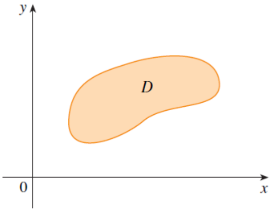
Integrais Duplas sobre Regiões Gerais

Márcio Antônio de Andrade Bortoloti

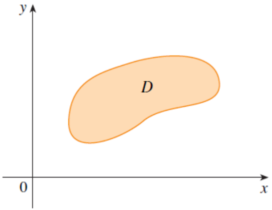
Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas - DCET
Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia

Cálculo III

Seja D a região abaixo.

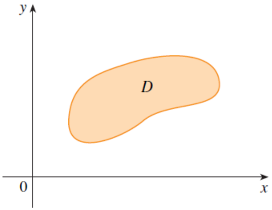


Seja D a região abaixo.



Vamos calcular $\iint_D f(x, y)\, dA$.

Seja D a região abaixo.

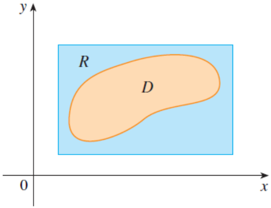


Vamos calcular $\displaystyle\iint_D f(x,y)\,dA$.

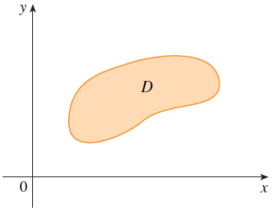
A ideia é definir

$$F(x,y)=\begin{cases} f(x,y) & \text{se } (x,y)\in D\\ 0, & \text{se } (x,y)\in R\backslash D,\end{cases}$$

onde R é retângulo, como na figura abaixo.



Seja D a região abaixo.

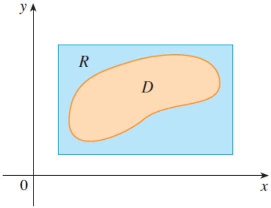


Vamos calcular $\displaystyle\iint_D f(x,y)\,dA$.

A ideia é definir

$$F(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{se } (x,y) \in D \\ 0, & \text{se } (x,y) \in R \backslash D, \end{cases}$$

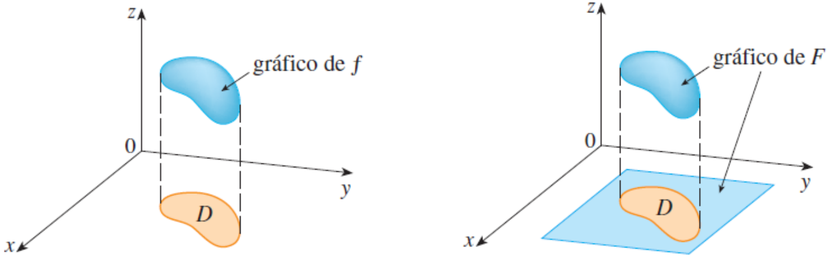
onde R é retângulo, como na figura abaixo.



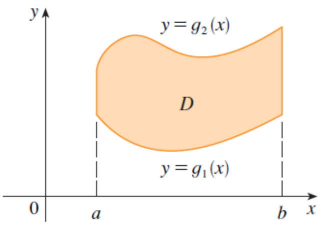
E observar

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \iint_R F(x,y)\,dA.$$

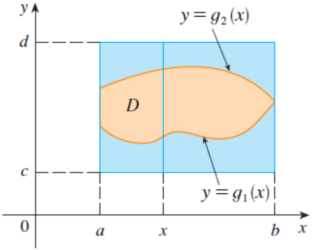
Dessa forma, podemos pensar no seguinte



Os cálculos de integrais duplas sobre regiões gerais serão considerados em tipos de regiões para D. Vamos começar com regiões do tipo I:

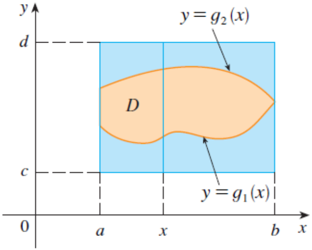


Considerando uma região do tipo I, temos:



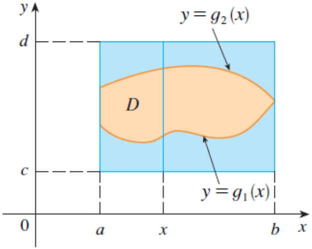
Cálculo de Integrais Duplas sobre Regiões Gerais

Considerando uma região do tipo I, temos:



$$\iint_D f(x, y)\, dA$$

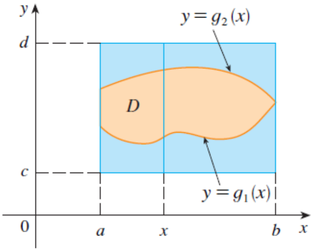
Considerando uma região do tipo I, temos:



$$\iint_D f(x,y)\,dA = \iint_R F(x,y)\,dA$$

Cálculo de Integrais Duplas sobre Regiões Gerais

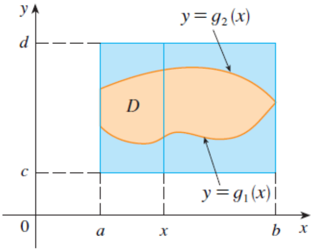
Considerando uma região do tipo I, temos:



$$\iint_D f(x,y)\,dA = \iint_R F(x,y)\,dA = \int_a^b \int_c^d F(x,y)\,dydx$$

Cálculo de Integrais Duplas sobre Regiões Gerais

Considerando uma região do tipo I, temos:

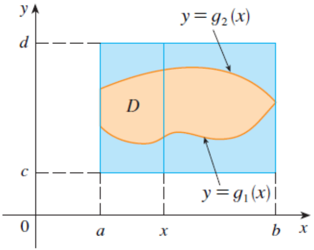


$$\iint_D f(x,y)\,dA = \iint_R F(x,y)\,dA = \int_a^b \int_c^d F(x,y)\,dydx$$

Agora, nota-se que

$$\int_c^d F(x,y)\,dy = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} F(x,y)\,dy$$

Considerando uma região do tipo I, temos:



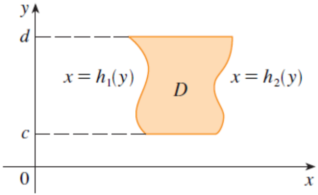
$$\iint_D f(x,y)\, dA = \iint_R F(x,y)\, dA = \int_a^b \int_c^d F(x,y)\, dydx$$

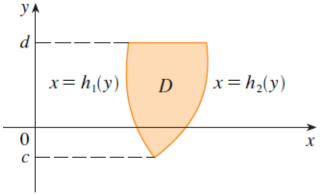
Agora, nota-se que

$$\int_c^d F(x,y)\, dy = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} F(x,y)\, dy = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\, dy$$

Cálculo de Integrais Duplas sobre Regiões Gerais

Agora vamos considerar regiões do tipo II:





Neste caso,

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,dxdy.$$

Exemplo

Determine o volume do sólido que está contido abaixo do parabolóide

$$z = x^2 + y^2$$

e acima da região D do plano xy limitada pela reta $y = 2x$ e pela parábola $y = x^2$.

Exemplo

Determine o volume do sólido que está contido abaixo do parabolóide

$$z = x^2 + y^2$$

e acima da região D do plano xy limitada pela reta $y = 2x$ e pela parábola $y = x^2$.

Solução: Notemos que D é uma região do tipo I e

$$D = \left\{(x, y); 0 \leq x \leq 2, x^2 \leq y \leq 2x\right\}.$$

Exemplo

Determine o volume do sólido que está contido abaixo do parabolóide

$$z = x^2 + y^2$$

e acima da região D do plano xy limitada pela reta $y = 2x$ e pela parábola $y = x^2$.

