Solução Numérica de Equações Diferenciais
Convergência

Márcio Antônio de Andrade Bortoloti

Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas - DCET
Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia - UESB

Cálculo Numérico

Sumário

Métodos de Runge-Kutta

Consideremos o problem

$$y' = f(t, y),$$

com condição inicial $y(t_0) = y_0$.

- Os métodos de Taylor tem a propriedade desejável de erro de truncamento local de alta ordem, mas a desvantagem de exigir a determinação e o cálculo em diversos pontos de $f(t, y)$.

Métodos de Runge-Kutta

Consideremos o problem

$$y' = f(t, y),$$

com condição inicial $y(t_0) = y_0$.

- Os métodos de Taylor tem a propriedade desejável de erro de truncamento local de alta ordem, mas a desvantagem de exigir a determinação e o cálculo em diversos pontos de $f(t, y)$.
- Esse procedimento é complicado e consome muito tempo na maioria dos problemas, de modo que os Métodos de Taylor são raramente usados na prática.

Métodos de Runge-Kutta

Consideremos o problem

$$y' = f(t, y),$$

com condição inicial $y(t_0) = y_0$.

- Os métodos de Taylor tem a propriedade desejável de erro de truncamento local de alta ordem, mas a desvantagem de exigir a determinação e o cálculo em diversos pontos de $f(t, y)$.
- Esse procedimento é complicado e consome muito tempo na maioria dos problemas, de modo que os Métodos de Taylor são raramente usados na prática.
- Os Métodos de Runge-Kutta têm o erro de truncamento local de alta ordem e eliminam a necessidade de calcular as derivadas de $f(t, y)$.

Teorema

Suponha que $f \in \mathcal{C}^{n+1}(D)$, $D = [a,b] \times [c,d]$ *e seja* $(t_0, y_0) \in D$*.Para cada* $(t,y) \in D$*, existem* ξ *entre* t *e* t_0 *e* μ *entre* y *e* y_0 *tais que*

$$f(t,y) = T_n(t,y) + R_n(t,y),$$

onde

$$\begin{aligned} T_n(t,y) &= f(t_0,y_0) + \Big[(t-t_0)f_t(t_0,y_0) + (y-y_0)f_y(t_0,y_0)\Big] \\ &+ \Big[(t-t_0)^2/2f_{tt}(t_0,y_0) + (t-t_0)(y-y_0)f_{ty}(t_0,y_0) + (y-y_0)^2/2f_{yy}(t_0,y_0)\Big] + \cdots \\ &+ \left[\frac{1}{n!}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(t-t_0)^{n-j}(y-y_0)^j\frac{\partial^n f}{\partial t^{n-j}\partial y^j}(t_0,y_0)\right] \end{aligned}$$

e

$$R_n(t,y) = \frac{1}{(n+1)!}\sum_{j=0}^{n+1}\binom{n+1}{j}(t-t_0)^{n+1-j}(y-y_0)^j\frac{\partial^{n+1} f}{\partial t^{n+1-j}\partial y^j}(\xi,\mu).$$

O primeiro passo na dedução do Método de Runge-Kutta é determinar os valores para a_1, α_1 e β_1 com a propriedade de que $a_1 f(t+\alpha_1, y+\beta_1)$ forneça uma aproximação de

$$T_2(t,y) = f(t,y) + \frac{h}{2} f'(t,y),$$

com erro não maior que $\mathcal{O}(h^2)$, que é o erro de truncamento local para o método de Taylor de segunda ordem.

Métodos de Runge-Kutta - Segunda Ordem

O primeiro passo na dedução do Método de Runge-Kutta é determinar os valores para a_1, α_1 e β_1 com a propriedade de que $a_1 f(t + \alpha_1, y + \beta_1)$ forneça uma aproximação de

$$T_2(t, y) = f(t, y) + \frac{h}{2} f'(t, y),$$

com erro não maior que $\mathcal{O}(h^2)$, que é o erro de truncamento local para o método de Taylor de segunda ordem. Como

$$f'(t, y) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, y) + \frac{\partial f}{\partial y} y'(t)$$

