2016

《线性代数 A》试卷 A 参考解答及评分标准

填空题：将答案填在横线上（1~5 题，每题 4 分，共 20 分）

1. $10^5\begin{bmatrix}3&2&1\\6&4&2\\9&6&3\end{bmatrix}$； **2.** 0； **3.** 3； **4.** $P^{\mathrm{T}}x$； **5.** $\frac{1}{9}$.

解答题（6~13 题，共 80 分）.

6. （8 分）解：按第 n 行展开便有

$D_n=(-1)^{2n}(a+1)D_{n-1}+(-1)^{2n+1}a(a+1)^{n-2}=(a+1)D_{n-1}-a(a+1)^{n-2}$ …………(3 分)

$=(a+1)[(a+1)D_{n-2}-a(a+1)^{n-3}]-a(a+1)^{n-2}$ …………(5 分)

$=(a+1)^2D_{n-2}-2a(a+1)^{n-2}=\ \cdots\ =(a+1)^{n-1}D_1-(n-1)a(a+1)^{n-2}$ …………(6 分)

$=(a+1)^n-(n-1)a(a+1)^{n-2}=(a+1)^{n-2}[(a+1)^2-(n-1)a]$. …………(8 分)

7. （10 分）解： $(2E-C^{-1}B)A^{\mathrm{T}}=C^{-1}\ \Rightarrow C(2E-C^{-1}B)A^{\mathrm{T}}=CC^{-1}$ …………(2 分)

$\Rightarrow\ (2C-B)A^{\mathrm{T}}=E$ …………(3 分)

$\Rightarrow\ A(2C-B)^{\mathrm{T}}=E$, …………(5 分)

由 $(2C-B)^{\mathrm{T}}$ 可逆，故有 $A=[(2C-B)^{\mathrm{T}}]^{-1}$ …………(6 分)

$$=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\2&1&0&0\\3&2&1&0\\4&3&2&1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\-2&1&0&0\\1&-2&1&0\\0&1&-2&1\end{bmatrix}.$$ ……(10 分)

8. （8 分）解： 设 $A=\begin{bmatrix}1&\lambda&-1&2\\2&-1&\lambda&5\\1&10&-6&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&-1&\lambda\\2&5&\lambda&-1\\1&1&-6&10\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&-1&\lambda\\0&1&\lambda+2&-1-2\lambda\\0&-1&-5&10-\lambda\end{bmatrix}$

$$\to\begin{bmatrix}1&2&-1&\lambda\\0&1&\lambda+2&-1-2\lambda\\0&0&\lambda-3&-3(\lambda-3)\end{bmatrix},$$ …………(6 分)

显然 $r(A)\geqslant 2$. 要使 $r(A)$ 达到最小，即 $r(A)=2$, …………(7 分)

由上面行阶梯形矩阵知，须 $\lambda-3=0$，于是 $\lambda=3$. …………(8 分)

9.（10 分）解：运用初等行变换化矩阵为行最简形，有

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 2 & -1 & 1 & 2\\ 1 & 1 & -2 & 1 & 4\\ -6 & 4 & 2 & -2 & 4\\ 6 & 3 & -9 & 7 & 9\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & -1 & 0 & 3\\ 0 & 1 & -1 & 0 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix},$$ …………（4 分）

于是知矩阵的列秩为 3，即最大无关组的向量个数为 3. 这时，例如取最大无关组为第 1，2，4 列 α_1，α_2，α_4， …………（6 分）

于是便可将α_3，α_5用α_1，α_2，α_4线性表示：

$$(\alpha_3,\alpha_5)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4)\begin{pmatrix}-1 & 3\\ -1 & 4\\ 0 & -3\end{pmatrix}$$，或 $\alpha_3=-\alpha_1-\alpha_2$，$\alpha_5=3\alpha_1+4\alpha_2-3\alpha_4$. ……（10 分）

10.（10 分）解：（1）由 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -1\end{bmatrix}$，得过渡矩阵 $\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -1\end{bmatrix}$；

…………（3 分）

（2）求得 $\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{bmatrix}1/2 & 0 & 1/2\\ 0 & 1/2 & -1/2\\ 1/2 & -1/2 & 0\end{bmatrix}$， …………（5 分）

故有β 在基α_1，α_2，α_3下的坐标为 $\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{bmatrix}=\boldsymbol{P}^{-1}\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1/2 & 0 & 1/2\\ 0 & 1/2 & -1/2\\ 1/2 & -1/2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1/2\\ 1\\ -1/2\end{bmatrix}$ …（6 分）

（3）设向量 z 在两个基下有相同坐标 $(z_1,z_2,z_3)^{\mathrm{T}}$，由坐标变换公式

$$z=\boldsymbol{P}^{-1}z \quad 或 \quad \boldsymbol{P}z=z，\quad 即 \ (\boldsymbol{P}-\boldsymbol{E})z=\boldsymbol{0}，$$ …………（7 分）

有 $$\boldsymbol{P}-\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -1\\ 1 & -1 & -2\end{bmatrix},$$ …………（8 分）

易知此线性齐次方程组系数矩阵的秩 $r(P-E)=2$，从而解空间的维数为 1，且 $\xi=(1,-1,1)^{\mathrm{T}}$ 为它的一个基础解系，故所求向量为 $k(1,-1,1)^{\mathrm{T}}$，其中 k 任意常数.