Solução: Notemos que D é uma região do tipo I e

$$D = \left\{(x, y); 0 \leq x \leq 2, x^2 \leq y \leq 2x\right\}.$$

Logo o volume é dado por

$$V = \iint_D x^2 + y^2 \, dA$$

Exemplo

Determine o volume do sólido que está contido abaixo do parabolóide

$$z = x^2 + y^2$$

e acima da região D do plano xy limitada pela reta $y = 2x$ e pela parábola $y = x^2$.
Solução: Notemos que D é uma região do tipo I e

$$D = \left\{(x, y); 0 \leq x \leq 2, x^2 \leq y \leq 2x\right\}.$$

Logo o volume é dado por

$$V = \iint_D x^2 + y^2 \, dA = \int_0^2 \int_{x^2}^{2x} x^2 + y^2 \, dydx$$

Exemplo

Determine o volume do sólido que está contido abaixo do parabolóide

$$z = x^2 + y^2$$

e acima da região D do plano xy limitada pela reta $y = 2x$ e pela parábola $y = x^2$.
Solução: Notemos que D é uma região do tipo I e

$$D = \left\{(x, y); 0 \leq x \leq 2, x^2 \leq y \leq 2x\right\}.$$

Logo o volume é dado por

$$V = \iint_D x^2 + y^2 \, dA = \int_0^2 \int_{x^2}^{2x} x^2 + y^2 \, dydx = \int_0^2 \left[x^2 y + \frac{y^3}{3}\right]_{y=x^2}^{y=2x} dx$$

Exemplo

Determine o volume do sólido que está contido abaixo do parabolóide

$$z = x^2 + y^2$$

e acima da região D do plano xy limitada pela reta $y = 2x$ e pela parábola $y = x^2$.
Solução: Notemos que D é uma região do tipo I e

$$D = \left\{(x, y); 0 \leq x \leq 2, x^2 \leq y \leq 2x\right\}.$$

Logo o volume é dado por

$$\begin{aligned} V &= \iint_D x^2 + y^2 \, dA = \int_0^2 \int_{x^2}^{2x} x^2 + y^2 \, dydx = \int_0^2 \left[x^2 y + \frac{y^3}{3}\right]_{y=x^2}^{y=2x} dx \\ &= \int_0^2 \left(-\frac{x^6}{3} - x^4 + \frac{14x^3}{3}\right) dx \end{aligned}$$

Exemplo

Determine o volume do sólido que está contido abaixo do parabolóide

$$z = x^2 + y^2$$

e acima da região D do plano xy limitada pela reta $y = 2x$ e pela parábola $y = x^2$.
Solução: Notemos que D é uma região do tipo I e

$$D = \left\{(x, y); 0 \leq x \leq 2, x^2 \leq y \leq 2x\right\}.$$

Logo o volume é dado por

$$\begin{aligned} V &= \iint_D x^2 + y^2\, dA = \int_0^2 \int_{x^2}^{2x} x^2 + y^2\, dydx = \int_0^2 \left[x^2 y + \frac{y^3}{3}\right]_{y=x^2}^{y=2x} dx \\ &= \int_0^2 \left(-\frac{x^6}{3} - x^4 + \frac{14x^3}{3}\right) dx = \left[-\frac{x^7}{21} - \frac{x^5}{5} + \frac{7x^4}{6}\right]_0^2 = \frac{216}{35} \end{aligned}$$

Exemplo

Calcule a integral

$$\int_0^1 \int_x^1 \operatorname{sen}(y^2)\, dydx.$$

Exemplo

Calcule a integral

$$\int_0^1 \int_x^1 \operatorname{sen}(y^2)\, dydx.$$

Solução: Essa integral é complicada se for resolvida na ordem que se apresenta.

