高等数学A(2)试题参考答案

一. 填空（每题4分. 共20分）

1. $\sqrt{14}$ ； 2. $(0,0)$ ； 3. $x+2y-4=0$ ；

4. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_0^R f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\, dr$ ； 5. $1<a\leq 3$.

二. 解答 （共80分）

6. 解： 原式 $= \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{(x^2+y^2)(1+\sqrt{1+x^2+y^2})}{(1-\sqrt{1+x^2+y^2})(1+\sqrt{1+x^2+y^2})}$ （3分）

$= -\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (1+\sqrt{1+x^2+y^2})$ （5分）

$= -2$. （6分）

7. 解： $\dfrac{\partial z}{\partial x} = y f_1' + y^2 f_2'$ （2分）

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f_1' + y(f_{11}'' + x f_{12}'')$

$+2y f_2' + y^2(f_{21}'' + x f_{22}'')$

$= f_1' + 2y f_2' + y f_{11}'' + (xy+y^2) f_{12}'' + x y^2 f_{22}''$ （6分）

8. 解： 因为 $\operatorname{grad} u = (u_x', u_y', u_z') = (y, x, e^z)$,

所以 $\operatorname{grad} u(1,-1,0) = (-1, 1, 1)$. （2分）

又函数有最大增长率的方向即为梯度方向，故

有最大增长率的方向(单位向量)为 $(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$. （4分）

而梯度的模为最大增长率，故该增长率为

$\max\left\{ \dfrac{\partial u}{\partial l}\Big|_{(1,-1,0)} \right\} = \|\operatorname{grad} u\|\Big|_{(1,-1,0)} = \sqrt{3}$. （6分）

9. 解：原式 $=\iint\limits_{D_{yz}} \frac{\sin z}{(1-z)^2}\,dy\,dz\int_y^1 dx$ （2分）

$=\iint\limits_{D_{yz}} \frac{\sin z}{(1-z)^2}\cdot(1-y)\,dy\,dz$

$=\int_0^1 \frac{\sin z}{(1-z)^2}\,dz\int_z^1 (1-y)\,dy$ （4分）

$=\frac{1}{2}\int_0^1 \sin z\,dz=\frac{1}{2}(1-\cos 1)$. （6分）

或

原式 $=\int_0^1 dz\int_z^1 dy\int_y^1 \frac{\sin z}{(1-z)^2}dx$ （4分）

$=\frac{1}{2}(1-\cos 1)$ （6分）

注！根据积分限可酌情给分.

10. 解：设切点坐标为 (x_0,y_0,z_0)，则曲面在该点切平面 π 的法向量 $\vec{n}=(2x_0,2y_0,-1)$，故切平面 π 的方程为

$$2x_0(x-x_0)+2y_0(y-y_0)-(z-z_0)=0,$$

即 $$2x_0x+2y_0y-(2x_0^2+2y_0^2-z_0)=0.$$ （2分）

又直线 l 方向向量 $\vec{s}=(1,-1,6)$，故 $\vec{n}\cdot\vec{s}=0$，即

$$2x_0-2y_0-6=0,\quad ①$$ （4分）

由直线在切平面上，所以

$$4x_0+1-(2x_0^2+2y_0^2-z_0)=0,\quad ②$$ （5分）

而点 (x_0,y_0,z_0) 在曲面上，有

$$z_0=x_0^2+y_0^2\quad ③$$ （6分）

联立①,②,③式解得

$x_0=1,\ y_0=-2,\ z_0=5$；$x_0=4,\ y_0=1,\ z_0=17$. （8分）

11. 解：(1) 令 $P(x,y)=\frac{e^x}{1+y^2}$，$Q(x,y)=\frac{2y(1-e^x)}{(1+y^2)^2}$，（1分）

则有 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{-2ye^x}{(1+y^2)^2}=\frac{\partial Q}{\partial x}$.

故该力场构成保守场. （3分）

(2) 由(1)知场力做功与路径无关，记 C 为点 $(0,1)$，则有

$W=\int_{\widehat{AB}}\frac{e^x}{1+y^2}dx+\frac{2y(1-e^x)}{(1+y^2)^2}dy$ （4分）

$=\left(\int_{\overline{AC}}+\int_{\overline{CB}}\right)\frac{e^x}{1+y^2}dx+\frac{2y(1-e^x)}{(1+y^2)^2}dy$ （6分）

$=\int_0^1\frac{e^x}{2}dx=\frac{1}{2}(e-1)$. （8分）

12. 解：(1) $a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x+2)dx=\pi+4$，（2分）

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x+2)\cos nx\,dx$$

$$=\frac{2}{n^2\pi}[\cos n\pi-1]=\frac{2}{n^2\pi}[(-1)^n-1]$$

$$=\begin{cases}-\frac{4}{n^2\pi}, & n\text{为奇数}, \\ 0, & n\text{为偶数}.\end{cases}$$（5分）

于是 $f(x)$ 的以 2π 为周期的余弦级数为

$$x+2=\frac{\pi}{2}+2-\frac{4}{\pi}\left[\cos x+\frac{1}{3^2}\cos 3x+\frac{1}{5^2}\cos 5x+\cdots\right]$$（6分）

$(0\le x\le\pi)$

(2). 以 $x=0$ 代入上式得

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}.$$（8分）

13. 解：设等差数列公差为 d，则

$$a_n=a_0+nd.$$（1分）

(1) 由 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=1$，得收敛半径 $R=1$。当 $x=\pm1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(\pm1)^n a_n$ 发散

于是 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_n x^n$ 的收敛域为 $(-1,1)$.（3分）

(2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n x^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_0+nd)x^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_0x^n+d\sum\limits_{n=0}^{\infty}nx^n$

$=S_1(x)+S_2(x)$.

