Métodos Iterativos

Márcio Antônio de Andrade Bortoloti

Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas - DCET
Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia

Cálculo Numérico

Sumário

Introdução

- São raramente utilizadas em problemas de pequeno porte;
- O tempo necessário para atingir precisão suficiente excede o necessário por técnicas diretas, tais como a eliminação de Gauss;
- Para grandes sistemas com alta porcentagem de elementos nulos, todavia, essas técnicas são eficientes em termos tanto de armazenamento no computador quanto de cálculos;
- Sistemas desse tipo surgem frequentemente na solução numérica de Problemas de Valor de Contorno e Equações Diferenciais Parciais.
- As técnicas iterativas para resolver sistemas são parecidas com aquelas empregadas na solução de equações não lineares.

Introdução

- Nosso objetivo é resolver o sistema
$$Ax = b.$$
- Se o sistema possuir n linhas, para cada linha i, com $i = 1, \cdots, n$, temos
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i.$$
- Que pode ser reescrito como
$$a_{ii}x_i + \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n} a_{ij}x_j = b_i.$$
- Para $a_{ii} \neq 0$ tem-se
$$x_i = \Big(b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n} a_{ij}x_j\Big)a_{ii}^{-1}.$$

Método de Jacobi

- Assim, dado $\mathbf{x}^0 = [x_1^0 \, x_2^0 \, \cdots \, x_n^0]^T$, pode-se construir uma sequência de vetores $\mathbf{x}^k$ tal que

$$x_i^{k+1} = \Big(b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n} a_{ij} x_j^k\Big) a_{ii}^{-1}.$$

- Como condição de parada pode-se tomar uma das seguintes:
  - $\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}_k^k\| < \epsilon$, para algum $\epsilon > 0$.
  - $\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\| / \|\mathbf{x}^{k+1}\| < \epsilon$, para algum $\epsilon > 0$.
  - $\|Ax^{k+1} - b\| < \epsilon$.

Definição

Uma matriz é chamada convergente se

$$\lim_{m \to \infty} A^m = 0.$$

Teorema

Para cada par de normas $\| \cdot \|_1$ *e* $\| \cdot \|_2$ *existem constantes positivas* m, M *tais que para cada matriz* A *tem-se*

$$m\|A\|_1 \leq \|A\|_2 \leq M\|A\|_1.$$

Lema

Para qualquer norma $\|\cdot\|$ e A uma matriz quadrada temos $\rho(A) \leq \|A\|$.

Dem

Seja λ um autovalor de A com autovalor x tal que $\|x\| = 1$. Como $Ax = \lambda x$ tem-se

$$|\lambda| = |\lambda|\|x\| = \|\lambda x\| = \|Ax\| \leq \|A\|\|x\| = \|A\|.$$

Segue que

$$|\lambda| \leq \|A\|$$

para qualquer autovalor de A. Logo

$$\rho(A) = \max|\lambda| \leq \|A\|.$$

Lema

Seja A uma matriz quadrada de ordem n e $\epsilon > 0$. Existe uma norma $\|\cdot\|_{A,\epsilon}$ tal que

$$\|A\|_{A,\epsilon} \leq \rho(A) + \epsilon.$$

Teorema

Seja A uma matriz quadrada de ordem n. Então

$$\lim_{m \to +\infty} A^m = 0$$

se, e somente se, $\rho(A) < 1$.

Dem

Suponha que $\rho(A) < 1$. Então existe $\epsilon > 0$ tal que $\rho(A) < 1 - \epsilon$, ou $\rho(A) + \epsilon < 1$.

Pelo Lema anterior, existe uma norma induzida $\|\cdot\|$ tal que

$$\|A\| \leq \rho(A) + \epsilon < 1.$$

Como

$$\|A^m\| \leq \|A\|^m < 1$$

para todo $m \in \mathbb{N}$, segue que

$$\lim_{m \to +\infty} \|A^m\| = 0.$$

Reciprocamente, suponha que

$$\lim_{k \to +\infty} A^k = 0.$$

Seja λ um autovalor de A associado ao autovetor x. Logo $Ax = \lambda x$.

Assim,

$$\begin{aligned} Ax &= \lambda x \\ A^2x &= \lambda Ax = \lambda^2 x \\ &\vdots \\ A^k x &= \lambda^k x \end{aligned}$$

Como

$$\lim_{k \to +\infty} A^k = 0,$$

segue que

$$\lim_{k \to +\infty} \lambda^k = 0.$$

Logo $|\lambda| < 1$. Asssim $\rho(A) < 1$.

Lema

Se $\rho(A) < 1$ então $(I - A)^{-1}$ existe e

$$(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + \cdots + A^n + \cdots = \sum_{j=0}^{\infty} A^j.$$

Dem

Seja λ um autovalor de A associado ao autovetor x. Logo $Ax = \lambda x$. Temos que $(I - A)x = (1 - \lambda)x$, ou seja, $(1 - \lambda)$ é um autovalor de $(I - A)$. Como $|\lambda| \leq \rho(A) < 1$, $\lambda = 1$ não é um autovalor de A. Como consequência, 0 não pode ser autovalor de $I - A$. Assim

$$(I - A)^{-1}$$

existe. Agora, seja

$$S_m = I + A + A^2 + \cdots + A^m.$$

Segue que

$$(I - A)S_m = (I + A + A^2 + \cdots + A^m) - (A + A^2 + \cdots + A^{m+1}) = I - A^{m+1}.$$

