 0$ ならば $\mathbb{Q} \subset k$ であり，任意の $n > 1$ について $1/n$ に対応する $a + \mathfrak{m} \in k$ をとると $a \notin \mathfrak{m}$ かつ $na + \mathfrak{m} = 1 + \mathfrak{m}$ であるので，$na - 1 = b \in \mathfrak{m}$ とすれば，$n = (1+b)/a$ とかけ，命題 0.2.16 から $1 + b$ も単元なので n は A で単元である．よって $\mathbb{Q} \subset A$ となる．また $\mathrm{Char}\, k = \mathrm{Char}\, A = p$ なら $\mathbb{Z} \to A$ の核は (p) なので，A は $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ を自然に含む．（証明終）

ここで歴史的なことを述べると，局所環とはもともと Krull (1938) によって導入されたものだが，その定義は，環 A であって；

(i) A のすべてのイデアルが有限生成である．
(ii) A の非単元全体がイデアルをなす．

の２つを満たすものを局所環という，とされており現代の言葉で言えば唯一の極大イデアルをもつ Noether 環のことを局所環と呼んでいた（日本語で読める重要な文献の 1 つである永田 (1974) においてもその流儀で，本書で言う局所環を**擬局所環**と呼んでいる）．そこで Cohen (1946) は次の**超局所環（generalised local ring）**を定義し，完備な超局所環が（Krull の意味での，すなわち Noether な）局所環であることを示した．

定義 *9.4.4*（超局所環）

環 A であって，以下の条件；

(i) A の非単元全体 $\mathfrak{m}$ が有限生成なイデアルをなす．
(ii) $\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{m}^n = 0$ である．

を満たすものを**超局所環 (generized local ring)** という．

もちろん，本書では単に「局所環」といったら Noether 性は仮定しないことを注意しておく．よって，generized と名付けられていながら $\{$ 超局所環 $\} \subset \{$ 局所環 $\}$ のような状況であることに気をつけてほしい．

命題 *9.4.5*

完備局所環 $(A, \mathfrak{m})$ は $\mathfrak{m}$ が有限生成なら Noether である．

証明.

A が完備だから $A \to \widehat{A}$ は同型，特に $\bigcap \mathfrak{m}^n = 0$ である．よって系 4.5.5 により $G(A)$ が Noether ならよいが，$\mathfrak{m} = (a_1, \ldots, a_r)$ とすれば $G(A) = k[a_1 + \mathfrak{m}^2, \ldots, a_r + \mathfrak{m}^2]$ である（命題 4.5.2 を参照せよ）ので Noether

である．（証明終）

歴史的な話はこれくらいにして，完備局所環の構造定理を述べよう．

定義 *9.4.6*（係数環）

$(A, \mathfrak{m}, k)$ を局所環とする．A の部分環 R であって，A が等標数のとき，R は体であって $R \to A \to k$ は同型，すなわち $A = R + \mathfrak{m}$ であるものを A の**係数体 (coefficient field)** という．A が混標数で $\operatorname{Char} k = p$ のときは，R は pR を極大イデアルとする完備局所環で，$R \to A \to k$ は全射，すなわち $A = R + \mathfrak{m}, R \cap \mathfrak{m} = pR$ であるとき，R を A の**係数環 (coefficient ring)** であるという．

定理 *9.4.7*（Cohen の完備局所環の構造定理）

完備局所環 $(A, \mathfrak{m})$ は係数環 R をもつ．

この定理の特別な場合として，A が Noether の場合には完備局所環は正則局所環の準同型像でかけることがわかる．

定理 *9.4.8*（完備 Noether 局所環の構造定理）

$(A, \mathfrak{m}, k)$ を $\mathfrak{m} = (a_1, \ldots, a_n)$ であるような完備 Noether 局所環とすると，係数環 $R \subset A$ が存在して A は $R[[X_1, \ldots, X_n]]$ の準同型像である．

証明．

$S = R[[X_1, \ldots, X_n]]$ は完備局所環である．実際 $f \in (X_1, \ldots, X_n)S$ を考えると，Cauchy 列 $\{\sum_{i=0}^n f^i\}$ は収束し，$1 - f$ が単元である．よって $(X_1, \ldots, X_n)S \subset \operatorname{rad} S$ であり，$\operatorname{Spm} S = \operatorname{Spm} S/(X_1, \ldots, X_n)S = \operatorname{Spm} R$ であることがわかる．ここで係数環の定義から R は pR $(\operatorname{Char} k = p)$ を極大イデアルとする局所環であるので，S は $(p, X_1, \ldots, X_n)S$ を極大イデアルとする局所環である．

ここで $\varphi : S = R[[X_1, \ldots, X_n]] \to A; X_i \mapsto a_i$ を考えると，これは局所準同型であって，$\varphi((p, X_1, \ldots, X_n)S)$ が A で生成するイデアルは $\mathfrak{m}$ に他ならず，いま係数環の定義から $R/pR \cong k$ なので命題 4.5.7 から 1 は S 加群として A を生成するので，φ は全射である．よって A は $S = R[[X_1, \ldots, X_n]]$ の準同型像である．（証明終）

Cohen の構造定理の証明は体を含む場合にのみ証明することにしよう．完全な証明は例えば永田 (1974)，定理 8.1.1. などをみよ．

定理 *9.4.9*

$(A, \mathfrak{m}, k)$ を完備 Noether 局所環で，A は等標数または整域であるとする．このとき A の部分環 A' が存在して；

(i) $(A', \mathfrak{n})$ は完備正則局所環である．
(ii) A は有限生成 A' 加群である．
(iii) $A'/\mathfrak{n} \cong k$ である．

が成り立つ．

証明.

まず A が等標数であるとする．$\dim A = d$ として，巴系 $\{a_1, \ldots, a_d\}$ をとる．このとき；

$$\varphi : k[[X_1, \ldots, X_d]] \to A; X_i \mapsto a_i$$

の像を A' とおく．このとき A' は完備局所環の準同型像なので完備局所環で，その極大イデアルは $\mathfrak{n} = (a_1, \ldots, a_n)A'$ である．いま $A'/\mathfrak{n} = k$ であって，$(a_1, \ldots, a_n)A$ は $\mathfrak{m}$ 準素だから $A/(a_1, \ldots, a_n)A$ は Artin なので特に k 上有限生成である．よって命題 4.5.7 から A は有限生成 A' 加群である．特に $A' \subset A$ は整拡大で，$\dim A' = \dim A$ である（系 3.5.8）．また $\dim k[[X_1, \ldots, X_d]] = d$ で，これは整域だから φ は単射である．ゆえに A' は正則である．

次に A が $\mathrm{Char}\, k = p > 0$ であるような整域とする．証明は概ね上と同じである．このとき $\mathrm{Char}\, A = 0$ で，A の巴系を $\{p, a_1, \ldots, a_{d-1}\}$ としてとり，A の係数環を R とすれば；

$$\varphi : R[[X_1, \ldots, X_{d-1}]] \to A; X_i \mapsto a_i$$

の像を A' とおくとその極大イデアルは $\mathfrak{n} = (p, a_1, \ldots, a_{d-1})$ であるので $A'/\mathfrak{n} = R/pR \cong k$ で，上と全く同様にして A は A' 上有限生成である．いま A が整域だから R も整域である．すると R は極大イデアルが単項な整域なので DVR である．ゆえに $R[[X_1, \ldots, X_{d-1}]]$ は d 次元の整域だから φ は単射である．（証明終）

この定理で整域を外すと成り立たない例は以下（例 B.2.6）にある．

§ 5　Grothendieck の定理群

この節では局所コホモロジーに関する，Grothedieck による消滅定理と双対定理を証明する．まず Noether 環上の局所コホモロジーが Artin であることを証明しよう．

命題 *9.5.1*

A を Noether 環，I を A のイデアルとする．$P \in \mathrm{Spec}\, A$ について；

$$\Gamma_I(\mathrm{E}(A/P)) = \begin{cases} \mathrm{E}(A/P) & \text{if } I \subset P. \\ 0 & \text{else.} \end{cases}$$

である．

証明.

まず，任意の $x \neq 0 \in \mathrm{E}(A/P)$ について $\mathrm{Ann}\, x$ は P 準素であることに注意する．実際 $Ax \cong A/\mathrm{Ann}\, x \subset \mathrm{E}(A/P)$ なので，$\mathrm{Ass}(A/\mathrm{Ann}\, x) \subset \mathrm{Ass}\, \mathrm{E}(A/P) = \{P\}$ より $\mathrm{Ann}\, x$ は P 準素である．

さて $\Gamma_I(\mathrm{E}(A/P)) \neq 0$ とすると，任意の $x \neq 0 \in \Gamma_I(\mathrm{E}(A/P))$ をとる．$I^n x = 0$ となる n があり，また $Ax \cap A/P \neq 0$ なので，$0 \neq a + P \in Ax \cap A/P$ をとれば $I^n a \subset P$ で，$a \notin P$ だから $I \subset P$ となり，$I \not\subset P$ ならば $\Gamma_I(\mathrm{E}(A/P)) = 0$ であることがわかる．

次に $I \subset P$ とする．任意の $0 \neq x \in \mathrm{E}(A/P)$ をとると，$0 \neq ax \in Ax \cap A/P$ をとると，$I = (a_1, \ldots, a_r)$ としたとき $a_i ax = 0$ なので $a \notin \mathrm{Ann}\, x$ だから，$\mathrm{Ann}\, x$ は P 準素なので $a_i^{n_i} x = 0$ となる n_i がとれる．よって n_i の総和を n として $I^n x = 0$ とできる．よって $\Gamma_I(\mathrm{E}(A/P)) = \mathrm{E}(A/P)$ である．（証明終）

系 9.5.2

$(A, \mathfrak{m}, k)$ を Noether 局所環，M を有限生成 A 加群とする．このとき $H^i_{\mathfrak{m}}(M)$ は；

$$0 \longrightarrow \mathrm{E}(k)^{\mu^0(\mathfrak{m},M)} \longrightarrow \mathrm{E}(k)^{\mu^1(\mathfrak{m},M)} \longrightarrow \cdots$$

のコホモロジーである．

系 9.5.3

$(A, \mathfrak{m}, k)$ が Gorenstein なら；

$$H^i_{\mathfrak{m}}(A) \cong \begin{cases} \mathrm{E}(k) & \text{if } i = d \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

である．

証明.

定理 8.1.10 により $i \neq d$ ならば $\mu^i(\mathfrak{m}, A) = 0$ で，$i = d$ ならば $\mu^d(\mathfrak{m}, A) = 1$ である．（証明終）

命題 9.5.4

$(A, \mathfrak{m}, k)$ を Noether 局所環とするとき，$E = \mathrm{E}(k)$ は Artin である．

証明.

定理 8.3.8 と命題 8.3.5 により E は $\widehat{A}$ 加群として Artin である．また，任意の A 部分加群 $N \subset E$ について，定理 8.3.8 の証明の前半と同様に $N \to N \otimes_A \widehat{A}$ によって N を E の $\widehat{A}$ 部分加群とみなせ，E の部分 A 加群の減少列は止まることがわかる．ゆえに E は A 加群としても Artin である．（証明終）

系 9.5.5

$(A, \mathfrak{m})$ を Noether 局所環，M を有限生成 A 加群とすると $H^i_{\mathfrak{m}}(M)$ は Artin である．

証明.

前命題と系 9.5.2 から従う．（証明終）

次に局所コホモロジーは完備化で保たれることを示そう．命題 4.4.1 により，有限生成な加群 M について $\widehat{M} \cong M \otimes_A \widehat{A}$ であることに注意する．

命題 9.5.6

$(A, \mathfrak{m})$ を Noether 局所環とする．M を Artin かつ Noether 加群とすると，$M \cong \widehat{M}$ である．

証明.

M の組成列 $\{M_i\}$ をとる．このとき $M_1 \cong k$ に注意して，完全列；

$$0 \longrightarrow k \longrightarrow M_2 \longrightarrow k \longrightarrow 0$$

がある．定理 8.3.8 の証明と同様に $k \cong k \otimes_A \widehat{A} \cong \widehat{k}$ である．よって $M_2 \to M_2 \otimes_A \widehat{A}; x \mapsto x \otimes 1$ を考えると；

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & k & \longrightarrow & M_2 & \longrightarrow & k & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \widehat{k} & \longrightarrow & \widehat{M_2} & \longrightarrow & \widehat{k} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

において両端の縦の射が同型なので，中央も同型である．よって帰納的に $M \cong \widehat{M}$ が従う．（証明終）

定理 *9.5.7*

$(A, \mathfrak{m})$ を Noether 局所環，M を有限生成 A 加群とする．このとき，任意の $i \geq 0$ に対して；

$$H^i_{\mathfrak{m}}(M) \cong H^i_{\widehat{\mathfrak{m}}}(\widehat{M})$$

が成り立つ．

証明.

命題 A.4.16 により $H^i_{\mathfrak{m}}(M) \cong \varinjlim M_i$ と局所コホモロジーは有限生成 A 加群の帰納極限とかける．いま系 9.5.5 より M_i は Artin かつ Noether 加群であることに注意すると帰納極限とテンソル積は可換（命題 A.4.15）で，命題 9.5.6 から；

$$H^i_{\mathfrak{m}}(M) \cong \varinjlim M_i \cong \varinjlim (M_i \otimes_A \widehat{A}) \cong (\varinjlim M_i) \otimes \widehat{A} \cong H^i_{\mathfrak{m}}(M) \otimes \widehat{A}$$

であり，また $H^i_{\mathfrak{m}}(M) \cong \varinjlim \mathrm{Ext}^i(A/\mathfrak{m}^n, M)$ であるので，命題 6.7.11 から；

$$H^i_{\mathfrak{m}}(M) \cong H^i_{\mathfrak{m}}(M) \otimes \widehat{A} \cong \varinjlim \mathrm{Ext}^i_{\widehat{A}}(\widehat{A}/\widehat{\mathfrak{m}}^n, \widehat{M}) \cong H^i_{\widehat{\mathfrak{m}}}(\widehat{M})$$

であることがわかった．（証明終）

補題 *9.5.8*

$(A, \mathfrak{m}), (B, \mathfrak{n})$ を Noether 局所環とする．$\mathfrak{m} = (a_1, \ldots, a_n)$ としたとき，環準同型 $\varphi : A \to B$ で $(\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_n))$ が $\mathfrak{n}$ 準素であるものが存在するならば，任意の B 加群 M について A 加群の同型；

$$H^i_{\mathfrak{m}}(M) \cong H^i_{\mathfrak{n}}(M)\ (i \geq 0)$$

が存在する．

証明.

仮定より $\sqrt{(\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_n))} = \mathfrak{n}$ なので，系 9.3.5 から $\check{H}^i(\underline{a}, M) \cong \check{H}^i(\underline{\varphi(a)}, M)$ を確かめればよい．Čech 複体を考えると $A_{a_I} \otimes_A M \cong B_{\varphi(a)_I} \otimes_B M$ を示せばよいが，例えば $a \in A$ と $x \in M$ について $a \otimes x = 1 \otimes \varphi(a)x$ であることからこの同型は明らかである．（証明終）

定理 *9.5.9*（局所コホモロジーの消滅定理，Grothendieck）

$(A, \mathfrak{m}, k)$ を Noether 局所環とする．有限生成 A 加群 M について $t = \operatorname{depth} M, d = \dim M$ とおく．このとき，$i < t$ または $d < i$ ならば $H^i_{\mathfrak{m}}(M) = 0$ であり，また $i = t, d$ のとき $H^i_{\mathfrak{m}}(M) \neq 0$ である．

証明.

まず $i < t$ ならば $\mu^i(\mathfrak{m}, M) = 0$ なので，系 9.5.2 から $H^i_{\mathfrak{m}}(M) = 0$ である．次に $d < i$ の場合を考える．ここで $d = \dim M = \dim A/\operatorname{Ann} M$ であり，$A \to A/\operatorname{Ann} M$ に補題 9.5.8 を適用することで $\dim A = d$ としてよい．このとき A の巴系 $a_1, \ldots, a_d$ をとれば系 9.3.5 から $i > d$ について $H^i_{\mathfrak{m}}(M) \cong \check{H}^i(\underline{a}, M) = 0$ であることがわかる．

次に $H^t(M) \neq 0$ であることを，t についての帰納法で示そう．まず $t = 0$ のときは $\mathfrak{m} \in \operatorname{Ass} M$ だから単射 $k \to M$ が存在し，これによって $k \subset \Gamma_{\mathfrak{m}}(M) \neq 0$ である．次に $t-1$ まで正しいとすると，M 正則元 $a \in \mathfrak{m}$ がとれ，完全列；

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{a\cdot} M \longrightarrow M/aM \longrightarrow 0$$

が導く局所コホモロジーの長完全列；

$$H^{t-1}_{\mathfrak{m}}(M) \longrightarrow H^{t-1}_{\mathfrak{m}}(M/aM) \longrightarrow H^t_{\mathfrak{m}}(M)$$

において $H^{t-1}_{\mathfrak{m}}(M) = 0, H^{t-1}_{\mathfrak{m}}(M/aM) \neq 0$ なので $H^t_{\mathfrak{m}}(M) \neq 0$ であることがわかる．

最後に $H^d_{\mathfrak{m}}(M) \neq 0$ を示そう．まず定理 5.5.6 より $\dim A = \dim \widehat{A}$ であり，$\widehat{\operatorname{Ann} M} = \operatorname{Ann} \widehat{M}$ であるので $\dim M = \dim \widehat{M}$ である．よって定理 9.5.7 から A を完備としてよい．次に $\dim M = \dim A/P$ なる $P \in V(\operatorname{Ann} M)$ をとる（A が Noether なので $V(\operatorname{Ann} M)$ の極小元は有限）と，完全列；

$$0 \longrightarrow PM \longrightarrow M \longrightarrow M/PM \longrightarrow 0$$

において $\dim PM \leq \dim M$ だから，局所コホモロジーの完全列；

$$H^d_{\mathfrak{m}}(M) \longrightarrow H^d_{\mathfrak{m}}(M/PM) \longrightarrow H^{d+1}_{\mathfrak{m}}(PM) = 0$$

を得る．ゆえに $H^d_{\mathfrak{m}}(M/PM) \neq 0$ ならばよい．ここで M/PM を A/P 加群としてみて，補題 9.5.8 を使うと A を $\dim A = d$ であるような完備局所整域としてよいことがわかる．このとき定理 9.4.9 から，部分環 $A' \subset A$ であって，完備正則局所環でその極大イデアルが $\mathfrak{m}$ 準素で，さらに $\dim A' = \dim A$ であるものがとれる．よって補題 9.5.8 から A を完備正則局所環としてよい．$K = \operatorname{Frac} A$ とおくと，$M \otimes_A K$ は，素イデアル (0) による M の局所化にほかならない．自然な $\varphi : M \to M \otimes K$ を考える．$M \otimes K$ の K 上の基底 $\{e_1, \ldots, e_r\}$ と，$\operatorname{Im} \varphi$ の A 加群としての生成系 $\{u_1, \ldots, u_n\}$ をとれば包含 $\operatorname{Im} \varphi \to M \otimes K$ により $u_i = \sum_j a_{ij}/b_{ij} e_j$ とかける．ここで $b = \prod_{i,j} b_{ij}$ とおけば，自然な包含 $\operatorname{Im} \varphi \to \sum_j A/b e_j$ がある．これによって $\operatorname{Im} \varphi$ を自由加群 A^r の部分加群とみなす．ここで完全列；

$$0 \longrightarrow \operatorname{Im} \varphi \longrightarrow A^r \longrightarrow C \longrightarrow 0 \tag{($*$)}$$

を考えると，$\varphi \otimes \mathrm{id}_K$ は同型なので，$M \otimes K = \operatorname{Im} \varphi \otimes K$ で，また K は A の局所化なので平坦だから，完全列；

$$0 \longrightarrow M \otimes K \longrightarrow A^r \otimes K \longrightarrow C \otimes K \longrightarrow 0$$

を得るが，構成から $M \otimes K \cong A^r \otimes K$ なので $C \otimes K = 0$ である．すると，任意の $x \in C$ に対して，ある $a \neq 0$ が存在して $ax = 0$ となるので，C は有限生成だから，生成系をとれば $a \neq 0 \in \operatorname{Ann} C$ となるような a があることがわかる．すると $A/\operatorname{Ann} C$ では (0) は素ではないので，$\dim C < \dim A$ となる．すると $(*)$ から局所コホモロジーの長完全列をとると，いま A は正則だから特に Gorenstein なので，系 9.5.3 から；

$$H^d_{\mathfrak{m}}(\operatorname{Im} \varphi) \longrightarrow H^d_{\mathfrak{m}}(A^r) = \mathrm{E}(k)^r \longrightarrow H^d_{\mathfrak{m}}(C) = 0$$

である．ゆえに $H^d_{\mathfrak{m}}(\operatorname{Im}\varphi) \neq 0$ である．同様に $0 \longrightarrow \ker\varphi \longrightarrow M \longrightarrow \operatorname{Im}\varphi \longrightarrow 0$ において $\dim\ker\varphi < \dim A$ なので，$H^d_{\mathfrak{m}}(M) \neq 0$ であることがわかった．（証明終）

第10章　UFD

—Unique Factorisation Domain

§1　UFD と Auslander–Buchsbaum の定理

この節では有限自由分解と呼ばれる射影分解の一種をもつ加群について触れるとともに，Auslander–Buchsbaum の定理（定理 5.6.10）の証明を与える．まず UFD についていくつかの性質を見ていこう．まず整域 A が UFD であることと，単項イデアルについての昇鎖律を満たし，既約元が素元であることは同値であることを示そう．前半の部分は元を無限に割り続けることはできないということ，後半の部分は分解の一意性を保証する．この節では単項イデアルについての昇鎖律を ACCP (Ascending Chain Condition on Principal ideals) と略記する．

命題 *10.1.1*

整域 A について，ACCP が成り立つならば任意の $a \in A$ が既約元と単元の積に書ける．

証明.

既約分解できない $a \in A$ が存在するとする．すなわち，$a = f_1 \cdots f_n$ と書いたとき，少なくとも 1 つは単元でも既約でもない．特に a は既約でない．このとき $a = r_1 a_1$ として r_1, a_1 をどちらも非単元にとれる．またどちらかは既約でないので，それを a_1 としよう．同様に $a_1 = r_2 a_2$ とすると $a = r_1 r_2 a_2$ なので r_2, a_2 のどちらかは既約でなく，またどちらも単元ではない．すると単項イデアルの昇鎖；

$$(a) \subset (a_1) \subset \cdots \subset (a_n) \subset \cdots$$

が得られ，仮定よりある n でとまる．すると $a_n = r_{n+1} a_{n+1}$ に対して $a_{n+1} \in (a_n)$ だから r_{n+1} は単元となり，これは矛盾する．（証明終）

実はこれの逆は成り立たない．例 B.1.8 をみよ．UFD という条件下では同値になる．

命題 *10.1.2*

整域 A について，A が UFD であることと ACCP が成り立ち，かつ既約元が素元であることは同値.

証明.

$(\Longrightarrow)$

既約元が素元であることはすでにみた（命題 0.3.12）．よって (ACCP) を示そう．

$$(a_1) \subset (a_2) \subset \cdots \subset (a_n) \subset \cdots \quad (a_i \notin A^\times)$$

を単項イデアルの昇鎖とする．任意の i について $a_i = r a_{i+1}$ とかける．r, a_{i+1} を既約分解；

$$r = s r_1 \cdots r_k, a_{i+1} = t b_1 \cdots b_l \quad (s, t \in A^\times, 0 \leq k, 1 \leq l)$$

する．ここで $k = 0$ であることと r が単元であること，特に $(a_i) = (a_{i+1})$ であることが同値であることに注意する．このとき a_i は $k + l$ 個の既約因子をもち，a_{i+1} は l 個の既約因子を持つので，イデアルの昇鎖において

既約因子の個数は減っていく．特に $(a_i) \subsetneq (a_{i+1})$ であることと真に減ることは同値なので，既約因子の個数は 0 にはなれないからいずれ止まる．

$(\Longleftarrow)$

上の命題より ACCP から既約分解の存在が言え，既約元は素元なので分解の一意性も保証されている．

（証明終）

まずは UFD のよく知られた判定法として，Nagata (1957) によるものを紹介しよう．

補題 *10.1.3*

A を整域とする．$S \subset A$ を素元によって生成された積閉集合とする．$f \in A$ を既約であるとする．このとき $f/1 \in A_S$ も既約または単元であり，また f が素元であることと $f/1$ が素元または単元であることは同値である．

証明.

まず $f/1$ が既約であることを示そう．$f/1 = a/s \cdot b/t$ とかけるとする．すると $stf = ab$ とかける．$st \in S$ なので，素元 $p_1, \ldots, p_n$ をとって $st = p_1 \cdots p_n$ とかける．よって各 i について $ab \in (p_i)$ であるから，$a \in (p_i)$ または $b \in (p_i)$ である．よってある $r, r' \in A$ と $s', s'' \in S$ がとれて $f = rr', a = s'r, b = s''r'$ とかける．f は既約なので r または r' は単元である．よって $a \in S$ または $b \in S$ となり a/s または b/t は単元である．よって $f/1$ は既約である．

次に $f \in A$ が素元であるとする．すると $A_S/(fA_S) = S^{-1}(A/fA)$ において A/fA は整域であるから $S^{-1}(A/fA)$ はゼロまたは整域である．よって $f/1$ は素元または単元である．逆を示そう．まず $f/1$ が単元であるとすると，$f/1 \cdot a/s = 1$ となる $a/s \in A_S$ が存在する．このとき $fa = s \in S$ であるので，適当な $p_1, \ldots, p_n$ をとって $fa = p_1 \cdots p_n$ とかける．よって各 i について $f \in (p_i)$ または $a \in (p_i)$ である．任意の i について $f \notin (p_i)$ ならば f は単元になり既約であることに矛盾．よって $f \in (p_i)$ となる i があるが，f が既約なので $(f) = (p_i)$ となり f は素元である．また $f/1$ が素元であるとすると，$ab \in (f)$ とすると $(f/1)$ が素イデアルだからある $s \in S$ と $r \in A$ が存在して $sa = rf$ または $sb = rf$ である．$sa = rf$ のときに示す．$s = p_1 \cdots p_n$ と表そう．このとき $rf \in (p_i)$ より，ある i について $f \in (p_i)$ なら f は素元であり問題ない．また任意の i について $f \notin (p_i)$ なら $a \in (f)$ となり (f) が素イデアルであることが従う．（証明終）

定理 *10.1.4*（永田の判定条件）

A を既約分解が存在するような整域とする．このとき，以下の条件；

(i) A は UFD である．

(ii) 任意の素元たちで生成される A の積閉集合 S について A_S は UFD はである．

(iii) ある素元たちで生成された A の積閉集合 S が存在して A_S は UFD である．

は同値である．

証明.

(i) $\Longrightarrow$ (ii)

任意の $f/s \in A_S$ をとる．$f \in A$ を既約分解して $f = f_1 \ldots f_n$ とすると $f/s = 1/sf_1/1 \cdots f_r/1$ とかけ，補題から f/s は単元と素元の積でかけているので，A_S は UFD である．

(ii) $\Longrightarrow$ (iii)

明らか.

(iii) $\Longrightarrow$ (i)

$f \in A$ を既約元とする．補題より $f/1$ は既約であり，A_S が UFD だから $f/1$ は素元．すると再び補題より f は素元である．

（証明終）

この定理において，既約分解が存在するという仮定を外すことはできない．例 B.1.5 をみよ．この条件は A が Noether なら成り立っていることに注意する．Noether 性を課してしまえば UFD にはわかりやすい言い換えがある．

命題 *10.1.5*

Noether 整域 A が UFD であることはすべての高さ 1 の素イデアルが単項であることと同値である．

証明.

($\Longrightarrow$)

$P \in \operatorname{Spec} A$ が高さ 1 であるとする．任意の 0 でない $a \in P$ について既約分解 $a = f_1 \cdots f_r$ する．このときある f_i について $f_i \in (P)$ であるから $(f_i) \subset P$ であり，UFD において既約元は素元だから $(f_i) \in \operatorname{Spec} A$ である．すると $\operatorname{ht} P = 1$ だから $(f_i) = P$ である．

($\Longleftarrow$)

既約元は素元であることを示せばよい．f を既約元とする．(f) の極小素イデアル P について単項イデアル定理より $\operatorname{ht} P = 1$ である．よって P は単項だから $P = (a)$ とかける．よって $f \in (a)$ なのである r について $f = ar$ であり，f は既約だから r は単元．よって $(f) = P$ となり f は素元である．

（証明終）

UFD とその Noether 性に関連して，次の興味深い事実を示しておこう．

命題 *10.1.6*

環 A が 1 次元の UFD であることと PID であることは同値である．

証明.

