ホモロジー代数いらずの Cohen–Macaulay 環の基礎

安藤 遼哉（@Reincarnatorsan）

2021 年 5 月 14 日

はじめに

本ノートはホモロジー代数を仮定することなく（導入することもなく！），Cohen–Macaulay 環のごく基礎的なことを習得することを目的としたノートです．Atiyah and MacDonald [1] 程度の知識を仮定します．具体的には Krull の交叉定理や標高定理や素因子の簡単な知識（Noether 環における準素分解の存在を知っていれば十分です）などです．筆者の web サイト（https://ryoya9826.github.io/notes/）で公開している勉強ノート [5] にすべて Self-containd な証明をつけていますので，そちらを参照してくださっても構いませんが，正確さは保証しません（誤りを見つけた際にはご連絡いただけると幸いです）．前提知識についても 2021 年 5 月現在のノートの命題番号を述べて引用していますが，将来のアップデートにより番号が変わる可能性があります．いまのところの本ノートの目標は CM 環が強鎖状であることの証明（系 3.16）と，強鎖状だが次元公式の成り立たない環の例の紹介（例 3.17）です．**このノートでは特に断らない限り環といえば単位元を持つ可換環のこととします．**

最終更新日 . . . 2021 年 5 月 14 日

記号

$\mathbb{N}$	自然数全体の集合（本書では 0 を含む）．
$\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$	それぞれ整数，有理数，実数，複素数全体の集合．
$\mathbb{Z}_+, \mathbb{Q}_+, \mathbb{R}_+$	それぞれ正の整数，正有理数，正の実数全体の集合．
$\#A$	集合 A に対し，A の元の個数またはその濃度．
$\subset$	本書では包含は等号の可能性を除外しない．真の包含関係は $\subsetneq$ を用いる．
$f : A \twoheadrightarrow B$	f が全射であること．
$f : A \hookrightarrow B$	f が単射であること．

目次

§1　正則環

Noether 局所環 $(A, \mathfrak{m}, k)$ について，$\dim A = d$ とすると A の $\mathfrak{m}$ 準素イデアルは少なくとも d 個の元で生成される．ちょうど d 個の元で $\mathfrak{m}$ 準素イデアルが生成されているときを考えよう．

定義 *1.1*（巴系）

$(A, \mathfrak{m})$ を d 次元 Noether 局所環とする．$a_1, \ldots, a_d \in \mathfrak{m}$ が $\mathfrak{m}$ 準素イデアルを生成するとき $a_1, \ldots, a_d$ を A の**巴系 (system of parameters)** という．

中山の補題より $\mathfrak{m}$ を生成するのに必要な元の個数は $\dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ である．$\dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ を A の**埋め込み次元 (embedding dimension)** といい $\mathrm{em.dim}\, A$ と表す．次元定理より $\dim A \leq \mathrm{em.dim}\, A$ が成り立つ．等号が成り立つとき，すなわち $\mathfrak{m}$ が $\dim A$ 個の元で生成されているとき A を**正則局所環**という．

定義 *1.2*（正則局所環）

$(A, \mathfrak{m})$ を Noether 局所環とする．$d = \dim A$ 個の元 $a_1, \ldots, a_d \in A$ が存在して $\mathfrak{m} = (a_1, \ldots, a_d)$ となっているとき A を**正則局所環 (regular local ring)** といい，$\mathfrak{m}$ を生成する巴系を**正則巴系**という．

環 A のすべての素イデアル P による局所化 A_P が正則局所環であるような A を，**正則環 (regular ring)** という．注意するべきこととして，この節の最後にも述べているが，正則局所環は正則であることの（ホモロジー代数を用いないという意味での）**初等的な証明は知られていない．** この定義は後に述べる Cohen–Macaulay 環のアナロジーであり，自明なものではまったくない．局所環に関する定義を一般化する際には，素イデアルによる局所化により局所環に帰着させよう，という気持ちを汲んでいただければ十分だろう．

命題 *1.3*

d 次元 Noether 局所環 $(A, \mathfrak{m})$ について，$a_1, \ldots, a_i$ が A の正則巴系の 1 部分であることと $A/(a_1, \ldots, a_i)$ が $d - i$ 次の正則局所環であることは同値である．

証明.

$(\Longrightarrow)$

$A/(a_1, \ldots, a_i)$ の極大イデアルは $a_{i+1}, \ldots, a_d$ の像で生成されており，Krull の標高定理（とその逆）より $\dim A/(a_1, \ldots, a_i) = d - i$ である．よって正則局所環となる．

$(\Longleftarrow)$

$A/(a_1, \ldots, a_i)$ の極大イデアル $\mathfrak{m}' = \mathfrak{m}/(a_1, \ldots, a_i)$ が $b_1, \ldots, b_{d-i}$ の像で生成されているとすると $\mathfrak{m} = (a_1, \ldots, a_i,\ b_1, \ldots, b_{d-i})$ である．

（証明終）

1 次元の正則局所環と DVR は同じ概念である（[5] 定理 5.2.4）．これの一般化として，正則局所環が整閉整域であることを証明しよう．環 A のイデアル I による随伴次数環 $G_I(A) = \bigoplus I^n/I^{n+1}$ を思い出そう．これは次数付き環であり，A が Noether ならば $I = (a_1, \ldots, a_r)$ としたとき $G(A) \cong A/I[a_1 + I^2, \ldots, a_r + I^2]$ であった．これを正則局所環 $(A, \mathfrak{m})$ に適用すると，$\dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = \dim A$ であるから，$d = \dim A$ とおくと $G(A) \cong k[X_1, \ldots, X_d]$ となり，随伴次数環は整閉整域である．一般に Noether 環 A のイデアルによる随伴次数環が整閉整域なら A も整閉整域だが，ここではもう少し広い環についてそのことを示そう．

A を環とし，I を A のイデアルとする．$a \notin \bigcap_{n\geq 0} I^n$ ならば $a \in I^n, a \notin I^{n+1}$ であるような n が一意に定まる．すなわち $a + I^n$ が a の $G(A)$ における像である．これを $G(a)$ と書いて，a の**先頭形式 (initial form)** という．また $a \in \bigcap_{n\geq 0} I^n$ ならば $v(a) = \infty$，そうでないなら $a \in I^n, a \notin I^{n+1}$ となる n を用いて $v(a) = n$ と定めることで関数 $v : A \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ が定まる．これを A の I に関する**順序関数 (order function)** という．このとき，任意の $a, b \in A$ について；

$$v(a + b) = \min\{v(a), v(b)\}$$

$$v(ab) \geq v(a) + v(b)$$

が成り立つことがわかる．この v が付値のような挙動を見せることと，$G(A)$ が整域であることは同値である．

補題 *1.4*

A を環とし．I を A のイデアルとする．$v(ab) > v(a) + v(b)$ であることと，$G(a)G(b) = 0$ であることは同値である．

証明.

