



XIII LO Szczecin

# Wojownicze Żółwie Ninja

Tomasz Nowak, Michał Staniewski, Justyna Jaworska

MWPZ 2019

7. Grudnia

1    Utils

2    Podejścia

3    Wzorki

4    Matma

5    Struktury danych

6    Grafy

7    Geometria

8    Tekstówki

9    Optymalizacje

10  Randomowe rzeczy

Utils (1)

```
headers
Opis: Nagłówki używane w każdym kodzie. Działa na każdy kontener i pary
Użycie:  debug(a, b, c) << d << e; wypisze a, b, c:  a; b; c;
de
<bits/stdc++.h>                                     46f465, 33 lines

using namespace std;
using LL = long long;
#define FOR(i, l, r) for(int i = (l); i <= (r); ++i)
#define REP(i, n) FOR(i, 0, (n) - 1)
template<class T> int size(T &&x) {
    return int(x.size());
}
template<class A, class B> ostream& operator<<(ostream &out,
    const pair<A, B> &p) {
    return out << '(' << p.first << ", " << p.second << ')';
}
template<class T> auto operator<<(ostream &out, T &&x) ->
    decltype(x.begin(), out) {
    out << '{';
    for(auto it = x.begin(); it != x.end(); ++it)
        out << *it << (it == prev(x.end()) ? "" : ", ");
    return out << '}';
}
void dump() {}
template<class T, class... Args> void dump(T &&x, Args... args)
{
    cerr << x << ";  ";
    dump(args...);
}
struct Nl{~Nl(){cerr << '\n';}};
#ifdef DEBUG
# define debug(x...) cerr << (strcmp(#x, "") ? #x " : " : ""),
    dump(x), Nl(), cerr << ""
#else
# define debug(...) 0 && cerr
#endif

const int seed = chrono::system_clock::now().time_since_epoch().count();
```

```
1  mt19937_64 rng(seed);
   int rd(int l, int r) {
1       return uniform_int_distribution<int>(l, r)(rng);
   }

1  headers/bazshrc.sh                                     10 lines

3  c() {
   clang++ -O3 -std=c++11 -Wall -Wextra -Wshadow \
   -Wconversion -Wno-sign-conversion -Wfloat-equal \
4   -D_GLIBCXX_DEBUG -fsanitize=address,undefined -ggdb3 \
   -DDEBUG $1.cpp -o $1
   }

6  nc() {
   clang++ -O3 -std=c++11 -static $1.cpp -o $1 #-m32
9  }

10 headers/vimrc                                         3 lines

11 set nu rnu hls is nosol ts=4 sw=4 ch=2 sc
   filetype indent plugin on
   syntax on

11 headers/sprawdzaczka.sh                               13 lines

#!/bin/bash
for ((i=0; i<1000000; i++)); do
    ./gen < conf.txt > gen.txt
    ./main < gen.txt > main.txt
    ./brute < gen.txt > brute.txt

    if diff -w main.txt brute.txt > /dev/null; then
        echo "OK $i"
    else
        echo "WA"
        exit 0
    fi
done
```

Podejścia (2)

- dynamik, zachłan
- sposób "liczba dobrych obiektów = liczba wszystkich obiektów - liczba złych obiektów"
- czy warunek konieczny = warunek wystarczający?
- odpowiednie przekształcenie równania
- zastanowić się nad łatwiejszym problemem, bez jakiegoś elementu z treści
- sprowadzić problem do innego, łatwiejszego/mniejszego problemu
- sprowadzić problem 2D do problemu 1D (zamiatanie; niezależność wyniku dla współrzędnych X od współrzędnych Y)
- konstrukcja grafu
- określenie struktury grafu
- optymalizacja bruta do wzorcówki
- czy można poprawić (może zachłannienie) rozwiązanie nieoptymalne?

- czy są ciekawe fakty w rozwiązaniach optymalnych? (może się do tego przydać brute)
- sprawdzić czy w zadaniu czegoś jest "mało" (np. czy wynik jest mały, albo jakaś zmienna, może się do tego przydać brute)
- odpowiednio "wzbogacić" jakiś algorytm
- cokolwiek poniżej 10<sup>9</sup> operacji ma szansę wejść
- co można wykonać offline? coś można posortować? coś można shuffle'ować?
- narysować dużo swoich własnych przykładów i coś z nich wywnioskować
- skupienie się na pozycji jakiegoś specjalnego elementu, np najmniejszego
- szacowanie wyniku - czy wynik jest mały? czy umiem skonstruować algorytm który zawsze znajdzie upper bound na wynik?
- sklepać brute który sprawdza obserwacje, zawsze jeśli potrzebujemy zoptymalizować dp, wypisać wartości na małym przykładzie
- pierwiastki - elementy  $> i < \sqrt{N}$  osobno, rebuild co  $\sqrt{N}$  operacji, jeśli suma wartości  $= N$ , jest  $\sqrt{N}$  różnych wartości
- rozwiązania randomizacyjne, paradoks urodzeń

Wzorki (3)

3.1    Równości

$$ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Wierzchołek paraboli =  $(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a})$ .

$$\begin{aligned} ax + by &= e \\ cx + dy &= f \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} x &= \frac{ed - bf}{ad - bc} \\ y &= \frac{af - ec}{ad - bc} \end{aligned}$$

3.2    Pitagoras

Trójki  $(a, b, c)$ , takie że  $a^2 + b^2 = c^2$ :

$$a = k \cdot (m^2 - n^2), \quad b = k \cdot (2mn), \quad c = k \cdot (m^2 + n^2),$$

gdzie  $m > n > 0$ ,  $k > 0$ ,  $m \perp n$ , oraz albo  $m$  albo  $n$  jest parzyste.

### 3.3 Generowanie względnie pierwszych par

Dwa drzewa, zaczynając od  $(2, 1)$  (parzysta-nieparzysta) oraz  $(3, 1)$  (nieparzysta-nieparzysta), rozgałęzienia są do  $(2m - n, m)$ ,  $(2m + n, m)$  oraz  $(m + 2n, n)$ .

### 3.4 Liczby pierwsze

$p = 962592769$  to liczba na NTT, czyli  $2^{21} \mid p - 1$ , which may be useful. Do hashowania: 970592641 (31-bit), 31443539979727 (45-bit), 3006703054056749 (52-bit).

