decompondo o operador $D^2 + a_1D + a_0$ em fatôres lineares. Com esta finalidade, encontramos primeiro as raízes α_1, α_2 da equação do segundo grau

$$m^2 + a_1m + a_0 = 0 \tag{4–6}$$

conhecida como a *equação auxiliar* ou *característica* de (4-5) e, a seguir, reescrevemos (4-5) como

$$(D - \alpha_1)(D - \alpha_2)y = 0. \tag{4–7}$$

Isto pôsto, recaímos em vários casos que dependem da natureza de α_1 e α_2, como segue:

Caso 1. α_1 e α_2 reais e desiguais. Aplica-se aqui, sem modificação, o raciocínio utilizado no exemplo acima; as funções $e^{\alpha_1 x}$ e $e^{\alpha_2 x}$ são soluções linearmente independentes de (4-7) e

$$y = c_1e^{\alpha_1 x} + c_2e^{\alpha_2 x}$$

é a solução geral.

Caso 2. $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$. Neste caso, (4-7) torna-se

$$(D - \alpha)^2y = 0, \tag{4–8}$$

e nosso argumento inicial oferece apenas uma solução da equação, a saber, $e^{\alpha x}$ Utilizando-a, contudo, podemos aplicar o método introduzido na Seç. 3-7 para encontrar uma segunda solução linearmente independente, resolvendo a equação de primeira ordem

$$W[e^{\alpha x}, y(x)] = e^{2\alpha x}.$$

Um cálculo simples mostra que $y(x) = xe^{\alpha x}$, a menos de constantes multiplicativas e, a seguir, que a solução geral de (4-8) é

$$y = (c_1 + c_2x)e^{\alpha x}.$$

Caso 3. α_1 e α_2 *complexos*. Aqui, $\alpha_1 = a + bi$, $\alpha_2 = a - bi$, a e b reais, $b > 0$, e o método acima aparentemente falha. Todavia, se pretendemos que $e^{\alpha_1 x}$ e $e^{\alpha_2 x}$ continuem a ter sentido quando α_1 e α_2 são complexos,* a discussão do Caso 1 implicaria que a solução geral de (4-7) é

$$\begin{aligned} y &= c_1e^{\alpha_1 x} + c_2e^{\alpha_2 x} \\ &= c_1e^{(a+bi)x} + c_2e^{(a-bi)x} \\ &= e^{ax}(c_1e^{ibx} + c_2e^{-ibx}). \end{aligned}$$

Neste ponto, invocamos a famosa fórmula de Euler

$$e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x$$

* Interpretados convenientemente, êles têm sentido, conforme o leitor pode verificar, consultando qualquer texto sôbre a teoria de funções de uma variável complexa.

(veja Exercício 34), para reescrever esta expressão como

$$\begin{aligned} y &= e^{ax}[c_1(\cos bx + i \operatorname{sen} bx) + c_2(\cos bx - i \operatorname{sen} bx)] \\ &= e^{ax}[(c_1 + c_2)\cos bx + i(c_1 - c_2)\operatorname{sen} bx] \\ &= c_3e^{ax}\cos bx + c_4e^{ax}\operatorname{sen} bx. \end{aligned}$$

Assim, de maneira puramente formal somos levados a $e^{ax}\cos bx$ e $e^{ax}\operatorname{sen} bx$ como uma base para o espaço solução de (4-7), quando $\alpha_1 = a + bi$ e $\alpha_2 = a - bi$. É claro que devemos agora verificar se estas funções realmente são soluções da equação dada e que elas são linearmente independentes em $\mathcal{C}(-\infty, \infty)$. Mas isto é rotineiro e é deixado como um exercício para o leitor.

Como êstes três casos incluem tôdas as combinações possíveis de α_1 e α_2, temos completada a tarefa de resolver a equação diferencial linear homogênea de segunda ordem com coeficientes constantes. Para comodidade de consulta, concluímos, resumindo os nossos resultados.

Para resolver uma equação diferencial linear homogênea de segunda ordem da forma

$$(D^2 + a_1D + a_0)y = 0,$$

primeiro encontramos as raízes α_1 e α_2 da equação auxiliar

$$m^2 + a_1m + a_0 = 0.$$

A seguir, a solução geral da equação dada pode ser expressa em têrmos de α_1 e α_2 como segue:

α_1, α_2	*Solução Geral*
Reais, $\alpha_1 \neq \alpha_2$	$c_1e^{\alpha_1 x} + c_2e^{\alpha_2 x}$
Reais, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$	$(c_1 + c_2x)e^{\alpha x}$
Complexas, $\alpha_1 = a + bi$, $\alpha_2 = a - bi$	$e^{ax}(c_1\cos bx + c_2\operatorname{sen} bx)$

EXERCÍCIOS

Encontre a solução geral de cada uma das seguintes equações diferenciais.

1. $y'' + y' - 2y = 0.$
2. $3y'' - 5y' + 2y = 0.$
3. $8y'' + 14y' - 15y = 0.$
4. $y'' - 2y' = 0.$
5. $y'' + 4y = 0.$
6. $3y'' + 2y = 0.$
7. $y'' + 4y' + 8y = 0.$
8. $4y'' - 4y' + 3y = 0.$

9. $y'' - 2y' + 2y = 0.$

10. $9y'' - 12y' + 4y = 0.$

11. $y'' + 2y' + 4y = 0.$

12. $2y'' - 2\sqrt{2}\,y' + y = 0.$

13. $2y'' - 5\sqrt{3}\,y' + 6y = 0.$

14. $9y'' + 6y' + y = 0.$

15. $64y'' - 48y' + 17y = 0.$

Nos Exercícios de 16 a 25 encontre as soluções dos problemas de valor inicial dados.

