Chapitre 3 :
Variables aléatoires réelles continues

3.1 Particularités des lois continues

- Ses valeurs sont des nombres réels
- Utilise une fonction de densité de probabilité :
  - positive, intégrable , $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$; $P(a<X<b)=\int_a^b f(x)dx$
- Fonction de probabilité cumulative :

$$F(x) = P(X < x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

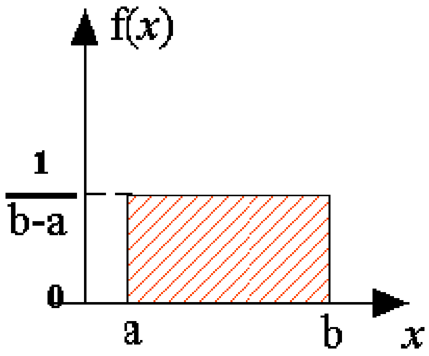
- Espérance : $\mu(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\, dx$
- Variance : $\sigma^2(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x - \mu(x)\right)^2 f(x)\, dx$

3.2 Lois continues usuelles

- 3.2.1 Loi uniforme
- 3.2.2 Loi de Gauss ou Loi normale
- 3.2.3 Loi de χ^2 de Pearson
- 3.2.4 Loi de Fisher-Snedecor
- 3.2.5 Loi de Student

3.5.1 Loi uniforme

Une variable continue est **uniforme** sur [a,b] si la valeur de sa fonction densité de probabilité est constante pour tout x Є [a,b]



Fonction de densité de probabilité

Densité de probabilité: $f : \mathrm{R} \rightarrow \mathrm{R}^{+}$

$$f(x) = \frac{1}{b-a} \quad \text{si } x \in [a,b] \text{ et } f(x) = 0 \text{ si } x \notin [a,b]$$

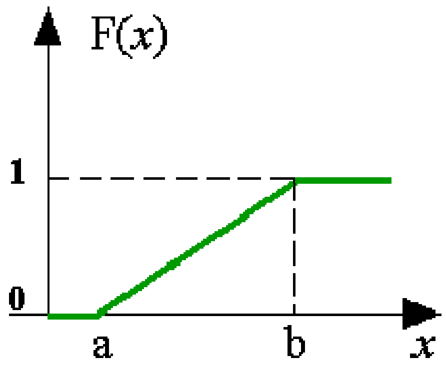
$$p(\alpha < X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{\text{b-a}} [x]_{\alpha}^{\beta} = \frac{\beta - \alpha}{b-a}$$

3.5.1 Loi uniforme

Fonction de répartition:

$$F(x) = \frac{x-a}{b-a} \quad \text{si } x \in [a, b]$$

$$F(x) = 0 \text{ si } x < a, \;\; F(x) = 1 \text{ si } x > b$$



Fonction de répartition

$$E(X) = \frac{b+a}{2}$$

$$V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

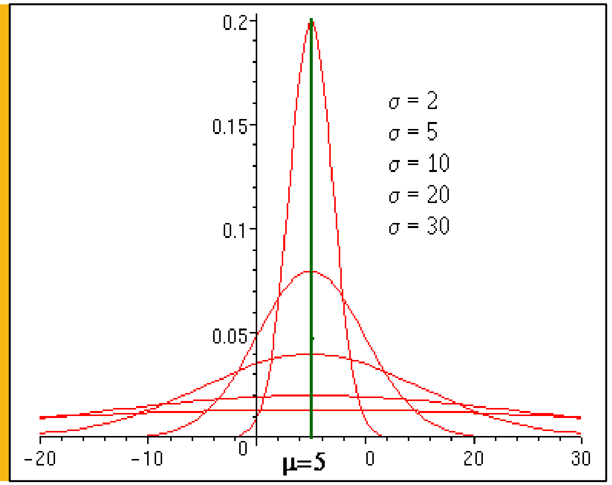
3.5.2 Loi de Gauss ou Loi Normale

Une variable aléatoire est une variable normale quand elle dépend d'un grand nombre de causes indépendantes dont aucune n'est prépondérante

Densité de probabilité : $f : \mathrm{R} \rightarrow \mathrm{R}^{+}$

notée

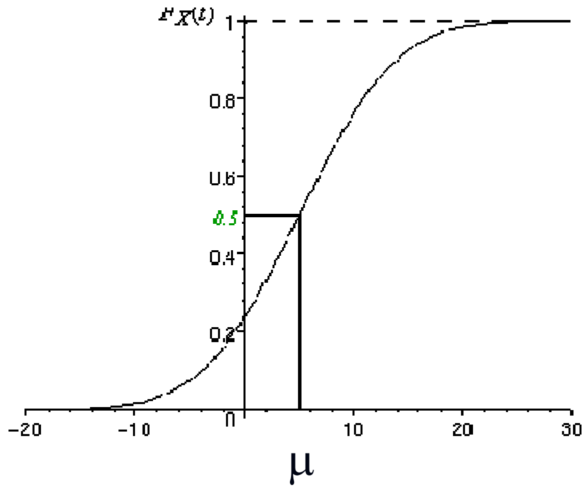
$$\mathcal{N}(m;\sigma) \qquad \mathrm{f(x)} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^{2}}$$



