



# **Tecnológico de Monterrey**

**Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de  
Monterrey  
Campus Puebla**

**Métodos numéricos en ingeniería**

**Prof. Adolfo Centeno Tellez**

**Proyecto Parcial 2:**

**Equipo: Mecatrónicos**

**Ricardo García Sedano A01329022**

**Arturo Villegas Guerra A01732781**

**Uziel Hernández Espejo A01733245**

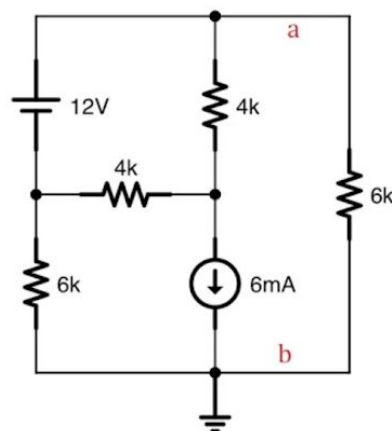
**11 de mayo de 2020. Puebla, Puebla.**

## Introducción

La realización de este proyecto está basado en la eliminación gaussiana aplicado en el teorema de Thévenin y ley de corriente de Kirchhoff. Se escogió este tema, debido a que el teorema de Thévenin es importante en la vida diaria de las personas. Por ejemplo, se suele utilizar la reducción de Thevenin para el cálculo de corrientes máximas en condiciones de falla (cortocircuitos) en las redes. Esto es básicamente una aplicación del teorema. En el documento, usted encontrará la aplicación de la eliminación gaussiana a un circuito. Es necesario encontrar el voltaje en un elemento eléctrico para saber si existe una caída de voltaje. Para el desarrollo de este problema, utilizaremos excel y MATLAB para resolver el problema.

## Planteamiento de la problemática

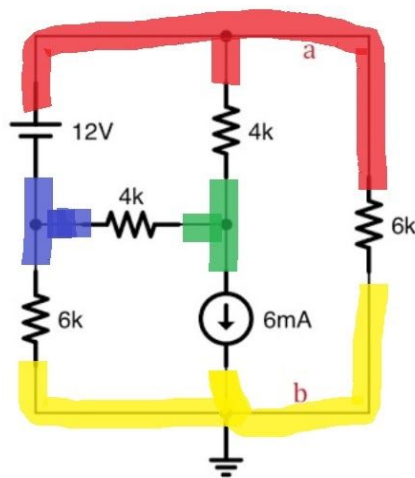
Las leyes de Kirchhoff fueron formuladas por Gustav Kirchhoff en 1845, son utilizadas en ingeniería eléctrica para obtener los valores de la corriente y el potencial en cada punto de un circuito eléctrico. Surgen de la aplicación de la ley de conservación de la energía. Estas leyes nos permiten resolver los circuitos utilizando el conjunto de ecuaciones al que ellos responden. El teorema de Thévenin fue enunciado por primera vez por el científico alemán Hermann von Helmholtz en el año 1853, pero fue redescubierto en 1883 por el ingeniero de telégrafos francés Léon Charles Thévenin (1857–1926).



Para la realización del segundo proyecto del semestre, se hará uso de la ley de corriente de Kirchhoff y el Teorema de Thevenin para llegar a la solución de un sistema de ecuaciones, el cual es basado en un ejercicio de circuitos. En el teorema de Thevenin debemos encontrar el voltaje en uno de los elementos; sin embargo, para encontrar el voltaje, debemos eliminar ese elemento eléctrico en el circuito.

Para encontrar este voltaje, debemos usar la ley de corriente de kirchhoff, en el cual debemos encontrar las corrientes que entran y salen en cada nodo.

Al usar la ley de corriente de kirchhoff, tenemos que tomar en cuenta nuestro nodo tierra, el cual está señalado de color amarillo en la foto de abajo. Aquí nuestro voltaje es igual a cero. Finalmente, definimos nuestros otros nodos, los cuales son los siguientes:



Una vez que definimos nuestros nodos, definimos la dirección de la corriente en cada elemento eléctrico. No importa cual sea la dirección de la corriente, pero debemos definirlas. Una vez hecho esto, tenemos que saber cuales corrientes entran a un nodo, y cuales se salen. A partir de esto, definimos nuestras ecuaciones:

$$5v_1 - 6v_2 + 3v_3 = 0$$

$$v_3 - v_1 = 12$$

$$v_1 - 2v_2 + v_3 = 24$$

Al final, hacemos uso de la eliminación gaussiana para obtener los valores de los voltajes en cada nodo (Representados por V1, V2 y V3).

## Resultados

### *Método de Eliminación Gaussiana*

Este método propone la eliminación progresiva de variables en el sistema de ecuaciones, hasta tener sólo una ecuación con una incógnita. Una vez resuelta esta, se procede por sustitución regresiva hasta obtener los valores de todas las variables.

Lo que buscamos son 3 números, que satisfagan a las tres ecuaciones. El método de solución será simplificar las ecuaciones, de tal modo que las soluciones se puedan identificar con facilidad.

$$5v_1 - 6v_2 + 3v_3 = 0$$

$$v_3 - v_1 = 12$$

$$v_1 - 2v_2 + v_3 = 24$$

### *Método de Jacobi*

El Método de Jacobi es uno de los métodos iterativos más conocidos.