…………(10 分)

11.（14 分）解：（1）线性方程组的增广矩阵

$$\overline{A}=\begin{bmatrix}1&1&1&1&0\\0&1&2&2&1\\0&-1&a-3&-2&b\\3&2&1&a&-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&1&1&0\\0&1&2&2&1\\0&-1&a-3&-2&b\\0&-1&-2&a-3&-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&1&1&0\\0&1&2&2&1\\0&0&a-1&0&b+1\\0&0&0&a-1&0\end{bmatrix},$$

…………(2 分)　　　　…………(6 分)

此时便可看出：当 $a\neq1$ 时，$r(A)=r(\overline{A})=4$，方程组有唯一解；…………(8 分)

当 $a=1$，但 $b\neq-1$ 时，$r(A)\neq r(\overline{A})$，方程组无解；…………(9 分)

当 $a=1$，但 $b=-1$ 时，$r(A)=r(\overline{A})=2$，方程组有无穷多组解.　(10 分)

（2）$$\overline{A}=\begin{bmatrix}1&1&1&1&0\\0&1&2&2&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-1&-1&-1\\0&1&2&2&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix},$$ …………(12 分)

故通解为 $$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=k_1\begin{bmatrix}1\\-2\\1\\0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}1\\-2\\0\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1\\1\\0\\0\end{bmatrix},$$ 其中 k_1,k_2 为任意常数. ……(14 分)

12.（12 分）解：（1）该二次型的矩阵为 $A=\begin{bmatrix}0&-1&-1\\-1&0&-1\\-1&-1&0\end{bmatrix}$，…………(1 分)

求其特征值有 $|\lambda E-A|=\lambda^3-3\lambda+2=(\lambda+2)(\lambda-1)^2$，故得 $\lambda_1=-2$，$\lambda_2=\lambda_3=1$，……(4 分)

因此其标准形为 $$f(y_1,y_2,y_3)=-2y_1^2+y_2^2+y_3^2.$$ ……(5 分)

（2）对应特征向量满足的方程为 $(\lambda E-A)x=0$，

当$\lambda_1=-2$，有$\begin{bmatrix}-2&1&1\\1&-2&1\\1&1&-2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\0&0&0\end{bmatrix}$，得$\xi_1=k\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$，$k$任意常数； ……(6分)

当$\lambda_2=\lambda_3=1$，有$\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$，得$\xi_2=k_1\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$，$k$任意常数. ……(8分)

取基向量并正交化、单位化得

$\eta_1=\begin{bmatrix}1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\end{bmatrix}$，$\eta_2=\begin{bmatrix}1/\sqrt{2}\\-1/\sqrt{2}\\0\end{bmatrix}$，$\eta_3=\begin{bmatrix}-1/\sqrt{6}\\-1/\sqrt{6}\\2/\sqrt{6}\end{bmatrix}$，故所做变换$x=\begin{bmatrix}1/\sqrt{3}&1/\sqrt{2}&-1/\sqrt{6}\\1/\sqrt{3}&-1/\sqrt{2}&-1/\sqrt{6}\\1/\sqrt{3}&0&2/\sqrt{6}\end{bmatrix}y$. (10分)

（3）由标准方程$f(y_1,y_2,y_3)=-2y_1^2+y_2^2+y_3^2=1$知其为旋转单叶双曲面，旋转轴$Oy_1$轴. …………(11分)

（4）因为正交变换保持向量的模不变，因此利用正交变换化二次方程可保持几何形状不变。 …………(12分)

13.（8分）证：（1）设$\lambda\neq0$是AB的任一特征值，$\alpha\neq 0$是AB对应于λ的特征向量，即有$(AB)\alpha=\lambda\alpha$; 上式左乘以B，有$B(AB)\alpha=\lambda B\alpha$，记$\beta=B\alpha$，则上式有$(BA)\beta=\lambda\beta$，而$\beta=B\alpha\neq0$（否则$\alpha=0$），因此$\lambda$亦是$BA$的特征值. …………(3分)

设$\lambda=0$是AB的特征值，$\alpha\neq0$是AB对应的特征向量，即$(AB)\alpha=0\alpha=0$，亦即α为齐次线性方程组$(AB)\alpha=0$的非零解，于是系数行列式$|AB|=|A|\cdot|B|=|BA|=0$，从而齐次线性方程组$(BA)x=0$亦有非零解β，也就是β满足$(BA)\beta=0=0\beta$；于是$\lambda=0$亦是BA的特征值. …………(5分)

综上，AB的特征值都是BA的特征值. 同理可证，BA的特征值都是AB的特征值. 因此AB与BA有相同的特征值. …………(6分)

（2）设AB或BA的特征值依次为λ_1，λ_2，…，λ_n，则依矩阵迹和秩的关系性质有$\mathrm{tr}(AB)=\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=\mathrm{tr}(BA)$. …………(8分)