2020年9月高数A(2)期末考试题参考答案

1. 设$z(x,y)$ 满足 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\sin y+\dfrac{1}{1-xy}$, $z(1,y)=\sin y$, 求 $z(x,y)$. (8分)

解 将 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\sin y+\dfrac{1}{1-xy}$两边同时对 x 积分，得

$$z(x,y)=-x\sin y-\frac{1}{y}\ln|1-xy|+\varphi(y),$$

又由 $z(1,y)=\sin y$ 知 $-\sin y-\dfrac{1}{y}\ln|1-y|+\varphi(y)=\sin y$, 则

$$\varphi(y)=2\sin y+\frac{1}{y}\ln|1-y|,$$

故 $$z(x,y)=-x\sin y-\frac{1}{y}\ln|1-xy|+2\sin y+\frac{1}{y}\ln|1-y|$$

$$=(2-x)\sin y+\frac{1}{y}\ln\left|\frac{1-y}{1-xy}\right|.$$

2. 求极限 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{x^2y^4}{x^2+y^4}$. (8分)

解 因为 $$0\le\frac{x^2y^4}{x^2+y^4}\le\frac{\left(\frac{x^2+y^4}{2}\right)^2}{x^2+y^4}=\frac{x^2+y^4}{4},$$

又 $$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{x^2+y^4}{4}=0,$$

由夹逼定理知 $$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{x^2y^4}{x^2+y^4}=0.$$

3. 求经过直线 $L:\begin{cases}x+1=0,\\3y+2z+2=0,\end{cases}$ 而且与点 $A(4,1,2)$ 的距离等于3 的平面方程. （8 分)

解　过直线 $L:\begin{cases}x+1=0,\\3y+2z+2=0\end{cases}$ 的平面束方程为

$$(x+1)+\lambda(3y+2z+2)=0,$$

即　　$x+3\lambda y+2\lambda z+1+2\lambda=0,$

由点到直线的距离公式及已知条件知

$$d=\frac{|4+3\lambda+4\lambda+1+2\lambda|}{\sqrt{1+9\lambda^2+4\lambda^2}}=\frac{|5+9\lambda|}{\sqrt{1+13\lambda^2}}=3,$$

解得　　$\lambda_1=-\dfrac{1}{6},\lambda_2=\dfrac{8}{3},$

故所求平面方程为　$6x-3y-2z+4=0$ 及 $3x+24y+16z+19=0.$

4. 设 $u=f(x,y,z)$, 其中 $x=r\cos\theta\sin\varphi,\quad y=r\sin\theta\sin\varphi,$ $z=r\cos\varphi,\ f$ 可微，若 $\dfrac{f_x'}{x}=\dfrac{f_y'}{y}=\dfrac{f_z'}{z}$, 证明 u 仅为 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 的函数. (8 分)

证　由于 $u=f(x,y,z)=f(r\cos\theta\sin\varphi,r\sin\theta\sin\varphi,r\cos\varphi),$

$$\frac{\partial u}{\partial\theta}=f_x'\cdot(-r\sin\theta\sin\varphi)+f_y'\cdot r\cos\theta\sin\varphi,$$

$$\frac{\partial u}{\partial\varphi}=f_x'\cdot r\cos\theta\cos\varphi+f_y'\cdot r\sin\theta\cos\varphi-f_z'\cdot r\sin\varphi,$$

由 $\dfrac{f'_x}{x}=\dfrac{f'_y}{y}=\dfrac{f'_z}{z}$ 得

$$\frac{f'_x}{r\cos\theta\sin\varphi}=\frac{f'_y}{r\sin\theta\sin\varphi}=\frac{f'_z}{r\cos\varphi}=\lambda,$$

代入 $\dfrac{\partial u}{\partial\theta},\dfrac{\partial u}{\partial\varphi},$ 得 $\dfrac{\partial u}{\partial\theta}=0,\ \dfrac{\partial u}{\partial\varphi}=0,$

故 u 仅为 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 的函数.

5.已知曲线 $L:\begin{cases}x^2+y^2-2z^2=0,\\x+y+3z=5,\end{cases}$求 L 上距离 xoy 平面最远的点和最近的点.(8 分)

解 令 $L=z^2+\lambda(x^2+y^2-2z^2)+\mu(x+y+3z-5),$

由
$$\begin{cases}L'_x=2\lambda x+\mu=0,\\L'_y=2\lambda y+\mu=0,\\L'_z=2z-4\lambda z+3\mu=0,\\L'_\lambda=x^2+y^2-2z^2=0,\\L'_\mu=xy+3z-5=0,\end{cases}$$

解得 $\begin{cases}x=1,\\y=1,\\z=1,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=-5,\\y=-5,\\z=5.\end{cases}$

故 L 上距离 xoy 平面最远的点为 $(-5,-5,5)$,最近的点为 $(1,1,1)$.