逆はよく知られているので，A が 1 次元 UFD がならば Noether であることを示そう．任意の $P \in \operatorname{Spec} A$ は単項である．実際 $P = (0)$ のときは明らかで，任意の $a \neq 0 \in P$ をとって $a = f_1 \cdots f_r$ と既約分解し，$f_i \in P$ となる i をとれば $(f_i) \subset P$ であり，A が UFD なので $(f_i) \in \operatorname{Spec} A$ であり，いま $\dim A = 1$ なので $P = (f_i)$ である．よって A は Noether である（定理 0.6.5）．また UFD は整閉整域なので A は Dedekind 整域であることがわかり，特にすべてのイデアルは素イデアルの有限積でかける．よって PID である．（証明終）

補題 *10.1.7*

A が整域であるとする．イデアル I で $I \oplus A^n \cong A^{n+1}$ となるものは単項イデアルである．

証明.

A^{n+1} の基底を $\{e_0, \ldots, e_n\}$ とする．また $I \oplus A^n \hookrightarrow A \oplus A^n$ としたとき，f_0 を A の，$\{f_1, \ldots, f_n\}$ を A^n の

基底とすれば，同型；

$$\varphi : A^{n+1} \to I \oplus A^n$$

の基底による表現は $\varphi(e_i) = \sum_{j=0}^{n} a_{ij} f_j$ とかける．行列 (a_{ij}) の $(i,0)$ 余因子を d_i とおき，$\det(a_{ij}) = d$ とすると，$\sum a_{i0} d_i = d, \sum a_{ij} d_i = 0\ (j \neq i)$ である．よって $e'_0 = \sum d_i e_i$ とおくと $\varphi(e'_0) = df_0$ であり，φ は全射だから $\varphi(e'_i) = f_i$ となる $e'_i \in A^{n+1}$ が存在する．ここで $e'_i = \sum_{j=0}^{n} c_{ij} e_j$ とおくと，行列として；

$$(c_{ij})(a_{ij}) = \begin{pmatrix} d & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

が成り立つ（$e'_i = \sum_{j=0}^{n} c_{ij} e_j$ の両辺に φ を施してみよ）．よって $\det(c_{ij}) = 1$ となるので，$e'_0, \ldots, e'_n$ は A^{n+1} の基底である．ゆえに $If_0 = \varphi(Ae'_0) = Adf_0$ となり，$I = Ad$ である．（証明終）

この補題の条件は一般に**安定して自由**であるといわれる．

定義 *10.1.8*（安定的自由）

A を環，M を A 加群とする．有限自由加群 F, F' が存在して $M \oplus F \cong F'$ となるとき，M は**安定的自由 (stably free)** であるという．

加群が安定的自由であることを判定する条件として，**有限自由分解**が有効である．

定義 *10.1.9*（有限自由分解）

A を環，M を A 加群とする．長さ有限の完全列；

$$0 \longrightarrow F_n \longrightarrow F_{n-1} \longrightarrow \ldots \longrightarrow F_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

であって，各 F_i が有限階数の自由加群であるものが存在するとき，M は**有限自由分解 (finite free resolution)** を持つという．

補題 *10.1.10*（Schanuel の補題）

A を環，M を A 加群とする．完全列；

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow P_n \longrightarrow \ldots \longrightarrow P_0 \xrightarrow{\ \varepsilon\ } M \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow K' \longrightarrow Q_n \longrightarrow \ldots \longrightarrow Q_0 \xrightarrow{\ \varepsilon'\ } M \longrightarrow 0$$

について，各 $0 \leq i \leq n$ について P_i, Q_i が射影加群ならば；

$$K \oplus Q_n \oplus P_{n-1} \oplus \cdots \cong K' \oplus P_n \oplus Q_{n-1} \oplus \cdots$$

が成り立つ．

証明.

n についての帰納法で示す．まず $n = 0$ とする．

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & K \arrow[r] & P \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, shift right, "g"'] & M \arrow[r] & 0 \\ 0 \arrow[r] & K' \arrow[r] & Q \arrow[r, "\varepsilon'"] \arrow[u, shift right, "f"'] & M \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

P, Q は射影的なので，上のように f, g が存在して $\varepsilon' \circ f = \varepsilon, \varepsilon \circ g = \varepsilon'$ が成り立つ．そこで同型写像 $\varphi, \psi : P \oplus Q \to P \oplus Q$ を構成しよう；

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & K \oplus Q \arrow[r] & P \oplus Q \arrow[r, "\widetilde{\varepsilon}"] \arrow[d, shift right, "\varphi"'] & M \arrow[r] & 0 \\ 0 \arrow[r] & K' \oplus P \arrow[r] & P \oplus Q \arrow[r, "\widetilde{\varepsilon'}"] \arrow[u, shift right, "\psi"'] & M \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

ε を $P \oplus Q$ に誘導した $(x, y) \mapsto \varepsilon(x)$ を $\widetilde{\varepsilon}$ と表す．ε' についても同様である．このとき；

$$\varphi : P \oplus Q \to P \oplus Q; (x, y) \mapsto (x - g(y), y + f(x - g(y)))$$

と定義する．同様に；

$$\psi : P \oplus Q \to P \oplus Q; (x, y) \mapsto (x + g(f(x) - y), y - f(x))$$

と定義すれば $\psi = \varphi^{-1}$ となる．また $\widetilde{\varepsilon'} \circ \varphi = \widetilde{\varepsilon}$ であり，誘導される $K \oplus Q \to K' \oplus P$ について蛇の補題から同型であることがわかる．

$n - 1$ まで正しいとしよう．次の完全列；

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow P_n \longrightarrow \ldots \longrightarrow P_1 \longrightarrow \ker\varepsilon \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow K' \longrightarrow Q_n \longrightarrow \ldots \longrightarrow Q_1 \longrightarrow \ker\varepsilon' \longrightarrow 0$$

について，$n = 0$ の場合から $\ker\varepsilon \oplus Q_0 \cong \ker\varepsilon' \oplus P_0$ であり，次の完全列；

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & K \arrow[r] & P_n \arrow[r] & \ldots \arrow[r] & P_1 \oplus Q_0 \arrow[r] & \ker\varepsilon \oplus Q_0 \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & K' \arrow[r] & Q_n \arrow[r] & \ldots \arrow[r] & Q_1 \oplus P_0 \arrow[r] & \ker\varepsilon' \oplus P_0 \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

に $n - 1$ の場合を適用して結論を得る．（証明終）

命題 *10.1.11*

有限生成な射影加群が有限自由分解をもてば安定的自由である．

証明.

P を有限生成な射影加群とする．

$$0 \longrightarrow F_n \longrightarrow \ldots \longrightarrow F_0 \longrightarrow P \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \ldots \longrightarrow P \xrightarrow{\mathrm{id}} P \longrightarrow 0$$

について Schanuel の補題を適用すればよい．（証明終）

これらの準備を踏まえていよいよ Auslander–Buchsbaum の定理を証明しよう．

定理 *10.1.12*（Auslander–Buchsbaum の定理）

正則局所環は UFD である．

証明.

正則局所環 $(A, \mathfrak{m})$ について，$\dim A = d$ の帰納法で示す．$d = 0, 1$ のときは体，DVR であり UFD である．$d > 1$ としよう．$f \in \mathfrak{m}$ を正則巴系の 1 部分とすると，命題 5.6.3 により A/fA は正則局所環，特に整域である．ゆえに f は素元であるので，定理 10.1.4 により A_f が UFD であることを示せばよい．

$R = A_f$ とおき，$P' \in \operatorname{Spec} R$ で $\operatorname{ht} P' = 1$ であるものをとる．まず P' が射影的であることを示す．R の極大イデアル $\mathfrak{m}'$ を任意にとる．このとき $Q = \mathfrak{m}' \cap A$ とおくと，$f \notin Q$ であり $R_{\mathfrak{m}'} = A_Q$ である．Serre の定理により $R_{\mathfrak{m}'}$ は正則であり，また $Q \subsetneq \mathfrak{m}$ から $\dim A_Q < d$ であるから，帰納法の仮定より $R_{\mathfrak{m}'}$ は UFD である．すると $P' \subset \mathfrak{m}'$ なら $P'R_{\mathfrak{m}'}$ は単項であり，$P' \not\subset \mathfrak{m}'$ なら $P'R_{\mathfrak{m}'} = R_{\mathfrak{m}'}$ である．よって常に $P'R_{\mathfrak{m}'} \cong R_{\mathfrak{m}'}$ であるから，$P'R_{\mathfrak{m}'}$ は射影的 $R_{\mathfrak{m}'}$ 加群である．よって命題 1.7.9 から P' は射影的 R 加群である．

次に $P = P' \cap A$ とおく．A は正則局所環なので P は有限自由分解を持ち，よって P' も有限自由分解を持つ．P' は射影加群だったから先の命題より安定的自由である．よって補題 10.1.7 により P' は単項イデアルとなり，A_f は UFD であることがわかった．（証明終）

§ 2　Serre の条件

定義 *10.2.1*（Serre の条件）

A を Noether 環とする．

(i) 任意の $\operatorname{ht} P \leq n$ となる $P \in \operatorname{Spec} A$ について A_P が正則局所環であるとき，A で (R_n) が成り立つという．

(ii) 任意の $P \in \operatorname{Spec} A$ について $\min\{n, \operatorname{ht} P\} \leq \operatorname{depth} A_P$ となるとき，A で (S_n) が成り立つという．

(R_n) についてはわかりやすい条件であるから，(S_n) について少し見てみよう．明らかに A で (S_{n+1}) が成り立つならば (S_n) が成り立つ．また，次を確認することも容易いだろう．

命題 *10.2.2*

Noether 環 A が CM 環であることと，任意の n について (S_n) が成り立つことは同値である．

また，次の言い換えが成り立つ．

補題 *10.2.3*

Noether 環 A について (S_1) が成り立つことと，任意の $P \in \operatorname{Ass} A$ が極小であることは同値である．

証明.

$(\Longrightarrow)$

任意の $P \in \operatorname{Ass} A$ をとる．このとき補題 2.3.5 より $PA_P \in \operatorname{Ass} A_P$ である．すると補題 5.7.6 により $\operatorname{depth} A_P = 0$ である．よって $\min\{1, \operatorname{ht} P\} \leq 0$ だから $\operatorname{ht} P = 0$ となる．

($\Longleftarrow$)

(S_1) が成り立たないとする．このときある $P \in \operatorname{Spec} A$ が存在して，$1 \leq \operatorname{ht}(P)$ かつ $\operatorname{depth} A_P = 0$ である．すると補題 5.7.6 によって $PA_P \in \operatorname{Ass} A_P$ で，再び補題 2.3.5 より $P \in \operatorname{Ass} A$ である．

（証明終）

まず，これを用いた被約性の判定法を紹介しよう．

定理 *10.2.4*（Serre の $(R_0)+(S_1)$ 判定法）

Noether 環 A について $(R_0), (S_1)$ が成り立つことと A が被約であることは同値である．

証明.

($\Longrightarrow$)

$\operatorname{nil} A = \bigcap_{\operatorname{ht} P=0} P = 0$ であることを示す．$\operatorname{Ass} A = \{P_1, \ldots, P_r\}$ とおき，0 を準素分解して $0 = Q_1 \cap \cdots \cap Q_r$ とする．ここで Q_i は P_i 準素イデアルとする．(S_1) より $\operatorname{Ass} A = \{P \in \operatorname{Spec} A \mid \operatorname{ht} P = 0\}$ であることに注意すると，局所化 $f_i : A \to A_{P_i}$ について定理 2.4.14 より $Q_i = f_i^{-1}(0)$ である．ここで (R_0) から A_{P_i} は 0 次元の正則局所環，すなわち体である．よって $Q_i = P_i$ となる．ゆえに $\bigcap_{\operatorname{ht} P=0} P = Q_1 \cap \cdots \cap Q_r = 0$ であるので，A は被約．

($\Longleftarrow$)

$0 = \bigcap_{\operatorname{ht} P=0} P$ が 0 の準素分解となり，$\operatorname{Ass} A = \{P \in \operatorname{Spec} A \mid \operatorname{ht} P = 0\}$ となるので (S_1) が成り立つ．また，$P' \in \operatorname{Ass} A$ が $P \neq P'$ ならば $P'A_P = A_P$ であるから；

$$0 = \bigcap_{\operatorname{ht} P'=0} P'A_P = PA_P$$

となる．よって A_P は体となり，(R_0) が成り立つ．

（証明終）

次に (S_2) についてみてみよう．以下**仮定に整域を課す**ことに注意せよ．

補題 *10.2.5*

A を Noether 整域とする．(S_2) が成り立つことと，任意の $a \in A$ で 0 でも単元でもないものについて，任意の $P \in \operatorname{Ass} A/aA$ は高さ 1 であることは同値である．

証明.

($\Longrightarrow$)

任意の $P \in \operatorname{Ass} A/aA$ をとる．まず $\operatorname{depth} A_P = 1$ を示そう．$a/1 \in PA_P$ は A_P 正則である．また $P = \operatorname{Ann}(x + aA)$ とおくと，任意の $b/1 \in PA_P$ について $bx/1 = 0 \in A_P/aA_P$ であるので A_P/aA_P 正則元は存在しない．よって $\operatorname{depth} A_P = 1$ である．ゆえに (S_2) から $\min\{2, \operatorname{ht} P\} \leq 1$ であるから $\operatorname{ht} P \leq 1$ である．一方 Krull の単項イデアル定理から $1 \leq \operatorname{ht} P$ なので，$\operatorname{ht} P = 1$ である．

($\Longleftarrow$)

$\operatorname{ht} P = 0, 1$ のときは明らかに $\operatorname{ht} P \leq \operatorname{depth} A_P$ が成り立つ．$2 \leq \operatorname{ht} P$ のときを考えればよい．$0 \neq a_1 \in P$ を 1 つ固定する．任意の $a_2 \in P$ が A/aA の非正則元であるなら，$P \subset \bigcup_{Q \in \operatorname{Ass} A/a_1A}$ であるので Prime avoidance により $P \subset Q$ となる $Q \in \operatorname{Ass} A/a_1A$ が存在する．ここで仮定より Q は高さ 1 なので $\operatorname{ht} P \leq 1$ となって矛盾する．よって A/a_1A 正則元 $a_2 \in P$ が存在し，$2 \leq \operatorname{depth} A_P$ である．

（証明終）

定理 *10.2.6*（Serre の $(R_1)+(S_2)$ 判定法）

Noether 整域 A が整閉であることと，A で $(R_1),(S_2)$ が成り立つことは同値である．特に次の条件；

(i) A は整閉である．
(ii) A について $(R_1),(S_2)$ が成り立つ．
(iii) A について (R_1) が成り立ち，$A=\bigcap_{\mathrm{ht}\,P=1}A_P$ である．

は同値である．

証明.

(i) $\Longrightarrow$ (ii)

(R_1) が成り立つことは明らかである（整閉整域は正規であって，また DVR とは 1 次元の正則局所環のことであるから）．また，0 でも単元でもない $a\in A$ について $P\in\mathrm{Ass}_A(A/aA)$ を考える．$P=\mathrm{Ann}(b+aA)$ となる $b\notin aA$ をとろう．定義より $bP\subset aA$ である．P で局所化して考えよう．$bPA_P\subset aA_P$ であるから，$b/aPAP\subset A_P$ である．ここで $b/aPA_P\subset PA_P$ なら，Cayley–Hamilton の定理より b/a は A_P 上整である．よって $b/a\in A_P$ となるが，これはある $s\notin P$ が $bs\in Aa$ となることを導き矛盾．ゆえに $b/aPA_P=A_P$ である．よって $bPA_P=aA_P$ となり，ある $x\in P$ と $s\notin P$ によって $bx/s=a$ である．このとき任意の $c/t\in PA_P$ について，ある $r/u\in A_P$ が存在して $bc/t=ar/u=bxr/su$ となる．A は整域だから $c/t=xr/su$ が成立する．よって $PA_P=xA_P$ となり，極大イデアルが単項だから A_P は 1 次元である．よって $\mathrm{ht}\,P=1$ となり，(S_2) が成り立つことがわかった．

(ii) $\Longrightarrow$ (iii)

$A\subset\bigcap_{\mathrm{ht}\,P=1}A_P$ は明らかであるから，$x/s\in\mathrm{Frac}\,A$ について $x/s\in\bigcap_{\mathrm{ht}\,P=1}A_P$ かつ $x/s\notin A$ であると仮定する．$x\notin sA$ かつ s は A の非単元であることに注意する．すると A/sA を A 加群とみたとき $\mathrm{Ann}(x+sA)$ は A の真のイデアルであるから，$s\in\mathrm{Ann}(x+sA)\subset P$ となる $P\in\mathrm{Ass}(A/sA)$ が存在する．すると，先の補題より (S_2) から $\mathrm{ht}\,P=1$ が従う．よって $x/s\in A_P$ なのである $a\in A$ と $t\notin P$ が存在して $x/s=a/t$ となるが，定義よりある $h\notin P$ が存在して $h(xt-as)=0$ となる．A は整域なので $xt=as\in sA$ となり，$t\in\mathrm{Ann}(x+sA)\subset P$ となって矛盾する．よって $x/s\in A$ である．

(iii) $\Longrightarrow$ (i)

$a/b\in\mathrm{Frac}\,A$ について A 上整であると仮定する．よって A の元たちを適当にとれば；

$$(a/b)^n+c_1(a/b)^{n-1}+\cdots+c_n=0\quad(c_i\in A)$$

となる n が存在する．このとき，仮定から c_i たちは整閉整域 A_P の元であるから，a/b は A_P 上整となり $a/b\in A_P$ である．これが任意の $\mathrm{ht}\,P=1$ となる P で言えるから $a/b\in\bigcap_{\mathrm{ht}\,P=1}A_P=A$ である．

（証明終）

§3　Krull 整域

この節では，Noether 整閉整域を少し一般化した Krull 整域と因子類群について論じよう．高さ 1 の素イデアルからなる集合を $\mathrm{Ht1}(A)=\{P\in\mathrm{Spec}\,A\mid\mathrm{ht}\,P=1\}$ とおく．

定義 *10.3.1*（Krull 整域）

整域 A が次の条件；

(KD1) 任意の $P \in \mathrm{Ht1}(A)$ について A_P は DVR である（(R_1) が成り立つ）.
(KD2) $A = \bigcap_{P \in \mathrm{Ht1}(A)} A_P$ である.
(KD3) 任意の $a \neq 0 \in A$ について，$\#\{P \in \mathrm{Ht1}(A) \mid a \in P\} < \infty$ である.

をすべて満たすとき，A を **Krull 整域 (Krull domain)** という.

Serre の条件（定理 10.2.6）により，Noether 環について整閉整域であることと Krull 整域であることは同値である.

以下，A を商体 K の Krull 整域とするとき各 $P \in \mathrm{Ht1}(A)$ について A_P の付値を $v_p : K^\times \to \mathbb{Z}$ とおく.

命題 *10.3.2*

A を Krull 整域とすると，任意の $\alpha \in K$ に対して；

$$\#\{P \in \operatorname{Spec} A \mid v_P(\alpha) \neq 0\} < \infty$$

である.

証明.

$a, b \in A, b \neq 0$ を用いて $\alpha = a/b$ とおく．まず $a = 0$ のときは明らかだから，$a, b \neq 0$ としてよい．$v_P(a/b) < 0$ なら，付値の定義から $a/b \notin A_P$ より $b \in P$ となる．また $v_P(a/b) > 0$ なら $v_P(b/a) < 0$ なので $a \in P$ である．よって (KD3) から従う.　（証明終）

系 *10.3.3*

A を Krull 整域とすると，商体が $\operatorname{Frac} A$ であるような DVR の族 $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ が存在して，次の条件；

(i) $A = \bigcap_{\lambda \in \Lambda}$ である.
(ii) 任意の $\alpha \in K^\times$ に対して，$v_\lambda(\alpha) \neq 0$ となるような λ は高々有限個である.

を満たす.

じつはこの命題は逆も成り立つことを証明していこう.

定義 *10.3.4*

整域 A について，商体が $\operatorname{Frac} A$ であるような DVR の族 $\mathscr{F} = \{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ が存在して，次の条件；

(i) $A = \bigcap_{\lambda \in \Lambda}$ である.
(ii) 任意の $\alpha \in K^\times$ に対して，$v_\lambda(\alpha) \neq 0$ となるような λ は高々有限個である.

が成り立っているとき，$\mathscr{F}$ は A **を定義する (defining family of** A**)** という.

この定義のもと，Krull 整域とは $\{A_P\}_{P \in \operatorname{Spec} A}$ によって定義された整域のことである.

命題 *10.3.5*

A は DVR の族 $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ により定義されているとする．A の積閉集合 S について，$\Lambda' = \{\lambda \in \Lambda \mid A_S \subset A_\lambda\}$ とおく．このとき A_S は $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda'}$ により定義されている．

証明.

条件のうち (ii) は自明であるので，$A_S = \bigcap_{\lambda\in\Lambda'} A_\lambda$ を示せばよい．$\subset$ は明らかであるので，逆を示そう．任意の $\alpha \neq\in \bigcap_{\lambda\in\Lambda'} A_\lambda$ をとる．各 A_λ の極大イデアルを $\mathfrak{m}_\lambda$ とおくと，$\lambda \in \Lambda'$ と $S \cap \mathfrak{m}_\lambda = \emptyset$ が同値であることに注意する．いま $v_\lambda(\alpha) < 0$ であるような $\lambda \in \Lambda$ は有限個なので，それらを $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ とおく．$\lambda_i \notin \Lambda'$ であるから，$t_{\lambda_i} \in S \cap \mathfrak{m}_{\lambda_i}$ が存在する．いま $v_{\lambda_i}(t_{\lambda_i}) > 0$ だから，t_{λ_i} を適当なベキでとりかえて $v_{\lambda_i}(t_{\lambda_i}\alpha) > 0$ としてよい．ここで $t = t_{\lambda_1} \cdots t_{\lambda_n}$ とおけば，任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して $v_\lambda(t\alpha) \geq 0$ なので $t\alpha \in A$ である．ここで $t \in S$ だから $\alpha \in A_S$ となり，$A_S = \bigcap_{\lambda\in\Lambda'} A_\lambda$ である．（証明終）

補題 *10.3.6*

v を体 K の付値とする．任意の $\alpha, \beta \in K$ に対して，$v(\alpha) \neq v(\beta)$ ならば $v(\alpha + \beta) = \min\{v(\alpha), v(\beta)\}$ である．

証明.

$v(\alpha) > v(\beta)$ としてよい．$(A, \mathfrak{m})$ を v の付値環とすると，このとき $\alpha\beta^{-1} \in \mathfrak{m}$ である．よって $\alpha\beta^{-1} + 1 \in A^\times$ であり，$v(\alpha + \beta) - v(\beta) = v(\alpha\beta^{-1} + 1) = 0$ である．（証明終）

命題 *10.3.7*

K を体とし，A_i を K の付値環，$A = \bigcap A_i$ とおく．任意の $\alpha \in K$ に対して，ある $s \geq 2$ が存在して；

$$(1 + \alpha + \cdots + \alpha^{s-1})^{-1}, \alpha(1 + \alpha + \cdots + \alpha^{s-1})^{-1} \in A$$

である．

証明.

各 A_i について考え，しばらく添え字の i を忘れる．まず；

$$(1 - \alpha)(1 + \alpha + \cdots + \alpha^{s-1}) = 1 - \alpha^s$$

に注意する．

Step 1. $\alpha \notin A$ のとき．

任意の $s \geq 2$ に対して $v(-\alpha^s) = sv(\alpha) < 0$ であるので；

$$v(1 + \alpha + \cdots + \alpha^{s-1}) = v(1 - \alpha^s) - v(1 - \alpha) = sv(\alpha) - v(\alpha) = (s - 1)v(\alpha) < 0$$

であり $(1 + \alpha + \cdots + \alpha^{s-1})^{-1} \in A$ である．また $v(\alpha(1 + \alpha + \cdots + \alpha^{s-1})^{-1}) = sv(\alpha) < 0$ であり $\alpha(1 + \alpha + \cdots + \alpha^{s-1})^{-1} \in A$ である．

Step 2. $\alpha \in A$ でありかつ，任意の $s \geq 2$ に対して $v(1 - \alpha^s) = 0$ であるとき．

$0 \leq v(1 - \alpha)$ に注意すれば，任意の s に対して；

$$v(1 + \alpha + \cdots + \alpha^{s-1}) = -v(1 - \alpha) \leq 0$$

となり $(1+\alpha+\cdots+\alpha^{s-1})^{-1} \in A$ である．

Step 3. $\alpha \in A$ でありかつ，$v(1-\alpha) > 0$ であるとき．

$1+\alpha+\cdots+\alpha^{s-1} \in A$ より；

$$0 \leq v(1+\alpha+\cdots+\alpha^{s-1}) = v(1-\alpha^s) - v(1-\alpha)$$

であるので $v(1-\alpha) \leq v(1-\alpha^s)$ である．

（証明終）

第11章　Quillen–Suslinの定理

—Quillen–Suslin's theorem

この章の内容は，主に可換大介氏とのセミナーに基づく．この節では，Quillen–Suslin の定理（定理 11.3.3 として知られる結果である，体上の多項式環 $k[X_1, \dots, X_n]$ において定理 7.3.11 の類似が成り立つ，すなわち有限生成射影的 $k[X_1, \dots, X_n]$ 加群は自由であるということを証明しよう．

§1　FFR と SFR

Auslander–Buchsbaum の定理の証明に用いた安定的自由加群と，有限自由分解を思い出そう．環 A 上の加群 M であって，有限自由加群 F, F' が存在して $M \oplus F \cong F'$ であるものを安定的自由というのであった．一般に有限自由ならば安定的自由で，安定的自由ならば（有限生成）射影的である．Quillen–Suslin の定理の定理を証明する方針として，この逆をたどる．すなわち $k[X_1, \dots, X_n]$ 上で有限生成射影的ならば安定的自由，安定的自由ならば自由であることを示す．この節では前者を証明する．

定義 *11.1.1*（安定的自由分解）

A を環，M を A 加群とする．長さ有限の完全列；

$$0 \longrightarrow S_n \longrightarrow \dots \longrightarrow S_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

であって，各 S_i が安定的自由であるものを**安定的自由分解 (stably free resolution)** という．

有限自由分解を FFR，安定的自由分解を SFR と略すことにする．

補題 *11.1.2*

A を環，M を A 加群とする．M が FFR を持つことと SFR を持つことは同値である．

証明.

FFR が SFR であることは明らか．

$$0 \longrightarrow S_n \longrightarrow \dots \longrightarrow S_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

が M の SFR であるとする．S_0 が安定的自由なので，有限自由加群 F_0, F_0' が存在して $S_0 \oplus F_0 \cong F_0'$ である．いま；

$$\cdots \longrightarrow S_2 \longrightarrow S_1 \oplus F_0 \longrightarrow F_0' \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

は完全で，これを続けることで FFR を得る．（証明終）

命題 *11.1.3*

A 加群の完全列；

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

に対して，２つが FFR を持つならばもう１つも FFR を持つ．

証明.

２つが FFR を持つので，M たちはすべて有限生成である．よって以下の図式；

$$
\begin{CD}
@. 0 @. 0 @. 0 @. \\
@. @AAA @AAA @AAA @. \\
0 @>>> M' @>>> M @>>> M'' @>>> 0 \\
@. @AAA @AAA @AAA @. \\
0 @>>> A^{r'} @>>> A^{r'+r''} @>>> A^{r''} @>>> 0 \\
@. @AAA @AAA @AAA @. \\
0 @>>> K'_0 @>>> K_0 @>>> K''_0 @>>> 0 \\
@. @AAA @AAA @AAA @. \\
@. 0 @. 0 @. 0 @.
\end{CD}
$$

が得られ，また核も２つは有限表示なのですべて有限生成である．よって繰り返すことで次の図式；

$$
\begin{CD}
@. 0 @. 0 @. 0 @. \\
@. @AAA @AAA @AAA @. \\
0 @>>> M' @>>> M @>>> M'' @>>> 0 \\
@. @AAA @AAA @AAA @. \\
0 @>>> F'_0 @>>> F_0 @>>> F''_0 @>>> 0 \\
@. @AAA @AAA @AAA @. \\
@. \vdots @. \vdots @. \vdots @. \\
@. @AAA @AAA @AAA @. \\
0 @>>> F'_n @>>> F_n @>>> F''_n @>>> 0
\end{CD}
$$

が得られ，M', M'' の片方は FFR を持つので $0 = F'_n = F'_{n+1} = \cdots$ または $0 = F''_n = F''_{n+1} = \cdots$ であるとしてよい．ここでは前者であると仮定する．すると任意の $i \leq n$ に対して $F_i \cong F''_i$ であるので，どちらかは FFR を持つことに注意して n がその長さよりも大きいと仮定してよい．ここでは仮に M が FFR を持つとしよう．M'' が FFR を持つ場合も全く同様である．このとき，完全列；

$$0 \longrightarrow \ker d_n \longrightarrow F_n \longrightarrow \ldots \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

と M の FFR に Schanuel の補題（補題 10.1.10）を用いて K は安定的自由であることがわかる．よってもう１つは SFR を持ち，上の補題から FFR も持つ．（証明終）

定理 *11.1.4*

A を Noether 環で，すべての有限生成 A 加群が FFR を持つとする．このとき，任意の有限生成 $A[X]$ 加群も（$A[X]$ 加群として）FFR を持つ．

証明.