$S_1(x)=\frac{a_0}{1-x}$，$S_2(x)=xd\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$（4分）

又 $\int_0^x\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}nt^{n-1}\right)dt=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_0^x nt^{n-1}dt$

$=\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}-1$，

因此 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=\frac{1}{(1-x)^2}$.（6分）

于是 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n=S_1(x)+S_2(x)=\frac{a_0}{1-x}+\frac{xd}{(1-x)^2}$

令 $x=\frac{1}{2}$，得 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{2^n}=2a_0+2d=2a_1$.（8分）

14. 解：由对称性 $A=4A_1$. (1分)

球面第一卦限部分 Σ：$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$，D_{xy}：$x^2+y^2\le ax$，$y>0$.

由 $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$，$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$.

有 $\sqrt{1+(\frac{\partial z}{\partial x})^2+(\frac{\partial z}{\partial y})^2}=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$. (3分)

于是 $A_1=\iint\limits_{D_{xy}}\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy=\iint\limits_{D^*}\frac{a}{\sqrt{a^2-r^2}}\cdot r\,drd\theta$

$=a\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{a\cos\theta}\frac{r}{\sqrt{a^2-r^2}}dr$ (5分)

$=a\int_0^{\frac{\pi}{2}}[-\sqrt{a^2-r^2}]\Big|_0^{a\cos\theta}d\theta$

$=a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin\theta)d\theta=a^2(\frac{\pi}{2}-1)$ (7分)

故 $A=4A_1=2(\pi-2)a^2$. (8分)

15. 解：旋转曲面 Σ 方程为 $x^2+y^2-z^2=1$. (1分)

作辅助平面 Σ_1：$z=1$，$x^2+y^2\le 2$，取上侧，

Σ_2：$z=2$，$x^2+y^2\le 5$，取下侧. (3分)

则 $\Sigma+\Sigma_1+\Sigma_2$ 封闭，且取内侧. 由高斯公式有

$I=(\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1+\Sigma_2}-\iint\limits_{\Sigma_1}-\iint\limits_{\Sigma_2})xz^2dydz-\sin x\,dxdy$

$=-\iiint\limits_{\Omega}z^2dxdydz-\iint\limits_{x^2+y^2\le 2}\sin x\,dxdy+\iint\limits_{x^2+y^2\le 5}\sin x\,dxdy$ (5分)

$=-\int_1^2 z^2\pi(1+z^2)dz$ (7分)

$=-\frac{128}{15}\pi$ (8分)

16. 解1：椭圆方程为 $3x^2+3y^2-2xy=1$. (1分)

中心在原点，在椭圆上任取一点 (x,y)，它到原点距离

$$d=\sqrt{x^2+y^2}\ . \quad (2分)$$

用拉格朗日乘数法。令 $L(x,y,\lambda)=x^2+y^2+\lambda(3x^2+3y^2-2xy-1)$，

则
$$\begin{cases} L_x'=2(1+3\lambda)x-2\lambda y=0, & 1) \\ L_y'=2(1+3\lambda)y-2\lambda x=0, & 2) \\ L_\lambda'=3x^2+3y^2-2xy-1=0. & \end{cases} \quad (4分)$$

由1), 2)得 $y=x$ 或 $y=-x$。故驻点为

$P_1(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$, $P_2(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$, $P_3(\frac{\sqrt{2}}{4},-\frac{\sqrt{2}}{4})$, $P_4(-\frac{\sqrt{2}}{4},\frac{\sqrt{2}}{4})$.

因此 $d(P_1)=d(P_2)=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$d(P_3)=d(P_4)=\frac{1}{2}$， (6分)

分别为椭圆长、短半轴长，于是椭圆面积为

$$S=\pi\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}\pi\ . \quad (8分)$$

解2：椭圆方程为 $3x^2+3y^2-2xy=1$，中心在原点。 (1分)

作旋转变换
$$\begin{cases} x=\frac{1}{\sqrt{2}}u-\frac{1}{\sqrt{2}}v, \\ y=\frac{1}{\sqrt{2}}u+\frac{1}{\sqrt{2}}v. \end{cases}$$

代入得 $2u^2+4v^2=1$ (5分)

因此椭圆长、短半轴长为 $a=\frac{1}{\sqrt{2}}$，$b=\frac{1}{2}$。

于是椭圆面积为 $S=\pi\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}\pi$. (8分)