$v(ab) > v(a) + v(b)$ とする．$G(a) = a + I^{v(a)}, G(b) = b + I^{v(b)}$ であるから $G(a)G(b) = ab + I^{v(a)+v(b)+1}$ である．$v(ab) > v(a) + v(b)$ より $ab \in I^{v(a)+v(b)+1}$ だから $G(a)G(b) = 0$ であることがわかる．逆も同様． （証明終）

系 *1.5*

A を環とし．I を A のイデアルとする．$G(A)$ が整域ならば $A' = A/\bigcap I^n$ も整域で，A' 上で $v(ab) = v(a) + v(b)$ が成り立つ．

Krull の交叉定理（[5] 系 4.4.8）により，A が Noether で $I \subset \operatorname{rad} A$ なら $\bigcap I^n = 0$ であるので，$A' = A$ とできる．

定理 *1.6*

A を環とし，I を $\bigcap I^n = 0$ であるような A のイデアルとする．このとき，随伴次数環 $G(A)$ が完整閉ならば A もそうである．

証明.

系 1.5 により A は整域である．さて，$x = a/b \in \operatorname{Frac} A$ をとったとき，ある $r \in A$ があって，任意の $n > 0$ について $r(a/b)^n \in A$ であると仮定する．$x = a/b \in A$ すなわち $a \in Ab$ を示せばよい．いま $\bigcap I^n = 0$ だから，任意の $n \geq 0$ について $a \in Ab + I^n$ を示せばよい．

$n = 0$ のときは $I^n = A$ より自明．$n - 1$ まで正しい，すなわち $a = a'b + c^{n-1}$ とおけるとする．すると $x = a' + c^{n-1}/b$ で，任意の $m > 0$ に対して $rx^m \in A$ だから，$r(x - a')^m = r(c^{n-1}/b)^m \in A$ である．よって $rc^{n+m-1} = c_m b^m$ とおくと $G(r)G(c^{n-1})^m = G(c_m)G(b)^m$ なので，$G(A)$ が完整閉だから $G(c^{n-1})/G(b) \in G(A)$ である．すなわち，ある $a'' \in A$ によって $G(c^{n-1}) = G(a'')G(b)$ とかける．$c^{n-1} \in I^{n-1}$ なのでこれは $c^{n-1} - a''b \in I^n$ を意味する．よって $c^{n-1} = a''b + (c')^n$ とおけば，$a = a'b + c^{n-1} = (a' + a'')b + (c')^n$ とかけて，$a \in Ab + I^n$ である． （証明終）

系 *1.7*

正則局所環は整閉整域である．

整閉整域は正規環である ([5] 命題 3.2.11）から，次の結果が従う．

系 *1.8*

A を正則局所環とすると，任意の $P \in \operatorname{Spec} A$ に対して A_P も整閉整域である．特に高さ 1 の素イデアル P による局所化 A_P は正則局所環である．

系の拡張として一見するとイデアル論の範疇で示せそうに見えるが，ホモロジー代数を要する結果として；

定理 *1.9*（Serre の定理，[5] 定理 7.4.10）

A を正則局所環とすると，任意の $P \in \operatorname{Spec} A$ について A_P も正則局所環である．すなわち正則局所環は正則環である．

がある．この定理の証明は Serre による方法と本質的に異なる証明法が知られていない．これとは異なる正則局所環についての結果で，ホモロジー代数（Serre の定理）を要するものに；

定理 *1.10*（Auslander–Buchsbaum の定理，[5] 定理 10.1.12）

正則局所環は UFD である．

がある．このように 1960 年代は，Serre, Auslander, Bachsbaum, Bass, Grothendieck らによってホモロジー代数的な手法が本格的に導入され，可換環論は大規模に発展することとなった．しかし本ノートではホモロジー代数は扱わない！この強硬な仮定の下で，現在の可換環論の中心をなす Cohen–Macaulay 性についてホモロジー代数を用いない範囲で紹介しよう．

§ 2　Cohen–Macaulay 加群

重要な局所環のクラスの 1 つに **Cohen–Macaulay 環**（略して CM **環**と書くことも多い）がある．Cohen–Macaulay 環は現在の可換環論で中心的な存在の 1 つである．まず**正則列**と**深さ**を導入する．

定義 *2.1*（正則列）

A 加群 M について，$a \in A$ が M に非零因子として作用する，すなわち任意の $0 \neq x \in M$ について $ax \neq 0$ であるとき，a は M **正則 (regular)** であるという．また $a_1, \ldots, a_r \in A$ について任意の $1 \leq i \leq r$ について a_i が $M/(a_1, \ldots, a_{i-1})M$ 正則であるとき，$a_1, \ldots, a_r$ を M **正則列 (regular sequence)** という．

A が Noether 環のとき $a \in A$ が M 正則であること $a \notin \bigcup_{P \in \operatorname{Ass} M} P$ であることは同値だということを注意しておく．

例 2.2

体 k 上の多項式 $A = k[X_1, X_2, X_3]$ において $f_1 = X_1(X_2 - 1), f_2 = X_2, f_3 = X_3(X_1 - 1)$ とすると f_1, f_2, f_3 は A 正則列をなす．ところが X_1 は $A/(f_1)$ において 0 ではないが，f_3X_3 は 0 であるので f_1, f_3, f_2 は A 正則列ではない．

このように正則列は順序を考慮する必要があるが，局所環においては極大イデアルの元について順序によら

ないことが知られている．ここではより強く $\mathrm{rad}\,A$ の元においてそのことを示そう．

補題 2.3

Noether 環 A 上の加群 M において $a \in A$ が M 正則でありかつ $\bigcap a^n M = 0$ であるものとする．このとき M の素因子 $P \in \mathrm{Ass}\,M$ について $P + aA \subset Q$ となる $Q \in \mathrm{Ass}(M/aM)$ が存在する．

この補題の仮定は Krull の交叉定理（[5] 系 4.4.8）より $a \in \mathrm{rad}\,A$ のとき満たされる．

証明.

