《概率统计 A》参考答案

一、填空题（每空 3 分，共 30 分）

1、 $\underline{1-a+b}$

2、 $\underline{3}$ 3、 $\underline{C_{n-1}^{r-1}(1-p)^{n-r}p^{r}}$

4、 $\underline{0.8}$ 5、 $\underline{\frac{11}{27}}$

6、 $\underline{\frac{1}{2}}$ 7、 $\underline{43.75}$

8、 $\underline{F(1,1)}$ 9、 $\underline{\frac{1}{2}}$

10、 $\underline{(10\pm 0.2132)}$

二、计算题（每小题 10 分，共 40 分）

1、解：由 X 在 $(0,2\pi)$ 内服从均匀分布得密度函数

$$\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi}, & 0<x<2\pi \\ 0 & \text{其他.}\end{cases}$$

由于随机变量 $Y=\cos X$，有 $y=\cos x$，在 $(0,2\pi)$ 内为非单调函数，在 $(0,\pi)$ 和 $(\pi,2\pi)$ 内分别单调，其反函数分别为

$$x_1=\arccos y,\qquad x_1^{'}=-\frac{1}{\sqrt{1-y^2}},\qquad x_1\in(0,\pi);$$

$$x_2=2\pi-\arccos y,\qquad x_2^{'}=\frac{1}{\sqrt{1-y^2}},\qquad x_2\in(\pi,2\pi).$$

故

$$\varphi_Y(y)=\varphi(\mathrm{arccosy})\,|x_1^{'}|+\varphi(2\pi-\mathrm{arccosy})\,|x_2^{'}|$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi\sqrt{1-y^2}}, & y\in(-1,1), \\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$$

2、 **解**：由 X 与 Y 独立同分布于参数为 $\lambda>0$ 的指数分布 $E(\lambda)$ 可知：

$$E(X)=E(\mathrm{Y})=\lambda, \quad E(X^2)=E(\mathrm{Y}^2),$$

从而，
$$\begin{aligned}&E(Z_1Z_2)=E\{(X-Y)(X+Y)\}=E\{(X^2-Y^2)\}=E(X^2)-E(Y^2)=0,\\&E(Z_1)E(Z_2)=E\{(X-Y)\}\mathrm{E}\{(X+Y)\}=0.\end{aligned}$$

所以，协方差 $\mathrm{cov}(Z_1,Z_2)=E(Z_1Z_2)-E(Z_1)E(Z_2)=0$，从而 $Z_1=X-Y$ 和 $Z_2=X+Y$ 的相关系数 $\rho=0$.

3、**解**：(1) 似然函数 $L(x_1,x_2,\cdots,x_n,\theta)=\dfrac{1}{(2\theta)^n}e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}|x_i|}{\theta}}$，

$$\ln L=-n\ln(2\theta)-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}|x_i|.$$

令 $\dfrac{\partial\ln L}{\partial\theta}=-\dfrac{n}{\theta}+\dfrac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n}|x_i|=0$ 得 θ 的极大似然估计 $\hat{\theta}=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x_i|$，从而 θ 的极大似然估计量 $\hat{\theta}=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|X_i|$.

(1) 由于

$$E(|X|)=\int_{-\infty}^{+\infty}|x|\,f(x)dx=\frac{1}{2\theta}\int_{-\infty}^{+\infty}|x|e^{-\frac{|x|}{\theta}}dx=\frac{1}{\theta}\int_0^{+\infty}xe^{-\frac{x}{\theta}}dx=\theta,$$
$$E(|X|^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}|x|^2\,f(x)dx=\frac{1}{2\theta}\int_{-\infty}^{+\infty}|x|^2e^{-\frac{|x|}{\theta}}dx=\frac{1}{\theta}\int_0^{+\infty}x^2e^{-\frac{x}{\theta}}dx=2\theta^2.$$

从而 $D(\hat{\theta})=\dfrac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{D}(|X_i|)=\dfrac{1}{n}D(|X|)=\dfrac{1}{n}\{E(|X|^2)-(E|X|)^2\}=\dfrac{\theta^2}{n}.$

由于 $\ln f(X,\theta)=-\ln(2\theta)-\dfrac{|X|}{\theta}$，

所以

$$\mathrm{E}\left[\frac{\partial\ln f(X,\theta)}{\partial\theta}\right]^2=E\left[-\frac{1}{\theta}+\frac{|X|}{\theta^2}\right]^2=E\left[\frac{1}{\theta^2}-\frac{2|X|}{\theta^3}+\frac{|X|^2}{\theta^4}\right]=\frac{1}{\theta^2}-\frac{2E(|X|)}{\theta^3}+\frac{\mathrm{E}(|X|^2)}{\theta^4}=\frac{1}{\theta^2},$$

从而，$\mathrm{D}_0(\theta)=\dfrac{1}{n\mathrm{E}\left[\dfrac{\partial\ln f(X,\theta)}{\partial\theta}\right]^2}=\dfrac{\theta^2}{n}=\mathrm{D}(\hat{\theta})$，故 $\hat{\theta}$ 是 θ 的优效估计.

4、**解**：1) 由 (X,Y) 服从区域 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+\mathrm{y}^2\le 1\}$ 的均匀分布可知密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi}, & x^2+y^2\le 1\\ 0 & \text{其他}.\end{cases}$$

边沿分布密度函数

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{\pi}dy=\frac{2\sqrt{1-x^2}}{\pi},$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}\frac{1}{\pi}dx=\frac{2\sqrt{1-y^2}}{\pi}.$$

显然

$$f(x,y)\ne f_X(x)f_Y(y).$$

故 X 与 Y 不独立.