Jest 78498 pierwszych  $\leq 1\,000\,000$ .

Generatorów jest  $\phi(\phi(p^a))$ , czyli dla  $p > 2$  zawsze istnieje.

### 3.5 Dzielniki

$\sum_{d \mid n} d = O(n \log \log n)$ .

Liczba dzielników  $n$  jest co najwyżej 100 dla  $n < 5e4$ , 500 dla  $n < 1e7$ , 2000 dla  $n < 1e10$ , 200 000 dla  $n < 1e19$ .

### 3.6 Lemat Burnside’a

Liczba takich samych obiektów z dokładnością do symetrii wynosi

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X^g|,$$

Gdzie  $G$  to zbiór symetrii (ruchów) oraz  $X^g$  to punkty (obiekty) stałe symetrii  $g$ .

### 3.7 Silnia

$n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$n!$	1	2	6	24	120	720	5040	40320	362880	3628800
$n$	11	12	13	14	15	16	17			
$n!$	4.0e7	4.8e8	6.2e9	8.7e10	1.3e12	2.1e13	3.6e14			
$n$	20	25	30	40	50	100	150	171		
$n!$	2e18	2e25	3e32	8e47	3e64	9e157	6e262	>DBL_MAX		

### 3.8 Symbol Newtona

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-2}{k-1} + \dots + \binom{k-1}{k-1}$$

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

### 3.9 Wzorki na pewne ciągi

#### 3.9.1 Nieporządek

Liczba takich permutacji, że  $p_i \neq i$  (żadna liczba nie wraca na tą samą pozycję).

$$D(n) = (n-1)(D(n-1)+D(n-2)) = nD(n-1)+(-1)^n = \left\lfloor \frac{n!}{e} \right\rfloor$$

#### 3.9.2 Liczba podziałów

Liczba sposobów zapisania  $n$  jako sumę posortowanych liczb dodatnich.

$$p(0) = 1, \quad p(n) = \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} (-1)^{k+1} p(n - k(3k - 1)/2)$$

$$p(n) \sim 0.145/n \cdot \exp(2.56\sqrt{n})$$

$n$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	20	50	100
$p(n)$	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	627	$\sim 2e5$	$\sim 2e8$

#### 3.9.3 Liczby Eulera pierwszego rzędu

Liczba permutacji  $\pi \in S_n$  gdzie  $k$  elementów jest większych niż poprzedni:  $k$  razy  $\pi(j) > \pi(j + 1)$ ,  $k + 1$  razy  $\pi(j) \geq j$ ,  $k$  razy  $\pi(j) > j$ .

$$E(n, k) = (n - k)E(n - 1, k - 1) + (k + 1)E(n - 1, k)$$

$$E(n, 0) = E(n, n - 1) = 1$$

$$E(n, k) = \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{n+1}{j} (k+1-j)^n$$

#### 3.9.4 Stirling pierwszego rzędu

Liczba permutacji długości  $n$  mające  $k$  cykli.

$$c(n, k) = c(n - 1, k - 1) + (n - 1)c(n - 1, k), \quad c(0, 0) = 1$$

$$\sum_{k=0}^n c(n, k) x^k = x(x + 1) \dots (x + n - 1)$$

$$c(8, k) = 8, 0, 5040, 13068, 13132, 6769, 1960, 322, 28, 1$$

$$c(n, 2) = 0, 0, 1, 3, 11, 50, 274, 1764, 13068, 109584, \dots$$

#### 3.9.5 Stirling drugiego rzędu

Liczba permutacji długości  $n$  mające  $k$  spójnych.

$$S(n, k) = S(n - 1, k - 1) + kS(n - 1, k)$$

$$S(n, 1) = S(n, n) = 1$$

$$S(n, k) = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} j^n$$

#### 3.9.6 Liczby Catalana

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} = \frac{(2n)!}{(n+1)!n!}$$

$$C_0 = 1, \quad C_{n+1} = \frac{2(2n+1)}{n+2} C_n, \quad C_{n+1} = \sum C_i C_{n-i}$$

$$C_n = 1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862, 16796, 58786, \dots$$

- ścieżki na planszy  $n \times n$ .
- nawiasowania po  $n$  ).
- liczba drzew binarnych z  $n + 1$  liśćmi (0 lub 2 syny).
- skierowanych drzew z  $n + 1$  wierzchołkami.
- triangulacje  $n + 2$ -kąta.
- permutacji  $[n]$  bez 3-wyrazowego rosnącego podciągu?

#### 3.9.7 Formuła Cayley’a

Liczba różnych drzew (z dokładnością do numerowania wierzchołków) wynosi  $n^{n-2}$ . Liczba sposobów by zespójnić  $k$  spójnych o rozmiarach  $s_1, s_2, \dots, s_k$  wynosi  $s_1 \cdot s_2 \cdot \dots \cdot s_k \cdot n^{k-2}$ .

### 3.10 Funkcje multiplikatywne

- $id(n) = n, \quad \mathbb{1} * \varphi = id$
- $\mathbb{1}(n) = 1$
- $\tau(n)$  = liczba dzielników dodatnich,  $\mathbb{1} * \mathbb{1} = \tau$
- $\sigma(n)$  = suma dzielników dodatnich,  $id * \mathbb{1} = \sigma$
- $\varphi(n)$  = liczba liczb względnie pierwszych z  $n$  większych równych 1,  $id * \mu = \varphi$
- $\mu(n) = 1$  dla  $n = 1$ , 0 gdy istnieje  $p$ , że  $p^2 \mid n$ , oraz  $(-1)^k$  jak  $n$  jest iloczynem  $k$  parami różnych liczb pierwszych
- $\epsilon(n) = 1$  dla  $n = 1$  oraz 0 dla  $n > 1$ ,  $f * \epsilon = f, \quad \mathbb{1} * \varphi = \epsilon$
- $(f * g)(n) = \sum_{d \mid n} f(d)g(\frac{n}{d})$
- $f * g = g * f$
- $f * (g * h) = (f * g) * h$
- $f * (g + h) = f * g + f * h$
- jak dwie z trzech funkcji  $f * g = h$  są multiplikatywne, to trzecia też
- $f * g = \epsilon \Rightarrow g(n) = -\frac{\sum_{d \mid n, d > 1} f(d)g(\frac{n}{d})}{f(1)}$
- równoważne:
  - $g(n) = \sum_{d \mid n} f(d)$
  - $f(n) = \sum_{d \mid n} g(d)\mu(\frac{n}{d})$
  - $\sum_{k=1}^n g(k) = \sum_{d=1}^n \lfloor \frac{n}{d} \rfloor f(d)$
- $\varphi(p^k) = p^k - p^{k-1} = p^{k-1}(p - 1)$
- $\varphi(n) = n \cdot (1 - \frac{1}{p_1}) \cdot (1 - \frac{1}{p_2}) \dots (1 - \frac{1}{p_k})$