$x \in M$ によって $P = \mathrm{Ann}(x)$ とかける．ここで $\bigcap a^n M = 0$ より，ある $k \geq 0$ が存在して $x \in a^k M$ かつ $x \notin a^{k+1}M$ である．このとき $y \in M$ によって $x = a^k y$ と書けているとすると $y \notin aM$ である．ここで $\overline{y}$ を y の M/aM における像とすると，a が M 正則なので $(P + aA)\overline{y} = 0$ が成り立つ．これは $P + aA \subset \mathrm{Ann}(\overline{y})$ を導き，ある $Q \in \mathrm{Ass}(M/aM)$ で $P + aA \subset Q$ となるものが存在する．（証明終）

命題 2.4

Noether 環 A 上の有限生成加群 M において $a_1, \ldots, a_r \in \mathrm{rad}\,A$ とする．このとき $a_1, \ldots, a_r$ が M 正則列ならその並べ替えも M 正則である．

証明.

まず 2 つの場合に帰着できることをみよう．$a_1, \ldots, a_i, a_{i+1}, \ldots, a_r$ が M 正則列であるとする．$N = M/(a_1, \ldots, a_{i-1})M$ とおくと a_i は N 正則であり，a_{i+1} は $N/a_i N = M/(a_1, \ldots, a_i)M$ 正則である．このとき $a_1, \ldots, a_{i+1}, a_i, \ldots, a_r$ が M 正則列であることをみるには a_{i+1} が N の，a_i が $N/a_{i+1}N = M/(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1})M$ 正則であることを示せばよい．

よって a_1 が M 正則，かつ a_2 が $M/a_1 M$ 正則なら a_2 が M 正則，かつ a_1 が $M/a_2 M$ 正則であることを示せば十分である．まず a_2 が M の零因子とすると，ある $P \in \mathrm{Ass}\,M$ に対して $a_2 \in P$ である．ここで $a_1 \in \mathrm{rad}\,A$ より，Krull の交叉定理から $\bigcap a_1^n M = 0$ となるので，補題から $P + a_1 A \subset Q$ となる $Q \in \mathrm{Ass}(M/a_1 M)$ がある．すると $a_2 \in P \subset Q$ だから a_2 が $M/a_1 M$ 正則であることに矛盾する．よって a_2 は M 正則．また a_1 について $a_1 x \in a_2 M$ となる $x \in M$ があったとすると，$a_1 x = a_2 y$ とかいたとき，$a_2 y \in a_1 M$ より a_2 が $M/a_1 M$ 正則だから $y \in a_1 M$ である．$y = a_1 z$ とおくと $a_1(x - a_2 z) = 0$ となり，a_1 は M 正則なので $x = a_2 z \in a_2 M$ となり，a_1 は $M/a_2 M$ 正則であることがわかる．（証明終）

系 2.5

Noether 局所環 $(A, \mathfrak{m})$ 上の有限生成加群 M について，$a_1, \ldots, a_r \in \mathfrak{m}$ が M 正則列であるとき，その並べ替えも M 正則列である．

また，命題 2.4 の証明を抜き出すことで，一般の正則元についても次のことが言えていることがわかる．

系 2.6

Noether 環 A の有限生成加群 M について，a_1, a_2 が M 正則列であるとき，a_2 が M 正則ならば a_2, a_1 も M 正則列である．

ここで，Noether 環 A 上の有限生成加群について，イデアル I を固定したときに I の元のみからなる正則列に興味がある．もし $IM \neq M$ ならば正則列で極大なものの長さは一般に一意に定まることを示そう．もし A

が局所環ならすべての真のイデアル I について $I \subset \mathfrak{m}$ であり，中山の補題から $IM \neq M$ であることに注意する．

補題 2.7

A を Noether 環とし，M を有限生成 A 加群とする．$IM \neq M$ となる A のイデアル I について，任意の $a \in I$ が M の零因子であることと，ある $P \in \mathrm{Ass}\, M$ が存在して $I \subset P$ であることは同値である．

証明.

$(\Longleftarrow)$ は明らか．$(\Longrightarrow)$ は対偶を示す．任意の $P \in \mathrm{Ass}\, M$ について $I \not\subset P$ であると仮定する．$\mathrm{Ass}\, M$ は有限だから Prime avoidance より $I \not\subset \bigcup_{P \in \mathrm{Ass}\, M} P$ であり，$a \in I$ で M 正則元となるものが存在する．（証明終）

定理 2.8

A を Noether 環とし，M を有限生成 A 加群とする．$IM \neq M$ となる A のイデアル I について，I の元からなる極大な M 正則列の長さは一定である．

証明.

M の極大な正則列の長さの最小値を n とする．n についての帰納法で示そう．$n = 0$ のときは示すことがない．

$n = 1$ のとき，$a, b \in I$ を M 正則元とする．任意の I の元が M/bM の零因子であることを示す．補題 2.7 よりある $P \in \mathrm{Ass}\, M/aM$ が存在して $I \subset P$ なので，ある $x \in M$ が存在して，$x \notin aM$ かつ $Ix \subset aM$ である．すると，ある $y \in M$ が存在して $bx = ay$ とかける．もし $y \in bM$ とすると，b が M 正則だから $x \in aM$ となって矛盾する（$y = b'y$ とおくと $b(x - a'y) = 0$ となる）から $y \notin bM$ である．そこで $Iy \subset bM$ を示そう．いま $Ix \subset aM$ だったから，$Iay = Ibx \subset abM$ であるので，a が M 正則なので $Iy \subset bM$ であることがわかり，すべての I の元は M/bM の零因子である．よって I の元からなる極大な M 列はすべて長さ 1 である．

次に $n > 1$ としよう．$a_1, \ldots, a_n$ を極大な M 正則列とし，$b_1, \ldots, b_n$ を異なる M 正則列とする．I が $M/(b_1, \ldots, b_n)M$ 正則元を持たないことを示せばよい．$I_i = (a_1, \ldots, a_i), J_i = (b_1, \ldots, b_i)$ とおく．次の集合；

$$\mathscr{P} = \bigcup_{0 \leq i \leq n-1} (\mathrm{Ass}\, M/I_iM \cup \mathrm{Ass}\, M/J_iM)$$