2) 微分方程所对应的特征方程为 ： $\lambda^2+X\lambda+Y=0$，

若 $\Delta=X^2-4Y\ge 0$，即 $Y\le\dfrac{X^2}{4}$ 时，仅当实特征根 $\lambda_i<0\ (\mathrm{i}=1,2)$ 时才能有任意解 $x(t)$ 满足 $\lim\limits_{t\to+\infty}x(t)=0$ ， 此时对应 $\lambda_1+\lambda_2=-X<0$，$\lambda_1\lambda_2=Y>0$ ， 即 $X>0$ 且 $0<Y\le\dfrac{X^2}{4}$ 满足要求.

若 $\Delta=X^2-4Y<0$，即 $Y>\dfrac{X^2}{4}$ 时，仅当复特征根的实部 $\mathrm{Re}(\lambda_i)<0\ (\mathrm{i}=1,2)$ 时才能有任意解 $x(t)$ 满足 $\lim\limits_{t\to+\infty}x(t)=0$， 此时对应 $\mathrm{Re}(\lambda_i)=-\dfrac{X}{2}$，$\lambda_1\lambda_2=Y>0$，即 $X>0$ 且 $Y>\dfrac{X^2}{4}$ 满足要求.

综合所得，仅当 $X>0$ 且 $Y>0$ 时，微分方程的任意解 $x(t)$ 满足 $\lim\limits_{t\to+\infty}x(t)=0$，故对应的概率 $P=\iint\limits_{x>0,y>0}f(x,y)dydy=\dfrac{1}{4}.$

三、应用题（30 分）

1、**解**：设事件 A 表示“先取出的零件是一等品”，事件 C 表示“第二次取出的零件是一等品”，事件 B_i 表示“取第 i 箱”，$i=1,2$. 则

$$P(B_i)=\frac{1}{2}，P(A|B_1)=\frac{1}{5}，P(A|B_2)=\frac{18}{30}=\frac{3}{5},$$
$$P(AC|B_1)=\frac{C_{10}^2}{C_{50}^2}=\frac{9}{245}，P(AC|B_2)=\frac{C_{18}^2}{C_{30}^2}=\frac{51}{145}.$$

(1) 先取出的零件是一等品的概率

$$P(A)=P(A|B_1)P(B_1)+P(A|B_2)P(B_2)=\frac{1}{5}\times\frac{1}{2}+\frac{3}{5}\times\frac{1}{2}=\frac{2}{5}.$$

(2) 在先取出的零件是一等品的条件下，第二次取出的零件仍是一等品的概率

$$P(C|A)=\frac{P(AC)}{P(A)}=\frac{P(AC|B_1)P(B_1)+P(AC|B_2)P(B_2)}{P(A)}$$
$$=\frac{\frac{9}{245}\times\frac{1}{2}+\frac{51}{145}\times\frac{1}{2}}{\frac{2}{5}}=\frac{690}{1421}\approx 0.4856.$$

2、**解**：以 X 表示任意时刻正在运行的机器台数，则由题意知：

$X\sim B(400,0.75)$,所以

$$E(X)=np=400\times 0.75=300,\ D(X)=npq=400\times 0.75\times 0.25=75.$$

假设应供应 T 千瓦功率的电力才能满足要求，则

$$P\left\{0\le X\le\frac{T}{10}\right\}\ge 0.99.$$

由棣莫弗-拉普拉斯定理得

$$P\left\{0\le X\le\frac{T}{10}\right\}=P\left\{\frac{0-300}{\sqrt{75}}\le\frac{X-np}{\sqrt{npq}}\le\frac{\frac{T}{10}-300}{\sqrt{75}}\right\}\approx\Phi\left(\frac{\frac{T}{10}-300}{5\sqrt{3}}\right)-\Phi\left(-20\sqrt{3}\right)$$
$$\approx\Phi\left(\frac{\frac{T}{10}-300}{5\sqrt{3}}\right)\ge 0.99.$$

查表得 $\dfrac{\frac{T}{10}-300}{5\sqrt{3}}\ge 2.33$，

所以 $T\ge 3000+5\times 1.732\times 23.3=3201.78$. 故只要供应 3201.78 千瓦的电力，就可 99%的可能保证有足够的电能供应而不至于影响生产.

3. **解**：原假设 $H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2.$ 被择假设 $H_1:\sigma_1^2\neq\sigma_2^2.$

当 H_0 为真时，统计量

$$F=\frac{S_1^2}{S_2^2}\sim F(n_1-1,n_2-1)=F(9,8).$$

从而

$$F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)=F_{0.05}(9,8)=3.39,\ F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)=F_{0.95}(9,8)=\frac{1}{F_{0.05}(8,9)}=\frac{1}{3.23},$$

拒绝域

$$W:F>3.39,\text{或者 } F<\frac{1}{3.23}.$$

由于 $s_1^2=236.8,\ s_2^2=63.86,$ 于是 $F_0=\frac{S_1^2}{S_2^2}=\frac{236.8}{63.86}\approx 3.7>3.39.$

故拒绝 H_0，即认为两总体方差有显著差异.