2015 高数 A（2）参考答案

1. $\sqrt{14}$ 　2. $\arcsin\frac{5}{6}$ 　3. $3y^2-z^2=16$ 　4. $-\frac{7}{\sqrt{5}}$

5. $2x+2y+z-4=0$ 　6. 30 　7. $\frac{2\cdot(-1)^{n+1}}{n}$ 或 $\frac{2\cdot(-1)^{n-1}}{n}$ 或 $-\frac{2}{n}\cos n\pi$

8. 解 当 $(x,y)\to(0,0)$ 时，有

$$1-\cos(x^2+y^2)\sim\frac{1}{2}(x^2+y^2)^2,\quad e^{|x|+|y|}-1\sim|x|+|y|$$

……….4 分

$$\therefore\ \lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)(e^{|x|+|y|}-1)}=\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{\frac{1}{2}(x^2+y^2)^2}{(x^2+y^2)(|x|+|y|)}=\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}{|x|+|y|}=0$$

…… 7 分

9. 解 $$\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'\cdot2xy+f_2'\cdot\frac{y}{xy}=2xyf_1'+\frac{1}{x}f_2'$$

………3 分

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2xf_1'+2xy[f_{11}''\cdot x^2+f_{12}''\cdot\frac{x}{xy}]+\frac{1}{x}[f_{21}''\cdot x^2+f_{22}''\cdot\frac{x}{xy}]$$
$$=2xf_1'+2x^3yf_{11}''+3xf_{12}''+\frac{1}{xy}f_{22}''$$

…………7 分

10. 解 $$I=\iint_D\frac{x+y}{x^2+y^2}dxdy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\cos\theta}\frac{r(\cos\theta+\sin\theta)}{r^2}\cdot rdr$$

…..……3 分

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2\cos^2\theta+2\cos\theta\sin\theta)d\theta=(\theta+\frac{1}{2}\sin2\theta+\sin^2\theta)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}+1$$

….7 分

11. 解 $$I_z=\iiint_\Omega(x^2+y^2)dxdydz=\int_{-1}^1dx\int_{-1}^1dy\int_0^{x^2+y^2}(x^2+y^2)dz$$

……..4 分

$$=\int_{-1}^1dx\int_{-1}^1(x^4+2x^2y^2+y^4)dy=2\int_{-1}^1(x^4+\frac{2}{3}x^2+\frac{1}{5})dx=\frac{112}{45}$$

….7 分

12. 解 因为 $(3x+4z)^2=9x^2+24xz+16z^2$

由对称性知 $\iint_\Sigma x^2ds=\iint_\Sigma y^2ds=\iint_\Sigma z^2ds,\quad\iint_\Sigma xzds=0$

………3 分

$$\therefore\ \iint_\Sigma(3x+4z)^2ds=25\iint_\Sigma x^2ds=\frac{25}{3}\iint_\Sigma(x^2+y^2+z^2)ds=\frac{25a^2}{3}\iint_\Sigma ds$$

$$=\frac{25a^2}{3}\cdot 4\pi a^2=\frac{100\pi}{3}a^4$$

………..6 分

故有 $\frac{100\pi}{3}a^4=300\pi$ 解得 $a=\sqrt{3}$ $(\because a>0)$ ………7 分

13. 解 $\because \begin{cases}x^2+y^2+z^2=1\\x=y\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2y^2+z^2=1\\x=y\end{cases}$

…………..3 分

$$\therefore\quad I=\int_\Gamma\sqrt{2y^2+z^2}ds=\oint_\Gamma ds=2\pi$$

…………..7 分

14. 解 令 $P=[\sin x-f(x)]\frac{y}{x}$, $Q=f(x)$，则 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\sin x-f(x)}{x}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}=f'(x)$，

要使曲线积分与路径无关，则有 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$，即 $\frac{\sin x-f(x)}{x}=f'(x)$

所以有 $f'(x)+\frac{1}{x}f(x)=\frac{\sin x}{x}$

解得 $f(x)=\frac{1}{x}(C-\cos x)$

又因为 $f(\pi)=1$，所以 $C=\pi-1$ 故 $f(x)=\frac{1}{x}(\pi-1-\cos x)$

……5 分

因为曲线积分与路径无关，所以可令 $\overset{\frown}{AB}=L_1+L_2$，

其中 $L_1:y=0,\quad 1\le x\le\pi;\quad L_2:x=\pi,\quad 0\le y\le\pi$

所以 $I=\int_{\overset{\frown}{AB}}[\sin x-f(x)]\frac{y}{x}dx+f(x)dy=(\int_{L_1}+\int_{L_2})[\sin x-f(x)]\frac{y}{x}dx+f(x)dy$