Como A é convergente segue que

$$\lim_{m \to +\infty} (I - A)S_m = \lim_{m \to +\infty} I - A^{m+1} = I.$$

Logo,

$$\sum_{m=0}^{\infty} A^m = \lim_{m \to +\infty} S_m = (I - A)^{-1}.$$

Método de Jacobi

Considere o sistema $Ax = b$. O método de jacobi, dado por

Dado $\mathbf{x}^0$, construa a sequência

$$x_i^{k+1} = \left(b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n} a_{ij} x_j^k\right) a_{ii}^{-1},$$

para cada $i = 1, \cdots, n$.

pode ser escrito da seguinte forma: Escreva $A = L + D + U$, onde D é uma matriz diagonal, L uma matriz triangular inferior e U uma matriz triangular superior. O sistema pode ser escrito como

$$(L + D + U)x = b.$$

Logo, podemos escrever

$$Dx + (L+U)x = b.$$

Assim, temos

$$Dx = b - (L+U)x,$$

ou

$$x = D^{-1}b - D^{-1}(L+U)x.$$

Para um x^0 dado, podemos escrever

$$x^{k+1} = D^{-1}b - D^{-1}(L+U)x^k,$$

ou

$$x^{k+1} = c + Tx^k,$$

com $c = D^{-1}b$ e $T = -D^{-1}(L+U)$.

Teorema

Para cada $x_0 \in \mathbb{R}^n$*, a sequência* $\{x_k\}$ *definida por*

$$x^{k+1} = Tx^k + c, \quad x^k \in \mathbb{R}^n,$$

converge para a única solução de $x = Tx + c$ *se e somente se* $\rho(T) < 1$*.*

Dem

Suponha que $\rho(T) < 1$. Temos

$$\begin{aligned}
x^k &= Tx^{k-1} + c \\
&= T(Tx^{k-2} + c) + c \\
&= T^2 x^{k-2} + (T + I)c \\
&\vdots \\
&= T^k x^0 + (T^{k-1} + \cdots + T + I)c
\end{aligned}$$

Como $\rho(T) < 1$, a matriz T é convergente. Logo

$$\lim_{k\to+\infty} T^k x^0 = 0.$$

Segue então que

$$\lim_{k\to+\infty} x^k = \lim_{k\to+\infty} T^k x^0 + \left(\sum_{j=0}^{\infty} T^j\right) c = 0 + (I-T)^{-1}c = (I-T)^{-1}c$$

Assim, a sequência x^k converge para $x = (I-T)^{-1}c$. Logo $x = Tx + c$. Reciprocamente, vamos mostrar que para qualquer $z \in \mathbb{R}^n$, temos

$$\lim_{k\to+\infty} T^k z = 0,$$

o que é equivalente a $\rho(T) < 1$.

Seja $z \in \mathbb{R}^n$ um vetor qualquer e x a solução única de $x = Tx + c$. Defina $x^0 = x - z$ e $x^k = Tx^{k-1} + c$. Então $\{x_k\}$ converge para x (hipótese). Além disso,

$$x - x^k = (Tx + c) - (Tx^{k-1} + c) = T(x - x^{k-1}).$$

Logo,

$$x - x^k = T(x - x^{k-1}) = T^2(x - x^{k-2}) = \cdots = T^k(x - x^0) = T^k z.$$

Logo

$$\lim_{k \to +\infty} T^k z = \lim_{k \to +\infty} T^k(x - x^0) = \lim_{k \to +\infty} (x - x^k) = 0.$$

Como $z \in \mathbb{R}^n$ é arbitário, isso implica em T ser convergente e que $\rho(T) < 1$.

Método de Gauss-Seidel

- O Método de Gauss-Seidel apresenta-se como uma pequena variação do Método de Jacobi.
- Assim, dado $\mathbf{x}^0 = [x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0]^T$, pode-se construir uma sequência de vetores $\mathbf{x}^k$ tal que

$$x_i^{k+1} = \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{k+1} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^k\right)a_{ii}^{-1}.$$

- Como condição de parada pode-se tomar uma das seguintes:
  - $\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}_k^k\| < \epsilon$, para algum $\epsilon > 0$.
  - $\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\|/\|\mathbf{x}^{k+1}\| < \epsilon$, para algum $\epsilon > 0$.
- O Método de Jacobi $\mathbf{x}^{k+1}$ é totalmente determinado usando-se as componentes de $\mathbf{x}^k$.
- O Método de Gauss-Seidel determina $\mathbf{x}^{k+1}$ usando as componentes de $\mathbf{x}^k$ e de $\mathbf{x}^{k+1}$ já determinadas, com a vantagem de não exigir o armazenamento simultâneo dos vetores $\mathbf{x}^{k+1}$ e $\mathbf{x}^k$.

Método da Sobre-relaxação

- Este método é concebido por meio de uma modificação do Método de Gauss-Seidel, objetivando acelerar a convergência da sequeência.
- Nota-se que a equação do Método de Gauss-Seidel,

$$x_i^{k+1} = \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{k+1} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^k\right)a_{ii}^{-1}.$$

pode ser reescrita como

$$x_i^{k+1} = x_i^k + r_i^k, \quad i = 1, \cdots, n.$$

onde

$$r_i^k = \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{k+1} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^k\right)a_{ii}^{-1}$$

- Vamos modificar o método de Gauss-Seidel, fazendo

$$x_i^{k+1} = x_i^k + wr_i^k, \quad i = 1, \cdots, n.$$

onde w é um parâmetro de relaxação escolhido convenientemente.
- Se $w = 1$ o método é o de Gauss-Seidel.