M を有限生成 $A[X]$ 加群とする．このとき M の filtration；

$$M = M_r \supset \cdots \supset M_1 \supset M_0 = 0$$

で，$M_i/M_{i-1} \cong A[X]/P_i$ ($P_i \in \operatorname{Spec} A[X]$) であるものをとる（系 2.3.11）．命題 11.1.3 から任意の $P \in \operatorname{Spec} A[X]$ に対して $A[X]/P$ が FFR を持てば十分である．さて；

$$\left\{ P \cap A \,\middle|\, P \in \operatorname{Spec} A[X],\ A[X]/P \text{ は FFR を持たない} \right\} \neq \emptyset$$

と仮定する．この集合の極大元を与える P をとろう．$p = P \cap A$ とおく．$A_0 = A/p$ とすると $A_0[X] = A[X]/pA[X]$ であって，$P_0 = P/pA[X] \in \operatorname{Spec} A_0[X]$ とおくと，$A_0[X]/P_0 \cong A[X]/P$ なので次の短完全列；

$$0 \longrightarrow P_0 \longrightarrow A_0[X] \longrightarrow A[X]/P \longrightarrow 0$$

を考える．いま $A_0 = A/p$ の A 加群としての FFR をとり，$A[X]$ をテンソルするとこれは A 上平坦なので $A_0[X]$ の $A[X]$ 加群としての FFR がとれる．よって命題 11.1.3 から P_0 が FFR を持てばよい．$P_0 = (f_1, \ldots, f_r)$ とする．$f \in P_0$ を次数最小のものとすると，$K_0 = \operatorname{Frac} A_0$ において；

$$f_i = q_i f + r_i \ (q_i, r_i \in K_0[X], \deg r_i < \deg f)$$

と表すと，分母を払うことで；

$$d_0 f_i = q_i' f + r_i' \ (d_0 \in A_0, q_i', r_i' \in A_0[X])$$

とできる．このよき f の次数最小性から $r_i' = 0$ であるので $d_0 P_0 \subset (f)$ である．すると；

$$0 \longrightarrow (f) \longrightarrow P_0 \longrightarrow P_0/(f) \longrightarrow 0$$

において $(f) \cong R_0[X]$ なのでこれは FFR を持つから $P_0/(f)$ が FFR を持てばよい．$d \in A$ を $d + p = d_0$ となるものとし，$P_0/(f)$ を $A[X]$ 加群とみて系 2.3.11 の filtration をとると，各 P_i は $P_0/(f)$ の素因子なので p と d を含み，特に p を真に含む．よって p の極大性から $A[X]/P_i$ は FFR を持ち，$P_0/(f)$ もそうである．ゆえに P_0 は FFR を持ち，$A[X]/P$ も FFR を持つことになるがこれは矛盾である．（証明終）

系 *11.1.5*（Serre）

A を正則局所環とすると，任意の有限生成 $A[X_1, \ldots, X_n]$ 加群は FFR を持つ．

この系と次の補題により，多項式環上で有限生成射影的ならば安定的自由であることがわかる．

補題 *11.1.6*

A を環とする．FFR をもつ射影加群は安定的自由である．

証明.

２つの完全列；

$$0 \longrightarrow F_n \longrightarrow \ldots \longrightarrow F_0 \longrightarrow P \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow P \longrightarrow P \longrightarrow 0$$

に Schanuel の補題を用いて $P \oplus F_1 \oplus F_3 \oplus \cdots \cong F_2 \oplus F_4 \oplus \cdots$ であるから P は安定的自由である．（証明終）

系 *11.1.7*（Serre）

A を正則局所環とすると，有限生成射影的 $A[X_1, \ldots, X_n]$ 加群は安定的自由である．

§2　ユニモジュラー性と Horrocks の定理

次に，安定的自由ならば自由，という条件の言い換えを考えよう．まずは次の簡単な言い換えを見る．

補題 *11.2.1*

A を環とする．任意の安定的自由加群が自由であることと，任意の A 加群 M に対して $A \oplus M \cong A^n$ ならば $M \cong A^{n-1}$ であることは同値である．

証明.

$(\Longrightarrow)$ は明らか．M を安定的自由，すなわち $M \oplus A^m \cong A^n$ であると仮定する．このとき $(M \oplus A^{m-1}) \oplus A \cong A^n$ なので $M \oplus A^{m-1} \cong A^{n-1}$ であって，これを繰り返せば M が自由であることがわかる．（証明終）

次に $A \oplus M \cong A^n$ という条件を考察する．同型 $\varphi : A \oplus M \to A^n$ が存在したとき $f = \varphi(1,0) = (f_1, \ldots, f_n) \in A^n$ を考えることができ，これを用いて行列の計算に問題を落とし込むことができる．

定義 *11.2.2*

A を環とする．$f = (f_1, \ldots, f_n) \in A^n$ に対して，$\iota : A \to A^n; 1 \mapsto f$ を考える．このとき次の条件は同値である．

(i) ある A 加群 M が存在して，ι は同型 $A \oplus M \cong A^n$ の制限である．
(ii) ある $r : A^n \to A$ が存在して $r \circ \iota = \mathrm{id}_A$ である．
(iii) A のイデアルとして $(f_1, \ldots, f_n) = A$ である．

この条件を満たすとき $f \in A^n$ は**ユニモジュラー (unimodular)** であるという．

同値性は簡単に確かめられる．r は同型と射影の合成とすればよく，また r が与えられていれば $M = \ker r$ とすればよい．次に補題 11.2.1 の後半を言い換える．

命題 *11.2.3*

A を環とする．ユニモジュラーな $f \in A^n$ に対して，$A \oplus M \cong A^n$ なる A 加群 M をとる．このとき $M \cong A^{n-1}$ であることと，f を第 1 列にもつ正則行列；

$$\begin{pmatrix} f_1 & \\ \vdots & * \\ f_n & \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_n(A)$$

が存在することは同値．このとき f は**ユニモジュラー拡張性 (unimodular extension property)** を持つという．

証明.

$(\Longrightarrow)$

$\varphi : A \oplus M \to A^n$ が同型であるとする．このとき；

$$A \oplus A^{n-1} \xrightarrow{(\mathrm{id}, \varphi)} A \oplus M \xrightarrow{\varphi} A^n$$

を行列表示するとその第 1 列は f であって，これは同型なので正則である．

($\Longleftarrow$)

仮定により f を第一列とする正則行列が存在し，それによって同型 $\psi : A^n \to A^n$ が定まる．このとき $\psi^{-1} \circ \varphi$ による A の像は Ae_1 であって，逆もまたそうだから，それぞれを A で割ることで商の間に同型が存在する．

（証明終）

これらをまとめることで次の言い換えを得る．

命題 *11.2.4*

環 A に対して，次は同値である．

(i) 任意の安定的自由加群は自由である．
(ii) 任意の n に対して $f \in A^n$ がユニモジュラーならば拡張性を持つ．

この言い換えにより，一般の環で次のことがわかる．

命題 *11.2.5*

A を環，M を A 加群で $A \oplus M \cong A^2$ であると仮定する．このとき $M \cong A$ である．

証明．

$f = (f_1, f_2) \in A^2$ がユニモジュラーであるとする．ゆえに $a_1 f_1 + a_2 f_2 = 1$ となるような $a_1, a_2 \in A$ が存在し；

$$\det \begin{pmatrix} f_1 & -a_2 \\ f_2 & a_1 \end{pmatrix} = 1$$

であるので f は拡張性を持つ．

（証明終）

次にユニモジュラー拡張性を調べていく．ここで A^n において次のような関係；

$$f \sim f' \iff \text{ある } P \in \mathrm{GL}_n(A) \text{ が存在して，} Pf = f'.$$

を考えると，これは同値関係である．特に f がユニモジュラーであるとき，f が拡張性を持つことと $f \sim e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$ であることが同値である．

線型代数からの用語を用意しておく．

定義 *11.2.6*（基本行列）

A を環とする．

(i) $i \neq j$ と $a \in A$ に対して，$E_{ij}(a) \in \mathrm{M}_n(A)$ を E_n の i, j 成分のみを a に変えた行列とする．
(ii) 各 i と $a \in A^\times$ に対して，$D_i(a) \in \mathrm{M}_n(A)$ を E_n の i, i 成分のみを a に変えた行列とする．
(iii) 各 $i \neq j$ に対して，P_{ij} を E_n の第 i 行と第 j 列を入れ替えた行列とする．

以上の３種の行列をあわせて**基本行列 (elementary matrix)** という．

基本行列はすべて正則であることに注意しよう．また基本行列をかけることは基本行変形に対応している．$E_{ij}(a)$ は第 i 行を a 倍して第 j 行に加える操作，$D_i(a)$ は第 i 行を a 倍する操作，P_{ij} は第 i 行と第 j 列を入れ替える操作である．

注意 11.2.7.

Noether の正規化定理の証明から次の事実がわかることに注意しておく．k を体とする．$f(X_1,\dots,X_n) \in k[X_1,\dots,X_n]$ を m_i をうまく選ぶことで $Y_i = X_i - X_n^{m_i}, Y_n = X_n$ と変数変換すると $f = g(Y_1,\dots,Y_n) \in k[Y_1,\dots,Y_n]$ とみなす時に Y_n についての最高次の係数を $k^\times$ の元であるようにできた．これによりユニモジュラーな $f \in k[X_1,\dots,X_n]^n$ に対して $f_i \neq 0$ であるような i を考え，上のように取り替えると $f \in k[Y_1,\dots,Y_n]^n$ をユニモジュラーかつ f_i がモニックであるようにできる．よって少なくとも 1 つの成分がモニックである場合を考えればよい，ということがわかった．

定理 *11.2.8*（Horrocks の定理）

$(A,\mathfrak{m})$ を局所環とする．$f \in A[X]^n$ をユニモジュラーで，ある i に対して $f_i(X)$ がモニックであるとする．すると $f(X) \sim f(0) \sim e_1$ である．

証明.

$n = 1$ のときは明らか．$n = 2$ のときは命題 11.2.5 である．$n \geq 3$ としよう．基本変形によって f_1 をモニックとしてよく，$d = \deg f_1$ とおく．d についての帰納法で示そう．$d = 0$ のときは明らか．$d > 0$ とする．基本変形によって，任意の $i \geq 2$ に対して $\deg f_i < d$ で，最高次の係数が非単元としてよい．さらに f_2 について少なくとも 1 つの係数が単元としてよい．さて；

$$f_2 = a_1X^{d-1} + \cdots + a_sX^{d-s} + \cdots + a_d$$

と表示したとき $a_1,\dots,a_{s-1} \in \mathfrak{m}, a_s \in A^\times$ であったとしよう．このとき $Xf_2 - a_1f_1$ は次数が高々 $\deg f_2$ で，また $d - s + 1$ で初めて係数に単元が現れる．これを繰り返すことで $d - 1$ で最高次が単元な多項式が得られ，これを f_3 に足すことで f_3 を $d - 1$ 次でモニックな多項式としてよいことがわかる．よって帰納法から証明が終わる．（証明終）

§ 3　Quillen–Suslin の定理の証明

補題 *11.3.1*

A を環，$S \subset A$ を積閉であるとする．$f \in A[X]^n$ に対して $S^{-1}A[X]$ 上で $f(X) \sim f(0)$ ならば，ある $s \in S$ が存在して $A[X,Y]$ 上で $f(X+sY) \sim f(X)$ である．

証明.

$M(X) \in \mathrm{GL}_n(S^{-1}A[X])$ をとって $f(X) = M(X)f(0)$ とする．このとき $f(0) = M(X)^{-1}f(X)$ は定数なので，X を $X+Y$ に変えても成り立つ．ここで $G(X,Y) = M(X)M(X+Y)^{-1}$ とおく．いま $G(X,0) = M(X)M(X)^{-1} = E_n$ なので，ある $H(X,Y) \in \mathrm{M}_n(S^{-1}A[X])$ によって $G(X,Y) = E_n + YH(X,Y)$ と表すことができる．ここで $H(X,Y)$ の分母を払うことで，ある $s \in S$ が存在して $sH(X,Y) \in \mathrm{M}_n(A[X,Y])$ とできる．よって $G(X,sY) = E_n + sYH(X,sY) \in \mathrm{M}_n(A[X,Y])$ である．ここで $\det M(X) \in S^{-1}A^\times$ なので $\det M(X,Y) = \det M(X)$ であり，$\det G(X,Y) = 1$ だから $G(X,sY) \in \mathrm{GL}_n(A[X,Y])$ である．このとき $G(X,sY)f(X+sY) = M(X)M(X+sY)^{-1}f(X+sY) = M(X)f(0) = f(X)$ となり示された．（証明終）

Horrocks の定理と上の補題により，次の結果を示すことができる．

命題 *11.3.2*

A を環とする．$f \in A[X]^n$ がユニモジュラーで，ある i に対して $f_i(X)$ がモニックであるとする．すると $A[X]$ 上で $f(X) \sim f(0)$ である．

証明.

仮定のもとで，$A[X,Y]$ 上で $f(X+Y) \sim f(X)$ であることを示す．ここで，次の集合；

$$I = \left\{a \in A \;\middle|\; A[X,Y] \text{ 上で } f(X+aY) \sim f(X) \text{ が成り立つ.}\right\} \subset A$$

を考えるとこれはイデアルをなす．実際，任意の $a \in I$ に対して $P_a(X,Y) \in \mathrm{GL}_n(A[X,Y])$ で $f(X+aY) = P_a f(X)$ となるものをとると，任意の $r \in A$ に対して Y を aY で取り替えることで $f(X+raY) = P_a(X,rY)f(X)$ となる．ここで $\det P_a(X,rY)$ は $A^\times$ の元なので，$A[X,Y]$ 上の行列と見ても正則だから $ra \in I$ である．また $a,b \in I$ に対して；

$$f(x+aY+bY) = P_b(X+aY,Y)f(X+aY) = P_b(X+aY)P_a(X,Y)f(X)$$

となり，$a+b \in I$ である．

任意の素イデアル $P \in \operatorname{Spec} A$ をとる．$f(X) \in A_P[X]$ とみなすと Horrocks の定理より $f(X) \sim f(0)$ であって，補題よりある $a \in A \setminus P$ が存在して $a \in I$ となるから，これは $I \subsetneq P$ を意味する．よって $I = A$ となる．（証明終）

以上の準備により Quillen–Suslin の定理を証明できる．

定理 *11.3.3*（Quillen–Suslin の定理）

k を体とする．任意の有限生成な射影的 $k[X_1,\ldots,X_r]$ 加群は自由である．

証明.

系 11.1.7 と命題 11.2.4 により任意のユニモジュラーな $f \in k[X_1,\ldots,X_r]^n$ が拡張性を持てばよい．変数の個数に関する帰納法で示す．

$n=1$ のときは Horrocks の定理から従う．

$n-1$ まで正しいとする．注意 11.2.7 で述べたとおり $f \in k[Y_1,\ldots,Y_{n-1}][Y_n]^m$ をユニモジュラーでありかつ，ある f_i がモニックであるとしてよい．よって命題 11.3.2 から $K[Y_1,\ldots,Y_r]$ 上で $f \sim f|_{Y_n=0}$ である．よって帰納法の仮定から f は拡張性を持つ．（証明終）

第12章　非可換環論の手法

—*Methods of Non Commutative Algebras*

この章では，非可換環論の手法を可換環論に取り入れることで得られる結果について紹介しよう．本章を通して，特に断らない限り A は可換環を，R は可換とは限らない環を表す．

§1　非可換環論の用語

この節では，本章で用いる非可換環の用語について述べておくことにする．これらの事項の証明については Hazewinkel, Gubareni and Kirichenko (2005) を参照してほしい（いつか証明をつけます）．

定義 *12.1.1*（局所環）

非可換環 R について，以下の同値な条件；

(i) R は唯 1 つの右極大イデアルを持つ．
(ii) R は唯 1 つの左極大イデアルを持つ．
(iii) $0 \neq 1$ であり，任意の非単元 $x, y \in R$ について，$x + y$ も非単元である．
(iv) $0 \neq 1$ であり，任意の $x \in R$ について，x または $1 - x$ のどちらかは単元である．

をみたすとき，R を局所環という．

このとき右極大イデアルと左極大イデアルは一致することに注意する．また可換環の場合と同様に，非単元全体が真の両側イデアルをなすことがわかる．

定義 *12.1.2*（Jacobson 根基）

環 R に対して，すべての右極大イデアルの共通部分を $\mathrm{rad}\,R$ で表し，これを R の Jacobson 根基という．

実は $\mathrm{rad}\,R = \{x \in R \mid 1 + RxR \subset R^{\times}\}$ であって，これはすべての左極大イデアルの共通部分とも一致する．これにより $\mathrm{rad}\,R$ は両側イデアルとなり，$R/\mathrm{rad}\,R$ が意味を持つ．また，定義から直ちに分かることだが任意の $x \neq 0 \in \mathrm{rad}\,A$ は**準正則 (quiasiregular)**，すなわち $1 - x$ は R の単元である．

次に冪等元についていくらか述べておこう．環 R の元 e であって $e^2 = e$ であるものを冪等元というのであった．$0, 1$ のことを自明な冪等元という．

定義 *12.1.3*

2 つの冪等元 e, f に対して $ef = fe = 0$ であるとき e, f は**直交 (orthogonal)** するという．また I を R の両側イデアルとする．剰余環 R/I における冪等元 $e + I$ に対して，R の冪等元 f が存在して $f + I = e + I$ であるとき，$e + I$ は I **を法として持ち上がる (lift modulo *I*)** という．

R を環とすると，任意の冪等元 $e \in R$ は零因子である（$e(1 - e) = 0$）．よって整域は非自明な冪等元を持たない．また Jacobson 根基 $\mathrm{rad}\,R$ に含まれる冪等元は 0 のみである．実際 $e \neq 0 \in \mathrm{rad}\,R$ について $1 - e \in R^{\times}$ だから，上の注意から e が冪等なら $e = 0$ でなければならない．

また冪等元 $e \in R$ であって $\mathrm{End}_R(eR) = eRe$ が局所環であるものを e を**局所冪等元 (local idempotent)** と

いう．

定義 *12.1.4*（半単純環）

環 R であって，R 加群として単純 R 加群の直和であるものを**半単純 (semi simple)** であるという．

可換環 A においては単純加群は常に $A/\mathfrak{m}$ ($\mathfrak{m} \in \operatorname{Spm} A$) に限ることに注意しておこう．

定義 *12.1.5*（半局所環）

環 R であって，$R/\operatorname{rad} R$ が半単純環であるものを**半局所 (semi local)** であるという．

さて，可換環 A が半局所であることを，その極大イデアルが有限個であることと定義していたこと（定義 0.2.7）を思い出すと，実際上の定義と可換環では同値である．

命題 *12.1.6*

可換環 A において，A の極大イデアルが有限個であることと $A/\operatorname{rad} A$ が半単純であることは同値である．

証明.

($\Longrightarrow$)

$\operatorname{Spm} A = \{\mathfrak{m}_1, \dots, \mathfrak{m}_r\}$ とおくと，これらは互いに素なので中国剰余定理（定理 1.9.4）から $A/\operatorname{rad} A \cong A/\mathfrak{m}_1 \times \cdots \times A/\mathfrak{m}_r$ である．

($\Longleftarrow$)

$A/\operatorname{rad} A \cong A/\mathfrak{m}_1 \oplus \cdots \oplus A/\mathfrak{m}_r$ であるとすると，$\operatorname{Spec} A/\operatorname{rad} A = \{\mathfrak{m}_1, \dots, \mathfrak{m}_r\}$ であるから A の極大イデアルは高々有限個である．

（証明終）

§2　射影被覆と Krull–Schmidt 圏

射影被覆の存在と関連して，非可換環の表現論で現れる Krull–Schmidt 圏について紹介しよう．この節においても，特に断らない限り環は可環であるとしておく．命題 7.3.2 によって，一般の Abel 圏について射影被覆の定義を拡張することができる．

定義 *12.2.1*

$\mathscr{A}$ を Abel 圏とする．射 $f : A \to B$ について，任意の $\varphi : A \to A$ に対して $f \circ \varphi = f$ ならば φ は同型であるとき，f は**右極小 (right minimal)** であるという．$A \in \mathscr{A}$ について，ある射影的対象 $P \in \mathscr{A}$ と全射 $\pi : P \to A$ が存在して π が右極小であるとき，(P, π) を A の**射影被覆**であるという．

射影被覆を常に持つような Abel 圏を考えたい．そこで，Krull–Schmidt 圏という圏を考えてみよう（この圏は加法圏だが，右極小という条件は加法圏でも work することに注意する）．

定義 *12.2.2*（Krull–Schmidt 圏）

加法圏 $\mathscr{A}$ であって，任意の $A \in \mathscr{A}$ に対して，直和分解；

$$A = A_1 \oplus \cdots \oplus A_n$$

であって，各 A_i の自己準同型（非可換）環が局所環であるものが存在するとき，$\mathscr{A}$ を **Krull–Schmidt 圏**であるという．

この自己準同型環が局所環，という条件の意味付けをみてみよう．次の事実がある；

命題 *12.2.3*

環 A 上の加群 M について，自己準同型環 $\mathrm{End}(M)$ が（非可換）局所環ならば M は直既約である．

証明は非可換環論の範疇なので，ここでは省略する（いつか書くかも）．この事実により，Krull–Schmidt 圏では $\mathrm{End}(M)$ が局所環であることと直既約であることは同値である．

定義 *12.2.4*

$\mathscr{A}$ を加法圏とし，$A, B \in \mathscr{A}$ とする．このとき；

$$\mathrm{rad}_{\mathscr{A}}(A, B) = \left\{ f : A \to B \,\middle|\, \text{任意の } g : B \to A \text{ に対して}, \mathrm{id}_A - gf \text{ が同型.} \right\}$$

と定め，これを A, B の $\mathscr{A}$ における **Jacobson 根基**という．

この定義を以下のように書き換えることもできる；

$$\mathrm{rad}_{\mathscr{A}}(A, B) = \left\{ f : A \to B \,\middle|\, \text{任意の } g : B \to A \text{ に対して}, \mathrm{id}_B - fg \text{ が同型.} \right\}$$

これを示そう．いまからやることは非可換環における計算の一般化である；

命題 *12.2.5*

$\mathscr{A}$ をプレ加法圏とし，$A, B \in \mathscr{A}$ とする．任意の $f : A \to B$ に対して，以下の主張；

- (i)　任意の $g : B \to A$ に対して $\mathrm{id}_A - gf$ が同型である．
- (i)$_{\mathrm{L}}$　任意の $g : B \to A$ に対して $\mathrm{id}_A - gf$ が左可逆である．
- (i)$_{\mathrm{R}}$　任意の $g : B \to A$ に対して $\mathrm{id}_A - gf$ が右可逆である．
- (ii)　任意の $g : B \to A$ に対して $\mathrm{id}_B - fg$ が同型である．
- (ii)$_{\mathrm{L}}$　任意の $g : B \to A$ に対して $\mathrm{id}_B - fg$ が左可逆である．
- (ii)$_{\mathrm{R}}$　任意の $g : B \to A$ に対して $\mathrm{id}_B - gf$ が左可逆である．

は同値である．

証明.

明らかに (i) と (i)$_{\mathrm{L}}$ かつ (i)$_{\mathrm{R}}$ は同値であり，(ii) についても同様．まず (i)$_{\mathrm{L}}$ と (ii)$_{\mathrm{L}}$ は同値であることを示す．$\mathrm{id}_A - gf$ が左可逆であるとすると，$h : A \to A$ で $h(\mathrm{id}_A - gf) = \mathrm{id}_A$ であるものがある．このとき；

$$\begin{aligned}(\mathrm{id}_B + fhg)(\mathrm{id}_B - fg) &= \mathrm{id}_B - fg + fhg(\mathrm{id}_B - fg) \\ &= \mathrm{id}_B - fg + fh(g - gfg) = \mathrm{id}_B - fg + fh(\mathrm{id}_X - gf)g \\ &= \mathrm{id}_B - fg - fg = \mathrm{id}_B\end{aligned}$$

となり，$\mathrm{id}_B - fg$ も左可逆になる．逆も同様に確かめられ，同値であることがわかる．全く同様に $(\mathrm{i})_\mathrm{R}$ と $(\mathrm{ii})_\mathrm{R}$ は同値である．

よって $(\mathrm{i})_\mathrm{L}$ ならば (ii)，$(\mathrm{i})_\mathrm{R}$ ならば (i) を示せばよい．さて $(\mathrm{i})_\mathrm{L}$ を仮定すると，上の証明と同様に；

$$(\mathrm{id}_B + fhg)(\mathrm{id}_B - fg) = \mathrm{id}_B$$

であり，$\mathrm{id}_B + fhg$ は右逆をもつ．ここで $(\mathrm{ii})_\mathrm{L}$ も成り立っているから，g として $-hg : B \to A$ をとれば $\mathrm{id}_B + fhg$ は左逆も持つことになり，同型である．よって $\mathrm{id}_B - fg$ も同型で，(ii) が示された．

全く同様にして $(\mathrm{i})_\mathrm{R}$ ならば (i) が成り立ち，同値である．（証明終）

系 *12.2.6*

$\mathscr{A}$ を加法圏とし，$A, B \in \mathscr{A}$ とすると；

$$\begin{aligned}\mathrm{rad}_{\mathscr{A}}(A, B) &= \left\{ f : A \to B \,\middle|\, \text{任意の } g : B \to A \text{ に対して, } \mathrm{id}_A - gf \text{ が同型.} \right\} \\ &= \left\{ f : A \to B \,\middle|\, \text{任意の } g : B \to A \text{ に対して, } \mathrm{id}_B - fg \text{ が同型.} \right\}\end{aligned}$$

が成り立つ．

この命題の証明の $(\mathrm{i})_\mathrm{L}$ と $(\mathrm{ii})_\mathrm{L}$ の証明を取り出すことで，次の便利な性質が言えていることがわかる（証明の中で g を任意にとれることを使っているのは $(\mathrm{i})_\mathrm{L}$ ならば (ii) であること（$(\mathrm{i})_\mathrm{R}$ ならば (i) であること）のみであることに注意する）．

補題 *12.2.7*

$\mathscr{A}$ をプレ加法圏とし，$A, B \in \mathscr{A}$ とする．任意の $f : A \to B, g : B \to A$ に対して $\mathrm{id}_A - gf$ が左可逆であることと，$\mathrm{id}_B - fg$ が左可逆であることは同値である．この主張は左を右に変えても成り立つ．

命題 *12.2.8*

$\mathscr{A}$ を加法圏，$A, B \in \mathscr{A}$ とする．任意の $f : A \to B \in \mathrm{rad}_{\mathscr{A}}(A, B)$ と $g : B \to A$ に対して $fg \in \mathrm{rad}_{\mathscr{A}}(B, B)$ である．

証明．

任意の $h : B \to B$ に対して $\mathrm{id}_B - fgh$ が可逆であることを示せばよいが，これは $f \in \mathrm{rad}(A, B)$ であることから従う．（証明終）

Krull–Schmidt 圏の直既約対象については簡単な表示がある．

命題 *12.2.9*

$\mathscr{A}$ を Krull–Schmidt 圏とし，$A, B \in \mathscr{A}$ を直既約とする．このとき；

$$\mathrm{rad}_{\mathscr{A}}(A, B) = \left\{ f : A \to B \,\middle|\, f : \text{非同型} \right\}$$

が成り立つ．

証明．

まず $f \in \mathrm{rad}(A, B)$ とすると，任意の $g : B \to A$ について $\mathrm{id}_A - gf$ が同型である．いま f が同型なら逆射 $f^{-1} : B \to A$ があるので，$\mathrm{id}_A - f^{-1}f = 0$ が同型となり，これは $\mathrm{End}(A)$ が局所環であることに反する．よっ

て $\subset$ が示された．

逆に f を非同型とする．もし $\mathrm{id}_A - gf$ が同型でないような $g : B \to A$ があると仮定しよう．すると $\mathrm{End}(A)$ が局所環だから gf は同型であり，特に f は左逆を持つ．すると f は同型でないので右逆を持たない，すなわち $fg \in \mathrm{End}(B)$ が同型でない．しかし $\mathrm{End}(B)$ も局所環だから $\mathrm{id}_B - fg$ は同型で，補題 12.2.7 から $\mathrm{id}_A - gf$ も同型になり矛盾する．ゆえに $\supset$ も正しい．（証明終）

定理 *12.2.10*

$\mathscr{A}$ を加法圏とし，$\mathscr{C}$ を $\mathscr{A}$ の加法的部分圏で，$\mathscr{C}$ が Krull–Schmidt 圏であるとする．任意の $A, B \in \mathscr{A}$ と，任意の $f : A \to B$ に対して，もし $A \in \mathscr{C}$ ならば A の直和分解 $A = A' \oplus A''$ であって，右極小な射 $f' : A' \to B$ とゼロ射 $f'' : A'' \to 0$ が存在して $f = (f', f'')$ と表示できるものが存在する．

証明.

