2019.6

线性代数 A 参考答案（A 卷）

1. 将行列式按第一列展开得 $D_n=(\alpha+\beta)D_{n-1}-\alpha\beta D_{n-2}$，$(n\geq 3)$，

又因为 $D_1=\alpha+\beta, D_2=\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2, D_3=\alpha^3+\alpha^2\beta+\alpha\beta^2+\beta^3$， 4 分

若 $\alpha=\beta$，不妨设 $D_{n-1}=n\alpha^{n-1}$，则有

$$D_n=(\alpha+\beta)D_{n-1}-\alpha\beta D_{n-2}=2\alpha n\alpha^{n-1}-\alpha^2(n-1)\alpha^{n-2}=(n+1)\alpha^n$$

由归纳假设知 $D_n=(n+1)\alpha^n$ 6 分

若 $\alpha\neq\beta$，不妨设 $D_{n-1}=\dfrac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}$，则有

$$D_n=(\alpha+\beta)D_{n-1}-\alpha\beta D_{n-2}=(\alpha+\beta)\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}-\alpha\beta\frac{\alpha^{n-1}-\beta^{n-1}}{\alpha-\beta}=\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}$$

由归纳假设知 $D_n=\dfrac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}$ 8 分

2. 令 $A_1=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}, A_2=\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，则 $A=\begin{bmatrix}A_1&0\\0&A_2\end{bmatrix}, A^n=\begin{bmatrix}A_1^n&0\\0&A_2^n\end{bmatrix}$， 2 分

而 $A_1^2=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}=E$，所以 $A_1^n=\begin{cases}E, n=2k\\A_1, n=2k-1\end{cases}$

又因为 $A_2^2=\begin{bmatrix}1&0&-2\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，$A_2^3=\begin{bmatrix}1&0&-3\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，所以 $A_2^n=\begin{bmatrix}1&0&-n\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$， 6 分

故当 $n=2k$ 时，$A^n=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&-n\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}$，

故当 $n=2k-1$ 时，$A^n=\begin{bmatrix}0&1&0&0&0\\1&0&0&0&0\\0&0&1&0&-n\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}$， 8 分

3. 由题意可知 $r(A)<4$，而 2 分

$$A=\begin{bmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & k \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & k \\ 0 & k-1 & 0 & 1-k \\ 0 & 0 & k-1 & 1-k \\ 0 & 1-k & 1-k & 1-k^2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & k \\ 0 & k-1 & 0 & 1-k \\ 0 & 0 & k-1 & 1-k \\ 0 & 0 & 0 & (1-k)(3+k) \end{bmatrix},$$

所以 $k=1$ 或 $k=-3$ 8 分

4. 因为 $$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 6 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ 4 分

所以 最大无关组为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$，且有 $\alpha_3=\alpha_1+\alpha_2$ 8 分

5. 因为 A 为正定矩阵，所以有

$$D_1=2-a>0, D_2=\begin{vmatrix} 2-a & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}>0, D_3=\begin{vmatrix} 2-a & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a+2 \end{vmatrix}>0$$ 3 分

解得 $-2<a<1$ 6 分

6. （1）因为 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)^{-1}(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$，而

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

故 $$A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$ 6 分

（2）设 $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)X=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)Y$，则 $Y=A^{-1}X$，而

$$\begin{bmatrix}2&1&2&2\\-1&-2&-1&-1\\0&3&2&-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&1&1\\0&-3&0&0\\0&3&2&-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&1&1\\0&1&0&0\\0&0&1&-\frac{1}{2}\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0&\frac{3}{2}\\0&1&0&0\\0&0&1&-\frac{1}{2}\end{bmatrix},$$

所以 $Y=(\frac{3}{2},0,\frac{1}{2})^T$

12 分

7. 设方程为 $a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+a_4x_4=0$，由题意有 $\begin{cases}a_2+2a_3+3a_4=0\\3a_1+2a_2+a_3=0\end{cases}$，

而 $\begin{bmatrix}0&1&2&3\\3&2&1&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}0&1&2&3\\3&0&-3&-6\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-1&-2\\0&1&2&3\end{bmatrix}$，

4 分

得基础解系 $\eta_1=(1,-2,1,0)^T,\eta_2=(2,-3,0,1)^T$，故方程组为 $\begin{cases}x_1-2x_2+x_3=0\\2x_1-3x_2+x_4=0\end{cases}$ 8 分

8.

$$\overline{A}=\begin{bmatrix}1&-1&1&\lambda\\1&\lambda&1&-1\\\lambda&1&2&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-1&1&\lambda\\0&\lambda+1&0&-(\lambda+1)\\0&\lambda+1&2-\lambda&1-\lambda^2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-1&1&\lambda\\0&\lambda+1&0&-(\lambda+1)\\0&0&2-\lambda&(1+\lambda)(2-\lambda)\end{bmatrix}$$

当 $\lambda\neq2$ 且 $\lambda\neq-1$ 时，$r(A)=r(\overline{A})=3$，有唯一解，

当 $\lambda=2$ 时，$r(A)=r(\overline{A})=2$，有无穷解

当 $\lambda=-1$ 时，$r(A)=r(\overline{A})=2$，有无穷解

6 分

当 $\lambda=2$ 时，$\overline{A}\to\begin{bmatrix}1&-1&1&2\\0&3&0&-3\\0&0&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&1&1\\0&1&0&-1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$，