は有限集合で，補題 2.7 により，任意の $P \in \mathscr{P}$ について $I \not\subset P$ である．すると Prime avoidance よりある $r \in I$ であって，すべての $M/I_iM, M/J_iM$ で正則であるものがとれる．

$a_2, \ldots, a_n$ は M/a_1M の長さ $n-1$ の極大な正則列となり，帰納法の仮定より $a_2, \ldots, a_{n-1}, r$ も M/a_1M で極大である．すると $a_1, \ldots, a_{n-1}, r$ は M の極大な正則列で，系 2.6 から，並び替えて $r, a_1, \ldots, a_{n-1}$ も極大な正則列となる．よって M/rM は長さ $n-1$ の極大な正則列をもつ．

いま $b_1, \ldots, b_{n-1}, r$ も M 正則列で，並び替えて r で割ると $b_1, \ldots, b_{n-1}$ は M/rM の正則列である．よって帰納法の仮定から $b_1, \ldots, b_{n-1}$ は M/rM で極大で，$b_1, \ldots, b_{n-1}, r$ も極大でなければならない．ここで $M/J_{n-1}M$ において r は極大な正則列をなすから，b_n も極大であることがわかり，$b_1, \ldots, b_n$ は極大である．（証明終）

この一意に決まる値をもって，加群の**深さ**というものを導入しよう．

定義 2.9（深さ）

A を Noether 環とし，M を有限生成 A 加群とする．A のイデアル I について $IM \neq M$ であるとき，I の元からなる極大な M 正則列の長さを M の I における**深さ (depth)** といい，$\operatorname{depth}_I M$ とかく．$IM = M$ であるときは $\operatorname{depth}_I M = \infty$ と定義する．特に A が極大イデアルが $\mathfrak{m}$ である局所環のとき，$\mathfrak{m}$ における M の深さを $\operatorname{depth} M$ とかいて単に M の**深さ**という．

さて，Noether 局所環 $(A, \mathfrak{m})$ について $\dim A \leq \operatorname{em.dim} A = \dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ であり，これの等号が成り立つものを正則局所環というのであった．深さは次元を下から抑えるものとなっている．そのことを示そう．

命題 2.10

Noether 局所環 $(A, \mathfrak{m})$ と，有限生成 A 加群 $M \neq 0$ について，任意の $P \in \operatorname{Ass} M$ に対し；

$$\operatorname{depth} M \leq \dim A/P$$

が成り立つ．

証明.

$\operatorname{depth} M$ についての帰納法で示す．まず $\operatorname{depth} M = 0$ のときは明らかに成り立っている．$\operatorname{depth} M = r$ とおき，$\operatorname{depth} M' \leq r - 1$ となる M' について成り立っていると仮定しよう．M 正則列 $a_1, \ldots, a_r$ を考える．このとき $\operatorname{depth}(M/a_1 M) = r - 1$ である．また任意の $P \in \operatorname{Ass} M$ について，補題 2.3 から $P + (a_1) \subset Q$ となる $Q \in \operatorname{Ass}(M/a_1 M)$ が存在し，$a_1 \notin P, a_1 \in Q$ であるから $P \subsetneq Q$ である．よって $\dim A/Q < \dim A/P$ が成り立つ．帰納法の仮定から $r - 1 = \operatorname{depth}(M/a_1 M) \leq \dim A/Q < \dim A/P$ であるので，$r \leq \dim A/P$ であることがわかる． （証明終）

系 2.11

Noether 局所環 $(A, \mathfrak{m})$ と，有限生成 A 加群 $M \neq 0$ について，$\operatorname{depth} M \leq \dim M$ である．

これにより次の定義を導入する．

定義 2.12（Cohen–Macaulay 加群）

Noether 局所環 $(A, \mathfrak{m})$ 上の有限生成加群 M について，$\dim M = \operatorname{depth} M$ であるとき M を **Cohen–Macaulay 加群**という．局所環 A が A 加群として Cohen–Macaulay 加群であるとき，A を Cohen–Macaulay 局所環という．

Cohen–Macaulay は単に CM と略されることが多い．CM 加群の定義からすぐに従う性質をいくつか紹介しておく．

命題 2.13

M を Noether 局所環 $(A, \mathfrak{m})$ 上の CM 加群とすると，M は非孤立素因子を持たない．

証明.

一般に $P \in \operatorname{Ass} M$ なら $\operatorname{depth} M \leq \dim A/P \leq \dim M$ だが，M が CM なので $\dim A/P$ は P によらず $\operatorname{depth} M = \dim M$ に等しい． （証明終）

これから CM 性について考察していくために，補題を用意しよう．

補題 *2.14*

$(A, \mathfrak{m})$ を Noether 局所環とし，M を A 上の有限生成加群とする．$a \in I$ が M 正則ならば，イデアル $I \subset \mathfrak{m}$ について；

$$\operatorname{depth}_I (M/aM) = \operatorname{depth}_I M - 1$$

が成り立つ．

極大列の長さが一意である（定理 2.8）ことから証明は明らかである．

補題 *2.15*

$(A, \mathfrak{m})$ を Noether 局所環とし、$M \neq 0$ を有限生成 A 加群とする．$a \in \mathfrak{m}$ が M 正則元であるとき，$\dim M/aM = \dim M - 1$ が成り立つ．

証明.

a は $A/\operatorname{Ann} M$ の非零因子なので $\dim M - 1 = \dim A/\operatorname{Ann} M - 1 = \dim A/(\operatorname{Ann} M + (a))$ が成り立つ．また $\dim M/aM = \dim A/\operatorname{Ann}(M/aM)$ であるので，$V(\operatorname{Ann} M + (a)) = V(\operatorname{Ann} M/aM)$ を示せばよい．

容易に $\operatorname{Ann}(M/aM) \subset P$ なら $\operatorname{Ann} M \subset P$ かつ $a \in P$ であることがわかる．一方で $\operatorname{Ann} M \subset P$ かつ $a \in P$ ならば $M_P \neq 0$ であり，また $a \in P$ だから $(M/aM)_P = M_P/aM_P$ であり，$a/1 \in \operatorname{rad}(A_P) = PA_P$ だから中山の補題より $M_P/aM_P \neq 0$ である．よって $P \in \operatorname{Supp} M/aM$ すなわち $\operatorname{Ann}(M/aM) \subset P$ となり，求める等式が示された． （証明終）

この２つの補題から帰納法により容易に次が従う．

系 *2.16*

M を Noether 局所環 $(A, \mathfrak{m})$ 上の CM 加群とする．$a_1, \ldots, a_r \in \mathfrak{m}$ が M 正則列なら（r は $\operatorname{depth} M$ と一致しているとは限らない），$M/(a_1, \ldots, a_r)M$ も次元が $\dim M - r$ の CM 加群である．

最後に技術的な命題たちを述べておこう．

命題 *2.17*

$(A, \mathfrak{m})$ を Noether 局所環とし，M を A 上の CM 加群とする．任意の A のイデアル I について；

$$\operatorname{depth}_I M = \dim M - \dim M/IM$$

である．

証明.