### 3.11 Zasada włączeń i wyłączeń

$$|\bigcup_{i=1}^n A_i| = \sum_{\emptyset \neq J \subseteq \{1, \dots, n\}} (-1)^{|J|+1} |\bigcap_{j \in J} A_j|$$

### 3.12 Fibonacci

$$F_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$$

$F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$ ,  $F_{n+k} = F_kF_{n+1} + F_{k-1}F_n$ ,  
 $F_n|F_{nk}$ ,  $NWD(F_m, F_n) = F_{NWD(m, n)}$

## Matma (4)

#### extended-gcd

**Opis:** Dla danego  $(a, b)$  znajduje takie  $(gcd(a, b), x, y)$ , że  $ax+by = gcd(a, b)$   
**Czas:**  $\mathcal{O}(\log(\max(a, b)))$

**Użycie:** LL gcd, x, y; tie(gcd, x, y) = extended\_gcd(a, b); 7 lines

```
tuple<LL, LL, LL> extended_gcd(LL a, LL b) {
    if(a == 0)
        return {b, 0, 1};
    LL x, y, gcd;
    tie(gcd, x, y) = extended_gcd(b % a, a);
    return {gcd, y - x * (b / a), x};
}
```

#### crt

**Opis:** Chińskie Twierdzenie o Resztach  
**Czas:**  $\mathcal{O}(\log n)$  Pamięć :  $\mathcal{O}(1)$   
**Użycie:** crt(a, m, b, n) zwraca takie x, że  $x \bmod m = a$  i  $x \bmod n = b$

m i n nie muszą być względnie pierwsze, ale może nie być wtedy rozwiązania  
uwali się wtedy assertcik, można zmienić na return -1

```
"../extended-gcd/main.cpp" 269203, 9 lines
```

```
LL crt(LL a, LL m, LL b, LL n)
{
    if(n > m) swap(a, b), swap(m, n);
    LL d, x, y;
    tie(d, x, y) = extended_gcd(m, n);
    assert((a - b) % d == 0);
    LL ret = (b - a) % n * x % n / d * m + a;
    return ret < 0 ? ret + m * n / d : ret;
}
```

#### mod-int

**Opis:** Struktura do działań modulo  
**Czas:**  $\mathcal{O}(1)$ , dzielenie  $\mathcal{O}(\log mog)$   
**Użycie:** Ustaw modulo w ostatniej linii. Jeśli modulo nie jest const, usuń pierwszy wiersz i zadeklaruj mod

```
fcf508, 60 lines
```

```
template<int mod>
struct mi {
    int val;
    mi() { val = 0; }
    mi(const LL& v) {
        val = (-mod <= v && v <= mod) ? v : v % mod;
        if(val < 0) val += mod;
    }

    friend ostream& operator<<(ostream &os, const mi &a) {
```

```
    return os << a.val;
}

friend istream& operator>>(istream &is, mi &a) {
    return is >> a.val;
}

friend bool operator==(const mi &a, const mi &b) {
    return a.val == b.val;
}

friend bool operator!=(const mi &a, const mi &b) {
    return !(a == b);
}

friend bool operator<(const mi &a, const mi &b) {
    return a.val < b.val;
}

friend bool operator<=(const mi &a, const mi &b) {
    return a.val <= b.val;
}

mi operator-() const { return mi(-val); }
mi& operator+=(const mi &m) {
    if((val += m.val) >= mod) val -= mod;
    return *this;
}

mi& operator--(const mi &m) {
    if((val -= m.val) < 0) val += mod;
    return *this;
}

mi& operator*=(const mi &m) {
    val = (LL) val & m.val % mod;
    return *this;
}

friend mi qpow(mi a, LL n) {
    if(n == 0) return 1;
    if(n % 2 == 1) return qpow(a, n - 1) * a;
    return qpow(a * a, n / 2);
}

friend mi inv(const mi &a) {
    assert(a != 0); return qpow(a, mod - 2);
}

mi& operator /=(const mi &m) {
    return (*this) *= inv(m);
}

friend mi operator+(mi a, const mi &b) { return a += b; }
friend mi operator-(mi a, const mi &b) { return a -= b; }
friend mi operator*(mi a, const mi &b) { return a *= b; }
friend mi operator/(mi a, const mi &b) { return a /= b; }
};

using MI = mi<int(1e9 + 7)>;
```