Exemplo

Calcule a integral

$$\int_0^1 \int_x^1 \operatorname{sen}(y^2)\, dydx.$$

Solução: Essa integral é complicada se for resolvida na ordem que se apresenta. Contudo se alterarmos a ordem de integração, teremos uma integral mais acessível.

Exemplo

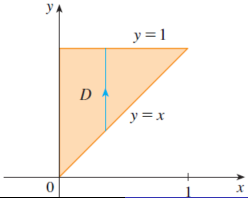
Calcule a integral

$$\int_0^1 \int_x^1 \operatorname{sen}(y^2)\, dydx.$$

Solução: Essa integral é complicada se for resolvida na ordem que se apresenta. Contudo se alterarmos a ordem de integração, teremos uma integral mais acessível. De fato, notemos que

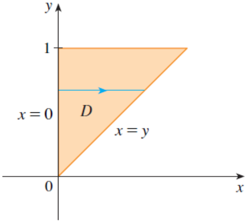
$$\int_0^1 \int_x^1 \operatorname{sen}(y^2)\, dydx = \iint_D \operatorname{sen}(y^2)\, dA,$$

onde $D = \{(x, y); 0 \leq x \leq 1, x \leq y \leq 1\}$.



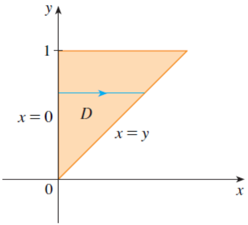
Exemplo

Por outro lado, podemos reinterpretar a figura anterior como



Exemplo

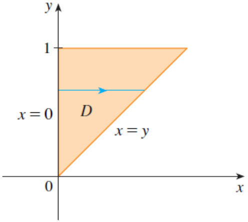
Por outro lado, podemos reinterpretar a figura anterior como



Ou seja, podemos interpretar D como $D = \{(x, y); 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq y\}$.

Exemplo

Por outro lado, podemos reinterpretar a figura anterior como

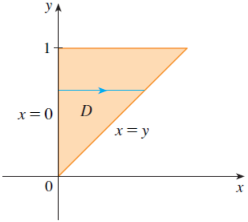


Ou seja, podemos interpretar D como $D = \{(x, y); 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq y\}$. Logo

$$\int_0^1 \int_x^1 \operatorname{sen}(y^2)\, dydx \quad = \quad \iint_D \operatorname{sen}(y^2)\, dA$$

Exemplo

Por outro lado, podemos reinterpretar a figura anterior como

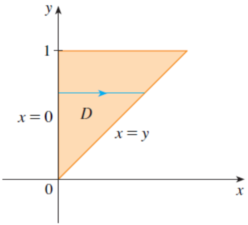


Ou seja, podemos interpretar D como $D = \{(x, y); 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq y\}$. Logo

$$\int_0^1 \int_x^1 \operatorname{sen}(y^2)\, dydx \quad = \quad \iint_D \operatorname{sen}(y^2)\, dA = \int_0^1 \int_0^y \operatorname{sen}(y^2)\, dxdy$$

Exemplo

Por outro lado, podemos reinterpretar a figura anterior como

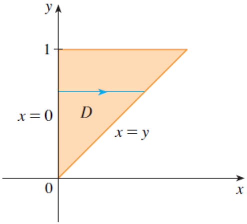


Ou seja, podemos interpretar D como $D = \{(x, y); 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq y\}$. Logo

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_x^1 \operatorname{sen}(y^2)\, dydx &= \iint_D \operatorname{sen}(y^2)\, dA = \int_0^1 \int_0^y \operatorname{sen}(y^2)\, dxdy \\ &= \int_0^1 \left[x \operatorname{sen}(y^2) \right]_{x=0}^{x=y} dy \end{aligned}$$

Exemplo

Por outro lado, podemos reinterpretar a figura anterior como



Ou seja, podemos interpretar D como $D = \{(x,y); 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq y\}$. Logo