$\operatorname{depth}_I M$ についての帰納法で示す．$\operatorname{depth}_I M = 0$ のとき，補題より $I \subset P$ となる $P \in \operatorname{Ass} M$ が存在する．命題 2.13 により $\dim M = \dim A/P$ なので，$\dim M/IM \leq \dim A/P$ である．逆を示すには，$P \in \operatorname{Supp} M/IM$ をみればよいが，$I \subset P$ かつ $P \in \operatorname{Ass} M$ なので $(M/IM)_P = M_P/IA_P M_P \neq 0$ となって，求める等式が成り立つ．

$r = \operatorname{depth}_I M > 0$ とする．$a_1, \ldots, a_r \in I$ を M 正則列とすると，イデアル $I' = (a_1, \ldots, a_{r-1})$ において；

$$\operatorname{depth}_I M - 1 = \operatorname{depth}_{I'} M = \dim M - \dim M/I'M$$

なので，$\dim M/IM = \dim M/I' - 1$ を示せばよい．$\dim M/(a_1,\dots,a_r)M = \dim M/I'M - 1$ だから，$\dim M/IM = \dim M/(a_1,\dots,a_r)$ を示す．$\operatorname{depth}_I M/(a_1,\dots,a_r)M = 0$ だからある $P \in \operatorname{Ass} M/(a_1,\dots,a_r)M$ が存在して $I \subset P$ である．いま $M/(a_1,\dots,a_r)M$ は CM 加群だから $\dim M/(a_1,\dots,a_r)M = \dim A/P$ であり，$r = 0$ の場合と同様に示される． （証明終）

命題 *2.18*

$(A,\mathfrak{m})$ を Noether 局所環とし，M を A 上の CM 加群とすると，任意の $P \in \operatorname{Supp} M$ について；

$$\operatorname{depth}_P M = \operatorname{depth}_{PA_P} M_P = \dim M_P$$

が成り立つ．特に M_P も CM A_P 加群である．

証明.

一般に $\operatorname{depth}_P M \le \operatorname{depth}_{PA_P} M_P \le \dim M_P$ であることを容易に確かめることができる．よって $\dim M_P \le \operatorname{depth}_P M$ であることを示せばよい．

$\operatorname{depth}_P M$ についての帰納法で示そう．まず $\operatorname{depth}_P M = 0$ ならば，補題より $P \subset Q$ となる $Q \in \operatorname{Ass} M$ が存在する．ここでり $V(\operatorname{Ann}(M_P)) = \operatorname{Ass} M_P = \{Q \in \operatorname{Ass} M \mid Q \subset P\} \neq \emptyset$ であり，M が CM 加群だから非孤立素因子を持たないので $V(\operatorname{Ann}(M_P)) = PA_P$ となり，$\dim M_P = \dim A_P/PA_P = 0$ である．さて $\operatorname{depth}_P M = r > 0$ として，$r-1$ まで正しいとする．定義より $a \in P$ で M 正則なものがある．ここで補題 2.14 より $\operatorname{depth}_P M/aM = \operatorname{depth}_P M - 1$ であり，帰納法の仮定と補題 2.15 から $\operatorname{depth}_P M/aM = \dim(M/aM)_P = \dim M_P/aM_P = \dim M_P - 1$ である．よって $\operatorname{depth}_P M = \dim M_P$ であることがわかり，証明が完了する．

（証明終）

この命題により CM 局所環 $(A,\mathfrak{m})$ の局所化 A_P もまた $\operatorname{depth} A_P = \operatorname{ht} P$ となる CM 局所環である．

§ 3　Cohen–Macaulay 環と鎖状環

一般の環についての CM 性は次のように定義する（正則局所環の場合と異なり，命題 2.18 により CM 局所環は次の定義を満たすことがわかっていることに注意せよ）．

定義 *3.1*（Cohen–Macaulay 環）

Noether 環 A について，任意の $P \in \operatorname{Spec} A$ による局所化 A_P が Cohen–Macaulay 局所環となるとき，A を **Cohen–Macaulay 環**という．

明らかに体は CM 環である．また簡単な計算により 1 次元 Noether 整域は CM 環であることがわかる．特に PID，Dedekind 整域などは CM 環である．この節では，CM 環の簡単な性質を見るとともに，正則局所環や CM 環上の多項式環が CM 環であること，またすべての CM 環が強鎖状環であることを示そう．

ここで**鎖状環**について少し説明しておく．

定義 *3.2*（鎖状環）

環 A の素イデアルの真増大列 $P_0 \subset P_1 \subset \cdots$ についてどの隣接した 2 項の間にも素イデアルが存在しないとき，その鎖は飽和しているという．任意の $P \subset P'$ となる素イデアルについて，次の飽和したイデアルの鎖；

$$P = P_0 \subsetneq \cdots \subsetneq P_n = P'$$

の長さがすべて同一の有限値であるとき，A を**鎖状環 (catenary ring)** という．

鎖状環の準同型像はまた鎖状であることに注意しよう．鎖状環の代表例は体上の有限生成代数である（[5] 定理 3.6.5)．これは体が**強鎖状**であると表現することもできる．

定義 *3.3*（強鎖状環）

A を環とする．任意の有限生成 A 代数が鎖状であるとき，A は**強鎖状環 (univarsally catenary ring)** であるという．

鎖状環というトピックは，代数幾何的なモチベーションで考えることもできる．一般に環 A と $P \in \operatorname{Spec} A$ に対して；

$$\operatorname{ht} P + \operatorname{coht} P \leq \dim A \tag{$*$}$$

という関係が成り立っているが，これを代数幾何学の視点からみるとイデアルの高度は（部分多様体の）次元，余高度は余次元に対応するという観点から $(*)$ において等号が成り立ってほしい．鎖状性は，いつ $(*)$ において等号が成り立つか？という問題において現れる概念の 1 つと考えることができる．本書独自の用語ではあるが，環 A の任意の素イデアルに対して $(*)$ において等号が成り立つことを A において**弱次元公式 (week dimension formula)** が成り立つ，ということにしよう．簡単な推論で局所整域であるような鎖状環において弱次元公式が成り立つことがわかる．一方で強鎖状環でも弱次元公式が成り立たない例が存在する（例 3.17)．一方で次の結果が知られている．