Supóngase que se tiene un sistema 3 x 3. Si los elementos de la diagonal no son todos cero, la primera ecuación se puede resolver para x1, la segunda para x2 y la tercera para x3, para obtener:

$$x_1 = \frac{b_1 - a_{12}x_{12} - a_{13}x_{13}}{a_{11}}$$

$$x_2 = \frac{b_2 - a_{21}x_{21} - a_{23}x_{23}}{a_{22}}$$

$$x_3 = \frac{b_3 - a_{31}x_{31} - a_{32}x_{32}}{a_{33}}$$

En general, para un sistema de ecuaciones lineales de n ecuaciones con n incógnitas, el Método de Jacobi para encontrar un valor k de una variable x es el siguiente:

$$x_i^{(k)} = \left( b_i - \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij} x_j^{(k-1)} \right) / a_{ii}$$

El procedimiento consiste en asignar unos valores iniciales a las variables, usualmente se escoge "0" por simplicidad, de manera que para generar la siguiente iteración se sustituyen los valores obtenidos en la ecuación siguiente, con lo que se obtiene:

$$x_1 = \frac{b_1}{a_{11}}$$

### *Método Gauss-Seidel*

Este método es iterativo o de aproximación y es similar a las técnicas para obtener raíces vistas en el tema anterior. Aquellos métodos consisten en la determinación de un valor inicial a partir del cual, mediante una técnica sistemática se obtiene una mejor aproximación a la raíz. La razón por la cual los métodos iterativos son útiles

en la disminución de los errores de redondeo en sistemas, se debe a que un método de aproximación se puede continuar hasta que converge dentro de alguna tolerancia de error previamente especificada. Las técnicas iterativas se emplean rara vez para resolver problemas de dimensiones pequeñas ya que el tiempo requerido para lograr una precisión suficiente excede al de las técnicas directas. Sin embargo, para sistemas grandes con un gran porcentaje de ceros, ésta técnica es eficiente. Los sistemas de este tipo surgen frecuentemente en la solución numérica de problemas de valores frontera y de ecuaciones diferenciales parciales.

La mejora consiste en utilizar la incógnita encontrada, en la misma iteración para calcular la siguiente incógnita. Por ejemplo, en el método de Jacobi se obtiene en el primer cálculo  $x_{i+1}$ , pero este valor de  $x$  no se utiliza sino hasta la siguiente iteración.

En el método de Gauss-Seidel en lugar de eso se utiliza de  $x_{i+1}$  en lugar de  $x_i$  en forma inmediata

para calcular el valor de  $y_{i+1}$  de igual manera procede con las siguientes variables; siempre se utilizan las variables recién calculadas.

#### *Método Newton Raphson para sistemas no lineales*

Para aplicar este procedimiento para un sistema de  $n$  ecuaciones con  $n$  incógnitas, representamos la variable  $x$  por  $x_1$  y la variable  $y$  por  $x_2$ . El sistema de dos ecuaciones se escribe de una forma más general.

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2) = 0 \\ f_2(x_1, x_2) = 0 \end{cases}$$

Supongamos que en la etapa  $k$  de proceso de cálculo partimos de un punto  $(x_1, x_2)$  cualesquiera y nos movemos a otro muy próximo  $(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2)$ . Los valores de las funciones en dicho punto son aproximadamente

$$\begin{aligned} f_1(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2) &\approx f_1(x_1, x_2) + \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \Delta x_2 \\ f_2(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2) &\approx f_2(x_1, x_2) + \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \Delta x_2 \end{aligned}$$

Si el punto  $(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2)$  es una solución del sistema de ecuaciones, entonces

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2) + \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \Delta x_2 &= 0 \\ f_2(x_1, x_2) + \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \Delta x_2 &= 0 \end{aligned}$$

Escribimos el sistema de ecuaciones en forma matricial para despejar  $\Delta x_1$  y  $\Delta x_2$

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{pmatrix} = 0$$

Denominamos vector  $x$  al vector  $(x_1, x_2)$ , el vector función  $F$  está formado por dos elementos que son las funciones  $(f_1, f_2)$  y la matriz cuadrada de dimensión dos es el Jacobiano  $J$ . Despejamos  $\Delta x_1$  y  $\Delta x_2$  del sistema de ecuaciones o el vector  $\Delta x$ .

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) + \mathbf{J} \Delta \mathbf{x} = 0$$

$$\Delta \mathbf{x} = -\mathbf{J}^{-1} \mathbf{F}$$

## Conclusiones

Habiendo resuelto el problema a tratar y con los diferentes métodos analizados se puede concluir que estos métodos pueden tener diversas aplicaciones en diferentes campos de la ciencia lo cual nos puede servir para resolver problemas complejos, estos métodos principalmente se usan con problemas muy elaborados y las herramientas de la programación nos proporcionan una manera más eficaz y eficiente de resolver. Cabe recalcar que estos métodos suelen tener poco margen de error, ya que son hechos por una computadora y es por esto que son muy efectivos al aplicarlos a diversos problemas que podamos tener ya sea en la escuela y/o trabajo.

También es importante decir que estos métodos dependen totalmente de un humano para ser programados, así que pueden ocurrir errores al momento de ser ejecutado, no porque la computadora no hizo su trabajo, sino porque se programó de una manera errónea, se debe tener sumo cuidado ya que son muy usados en trabajos para la industria y una pérdida por un error de programación no sería bien visto por nadie.