3.5.2 Loi de Gauss ou Loi Normale

Fonction de répartition

$$F(u) = \int_{-\infty}^{u} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2} dx$$



$$E(X) = m$$

$$V(X) = \sigma^2$$

3.5.2 Loi de Gauss ou Loi Normale

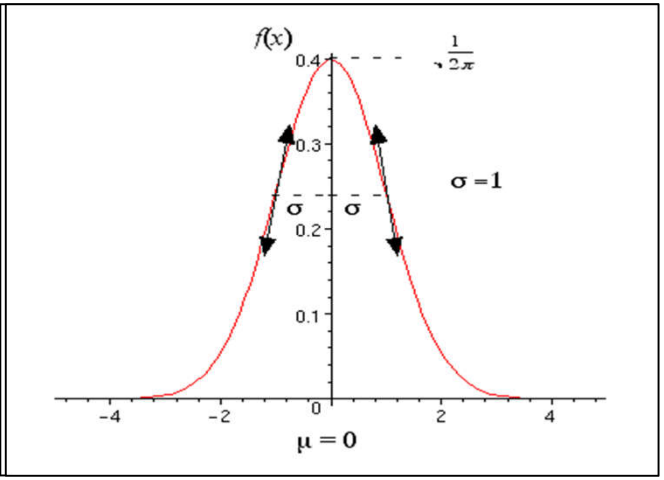
Une variable normale réduite a pour densité de probabilité :

Densité de probabilité: $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$

notée

$\mathcal{N}(0;1)$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$$



$$E(X) = 0$$

$$V(X) = 1$$

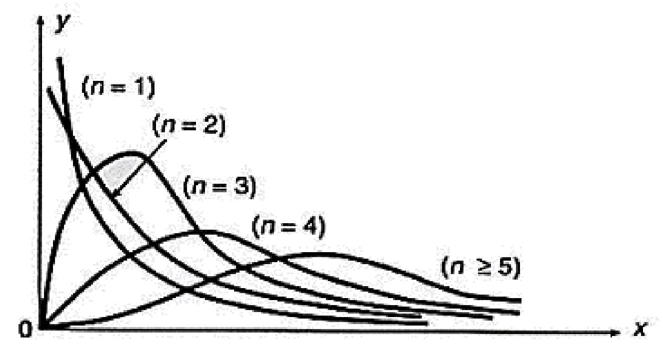
3.5.3 Loi du χ^2 de Pearson

On appelle χ^2 à n degrés de liberté la variable aléatoire définie par :

$$\chi^2 = X_1^2 + X_2^2 \ldots + X_i^2 \ldots . + X_n^2 \quad \text{avec} \quad X_i \sim \mathcal{N}(0,1)$$

Densité de probabilité: $f : R \rightarrow R^+$

$$f(\chi^2) = c\,\chi^{n-2} e^{-\frac{1}{2}\chi^2}$$



$$E(\chi^2) = n$$

$$V(\chi^2) = 2n$$

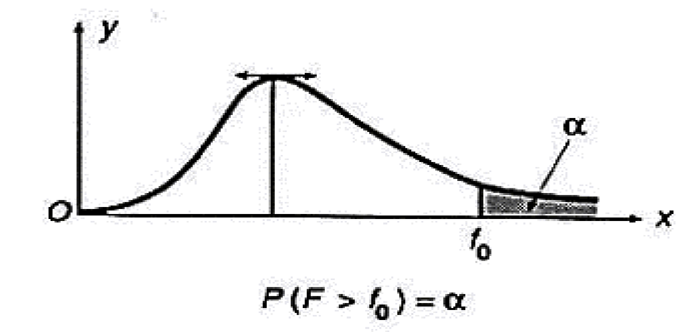
3.5.4 Loi de Fisher-Snedecor

On appelle F à n et p degrés de liberté la variable aléatoire définie par :

$$F = \frac{U/n}{V/p} \quad \text{avec} \quad U \sim \chi^2 \text{ à n ddl et } V \sim \chi^2 \text{ à p ddl}$$

Densité de probabilité: $f : R \to R^+$

$$f(F) = cF^{\frac{n}{2}-1}(p + nF)^{-\left(\frac{n+p}{2}\right)}$$



$$E(F) = \frac{p}{p-2}$$

$$V(F) = 2\frac{p^2(n+p-2)}{n(p-2)^2(p-4)}$$

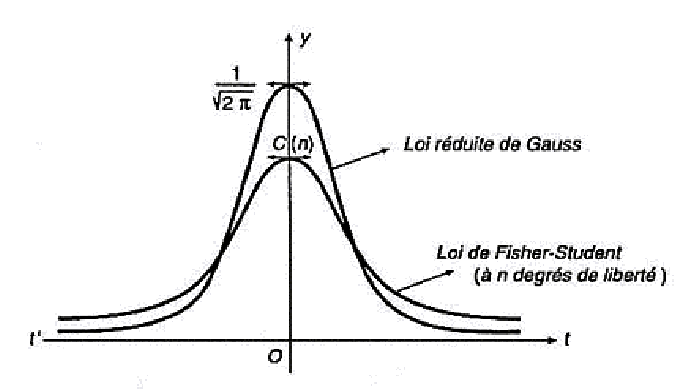
3.5.5 Loi de Student

On appelle T à n degrés de liberté la variable aléatoire définie par :

$$T = \frac{U}{\sqrt{V/n}} \quad \text{avec } U \sim \mathcal{N}(0,1) \text{ et } V \sim \chi^2 \text{ à n ddl}$$

Densité de probabilité: $f : R \to R^+$

$$f(T) = c\left(1 + \frac{T^2}{n}\right)^{-\left(\frac{n+1}{2}\right)}$$



$$E(T) = 0$$

$$V(T) = \frac{n}{n-2}$$

3.3 Théorème Central Limite

Soit la variable aléatoire S résultant de la **somme de *n* variables aléatoires indépendantes et de même loi**, on construit la variable centrée réduite telle que :

$$Z_n = \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$$

Alors pour tout $t \in \mathbb{R}$, la fonction de répartition $F(t) = P(Z < t)$ est telle que :

$$\lim_{n\to\infty} F_n(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \quad \text{c'est-à-dire} \quad Z_n \sim \mathcal{N}(0;1) \text{ quand } n \to \infty$$

3.4 Approximation des lois