EXERCÍCIOS

Empregue a fórmula da convolução para determinar a transformada de Laplace inversa de cada uma das seguintes funções.

1. $\dfrac{\mathcal{L}[f]}{s^2+1}$ 2. $\dfrac{e^{-3s}\mathcal{L}[f]}{s^3}$ 3. $\dfrac{1}{s^2(s+1)}$

4. $\dfrac{s}{(s^2+1)^2}$ 5. $\dfrac{3s^2}{(s^2+1)^2}$ 6. $\dfrac{1}{(s-a)(s-b)}$, $a \neq b$

Calcule cada uma das seguintes convoluções.

7. $e^{at} * e^{bt}$ 8. $t * \cos at$

9. $\operatorname{sen} at * \cos bt$ 10. $t * e^{at}$

11. $f(t-1) * e^{-t}g(t+1)$ 12. $f(-t) * (\operatorname{sen} t)g(t^2)$

13. Prove diretamente que $f * g = g * f$, isto é,

$$\int_0^t f(t-\xi)g(\xi)\,d\xi = \int_0^t g(t-\xi)f(\xi)\,d\xi.$$

Sugestão: Faça a substituição $u = t - \xi$.]

14. Prove que $f * (g + h) = f * g + f * h$.

15. Prove que $f * (g * h) = (f * g) * h$.

16. Calcule $1 * 1$ e $1 * 1 * 1$.

17. Deduza uma fórmula para $1 * 1 * 1 * \ldots * 1$ (n fatôres).

18. Prove que

$$\int_0^t \operatorname{sen} a(t - u_1) \int_0^{u_1} \operatorname{sen} a(u_1 - u_2) \int_0^{u_2} \operatorname{sen} a(u_2 - u_3) \cdots$$

$$\int_0^{u_{n-1}} \operatorname{sen} a(u_{n-1} - u_n) \operatorname{sen} a u_n \, du_n \cdots du_1$$

$$= \frac{a^n}{2^n n!} \underbrace{\int_0^t t \int_0^t t \int_0^t t \cdots \int_0^t}_{n \text{ vezes}} t \operatorname{sen} at \, dt \cdots dt.$$

[*Sugestão*: Compare $\mathcal{L}^{-1}[1/(s^2 + a^2)^{n+1}]$ na forma como foi calculada pela fórmula do Exercício 49, Seç. 5-5, e como foi calculada pelo uso repetido da convolução integral.]

19. Suponhamos que $f(t)$ seja de ordem exponencial e que $\lim_{t0\to+t} f(t)/t$ exista. Admitindo que a ordem de integração possa ser invertida no cálculo, prove que

$$\mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right] = \int_s^\infty \mathcal{L}[f] \, ds.$$

Aplique o resultado do Exercício 19 para calcular a transformada de Laplace de cada uma das seguintes funções.

20. $t \left(= \dfrac{t^2}{t}, \text{ com } \mathcal{L}[t^2] = \dfrac{2}{s^3} \right)$ **21.** $\dfrac{\operatorname{sen} at}{t}$

22. $\dfrac{e^t - 1}{t}$ **23.** $\dfrac{1 - \cos 3t}{t^2}$

24. (a) Pode-se demonstrar que, sempre que existe $\int_0^\infty [f(t)/t] \, dt$, a fórmula do Exercício 19 continua válida quando s é igual a zero. Mostre que obtemos, então,

$$\int_0^\infty \frac{f(t)}{t} \, dt = \int_0^\infty \mathcal{L}[f] \, ds.$$

(b) Empregue esta fórmula para provar que

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} t}{t} \, dt = \frac{\pi}{2}.$$

A *função gama* $\Gamma(x)$ e a *função beta* $\mathrm{B}(x, y)$ são introduzidas nos Exercícios 25-33.

25. A função gama é definida pela equação

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1}\, dt. \tag{5-39}$$

(Pode-se demonstrar que esta integral converge para todo $x > 0$.) Use a integração por partes, para mostrar que

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \text{ para todo } x > 0.$$

26. Aplique o resultado do Exercício 25 e o valor de $\Gamma(1)$ para demonstrar que

$$\Gamma(n+1) = n!, \quad n = 0, 1, 2, \ldots .$$

(Em virtude desta propriedade, a função gama também se denomina *função fatorial generalizada.*)

27. Derivando (5-39), mostre que $\Gamma''(x)$ é não-negativa em $(0, \infty)$.

Onde está, aproximadamente, o mínimo de $\Gamma(x)$? Esboce um gráfico aproximado de $\Gamma(x)$.

28. Seja n um número real arbitrário maior que -1. Prove que

$$\mathcal{L}[t^n] = \frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}}.$$

[*Sugestão*: Faça $t = u/s$ na integral que define $\mathcal{L}[t^n]$.]

29. Prove que $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$. [*Sugestão*: Mostre que

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = 2\int_0^\infty e^{-u^2}\, du,$$

e, daí, que

$$\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 = 4\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(u^2+v^2)}\, du\, dv.$$

Calcule agora esta integral, mudando para coordenadas polares.]

30. Calcule o valor de $\Gamma(\frac{5}{2})$. (veja Exercício 29).

31. Calcule cada uma das seguintes integrais.

(a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\, dx$ (b) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-\sqrt{x}}\, dx$