A teoria geral das equações diferenciais lineares
Operadores diferenciais lineares

Marcio Antônio de Andrade Bortoloti
mbortoloti@uesb.edu.br
https://mbortoloti.github.io

Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas - DCET
Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia

Equações Diferenciais

Nome da Disciplina: Equações Diferenciais - DCET0116

Carga Horária: 60 h

Ementa: Introdução às equações diferenciais. Equações diferenciais ordinárias de primeira ordem. Equações diferenciais ordinárias lineares.

Horário do curso: Segundas e Quartas de 13:00h às 14:40h.

Pré-requisitos: Cálculo, Geometria Analítica e Álgebra Linear

Datas das provas:

- P1: 02/03/2022
- P2: 06/04/2022
- P3: 18/05/2022

$$\boxed{ax^2 + bx + c = 0}$$

Equação Algébrica

f^{-1}

f

Determine $y(x)$ tal que

$$y'(x) = e^x$$

$$\boxed{y(x) = \int e^x dx + C.}$$

Equação Diferencial

$$\boxed{y'' + y^2 y' + y = 0.}$$

Organização do Conteúdo por Unidade

Unidade I - A teoria geral das equações diferenciais lineares

Operadores diferenciais lineares. Equações diferenciais lineares. Equações de primeira ordem. Existência e unicidade de soluções: problemas de valor inicial. Dimensão do espaço de soluções. O Wronskiano. Fórmula de Abel. A equação $y'' + y = 0$.

Unidade II - Equações a coeficientes constantes

Equações homogêneas de ordem 2. Equações homogêneas de ordem arbitrária. Equações não homogêneas: variação de parâmetros e funções de Green. Redução de ordem. O método dos coeficientes a determinar. Equação de Euler. Aplicações elementares.

Unidade III - A transformada de Laplace

Definição da transformada de Laplace. A transformada de Laplace como uma transformação linear. A transformada de Laplace e Equações Diferenciais. O teorema da convolução. Funções de Green para operadores diferenciais lineares a coeficientes constantes. Aplicações.

Avaliação

Uma prova individual para cada unidade. A média final será calculada por meio da média aritmética simples das notas de cada unidade.

Referências

1. Kreider, Kuller, Ostberg, Equações Direfenciais, Edgar Blucher, 1972.
2. Boyce, W. E., DiPrima, R. C., Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno, LTC, 2002.
3. Braun, M., Equações Diferenciais e suas Aplicações, Editora Campus, 1979.
4. Coddington, E. A., An Introduction to Ordinary Differential Equations, Dover, 1961.
5. de Figueiredo, D. G, Neves, A. F., Equações Diferenciais Aplicadas, Coleção Matemática Universitária, IMPA, 2007.
6. Kreider, D. et all, Introdução à Análise Linear, Volume 1, Ao Livro Técnico S/A, 1972.
7. Machado, K. D., Equações Diferenciais Aplicadas à Física, Editora UEPG, 3a Edição, 2004.
8. de Oliveira, E. C., Tygel, M., Métodos Matemáticos para Engenharia, Textos Universitários, SBM, 2010.
9. Zill, D. G., Equações Diferenciais com Aplicações em Modelagem, Thomson, 2003.

Operadores Diferenciais (Lineares)

Transformação linear: Sejam V e W dois espaços vetoriais.
A aplicação

$$
\begin{aligned}
T : V &\longrightarrow W \\
v &\longmapsto Tv
\end{aligned}
$$

tal que

(i) $T(u+v) = Tu + Tv$

(ii) $T(\alpha u) = \alpha Tu$

é chamada transformação linear.

Definição: Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo. Definimos $\mathcal{C}^n(I)$, como o espaço vetorial de todas as funções $f: I \to \mathbb{R}$ tais que $\frac{d^n f}{dx^n}$ é contínua em I, onde n é a ordem da derivada.

$$\frac{d^0 f}{dx^0} = f$$

Note que se $f, g \in \mathcal{C}^n(I)$ então

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \in \mathcal{C}^n(I)$$

$$(\alpha \cdot f)(x) = \alpha f(x) \in \mathcal{C}^n(I)$$

Observação: $\langle \mathcal{C}^n(I), +, \cdot \rangle$ é um espaço vetorial. (Dever de Casa)

Observação: $\mathcal{C}^0(I)$ é o espaço vetorial das funções contínuas.

Notação: $\mathcal{C}^0(I) = \mathcal{C}(I)$.

A teoria geral das equações diferenciais lineares

Definição: Definimos o operador diferencial

$$D : C^1(I) \longrightarrow C(I)$$

pondo

$$D(f(x)) = f'(x).$$

Exemplo:

$$D(x^2 e^x) = D(x^2)e^x + x^2 D(e^x)$$
$$= 2x e^x + x^2 e^x$$

Definição: Seja $n \in \mathbb{N}$. Definimos indutivamente D^n da forma

$$D^n(f(x)) = D^{n-1} D(f(x)).$$

Exemplo:

$$D^3(x^5) = D^2(D(x^5)) = D^2(5x^4) = D(D(5x^4))$$

$$= D(20x^3) = 60x^2.$$

$$L(f)$$

Definição: Uma transformação linear

$$L: C^n(I) \longrightarrow C(I)$$

diz-se um operador diferencial linear de ordem n, no intervalo I, se puder ser escrito da forma

$$L(\ ) = a_n(x)D^n(\ ) + a_{n-1}(x)D^{n-1}(\ ) + \cdots + a_1(x)D(\ ) + a_0(x)I(\ )$$

onde $a_i \in C(I)$ e $a_n(x)$ não é identicamente nula em I.

Segue da definição anterior que

$$L(f(x)) = a_n(x)D^n(f(x)) + a_{n-1}(x)D^{n-1}f(x) + \cdots + a_1(x)D(f(x)) + a_0(x)f(x).$$

Lembre-se que

$$D^n(f(x)) = \frac{d^n f(x)}{dx^n}.$$

$D^0 \downarrow I$

Exemplo: O operador linear

$$L = xD^2 + \operatorname{sen} x\, D + e^x I$$

$a_2(x) = x$

$a_1(x) = \operatorname{sen} x$

$a_0(x) = e^x.$

é um operador de ordem 2 em $[0, +\infty)$.

$$L(x^2) = xD^2(x^2) + \operatorname{sen} x\, D(x^2) + e^x x^2$$
$$= 2x + 2x \operatorname{sen} x + e^x x^2.$$

Exemplo: O operador

$$L = (x + |x|)D^2 - \sqrt{x+1}\,D + \ln(x+1)$$

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

é de ordem 2 em $(-1, 1)$, porém é de ordem 1 em $(-1, 0]$.

Note que para $x \in (0, 1)$ temos

$$L = 2x D^2 - \sqrt{x+1}\,D + \ln(x+1).$$

Se $x \in (-1, 0]$ então

$$L = -\sqrt{x+1}\,D + \ln(x+1)$$

Operador de ordem 1.

Obs: A ordem de um operador diferencial pode depender do intervalo em que está sendo considerado.