16. $2y'' - y' - 3y = 0;\ y(0) = 2,\ y'(0) = -\frac{7}{2}.$

17. $y'' - 8y' + 16y = 0;\ y(0) = \frac{1}{2},\ y'(0) = -\frac{1}{3}.$

18. $4y'' - 12y' + 9y = 0;\ y(0) = 1,\ y'(0) = \frac{7}{2}.$

19. $y'' + 2y = 0;\ y(0) = 2,\ y'(0) = 2\sqrt{2}.$

20. $4y'' - 4y' + 5y = 0;\ y(0) = \frac{1}{2},\ y'(0) = 1.$

21. $y'' + 4y' + 13y = 0;\ y(0) = 0,\ y'(0) = -2.$

22. $9y'' - 3y' - 2y = 0;\ y(0) = 3,\ y'(0) = 1.$

23. $y'' - 2\sqrt{5}\,y' + 5y = 0;\ y(0) = 0,\ y'(0) = 3.$

24. $16y'' + 8y' + 5y = 0;\ y(0) = 4,\ y'(0) = -1.$

25 $y'' - \sqrt{2}\,y' + y = 0;\ y(0) = \sqrt{2},\ y'(0) = 0.$

26. Demonstre que $e^{\alpha_1 x}$ e $e^{\alpha_2 x}$ são linearmente independentes em $\mathcal{C}(-\infty, \infty)$ sempre que α_1 e α_2 são números reais distintos.

27. Verifique que $xe^{\alpha x}$ é uma solução da equação de segunda ordem $(D - \alpha)^2 y = 0$. Demonstre que esta solução e $e^{\alpha x}$ são linearmente independentes em $\mathcal{C}(-\infty, \infty)$.

28. Comprove que $e^{ax} \cos bx$ e e^{ax} sen bx são soluções linearmente independentes da equação

$$(D - \alpha_1)(D - \alpha_2)y = 0$$

quando $\alpha_1 = a + bi$ e $\alpha_2 = a - bi,\ b \neq 0.$

29. Encontre uma equação diferencial linear com coeficientes constantes cuja solução geral seja

(a) $(c_1 + c_2 x)e^{-3x}.$ (b) $c_1 e^x \operatorname{sen} 2x + c_2 e^x \cos 2x.$

(c) $(c_1 + c_2 x)e^{-2x} + 1.$ (d) $c_1 e^{-x} + c_2 e^{-3x} + x + 4$

(e) $c_1 \operatorname{sen} 3x + c_2 \cos 3x + x/3.$

30. Para cada uma das seguintes funções encontre uma equação diferencial linear com coeficientes constantes que tenha a função dada como solução particular.

(a) $x(1 + e^x).$ (b) $4 \operatorname{sen} x \cos x.$

(c) $(1 + 2e^x)e^{2x} + 6x + 5.$ (d) $\cos x(1 - 4\operatorname{sen}^2 x)$

(e) $e^{3x} + e^{2x} + xe^{3x}.$

31. (a) Mostre que a solução geral da equação de segunda ordem

$$[D^2 - 2aD + (a^2 + b^2)]y = 0$$

pode ser escrita sob a forma

$$y = c_1 e^{ax} \cos (bx + c_2),$$

sendo c_1 e c_2 constantes arbitrárias. Esta forma é, freqüentemente, chamada forma *fase-amplitude* da solução. Por quê?

(b) Escreva a solução geral de $(D^2 + 4)y = 0$ na forma fase-amplitude.

32. Se $L = (D - \alpha)^2$, sendo α real, mostre que

$$Le^{kx} = (k - \alpha)^2 e^{kx}.$$

Derive ambos os membros desta identidade com relação a k para demonstrar que

$$Lxe^{kx} = (k - \alpha)[2e^{kx} + k(k - \alpha)e^{kx}],$$

e, então, mostre que $xe^{\alpha x}$ é uma solução de $Ly = 0$

33. (a) Encontre a solução de

$$(D^2 - 2D + 26)y = 0$$

cujo gráfico passa pelo ponto (0, 1) com inclinação 2.

(b) Resolva o problema dado em (a), desta vez escrevendo a solução geral da forma

$$y = c_1 e^{(a+bi)x} + c_2 e^{(a-bi)}$$

Calcule c_1 e c_2, formalmente, e, a seguir, aplique a fórmula de Euler para mostrar que a solução resultante pode transformar-se na solução encontrada em (a).

***34.** A função e^z, sendo z um número complexo, é definida pela série infinita

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots,$$

e se pode mostrar que esta série converge absolutamente para todos os valôres de z.* Faça $z = ix$ nesta série e lance mão do fato segundo o qual $i^2 = -1$, para demonstrar a fórmula de Euler. [*Sugestão*: Desde que a série é absolutamente convergente para todo z, seus têrmos podem ser reagrupados à vontade.]

* Por definição, o valor absoluto, ou *módulo*, de um número complexo $z = a + bi$ é o número real $\sqrt{a^2 + b^2}$. Diz-se que a série $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ de números complexos converge absolutamente se a série $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ de números reais converge no sentido usual.