6.证明平面 $lx+my+nz=p$ 与二次曲面 $Ax^2+By^2+Cz^2=1$ 相切的条件为 $\dfrac{l^2}{A}+\dfrac{m^2}{B}+\dfrac{n^2}{C}=p^2$.（8 分)

证 设切点为 $P(x_0, y_0, z_0)$,

则二次曲面在点 P 处的法向量为 $b=(2Ax_0, 2By_0, 2Cz_0)$,

由 b // (l,m,n) 得

$$\frac{2Ax_0}{l}=\frac{2By_0}{m}=\frac{2Cz_0}{n}=k\Rightarrow x_0=\frac{lk}{2A}, y_0=\frac{mk}{2B}, z_0=\frac{nk}{2C},$$

又切点在平面及二次曲面上，则 $\begin{cases} lx_0+my_0+nz_0=p, \\ Ax_0^2+By_0^2+Cz_0^2=1, \end{cases}$

将 $x_0=\dfrac{lk}{2A}, y_0=\dfrac{mk}{2B}, z_0=\dfrac{nk}{2C}$ 代入上方程组并消 k，得

$$\frac{l^2}{A}+\frac{m^2}{B}+\frac{n^2}{C}=p^2.$$

7.计算下列二重积分：$\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{x}}\mathrm{e}^{\frac{x}{y}}\mathrm{d}y+\int_{\frac{1}{2}}^{1}\mathrm{d}x\int_{x}^{\sqrt{x}}\mathrm{e}^{\frac{x}{y}}\mathrm{d}y$. （8 分)

解 $D_1:\dfrac{1}{4}\le x\le\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\le y\le\sqrt{x}, D_2:\dfrac{1}{2}\le x\le 1, x\le y\le\sqrt{x},$

作图可知 $D:\dfrac{1}{2}\le y\le 1, y^2\le x\le y,$

故 原式 $=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\mathrm{d}y\int_{y^2}^{y}\mathrm{e}^{\frac{x}{y}}\mathrm{d}x=\int_{\frac{1}{2}}^{1}y(\mathrm{e}-\mathrm{e}^{y})\mathrm{d}y=\dfrac{3}{8}\mathrm{e}-\dfrac{1}{2}\sqrt{\mathrm{e}}.$

8. 计算三重积分 $\iiint\limits_{\Omega} z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, 其中 Ω 是两球体:

$x^2+y^2+z^2\le 1$ 与 $x^2+y^2+z^2\le 2z$ 的公共部分. (8 分)

解 法 1 用柱面坐标. 由于 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1, \\ x^2+y^2+z^2=2z \end{cases} \Rightarrow x^2+y^2=\dfrac{3}{4}.$

令 $\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta, \\ z=z, \end{cases}$

则 $0\le\theta\le 2\pi,\ 0\le r\le\dfrac{\sqrt{3}}{2}, 1-\sqrt{1-r^2}\le z\le\sqrt{1-r^2},$

故 $\iiint\limits_{\Omega} z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} r\,\mathrm{d}r\int_{1-\sqrt{1-r^2}}^{\sqrt{1-r^2}} z^2\,\mathrm{d}z=\cdots=\dfrac{59}{480}\pi.$

法 2 用截面法. 由于 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1, \\ x^2+y^2+z^2=2z \end{cases} \Rightarrow z=\dfrac{1}{2},$ 则

$D_{z1}: x^2+y^2\le 2z-z^2,\ 0\le z\le\dfrac{1}{2};\quad D_{z2}: x^2+y^2\le 1-z^2,\ \dfrac{1}{2}\le z\le 1,$

故 原式 $=\int_0^{\frac{1}{2}} z^2\,\mathrm{d}z\iint_{D_{z1}}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\int_{\frac{1}{2}}^{1} z^2\,\mathrm{d}z\iint_{D_{z2}}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}} z^2\cdot\pi(2z-z^2)\,\mathrm{d}z+\int_{\frac{1}{2}}^{1} z^2\cdot\pi(1-z^2)\,\mathrm{d}z$$

$$=\cdots=\frac{59}{480}\pi.$$

9. 计算曲线积分 $\int_L (12xy+\mathrm{e}^y)\,\mathrm{d}\,x+(x\mathrm{e}^y-\cos y)\,\mathrm{d}\,y$，其中 L 是由点 $A(-1,1)$ 沿曲线 $y=x^2$ 到点 $O(0,0)$，再沿 x 轴到点 $B(2,0)$ 的路径.（8 分）

解 因为 $P=12xy+\mathrm{e}^y, Q=x\mathrm{e}^y-\cos y,$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=12y+\mathrm{e}^y,\frac{\partial Q}{\partial x}=\mathrm{e}^y,\frac{\partial P}{\partial y}\neq\frac{\partial Q}{\partial x},$$

法 1：补充 $L_1: x=2, y:0\to 1;\ L_2: y=2, x:2\to -1,$

则 $$\int_{L+L_1+L_2} P\,\mathrm{d}\,x+Q\,\mathrm{d}\,y=\iint_D -12x\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$$

$$=\int_0^1 \mathrm{d}\,y\int_{\sqrt{\mathrm{y}}}^2 -12x\,\mathrm{d}\,x=\cdots=-21.$$

