$$f(t)=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin(n\omega t+\varphi_n)$$

$$\downarrow$$

$$f(t)=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n(\sin\varphi_n\cos n\omega t+\cos\varphi_n\sin n\omega t)\right]$$

$$=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos n\omega t+b_n\sin n\omega t\right]$$

$$\left(a_0=2A_0,\quad a_n=A_n\sin\varphi_n,\quad b_n=A_n\cos\varphi_n\right)$$

要求 a_0, a_n, b_n.

作积分: $\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\,dt=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}dt+\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos n\omega t+b_n\sin n\omega t\right]$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}dt+0$$

$$=a_0\pi$$

得出 $a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)dt$

三角函数正交性

$\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx=0$ $n=1,2,\cdots$

$\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,dx=0$ $n=1,2,\cdots$

$\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\cos nx\,dx=0$ $n=1,2,\cdots$

$\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\cos nx\,dx=0$ $k\neq n$

$\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\sin nx\,dx=0$ $k\neq n$

乘 $\cos k\omega t$:

$$f(t)\cdot\cos k\omega t=\frac{a_0}{2}\cos k\omega t+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos n\omega t\cos k\omega t+b_n\sin n\omega t\cos k\omega t\right]$$

$$\downarrow$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos k\omega t\,dt=\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}\cos k\omega t\,dt}_{0}+\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos n\omega t\cos k\omega t+\underbrace{b_n\sin n\omega t\cos k\omega t}_{0}\right]dt$$

$$=a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 n\omega t\,dt$$

$$=\frac{a_n}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(1+\cos 2n\omega t)\,dt$$

$$=\pi a_n$$

$\therefore$ 得出 $a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos k\omega t\,dt$

同理乘 $\sin k\omega t$ 再积分可以得出.

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin n\omega t\,dt.$$

综上: $f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos n\omega t+b_n\sin n\omega t\right]$

$$\begin{cases}a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)dt\\ a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos n\omega t\,dt. & 求偶\\ b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin n\omega t\,dt & 求奇\end{cases}$$

继续推导以寻求更简洁的表达形式

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n\cos n\omega t + b_n\sin n\omega t]$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\left(\frac{e^{jn\omega t}+e^{-jn\omega t}}{2}\right) + b_n\left(\frac{e^{jn\omega t}-e^{-jn\omega t}}{2j}\right)\right]$$

$$= \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}[(a_n - jb_n)e^{jn\omega t} + (a_n + jb_n)e^{-jn\omega t}]$$

$$= \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - jb_n)e^{jn\omega t} + \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{-1}(a_n - jb_n)e^{jn\omega t} \qquad b_{-n} = -b_n \quad a_{-n} = a_n$$

$$= \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(a_n - jb_n)e^{jn\omega t}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty}F_n e^{jn\omega t} \qquad F_0 = a_0/2, \quad F_n = \frac{1}{2}(a_n - jb_n)$$

计算: $F_n = \frac{1}{2}(a_n - jb_n)$

代入 a_n, b_n:
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)[\cos n\omega t - j\sin n\omega t]\,dt.$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-jn\omega t}\,dt.$$

综上:
$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}F_n e^{jn\omega t} \qquad \begin{cases} F_0 = \frac{a_0}{2} \\ F_n = \frac{1}{2}(a_n - jb_n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-jn\omega t}\,dt. \end{cases}$$

特殊的: 当 $f(t)$ 为奇信号 $a_n = 0$, $F_n = -\frac{1}{2}jb_n$

当 $f(t)$ 为偶信号 $b_n = 0$, $F_n = \frac{1}{2}a_n$

可以看出上述推导都是于函数为周期函数的基础下推导的，对于非周期函数，可以看作 $T\to\infty$，以此推导。

令 $F(j\omega)=\lim\limits_{T\to\infty}F_n\cdot T=\lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)e^{-jn\omega_0 t}dt\cdot T.$

$=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt$

（$\omega_0=\frac{2\pi}{T}\to 0$，$n\omega_0\Rightarrow\omega$ 可以看作是连续的）

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}F_n e^{+jn\omega_0 t}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}F_n e^{+j\omega t}.$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{F_n}{\frac{1}{T}\cdot\frac{2\pi}{\omega}}e^{+j\omega t}$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}F_n\cdot T\cdot\frac{1}{2\pi}d\omega\ e^{j\omega t}$$ $\omega\to 0$

$$=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}F(j\omega)\cdot\frac{1}{2\pi}d\omega.\ e^{j\omega t}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

至此有了傅里叶变换对：

$$F(j\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt$$

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

上述又要求 $f(t)$ 必须是绝对可积的，因此还可以做进一步改进。

令 $g(t)=f(t)e^{-\sigma t}$，只要 σ 足够大，$g(t)$ 一定会收敛，即可以采用傅里叶变换。

$$\mathcal{F}[g(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-\sigma t} e^{-j\omega t} dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-(\sigma+j\omega)t} dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-st} dt \qquad \text{令 } \sigma+j\omega = s$$

$$= F(s)$$

可以推出拉氏变换对：

$$F(s) = \int_{0}^{+\infty} f(t) e^{-st} dt$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s) e^{st} ds$$