定理 *3.4*（[5] 命題 3.6.8）

体 k 上の有限生成整域において弱次元公式が成り立つ．

これは余談であるが，次元公式と呼ばれる等式も存在する．A を Noether 整域，B を A 上の有限生成整域とする．任意の $P \in \operatorname{Spec} B$ と $P' = P \cap A$ について；

$$\operatorname{ht} P + \operatorname{tr.deg}_{k(P')} k(P) = \operatorname{ht} P' + \operatorname{tr.deg}_{\operatorname{Frac}(A)} \operatorname{Frac}(B)$$

が成り立つとき，A と B の間で**次元公式 (dimension formula)** が成り立つという．A が体のときこれは体上有限生成整域についての弱次元公式にほかならない．

実際の Noether 環はほとんどが鎖状環であることが知られているが，鎖状でない Noether 環の例は Nagata [4] で与えられている．それだけでなく鎖状であるが強鎖状でない Noether 環の例も永田によって与えられている．

さて，次の事実により鎖状性は局所的な性質であることがわかる．

命題 *3.5*

環 A が鎖状環であることと，任意の $P \in \operatorname{Spec} A$ について A_P が鎖状環であることは同値である．

証明は定義から明らかであろう．

定理 *3.6*

$(A, \mathfrak{m})$ を CM 局所環とする．A において弱次元公式が成り立ち，また A は鎖状環である．

証明.

まず弱次元公式が成り立つことを示そう．任意の $P \in \operatorname{Spec} A$ をとり，$\operatorname{ht} P = n$ とする．命題 2.18 より A_P も CM 局所環で $\operatorname{ht} P = \operatorname{depth}_{PA_P} A_P = \operatorname{depth}_P A$ であるので，A 正則列 $a_1, \ldots, a_n \in P$ が存在する．$I = (a_1, \ldots, a_n)$ とおくと，系 2.16 より A/I は $\dim A/I = \dim A - n$ となる CM 局所環である．また $a_1, \ldots, a_n$ は A 正則なので $0 < \operatorname{ht}(a_1) < \operatorname{ht}(a_1, a_2) < \cdots$ であるから，$n \leq \operatorname{ht} I$ が成り立つ．また $\operatorname{ht} I \leq \operatorname{ht} P = n$ より $\operatorname{ht} I = \operatorname{ht} P$ となり，P は I の極小素イデアルである．よって P は A/I の素因子なので，$\dim A/P = \dim A/I = \dim A - n$ が成り立つ．よって $\dim A/P = \operatorname{coht} P$ だから $\operatorname{ht} P + \operatorname{coht} P = \dim A$ である．

次に鎖状であることを示す．任意の素イデアル鎖 $P \subsetneq Q$ をとる．局所化 A_Q も CM 局所環なので，弱次元公式が成り立つから $\operatorname{ht} Q - \operatorname{ht} P = \dim A_Q/PA_Q$ が成り立つ．そこで $P \subsetneq P_1 \subsetneq \cdots \subsetneq P_s = Q$ を飽和した素イデアル鎖とすると，$P_i \subsetneq P_{i+1}$ について同様に $\operatorname{ht} P_{i+1} = \operatorname{ht} P_i + \dim A_{P_i}/P_{i-1}A_{P_i} = \operatorname{ht} P_i + 1$ が成り立つ．よって $\operatorname{ht} Q = \operatorname{ht} P + s$ であり，$s = \dim A_Q/PA_Q$ がわかるので A は鎖状である．（証明終）

系 *3.7*

CM 環は鎖状環である．

次に CM 環においては巴系と正則列の間に相互によい関係があることを見よう．まず一般に正則局所環は CM 環であることを確認しておく．

命題 *3.8*（Cohen）

正則局所環は CM 環である．

証明.

$(A, \mathfrak{m})$ を正則局所環とし，$\dim A = n$ とおく．$x_1, \ldots, x_d \in \mathfrak{m}$ を正則巴系としよう．このとき命題 1.3，系 1.7 によりこれらが A 正則列をなすことがわかる．（証明終）

CM 環という条件を仮定すると，正則列と巴系の概念が一致する．

命題 *3.9*

$(A, \mathfrak{m})$ を CM 局所環とすると，$a_1, \ldots, a_r \in \mathfrak{m}$ について，以下の命題；

(i) $a_1, \ldots, a_r$ は A 正則列をなす．
(ii) 任意の $1 \leq i \leq r$ について $\operatorname{ht}(a_1, \ldots, a_i) = i$ である．
(iii) $\operatorname{ht}(a_1, \ldots, a_r) = r$ である．
(iv) $a_1, \ldots, a_r$ は A の巴系の一部分をなす．

は同値である．

証明.

CM 性が必要になるのは (iv)$\Longrightarrow$(i) のみであることを注意しておく．

(i) $\Longrightarrow$ (ii)

$a_1, \dots, a_r \in \mathfrak{m}$ を A 正則列とすると，$0 < \mathrm{ht}(a_1) < \mathrm{ht}(a_1, a_2) < \cdots$ より Krull の標高定理から $1 \leq i \leq r$ について $\mathrm{ht}(a_1, \dots, a_i) = i$ である．

(ii) $\Longrightarrow$ (iii)

自明．

(iii) $\Longrightarrow$ (iv)

もし $\dim A = r$ なら，$(a_1, \dots, a_r)$ の極小素イデアルは $\mathfrak{m}$ のみなので $\sqrt{(a_1, \dots, a_r)} = \mathfrak{m}$ となり $(a_1, \dots, a_r)$ は $\mathfrak{m}$ 準素だから $a_1, \dots, a_r$ は巴系をなす．また $r < \dim A$ なら $\mathfrak{m}$ は $(a_1, \dots, a_r)$ の極小素イデアルではないので，Prime avoidance から $a_{r+1} \in \mathfrak{m}$ を $(a_1, \dots, a_r)$ のすべての極小素イデアルに含まれないようにとれる．このとき $\mathrm{ht}(a_1, \dots, a_r, a_{r+1}) > r$ なので，高さが $\dim A$ と一致するまで続けることで $a_1, \dots, a_r$ は A の巴系の一部分であることがわかる．