A の直既約分解 $A = A_1 \oplus \cdots \oplus A_n$ を固定する．$f : A \to B$ について，f を成分表示 $f = (f_1, \ldots, f_n)$ ($f_i : A_i \to B$) したときに現れるゼロ射の個数を $z(f)$ とする．このとき任意の A の自己同型 $\varphi \in \mathrm{End}(A)$ について $z(f\varphi)$ が最大となるような φ がとれる．f を $f\varphi$ でとりかえれば，任意の A の自己同型 φ について $z(f\varphi) \leq z(f)$ となるようにできる．$z(f) = m, A' = A_1 \oplus \ldots A_m$ とおき，$f' : (f_1, \ldots, f_m) : A' \to B$ が右極小であることを示そう．任意の $\varphi \in \mathrm{End}(A')$ について $f = f\varphi$ と仮定する．φ を行列表示する；

$$\begin{pmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \cdots & \varphi_{1m} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \varphi_{m1} & \cdots & \cdots & \varphi_{mm} \end{pmatrix}$$

すると $f = f\varphi$ だから；

$$(f_1, \ldots, f_m) = (f_1, \ldots, f_m) \begin{pmatrix} \varphi_{11} & \cdots & \varphi_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_{m1} & \cdots & \varphi_{mm} \end{pmatrix}$$

において第一成分を計算すると；

$$f_1(\mathrm{id}_{A_1} - \varphi_{11}) = f_2\varphi_{21} + \cdots + f_m\varphi_{m1} \tag{$*$}$$

であって，もし φ_{11} が同型なら $\mathrm{End}(A_1)$ は局所環だから $\mathrm{id}_{A_1} - \varphi_{11}$ は同型で，逆射を右からかけて；

$$f_1 = f_2\varphi'_{21} + \cdots + f_m\varphi'_{m1}$$

という表示を得る．すると；

$$(f_1, \ldots, f_m) \begin{pmatrix} \mathrm{id}_{A_1} & 0 & \cdots & 0 \\ -\varphi'_{21} & \mathrm{id}_{A_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\varphi'_{1m} & 0 & \cdots & \mathrm{id}_{A_m} \end{pmatrix} = (0, f_2, \ldots, f_m)$$

とかけ，行列に対応する同型射を φ' とすれば $z(f\varphi') = m - 1 < z(f)$ となって矛盾する．よって φ_{11} は同型でなければならない．同様に，φ_{i1} $(2 \leq i \leq m)$ が同型ならば，同様に $(*)$ から f_2 を $f_1, f_3, \ldots, f_m$ で表示する式を得るので φ_{i1} は同型でない．このようにして，φ_{ij} は $i = j$ のとき同型で，そうでないとき非同型である

ことがわかる．言い換えると，φ_{ij} は $i = j$ のとき $\varphi_{ii} \in \mathrm{rad}(A_i, A_i)$ で，$i \neq j$ のとき $\varphi_{ij} \in \mathrm{rad}(A_j, A_i)$ である（命題 12.2.9）．

ここで，射 $\varphi' : A' \to A'$ であって，すべての成分について $\varphi'_{ij} \in \mathrm{rad}(A_j, A_i)$ であるようなものをとると．$\varphi' \in \mathrm{rad}(A', A')$ である．実際逆射 ψ が存在するなら，それを成分表示してかけることで $\varphi_{11}\psi_{11}+\cdots+\varphi_{1m}\psi_{m1} = \mathrm{id}_{A_1}$ となるが，命題 12.2.8 によりこれは $\mathrm{rad}(A', A')$ の元の和となり，同型になりえないので矛盾する．

よって φ は $\mathrm{End}(A')/\mathrm{rad}(A', A')$ において可逆である．よって逆元 $\psi+\mathrm{rad}(A', A')$ をとれば $1-\varphi\psi, 1-\psi\varphi \in \mathrm{rad}(A', A')$ である．よって $\varphi\psi, \psi\varphi \notin \mathrm{rad}(A', A')$ だから $\varphi\psi, \psi\varphi$ は可逆で，同型である．ゆえに φ は同型であることがわかった．（証明終）

この定理と射影被覆の言い換えから次が従う．

系 12.2.11

$\mathscr{A}$ を射影的対象を十分に持つ Abel 圏とすると，$\mathscr{A}$ が Krull–Schmidt なら $\mathscr{A}$ は射影被覆を持つ．

応用として，Artin 環上の有限生成加群は極小射影分解（定義 7.3.4）を持つことを示そう．

命題 12.2.12

A を Artin 環とする．A 上の有限生成加群のなす圏 $\mathbf{mod}(A)$ は Krull–Schmidt である．

証明.

任意の $M \in \mathbf{mod}(A)$ について，命題 2.1.13 により直既約分解 $M = M_1 \oplus \ldots M_n$ がある．ここで，各 M_i について Fitting の補題（定理 2.1.12）から任意の $\varphi \in \mathrm{End}(M_i)$ は同型または冪零で，φ が同型ならば $\varphi^n = 0$ となる $n \geq 0$ がとれて；

$$(\mathrm{id}_{M_i} - \varphi)(\mathrm{id}_{M_1} + \varphi + \cdots + \varphi^{n-1}) = (\mathrm{id}_{M_1} + \varphi + \cdots + \varphi^{n-1})(\mathrm{id}_{M_1} - \varphi) = \mathrm{id}_{M_1}$$

だから $\mathrm{id}_{M_i} - \varphi$ は同型なので，$\mathrm{End}(M_i)$ は局所環である．（証明終）

系 12.2.13

A を Artin 環とする．A 上の有限生成加群のなす圏 $\mathbf{mod}(A)$ はつねに射影被覆を持つ．

命題 12.2.14

A を $\mathbf{mod}(A)$ が Krull–Schmidt であるような環とすると，A は（可換）局所環の有限直和である．

証明.

まず，任意の環 A について $\mathrm{End}(A) = A$ であることに注意する．さて $A \in \mathbf{mod}(A)$ なので，A 加群としての直和分解 $A = A_1 \oplus \cdots \oplus A_n$ があって，$\mathrm{End}(A_i)$ は（非可換かもしれない）局所環である．有限の直和なので，繰り返すことで $n = 2$ の場合のみ考えればよい．加群の同型写像 $A \to A_1 \oplus A_2$ における 1 の像を (e_1, e_2) とすると，$(e_1, 0), (0, e_2)$ に対応する A の元をそれぞれ $\widetilde{e_1}, \widetilde{e_2}$ としたら $\widetilde{e_1} + \widetilde{e_2} = 1, \widetilde{e_1}\widetilde{e_2} = 0$ を満たし，A は環として $A/(\widetilde{e_2}) \oplus A/(\widetilde{e_1})$ と同型である．このとき $A/(\widetilde{e_2}) \cong A_1$ であり，A_2 についても同様．よって $A/(\widetilde{e_2}) = \mathrm{End}(A/(\widetilde{e_2}) = \mathrm{End}(A_1)$ は局所環であり，題意が従う．（証明終）

§ 3　半完全環

前節によって，環 A であって任意の有限生成加群が射影被覆を持つものを探すには，$\mathbf{mod}(A)$ が Krull–Schmidt であるような環 A を探せばよい，ということがわかった．本節では，そのような環は（非可換環論では）**半完全環**と呼ばれていることを紹介し，その可換環論における特徴づけを示そう．

定義 *12.3.1*（半完全環）

環 R であって，任意の有限生成 R 加群が射影被覆をもつものを**半完全 (semi perfect)** であるという．

ここで R 加群は右としても左としてもよい．次のような特徴づけが知られている．

定理 *12.3.2*（Bass (1960), Müller (1970)）

環 R に対して，次は同値である．

(i) 任意の有限生成左 R 加群は射影被覆を持つ（R は半完全である）．

(ii) 任意の有限生成右 R 加群は射影被覆を持つ．

(iii) R は半局所環であって，任意の $R/\mathrm{rad}\,R$ の冪等元は $\mathrm{rad}\,R$ を法として持ち上がる．

(iv) 互いに直交する有限個の局所冪等元 $e_1, \ldots, e_r$ が存在して，$1 = e_1 + \cdots + e_r$ と表せる．

(i),(ii) と (iii) の同値性は Bass (1960)，(iv) との同値性は Müller (1970) による．

これにより，可換環では次の特徴付けが得られる．

命題 *12.3.3*

A を可換環とすると，半完全であることと（可換）局所環の直和であることは同値である．

証明.

($\Longrightarrow$)

上の定理により $1 = e_1 + \cdots + e_r$ と分解したとき；

$$A \to Ae_1 \oplus \cdots \oplus Ae_r; a \mapsto (ae_1, \ldots, ae_r)$$

が同型を与える．

($\Longleftarrow$)

$(A_i, \mathfrak{m}_i)$ を局所環として，$A = A_1 \oplus \cdots \oplus A_r$ であるとする．このとき $\mathrm{rad}\,A = \mathfrak{m}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{m}_r$ であることに注意する．$(a_i) + \mathrm{rad}\,A$ を冪等であるとすると，$a_i \notin \mathfrak{m}_i$ ならば $a_i - a_i^2 \in \mathfrak{m}_i$ であるので $1 - a_i \in \mathfrak{m}_i$ であるから；

$$b_i = \begin{cases} 0 & \text{if } a_i \in \mathfrak{m}_i \\ 1 & \text{if } a_i \notin \mathfrak{m}_i \end{cases}$$

とおけば $b_i - a_i \in \mathfrak{m}_i$ となり，$(a_i) + \mathrm{rad}\,A = (b_i) + \mathrm{rad}\,A$ で (b_i) は A の冪等元である．

（証明終）

§ 4　プレ加法圏上の加群

ここでは加法圏より更に弱いプレ加法圏について考えてみる．それは次のような圏に興味があるからである．

定義 *12.4.1*（環が誘導する圏）

A を環とする．このとき，圏 Λ を；

$$\mathrm{Ob}(\Lambda) = \{*\}\ \text{（一点集合）}$$

$$\mathrm{Hom}(*, *) = \{a \in A\}$$

で定める（射の合成は積で定める）と，これは圏になり，環の構造からプレ加法圏となる．

環論において，Λ という記号は可換とは限らない環を表すことが多い．ここではそれを濫用して，環が誘導するプレ加法圏に用いる．

この定義から，プレ加法圏は「環の多対象版」であると言われる．環から加群を考える（環の表現論）ことができるように，加法圏から加群を考えることができる（加法圏の表現論）．

このとき，関手圏 $\mathrm{Func}(\Lambda, \mathbf{Ab})$ を考えてみよう．$F : \Lambda \to \mathbf{Ab}$ を関手とすると；

$$\Lambda \to \mathbf{Ab}; * \mapsto M := F(*)$$

$$(a : * \to *) \mapsto F(a) : M \to M$$

が定まる．ここで F が加法的ならば，$F(a)$ はまさに a による M への作用を定め，M は A 加群となる．これを一般化したものが次の定義である．

定義 *12.4.2*

$\mathscr{A}$ をプレ加法圏とする．加法的関手 $\mathscr{A}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Ab}$ の全体を $\mathbf{Mod}(\mathscr{A})$ とかき，右 $\mathscr{A}$ 加群のなす圏という．

一般に次が成り立ち，これは Abel 圏である．

定理 *12.4.3*

$\mathscr{A}$ を Abel 圏とし，$\mathscr{C}$ を圏とする，関手圏 $\mathrm{Func}(\mathscr{C}, \mathscr{A})$ は Abel 圏となる．

証明は $\mathscr{A}$ が Abel 圏であることからすぐにわかるが，例えば自然変換 $\theta : F$
$LambdaightarrowG$ と $\mathscr{C}$ の図式 $f : X \to Y$ に対して，$\mathscr{A}$ が Abel 圏であることから，$\theta_X : F(X) \to G(X)$

は Abel 圏の準同型になり，核，余核をもつ．すなわち，次の図式；

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
\ker\theta_X \arrow[r] \arrow[d] & \ker\theta_Y \arrow[d] \\
F(X) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "\theta_X"] & F(Y) \arrow[d, "\theta_Y"] \\
G(X) \arrow[r, "G(f)"] \arrow[d] & G(Y) \arrow[d] \\
\operatorname{Coker}\theta_X \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Coker}\theta_Y \arrow[d] \\
0 & 0
\end{tikzcd}$$

が可換で，各列は完全である．直和，積も自然に定まり，準同型定理が成り立つこともわかる．

射が自然変換であるので，$M, N \in \mathbf{Mod}(\mathscr{A})$ について $\varphi \in \mathrm{Hom}(M, N)$ は $\varphi : M$ $LambdaightarrowN$ と書くべきであるが，Abel 圏における図式でもあるのでしばしば $M \to N$ で表す．

補題 *12.4.4*

$\mathscr{A}$ をプレ加法圏とする．任意の $A \in \mathscr{A}$ に対し，$\mathrm{Hom}(-, A)$ は $\mathbf{Mod}(\mathscr{A})$ の射影的対象である．

証明.

$M, N \in \mathbf{Mod}(\mathscr{A})$ とし，$\varphi : M \to N$ を全射（すなわち，任意の $A \in \mathscr{A}$ に対して $\varphi_A : M(A) \to N(A)$ は全射準同型）であるとする．任意の $\mathrm{Hom}(-, A) \to N$ が $\mathrm{Hom}(-, M) \to M$ に持ち上がることを見ればよい．

米田の補題より，$\mathrm{Hom}(-, A) \to N$ に対応する $x \in N(A)$ がある．全射 $\varphi_A : M(A) \to N(A)$ があるので，ある $y \in M(A)$ が存在して $\varphi_A(y) = x$ である．この y に対応する $\theta : \mathrm{Hom}(-, A) \to M$ を米田の補題からとる．すると，これが求める持ち上げである（米田の補題から id の行き先が可換ならばよく，それは明らか）．（証明終）

定理 *12.4.5*

$\mathscr{A}$ をプレ加法圏とすると，$\mathbf{Mod}(\mathscr{A})$ は射影対象を十分に持つ．

証明.

任意の $M \in \mathbf{Mod}(\mathscr{A})$ をとる．任意の $A \in \mathscr{A}$ について，$x \in M(A)$ をとると米田の補題から $\mathrm{Hom}(-, A) \to M$ が得られる．すると，直和して；

$$\bigoplus_{A \in \mathscr{A}} \bigoplus_{x \in M(A)} \mathrm{Hom}(-, A) \to M; (f_x : B \to A)_{x \in A, A \in \mathscr{A}} \mapsto (M(f_x)(x))$$

を考えればこれが全射である．実際，任意の $B \in \mathscr{A}$ について $\bigoplus_{A \in \mathscr{A}} \bigoplus_{x \in M(A)} \mathrm{Hom}(B, A) \to M(B)$ が全射ならよい．任意の $y \in M(B)$ に対して，米田の補題から $\mathrm{Hom}(-, B) \to M$ がとれ，これに B を代入すれば $\mathrm{Hom}(B, B) \to M(B); (f : B \to A) \mapsto M(f)(y)$ である．これによる id_B の像が y であるから，

$(f_x : B \to A)_{x \in A, A \in \mathscr{A}}$ を $A = B, x = y$ の場合に $f_x = \mathrm{id}_B$，それ以外の場合に 0 とさだめればこれの像が y である．（証明終）

今まで見てきたように表現可能関手は $\mathbf{Mod}(\mathscr{A})$ の射影対象であり，任意の $M \in \mathbf{Mod}(\mathscr{A})$ は表現可能関手の直和からの全射がある．これを $\mathbf{Mod}(A)$ の類似とみることで次の定義をする．

定義 *12.4.6*

$\mathscr{A}$ をプレ加法圏とする．$M \in \mathbf{Mod}(\mathscr{A})$ であって，表現可能関手の有限直和からの全射が存在するものを**有限生成 (finitely generated)** であるという．

定理 *12.4.7*

$\mathscr{A}$ を Krull–Schmidt 圏とすると，任意の有限生成右 $\mathscr{A}$ 加群は射影被覆を持つ．

証明.

有限生成右 $\mathscr{A}$ 加群 M をとる．すると，表現可能関手の有限直和からの全射；

$$f : \bigoplus_{A \in \mathscr{A}} \mathrm{Hom}(-, A) \to M$$

が存在する．ここで米田埋め込み $y : \mathscr{A} \to \mathbf{Mod}(\mathscr{A})$ は忠実充満なので，$\mathscr{A}$ は $\mathbf{Mod}(\mathscr{A})$ の部分圏 $y(\mathscr{A})$ と圏同値で，$\mathscr{A}$ が Krull–Schmidt だから $y(\mathscr{A})$ も Krull–Schmidt である．また $y(\mathscr{A})$ の対象の有限直和全体を $y'(\mathscr{A})$ とすればこれも Krull–Schmidt で，定理 12.2.10 を f に適用して右極小な全射 $f' : \oplus \mathrm{Hom}(-, A) \to M$ が存在する．よってこれが射影被覆である．（証明終）

第13章　寄せ集め

—untitled

§1　導分と微分

本節では，A 加群の導分と微分と呼ばれる技法について軽い説明を行う．これは代数幾何学においては，（複素）多様体論における微分形式の理論をスキーム論に対応させるものとして用いられる．本節では純粋に環論としての応用の一端でも紹介したい．

定義 *13.1.1*（導分）

A を環とする．A 加群 M への写像 $D : A \to M$ であって，次の条件；

(D1) $D(a+b) = D(a) + D(b)$

(D2) $D(ab) = bD(a) + aD(B)$

を満たすとき，D を A から M への**導分 (derivation)** といい，その全体を $\mathrm{Der}(A, M)$ と表す．

条件 (D2) は Leibnitz 則と呼ばれるものに相当する．$\mathrm{Der}(A, M)$ は自然に A 加群をなすことに注意する．また R 代数 $f : R \to A$ に対して，$D \in \mathrm{Der}(A, M)$ で $D \circ f = 0$ であるものを R 上の導分といい，その全体 $\mathrm{Der}_R(A, M)$ で表す．このとき $\mathrm{Der}_R(A, M) \subset \mathrm{Hom}_R(A, M)$ であることに注意しよう．

導分は（共変）関手 $\mathrm{Der}_R(A, -) : \mathbf{Mod}(A) \to \mathbf{Mod}(A)$ を自然に定め，これは表現可能関手である．

定義 *13.1.2*（Kähler 微分加群）

A を R 代数とする．関手 $\mathrm{Der}_R(A, -)$ を表現する対象，すなわち A 加群 $\Omega_{A/R}$ と導分 $d_{A/R} : A \to \Omega_{A/R}$ の組であって，任意の A 加群 M と導分 $D : A \to M$ に対して，A 線型写像 $f : \Omega_{A/R} \to M$ で $D = f \circ d_{A/R}$ となるものが一意に存在するとき，$\omega_{A/R}$ を **Kähler 微分加群 (module of Kähler differentials)** または単に**微分加群**という．

以後，実際に微分加群が存在することを示していこう．もちろん定義から存在すれば一意的に定まる同型を除いて一意である．

A, B を R 代数，M を B 加群とする．M の B によるイデアル化 $A * M$（定義 8.7.1）において自然な全射 $\pi : B * M \to B$ は R 代数の射であり，R 代数の可換図式；

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, shift right, "h'"'] \arrow[d, shift left, "h"] \arrow[dr, "g"] & \\ B * M \arrow[r, "\pi"] & B \end{tikzcd}$$

を考える．図式の可換性から，写像 $\varphi : A \to M$ を用いて任意の $a \in A$ に対して $h(a) = (g(a), \varphi(a))$ とかける．このとき φ は加法的, すなわち $\varphi(a{+}b) = \varphi(a){+}\varphi(b)$ が成り立つことに注意する．同様に $h'(a) = (g(a), \varphi'(a))$ とおくと $h(a) - h'(a) = (0, \varphi(a) - \varphi'(a))$ であるので，加法的な写像 $A \to M; a \mapsto \varphi(a) - \varphi'(a)$ が定まる．記号の濫用ではあるが，これを $h - h' : A \to M$ と表すことにする．いま M を $g : A \to B$ によって A 加群とみなすと $h - h' \in \mathrm{Der}_R(A, M)$ である．命題の形にまとめておこう．

命題 *13.1.3*

A, B を R 代数，M を B 加群とする．R 代数の可換図式；

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, shift right, "h'"'] \arrow[d, shift left, "h"] \arrow[dr, "g"] & \\ B * M \arrow[r, "\pi"] & B \end{tikzcd}$$

を考える．M を $g : A \to B$ によって A 加群とみなすとき，上で構成した $h - h'$ は A から M への導分，すなわち $h - h' \in \mathrm{Der}_R(A, M)$ である．逆に $D \in \mathrm{Der}_R(A, M)$ ならば $D + h : a \mapsto (0, D(a)) + h(a)$ は図式を可換にする R 代数の射である．

証明.

構成から (D1) は明らかである．任意の $a, b \in A$ に対して $(h - h')(ab) = \varphi(ab) - \varphi'(ab)$ である．ここで；

$$h(ab) = h(a)h(b) = (g(a), \varphi(a))(g(b), \varphi(b)) = (g(ab), g(b)\varphi(a) + g(a)\varphi(b))$$

であるので，A 加群として $\varphi(ab) = b\varphi(a) + a\varphi(b)$ であり，h' についても同様に考えてて $(h - h')(ab) = b(\varphi(a) - \varphi'(a)) + a(\varphi(b) - \varphi'(b))$ となり (D2) が成り立っていることがわかった．

次に任意の $D \in \mathrm{Der}_R(A, M)$ に対し $D + h$ を考えると，これが図式を可換にする加法的な写像であることは明らかである．積については；

$$\begin{aligned}(h + D)(a) \cdot (h + D)(b) &= h(ab) + h(a)(0, D(b)) + h(a)(0, D(a)) + (0, D(a))(0, D(b)) \\ &= h(ab) + (g(a), \varphi(a))(0, D(b)) + (g(b), \varphi(b))(0, D(a)) \\ &= h(ab) + (0, aD(b) + bD(a)) \\ &= (h + D)(ab)\end{aligned}$$

となりこれは環準同型である．R 代数の射であることも明らか．　（証明終）

ここで，R 代数 A に対して，$A \otimes_R A$ は $(a \otimes b)(a' \otimes b') = aa' \otimes bb'$ によって R 代数をなすことに注意する．環準同型 $A \otimes_R A \to A; a \otimes b \to ab$ の核を I とかくと，I/I^2 において任意の $a \in A$ と $b \otimes c \in I$ に対して $a \otimes 1 - 1 \otimes a \in I$ に注意すると；

$$(a \otimes 1)(b \otimes c) + I^2 = (1 \otimes a)(b \otimes c) + I^2$$

が成り立つ．そこで，I/I^2 に $a(b \otimes c) = ab \otimes c = b \otimes ac$ によって A 加群の構造を入れる．

定理 *13.1.4*

A を R 代数とする．$A \otimes_R A \to A; a \otimes b \to ab$ の核を I としたとき，I/I^2 を補題の方法で A 加群とみたものは関手 $\mathrm{Der}_R(A, -)$ を表現する．すなわち $\Omega_{A/R} \cong I/I^2$ である．

証明.

次の写像 $\varphi : A \to A * I/I^2; a \mapsto (a, 1 \otimes a - a \otimes 1 + I^2)$ を考えると，これは次の図式；

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "\varphi"] \arrow[dr, "\mathrm{id}"] & \\ A * I/I^2 \arrow[r, "\pi"] & A \end{tikzcd}$$

を可換にする R 代数の射である．実際これが環準同型であること以外は明らかで，$\varphi(a)\varphi(b)$ の第 2 成分を定義に沿って計算すると；

$$\begin{aligned} a(1\otimes b+b\otimes 1)+b(1\otimes a-a\otimes 1)I^2 &= (a\otimes 1)(1\otimes b-b\otimes 1)+(1\otimes b)(1\otimes a-a\otimes 1) \\ &= a\otimes b-ab\otimes 1+1\otimes ab-ab\otimes 1+I^2 \\ & 1\otimes ab-ab\otimes 1+I^2 \end{aligned}$$

であるから $\varphi(ab)=\varphi(a)\varphi(b)$ であることがわかった．ここで $\iota : A\to A*M$ を自然な包含とするとこれも図式を可換にする R 代数の射なので，命題 13.1.3 から $\varphi-\iota : A\to I/I^2; a\mapsto 1\otimes a-a\otimes 1+I^2$ は導分である．これを $d_{A/R}$ と表すことにする．任意の $a\otimes b\in I/I^2$ を考えると $a\otimes b=(a\otimes 1)(1\otimes b-b\otimes 1)$ であるから，A 加群として $d_{A/R}(b)$ の形の元で生成されていることに注意する．$f : I/I^2\to M$ を $a\otimes b+I^2\mapsto aD(b)$ と定めるとこれは well-defined な A 線型写像で，上の注意から図式を可換にする f はこれのみである．（証明終）

定理 *13.1.5*（第 1 基本完全列）

$f : R\to A, g : A\to B$ を環準同型とする．このとき；

$$\alpha : \Omega_{A/R}\otimes_A B\to\Omega_{B/R}; d_{A/R}(a)\otimes b\mapsto bd_{B/R}(g(a))$$

$$\beta : \Omega_{B/R}\to\Omega_{B/A}; d_{B/R}(b)\mapsto d_{B/A}(b)$$

は well–defined であって；

$$\Omega_{A/R}\otimes_A B \xrightarrow{\ \alpha\ } \Omega_{B/R} \xrightarrow{\ \beta\ } \Omega_{B/A} \longrightarrow 0$$

が完全である．

証明.

まず α,β の well–definedness を確かめよう．$d_{B/R} : B\to\Omega_{B/R}$ に対して $d_{B/R}\circ g : A\to\Omega_{B/R}\in\mathrm{Der}_R(A,\Omega_{B/R})$ により，普遍性から $\widetilde{\alpha} : \Omega_{A/R}\to\Omega_{B/R}; d_{A/R}(a)\mapsto d_{B/R}(g(a))$ が一意に存在して；

$$\alpha : \Omega_{A/R}\otimes_A B\to\Omega_{B/R}; d_{A/R}(a)\otimes b\mapsto bd_{B/R}(g(a))$$

が定まる．

また β は $d_{B/R} : B\to\Omega_{B/A}$ が R 上の導分でもあるから，自然に $\beta : \Omega_{B/R}\to\Omega_{B/A}; d_{B/R}(b)\mapsto d_{B/A}(b)$ が定まる．

Step 1. 任意の B 加群 M に対して，$\mathrm{Hom}_B(\Omega_{A/R}\otimes_A B, M)\cong\mathrm{Der}_R(A,M)$ であること．ただし右辺は $D : A\to M$ について $bD : a\mapsto bD(a)$ で B 加群とみる．

$D\in\mathrm{Der}_R(A,M)$ から α と同様に φ を作ろう；

$$\begin{tikzcd} & & M \\ & M & M\otimes_A B \arrow[u] \\ A \arrow[ur, "D"] \arrow[r, "d_{A/R}"'] & \Omega_{A/R} \arrow[u, dashed, "\widetilde{\varphi}"] \arrow[r] & \Omega_{A/R}\otimes_A B \arrow[u, "\widetilde{\varphi}\otimes\mathrm{id}"] \arrow[uu, bend right, dashed] \end{tikzcd}$$

（証明終）

§ 2　問題にしたら面白そうなもの

問題 *13.2.1*

Abel 圏において，各行が完全な可換図式；

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M_1 \arrow[r] \arrow[d, "0"] & M_2 \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"] & M_3 \arrow[r] \arrow[d, "0"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & N_1 \arrow[r] & N_2 \arrow[r] & N_3 \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

があったとき，$\varphi = 0$ であるだろうか？

問題 *13.2.2*

A を Noether 環とする．任意の $a \in A$ と $n > 0$ について，ある $m \geq n$ が存在して $\operatorname{Ann} a^m \subset \operatorname{Ann} a^{m-n}$ であることを示せ．

付録 A　圏論

—Appendix A, Category theory

現代的な代数学では，もはや圏論の言葉なしに議論を展開することは困難である．この付録では最低限の圏論について触れることにしよう．詳細に興味がある場合は例えば MacLane (1998)，志甫 (2016) などを見よ．この章の詳細に至るまで（証明などを省略している場所も多いので，場合によっては参照先まで）理解する必要は（圏の専門家以外にとっては）あまりなく，道具として使えるようになれば十分であろう．そのため，発展的な内容に言及する場合では他書への参照にとどめ，ここでは詳しく述べない．また，そこに続く議論についても読者は参照先をみていないと仮定してすすめることにする．

§1　圏の定義

定義 *A.1.1*（圏）

集合 $\mathrm{ob}(\mathscr{A})$ について，任意の $A, B \in \mathrm{ob}(\mathscr{A})$ に対して集合 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(A, B)$ が存在して，以下の条件；

(C1) 任意の $A, B, C \in \mathrm{ob}(\mathscr{A})$ について，結合的な演算；

$$\circ : \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(B, C) \times \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(A, B) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(A, C); (g, f) \mapsto g \circ f$$

が定義されている（これを**合成 (composition)** という）．

(C2) 任意の $A \in \mathrm{ob}(\mathscr{A})$ について $\mathrm{id}_A \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(A, A)$ が存在して，任意の $B \in \mathrm{ob}(\mathscr{A})$ と $f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(A, B)$ について $f = f \circ \mathrm{id}_A = \mathrm{id}_B \circ f$ が成り立つ（この id_A を A 上の**恒等射 (identity)** という）．

をみたすとき，組 $(\mathrm{ob}(\mathscr{A}), \{\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(A, B)\}_{A,B\in\mathrm{ob}(\mathscr{A})}, \circ)$ を単に $\mathscr{A}$ とかいて，$\mathscr{A}$ は**圏 (category)** であるという．

誤解のおそれがないときは $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(A, B)$ は単に $\mathrm{Hom}(A, B)$ とかく．また簡単のために $A \in \mathrm{ob}(\mathscr{A})$ を $A \in \mathscr{A}$, $f \in \mathrm{Hom}(A, B)$ を $f : A \to B$ とかく．$A \in \mathscr{A}$ を $\mathscr{A}$ の**対象 (object)** といい，$f : A \to B$ を A から B への**射 (morphism, map, arrow)** という．

この定義ではゴチャゴチャしていてわかりにくいと思うが，要はある数学的対象と，その間の（構造を保つような）写像，つまり代数構造なら準同型，位相構造なら連続写像など全体，の組を 1 つのデータとして扱おう，というのが圏の定義のモチベーションとなっている．

例 A.1.2

- **Set** . . . . 集合全体，写像.
- **Top** . . . . 位相空間全体，連続写像.
- **Ab** . . . . Abel 群全体，準同型写像.
- **Ring** . . . . （1 を持つ可換）環全体，準同型写像.
- **Mod**(A) . . . . . A 加群全体，A 線型写像.