#### newton

**Opis:** Dwumian Newtona  
**Czas:**  $\mathcal{O}(n \log n + q)$   
**Użycie:** get(n, k) zwraca n po k

```
"../mod-int/main.cpp" 0767de, 13 lines
```

```
struct Newton {
    vector<MI> fac, rev;
    Newton(int n) {
        fac = rev = vector<MI>(n + 1, 1);
        FOR(i, 1, n) fac[i] = fac[i - 1] * i;
        rev[n] = 1 / fac[n];
        for(int i = n; i >= 1; i--)
            rev[i - 1] = rev[i] * i;
    }
    MI get(int n, int k) {
        return fac[n] * rev[n - k] * rev[k];
    }
};
```

```
};

berlekamp-massey
Opis: Zgadywanie rekurencji liniowej
Czas:  $\mathcal{O}(n^2 \log k)$  Pamięć :  $\mathcal{O}(n)$ 
Użycie: Berlekamp_Massey<mod> bm(x) zgaduje rekurencję ciągu x
bm.get(k) zwraca k-ty wyraz ciągu x (index 0) 606849, 57 lines

template<int mod>
struct BerlekampMassey {
    int mul(int a, int b) {
        return (LL) a * b % mod;
    }
    int add(int a, int b) {
        return a + b < mod ? a + b : a + b - mod;
    }
    int qpow(int a, int n) {
        if(n == 0) return 1;
        if(n % 2 == 1) return mul(qpow(a, n - 1), a);
        return qpow(mul(a, a), n / 2);
    }

    int n;
    vector<int> x, C;
    BerlekampMassey(vector<int> &x) : x(x) {
        vector<int> B; B = C = {1};
        int b = 1, m = 0;
        REP(i, size(x)) {
            m++; int d = x[i];
            FOR(j, 1, size(C) - 1)
                d = add(d, mul(C[j], x[i - j]));
            if(d == 0) continue;
            auto _B = C;
            C.resize(max(size(C), m + size(B)));
            int coef = mul(d, qpow(b, mod - 2));
            FOR(j, m, m + size(B) - 1)
                C[j] = (C[j] - mul(coef, B[j - m]) + mod) % mod;
            if(size(_B) < m + size(B)) { B = _B; b = d; m = 0; }
        }
        C.erase(C.begin());
        for(int &t : C) t = add(mod, -t);
        n = size(C);
    }

    vector<int> combine(vector<int> a, vector<int> b) {
        vector<int> ret(n * 2 + 1);
        REP(i, n + 1) REP(j, n + 1)
            ret[i + j] = add(ret[i + j], mul(a[i], b[j]));
        for(int i = 2 * n; i > n; i--) REP(j, n)
            ret[i - j - 1] = add(ret[i - j - 1], mul(ret[i], C[j]));
        return ret;
    }

    int get(LL k) {
        vector<int> r(n + 1), pw(n + 1);
        r[0] = pw[1] = 1;
        for(k++; k; k /= 2) {
            if(k % 2) r = combine(r, pw);
            pw = combine(pw, pw);
        }
        LL ret = 0;
        REP(i, n) ret = add(ret, mul(r[i + 1], x[i]));
        return ret;
    }
};
```

milller-rabin  
**Opis:** Test pierwszości Millera-Rabina  
**Czas:**  $\mathcal{O}(\log_n^2)$  Pamięć:  $\mathcal{O}(1)$   
**Użycie:** miller\_rabin(n) zwraca czy n jest pierwsze  
działa dla long longów

```
623bb2, 33 lines
LL mul(LL a, LL b, LL mod) {
    return (a * b - (LL)((long double) a * b / mod) * mod + mod)
        % mod;
}

LL qpow(LL a, LL n, LL mod) {
    if(n == 0) return 1;
    if(n % 2 == 1) return mul(qpow(a, n - 1, mod), a, mod);
    return qpow(mul(a, a, mod), n / 2, mod);
}

bool miller_rabin(LL n) {
    if(n < 2) return false;
    int r = 0;
    LL d = n - 1;
    while(d % 2 == 0)
        d /= 2, r++;
    for(int a : {2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31}) {
        if(n == a) return true;
        LL x = qpow(a, d, n);
        if(x == 1 || x == n - 1)
            continue;
        bool composite = true;
        REP(i, r - 1) {
            x = mul(x, x, n);
            if(x == n - 1) {
                composite = false;
                break;
            }
        }
        if(composite) return false;
    }
    return true;
}
```

rho-pollard  
**Opis:** Rozkład na czynniki Rho Pollarda  
**Czas:**  $\mathcal{O}\left(n^{\frac{1}{4}}\right)$   
**Użycie:** factor(n) zwraca vector dzielników pierwszych n, niekoniecznie posortowany  
factor(12) = {2, 2, 3}, factor(545423) = {53, 41, 251};  
"../miller-rabin/main.cpp" 719c9e, 19 lines

```
LL rho_pollard(LL n) {
    auto f = [&](LL x) { return (mul(x, x, n) + 1) % n; };
    if(n % 2 == 0) return 2;
    for(LL i = 2;; i++) {
        LL x = i, y = f(x), p;
        while((p = __gcd(n - x + y, n)) == 1)
            x = f(x), y = f(y));
        if(p != n) return p;
    }
}

vector<LL> factor(LL n) {
    if(n == 1) return {};
    if(miller_rabin(n)) return {n};
    LL x = rho_pollard(n);
    auto l = factor(x), r = factor(n / x);
    l.insert(l.end(), r.begin(), r.end());
    return l;
}
```

fft  
**Opis:** Mnożenie wielomianów  
**Czas:**  $\mathcal{O}(n \log n)$   
**Użycie:** conv(a, b) zwraca iloczyn wielomianów a i b  
conv\_mod(a, b, M) zwraca iloczyn modulo, większa dokładność

```
on1928, 62 lines
using Complex = complex<double>;
void fft(vector<Complex> &a) {
    int n = size(a), L = 31 - __builtin_clz(n);
    static vector<complex<long double>> R(2, 1);
    static vector<Complex> rt(2, 1);
    for(static int k = 2; k < n; k *= 2) {
        R.resize(n), rt.resize(n);
        auto x = polar(1.0L, M_PI / k);
        FOR(i, k, 2 * k - 1)
            rt[i] = R[i] = i & 1 ? R[i / 2] * x : R[i / 2];
    }

    vector<int> rev(n);
    REP(i, n) rev[i] = (rev[i / 2] | (i & 1) << L) / 2;
    REP(i, n) if(i < rev[i]) swap(a[i], a[rev[i]]);
    for(int k = 1; k < n; k *= 2) {
        for(int i = 0; i < n; i += 2 * k) REP(j, k) {
            auto x = (double *) &rt[j + k], y = (double *) &a[i + j + k];
            Complex z(x[0] * y[0] - x[1] * y[1], x[0] * y[1] + x[1] * y[0]);
            a[i + j + k] = a[i + j] - z;
            a[i + j] += z;
        }
    }
}

vector<double> conv(vector<double> &a, vector<double> &b) {
    if(a.empty() || b.empty()) return {};
    vector<double> res(size(a) + size(b) - 1);
    int L = 32 - __builtin_clz(size(res)), n = (1 << L);
    vector<Complex> in(n), out(n);
    copy(a.begin(), a.end(), in.begin());
    REP(i, size(b)) in[i].imag(b[i]);
    fft(in);
    for(auto &x : in) x *= x;
    REP(i, n) out[i] = in[-i & (n - 1)] - conj(in[i]);
    fft(out);
    REP(i, size(res)) res[i] = imag(out[i]) / (4 * n);
    return res;
}
```

```
vector<LL> conv_mod(vector<LL> &a, vector<LL> &b, int M) {
    if(a.empty() || b.empty()) return {};
    vector<LL> res(size(a) + size(b) - 1);
    int B = 32 - __builtin_clz(size(res)), n = 1 << B;
    int cut = int(sqrt(M));
    vector<Complex> L(n), R(n), outl(n), outs(n);
    REP(i, size(a)) L[i] = Complex((int) a[i] / cut, (int) a[i] % cut);
    REP(i, size(b)) R[i] = Complex((int) b[i] / cut, (int) b[i] % cut);
    fft(L), fft(R);
    REP(i, n) {
        int j = -i & (n - 1);
        outl[j] = (L[i] + conj(L[j])) * R[i] / (2.0 * n);
        outs[j] = (L[i] - conj(L[j])) * R[i] / (2.0 * n) / 1i;
    }
    fft(outl), fft(outs);
    REP(i, size(res)) {
        LL av = LL(real(outl[i]) + 0.5), cv = LL(imag(outs[i]) + 0.5);
        LL bv = LL(imag(outl[i]) + 0.5) + LL(real(outs[i]) + 0.5);
    }
```

```
res[i] = ((av % M * cut + bv) % M * cut + cv) % M;
}
return res;
}
```