(iv) $\Longrightarrow$ (i)

$\dim A = n$ として，$a_1, \dots, a_n$ が巴系なら A 正則であることを示せばよい．n についての帰納法を用いる．まず $n = 1$ のとき，a_1 が巴系であるとする．ここで a_1 が A 正則でない，すなわち $a_1 x = 0$ となる $x \neq 0 \in A$ が存在するとすると，$a_1 \in P$ となる $P \in \mathrm{Ass}\, A$ が存在するが，命題 2.13 の証明からわかるように $\dim A/P = 1$ であるので，$P \subsetneq \mathfrak{m}$ を意味する．これは (a_1) が $\mathfrak{m}$ 準素であることに矛盾する．よって a_1 は A 正則である．

次に $n-1$ まで正しいとする．A の巴系 $a_1, \dots, a_n$ について，a_1 が A 正則元でないと仮定すると，$n = 1$ の場合と同様に $a_1 \in P$ となる $P \in \mathrm{Ass}\, A$ が存在して $\dim A/P = n$ である．一方で $\sqrt{(a_1, \dots, a_n)} = \mathfrak{m}$ であるので，A/P において $\sqrt{(\overline{a_2}, \dots, \overline{a_n})} = \mathfrak{m}$ であり，Krull の次元定理から $\dim A/P \leq n-1$ が言えるがこれは矛盾である．ゆえに a_1 は A 正則で，A/a_1A は $a_2, \dots, a_n$ の像を巴系とする $n-1$ 次の CM 局所環である．よって帰納法の仮定から $a_2, \dots, a_n$ の像は A/a_1A の正則列であり，$a_1, \dots, a_n$ は A の正則列をなす．

（証明終）

次に CM 環上の多項式環も CM 環になることを示そう．そのために，CM 環について Macaulay,Cohen らが考察していた当時の定義を紹介しよう．

定義 *3.10*（純性定理）

Noether 環 A のイデアル I について，任意の $P \in \mathrm{Ass}\, A/I$ の高さが $\mathrm{ht}\, I$ に等しいとき，I は**純 (unmixied)** であるという．特に Noether 環 A について r 個の元で生成されるイデアル $I = (a_1, \dots, a_r)$ について $\mathrm{ht}\, I = r$ ならば I は必ず純であるとき，A において**純性定理 (unmixedness theorem)** が成り立つという．

Krull の標高定理より，r 個の元で生成され高さが r のイデアル I の極小素イデアルの高さはすべて r であるので，I が純であるということは非孤立素因子を持たないということを意味する．Macaulay (1916) は体上の多項式環について純性定理が成り立つことを，Cohen (1946) は正則局所環について純性定理が成り立つことを証明した．Noether 環 A について純性定理が成り立つことと，（本書の意味で）CM 環であることは同値であり，これが CM 環の由来である．正則局所環が CM 環であることは（Cohen は純性定理が成り立つことを証明したので，Cohen とは異なる道筋ではあるが）すでに見た．CM 環の定義と純性定理が成り立つことを同値であることを確かめておこう．そのために Krull の標高定理から従う事実を 1 つ注意しておく．

命題 *3.11*

Noether 環 A のイデアル I について，$\mathrm{ht}\, I = r$ ならばある $f_1, \ldots, f_r \in I$ が存在して，任意の $1 \leq i \leq r$ について $\mathrm{ht}(f_1, \ldots, f_i) = i$ が成り立つ．

証明.

$\mathrm{ht}\, I = r \geq 1$ としてよい．まず，A は Noether なので A の極小素イデアルは有限個である．すると Prime avoidance によって $f_1 \in I$ を A のどの極小素イデアルにも含まれないようにとれる．よって $f_1 \in P$ となる $P \in \mathrm{Spec}\, A$ について $\mathrm{ht}\, P \geq 1$ である．ここで Krull の標高定理より $\mathrm{ht}(f_1) \leq 1$ であるから，$\mathrm{ht}(f_1) = 1$ となる．そこで，ある $i < r$ について $f_1, \ldots, f_i$ がすべての $1 \leq j \leq i$ について $\mathrm{ht}(f_1, \ldots, f_j) = j$ となるように選ばれているとする．素イデアル $P \in V(f_1, \ldots, f_i)$ について $\mathrm{ht}\, P = i$ であるものは $(f_1, \ldots, f_i)$ の極小素因子なので有限個しかない．また，$I \subsetneq P$ であるので，Prime avoidance より $f_{i+1} \in I$ を $f_{i+1} \notin \bigcup_{P \in V(f_1, \ldots, f_i), \mathrm{ht}\, P = j} P$ となるようにとることができる．すると $\mathrm{ht}(f_1, \ldots, f_{i+1}) = i + 1$ が成り立つ．よって帰納的に主張が従う．（証明終）

定理 *3.12*

Noether 環 A について，純性定理が成り立つことと CM 環であることは同値である．

証明.

$(\Longrightarrow)$

任意の $P \in \mathrm{Spec}\, A$ をとり，$\mathrm{ht}\, P = r$ とする．命題 3.11 より $a_1, \ldots, a_r \in P$ を $\mathrm{ht}(a_1, \ldots, a_i) = i$ がすべての $1 \leq i \leq r$ で成り立つようにとれる．このとき $a_1, \ldots, a_r$ が A_P 正則列になる．各 i について純性定理により $(a_1, \ldots, a_i)$ の素因子の高さはすべて i であるので，特に a_{i+1} を含まない．よって a_{i+1} は $A/(a_1, \ldots, a_i)$ で正則である（加群の零因子全体と素因子の和集合は等しい）．よって $\mathrm{depth}\, A_P = r = \dim A_P$ であり A_P は CM 局所環である．すなわち A は CM 環．

$(\Longleftarrow)$

$I = (a_1, \ldots, a_r)$ が $\mathrm{ht}\, I = r$ であるとする．$P \in \mathrm{Ass}\, A/I$ をとり，P が極小でないと仮定する．P を含む極大イデアル $\mathfrak{m}$ で局所化して考える．このとき $IA_{\mathfrak{m}}$ は少なくとも素因子 $P' A_{\mathfrak{m}} \subsetneq PA_{\mathfrak{m}}$ を持つ．ところが命題 3.9 より $a_1, \ldots, a_r$ は $A_{\mathfrak{m}}$ の正則列であり，系 2.16 より $A_{\mathfrak{m}}/IA_{\mathfrak{m}}$ も CM 局所環である．よって $IA_{\mathfrak{m}}$ の素因子はすべて極小でなければならないので矛盾である．よって純性定理が成り立つ．