などはすべて自然に圏をなす．ここでは 1 つの対象のみからなる圏など，いかにも圏論チックな例は扱わない．

ここで「集合全体の集合」によって圏 **Set** を定義しているが，実はこれを素朴に集合として扱うことはできない．そのために以下で “正当化” を行う．いまから述べることは集合論的な厳密さのためには大切であるが，実際に圏について議論をするためにはほとんど不要である．そのため，特に興味がない場合は急カーブの終了まで読み飛ばすと幸せになれるかもしれない．

さて，集合を単に「物の集まり」と考える，公理化されていない集合論では，圏を考えるときに自然に現れる「集合全体の集合」のようなものを考えると矛盾が起こってしまうことに注意しなければならない．

例 *A.1.3*（Cantor のパラドックス）

X をすべての集合を含む集合とすると，Cantor の定理により X のすべての部分集合の集合，すなわち X の冪集合 $\mathfrak{P}(X)$ は X より真に大きな濃度を持つが，$\mathfrak{P}(X) \subset X$ なのでこれは矛盾である．

このような問題に対処するために**公理的集合論 (axiomatic set theory)** が Zermelo, Fraenkel らによって構築された．それらの詳細を述べる余裕はないので，興味があれば Kunen (2009) などを参照してほしい．ここでは，現代の数学は公理系として **ZFC (Zermelo–Fraenkel + Axiom of Choice)** と呼ばれる，Zermelo–Fraenkel の公理系に選択公理を加えたものが採用されているということを注意しておく．ZF の各公理について，インフォーマルな形ではあるが紹介しておく；

(ZF1) 空集合は集合である．
(ZF2) 要素の等しい集合は等しい（外延性公理）．
(ZF3) x, y が集合ならば，x, y のみを集合とする集合 $\{x, y\}$ が存在する（対の公理）．
(ZF4) x が集合ならば，x の要素全体からなる集合 $\bigcup x$ が存在する（和集合の公理）．
(ZF5) x が集合ならば，x の部分集合全体からなる集合 $\mathfrak{P}(x)$ が存在する（冪集合の公理）．
(ZF6) 集合 x の写像による像も集合である（置換公理）．
(ZF7) ある集合 A であって，$\emptyset \in A$ かつ任意の $x \in A$ に対して $x \cup \{x\} \in A$ であるものが存在する（無限公理）．
(ZF8) 集合 x について，無限降下列 $x \ni x_1 \ni x_2 \ni \cdots$ は存在しない（正則性公理）．

ZFC においては，「すべての集合を含む集合」はもはや集合としては扱わない．そのようなものは**真のクラス (proper class)** と呼ばれ，**VGB (von Neumann–Gödel–Bernays)** といった ZFC より大きいような公理系でないと扱うことができない．しかし，次の **Grotendieck 宇宙**というアイデアを使用すると，ZFC に 1 つの公理を追加するだけで，圏論で扱う範囲のクラスをすべて集合として，しかも矛盾なく取り扱うことができるようになる．

定義 *A.1.4*（Grotendieck 宇宙）

集合 U であって，次の性質；

(GU1) $x \in y, y \in U$ ならば $x \in U$ である．
(GU2) $x, y \in U$ ならば $\{x, y\} \in U$ である．
(GU3) $x \in U$ ならば $\mathfrak{P}(x) \in U$ である．
(GU4) $I \in U, x_i \in U \ (i \in I)$ ならば $\bigcup_{i \in I} x_i \in U$ である．

を満たすものを **Grothendieck 宇宙 (universe)** であるという．

簡単な議論によって，Grothendieck 宇宙は次のような性質を持つ；

(i) $x \in U$ ならば $\{x\} \in U$ である．
(ii) $x \in U$ ならば $\bigcup_{y \in x} y \in U$ である．
(iii) $x, y \in U$ ならば $x \times y \in U$ である．
(iv) $x \in U, y \subset x$ ならば $y \in U$ である．

列挙すればまだまだ切りがないが，これらの性質によって（U が身近な対象を 1 つでも含んでいれば）U は普段扱うような対象をすべて含んでいることがわかる．ただし $U \notin U$ であることに注意が必要であり，これによって Cantor のパラドックスを防いでいる．

$\emptyset$ は Grothendieck 宇宙である．また遺伝的有限集合の集合と呼ばれる V_ω も Grothendieck 宇宙になるが，これらは $\mathbb{N}$ を元として持たない．そのため定義に $\mathbb{N} \in U$ を課す流儀もある（例えば MacLane (1998)）．

ZFC では $\emptyset, V_\omega$ 以外の Grothendieck 宇宙の存在を証明できない．そこで，本書では次の公理を認めることにする．

公理 *A.1.1*（宇宙公理）

任意の集合 X に対して，$X \in U$ となる Grothendieck 宇宙 U が存在する．

これにより，十分大きな Grothendieck 宇宙 U をとることで，望む限りの大きさを持った集合を実現できる．そのため，本書では以後 Grothendieck 宇宙 U を 1 つ固定し，その U を集合全体だと思うことにする（圏 **Set** を U で定義する）．この流儀ではもはやの U 元でないものは **Set** の対象ではないが，望むだけ U を大きくすればよいのでもはや問題ではない．

こんな公理を勝手に導入してよいのか，と思われるかもしれないが，これは「到達不能基数の存在」と呼ばれる公理と同値であり，これを ZFC に付け加えたものは無矛盾であると推測されている．

真のクラスを扱う圏論では，従来通りの集合，つまり真のクラスでないものを**小さい (small)** 集合と呼んでいた．ここでは次の定義をする．

定義 *A.1.5*

Grothendieck 宇宙 U の元を**小さい (small)** 集合という．

$\mathrm{ob}(\mathscr{A})$ が小さい集合であるような圏を**小さい圏 (small category)** という．よく使われる **Set** や，$\mathbf{Mod}(A)$ などは小さい圏ではない．また，実用上の圏は次にあるように Hom に簡単な構造を要請する．

定義 *A.1.6*

圏 $\mathscr{A}$ について，任意の $A, B \in \mathscr{A}$ に対して $\mathrm{Hom}(A, B)$ が小であるとき $\mathscr{A}$ を**局所的に小さい (locally small)** 圏であるという．

上にある例はすべて局所的に小さい圏である．以降すべての圏は明記しない限り局所的に小さいことを仮定する．

一般の集合における単射，全射の概念を圏について拡張しよう．まず，圏の対象の同型について定義する．

定義 *A.1.7*（同型）

$\mathscr{A}$ を圏とし，$A, B \in \mathscr{A}$ とする．ある $f : A \to B, g : B \to A$ が存在して，$g \circ f = \mathrm{id}_A, f \circ g = \mathrm{id}_B$ であるとき，A と B は同型であるといい，$A \cong B$ で表す．

このような f, g を同型射という．明らかに g は f に対して一意である（確かめよ）．そこで g を f^{-1} とかく．また同型は同値関係であることもすぐにわかる．

定義 *A.1.8*（モノ射，エピ射）

$\mathscr{A}$ を圏とし，$A, B \in \mathscr{A}$ とする．射 $f : A \to B$ に対して；

任意の $D \in \mathscr{A}$ と $g_1, g_2 : D \to A$ に対して，$f \circ g_1 = f \circ g_2$ ならば $g_1 = g_2$ である．

が成り立つとき，f は**モノ射 (monomorphism)** であるという．また；

任意の $D' \in \mathscr{A}$ と $h_1, h_2 : B \to D'$ に対して，$h_1 \circ f = h_2 \circ f$ ならば $h_1 = h_2$ である．

が成り立つとき，f を**エピ射 (epimorphism)** であるという．

モノ射を**左簡約可能 (left cancellable)**，エピ射を**右簡約可能 (right cancellable)** ともいう．集合論でおなじみの次の性質が成り立つ．

命題 *A.1.9*

$\mathscr{A}$ を圏とし，$A, B, C \in \mathscr{A}, f : A \to B, g : B \to C$ とする．このとき；

(i) f が同型射ならば，f はモノ射かつエピ射である．
(ii) f, g がともにモノ射（エピ射）ならば，$g \circ f$ もモノ射（エピ射）である．
(iii) $g \circ f$ がモノ射ならば f はモノ射である．
(iv) $g \circ f$ がエピ射ならば g はエピ射である．

が成り立つ．

証明は簡単であるから各自に任せる．ここで単射，全射といわずにモノ射，エピ射と呼ぶのには理由がある．それはモノ射かつエピ射であったとしても同型射になりえないことがあるからである．

例 A.1.10

可環環のなす圏 **Ring** を考えよう．自然な $\iota : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ と，$f_1, f_2 : \mathbb{Q} \to A$ を考える（A は可環環）．このとき $f_1 \circ \iota = f_2 \circ \iota$ とすると，任意の $p/q \in \mathbb{Q}$ に対して $f_1(p/q) = f_1(p)f_1(q)^{-1} = f_2(p)f_2(q)^{-1} = f_2(p/q)$ であるので ι はエピ射である．明らかにモノ射だから，ι はエピ射かつモノ射だが，同型射ではない．

定義 *A.1.11*（始対象，終対象，零対象）

$\mathscr{A}$ を圏とする．ある $E \in \mathscr{A}$ であって，任意の $A \in \mathscr{A}$ に対して $\mathrm{Hom}(E, A)$ が 1 点集合であるようなものを $\mathscr{A}$ の**始対象 (initial object)** という．双対的に $\mathrm{Hom}(A, E)$ が 1 点であるような E を**終対象 (terminal object, final object)** という．始対象かつ終対象であるものを $\mathscr{A}$ の**零対象 (zero object)** という．

命題 *A.1.12*

圏 $\mathscr{A}$ において，始対象（終対象）は存在すれば同型を除いて一意である．

証明.

E, E' が始対象であるとすると，$\mathrm{Hom}(E, E') = \{f\}, \mathrm{Hom}(E', E) = \{g\}$ とかける．このとき $g \circ f \in \mathrm{Hom}(E, E) = \{\mathrm{id}_E\}$ であるので $g \circ f = \mathrm{id}_E$ で，同様に $f \circ g = id_{E'}$ だから E, E' は同型である．終対象についても同様に示される．（証明終）

例えば **Ring** では始対象は $\mathbb{Z}$，終対象は零環 $\{0\}$ である．零対象は存在しない．**Mod**(A) においては始対象，終対象，零対象は 0 である．

次に一般の圏における積，余積（直和）を導入しよう．

定義 *A.1.13*（積）

$\mathscr{A}$ を圏とする．対象の族 $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ に対して，$A \in \mathscr{A}$ と射の族 $p_\lambda : A \to A_\lambda$ が存在して，任意の $X \in \mathscr{A}$ と射の族 $f_\lambda : X \to A_\lambda$ に対して $f : X \to A$ で $f_\lambda = p_\lambda \circ f$ となるものが一意に存在するとき，$(A, \{p_\lambda\})$ を $\{A_\lambda\}$ の**積 (prodict)** であるという．$A = \prod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ とかく．

p_λ は**射影 (projection)** と呼ばれる（一般にエピであるかはわからない）．$\mathscr{A}$ が終対象 E を持つとき，$\Lambda = \emptyset$ の場合の積は E と定める（Leinster (2014)，例 5.1.9 を参照のこと）．

定義 *A.1.14*（余積）

$\mathscr{A}$ を圏とする．対象の族 $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ に対して，$A \in \mathscr{A}$ と射の族 $\iota_\lambda : A_\lambda \to A$ が存在して，任意の $X \in \mathscr{A}$ と射の族 $f_\lambda : A_\lambda \to X$ に対して $f : A \to X$ で $f_\lambda = f \circ \iota_\lambda$ となるものが一意に存在するとき，$(A, \{\iota_\lambda\})$ を $\{A_\lambda\}$ の**余積 (coprodict)** であるという．$A = \coprod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ とかく．

ι_λ は**包含射 (inclusion)** とか**標準単射 (canonical injection)** と呼ばれる（一般にモノであるかはわからない）．

このように，自然な射（この例では p_λ, ι_λ）について，ある条件を満たした射（この例では f_λ）に対して可換になるような f **が一意に存在する**という性質を**普遍性 (universality)** という．このように圏論では普遍性をみたすものをもってその概念を定義する，ということがよく行われる．普遍性により積，余積が存在すれば（同型を除いて）一意であることがわかる．

$$\begin{tikzcd} & \prod A_\lambda \arrow[dr, "p_\lambda"] & \\ X \arrow[ur, dashed, "f"] \arrow[rr, "f_\lambda"'] & & A_\lambda \end{tikzcd}$$

Figure.17　積の普遍性

$$\begin{tikzcd} & \coprod A_\lambda \arrow[dr, dashed, "f"] & \\ A_\lambda \arrow[ur, "\iota_\lambda"] \arrow[rr, "f_\lambda"'] & & X \end{tikzcd}$$

Figure.18　余積の普遍性

余積はまたは**圏論的和 (categorical sum)** とも呼ばれる．積と同様に，$\mathscr{A}$ が始対象 E を持つならば $\Lambda = \emptyset$ についての余積を E で定義しよう．一般の圏 $\mathscr{A}$ においては，必ずしも積，余積が存在するとは限らないことに注意が必要である（例えば Leinster (2014)，例 5.1.2)．

また本書では有限個の積を $A \times B$，有限個の余積を $A \oplus B$ と表すことにする．

最後に**ファイバー積**とその双対概念について述べておくことにしよう．

定義 *A.1.15*（ファイバー積）

$\mathscr{A}$ を圏とする．射 $f : A \to C, g : B \to B$ について，ある $A \times_C B \in \mathscr{A}$ と $p_A : A \times_C B \to A, p_B : A \times_C B \to B$ で $f \circ p_A = g \circ p_B$ を満たすものが存在して，任意の $D \in \mathscr{A}$ と $s : D \to A, t : D \to B$ で $f \circ s = g \circ t$ を満たすものに対して，$u : D \to A \times_C B$ であって $s = p_A \circ u, t = p_B \circ u$ となるものが一意的に存在するとき，組 $(A \times_C B, p_A, p_B)$ を A, B の C 上の**ファイバー積 (fibre product)** または**引き戻し (pullback)** という．

定義 *A.1.16*（余ファイバー積）

$\mathscr{A}$ を圏とする．射 $f : C \to A, g : C \to B$ について，ある $A \sqcup_C B \in \mathscr{A}$ と $i_A : A \to A \sqcup_C B, i_B : B \to A \sqcup_C B$ で $i_A \circ f = i_B \circ g$ を満たすものが存在して，任意の $D \in \mathscr{A}$ と $s : A \to D, t : B \to D$ で $s \circ f = t \circ g$ を満たすものに対して，$u : A \sqcup_C B \to D$ であって $s = u \circ i_A, t = u \circ i_B$ となるものが一意的に存在するとき，組 $(A \sqcup_C B, i_A, i_B)$ を A, B の C 上の**余ファイバー積 (fibre coproduct)** または**押し出し (pushout)** という．

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[dr, dashed, "u"] \arrow[drr, bend left, "t"] \arrow[ddr, bend right, "s"'] & & \\
& A \times_C B \arrow[r, "p_B"] \arrow[d, "p_A"'] & B \arrow[d, "g"] \\
& A \arrow[r, "f"] & C
\end{tikzcd}$$

Figure.19　ファイバー積の普遍性

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"] & B \arrow[d, "i_B"] \arrow[ddr, bend left, "t"] & \\
A \arrow[r, "i_A"] \arrow[drr, bend right, "s"'] & A \sqcup_C B \arrow[dr, dashed, "u"] & \\
& & D
\end{tikzcd}$$

Figure.20　余ファイバー積の普遍性

加群の圏では，ファイバー積，余ファイバー積ともに常に存在する．$f : A \to C, g : B \to C$ によるファイバー積は；

$$A \otimes_C B = \{(x, y) \in A \times B \mid f(x) = g(y)\}$$

であり，p_A, p_B は自然な射影である．また $f : C \to A, g : C \to B$ による余ファイバー積は；

$$A \sqcup_C B = (A \times B)/\{(f(x), -g(x)) \mid x \in C\}$$

で，i_A, i_B は自然な包含である．また環の圏におけるテンソル積 $A \otimes_C B$ は余ファイバー積であることを注意しておく．

§ 2　核，余核と Abel 圏

普遍性を用いた定義ができる対象として，射の核，余核がある．ただし，そのために**零射**と呼ばれる自明な射を考える必要がある．この零射の存在のために圏が零対象を持つことを仮定する．

定義 *A.2.1*（零射）

$\mathscr{A}$ を零対象 0 を持つ圏とする．任意の $A, B \in \mathscr{A}$ について，自然な $A \to 0$ と $0 \to B$ の合成 $0_{AB} : A \to B$ が定まる．これを A から B への**零射 (zero morphism)** という．誤解の恐れがない場合，単に $0 : A \to B$ とかく．

次の性質を持つ射を零射と定義する流儀もある．その定義においては零射は零対象のない圏でも議論しうることに注意が必要である．

命題 *A.2.2*

$\mathscr{A}$ を零対象 0 を持つ圏とする．任意の $A, B \in \mathscr{A}$ と零射 $0_{AB} : A \to B$ について，任意の $C, C' \in \mathscr{A}$ と $f, g : B \to C, f', g' : C' \to A$ に対して $f \circ 0_{AB} = g \circ 0_{AB}, 0_{AB} \circ f' = 0_{AB} \circ g'$ が成り立つ．

証明.

$C \in \mathscr{A}, f, g : B \to C$ についてのみ示す．自然な射に ${}_A0 : A \to 0, 0_B : 0 \to B$ と名前をつけておくと，$0_{AB} = 0_B \circ {}_A0$ である．ここで次の図式；

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "0_{AB}"] \arrow[dr, "{}_A0"] & & B \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & C \\
& 0 \arrow[ur, "0_B"'] & &
\end{tikzcd}$$

ここで 0 は始対象だから，$f \circ 0_B = g \circ 0_B$ である．よってこれに右から ${}_A0$ を合成して題意が従う．（証明終）

特別な場合として．零射は何を合成しても零射であることがわかる．

系 *A.2.3*

$\mathscr{A}$ を零対象 0 を持つ圏とする．任意の $A \in \mathscr{A}$ について，$\mathrm{id}_A = 0$ ならば $A = 0$ である．

証明.

任意の $C \in \mathscr{A}$ について，$f : A \to C$ とすると $f = f \circ \mathrm{id} = 0$ であるから A は始対象であり，まったく同様にして終対象．（証明終）

定義 *A.2.4*（射の核）

圏 $\mathscr{A}$ を零対象 0 を持つ圏とする．射 $f : A \to B$ を固定する．$K \in \mathscr{A}$ と射 $\iota : K \to A$ が存在して，次の普遍性；

(K1) $f \circ \iota : K \to B$ は零射である．

(K2) 任意の $K' \in \mathscr{A}$ と，$\iota' : K' \to A$ であって $f \circ \iota'$ が零射であるものについて，$u : K' \to K$ であって $\iota \circ u = \iota'$ となるものが一意的に存在する．

を満たすとき，(K, ι) を f の**核** (kernel) といい，$K = \ker f$ とかく．

定義 *A.2.5*（射の余核）

圏 $\mathscr{A}$ を零対象 0 を持つ圏とする．射 $f : A \to B$ を固定する．$C \in \mathscr{A}$ と，射 $\pi : B \to C$ が存在して，次の普遍性；

(CoK1) $\pi \circ f : A \to C$ は零射である．

(CoK2) 任意の $C' \in \mathscr{A}$ と，$\pi' : B \to C'$ であって $\pi' \circ f$ が零射であるものについて，$u : C \to C'$ であって $\pi' = u \circ \pi$ であるものが一意的に存在する．

を満たすとき，(C, π) を f の**余核 (cokernel)** といい，$C = \mathrm{Coker}\, f$ とかく．

$$\begin{tikzcd}
& A \arrow[dr, "f"] & \\
& \ker f \arrow[u, "\iota"] \arrow[r, "0"] & B \\
K' \arrow[uur, bend left, "\iota'"] \arrow[ur, dashed, "u"] \arrow[urr, bend right, "0"'] & &
\end{tikzcd}$$

Figure.21　核の普遍性

$$\begin{tikzcd}
& & C' \\
A \arrow[r, "0"] \arrow[dr, "f"'] \arrow[urr, bend left, "0"] & \operatorname{Coker} f \arrow[ur, dashed, "u"] & \\
& B \arrow[u, "\pi"] \arrow[uur, bend right, "\pi'"'] &
\end{tikzcd}$$

Figure.22　余積の普遍性

一般の圏では存在するかどうかはわからないが，普遍性からもし存在すれば（同型を除いて）一意的である．直感的には自明だが，圏論においてはそれほど明らかでない命題群を証明しておく．以下，核，余核について明示しない限りは「もし存在すれば」という言明を省略する．

命題 *A.2.6*

$\mathscr{A}$ を零対象 0 を持つ圏とする．$\iota : \ker f \to A$ はモノ射，$\pi : B \to \operatorname{Coker} f$ はエピ射である．

証明.

ι についてのみ示す．任意の $C \in \mathscr{A}$ と $g_1, g_2 : C \to \ker f$ について $\iota \circ g_1 = \iota \circ g_2$ と仮定する．これを $\iota' : C \to A$ とおくと，$f \circ \iota' = 0$ なので普遍性から $u : C \to \ker f$ が一意的に存在して $\iota' = \iota \circ u$ である．いま g_1, g_2 はどちらも u の条件を満たしているから，一意性より $g_1 = g_2 = u$ である．（証明終）

命題 *A.2.7*

$\mathscr{A}$ を零対象 0 を持つ圏とする．零射 $0 : A \to B$ の核，余核は存在して，それぞれ A, B である．

証明.

(A, id) が核としての普遍性を満たす．実際 $0 \circ \mathrm{id} = 0$ であり，また任意の $K \in \mathscr{A}$ と $\varphi : K \to A$ について $0 \circ \varphi = 0$ であり，u として φ をとればよい．余核も同様．（証明終）

命題 *A.2.8*

$\mathscr{A}$ を零対象 0 を持つ圏とする．$f : A \to B$ がモノ射であるならば $\ker f = 0$ であり，また f がエピ射ならば $\operatorname{Coker} f = 0$ である．

証明.

f がモノ射のときのみ示す．自然な $\iota : \ker f \to A$ について，$0 = f \circ \iota = f \circ 0$ より $\iota = 0$ である．ι はモノ射だから，問題は $0 : A \to B$ がモノ射ならば $A = 0$ であることに帰着するが，これは $0 = 0 \circ \mathrm{id}_A = 0 \circ 0$ より $\mathrm{id}_A = 0$ となるので $A = 0$ となり正しい．（証明終）

このように 0 を持つ圏の性質をいくつか調べてきた．加群の圏は零対象をもつ圏であり，また Hom には自然に Abel 群の構造が入っていた．これを抜き出したものが加法圏である．

定義 *A.2.9*（加法圏）

圏 $\mathscr{A}$ が次の条件 (AC1), (AC2), (AC3) を満たすとき**加法圏 (additive category)** であるという．(AC2) のみを満たすものを**プレ加法圏 (pre-additive category)** または**前加法圏**という．

(AC1) $\mathscr{A}$ は零対象 0 を持つ．

(AC2) 任意の $A, B \in \mathscr{A}$ に対し，$\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(A, B)$ は Abel 群としての自然な構造を持つ．すなわち，任意の $C \in \mathscr{A}$ と，$f_1, f_2 \in \mathrm{Hom}(A, B), g \in \mathrm{Hom}(C, A), h \in \mathrm{Hom}(B, C)$ に対して；

$$(f_1 + f_2) \circ g = f_1 \circ g + f_2 \circ g, h \circ (f_1 + f_2) = h \circ f_1 + h \circ f_2$$

が成り立つ．

(AC3) 任意の $A, B \in \mathscr{A}$ に対し，積 $A \times B$ が存在する．

このとき，次の図式；

$$\begin{tikzcd} A & A \times B \arrow[l, "p_A"'] \arrow[r, "p_B"] & B \\ & A \arrow[ul, "\mathrm{id}"] \arrow[u, dashed, "\iota_A"] \arrow[ur, "0"'] & \end{tikzcd}$$

のようにして $\iota_A : A \to A \times B$ が定まり，同様に $\iota_B : B \to A \times B$ もとれる．これにより $(A \times B, \iota_A, \iota_B)$ は A, B の余積でもあることを示そう．

命題 *A.2.10*

$\mathscr{A}$ を加法圏とする．$A, B \in \mathscr{A}$ に対して，積 $A \times B$ は A, B の余積でもある．

証明.

定義から $p_A \circ \iota_A = \mathrm{id}_A, p_B \circ \iota_B = \mathrm{id}_B$ である．また $p_A \circ \iota_B = p_B \circ \iota_A = 0$ に注意する．このとき $\iota_A \circ p_A + \iota_B \circ p_B = \mathrm{id}_{A \times B}$ である．実際右から ι_A, ι_B を施すと ι_A, ι_B となり，余積の普遍性から id と一致する．また $(A, \iota_A) = \ker p_B, (B, \iota_B) = \ker p_A, (A, p_A) = \mathrm{Coker}\, \iota_B, (B, p_B) = \mathrm{Coker}\, \iota_A$ である（確かめよ）．よって $X \in \mathscr{A}$ と $f_A : A \to X, f_B : B \to X$ が与えられたとき，$f_A \circ p_A + f_B \circ p_B : A \times B \to X$ が余積の普遍性を満たす射となる．（証明終）

(AC3) に余積の存在を課しても，同様の議論で有限余積と有限積が一致することが示せることを注意しておく．

次に，加法圏よりもより狭い圏のクラスで，$\mathbf{Mod}(A)$ の定義をより抜き出したものを考えよう．

定義 *A.2.11*（射の像と余像）

圏 $\mathscr{A}$ を零対象 0 を持つ圏とする．射 $f : A \to B$ が余核を持つとき，さらに $\pi : B \to \mathrm{Coker}\, f$ の核が存在すれば，それを $\mathrm{Im}\, f$ とかいて f の**像 (image)** という．また f が核を持つとき，さらに $\iota : \ker f \to A$ の余核が存在すれば，それを $\mathrm{Coim}\, f$ とかいて f の**余像 (coimage)** という．

命題 *A.2.12*

圏 $\mathscr{A}$ を零対象 0 を持つ圏とする．$f : A \to B$ について核，余核，像，余像がすべて存在するとき，射 $h : \mathrm{Coim}\, f \to \mathrm{Im}\, f$ が一意的に存在する．

証明.