而 $\int_{L_1}[\sin x-f(x)]\frac{y}{x}dx+f(x)dy=0,$

$\int_{L_2}[\sin x-f(x)]\frac{y}{x}dx+f(x)dy=\int_0^\pi\frac{1}{\pi}(\pi-1+1)dy=\pi$

故 $I=0+\pi=\pi$ ……….7 分

15. 令 $P=x^3+az^2$, $Q=y^3+ax^2$, $R=z^3+ay^2$

则 $I=\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}-\iint\limits_{\Sigma_1}$，其中 $\Sigma_1:z=0,\quad x^2+y^2\le a^2$ 取上侧 ………2 分

而 $\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}=-\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}=-\iiint\limits_\Omega(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z})dv=-\iiint\limits_\Omega 3(x^2+y^2+z^2)dv$

$$=-3\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a r^2\cdot r^2\sin\varphi dr=-\frac{6}{5}\pi a^5$$

$$\iint_{\Sigma_1}=\iint_{\Sigma_1}ay^2dxdy=a\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a r^3\sin^2\theta dr=\frac{\pi}{4}a^5$$

所以 $I=-\frac{6}{5}\pi a^5--\frac{1}{4}\pi a^5=-\frac{29}{20}\pi a^5$

………7 分

16. 解 因为$\sqrt[n]{\frac{2n-1}{2^n}|x|^{2n-2}}\to\frac{|x|^2}{2}$,所以,当$\frac{|x|^2}{2}<1$, 即$-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$时,级数收敛,

当$\frac{|x|^2}{2}>1$, 即$x<-\sqrt{2}$或$x>\sqrt{2}$时，级数发散，当$x=\pm\sqrt{2}$时，原级数为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2}$，发散。故级数的收敛域为$(-\sqrt{2},\sqrt{2})$

………2 分

$$s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}=(\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x\frac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}dx)'=(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2^n})'=(\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2^n})'$$

$$=(\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{x^2}{2})^n)'=(\frac{1}{x}\cdot\frac{\frac{x^2}{2}}{1-\frac{x^2}{2}})'=(\frac{x}{2-x^2})'=\frac{2+x^2}{(2-x^2)^2},\quad x\in(-\sqrt{2},\sqrt{2})$$

..7 分

17. 解 $\because\ \ln(1+x^2+x^4)=\ln(1-x^6)-\ln(1-x^2)$

…….2 分

而 $\ln(1-x^6)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{6n}}{n},\quad -1<x<1$

$\ln(1-x^2)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n},\quad -1<x<1$

……..6 分

$\therefore\ \ln(1+x^2+x^4)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(x^{6n}-x^{2n}),\quad -1<x<1$

………7 分

18. 解 $dz=2xdx-2ydy=d(x^2-y^2)\Rightarrow z=x^2-y^2+C$

又 $\because\ f(1,1)=2,\ \therefore C=2,$ 故 $z=f(x,y)=x^2-y^2+2$ ………4 分

令 $\begin{cases}z_x'=2x=0\\ z_y'=-2y=0\end{cases}$，得驻点（0，0），且$f(0,0)=2$

下面求在 D 的边界上 $z = f(x, y)$ 的最值。

$x^2 + \frac{y^2}{4} = 1 \Rightarrow x^2 = 1 - \frac{y^2}{4}$ 将其代人 $f(x, y)$，有

$$\varphi(y) \overset{\Delta}{=} f(x, y) = 1 - \frac{y^2}{4} - y^2 + 2 = 3 - \frac{5y^2}{4}, \quad -2 \le y \le 2$$

故 $\varphi(y)$ 在[-2,2]上的最大值 $\varphi(0) = 3$，最小值 $\varphi(\pm 2) = -2$。

综上所述，$f(x, y)$ 在 D 上的最大值为 $f(\pm 1, 0) = 3$，最小值为 $f(0, \pm 2) = -2$。…..9 分