EXERCÍCIOS

1. Calcule cada uma das seguintes expressões.

(a) $(D^2 + D)e^{2x}$ (b) $(3D^2 + 2D + 2)\operatorname{sen} x$

(c) $(xD - x)(2 \ln x)$ (d) $(D + 1)(D - x)(2e^x + \cos x)$

2. Repita o Exercício 1 para cada uma das seguintes expressões

(a) $(aD^2 + bD + c)e^{kx}$, sendo a, b, c, k constantes.

(b) $(x^2D^2 - 2xD + 4)x^k$, sendo k constante.

(c) $(4x^2D^2 + 4xD + 4x^2 + 1)\dfrac{1}{\sqrt{x}}\operatorname{sen} x$

3. Encontre constantes a, b, c, tais que $a + b + c = 1$, e

$$[(1 - x^2)D^2 - 2xD + 6](ax^2 + bx + c) = 0.$$

4. Escreva cada um dos seguintes operadores diferenciais lineares na forma canônica

$$a_n(x)D^n + \cdots + a_1(x)D + a_0(x).$$

(a) $(D^2 + 1)(D - 1)$ (b) $xD(D - x)$

(c) $(xD^2 + D)^2$ (d) $D^2(xD - 1)D$

(e) $D(De^x + 1) + e^x$

5. Mostre que $D(xD) \neq (xD)D$.

6. (a) Demonstre que um operador diferencial linear de ordem n é uma transformação linear de $\mathcal{C}^n(I)$ em $\mathcal{C}(I)$.

(b) Esta transformação linear é biunívoca quando $n > 0$? Por quê?

7. (a) Calcule o produto dos operadores diferenciais lineares $a_1(x)D + 1$ e $b_1(x)D + 1$ quando

$$a_1(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ x^2/2, & x \geq 0, \end{cases} \qquad b_1(x) = \begin{cases} x^2/2, & x \leq 0, \\ 0, & x \geq 0, \end{cases}$$

e daí deduza que a ordem do produto de dois dêsses operadores não é necessàriamente a soma das ordens dos fatôres.

(b) Dê um exemplo para mostrar que o produto de dois operadores diferenciais lineares num intervalo I não está necessàriamente definido no mesmo intervalo.

8. Demonstre que $D^m(a(x)D^n)$ é um operador diferencial linear de ordem $m + n$, expressando-se êste produto na forma canônica como um "polinômio" em D. [Suponha a existência e a continuidade de tôdas as derivadas necessárias de $a(x)$.]

9. Encontre a soma $L_1 + L_2$ de cada um dos seguintes pares de operadores diferenciais lineares.

(a) $L_1 = 2xD + 3, \quad L_2 = xD - 1$

(b) $L_1 = e^x D^2 + D, \quad L_2 = e^{-x}D^2 - D$

(c) $L_1 = xD + 1, \quad L_2 = Dx$

10. Demonstre que a soma de dois operadores diferenciais lineares definidos num intervalo I é o operador diferencial linear em I que se obtém somando-se os correspondentes coeficientes na representação "polinomial' canônica (3-1) dos dados operadores.

11. Sejam

$$L_1 = \sum_{k=0}^{m} a_k(x)D^k \quad \text{e} \quad L_2 = \sum_{k=0}^{n} b_k(x)D^k$$

operadores diferenciais lineares num intervalo I. Demonstre que $L_1 = L_2$ se, e sòmente se, $m = n$, e $a_k(x) \equiv b_k(x)$ para todo k.

12. (a) Demonstre que

$$(aD^m)(bD^n) = (bD^n)(aD^m) = abD^{m+n}$$

sempre que a e b são constantes.

(b) Use (a) e a fórmula geral da distributividade para transformações lineares, estabelecida na Seç. 2-3, para demonstrar que a multiplicação de operadores diferenciais lineares com coeficientes constantes é comutativa. Deduza daí que se pode obter o produto de dois dêsses operadores, encarando-os como polinômios ordinários em D e empregando as regras comuns da álgebra elementar.

13. Decomponha cada um dos seguintes operadores diferenciais lineares em um produto de fatôres irredutíveis de menor ordem.

(a) $D^2 - 3D + 2$

(b) $2D^2 + 5D + 2$

(c) $4D^2 + 4D + 1$

(d) $D^3 - 3D^2 + 4$

(e) $4D^4 + 4D^3 - 7D^2 + D - 2$

(f) $D^4 - 1$

(g) $D^4 + 1$

(h) $D^5 - 1$