$\mathrm{Im}\, f = \ker \pi$ だから，自然な $\varphi : \mathrm{Im}\, f \to B$ がある．このとき，普遍性から $f = \varphi \circ u$ となるような $u : A \to \mathrm{Im}\, f$ が存在する．また $0 = f \circ \iota = (\varphi \circ u) \circ \iota$ であり，命題 A.2.6 より φ がモノ射なので $u \circ \iota = 0$ である．すると，$\mathrm{Coim}\, f = \mathrm{Coker}\, \iota$ の普遍性から $h : \mathrm{Coim}\, f \to \mathrm{Im}\, f$ が一意的に存在することがわかる．（証明終）

$$\begin{tikzcd}
\ker f \arrow[r, "\iota"] \arrow[dr, "0"'] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d] \arrow[dr, dashed, "u"] & B \arrow[r, "\pi"] & \mathrm{Coker}\, f \\
& \mathrm{Coim}\, f \arrow[r, dashed, "h"] \arrow[d, equal] & \mathrm{Im}\, f \arrow[u, "\varphi"] \arrow[ur, "0"'] \arrow[d, equal] & \\
& \mathrm{Coker}\, \iota & \ker \pi &
\end{tikzcd}$$

Figure.23

$\mathbf{Mod}(A)$ などでは $\mathrm{Coim}\, f = \mathrm{Coker}\, \iota = X/\mathrm{Im}\, \iota = X/\ker f$ であること（準同型定理）を考えると，$\mathrm{Coim}\, f \cong \mathrm{Im}\, f$ を要請したくなるのは自然だろう．この発想を定式化したものが **Abel 圏**である．

定義 *A.2.13*（Abel 圏）

圏 $\mathscr{A}$ が次の条件；

(AC1) $\mathscr{A}$ は零対象 0 を持つ．

(AC2) 任意の $A, B \in \mathscr{A}$ に対し，$\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(A, B)$ は Abel 群としての自然な構造を持つ．すなわち，任意の $C \in \mathscr{A}$ と，$f_1, f_2 \in \mathrm{Hom}(A, B), g \in \mathrm{Hom}(C, A), h \in \mathrm{Hom}(B, C)$ に対して；

$$(f_1 + f_2) \circ g = f_1 \circ g + f_2 \circ g, h \circ (f_1 + f_2) = h \circ f_1 + h \circ f_2$$

が成り立つ．

(AC3) 任意の $A, B \in \mathscr{A}$ に対し，積 $A \times B$ が存在する．

(AC4) 任意の $A, B \in \mathscr{A}$ と任意の $f \in \mathrm{Hom}(A, B)$ について，核 $\ker f$ と余核 $\mathrm{Coker}\, f$ が存在する．

(AC5) 命題 A.2.12 において構成された射によって $\mathrm{Coim}\, f$ と $\mathrm{Im}\, f$ は同型である（準同型定理）．

を満たすとき，$\mathscr{A}$ を **Abel 圏 (Abelian Category)** であるという．

Abel 圏は加法圏なので積と余積が一致していることに注意する．Abel 圏の例としては，Abel 群の圏 **Ab**, A 加群の圏 $\mathbf{Mod}(A)$ などの他に代数幾何学で重要な役割を果たす，スキーム $(X, \mathscr{O}_X)$ 上の $\mathscr{O}_X$ 加群の層の圏などがある．群の圏や環の圏はそうではないことに注意せよ．

Abel 圏を考えるご利益の 1 つとして，モノ射，エピ射の概念が従来の単射，全射と一致することがわかる．

補題 *A.2.14*

$\mathscr{A}$ を Abel 圏とする．$f : A \to B$ がモノ射ならば A は $B \to \mathrm{Coker}\, f$ の核であり，f がエピ射ならば B は $\ker f \to B$ の余核である．

証明.

f がモノ射のときにのみ示す．命題 A.2.8 より $\ker f = 0$ であり，命題 A.2.7 から $\mathrm{Coim}\, f = A$ である．よって $\mathrm{Coim}\, f \cong \mathrm{Im}\, f = \mathrm{Coker}\, \pi$ である．（証明終）

命題 *A.2.15*

$\mathscr{A}$ を Abel 圏とする．$f : A \to B$ がモノ射かつエピ射ならば f は同型射である．

証明.

上の補題より $\mathrm{Coim}\, f = A, \mathrm{Im}\, f = B$ がわかる．よって同型射 $h : A \cong B$ が存在し，$f = \mathrm{id} \circ h \circ \mathrm{id} = h$ なので f も同型射である．（証明終）

Abel 圏においては，射の列の完全性を考えることができる．これが環準同型と線型写像の違いになっていて，加群のなす圏を考える大きなご利益の 1 つである．

定義 *A.2.16*（完全列）

$\mathscr{A}$ を Abel 圏とする．$A, B, C \in \mathscr{A}$ と $f : A \to B, g : B \to C$ について $\mathrm{Im}\, f \cong \ker g$ であるとき；

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

は**完全列 (exact sequence)** であるという．

§ 3　関手

この節では，圏と圏の間の関係を記述する道具として，**関手**について簡単に説明しよう．

定義 *A.3.1*（関手）

$\mathscr{A}, \mathscr{B}$ を圏とする．写像；

$$F : \mathrm{ob}(\mathscr{A}) \to \mathrm{ob}(\mathscr{B}); A \mapsto F(A)$$

と，任意の $A, B \in \mathscr{A}$ ついて，写像；

$$F_{A,B} : \mathrm{Hom}(A, B) \to \mathrm{Hom}(F(A), F(B)); f \mapsto F_{A,B}(f)$$

が存在して，次の条件；

(i) 任意の $A \in \mathscr{A}$ について $F_{A,A}(\mathrm{id}_A) = \mathrm{id}_{F(A)}$ である．

(ii) 任意の $f \in \mathrm{Hom}(A, B), g \in \mathrm{Hom}(B, C)$ に対して $F_{A,C}(g \circ f) = F_{B,C}(g) \circ F_{A,B}(g)$ が成り立つ．

を満たすとき，組 $(F, \{F_{A,B}\}_{A,B \in \mathscr{A}})$ を $\mathscr{A}$ から $\mathscr{B}$ への**関手 (functor)**，特に**共変関手 (covariant functor)** といい $F : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ で表す．特に誤解の恐れのない場合には $F_{A,B}$ も単に F とかく．

$$\mathscr{A}:\quad \begin{tikzcd} & B \arrow[dr, "g"] & \\ A \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "g\circ f"] & & C \end{tikzcd} \qquad \xrightarrow{F} \qquad \mathscr{B}:\quad \begin{tikzcd} & F(B) \arrow[dr, "F(g)"] & \\ F(A) \arrow[ur, "F(f)"] \arrow[rr, "F(g)\circ F(f)"] & & F(C) \end{tikzcd}$$

Figure.24

例えば，A 加群の圏 $\mathbf{Mod}(A)$ において，テンソル積 $-\otimes M$ は $\mathbf{Mod}(A)$ から $\mathbf{Mod}(A)$ への関手になる．Hom 関手とよばれる $\mathrm{Hom}(M,-)$ や局所化 $S^{-1}-$ ももちろん関手で，このように抽象的な「操作」自体を数学的対応として定式化できることが圏論が必要とされる理由の一端である．

では $\mathrm{Hom}(-,M)$ はどうなのかというと，これは $f : M_1 \to M_2$ に対して（関手の定義からは $\mathrm{Hom}(f,M)$ と書くべきところを f^*（命題 1.7.1 のあたりを参照のこと）と書くことによって）$f^* : \mathrm{Hom}(M_2,M) \to \mathrm{Hom}(M_1,M)$ を返すため，これは関手の条件を満たさない．しかし**双対圏**というものを考えることで関手とみなすことができるようになる（簡単に言うと射の向きを逆にした圏である）．

定義 *A.3.2*（双対圏）

圏 $\mathscr{A}$ について，圏 $\mathscr{A}^{\mathrm{op}}$ を；

$$\mathrm{ob}(\mathscr{A}^{\mathrm{op}}) = \mathrm{ob}(\mathscr{A}), \quad \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}^{\mathrm{op}}}(A,B) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(B,A)$$

と定める．これを $\mathscr{A}$ の**双対圏 (dual category)** という．

定義 *A.3.3*（反変関手）

圏 $\mathscr{A},\mathscr{B}$ について，関手 $\mathscr{A}^{\mathrm{op}} \to \mathscr{B}$ を $\mathscr{A}$ から $\mathscr{B}$ への**反変関手 (contravariant functor)** という．

反変関手についても $F : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ と書くことがあるが，その場合は反変であることを必ず注意する．例えば $\mathrm{Hom}(-,M)$ は $\mathbf{Mod}(A)$ から $\mathbf{Mod}(A)$ への反変関手であると表現する．

次に，いわゆる関手の間の射，**自然変換**を説明する．

定義 *A.3.4*（自然変換）

$\mathscr{A},\mathscr{B}$ を圏とする．関手 $F,G : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ に対して，射の族 $\{\theta_A : F(A) \to G(A)\}_{A\in\mathscr{A}}$ が存在して，任意の $\mathscr{A}$ の射 $f : A \to B$ について以下の図式（Figure.25）を可換にするとき，$\theta : F \Rightarrow G$ とかいて，θ を関手 F から G への**自然変換 (natural transformation)** という．

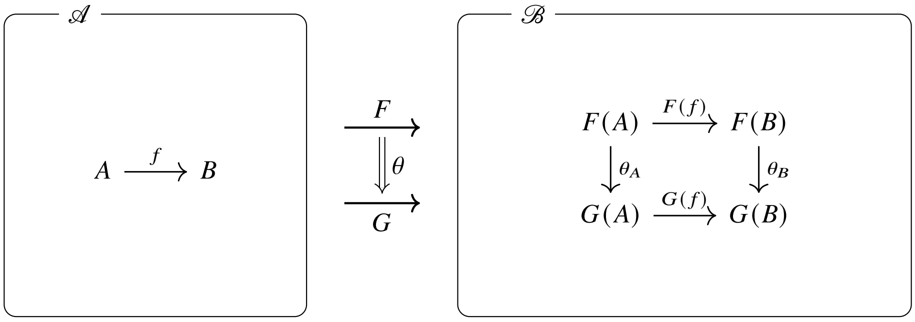

Figure.25　自然変換

関手 F から G への自然変換の全体を $\mathrm{Nat}(F,G) = \{\theta : F \Rightarrow G \mid \theta : 自然変換\}$ で表す．２つの自然変換 $\theta : F \Rightarrow G, \sigma : G \Rightarrow H$ があったとき，各 $A \in \mathscr{A}$ について $\sigma \circ \theta(A) = \sigma(A) \circ \theta(A)$ とすれば，これは自然変換 $F \Rightarrow H$ になることが確かめられる．これを θ, σ の**垂直合成 (vertical composition)** という．またすべての $A \in \mathscr{A}$ に対して $\theta(A)$ が $F(A)$ から $G(A)$ への同型射であるとき，θ を**自然同型 (naturally isomorphism)** という．これらを用いることで圏から圏を作る方法の 1 つである，**関手圏**を考えることができる．

定義 *A.3.5*（関手圏）

$\mathscr{A}, \mathscr{B}$ を圏とする．圏 $\mathrm{Func}(\mathscr{A}, \mathscr{B})$ を；

$$\mathrm{Ob}(\mathrm{Func}(\mathscr{A}, \mathscr{B})) = \{F : \mathscr{A} \to \mathscr{B} \mid F : 関手\}$$

$$\mathrm{Hom}(F, G) = \{\theta : F \Rightarrow G \mid \theta : 自然変換\} = \mathrm{Nat}(F, G)$$

と定める．これを $\mathscr{A}, \mathscr{B}$ の間の**関手圏 (functor category)** という．

この圏において，$\mathrm{Func}(\mathscr{A}, \mathscr{B})$ はもはや **Set** の元でないかもしれないことを注意しておこう（本稿では宇宙公理を課しているので集合ではある）．

次に圏の間の同型を考えてみよう．

定義 *A.3.6*（圏同型）

圏 $\mathscr{A}, \mathscr{B}$ に対して，関手 $F : \mathscr{A} \to \mathscr{B}, G : \mathscr{B} \to \mathscr{A}$ であって $G \circ F = \mathrm{id}_{\mathscr{A}}, F \circ G = \mathrm{id}_{\mathscr{B}}$ となるものが存在するとき，$\mathscr{A}$ と $\mathscr{B}$ は**圏同型 (isomorphism of categories)** であるという．

この条件は圏論においては強すぎる．というのも，例えば加群論においては同型程度の違いを無視（同一視）することが多いが，圏同型の定義では $G \circ F$ が id であることを要請する，すなわち $A \in \mathscr{A}$ について $G \circ F(A) = A$ であることを要求する．実際の関手の計算においてはここまで強い条件を考える必要はなく，つぎの**圏同値**が有用である．

定義 *A.3.7*（圏同値）

圏 $\mathscr{A}, \mathscr{B}$ に対して，関手 $F : \mathscr{A} \to \mathscr{B}, G : \mathscr{B} \to \mathscr{A}$ であって $G \circ F \cong \mathrm{id}_{\mathscr{A}}, F \circ G \cong \mathrm{id}_{\mathscr{B}}$ となるものが存在するとき，$\mathscr{A}$ と $\mathscr{B}$ は**圏同値 (equivalence of categories)** であるという．

この定義における $G \circ F \cong \mathrm{id}$ とは，これらの関手が自然同型という意味である．$\mathscr{A}^{\mathrm{op}}$ と $\mathscr{B}$ が圏同値なとき $\mathscr{A}$ と $\mathscr{B}$ は**反変同値，双対同値 (dual equivalance)** であるという．

Abel 圏の条件において，Hom が Abel 群になっているという条件をいまだ使っていなかった．

定義 *A.3.8*（加法的関手）

$\mathscr{A}, \mathscr{B}$ を Abel 圏とし，関手 $F : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ について；

$$F(f + g) = F(f) + F(g)$$

を満たすとき，F を**加法的 (additive)** 関手という．

加法的関手なら $F(0) = 0$ であることに注意しよう．この節の最後に何度も取り上げてきた**完全関手**について述べる．

定義 *A.3.9*（完全関手）

$\mathscr{A}, \mathscr{B}$ を Abel 圏とする．加法的関手 $F : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ と，$\mathscr{A}$ の対象からなる短完全列；

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

を考える．ここで，$F(A) \to F(B) \to F(C)$ が完全であるとき F を**半完全 (half-exact)** であるといい，$0 \to F(A) \to F(B) \to F(C) \to 0$ が完全であるとき**完全 (exact)** であるという．G が加法的反変関手であるときは，$0 \to G(C) \to G(B) \to G(A) \to 0$ が完全であるとき G は**（反変）完全**であるという．

完全列；

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C$$

について，それぞれ；

$$0 \longrightarrow F(A) \longrightarrow F(B) \longrightarrow F(C)$$

$$0 \longrightarrow G(C) \longrightarrow G(B) \longrightarrow G(A)$$

が完全であるとき，F を**左完全 (left-exact)**，G を**反変左完全 (contravariant left-exact)** であるという．また；

$$A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

に対して；

$$F(A) \longrightarrow F(B) \longrightarrow F(C) \longrightarrow 0$$

$$G(C) \longrightarrow G(B) \longrightarrow G(A) \longrightarrow 0$$

が完全であるとき，F を**右完全 (right-exact)**，G を**反変右完全 (contravariant right-exact)** であるという．

簡単な計算によって，完全関手は核，余核，像を保つことがわかる．

命題 *A.3.10*

$\mathscr{A}, \mathscr{B}$ を Abel 圏とし，$F : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ を完全関手とする．$M, N \in \mathscr{A}, f : M \to N$ に対して，$F(\ker f) = \ker F(f), F(\operatorname{Coker} f) = \operatorname{Coker} F(f), F(\operatorname{Im}) = \operatorname{Im} F(f)$ が成り立つ．

証明.

完全列；

$$0 \longrightarrow \ker f \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \longrightarrow \operatorname{Coker} f \longrightarrow 0$$

に対して F を施して；

$$0 \longrightarrow F(\ker f) \longrightarrow F(M) \xrightarrow{F(f)} F(N) \longrightarrow F(\operatorname{Coker} f) \longrightarrow 0$$

が完全だから $F(\ker f) = \ker F(f), F(\operatorname{Coker} f) = \operatorname{Coker} F(f)$ であり，$\operatorname{Im} f$ は $N \to \operatorname{Coker} f$ の核だから $F(\operatorname{Im}) = \operatorname{Im} F(f)$ も成り立っている．（証明終）

§ 4　射影極限，帰納極限

完備化の文脈で極限を考察する必要があることから，この節では極限についてまとめておく．またこの節の知識は第 4 章に入るまでは必要としない．完備化の文脈で必要となったとき，改めて参照されるとよいと思う．もし代数幾何学も勉強されているなら，層の stalk（茎）を考える際に扱うことになる．

定義 *A.4.1*（前順序，Poset）

集合 X とその上の関係 $\leq$ に対し，反射律と推移律を満たすとき $\leq$ を**前順序 (preorder)** といい，$(X, \leq)$ を**前順序集合 (preordered set)** という．前順序 $\leq$ が更に半対称であるとき，$(X, \leq)$ を**半順序集合 (partially ordered set)**，略して **Poset** という．

これを用いて，一般の圏における**射影系，帰納系**を定義しよう．

定義 *A.4.2*（射影系）

$\mathscr{A}$ を圏とし，I を Poset とする．各 $i \in I$ について $A_i \in \mathscr{A}$ が存在し，また $i \leq j$ となる $i, j \in I$ に対して射 $\varphi_{ji} : A_j \to A_i$ が存在して，次の条件；

(PS1) 任意の $i \in I$ に対し $\varphi_{ii} = \mathrm{id}_{A_i}$ である．
(PS2) $i, j, k \in I$ が $i \leq j \leq k$ を満たすなら，$\varphi_{ki} = \varphi_{ji} \circ \varphi_{kj}$ である．

を満たすとき，組 $(A_i, \varphi_{ji})_{i,j \in I}$ を I 上の**射影系 (projective system)** または**逆系 (inverse system)** といい，誤解のおそれがなければ (A_i) と略記する．

射影系の射の向きを逆にしたもの（双対圏における射影系）を**帰納系**という．

定義 *A.4.3*（帰納系）

$\mathscr{A}$ を圏とし，I を Poset とする．各 $i \in I$ について $A^i \in \mathscr{A}$ が存在し，また $i \leq j$ となる $i, j \in I$ に対して射 $\varphi^{ij} : A^i \to A^j$ が存在して，次の条件；

(IS1) 任意の $i \in I$ に対し $\varphi^{ii} = \mathrm{id}_{A_i}$ である．
(IS2) $i, j, k \in I$ が $i \leq j \leq k$ を満たすなら，$\varphi^{ik} = \varphi^{jk} \circ \varphi^{ij}$ である．

を満たすとき，組 $(A^i, \varphi^{ij})_{i,j \in I}$ を I 上の**帰納系 (inductive system)** または**順系 (direct system)** といい，(A^i) と略す．

$$\begin{tikzcd} A_i & & A_k \arrow[ll, "\varphi_{ki}"'] \arrow[dl, "\varphi_{kj}"] \\ & A_j \arrow[ul, "\varphi_{ji}"] & \end{tikzcd}$$

Figure.26　射影系

$$\begin{tikzcd} A^i \arrow[rr, "\varphi^{ik}"] \arrow[dr, "\varphi^{ij}"'] & & A^k \\ & A^j \arrow[ur, "\varphi^{jk}"'] & \end{tikzcd}$$

Figure.27　帰納系

イメージとして，$\mathscr{A}$ において，$(A_i),(A^i)$ が $\mathbb{N}$ を Poset とする射影系，帰納系をなしているとしよう．このとき；

$$\cdots \longrightarrow A_2 \longrightarrow A_1 \longrightarrow A_0, \quad A^0 \longrightarrow A^1 \longrightarrow A^2 \longrightarrow \cdots$$

のような列を考えることができる．この列において「左にずっと行ったところ」と「右にずっと行ったところ」が射影極限と帰納極限である．それぞれ定義のあとの図もみよ．

定義 *A.4.4*（射影極限）

(A_i) を圏 $\mathscr{A}$ における射影系とする．A 及び射の族 $\varphi_i : A \to A_i$ の組 (A,φ_i) で，次の条件；

(PL1) $i \leq j$ に対し $\varphi_{ji} \circ \varphi_j = \varphi_i$.

(PL2) 任意の集合 B と，任意の射の族 $f_i : B \to A_i$ で $i \leq j$ に対し $\varphi_{ji} \circ f_i = f_j$ となるものに対して，射 $f : B \to A$ で $f_i = \varphi_i \circ f$ となるものが一意的に存在する．

を満たすものを**射影極限 (projective limit)** または**逆極限 (inverse limit)** といい，$A := \varprojlim_{i \in I} A_i$ とかく．

$$\begin{tikzcd} \varprojlim A_i \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & A_j \arrow[r, "\varphi_{ji}"] & A_i \arrow[r] & \cdots \\ B \arrow[u, dashed, "f"] \arrow[urr, "f_j"] \arrow[urrr, bend right, "f_i"'] & & & & \end{tikzcd}$$

Figure.28　射影極限

定義 *A.4.5*（帰納極限）

(A^i) を圏 $\mathscr{A}$ における帰納系とする．$A \in \mathscr{A}$ 及び射の族 $\varphi^i : A \to A^i$ の組 (A,φ^i) で，次の条件；

(IL1) $i \leq j$ に対し $\varphi^j \circ \varphi^{ij} = \varphi^i$.

(IL2) 任意の集合 B と，任意の射の族 $f^i : A^i \to B$ で $i \leq j$ に対し $f^j \circ \varphi^{ij} = f^i$ となるものに対して，射 $f : A \to B$ で $f^i = f \circ \varphi^i$ となるものが一意的に存在する．

を満たすものを**帰納極限 (inductive limit)** または**順極限 (direct limit)** といい，$\varinjlim_{i \in I} A^i$ とかく．

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & A^i \arrow[r, "\varphi^{ij}"] \arrow[drrrr, bend right, "f^i"'] & A^j \arrow[r] \arrow[drrr, "f^j"] & \cdots \arrow[r] & \varinjlim A^i \arrow[d, dashed, "f"] \\ & & & & B \end{tikzcd}$$

Figure.29　帰納極限

普遍性からの標準的な結果によって，射影極限や帰納極限は同型を除いて一意的である．加群の圏 $\mathbf{Mod}(A)$ において必ず極限が存在することを示そう．

定理 *A.4.6*

加群の圏 $\mathbf{Mod}(A)$ において，必ず射影極限が存在する．

証明.

(M_i) を射影系とする．直積 $\prod M_i$ の部分加群；

$$M = \left\{ (x_i) \in \prod M_i \,\middle|\, 任意の\ i \leq j\ について\ x_j = \varphi_{ji}(x_i) \right\}$$

を考える．φ_i を自然な射影 $M \to M_i$ と定めることで，(M, φ_i) は射影極限の普遍性を満たす．（証明終）

定理 *A.4.7*

加群の圏 $\mathbf{Mod}(A)$ において，必ず帰納極限が存在する．

証明.

(M^i) を帰納系とする．直和 $M' = \bigoplus M^i$ を考え，自然な単射を $\iota^i : M^i \to M'$ とする．M' の部分集合；

$$S = \left\{ \iota^j(f^{ij}(x^i)) - \iota^i(x^i) \,\middle|\, i < j, x^i \in M^i \right\}$$

が生成する M' の部分加群を N とする．このとき $M = M'/N$ について自然な準同型 $\pi : M' \to M$ に対して $\varphi^i = \pi \circ \iota^i : M^i \to M$ と定義することで (M, φ^i) は帰納極限の普遍性を満たす．（証明終）

定義 *A.4.8*（射影系，帰納系の射）

I を Poset とし，$(A_i), (B_i)$ を圏 $\mathscr{A}$ における I 上の帰納系とする．このとき $f_i : A_i \to B_i$ なる $\mathscr{A}$ の射の族 (f_i) で，任意の $i \leq j$ について Figure.30 が可換であるものを (A_i) から (B_i) への**射影系の射**という．帰納系の射については Figure.31 が可換であるものをいう．

$$\begin{tikzcd} A_j \arrow[r, "\varphi^{ji}"] \arrow[d, "f_j"] & A_i \arrow[d, "f_i"] \\ B_j \arrow[r, "\psi^{ji}"] & B_i \end{tikzcd}$$

Figure.30　射影系の射

$$\begin{tikzcd} A^i \arrow[r, "\varphi^{ij}"] \arrow[d, "f^i"] & A^j \arrow[d, "f^j"] \\ B^i \arrow[r, "\psi^{ij}"] & B^j \end{tikzcd}$$

Figure.31　帰納系の射

これにより Poset を固定したとき，$\mathscr{A}$ の射影系全体，帰納系全体は圏をなす．Abel 圏 $\mathscr{A}$ において，射影系，帰納系の圏はまた Abel 圏になることを注意しておこう．とはいえ，ここでは $\mathbf{Mod}(A)$ でしか極限が存在することを示していないので，以後 $\mathbf{Mod}(A)$ 上の帰納系，射影系のみを考えることにする．

Abel 圏の定義から射影系，帰納系の完全列を考えることができるが，具体的に次のように定義することもできる（核，余核を一般的に考えた場合の定義と一致することを確かめよ）．

定義 *A.4.9*

$\mathbf{Mod}(A)$ における，Poset I 上の射影系 $(X_i), (Y_i), (Z_i)$ に対し，射 $(f_i) : (X_i) \to (Y_i), (g_i) : (Y_i) \to (Z_i)$ が各 i について系列；

$$0 \longrightarrow X_i \xrightarrow{f_i} Y_i \xrightarrow{g_i} Z_i \longrightarrow 0$$

を完全にするとき；

$$0 \longrightarrow (X_i) \xrightarrow{(f_i)} (Y_i) \xrightarrow{(g_i)} (Z_i) \longrightarrow 0$$

を射影系の完全列であるという．帰納系の完全列についても同様に定める．

加群の射影（帰納）系の列に対して，極限をとることで自然な列が誘導される．すなわち，射影系の射 $(f_i) : (X_i) \to (Y_i)$ について $f : \varprojlim X_i \to \varprojlim Y_i; (x_i) \mapsto (f_i(x_i))$ と定めると，これは線型写像になる．帰納極限についても同様．よって極限をとることは関手になる．特に帰納極限は完全関手となるが，射影極限についてはそうとは限らないことが大切である．

命題 *A.4.10*

$\mathbf{Mod}(A)$ における，Poset I 上の帰納系の圏において，帰納極限は完全関手である．すなわち帰納系 $(X^i, \varphi^{ij}), (Y^i, \psi^{ij}), (Z^i, \omega^{ij})$ について；

$$0 \longrightarrow (X^i) \xrightarrow{(f^i)} (Y^i) \xrightarrow{(g^i)} (Z^i) \longrightarrow 0$$

が完全であるとき；

$$0 \longrightarrow \varinjlim X^i \xrightarrow{f} \varinjlim Y^i \xrightarrow{g} \varinjlim Z^i \longrightarrow 0$$

は完全である．

証明.

Step 1. f の単射性.

任意の $x \in \varinjlim X^i$ をとり，$f(x) = 0$ と仮定する．$x = \varphi^i(x^i)$ となる x^i をとると $f(x) = f^i(x^i) = 0$ であるので，f^i は単射だから $x^i = 0$ である．よって x は 0 で代表されるから $x = 0$ となる．

Step 2. $\mathrm{Im}\, f = \ker g$ であること.

任意の $y \in \ker g$ をとる．$y = \psi^i(y^i)$ となる y^i をとると，$g(y) = (\omega^i \circ g^i)(y^i) = 0$ である．よって帰納極限の構成からある $i \leq j$ がとれて $\omega^{ij}(g^i(y^i)) = 0$ となる．ここで $\omega^{ij} \circ g^i = g^j \circ \psi^{ij}$ であるので $\psi^{ij}(y^i) \in \ker g^j = \mathrm{Im}\, f^j$ である．よってある $x^j \in A^j$ がとれて $f^j(x^j) = \psi^{ij}(y^i)$ となる．ゆえに $f(\varphi^j(x^j)) = (\psi^j \circ \psi^{ij})(y^i) = \psi^i(y^i) = y$ となり $y \in \mathrm{Im}\, f$ である．

$$\begin{tikzcd}
A^j \arrow[r, "f^j"] \arrow[d, "\varphi^j"] & B^j \arrow[d, "\psi^j"] & Y^i \arrow[l, "\psi^{ij}"'] \arrow[dl, "\psi^i"] \\
\varinjlim X^i \arrow[r, "f"] & \varinjlim Y^i &
\end{tikzcd}$$

次に任意の $y \in \mathrm{Im}\, f$ をとる．すなわち，ある $x \in \varinjlim X^i$ がとれて $f(x) = y$ である．ここで $x = \varphi^i(x^i)$

となる $x^i \in X^i$ をとる．すると $\psi^i(f(x^i)) = y$ となる．よって $g(y) = (\omega^i \circ g^i)(f(x^i)) = \omega(0) = 0$ となるので $y \in \ker g$ である．

Step 3. g の全射性．

任意の $z \in \varinjlim Z^i$ をとる．$\omega^i(z^i) = z$ となる $z^i \in Z^i$ をとると，g^i は全射なのである y^i がとれて $g(y^i) = z^i$ である．ここで $y = \psi^i(y^i)$ とおくと $g(y) = (\omega^i \circ g^i)(y^i) = \omega^i(z^i) = z$ となる．

（証明終）

射影極限については一般に全射性は保存されない．

命題 *A.4.11*

Mod(A) における，Poset I 上の射影系の圏において，射影極限は左完全関手である．すなわち，射影系 $(X_i, \varphi_{ij}), (Y_i, \psi_{ij}), (Z_i, \omega_{ij})$ の完全列；

$$0 \longrightarrow (X_i) \xrightarrow{(f_i)} (Y_i) \xrightarrow{(g_i)} (Z_i) \longrightarrow 0$$

に対して；

$$0 \longrightarrow \varprojlim X_i \xrightarrow{f} \varprojlim Y_i \xrightarrow{g} \varprojlim Z_i$$

は完全である．

証明.