（証明終）

この証明の $(\Longleftarrow)$ に注目すると，A の極大イデアルによる局所化が CM 局所環でありさえすれば純性定理が成り立つ．よって次の系が従う．

系 *3.13*

Noether 環 A が CM 環かどうかを確かめるには任意の極大イデアルによる局所化が CM 局所環であるかどうかを確かめれば十分である．

CM 環上の多項式環が CM 環であること，そして CM 環は強鎖状環であることを証明してこの節を締めくくろう．

定理 *3.14*

A を CM 環とすると，A 上の多項式 $A[X_1, \ldots, X_n]$ も CM 環である．

証明.

先の系により $A[X]$ の極大イデアル $\mathfrak{m}'$ による局所化が CM 局所環であることを示せば十分である．まずは A が局所環の場合に帰着できることを見る．$A \cap \mathfrak{m}' = \mathfrak{m} \in \operatorname{Spec} A$ とおくと，自然な対応で；

$$A[X]_{\mathfrak{m}'} = (A_{\mathfrak{m}}[X])_{\mathfrak{m}'A_{\mathfrak{m}}[X]}, A_{\mathfrak{m}}[X]/(\mathfrak{m}'A_{\mathfrak{m}}[X]) = A[X]/\mathfrak{m}'$$

であり，A を局所環と仮定してよいことがわかる．また $\mathfrak{m}'A_{\mathfrak{m}}[X] \cap A_{\mathfrak{m}} = \mathfrak{m}A_{\mathfrak{m}}$ であるので，$\mathfrak{m}$ も極大と仮定してよい．

以上より，A が局所環であって，$A[X]$ の極大イデアル $\mathfrak{m}'$ が $\mathfrak{m}' \cap A = \mathfrak{m} \in \operatorname{Spm} A$ を満たすときに $A[X]_{\mathfrak{m}'}$ が CM 局所環であることを示せばよい．体 $A/\mathfrak{m}$ を k とおくと，準同型；

$$\varphi : A[X] \to k[X]; a_nX^n + \cdots + a_0 \mapsto \overline{a_n}X^n + \cdots + \overline{a_0} \quad （\overline{a_i} \text{ は } a_i \text{ の } A/\mathfrak{m} \text{ における像.}）$$

により環同型 $A[X]/\mathfrak{m}A[X] \cong k[X]$ がある．いま $\mathfrak{m}A[X] \subset \mathfrak{m}'$ であり，$A[X]/\mathfrak{m}A[X]$ は 1 次元の整域であることに注意すると $\mathfrak{m}'$ の像は極大イデアルである．よってモニックで既約な $f' \in k[X]$ によって生成されている．$f \in \mathfrak{m}'$ を $\varphi(f) = f'$ となるようにとると，$\mathfrak{m}' = \mathfrak{m}A[X] + (f)$ である．よって $\mathfrak{m} = (a_1, \ldots, a_r)$ とすれば $A[X]$ 上 $\mathfrak{m}'$ は $a_1, \ldots, a_r, f$ で生成されている．またこれらは $A[X]$ 正則列をなす．a_i たちについては命題 3.9 から A 正則列をなすことから従い，f は $A[X]/(a_1, \ldots, a_r)A[X] = k[X]$ でモニックなので正則である．よって $r + 1 \leq \operatorname{depth}_{\mathfrak{m}'} A[X]$ であることがわかる．また $\mathfrak{m}'$ は $r+1$ 個の元で生成されているから Krull の標高定理により $\dim A[X]_{\mathfrak{m}'} \leq r + 1$ である．これらに命題 2.18 をあわせて；

$$\dim A[X]_{\mathfrak{m}'} \leq r + 1 \leq \operatorname{depth}_{\mathfrak{m}'} A[X] = \operatorname{depth} A[X]_{\mathfrak{m}'}$$

がわかり，$A[X]_{\mathfrak{m}'}$ は CM 局所環である． （証明終）

系 *3.15*（Macaulay）

体上の多項式環 $k[X_1, \ldots, X_n]$ は CM 環である．

系 *3.16*

CM 環は強鎖状環である．

以上の準備によって次の例を見ることができる．

例 *3.17*

$(A, \mathfrak{m})$ を DVR（すなわち 1 次元 Noether 局所整閉整域）とする．$B = A[X]$ とすればこれは鎖状だが，$\operatorname{ht} P + \operatorname{coht} P = \dim A$ を満たさない $P \in \operatorname{Spec} B$ が存在する．

証明.

$\mathfrak{m}$ は単項なので，$\mathfrak{m} = (a)$ とおこう．$\dim B = 2$ である．$P = (aX - 1)$ とおくと，これは B の極大イデアルであるが，高さ 1 である．よって；

$$\operatorname{ht} P + \operatorname{coht} P = 1 + 0 = 1 \neq 2 = \dim B$$

となり，成り立たない．

また，1 次元の Noether 整域は CM 環で，CM 環は強鎖状であるから B は鎖状である． （証明終）

参考文献

[1] M. F. Atiyah and I. G. MacDonald (1969) *Introduction To Commutative Algebra*: Addison–Wesley,（新妻弘訳,『可換代数入門』，共立出版，2006 年）.

[2] I. S. Cohen (1946) “On the Structure and Ideal Theory of Complete Local Rings,” *Trans. Amer. Math. Soc.*, Vol. 59, No. 1, pp. 54–106, DOI: http://dx.doi.org/10.2307/1990313.

[3] F. S. Macaulay (1916) *The algebraic theory of modular systems*: Cambridge Univ. Press.

[4] M. Nagata (1956) “On the Chain Problem of Prime Ideals,” *Nagoya Math. J.*, Vol. 10, pp. 51–64, DOI: http://dx.doi.org/10.1017/S0027763000000076.

[5] 安藤遼哉 (2021)「可換環論の基礎（未完)」，URL：https://ryoya9826.github.io/files/ring.pdf.

[6] 永田雅宜 (1974)『可換環論』，紀伊國屋書店.

[7] 松村英之 (1980)『可換環論（復刊)』，共立出版.