integral  
**Opis:** Wzór na całkę z zasady Simpsona - zwraca całkę na przedziale [a, b]  
**Czas:**  $\mathcal{O}(n)$   
**Użycie:** intergral([])(T x) { return 3 \* x \* x - 8 \* x + 3; }, a, b)  
Daj asserta na błąd, ewentualnie zwiększ n (im większe n, tym mniejszy błąd)

```
6a3b16, 8 lines
using T = double;
T intergral(function<T(T)> f, T a, T b) {
    const int n = 1000;
    T delta = (b - a) / n, sum = f(a) + f(b);
    FOR(i, 1, 2 * n - 1)
        sum += f(a + i * delta) * (i & 1 ? 4 : 2);
    return sum * dif / 3;
}
```

primitive-root  
**Opis:** Dla pierwszego p znajduje generator modulo p  
**Czas:**  $\mathcal{O}(\log^2(p))$   
"../rho-pollard/main.cpp" 92b6e1, 20 lines

```
LL exp(LL a, LL b, int m) {
    if(b == 0) return 1;
    if(b & 1) return a * exp(a, b - 1, m) % m;
    return exp(a * a % m, b / 2);
}

int primitive_root(int p) {
    int q = p - 1;
    vector<LL> v = factor(q); vector<int> fact;
    REP(i, v.size())
        if(!i or v[i] != v[i - 1])
            fact.emplace_back(v[i]);
    while(1) {
        int g = rd(2, q); bool good = 1;
        for(auto &f : fact)
            if(exp(g, q / f, p) == 1) {
                good = 0; break;
            }
        if(good) return g;
    }
}
```

## Struktury danych (5)

find-union  
**Opis:** Find and union z mniejszy do wiekszego  
**Czas:**  $\mathcal{O}(\alpha(n))$  oraz  $\mathcal{O}(n)$  pamięciowo

```
c3dcbd, 19 lines
struct FindUnion {
    vector<int> rep;
    int size(int x) { return -rep[find(x)]; }
    int find(int x) {
        return rep[x] < 0 ? x : rep[x] = find(rep[x]);
    }
    bool same_set(int a, int b) { return find(a) == find(b); }
    bool join(int a, int b) {
        a = find(a), b = find(b);
        if(a == b)
            return false;
        if(-rep[a] < -rep[b])
            swap(a, b);
        rep[a] += rep[b];
    }
```

```
rep[b] = a;
return true;
}
FindUnion(int n) : rep(n, -1) {}
};
```

fenwick-tree  
**Opis:** Drzewo potęgowe  
**Czas:**  $\mathcal{O}(\log n)$   
**Użycie:** wszystko indexowane od 0  
update(pos, val) dodaje val do elementu pos  
query(pos) zwraca sumę na przedziale [0, pos)  
lower\_bound(val) zwraca pos, że suma [0, pos]  $\leq$  val, n jeśli nie istnieje, -1 jeśli puste

```
struct Fenwick {
    vector<LL> s;
    Fenwick(int n) : s(n) {}
    void update(int pos, LL val) {
        for(; pos < size(s); pos |= pos + 1)
            s[pos] += val;
    }
    LL query(int pos) {
        LL ret = 0;
        for(; pos > 0; pos &= pos - 1)
            ret += s[pos - 1];
        return ret;
    }
    int lower_bound(LL val) {
        if(val <= 0) return -1;
        int pos = 0;
        for(int pw = 1 << 25; pw; pw /= 2) {
            if(pos + pw <= size(s) && s[pos + pw - 1] < sum)
                pos += pw, sum -= s[pos - 1];
        }
        return pos;
    }
};
```

fenwick-tree-2d  
**Opis:** Drzewo potęgowe 2d offline  
**Czas:**  $\mathcal{O}(\log^2 n)$  Pamięć  $\mathcal{O}(n \log n)$   
**Użycie:** wywołujemy proprocess(x, y) na pozycjach, które chcemy updateować, później init()  
update(x, y, val) dodaje val do a[x, y], query(X, Y) zwraca sumę po a[x, y] że  $x < X$  i  $y < Y$

```
"../fenwick-tree/main.cpp"
struct Fenwick2d {
    vector<vector<int>>> ys;
    vector<Fenwick> ft;
    FT2(int limx) : ys(limx) {}
    void preprocess(int x, int y) {
        for(; x < size(ys); x |= x + 1) ys[x].push_back(y);
    }
    void init() {
        for(auto &v : ys) {
            sort(v.begin(), v.end());
            ft.emplace_back(size(v));
        }
    }
    int ind(int x, int y) {
        auto it = lower_bound(ys[x].begin(), ys[x].end(), y);
        return distance(ys[x].begin(), it);
    }
    void update(int x, int y, LL val) {
        for(; x < size(ys); x |= x + 1)
            ft[x].update(ind(x, y), val);
    }
};
```

```
LL query(int x, int y) {
    LL sum = 0;
    for(; x; x &= x - 1)
        sum += ft[x - 1].query(ind(x - 1, y));
    return sum;
}
};
```