帰納極限と同様に構成から左完全であることは明らか（本質的に図式追跡）である．（証明終）

射影極限が完全となるための条件を 1 つ与えよう．

定義 *A.4.12*（全射的な系）

Mod(A) における，Poset I 上の射影系 (X_i, φ_{ij}) について，各 i について $\varphi_{i+1,i}$ が全射であるとき (X_i) を**全射的な系 (surjective system)** であるという．

定理 *A.4.13*

Mod(A) における，Poset I 上の射影系の完全列；

$$0 \longrightarrow (X_i) \xrightarrow{(f_i)} (Y_i) \xrightarrow{(g_i)} (Z_i) \longrightarrow 0$$

において，(X_i) が全射的ならば；

$$0 \longrightarrow \varprojlim X_i \xrightarrow{f} \varprojlim Y_i \xrightarrow{g} \varprojlim Z_i \longrightarrow 0$$

は完全である．

証明.

g の全射性のみ示せばよい．任意の $(z_i) \in \varprojlim Z_i$ をとる．帰納的に (y_i) を構成しよう．すなわち $y_i \in Y_i$ で $\psi_i(y_i) = z_i$ となるものがあるとき，$y_{i+1} \in B_{i+1}$ で $\psi_{i+1}(y_{i+1}) = y_i, g_{i+1}(y_{i+1}) = z_{i+1}$ となるものを作ればよい．

z_{i+1} に対して $g_{i+1}(y'_{i+1}) = z_{i+1}$ となるものをとる．すると $g_i(y_i) = z_i = \omega_{i+1}(z_{i+1}) = g_i(\psi_{i+1}(y'_{i+1}))$ より

$y_i - \psi_{i+1}(y'_{i+1}) \in \operatorname{Im} f_i$ である．よって $y_i - \psi_{i+1}(y'_{i+1}) = f_i(x_i)$ となる $x_i \in X_i$ がとれる．いま $\varphi_{i+1} : A_{i+1} \to X_i$ は全射なので，$\varphi_{i+1}(x_{i+1}) = x_i$ となるものをとると $y_i - \psi_{i+1}(y'_{i+1}) = f_i(\varphi_{i+1}(x_{i+1})) = \psi_{i+1}(f_{i+1}(x_{i+1}))$ となり，$y_i = \psi_{i+1}(y'_{i+1} + f_{i+1}(x_{i+1}))$ である．ここで $y_{i+1} = y'_{i+1} + f_{i+1}(x_{i+1})$ とおけば条件を満たす．（証明終）

極限とよく使われる関手，Hom とテンソル積との関係を示しておこう．

命題 A.4.14

$\mathbf{Mod}(A)$ における，Poset I 上の射影系 (X_i) と帰納系 (X^i) に対して，任意の $M \in \mathbf{Mod}(A)$ について；

(i) $\operatorname{Hom}(M, \varprojlim X_i) \cong \varprojlim \operatorname{Hom}(M, X_i)$ である．
(ii) $\operatorname{Hom}(\varinjlim X^i, M) \cong \varprojlim \operatorname{Hom}(X^i, M)$ である．

が成り立つ．

証明.

射影系 (X_i) に対して，$\operatorname{Hom}(M, X_i)$ は自然に射影系をなす．このとき，$N \in \mathbf{Mod}(A)$ と射の族 $f_i : N \to \operatorname{Hom}(M, X_i)$ で $\operatorname{Hom}(M, X_j) \to \operatorname{Hom}(M, X_i)$ と可換であるものについて，任意の $x \in N$ に対し $f_i(x) : M \to X_i$ が得られ，普遍性から $f(x) : M \to \varprojlim X_i$ が得られる．これにより $f : N \to \operatorname{Hom}(M, \varprojlim X_i)$ が得られ，$\operatorname{Hom}(M, \varprojlim X_i)$ は普遍性を満たすから；

$$\operatorname{Hom}(M, \varprojlim X_i) \cong \varprojlim \operatorname{Hom}(M, X_i)$$

である．帰納系についても同様に示せる．（証明終）

命題 A.4.15

$\mathbf{Mod}(A)$ における，Poset$I$ 上の帰納系 (X^i) に対して，任意の A 加群 M について；

$$\varinjlim (X^i \otimes_A M) \cong (\varinjlim X^i) \otimes N$$

である．

証明.

$\varphi^i : X^i \to \varinjlim X^i$ により $\varphi^i \otimes \mathrm{id} : X^i \otimes M \to (\varinjlim X^i) \otimes M$ が定まり，これは $f : \varinjlim (X^i \otimes M) \to (\varinjlim X^i) \otimes M$ を導く．

また，$y \in M$ を固定すると，$X^i \to X^i \otimes M; x \mapsto x \otimes y$ と自然な $X^i \otimes M \to \varinjlim (X^i \otimes M)$ の合成で $g^i_y : X^i \to \varinjlim (X^i \otimes M)$ が定まり，これは $g_y : \varinjlim X^i \to \varinjlim (X^i \otimes M)$ を与える．ここで $(\varinjlim X^i) \times M \to \varinjlim (X^i \otimes M); (x, y) \mapsto g_y(x)$ は構成から A 双線型で，$g : (\varinjlim X^i) \otimes M \to \varinjlim (X^i \otimes M)$ を導く．これが f の逆を与えていることは容易にわかる．（証明終）

一方で射影極限とテンソル積は必ずしも可換ではない（例 B.3.3）．

最後に，任意の加群は有限生成加群の帰納極限でかけることを注意しておこう．

命題 A.4.16

A を環とし，M を A 加群とする．このとき，有限生成加群からなる帰納系 $\{M^i\}$ があって，$M = \varinjlim M^i$ とかける．

証明.

M の有限生成加群全体に包含関係で順序をいれると，それが包含射によって帰納系をなす．M 自身が帰納極限としての普遍性を満たすことは明らかである．（証明終）

§ 5　表現可能関手と米田の補題

この節以降の話題は，標準的な可換環論のコースではあまり必要とされないが，非可換環の表現論などでは多用され，可換環論でもしばしば有用であるどころか，代数幾何学と関連して三角圏，導来圏などを考える際には必須であるので，ある程度の内容をまとめておくことにする．

まず圏同値という概念の書き換えを与える．

定義 *A.5.1*（忠実，充満）

$F : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ を関手とする．各 $A, B \in \mathscr{A}$ について；

$$F : \mathrm{Hom}(A, B) \to \mathrm{Hom}(F(A), F(B)); f \mapsto F(f)$$

が単射であるとき**忠実 (faithful)**，全射であるとき**充満 (full)** という．忠実かつ充満であるときには**忠実充満 (fully faithful)** であるという．

命題 *A.5.2*

関手 $F : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ が忠実充満であるとする．任意の $A, A' \in \mathscr{A}$ について，$F(A) \cong F(A')$ ならば $A \cong A'$ である．

証明.

同型射 $g : F(A) \to F(A')$ をとると，F が充満なので $f : A \to A'$ が存在して $F(f) = g$ である．同様に $g^{-1} : F(A') \to F(A)$ についても $F(f') = g^{-1}$ となるような $f' : A' \to A$ が存在する．このとき $F(f' \circ f) = \mathrm{id}_{F(A)} = F(\mathrm{id}_A)$ かつ $F(f \circ f') = \mathrm{id}_{F(A')} = F(\mathrm{id}'_A)$ なので，F が忠実だから $f' \circ f = \mathrm{id}_A, f \circ f' = \mathrm{id}'_A$ となって $A \cong A'$ である．（証明終）

この命題は忠実充満な関手が「単射っぽい」ということを主張している．また，この証明から次がわかる．

補題 *A.5.3*

関手 $F : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ が忠実充満であるとする．$\mathscr{A}$ の射 $f : A \to A'$ について，$F(f)$ が同型ならば f も同型である．

この性質を**保守的 (conservative)** であるという．

定義 *A.5.4*（本質的全射）

関手 $F : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ について，任意の $B \in \mathscr{B}$ に対して，ある $A \in \mathscr{A}$ が存在して $F(A) \cong B$ であるとき，F は**本質的全射 (essentially surjective)** であるという．

これは「全射っぽい」性質の定式化で，$F(A) \cong F(A')$ ならば $A \cong A'$ であるという性質は本質的単射と表現できる．これによって圏同値の言い換えを与えることができる．

定理 *A.5.5*

関手 $\mathscr{A} \to \mathscr{B}$ が圏同値であることと，F が忠実充満な本質的全射であることは同値である．

証明.

$(\Longrightarrow)$

$G : \mathscr{B} \to \mathscr{A}$ を $G \circ F \cong \mathrm{id}_{\mathscr{A}}$ となるような関手とし，自然変換 $\theta : G \circ F \Rightarrow \mathrm{id}_{\mathscr{A}}$ をとる．まず任意の $B \in \mathscr{B}$ に対し，$A = G(B)$ とすれば $F \circ G(B) \cong B$ なので F は本質的全射である．

次に F が忠実であることを示す．任意の $A, A' \in \mathscr{A}$ について，$f, f' : A \to A'$ が $F(f) = F(f')$ であるとする．すると $G \circ F(f) = G \circ F(f')$ であり同型 $\theta_A : G \circ F(A) \to A, \theta_{A'} : G \circ F(A') \to A'$ が存在して；

$$\begin{tikzcd} G \circ F(A) \arrow[r, "G \circ F(f)"] \arrow[d, "\theta_A"] & G \circ F(A') \arrow[d, "\theta_{A'}"] \\ A \arrow[r, "f"] & A' \end{tikzcd}$$

が可換なので $f = \theta_{A'} \circ (G \circ F(f)) \circ \theta_A^{-1} = \theta_{A'} \circ (G \circ F(f')) \circ \theta_A^{-1} = f'$ である．

次に F が充満であることを示そう．任意の $A, A' \in \mathscr{A}$ と $g : F(A) \to F(A')$ をとる．$f = \theta_{A'} \circ G(g) \circ \theta_A^{-1}$ とおくと，$G \circ F(f) = G(g)$ で，G も忠実なので $F(f) = g$ である，

$(\Longleftarrow)$

F を充実充満な本質的全射とする．任意の $B \in \mathscr{B}$ について $F(A) \cong B$ となる $A \in \mathscr{A}$ が存在するので，それを 1 つ選んで $G(B)$ とおく．また同型 $\varepsilon_B : F(G(B)) \to B$ を固定しておく．また $\mathscr{B}$ の射 $g : B \to B'$ について，$\varepsilon_{B'}^{-1} \circ g \circ \varepsilon_B : F(G(B)) \to F(G(B'))$ に対して F が忠実充満なので，ある $G(g) : G(B) \to G(B')$ が一意に存在して $F(G(g)) = \varepsilon_{B'}^{-1} \circ g \circ \varepsilon_B$ である．これらにより関手 $G : \mathscr{B} \to \mathscr{A}$ が定まる（選択公理を用いる）．このとき構成から $\varepsilon : F \circ G \Rightarrow \mathrm{id}_{\mathscr{B}}$ は自然同型であるので，自然同型 $\theta : G \circ F \Rightarrow \mathrm{id}_{\mathscr{A}}$ を構成すればよい．

任意の $A \in \mathscr{A}$ をとる．$F(A) \in \mathscr{B}$ に対して，同型射 $\varepsilon_{F(A)} : F \circ G \circ F(A) \to F(A)$ を考えると，F は忠実充満だから $\theta_A : G \circ F(A) \to A$ が一意に存在し，補題 A.5.3 により θ_A は同型である．これによって定まる θ が自然変換であることをみればよいが，これは定義に沿って計算すれば明らかである．

（証明終）

系 *A.5.6*

圏同値は推移的である．すなわち $\mathscr{A} \cong \mathscr{B}, \mathscr{B} \cong \mathscr{C}$ ならば $\mathscr{A} \cong \mathscr{C}$ である．

証明.

容易に忠実，充満，本質的全射は関手の合成で保たれることがわかり，題意が従う．（証明終）

また，この言い換えにより忠実充満な関手 $F : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ があれば，$\mathscr{A}$ は $\mathscr{B}$ の部分圏に同型であることがわかる．これをはっきり定式化すると次のようになる．

系 A.5.7

$F : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ を忠実充満関手とする．$\mathscr{B}$ の部分圏；

$$\mathrm{Ob}\,\mathscr{B} = \{F(A) \in \mathscr{B} \mid A \in \mathscr{A}\}$$

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{B}}(F(A), F(A')) = \{F(f) : F(A) \to F(A') \mid f : A \to A'\}$$

は $\mathscr{A}$ と圏同値で，$\mathrm{Hom}_{\mathscr{B}(F(A),F(A')} = \mathrm{Hom}_{\mathscr{B}}(F(A), F(A'))$ である（このことを $\mathscr{B}$ は $\mathscr{B}$ の**充満部分圏 (full subcategory)** であると表現する）．

次に表現可能関手と米田の補題について説明する．

定義 A.5.8（表現可能関手）

$\mathscr{A}$ を圏とする．（共変）関手 $F : \mathscr{A} \to \mathbf{Set}$ について，ある $A \in \mathscr{A}$ が存在して $F \cong \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(A, -)$ であるとき，F は A により**表現可能 (presentable)** であるという．

F が反変関手のときは，$F \cong \mathrm{Hom}(-, A)$ となる A があるとき表現可能であるという．表現可能関手について，次の非常に強力な定理がある（どれくらい強力かということを端的に表している文章がある．“If the Yoneda lemma were false then the world would look much more complex. Leinster (2014)”）．

定理 A.5.9（米田の補題）

$\mathscr{A}$ を圏とし，$A \in \mathscr{A}$ とする．このとき，任意の反変関手 $F : \mathscr{A} \to \mathbf{Set}$ に対して，次の全単射；

$$\mathrm{Nat}(\mathrm{Hom}(-, A), F) \to F(A); \theta \mapsto \theta_A(\mathrm{id}_A) \tag{$*$}$$

が存在する．

証明.

任意の $B \in \mathscr{A}$ と $f : B \to A$ を考える．このとき，自然変換の定義から；

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}(A, A) & \xrightarrow{-\circ f} & \mathrm{Hom}(B, A) \\ \Big\downarrow \theta_A & & \Big\downarrow \theta_B \\ F(A) & \xrightarrow{F(f)} & F(B) \end{array}$$

が可換である．すると，id_A について $\theta_B(f) = F(f)(\theta_A(\mathrm{id}_A))$ が成り立つから，θ は $\theta_A(\mathrm{id}_A)$ により一意に定まる．これは $(*)$ が単射であることを意味する．

次に $(*)$ が全射であることを示そう．任意の $x \in F(A)$ をとる．このとき，任意の $B \in \mathscr{A}$ に対して；

$$\theta_B : \mathrm{Hom}(B, A) \to F(B); f \mapsto F(f)(x)$$

と定めると，θ が自然変換になる．実際，任意の $B, C \in \mathscr{A}$ と $g : C \to B$ に対して；

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}(B, A) & \xrightarrow{-\circ g} & \mathrm{Hom}(C, A) \\ \Big\downarrow \theta_B & & \Big\downarrow \theta_C \\ F(B) & \xrightarrow{F(g)} & F(C) \end{array}$$

が可換になることが簡単に確かめられる．すると $\theta_A(\mathrm{id}_A) = x$ であるので，全射が示された．　（証明終）

全く同様に，Hom$(A, -)$ についての米田の補題も示せる．

定理 *A.5.10*

$\mathscr{A}$ を圏とし，$A \in \mathscr{A}$ とする．このとき，任意の関手 $F : \mathscr{A} \to \mathbf{Set}$ に対して，次の全単射；

$$\mathrm{Nat}(\mathrm{Hom}(A, -), F) \to F(A); \theta \mapsto \theta_A(\mathrm{id}_A) \tag{$*$}$$

が存在する．

これに関連して，対象から Hom 関手を作る操作は関手的である．

定義 *A.5.11*（米田埋め込み）

$\mathscr{A}$ を圏とする．関手 $y : \mathscr{A} \to \mathrm{Func}(\mathscr{A}^{\mathrm{op}}, \mathbf{Set})$ を；

$$A \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(-, A)$$

$$f : A \to B \mapsto y(f) : \mathrm{Hom}(-, A) \Rightarrow \mathrm{Hom}(-, B)$$

で定める．ただし，自然変換 $y(f)$ は $C \in \mathscr{A}$ に対して；

$$y(f)_C = f \circ - : \mathrm{Hom}(C, A) \to \mathrm{Hom}(C, B)$$

で与えられるものである．これを**米田埋め込み (Yoneda embedding)** という．A に対し Hom$(A, -)$ を対応させる関手も同様に考えられ，これも米田埋め込みという．

命題 *A.5.12*

米田埋め込みは忠実充満である．

証明.

任意の $A, B \in \mathscr{A}$ をとる．米田埋め込み $y(B)$ について米田の補題を適用すると全単射

$$\mathrm{Nat}(\mathrm{Hom}(-, A), \mathrm{Hom}(-, B)) \to \mathrm{Hom}(A, B); \theta \mapsto \theta_A(\mathrm{id}_A)$$

があり，その逆写像は $f \in \mathrm{Hom}(A, B)$ に対して，自然変換 $\theta : \mathrm{Hom}(-, A) \Rightarrow \mathrm{Hom}(-, B)$ を $C \in \mathscr{A}$ について $\theta_C = f \circ -$ とすることで定まっている．これを ψ とおく．すると y の定義から $f : A \to B$ と任意の $C \in \mathscr{A}$ について $y(f)_C = \psi(f)_C$ であり，自然変換として $y(f) = \psi(f)$ である．ここで ψ は全単射であるから y が忠実充満であることがわかった．（証明終）

系 *A.5.13*

$\mathscr{A}$ を圏とし，$A, B \in \mathscr{A}$ とする．$y(A) \cong y(B)$，すなわち任意の $C \in \mathscr{A}$ について $\mathrm{Hom}(C, A) \cong \mathrm{Hom}(C, B)$ ならば $A \cong B$ である．

証明.

y は忠実充満なので，命題 A.5.2 により従う．（証明終）

§6　随伴関手

定義 *A.6.1*（随伴）

$F : \mathscr{A} \to \mathscr{B}, G : \mathscr{B} \to \mathscr{A}$ を関手とする．関手；

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{B}}(F(-), -) : \mathscr{A}^{\mathrm{op}} \times \mathscr{B} \to \mathbf{Set}, \quad \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(-, G(-)) : \mathscr{A}^{\mathrm{op}} \times \mathscr{B} \to \mathbf{Set}$$

の間の同型な自然変換；

$$\theta : \mathrm{Hom}_{\mathscr{B}}(F(-), -) \Rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(-, G(-))$$

が存在するとき，G を F の**右随伴 (right adjunction)**，F を G の**左随伴 (left adjunction)** といい $F \vdash G$ で表す．

定義より，任意の $\mathscr{A}$ の射 $f : A \to A'$ と $\mathscr{B}$ の射 $g : B \to B'$ に対して；

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}(F(A'), B) & \xrightarrow{-\circ F(f)} & \mathrm{Hom}(F(A), B) \\ \downarrow{\scriptstyle \theta_{A',B}} & & \downarrow{\scriptstyle \theta_{A,B}} \\ \mathrm{Hom}(A', G(B)) & \xrightarrow{-\circ f} & \mathrm{Hom}(A, G(B)) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}(F(A), B) & \xrightarrow{g\circ -} & \mathrm{Hom}(F(A), B') \\ \downarrow{\scriptstyle \theta_{A,B}} & & \downarrow{\scriptstyle \theta_{A,B'}} \\ \mathrm{Hom}(A, G(B)) & \xrightarrow{G(g)\circ -} & \mathrm{Hom}(A, G(B')) \end{array}$$

が可換である．次のように随伴の定義を言い換えることもできる．

命題 *A.6.2*

$F : \mathscr{A} \to \mathscr{B}, G : \mathscr{B} \to \mathscr{A}$ を関手とする．$F \vdash G$ であることと，自然変換 $\varepsilon : \mathrm{id}_{\mathscr{A}} \Rightarrow GF, \eta : FG \Rightarrow \mathrm{id}_{\mathscr{B}}$ が存在して，$(\eta \circ F) \circ (F \circ \varepsilon) = \mathrm{id}_F$ かつ $(G \circ \eta) \circ (\varepsilon \circ G) = \mathrm{id}_G$ となることと同値である．

証明.

$(\Longrightarrow)$

任意の $A \in \mathscr{A}$ に対して，同型 $\theta_{A,F(A)} : \mathrm{Hom}(F(A), F(A)) \to \mathrm{Hom}(A, GF(A))$ による $\mathrm{id}_{F(A)}$ の像を $\varepsilon_A : A \to GF(A)$ とおく．まず ε が自然変換であることを示す．すなわち $f : A \to A'$ に対して；

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & A' \\ \downarrow{\scriptstyle \varepsilon_A} & & \downarrow{\scriptstyle \varepsilon_{A'}} \\ GF(A) & \xrightarrow{GF(f)} & GF(A') \end{array}$$

が可換であることを示そう．随伴の定義から，２つの可換図式；

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}(F(A'), F(A')) & \xrightarrow{-\circ F(f)} & \mathrm{Hom}(F(A), F(A')] \\ \downarrow{\scriptstyle \theta_{A',F(A')}} & & \downarrow{\scriptstyle \theta_{A,F(A')}} \\ \mathrm{Hom}(A', GF(A')) & \xrightarrow{-\circ f} & \mathrm{Hom}(A, GF(A')) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}(F(A), F(A)) & \xrightarrow{F(f)\circ -} & \mathrm{Hom}(F(A), F(A')) \\ \downarrow{\scriptstyle \theta_{A,F(A)}} & & \downarrow{\scriptstyle \theta_{A,F(A')}} \\ \mathrm{Hom}(A, GF(A)) & \xrightarrow{GF(f)\circ -} & \mathrm{Hom}(A, GF(A')) \end{array}$$

が得られ，この図式における $\mathrm{id}_{F(A')}, \mathrm{id}_{F(A)}$ の像を計算すると $\varepsilon_{A'} \circ f = \theta_{A,F(A')}(F(f)) = GF(f) \circ \varepsilon_A$ がわかる．同様に同型 $\theta_{G(B),B} : \mathrm{Hom}(FG(B), B) \to \mathrm{Hom}(G(B), G(B))$ による $\mathrm{id}_{G(B)}$ の引き戻しを η_B とおくと，これも自然変換である．

ここで，任意の $\varphi : F(A) \to B$ について；

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Hom}(F(A), F(A)) & \xrightarrow{\varphi\circ -} & \mathrm{Hom}(F(A), B) \\
\downarrow \theta_{A,F(A)} & & \downarrow \theta_{A,B} \\
\mathrm{Hom}(A, GF(A)) & \xrightarrow{G(\varphi)\circ -} & \mathrm{Hom}(A, G(B))
\end{array}$$

から $\theta_{A,B}(\varphi) = G(\varphi) \circ \varepsilon_A$ であることがわかる．同様に，任意の $\psi : A \to G(B)$ に対して；

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Hom}(FG(B), B) & \xrightarrow{-\circ F(\psi)} & \mathrm{Hom}(F(A), B) \\
\downarrow \theta_{G(B),B} & & \downarrow \theta_{A,B} \\
\mathrm{Hom}(G(B), G(B)) & \xrightarrow{-\circ\psi} & \mathrm{Hom}(A, G(B))
\end{array}$$

から $\theta^{-1}_{A,B}(\psi) = \eta_B \circ F(\psi)$ である．ゆえに $\eta_{F(A)} \circ F(\varepsilon_A) = \theta^{-1}_{A,F(A)}(\varepsilon_A) = \mathrm{id}_{F(A)}, G(\eta_B) \circ \varepsilon_{G(B)} = \mathrm{id}_{G(B)}$ となる．

($\Longleftarrow$)

$\theta_{A,B} : \mathrm{Hom}(F(A), B) \to \mathrm{Hom}(A, G(B)); \varphi \mapsto G(\varphi) \circ \varepsilon_A$ と定めると，($\Longrightarrow$) の証明を逆にたどることによりこれは自然変換となり，$\mathrm{Hom}(A, G(B)) \to \mathrm{Hom}(F(A), B); \psi \mapsto \eta_B \circ F(\psi)$ が逆の自然変換を与えることもわかる．よって $F \vdash G$ である．

（証明終）

反変関手の随伴については，反変関手 $F : \mathscr{A} \to \mathscr{B}, G : \mathscr{B} \to \mathscr{A}$ を共変関手 $F : \mathscr{A} \to \mathscr{B}^{\mathrm{op}}, G : \mathscr{A}^{\mathrm{op}} \to \mathscr{B}$ と見たときの随伴で定義する．すなわち自然同値；

$$\theta_{A,B} : \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(A, G(B)) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{B}^{\mathrm{op}}}(F(A), B) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{B}}(B, F(A))$$

が存在するとき $F \vdash G$ とかく．もちろんこれは自然変換 $\varepsilon : \mathrm{id}_{\mathscr{A}} \Rightarrow GF, \eta : \mathrm{id}_{\mathscr{B}} \Rightarrow FG$ で，$(F \circ \varepsilon) \circ (\eta \circ F) = \mathrm{id}_F, (G \circ \eta) \circ (\varepsilon \circ G) = \mathrm{id}_G$ を満たすものが存在するということと同値である．

随伴の例を少しだけ見てみよう．$M \in \mathbf{Mod}(A)$ に対して $M \otimes -, \mathrm{Hom}(M, -)$ について，$N, P \in \mathbf{Mod}(A)$ に対して；

$$\mathrm{Hom}(M \otimes N, P) \cong \mathrm{Hom}(N, \mathrm{Hom}(M, P))$$

となり $(M \otimes -) \vdash \mathrm{Hom}(M, -)$ である（補題 1.7.7）．反変関手の随伴については，例えばスキームの圏 **Sch** と，環の圏 **Ring** について；

$$\Gamma(-) : \mathbf{Sch} \to \mathbf{Ring}; X \mapsto \Gamma(X, \mathscr{O}_X)$$

$$\mathrm{Spec} - : \mathbf{Ring} \to \mathbf{Sch}; A \mapsto \mathrm{Spec}\, A$$

により $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Sch}}(X, \mathrm{Spec}\, A) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ring}}(A, \Gamma(X, \mathscr{O}_X))$ なので $\Gamma(-) \vdash \mathrm{Spec} -$ である．

付録B　様々な例

—Appendix B, Various Example

Counter Example of Commutative Algebra を目指したい．

§ 1　ED, PID, UFD

例 *B.1.1*

体 K について，$K[X, X^{-1}]$ は PID である．

証明.

I を $K[X, X^{-1}]$ のイデアルとする．これは Noether なので $I = (f_1, \ldots, f_r)$ とできる．$f_1, \ldots, f_r$ に現れる負冪の項は高々有限個だから，ある $n \geq 0$ が存在して $X^n f_i \in K[X]$ とできる．$(X^n f_1, \ldots, X^n f_r)$ を $K[X]$ のイデアルとみると，これは PID なので $(X^n f_1, \ldots, X^n f_r) = (g)$ となる $g \in K[X]$ が存在し，$K[X, X^{-1}]$ のイデアルとしても $(f_1, \ldots, f_r) = (g)$ となる．（証明終）

例 *B.1.2*（UFD だが PID でない環）

体 K について，$K[X, Y]$ は UFD だが PID ではない．

系 0.4.8 をみよ．

例 *B.1.3*（PID だが ED でない環）

$\mathbb{Z}[(1 + \sqrt{-19})/2]$ は PID だが ED ではない．

PID だが ED でない環はこのように 2 次体の整数環についてよく知られているが，次の定理が知られている（詳しい証明は Goel, Patil and Verma (2018) を見よ）．

定理 *B.1.4*

$b, c \in \mathbb{R}$ を $b > 0, c > 0$ とする．$\mathbb{R}[X, Y]/(X^2 + bY^2 + c)$ は PID であるが ED ではない．

証明.