解得 $\eta_0=(1,-1,0)^T,\xi=(-1,0,1)^T$，故通解为 $\eta_0+k\xi,k\in R$

当 $\lambda=-1$ 时，$\overline{A}\to\begin{bmatrix}1&-1&1&-1\\0&0&0&0\\0&0&3&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-1&0&-1\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$，

解得 $\eta_0=(-1,0,0)^T,\xi=(1,1,0)^T$，故通解为 $\eta_0+k\xi,k\in R$

12 分

9. 令$\varphi(\lambda)=\lambda^3-4\lambda+1$，则$B$的特征值为$\varphi(1)$，$\varphi(2),\varphi(-2)$，即$-2,1,1$ 3 分

因为 $B\xi_1=(A^3-4A+E)\xi_1=A^3\xi_1-4A\xi_1+E\xi_1=(\lambda_1^3-4\lambda_1+1)\xi_1=\varphi(\lambda_1)\xi_1$

所以 当ξ_1是A的属于特征值λ_1的特征向量时，ξ_1也是B的属于特征值$\varphi(\lambda_1)$的特征向量，故要求B的特征向量，只需求A的特征向量

A为实对称矩阵，故不同特征值所对应的特征向量正交，即A的另两个特征向量满足方程$x_1-x_2+x_3=0$，此方程的基础解系为：$\xi_2=(1,1,0)^T,\xi_3=(-1,0,1)^T$

所以，B的属于特征值-2的特征向量为：$k\xi_1,k\in R$且$k\neq 0$

属于特征值1的特征向量为$k\xi_2+l\xi_3,k,l\in R$且不同时为零 8 分

10. 设x_0,y_0表示 2000 年底农村人口与城镇人口占总人口的比例，x_n,y_n表示从 2000 年底之后的n年农村人口和城镇人口所占比例，则有

$$\begin{bmatrix}x_0\\y_0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{bmatrix},\begin{cases}x_1=\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{20}\times\frac{1}{2}\\y_1=\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}+\frac{19}{20}\times\frac{1}{2}\end{cases}$$

令$A=\begin{bmatrix}\frac{1}{4}&\frac{1}{20}\\\frac{3}{4}&\frac{19}{20}\end{bmatrix}$，上式可写为 $\begin{bmatrix}x_1\\y_1\end{bmatrix}=A\begin{bmatrix}x_0\\y_0\end{bmatrix}$,

因为总人口不变且迁移规律不变，所以有$\begin{bmatrix}x_n\\y_n\end{bmatrix}=A^n\begin{bmatrix}x_0\\y_0\end{bmatrix}$ 4 分

解得A的特征值为$\lambda_1=1$，$\lambda_2=\frac{1}{5}$，其对应的特征向量为$\xi_1=(1,15)^T,\xi_2=(-1,1)^T$， 8 分

令$P=(\xi_1,\xi_2)$，则$A=P\begin{bmatrix}1&0\\0&\frac{1}{5}\end{bmatrix}P^{-1}$，所以

$$A^n=P\begin{bmatrix}1&0\\0&\frac{1}{5^n}\end{bmatrix}P^{-1}=\begin{bmatrix}1&-1\\15&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&\frac{1}{5^n}\end{bmatrix}\frac{1}{16}\begin{bmatrix}1&1\\-15&1\end{bmatrix}=\frac{1}{16}\begin{bmatrix}1+\frac{15}{5^n}&1-\frac{1}{5^n}\\15-\frac{15}{5^n}&15+\frac{1}{5^n}\end{bmatrix}$$ 9 分

所以 2019 年底农村人口与城镇人口所占比例为 $\begin{bmatrix} x_{19} \\ y_{19} \end{bmatrix} = A^{19} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 1+\frac{7}{5^{19}} \\ 15-\frac{7}{5^{19}} \end{bmatrix}$ 10 分

11. $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & -4 \\ 2 & -4 & 4 \end{bmatrix}$，特征方程为 $|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 2 \\ -2 & 4-\lambda & -4 \\ 2 & -4 & 4-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^2(\lambda-9)$，

故 A 的特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$，$\lambda_3 = 9$

4 分

当 $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ 时，$A-\lambda E = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & -4 \\ 2 & -4 & 4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

基础解系为 $\alpha_1 = (2,1,0)^T, \alpha_2 = (-2,0,1)^T$，正交化 $\beta_1 = \alpha_1 = (2,1,0)^T, \beta_2 = \alpha_2 = (-\frac{2}{5}, \frac{4}{5}, 1)^T$，单位化 $\xi_1 = (\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, 0)^T, \xi_2 = (-\frac{2}{3\sqrt{5}}, \frac{4}{3\sqrt{5}}, \frac{5}{3\sqrt{5}})^T$

当 $\lambda_3 = 9$ 时，$A-\lambda E = \begin{bmatrix} -8 & -2 & 2 \\ -2 & -5 & -4 \\ 2 & -4 & -5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & -4 & -5 \\ 0 & -9 & -9 \\ 0 & -18 & -18 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

基础解系为 $\alpha_3 = (\frac{1}{2}, -1, 1)^T$，单位化 $\xi_3 = (\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3})^T$

令 $Q = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$，则 $X = QY$ 即为所求正交变换，

10 分

标准型为 $f = 9y_3^2$，故 $f = 9y_3^2 = 1$ 即 $y = \pm\frac{1}{3}$ 为空中两张平行的平面。 12 分