segment-tree  
**Opis:** Drzewo punkt-przedział  
**Czas:**  $\mathcal{O}(\log n)$  Pamięć :  $\mathcal{O}(n)$   
**Użycie:** Tree(n, val = 0) tworzy drzewo o n liściach, o wartościach val  
update(pos, val) zmienia element pos na val  
query(l, r) zwraca f na przedziale [l, r)  
edytujesz funkcję f, można T ustawić na long longa albo pare

```
struct Tree {
    using T = int;
    T f(T a, T b) { return a + b; }
    vector<T> nodes;
    int size = 1;

    Tree(int n, T val = 0) {
        while(size < n) size *= 2;
        nodes.resize(size * 2, val);
    }

    void update(int pos, T val) {
        nodes[pos += size] = val;
        while(pos /= 2)
            nodes[pos] = f(nodes[pos * 2], nodes[pos * 2 + 1]);
    }

    T query(int l, int r) {
        l += size, r += size;
        T ret = (l != r ? f(nodes[l], nodes[r]) : nodes[l]);
        while(l + 1 < r) {
            if(l % 2 == 0)
                ret = f(ret, nodes[l + 1]);
            if(r % 2 == 1)
                ret = f(ret, nodes[r - 1]);
            l /= 2, r /= 2;
        }
        return ret;
    }
};
```

lazy-segment-tree  
**Opis:** Drzewo przedział-przedział  
**Czas:**  $\mathcal{O}(\log n)$  Pamięć :  $\mathcal{O}(n)$   
**Użycie:** add(l, r, val) dodaje na przedziale [l, r) bierze maxa z przedziału  
Zmieniając z maxa na co innego trzeba edytować funkcje add\_val i f

```
using T = int;
struct Node {
    T val, lazy;
    int size = 1;
};

struct Tree {
    vector<Node> nodes;
    int size = 1;

    void add_val(int v, T val) {
        nodes[v].val += val;
        nodes[v].lazy += val;
    }
};
```

```
}

T f(T a, T b) { return max(a, b); }

Tree(int n) {
    while(size < n) size *= 2;
    nodes.resize(size * 2);
    for(int i = size - 1; i >= 1; i--)
        nodes[i].size = nodes[i * 2].size * 2;
}

void propagate(int v) {
    REP(i, 2)
        add_val(v * 2 + i, nodes[v].lazy);
    nodes[v].lazy = 0;
}

T query(int l, int r, int v = 1) {
    if(l == 0 && r == nodes[v].size - 1)
        return nodes[v].val;
    propagate(v);
    int m = nodes[v].size / 2;
    if(r < m)
        return query(l, r, v * 2);
    else if(m <= l)
        return query(l - m, r - m, v * 2 + 1);
    else
        return f(query(l, m - 1, v * 2), query(0, r - m, v * 2 + 1));
}

void add(int l, int r, T val, int v = 1) {
    if(l == 0 && r == nodes[v].size - 1) {
        add_val(v, val);
        return;
    }
    propagate(v);
    int m = nodes[v].size / 2;
    if(r < m)
        add(l, r, val, v * 2);
    else if(m <= l)
        add(l - m, r - m, val, v * 2 + 1);
    else
        add(l, m - 1, val, v * 2), add(0, r - m, val, v * 2 + 1);

    nodes[v].val = f(nodes[v * 2].val, nodes[v * 2 + 1].val);
}
};
```

ordered-set  
**Opis:** set z dodatkowymi funkcjami  
**Użycie:** insert(x) dodaje element x (nie ma emplace)  
find\_by\_order(i) zwraca iterator do i-tego elementu  
order\_of\_key(x) zwraca, ile jest mniejszych elementów, x nie musi być w secie  
Jeśli chcemy multiseta, to używamy par {val, id}.  
Przed includem trzeba dać undef \_GLIBCXX\_DEBUG

```
<ext/pb_ds/assoc_container.hpp>, <ext/pb_ds/tree_policy.hpp>
using namespace __gnu_pbds;

template<class T> using ordered_set = tree<
    T,
    null_type,
    less<T>,
    rb_tree_tag,
    tree_order_statistics_node_update
>;
```

hash-map

Opis: szybsha mapa

Czas:  $\mathcal{O}(1)$

Użycie: np hash\_map<int, int>

trzeba przed includem dać undef \_GLIBCXX\_DEBUG

<ext/pb\_ds/assoc\_container.hpp>

079dfd, 11 lines

using namespace \_\_gnu\_pbds;

struct chash {

const uint64\_t C = LL(2e18 \* M\_PI) + 69;

const int RANDOM = rng();

size\_t operator()(uint64\_t x) const {

return \_\_builtin\_bswap64((x^RANDOM) \* C);

}

};

template<class L, class R>

using hash\_map = gp\_hash\_table<L, R, chash>;

line-container

Opis: Set dla funkcji liniowych

Czas:  $\mathcal{O}(\log n)$

Użycie: add(a, b) dodaje funkcję  $y = ax + b$

query(x) zwraca największe  $y$  w punkcie  $x$ ,  $x < \text{inf}$

2d6727, 32 lines

struct Line {

mutable LL a, b, p;

LL eval(LL x) { return a \* x + b; }

bool operator<(const Line &o) const { return a < o.a; }

bool operator<(LL x) const { return p < x; }

};

constexpr LL inf = 1e18 + 7;

LL divide(LL a, LL b) { return a / b - ((a ^ b) < 0 && a % b); }

LL better(const Line &x, const Line &y) {

if(x.a == y.a) return x.b >= y.b ? inf : -inf;

return divide(y.b - x.b, x.a - y.a);

}

struct LineContainer : multiset<Line, less<>> {

bool intersect(iterator x, iterator y) {

if(y == end()) { x->p = inf; return 0; }

x->p = better(\*x, \*y);

return x->p >= y->p;

}

void add(LL a, LL b) {

auto z = insert({a, b, 0}), y = z++, x = y;

while(intersect(y, z)) z = erase(z);

if(x != begin() && intersect(--x, y)) intersect(x, y =

erase(y));

while((y = x) != begin() && (--x)->p >= y->p)

intersect(x, erase(y));