O primeiro passo na dedução do Método de Runge-Kutta é determinar os valores para a_1, α_1 e β_1 com a propriedade de que $a_1 f(t + \alpha_1, y + \beta_1)$ forneça uma aproximação de

$$T_2(t, y) = f(t, y) + \frac{h}{2} f'(t, y),$$

com erro não maior que $\mathcal{O}(h^2)$, que é o erro de truncamento local para o método de Taylor de segunda ordem. Como

$$f'(t, y) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, y) + \frac{\partial f}{\partial y} y'(t)$$

Tem-se

$$T_2(t, y) = f(t, y) + \frac{h}{2}\frac{\partial f}{\partial t}(t, y) + \frac{h}{2}\frac{\partial f}{\partial y} f(t, y).$$

Por outro lado, expandindo $f(t+\alpha_1, y+\beta_1)$ em seu polinômio de Taylor de primeiro grau em torno de (t, y) teremos

$$a_1 f(t+\alpha_1, y+\beta_1) = a_1 f(t,y) + a_1\alpha_1 \frac{\partial f}{\partial t}(t,y) + a_1\beta_1 \frac{\partial f}{\partial y}(t,y) + a_1 R_1(t+\alpha_1, y+\beta_1)$$

onde

$$R_1(t+\alpha_1, y+\beta_1) = \frac{\alpha_1^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(\xi,\mu) + a_1\beta_1 \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y}(\xi,\mu) + \frac{\beta_1^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\xi,\mu)$$

para algum ξ entre t e $t+\alpha_1$ e μ entre y e $y+\beta_1$.

Métodos de Runge-Kutta - Segunda Ordem

Por outro lado, expandindo $f(t+\alpha_1, y+\beta_1)$ em seu polinômio de Taylor de primeiro grau em torno de (t, y) teremos

$$a_1 f(t+\alpha_1, y+\beta_1) = a_1 f(t,y) + a_1\alpha_1 \frac{\partial f}{\partial t}(t,y) + a_1\beta_1 \frac{\partial f}{\partial y}(t,y) + a_1 R_1(t+\alpha_1, y+\beta_1)$$

onde

$$R_1(t+\alpha_1, y+\beta_1) = \frac{\alpha_1^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(\xi,\mu) + a_1\beta_1 \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y}(\xi,\mu) + \frac{\beta_1^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\xi,\mu)$$

para algum ξ entre t e $t+\alpha_1$ e μ entre y e $y+\beta_1$.
Igualando os coeficientes de f e de suas derivadas nas equações de T^2 e de f acima, obtemos

$$a_1 = 1, \quad a_1\alpha_1 = \frac{h}{2} \quad a_1\beta_1 = \frac{h}{2} f(t,y).$$

Assim

$$a_1 = 1; \quad \alpha_1 = \frac{h}{2} \quad \beta_1 = \frac{h}{2} f(t, y)$$

Métodos de Runge-Kutta - Segunda Ordem

Assim

$$a_1 = 1; \quad \alpha_1 = \frac{h}{2} \quad \beta_1 = \frac{h}{2}f(t,y)$$

Logo

$$T_2(t,y) = f\left(t + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2}f(t,y)\right).$$

Métodos de Runge-Kutta - Segunda Ordem

Assim

$$a_1 = 1; \quad \alpha_1 = \frac{h}{2} \quad \beta_1 = \frac{h}{2} f(t,y)$$

Logo

$$T_2(t,y) = f\left(t + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2} f(t,y)\right).$$

Do Método de Taylor obtemos

$$\begin{cases} y_0 \text{ dado} \\ y_{n+1} = y_n + hf\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} f(t_n, y_n)\right). \end{cases}$$

Métodos de Runge-Kutta - Quarta Ordem

Exercício

Estudar o método de Runge-Kutta de 4ª ordem. Esse método tem erro de truncamento local $O(h^4)$, desde que a solução $y(t)$ tenha cindo derivadas contínuas. O método é dado por

$$
\begin{aligned}
y_0 &= \alpha \\
k_1 &= hf(t_n, y_n) \\
k_2 &= hf\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}\right) \\
k_3 &= hf\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k+_2}{2}\right) \\
k_4 &= hf(t_{n+1}, y_n + k_3) \\
y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k4)
\end{aligned}
$$

para $n = 0, 1, \cdots, N-1$.