Goel et al. (2018)，定理 2.19.（証明終）

例 *B.1.5*

k を体とする．$A = k[x, y, y/x, y/x^2, \cdots]$ は UFD ではないが，素元で生成される積閉集合 S が存在して A_S は UFD である．また，これは Noether でなく単項イデアル定理が成り立たない例にもなっている．

証明.

y を既約分解することはできない．また $(y/x, y/x^2, \cdots)$ は素イデアルである．いま $(x) = (x, y/x, y/x^2, \cdots)$ も素イデアルなので x は素元であるが，$A_x = k[x, y]$ なのでこれは UFD である．（証明終）

UFD は既約分解が一意的にできる整域であるが，既約分解の存在のみを要請する定義として**原子整域**というものがある．

定義 *B.1.6*（原子整域）

A を整域とする．任意の $a \neq 0 \in A$ が単元と既約元の積にかけるとき，A を**原子整域 (atomic domain)** という．

Grams (1974) は整域において ACCP と既約分解可能性が同値でないこと，すなわち ACCP の成り立たない原子整域が存在することを示した．その例を紹介しよう．

定義 *B.1.7*（モノイド環）

A を環とする．可換なモノイド S（加法的に書く）に対して；

$$A[X;S] = \left\{ \sum_{s \in S} a_s X^s \,\middle|\, a_s \in A \right\}$$

は $a_s X^s + b_s X^s = (a_s + b_s) X^s, X^s X^t = X^{s+t}, X^0 = 1$ によって環をなす．これを**モノイド環 (monoid ring)** という．

例 *B.1.8*（原子整域だが ACCP を満たさない例）

p_i を奇素数のなす列（$p_0 = 3, p_1 = 5, \ldots$）とし，S を $\{1/3, 1/(2 \cdot 5), \ldots, 1/(2^i p_i), \ldots\}$ が（$\mathbb{Q}_+$ の部分モノイドとして）生成するモノイドとする．体 k に対して $k[X;S]$ の部分集合 $N = \{f \in K[X;S] \mid f$ は定数項を持つ$\}$ は積閉で，$A = K[X;S]_N$ は ACCP を満たさない原子整域となる．

証明.

$$(X) \subset (X^{1/2}) \subset \cdots \subset (X^{1/2^i}) \subset \cdots$$

により A は ACCP を満たさない．原子整域であることを示そう．まず，任意の $s \in S$ は；

$$s = \frac{n}{2^u} + \frac{n_0}{3} + \cdots + \frac{n_k}{2^k p_k} \quad (u, n, n_i \in \mathbb{N}, 0 \leq n_i < p_i, n_k \neq 0)$$

と一意に書けることを示す．s がこの表示を持つことは明らかなので；

$$\frac{n}{2^u} + \frac{n_0}{3} + \cdots + \frac{n_k}{2^k p_k} = \frac{m}{2^w} + \frac{m_0}{3} + \cdots + \frac{n_l}{2^l p_l} \quad (0 \leq m_i < p_i, k \leq l)$$

となっているとすると，各 $0 \leq i \leq l$ に対して；

$$\frac{n_i - m_i}{2^i p_i} = \frac{m}{2^w} - \frac{n}{2^w} + \sum_{i \neq j} \frac{m_i - n_j}{2^j p_j}$$

において p_i 進付値を考えると右辺は正なので，$n_i - m_i$ は p_i を割り切らねばならない．いま $-p_i < n_i - m_i < p_i$ だから $n_i = m_i$ となり，表示が一意であることがわかった．各 $s \in S$ について $n/2^w$ の部分を $\psi(s)$ とおくことにする．次に $X^{\frac{1}{2^k p_k}}$ が既約元であることを示そう．$X^{\frac{1}{2^k p_k}} = (f_1/g_1)(f_2/g_2)$ とかけているとする．r を $g_1 g_2$ の定数項とし；

$$f_1 = \sum a_i X^{s_i}, f_2 = \sum b_j X^{t_j} \quad (s_0 < \cdots < s_n, t_0 < \cdots < t_m, a_0, b_0 \neq 0)$$

とおくと，$rX^{\frac{1}{2^k p_k}} = a_0 b_0 X^{s_0+t_0}$ より $s_0 + t_0 = 1/(2^k p_k)$ であり，表示の一意性から $s_0 = 0$ または $t_0 = 0$ すなわち f_1, f_2 のどちらかは単元である．ゆえに $X^{\frac{1}{2^k p_k}}$ は既約である．

さて，任意の $0 \neq f/g \in A$ をとる．$f = \sum a_i X^{s_i}$ とかいたとき，$d = \min\{\psi(s_i)\}$ とおく．このとき $f = X^d h$ とかける．いま $d = n/2^k$ としたとき $X^d = X^{\frac{1}{2^k p_k} n p_k}$ より X^d は既約元の積にかけているので，f において $\min\{\psi(s_i)\} = 0$ と仮定してよい．s_u を $\psi(s_i) = 0$ なるものの中で最小のものとし；

$$s_u = \frac{n_0}{3} + \cdots + \frac{n_l}{2^l p_l}, k = n_0 + \cdots + n_l$$

とおけば，f の分解に現れる非単元の個数が高々 k 個であることを示せばよい（これが正しいならば，分解を続けていけば途中で既約になるか $k = 1$ になるかのどちらかで，それも既約だから）．

どれも単元でないような f の分解 $f = f_1/g_1 \cdots f_{k+1}/g_{k+1}$ があるとする．g_i の定数項を r_i とすると $g_1 \cdots g_{k+1} f = f_1 \cdots f_{k+1}$ において，左辺は s_u 次の項 $a_u r_1 \cdots r_{k+1} X^{s_u}$ を持つので，右辺もそう．$f_i = \sum b_{ij} X^{t_{ij}}$ とおくと，右辺における s_u 次の項は $t_{1j_1} + \cdots + t_{k+1 j_{k+1}} = s_u$ なる組についての $b_{1j_1} \cdots b_{k+1 j_{k+1}} X^{s_u}$ の和である．ここで $0 < t_{ij}$ かつ $\psi(t_{ij_i}) = 0$ に注意し；

$$t_{ij_i} = \frac{m_{i0}}{3} + \cdots + \frac{m_{il}}{2^l p_l}$$

とおくと；

$$\begin{pmatrix} m_{10} & m_{20} & \cdots & m_{k+10} \\ m_{11} & m_{21} & \cdots & m_{k+11} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{1l} & m_{2l} & \cdots & m_{k+1l} \end{pmatrix}$$

は最低 $k+1$ 個の零でない成分を持つ．一方で i 行の和は n_{i-1} なので，各行は最大で n_{i-1} 個の零でない成分しかもてないから，全体では k 個の零でない成分しか持たず，これは矛盾．よって f の分解に現れる非単元は高々 k 個であることがわかった．（証明終）

§2　素イデアルについて

例 *B.2.1*（鎖状だが $\mathrm{ht}\, P + \mathrm{coht}\, P = \dim A$ が成りたたない例）

$(A, \mathfrak{m})$ を DVR（すなわち 1 次元 Noether 局所整閉整域）とする．$B = A[X]$ とすればこれは鎖状だが，$\mathrm{ht}\, P + \mathrm{coht}\, P = \dim A$ を満たさない $P \in \mathrm{Spec}\, B$ が存在する．

証明.

$\mathfrak{m}$ は単項なので，$\mathfrak{m} = (a)$ とおこう．系 5.5.9 より $\dim B = 2$ である（$(0) \subsetneq (a) \subsetneq (a, X)$ により $2 \leq \dim B$ と考えても構わない）．$P = (aX - 1)$ とおくと，これは B の極大イデアルであるが，高さ 1 である．よって；

$$\mathrm{ht}\, P + \mathrm{coht}\, P = 1 + 0 = 1 \neq 2 = \dim B$$

となり，成り立たない．

また，1 次元の Noether 整域は CM 環である．CM 環は強鎖状（系 5.8.12）であるから，B は鎖状である．（証明終）

この例では Noether 環なので単項イデアルの高さは高々 1 である（Krull の標高定理）が，Noether 性という仮定を外せば高さ 2 以上の単項イデアルが存在する．

例 *B.2.2*（無限次元の Noether 整域の例（永田, 1974））

k を体とし，$A = k[x_1, \dots, x_n, \dots]$ を可算無限個の変数をもつ多項式環とする．自然数の増加列 $\{n_i\}$ を，$n_i - n_{i-1} < n_{i+1} - n_i$ が成り立つように取る．$P_i = (x_{n_i}, \dots, x_{n_{i+1}-1})$ とおく．これらは素イデアルであるから，$\bigcup P_i$ の A における補集合を S とすると，これは積閉である．$S^{-1}A$ は無限次元の Noether 整域となる．

証明.

実際，$S^{-1}A$ の素イデアルは $\bigcup P_i$ に含まれる A の素イデアルであることを考えると $\dim S^{-1}A = \infty$ であることは明らか．Noether であることは，次の補題から従う．

補題 *B.2.3*

環 A について，以下の 2 つ；

(i) $\mathfrak{m}$ が A の極大イデアルならば，$A_{\mathfrak{m}}$ は Noether である．

(ii) 任意の $0 \neq x \in A$ について，x を含む A の極大イデアルは有限個しかない．

を満たすならば，A は Noether である．

補題の証明.

I を A のイデアルとする．(ii) より，I を含む極大イデアルは有限個しかない．それらを $\mathfrak{m}_1, \dots, \mathfrak{m}_s$ としよう．任意の $x_0 \in I$ をとる．x を含む極大イデアルは有限個であるから，それを $\mathfrak{m}_1, \dots, \mathfrak{m}_s, \mathfrak{m}_{s+1}, \dots, \mathfrak{m}_{s+r}$ とする．各 $1 \leq j \leq r$ について，$x_j \in I$ で $x_j \notin \mathfrak{m}_j$ であるものがとれる．また，(i) より各 $1 \leq i \leq s$ について $A_{\mathfrak{m}_i}$ は Noether なので，$IA_{\mathfrak{m}_i}$ を生成する I の元は有限個である．それらを $x_{s+1}, \dots, x_{s+t}$ としよう．$I' = (x_0, \dots, x_t)$ とおく．明らかに $I' \subset I$ であるので，A 自然な A 加群の準同型 $\iota : I' \hookrightarrow I$ が存在する．このとき命題 1.6.13 を用いて ι が全射であることを示す．A の極大イデアル $\mathfrak{m}$ について，$\mathfrak{m}$ が $\mathfrak{m}_1, \dots, \mathfrak{m}_s$ のどれとも異なるとき，$I, I' \not\subset \mathfrak{m}$ であるから，$IA_{\mathfrak{m}} = I'A_{\mathfrak{m}} = A_{\mathfrak{m}}$ である．また $\mathfrak{m}_i (1 \leq i \leq s)$ については，I' は $IA_{\mathfrak{m}_i}$ の生成元をすべて含むので，$I'A_{\mathfrak{m}_i} = IA_{\mathfrak{m}_i}$ である．よって，任意の極大イデアルに ι を誘導したものは全単射であるから，命題 1.6.13 によって ι は全射，すなわち $I = I'$ である．よって I は有限生成．（証明終）

この補題が適用できることを見るために，$S^{-1}A$ の極大イデアルは $S^{-1}P_i$ のみであることを示そう．$P \in \operatorname{Spec} A$ が $P \subset \bigcup P_i$ であるとすると，$P \subset P_i$ となる i があることをいえば十分．任意の $a \in P$ に対して，a を含む P_j たちは有限個なので，それをすべてとってきて $(a) \subset \bigcup_{j=1}^{n} P_j$ とする．任意の $x \in P$ に対し，x を含む P_j たちも有限個だから，ある n' に対して $(a, x) \subset \bigcup_{j=1}^{n'} P_j$ とできる．Prime avoidance より $(a, x) \subset P_j$ となる $j \leq n'$ がとれるが，$a \in P_j$ より $j \leq n$ でなければならず，すると $(a, x) \subset \bigcup_{j=1}^{n} P_j$ である．よって，x は任意で，n のとりかたは x によらないので $P \subset \bigcup_{j=1}^{n} P_i$ である．再び Prime avoidance を使って $P \subset P_i$ となる i がとれる．

また，$S^{-1}A_{S^{-1}P_i} = A_{P_i}$ であるので，$S^{-1}A$ は補題を満たす．（証明終）

例 *B.2.4*（CM でない環の例）

k を体とする．$A = k[X,Y]/(X^2, XY)$ は Cohen–Macaulay ではない．$P = (X,Y)$ で局所化するとこのとき $\dim A_P = 1$ だが $\operatorname{depth} A_P = 0$ である．

例 *B.2.5*（Gorenstein でない Artin 環（CM 環）の例）

k を体とする．$A = k[X,Y]/(X^2, XY, Y^2)$ は Artin だが Gorenstein ではない．

証明.

$P \in \operatorname{Spec} k[X,Y]$ について $(X^2, XY, Y^2) \subset P$ であると仮定する．このとき $(X+Y)^2 \in P$ であるので $X+Y \in P$ である．$k[X,Y]$ は UFD で，かつ $X+Y$ は既約なので $(X+Y) \in \operatorname{Spec} k[X,Y]$ である．いま $X^2 \notin (X+Y)$ であるので $(X+Y) \subsetneq P$ であり，これは $\operatorname{ht} P = 2$ を意味する．よって $\dim A = 0$ である．また $\mathfrak{m} = (X,Y)$ で A を局所化すると 0 は $\mathfrak{m}$ 準素イデアルだが既約ではないので $A_{\mathfrak{m}}$ は Gorenstein ではない．（証明終）

例 *B.2.6*（定理 9.4.9 で整域を外した場合についての反例）

$(A, \mathfrak{m}, k)$ を完備 Noether 局所環で，A は混標数で整域でないとする．このとき，任意の部分環 $A' \subset A$ が；

(i) $(A', \mathfrak{n})$ は完備正則局所環である．
(ii) A は有限生成 A' 加群である．
(iii) $A'/\mathfrak{n} \cong k$ である．

のすべてを満たすことはありえないような A が存在する．

証明.

まず $\operatorname{Char} A = p^n$ のときは，部分環が整域になりえない．$\operatorname{Char} A = 0$ のときは，$p > 0$ について $A = \mathbb{Z}_P[[X]]/(pX)$ とすると，条件を満たす $A' \subset A$ が存在したとすればそれは DVR で，$A'/\mathfrak{n} = k$ だから A'/pA' は Artin で，A が有限生成 A' 加群だから A/pA も Artin である．しかし $A/pA \cong \mathbb{F}_p[[X]]$ なので矛盾する．（証明終）

§3　その他

例 *B.3.1*

$n > 1$ とすると，$\mathbb{Z}$ 加群として $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ は射影被覆を持たない．

証明.

まず $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ は射影的でない．実際，$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ は 0 に限るので，次のような図式；

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \arrow[d, dashed] \arrow[dr, "\mathrm{id}"] & \\ \mathbb{Z} \arrow[r] & \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \end{tikzcd}$$

を可換にする $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ は存在しない．さて $\varepsilon : P \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ が射影被覆であるとすると，自然な全射 $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ が射影加群からの全射だから命題 7.3.2 により全射 $\mathbb{Z} \to P$ が存在する．すると $P \cong \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ となる m が存在するが，P が射影的なので $P \cong \mathbb{Z}$ でなければならない．さて $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ が射影被覆でないことを言えばよいが，明らかに核 $n\mathbb{Z}$ は余剰部分加群ではない．（証明終）

例 B.3.2

$\mathbb{Z}$ 加群 $M = 2(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}), N = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ について，自然な包含 $\iota : M \to N$ は単射であるが，$\bigwedge \varphi$ は単射ではない．

証明.

$(0,2) \wedge (2,0) \mapsto 4(0,1) \wedge (1,0) = 0$ となってしまう．（証明終）

例 B.3.3

$\mathbb{Z}$ の極大イデアル (p) による完備化を考えると，$(\varprojlim \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ と $\varprojlim(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q})$ は同型でない．

証明.

p 進数体について詳細には立ち入らない（数論の教科書を見てください）．$\mathbb{Q}_p$ を p 進有理数体とすると，これは p 進整数環 $\mathbb{Z}_p = \varinjlim \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ の商体であるが，同型 $\mathbb{Q}_p \cong \mathbb{Z}_p \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ が存在する．一方で $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = 0$ である．（証明終）

例 B.3.4

$A = \prod_{i>1} Z/2^i Z$ において $a = (2, 2, \cdots)$ とおく．このとき；

(i) a は弱副正則でない．
(ii) $a, 1$ は弱副正則列である．
(iii) $a, 1$ は副正則列でない．
(iv) $1, a$ は副正則列である．

証明.

(i) a が弱副正則であることと，副正則であることが同値であることに注意する．任意の $n > 0$ と $m \geq n$ について，$\operatorname{Ann} a^m \not\subset \operatorname{Ann} a^{m-n}$ である．実際 1 を m 個並べて $r = (1, \ldots, 1, 0, \ldots)$ とおけば $ra^m = 0$ だが $ra^{m-n} \neq 0$ である．
(ii) 直接証明もできるが，(iv) から簡単に従う．
(iii) a が副正則でないので成り立たない．
(iv) 明らかである．

（証明終）

例 B.3.5

加法圏においてはエピかつモノは同型とは限らない．

証明.

有限生成自由 Abel 群のなす圏を考えて，２倍写像 $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ を考えよ．（証明終）

索引

英字

あ

か

さ

た

な

は

ま

や

ら

参考文献

[1] Y. Akizuki (1935) "Einige Bemerkungen über primäre Integritätsbereiche mit teilerkettensatz," *Proc. Phys.–Math. Soc. Japan*, Vol. 17, pp. 327–336, DOI: 10.11429/ppmsj1919.17.0_327.

[2] D. D. Anderson and M. Winders (2009) "Idealization of a Module," *J. Commut. Algebra*, Vol. 1, No. 1, pp. 3–56, 03, DOI: 10.1216/JCA-2009-1-1-3.

[3] D. D. Anderson, D. F. Anderson, and M. Zafrullah (1990) "Factorization in integral domains," *J. of Pure and Applied Algebra*, Vol. 69, No. 1, pp. 1–19, DOI: 10.1016/0022-4049(90)90074-R.

[4] D. F. Anderson (2006) "Robert Gilmer's work on semigroup rings," *Multiplicative Ideal Theory in Commutative Algebra: A Tribute to the Work of Robert Gilmer*, pp. 21–37, DOI: 10.1007/978-0-387-36717-0_2.

[5] R. Ando (2021) "A note on weakly proregular sequences and local cohomology,"arXiv: 2105.07652.

[6] Y. André (2018a) "La conjecture du facteur direct," *Publications mathématiques de l'IHÉS*, Vol. 127, No. 1, pp. 71–93, DOI: 10.1007/s10240-017-0097-9.

[7] Y. André (2018b) "Le lemme d' Abhyankar perfectoide," *Publications mathématiques de l'IHÉS*, Vol. 127, No. 1, pp. 1–70, DOI: 10.1007/s10240-017-0096-x.

[8] M. F. Atiyah and I. G. MacDonald (1969) *Introduction To Commutative Algebra*: Addison–Wesley, （新妻弘訳，『可換代数入門』，共立出版，2006 年）.

[9] R. Baer (1940) "Abelian groups that are direct summands of every containing abelian group," *Bull. Amer. Math. Soc.*, Vol. 46, No. 10, pp. 800–806, 10, DOI: 10.1090/S0002-9904-1940-07306-9.

[10] H. Bass (1960) "Finitistic Dimension and a Homological Generalization of Semi-Primary Rings," *Trans. Amer. Math. Soc.*, Vol. 95, No. 3, pp. 466–488.

[11] J. E. Björk (1973) "Noetherian and artinian chain conditions of associative rings," *Archiv der Mathematik*, Vol. 24, No. 1, pp. 366–378, DOI: 10.1007/BF01228225.

[12] A. Blass (1979) "Injectivity, Projectivity, and the Axiom of Choice," *Trans. Amer. Math. Soc.*, Vol. 255, pp. 31–59, DOI: 10.2307/1998165.

[13] N. Bourbaki (1970–1975) *Algébre, Chap. I–X.*: Hermann.

[14] W. Bruns and J. Herzog (1997) *Cohen–Macaulay Rings (Revised ed.)*: Cambridge Univ. Press.

[15] S. U. Chase (1960) "Direct products of module," *Trans. Amer. Math. Soc.*, Vol. 97, No. 3, pp. 457–473, DOI: 10.2307/1993382.

[16] I. S. Cohen (1946) "On the Structure and Ideal Theory of Complete Local Rings," *Trans. Amer. Math. Soc.*, Vol. 59, No. 1, pp. 54–106, DOI: 10.2307/1990313.

[17] I. S. Cohen and A. Seidenberg (1946) "Prime ideals and integral dependence," *Bull. Amer. Math. Soc.*, Vol. 52, No. 4, pp. 252 – 261, DOI: bams/1183507841.

[18] D. Eisenbad (1995) *Commutative Algebra with a View Toward Algebraic Geometry*: Springer.

[19] E. Formanek (1973) "Faithful Noetherian Modules," *Proc. Amer. Math. Soc.*, Vol. 41, pp. 381–383, DOI: 10.2307/2039099.

[20] S. Glaz (1994) "Homological dimensions of localizations of polynomial rings," in *Zero-dimensional Commutative Rings, John H. Barrett Memorial Lectures and Conference on Commutative Ring Theory (David F. Anderson and David E. Dobbs, eds)* , Vol. 171 of Lecture notes in pure and applied mathematics,

pp. 209–222: New York : M. Dekker.

[21] K. Goel, D. P. Patil, and J. Verma (2018) "Nullstellensätze and Applications,"arXiv: 1809.02818.

[22] A. Grams (1974) "Atomic rings and the ascending chain condition for principal ideals," *Proc. Camb. Phil. Soc.*, Vol. 75, No. 3, pp. 321–329, DOI: 10.1017/S0305004100048532.

[23] J. P. C. Greenlees and J. P. May (1992) "Derived functors of I-adic completion and local homology," *Journal of Algebra*, Vol. 149, No. 2, pp. 438–453, DOI: 10.1016/0021-8693(92)90026-I.

[24] A. Grothendieck (1957) "Sur quelques points d'algèbre homologique, I," *Tohoku Math. J.*, Vol. 9, No. 2, pp. 119–221, DOI: 10.2748/tmj/1178244839.

[25] A. Grothendieck (1966) *Local cohomology, notes by R. Hartshorne*: Springer.

[26] T. D. Hamilton and T. Marley (2007) "Non-Noetherian Cohen–Macaulay rings," *Journal of Algebra*, Vol. 307, No. 1, pp. 343–360, DOI: 10.1016/j.jalgebra.2006.08.003.

[27] R. Hartshorne (1977) *Algebraic Geometry*: Springer, （高橋宣熊・松下大介訳，『代数幾何学 1,2,3』，シュプリンガー・フェアラーク東京，2004 年）.

[28] M. Hazewinkel, N. Gubareni, and V. Kirichenko (2005) *Algebras, Rings and Modules: Volume 1*: Kluwer Academic, DOI: 10.1007/1-4020-2691-9.

[29] R. C. Heitmann (1993) "A counterexample to the rigidity conjecture for rings," *Bull. Amer. Math. Soc.*, Vol. 29, pp. 94–97, DOI: 10.1090/S0273-0979-1993-00410-5，arXiv: math/9307225.

[30] R.C. Heitmann (2002) "The Direct Summand Conjecture in Dimension Three," *Ann. Math.*, Vol. 156, No. 2, pp. 695–712, DOI: 10.2307/3597204.

[31] M. Hochster (1975) *Topics in the homological theory of modules over commutative ring*, Vol. 24 of CBMS Regional Conference Series in Mathematics: Amer. Math. Soc. DOI: 10.1090/CBMS/024.

[32] M. Hochster (1983) "Canonical elements in local cohomology modules and the direct summand conjecture," *Journal of Algebra*, Vol. 84, No. 2, pp. 503–553, DOI: 10.1016/0021-8693(83)90092-3.

[33] M. Hochster (2002) "Big Cohen–Macaulay algebras in dimension three via Heitmann's theorem," *Journal of Algebra*, Vol. 254, No. 2, pp. 395–408, DOI: 10.1016/S0021-8693(02)00086-8.

[34] M. Hochster and C. Huneke (1990) "Tight Closure, Invariant Theory, and the Briancon-Skoda Theorem," *J. Amer. Math. Soc.*, Vol. 3, No. 1, pp. 31–116, DOI: 10.2307/1990984.

[35] M. Hochster and C. Huneke (1991) "Absolute integral closures are big Cohen-Macaulay algebras in characteristic *P*," *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, Vol. 24, No. 1, pp. 137 – 143, DOI: bams/1183556250.

[36] W. Hodges (1974) "Six Impossible Rings," *Journal of Algebra*, Vol. 31, pp. 218–244, DOI: 10.1016/0021-8693(74)90065-9.

[37] W. Hodges (1976) "Läuchli's algebraic closure of Q," *Proc. Camb. Phil. Soc.*, Vol. 79, No. 2, pp. 289–297, DOI: 10.1017/S0305004100052282.

[38] C. Hopkins (1939) "Rings With Minimal Condition for Left Ideals," *Ann. Math.*, Vol. 40, No. 3, pp. 712–730, DOI: 10.2307/1968951.

[39] C. Huneke (2007) "Lectures on local cohomology (with an appendix by Amelia Taylor)," *Contemp. Math.*, Vol. 436, pp. 51–100.

[40] Y. Kim and A. Walker (2020) "A note on Non-Noetherian Cohen–Macaulay rings," *Proc. Amer. Math. Soc.*, Vol. 148, No. 3, pp. 1031–1042, DOI: 10.1090/proc/14836.

[41] H. Krause (2015) "Krull–Schmidt categories and projective covers," *Expo. Math.*, Vol. 33, No. 4, pp.

535–549, DOI: 10.1016/j.exmath.2015.10.001.

[42] W. Krull (1938) “Dimensionstheorie in Stellenringen,” *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, Vol. 179, pp. 204–226, DOI: 10.1515/crll.1938.179.204.

[43] K. Kunen (2009) *The Foundations of Mathematics*: College Publications,（藤田博司訳，『キューネン数学基礎論講義』，日本評論社，2016 年）.

[44] S. Lang (2002) *ALgebra (Revised Third Edition)*: Springer.

[45] T. Leinster (2014) *Basic Category Theory*: Cambridge Univ. Press，arXiv: 1612.09375,（土岡俊介・斎藤恭司訳，『ベーシック圏論　普遍性からの速習コース』，丸善出版，2017 年）.

[46] S. Lichtenbaum (1966) “On the vanishing of Tor in regular local rings,” *Illinois J. Math.*, Vol. 10, No. 2, pp. 220–226, 06, DOI: 10.1215/ijm/1256055103.

[47] F. S. Macaulay (1916) *The algebraic theory of modular systems*: Cambridge Univ. Press.

[48] S. MacLane (1998) *Categories for the Working Mathematician (2nd ed.)*: Springer,（三好博之・高木理訳，『圏論の基礎』，シュプリンガー・フェアラーク東京，2012 年）.

[49] E. Matlis (1958) “Injective modules over Noetherian rings.,” *Pacific J. Math.*, Vol. 8, No. 3, pp. 511–528, DOI: 10.2140/pjm.1958.8.511.

[50] H. Matsumura (1970) *Commutative Algebra (Second ed.)*: Benjamin.

[51] H. Matsumura (1986) *Commutative Ring Theory*，M. Reid 訳: Cambridge Univ. Press.

[52] L. M. Miller (2008) “A Theory of Non-Noetherian Gorenstein Rings,” Ph.D. dissertation, University of Nebraska at Lincoln.

[53] B. J. Müller (1970) “On semi-perfect rings,” *Illinois J. Math.*, Vol. 14, No. 3, pp. 464 – 467, DOI: 10.1215/ijm/1256053082.

[54] M. Nagata (1950) “On the Structure of Complete Local Rings,” *Nagoya Math. J.*, Vol. 1, pp. 63–70, DOI: 10.1017/S0027763000022844.

[55] M. Nagata (1956) “On the Chain Problem of Prime Ideals,” *Nagoya Math. J.*, Vol. 10, pp. 51–64, DOI: 10.1017/S0027763000000076.

[56] M. Nagata (1957) “A remark on the unique factorization theorem,” *J. Math. Soc. Japan*, Vol. 9, No. 1, pp. 143–145, DOI: 10.2969/jmsj/00910143.

[57] L. J. Ratliff (1972) “Catenary Rings and the Altitude Formula,” *Amer. J. Math.*, Vol. 94, No. 2, pp. 458–466, DOI: 10.2307/2374632.

[58] P. Samuel (1964) “Lectures on unique factorization domains,” *Tata Institute of Fundamental Research Lectures on Math.*, Vol. 30.

[59] P. Schenzel (2003) “Proregular sequences, local cohomology, and completion,” *Math. Scand.*, Vol. 92, No. 2, pp. 161–180, Jun. DOI: 10.7146/math.scand.a-14399.

[60] J. P. Serre (1956) “Sur la dimension homologique des anneaux et des modules Noethériens,” in *Proceedings of the International Symposium on Algebraic Number Theory : Tokyo & Nikko, September 1955* , pp. 201–215: Organizing Committee.

[61] O. Zariski and P. Samuel (1975) *Commutative algebra, Vols. I and II.*: Springer.

[62] 飯高茂 (1977)『岩波講座 基礎数学 代数学 iv 可換環論』，岩波書店.

[63] 加藤五郎 (2003)『コホモロジーのこころ』，岩波書店.

[64] 河田敬義 (1976)『岩波講座 基礎数学 代数学 iii ホモロジー代数』，岩波書店.

[65] 後藤四郎・渡辺敬一 (2011)『可換環論』，日本評論社.

[66] 志甫淳 (2016)『層とホモロジー代数』，共立出版.

[67] 下元数馬 (2016)「Almost Ring Theory の観点からのホモロジカル予想」,『第６１回代数学シンポジウム報告集』，279–289 頁.

[68] 高木俊輔・高橋亮 (2010)「可換環論の発展—ホモロジカル予想を中心として—」,『第５４回代数学シンポジウム報告集』，31–46 頁.

[69] 高木俊輔 (2020)「可換環論における問題設定」,『数理科学（2020 年 10 月号）』，14–20 頁，サイエンス社.

[70] 中島匠一 (2006)『代数方程式とガロア理論』，共立出版.

[71] 永田雅宜 (1967)『可換体論』，裳華房.

[72] 永田雅宜 (1974)『可換環論』，紀伊國屋書店.

[73] 成田正雄 (1970)『イデアル論入門（復刊）』，共立出版.

[74] 成田正雄 (1971)「Unique factorization domains」,『都立大学数学教室セミナー報告』.

[75] 藤崎源二郎 (1991)『体とガロア理論』，岩波書店.

[76] 松村英之 (1980)『可換環論（復刊）』，共立出版.