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_x^1 \operatorname{sen}(y^2)\, dydx &= \iint_D \operatorname{sen}(y^2)\, dA = \int_0^1 \int_0^y \operatorname{sen}(y^2)\, dxdy \\ &= \int_0^1 \Big[x \operatorname{sen}(y^2) \Big]_{x=0}^{x=y} dy = \Big[-\frac{1}{2} \cos(y^2) \Big]_0^1 = \frac{1}{2}(1 - \cos 1). \end{aligned}$$

Propriedades da Integral Dupla

- $$\iint_D f(x,y) + g(x,y)\, dA = \iint_D f(x,y)\, dA + \iint_D g(x,y)\, dA$$

Propriedades da Integral Dupla

- $\displaystyle\iint_D f(x,y) + g(x,y)\,dA = \iint_D f(x,y)\,dA + \iint_D g(x,y)\,dA$
- $\displaystyle\iint_D \alpha f(x,y)\,dA = \alpha \iint_D f(x,y)\,dA$

Propriedades da Integral Dupla

- $\displaystyle\iint_D f(x,y) + g(x,y)\,dA = \iint_D f(x,y)\,dA + \iint_D g(x,y)\,dA$
- $\displaystyle\iint_D \alpha f(x,y)\,dA = \alpha \iint_D f(x,y)\,dA$
- Se $f(x,y) \geq g(x,y)$ para todo $(x,y) \in D$, $\displaystyle\iint_D f(x,y)\,dA \geq \iint_D g(x,y)\,dA$

Propriedades da Integral Dupla

- $\displaystyle\iint_D f(x,y)+g(x,y)\,dA = \iint_D f(x,y)\,dA + \iint_D g(x,y)\,dA$
- $\displaystyle\iint_D \alpha f(x,y)\,dA = \alpha \iint_D f(x,y)\,dA$
- Se $f(x,y) \geq g(x,y)$ para todo $(x,y) \in D$, $\displaystyle\iint_D f(x,y)\,dA \geq \iint_D g(x,y)\,dA$
- Se $D = D_1 \cup D_2$ com $int(D_1) \cap int(D_2) = \emptyset$,

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \iint_{D_1} f(x,y)\,dA + \iint_{D_2} f(x,y)\,dA$$

Propriedades da Integral Dupla

- $\displaystyle\iint_D f(x,y)+g(x,y)\,dA = \iint_D f(x,y)\,dA + \iint_D g(x,y)\,dA$
- $\displaystyle\iint_D \alpha f(x,y)\,dA = \alpha \iint_D f(x,y)\,dA$
- Se $f(x,y) \geq g(x,y)$ para todo $(x,y) \in D$, $\displaystyle\iint_D f(x,y)\,dA \geq \iint_D g(x,y)\,dA$
- Se $D = D_1 \cup D_2$ com $int(D_1) \cap int(D_2) = \emptyset$,

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \iint_{D_1} f(x,y)\,dA + \iint_{D_2} f(x,y)\,dA$$

- $\displaystyle\iint_D dA = \text{Área}(D)$

Propriedades da Integral Dupla

- $\displaystyle\iint_D f(x,y)+g(x,y)\,dA = \iint_D f(x,y)\,dA + \iint_D g(x,y)\,dA$
- $\displaystyle\iint_D \alpha f(x,y)\,dA = \alpha \iint_D f(x,y)\,dA$
- Se $f(x,y) \geq g(x,y)$ para todo $(x,y) \in D$, $\displaystyle\iint_D f(x,y)\,dA \geq \iint_D g(x,y)\,dA$
- Se $D = D_1 \cup D_2$ com $int(D_1) \cap int(D_2) = \emptyset$,

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \iint_{D_1} f(x,y)\,dA + \iint_{D_2} f(x,y)\,dA$$

- $\displaystyle\iint_D \, dA = \text{Área}(D)$
- Se $m \leq f(x,y) \leq M$ para todo $(x,y) \in D$, então

$$m\text{Área}(D) \leq \iint_D f(x,y)\,dA \leq M\text{Área}(D)$$