}

LL query(LL x) {

assert(!empty());

return lower\_bound(x)->eval(x);

}

};

lichao-tree

Opis: Dla funkcji, których pary przecinaja sie co najwyżej raz, oblicza maximum w punkcie x. Podany kod jest dla funkcji liniowych

a7f64a, 50 lines

struct Function {

int a, b;

L operator()(int x) {

return x \* L(a) + b;

}

Function(int p = 0, int q = inf) : a(p), b(q) {}

};

ostream& operator<<(ostream &os, Function f) {

return os << make\_pair(f.a, f.b);

}

struct LiChaoTree {

int size = 1;

vector<Function> tree;

LiChaoTree(int n) {

while(size < n)

size \*= 2;

tree.resize(size << 1);

}

L get\_min(int x) {

int v = x + size;

L ans = inf;

while(v) {

ans = min(ans, tree[v](x));

v >>= 1;

}

return ans;

}

void add\_func(Function new\_func, int v, int l, int r) {

int m = (l + r) / 2;

bool domin\_l = tree[v](l) > new\_func(l),

domin\_m = tree[v](m) > new\_func(m);

if(domin\_m)

swap(tree[v], new\_func);

if(l == r)

return;

else if(domin\_l == domin\_m)

add\_func(new\_func, v << 1 | 1, m + 1, r);

else

add\_func(new\_func, v << 1, l, m);

}

void add\_func(Function new\_func) {

add\_func(new\_func, 1, 0, size - 1);

}

};

## Grafy (6)

eulerian-path

Opis: Ścieżka eulera

Czas:  $\mathcal{O}(n)$

Użycie: krawędzie to pary (to, id) gdzie id dla grafu nieskierowanego jest takie samo dla (u, v) i (v, u)

graf musi być spójny, get\_path() zwraca ścieżkę eulera,

get\_cycle() zwraca cykl eulera

jeśli nie ma, obie funkcję zwrócą pusty vector

296836, 41 lines

using PII = pair<int, int>;

struct EulerianPath {

vector<vector<PII>> graph;

vector<bool> used;

vector<int> in, out;

vector<int> path, cycle

void dfs(int v = 0) {

in[v]++;

while(!graph[v].empty()) {

auto edge = graph[v].back();

graph[v].pop\_back();

int u = edge.first;

int id = edge.second;

if(used[id]) continue;

used[id] = true;

out[v]++;

dfs(u);

}

path.emplace\_back(v);

}

EulerianPath(int m, vector<vector<PII>> &graph) : graph(graph

) {

int n = size(graph);

used.resize(m);

in.resize(n);

out.resize(n);

dfs();

in[0]--;

debug(path, in, out);

cycle = path;

REP(i, n) if(in[i] != out[i]) cycle.clear();

if(path.size() != 0) in[path.back()]++, out[path[0]]++;

REP(i, n) if(in[i] != out[i]) path.clear();

reverse(path.begin(), path.end());

}

vector<int> get\_path() { return path; }

vector<int> get\_cycle() { return cycle; }

};

jump-ptr

Opis: Jump Pointery

Czas:  $\mathcal{O}(n \log n + q \log n)$

Użycie: konstruktor - JumpPtr(graph)

można ustawić roota

jump\_up(v, k) zwraca wierzcholek o k wyższy niż v

jeśli nie istnieje, zwraca -1

lca(a, b) zwraca lca wierzchołków

d7a477, 44 lines

struct JumpPtr {

int LOG = 20;

vector<vector<int>> graph, jump;

vector<int> par, dep;

void par\_dfs(int v) {

for(int u : graph[v]) {

if(u != par[v]) {

par[u] = v;

dep[u] = dep[v] + 1;

par\_dfs(u);

}

}

JumpPtr(vector<vector<int>> &graph, int root = 0) : graph(g

raph) {

int n = size(graph);

par.resize(n, -1);

dep.resize(n);

par\_dfs(root);

jump.resize(LOG, vector<int>(n));

jump[0] = par;

FOR(i, 1, LOG - 1) REP(j, n)

jump[i][j] = jump[i - 1][j] == -1 ? -1 : jump[i - 1][jump

[i - 1][j]];

}

int jump\_up(int v, int k) {

for(int i = LOG - 1; i >= 0; i--)

if(k & (1 << i))



```
        v = jump[i][v];
        return v;
    }
    int lca(int a, int b) {
        if(dep[a] < dep[b]) swap(a, b);
        int delta = dep[a] - dep[b];
        a = jump_up(a, delta);
        if(a == b) return a;

        for(int i = LOG - 1; i >= 0; i--) {
            if(jump[i][a] != jump[i][b]) {
                a = jump[i][a];
                b = jump[i][b];
            }
        }
        return par[a];
    }
};
```

**hld**  
**Opis:** Heavy-Light Decomposition  
**Czas:**  $\mathcal{O}(\log n)$   
**Użycie:** konstruktor - HLD(n, graph)  
lca(v, u) zwraca lca  
get\_vertex(v) zwraca pozycję odpowiadającą wierzchołkowi  
get\_path(v, u) zwraca przedziały do obsługi drzewem przedziałowym  
get\_path(v, u) jeśli robisz operacje na wierzchołkach  
get\_path(v, u, false) jeśli na krawędziach (nie zawiera lca)  
get\_subtree(v) zwraca przedział odpowiadający podrzewu v

