

线 性 代 数 A 卷 答 案

1. 3; 2. 0; 3. 10; 4. 9; 5. $7^{2016}A$; 6. $X = k(1, 1, \dots, 1)^T$, k 为任意常数;
7. $\frac{9}{4}$; 8. 3.

9. 首先将 D_{n+1} 的第一行与以下各行交换 (共 n 次) 得到一个行列式, 再将该行列式的第二行与以下 $n-1$ 行 (除最后一行外) 交换 (共 $n-1$ 次), ..., 以此类推, 得到以下范德蒙德行列式:

$$D_{n+1} = (-1)^{n+(n-1)+\dots+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a & a+1 & \dots & a+n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a^{n-1} & (a+1)^{n-1} & \dots & (a+n)^{n-1} \\ a^n & (a+1)^n & \dots & (a+n)^n \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \prod_{0 \leq i < j \leq n} (j-i)$$

$$= (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} 1!2! \dots (n-1)!n!.$$

注. 如果用第 1 行与第 $n+1$ 行对换, 第 2 行与第 n 行对换, 前面的符号错误就酌情扣 2 分.

10. 对 $ABA^{-1} = -BA^{-1} + 2E$, 左乘 A^* , 右乘 A , 得到 $A^*AB = -A^*B + 2A^*A$

$$\text{所以 } |A|B + A^*B = 2|A|E, \text{ 而且 } |A^*| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 8,$$

$|A^*| = |A|^{4-1} = |A|^3$, 所以 $|A| = 2$, 故

$$(2E + A^*)B = 4E, \quad B = 4(2E + A^*)^{-1} = 4 \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}^{-1} = 4 \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

11. 作初等行变换:

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 4 & 4 \end{bmatrix} \begin{matrix} \alpha_2 \\ \alpha_1 - \alpha_2 \\ \alpha_3 - \alpha_2 \\ \alpha_4 - 4\alpha_2 \\ \alpha_5 + 3\alpha_2 \end{matrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \alpha_2 \\ \alpha_1 - \alpha_2 \\ \alpha_3 - \alpha_2 - 2(\alpha_1 - \alpha_2) \\ \alpha_4 - 4\alpha_2 - (\alpha_1 - \alpha_2) \\ \alpha_5 + 3\alpha_2 + 2(\alpha_1 - \alpha_2) \end{matrix}$$

故该向量组的秩为 2, 一个最大无关组为 α_1, α_2

用该最大无关组表示其余向量得:

$$\alpha_3 = 2\alpha_1 - \alpha_2, \quad \alpha_4 = 3\alpha_2 + \alpha_1, \quad \alpha_5 = -2\alpha_1 - \alpha_2.$$

12. 设由基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 到基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 的过渡矩阵为 C , 则

$$(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)C, \text{ 故}$$

$$C = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)^{-1}(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

设向量 $\gamma = 3\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3$ 在基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 下的坐标为 y_1, y_2, y_3 , 则

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = C^{-1} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

13. 对方程组的增广矩阵用初等行变换得:

$$(AB) = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & 0 \\ -1 & 4 & -5 & a \\ 2 & -1 & 3 & 5 \\ -1 & 2 & b-2 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & b+1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 \end{bmatrix}$$

故当 $a \neq 1, b$ 任意取值时, $R(AB) \neq R(A)$, 方程组无解;

当 $a = 1, b \neq -1$ 时, $R(AB) = R(A) = 3$, 方程组有唯一解;

当 $a = 1, b = -1$ 时, $R(AB) = R(A) = 2 < 3$, 方程组有无穷多解, 由

$$(AB) = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & 0 \\ -1 & 4 & -5 & a \\ 2 & -1 & 3 & 5 \\ -1 & 2 & b-2 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

即 $\begin{cases} x_1 + x_3 = 3 \\ x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$ 得到通解为: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} k + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, k 为任意常数.

14. 二次型对应的矩阵为 $A = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 3 \\ -1 & 5 & -3 \\ 3 & -3 & a \end{bmatrix}$, 因为 $R(A) = 2$, 所以 $|A| = 0$,

求得 $a = 3$.

由 $|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 5 & 1 & -3 \\ 1 & \lambda - 5 & 3 \\ -3 & 3 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda - 4)(\lambda - 9) = 0$ 得到 A 的特征值为 0, 4, 9.

对 $\lambda_1 = 0$, 由 $(\lambda E - A)X = 0$ 求得特征向量 $p_1 = (-1, 1, 2)^T$, 单位化得 $q_1 = (\frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}})^T$,

对 $\lambda_2 = 4$, 由 $(\lambda E - A)X = 0$ 求得特征向量 $p_2 = (1, 1, 0)^T$, 单位化得 $q_2 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)^T$,

对 $\lambda_3 = 9$, 由 $(\lambda E - A)X = 0$ 求得特征向量 $p_3 = (1, -1, 1)^T$, 单位化得 $q_3 = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})^T$,

得到正交矩阵 $Q = (q_1, q_2, q_3)$ 以及正交变换 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$, 故二次型 f 经过

该正交变换后的标准型为 $f = 4y_2^2 + 9y_3^2$.

$f(x_1, x_2, x_3) = 1$ 表示椭圆柱面.

15. 证明. 充分性 \Leftarrow : 假设存在 n 阶方阵 P, Q 使得 $A = PB$, $B = QA$, 如果

X_0 是方程组 $AX=0$ 的解，即 $AX_0=0$ ，故 $BX_0=QAX_0=0$ ，即 X_0 是方程组 $BX=0$ 的解，同理方程组 $BX=0$ 的解也是方程组 $AX=0$ 的解，故两个方程组同解.

必要性 \Rightarrow)：因为方程组 $\begin{cases} AX=0 \\ BX=0 \end{cases}$ 与方程组 $AX=0$ 同解，所以

$R\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = R(A)$ ，即 B 的行向量可由 A 的行向量线性表示，故存在 n 阶方

阵 Q 使得 $B=QA$.

同理存在 n 阶方阵 P 使得 $A=PB$.