又 $$\int_{L_1+L_2} P\,\mathrm{d}\,x+Q\,\mathrm{d}\,y=\int_0^1 (2\,\mathrm{e}^y-\cos y)\,\mathrm{d}\,y+\int_2^{-1} (12x+\mathrm{e})\,\mathrm{d}\,x$$

$$=\cdots=-\mathrm{e}-\sin 1-20,$$

故 $$\int_L P\,\mathrm{d}\,x+Q\,\mathrm{d}\,y=-21+\mathrm{e}+\sin 1+20=\mathrm{e}+\sin 1-1.$$

法 2 令 $P_1=\mathrm{e}^y$ 时，$\dfrac{\partial P_1}{\partial y}=\mathrm{e}^y=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$，记

$$I_1=\int_L 12xy\,\mathrm{d}\,x=\int_{L_1} 12xy\,\mathrm{d}\,x+\int_{L_2} 12xy\,\mathrm{d}\,x$$

$$=\int_{-1}^0 12x\cdot x^2\,\mathrm{d}\,x+\int_0^2 0\,\mathrm{d}\,x=-3;$$

$$I_2=\int_L \mathrm{e}^y\,\mathrm{d}\,x+(x\mathrm{e}^y-\cos y)\,\mathrm{d}\,y$$

$$=\int_L \mathrm{d}(x\,\mathrm{e}^y-\sin y)=(x\,\mathrm{e}^y-\sin y)\Big|_{(-1,1)}^{(2,0)}=2+\mathrm{e}+\sin 1,$$

则 原式$=I_1+I_2=-3+2+\mathrm{e}+\sin 1=\mathrm{e}+\sin 1-1.$

10.计算曲面积分$\iint\limits_{\Sigma} 2x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+(z+2)^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$ 其中 Σ 为下半球

$z=-\sqrt{4-x^2-y^2}$，取上侧.（8 分）

解 补充 $\Sigma_1: z=0,\ x^2+y^2\le 2,$ 取下侧，

则由高斯公式有

$$\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1} 2x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+(z+2)^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=-\iiint\limits_{\Omega}[2+2(z+2)]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \cdots \ 3\ 分$$

$$=-\int_{-2}^{0}(6+2z)\,\mathrm{d}z\iint_{x^2+y^2\le 4-z^2}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=-24\pi.$$

又 $\iint\limits_{\Sigma_1} 2x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+(z+2)^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=-\iint_{x^2+y^2\le 4}2^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

$$=-4\cdot 4\pi=-16\pi,$$

故原式$=\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1-\Sigma_1} 2x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+(z+2)^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=-24\pi+16\pi=-8\pi.$

11.求幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(n+1)!}x^n$ 的收敛区间与和函数.（10 分）

解 因为 $a_n=\frac{n^2}{(n+1)!},$ 则

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)!}\cdot\frac{(n+2)!}{(n+1)^2}=+\infty,$$

从而幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(n+1)!}x^n$ 的收敛区间为$(-\infty,\infty)$.

由于

$$\frac{n^2}{(n+1)!}=\frac{(n+1)n-(n+1)+1}{(n+1)!}=\frac{1}{(n-1)!}-\frac{1}{n!}+\frac{1}{(n+1)!}\quad(n\geq 1),$$

故 $x\neq 0$ 时，

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(n+1)!}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}[\frac{1}{(n-1)!}-\frac{1}{n!}+\frac{1}{(n+1)!}]x^n$$

$$=x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}x^{n-1}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n+\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)!}x^{n+1}$$

$$=x\,\mathrm{e}^x-(\mathrm{e}^x-1)+\frac{1}{x}(\mathrm{e}^x-1-x)$$

$$=(x-1)\,\mathrm{e}^x+\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}.$$

从而和函数为 $S(x)=\begin{cases}(x-1)\,\mathrm{e}^x+\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

12.（1）判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty}[\frac{1}{n}-\ln(1+\frac{1}{n})]$ 的敛散性；

（2）若记 $x_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln(1+n)$，证明数列 $\{x_n\}$ 收敛；

（3）求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n})$.（10 分）

解 $(1)\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{n}-\ln(1+\frac{1}{n})}{\frac{1}{n^2}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x-\ln(1+x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1-\frac{1}{1+x}}{2x}=\dfrac{1}{2}$,

又 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，故 $\sum_{n=1}^{\infty}[\frac{1}{n}-\ln(1+\frac{1}{n})]$ 收敛.

(2) $S_n = \sum_{k=1}^{n}[\frac{1}{k} - \ln(1+\frac{1}{k})] = \sum_{k=1}^{n}[\frac{1}{k} + \ln k - \ln(1+k)]$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(1+n) = x_n,$$

由级数$\sum_{n=1}^{\infty}[\frac{1}{n} - \ln(1+\frac{1}{n})]$收敛知数列$\{x_n\}$收敛.

(3) 不妨设数列$\{x_n\}$收敛于A,则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}) = \lim_{n\to\infty}\frac{x_n + \ln(n+1)}{\ln n}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{A}{\ln n} + \frac{\ln(n+1)}{\ln n} = 0 + 1 = 1.$$