0ef9dc, 58 lines

```
struct HLD {
    vector<vector<int>>> graph;
    vector<int> size, pre, pos, nxt, par;
    int t = 0;
    void init(int v, int p = -1) {
        par[v] = p;
        size[v] = 1;
        for(int &u : graph[v]) if(u != par[v]) {
            init(u, v);
            size[v] += size[u];
            if(size[u] > size[graph[v][0]])
                swap(u, graph[v][0]);
        }
    }
    void set_paths(int v) {
        pre[v] = t++;
        for(int &u : graph[v]) if(u != par[v]) {
            nxt[u] = (u == graph[v][0] ? nxt[v] : u);
            set_paths(u);
        }
        pos[v] = t;
    }
    HLD(int n, vector<vector<int>>> graph, int root = 0)
        : graph(graph), size(n), pre(n), pos(n), nxt(n), par(n) {
        init(root);
        set_paths(root);
    }
    int lca(int v, int u) {
        while(nxt[v] != nxt[u]) {
            if(pre[v] < pre[u])
                swap(v, u);
            v = par[nxt[v]];
        }
        return (pre[v] < pre[u] ? v : u);
    }
    vector<pair<int, int>>> path_up(int v, int u) {
        vector<pair<int, int>>> ret;
        while(nxt[v] != nxt[u]) {
```

```
            ret.emplace_back(pre[nxt[v]], pre[v]);
            v = par[nxt[v]];
        }
        if(pre[u] != pre[v]) ret.emplace_back(pre[u] + 1, pre[v]);
        return ret;
    }
    int get_vertex(int v) { return pre[v]; }
    vector<pair<int, int>>> get_path(int v, int u, bool add_lca =
        true) {
        int w = lca(v, u);
        auto ret = path_up(v, w);
        auto path_u = path_up(u, w);
        if(add_lca) ret.emplace_back(pre[w], pre[w]);
        while(!path_u.empty()) {
            ret.emplace_back(path_u.back());
            path_u.pop_back();
        }
        return ret;
    }
    pair<int, int> get_subtree(int v) { return {pre[v], pos[v] -
        1}; }
};
```

**SCC**  
**Opis:** Silnie Spójnie Składowe  
**Czas:**  $\mathcal{O}(\log n)$   
**Użycie:** konstruktor - SCC(graph)  
group[v] to numer silnie spójnej wierzchołka v  
get\_compressed() zwraca graf silnie spójnych  
get\_compressed(false) nie usuwa multikrawędzi

112027, 61 lines

```
struct SCC {
    int n;
    vector<vector<int>>> graph;
    int group_cnt = 0;
    vector<int> group;

    vector<vector<int>>> rev_graph;
    vector<int> order;

    void order_dfs(int v) {
        group[v] = 1;
        for(int u : rev_graph[v])
            if(group[u] == 0)
                order_dfs(u);
        order.emplace_back(v);
    }

    void group_dfs(int v, int color) {
        group[v] = color;
        for(int u : graph[v])
            if(group[u] == -1)
                group_dfs(u, color);
    }

    SCC(vector<vector<int>>> &graph) : graph(graph) {
        n = size(graph);
        rev_graph.resize(n);
        REP(v, n)
            for(int u : graph[v])
                rev_graph[u].emplace_back(v);

        group.resize(n);
        REP(v, n)
            if(group[v] == 0)
                order_dfs(v);
        reverse(order.begin(), order.end());
        debug(order);
    }
```

```
        group.assign(n, -1);
        for(int v : order)
            if(group[v] == -1)
                group_dfs(v, group_cnt++);
    }

    vector<vector<int>>> get_compressed(bool delete_same = true) {
        vector<vector<int>>> ans(group_cnt);
        REP(v, n)
            for(int u : graph[v])
                if(group[v] != group[u])
                    ans[group[v]].emplace_back(group[u]);

        if(not delete_same)
            return ans;
        REP(v, group_cnt) {
            sort(ans[v].begin(), ans[v].end());
            ans[v].erase(unique(ans[v].begin(), ans[v].end()), ans[v]
                .end());
        }
        return ans;
    }
};
```

**biconnected**  
**Opis:** Dwuspójne składowe  
**Czas:**  $\mathcal{O}(n)$   
**Użycie:** add\_edge(u, v) dodaje krawędź (u, v), u != v, bo get() nie działa  
po wywołaniu init() w .bicon mamy dwuspójne(vector ideków krawędzi na każdą), w .edges mamy krawędzie

22177e, 45 lines

```
struct BiconComps {
    using PII = pair<int, int>;
    vector<vector<int>>> graph, bicon;
    vector<int> low, pre, s;
    vector<array<int, 2>>> edges;
    BiconComps(int n) : graph(n), low(n), pre(n, -1) {}
    void add_edge(int u, int v) {
        int q = size(edges);
        graph[u].emplace_back(q);
        graph[v].emplace_back(q);
        edges.push_back({u, v});
    }
    int get(int v, int id) {
        for(int r : edges[id])
            if(r != v) return r;
    }
    int t = 0;
    void dfs(int v, int p) {
        low[v] = pre[v] = t++;
        bool par = false;
        for(int e : graph[v]) {
            int u = get(v, e);
            if(u == p && !par) {
                par = true;
                continue;
            }
            else if(pre[u] == -1) {
                s.emplace_back(e); dfs(u, v);
                low[v] = min(low[v], low[u]);
                if(low[u] >= pre[v]) {
                    bicon.emplace_back();
                    do {
                        bicon.back().emplace_back(s.back());
                        s.pop_back();
                    } while(bicon.back().back() != e);
                }
            }
        }
    }
```



```
        else if(pre[v] > pre[u]) {
            low[v] = min(low[v], pre[u]);
            s.emplace_back(e);
        }
    }
}
void init() { dfs(0, -1); }
};
```

**2sat**  
**Opis:** Zwraca poprawne przyporządkowanie zmiennym logicznym dla problemu 2-SAT, albo mówi, że takie nie istnieje  
**Czas:**  $\mathcal{O}(n + m)$ , gdzie n to ilość zmiennych, i m to ilość przyporządkowań.  
**Użycie:** TwoSat ts(ilość zmiennych);  
ożnacza negację  
ts.either(0, ~3); // var 0 is true or var 3 is false  
ts.set\_value(2); // var 2 is true  
ts.at\_most\_one({0,~1,2}); // co najwyżej jedna z var 0, ~1 i 2 to prawda  
ts.solve(); // rozwiązuje i zwraca true jeśli rozwiązanie istnieje  
ts.values[0..N-1] // to wartości rozwiązania

841cb2, 59 lines

```
struct TwoSat {
    int n;
    vector<vector<int>> gr;
    vector<int> values;

    TwoSat(int n = 0) : n(n), gr(2*n) {}

    void either(int f, int j) {
        f = max(2*f, -1-2*f);
        j = max(2*j, -1-2*j);
        gr[f].emplace_back(j^1);
        gr[j].emplace_back(f^1);
    }
    void set_value(int x) { either(x, x); }

    int add_var() {
        gr.emplace_back();
        gr.emplace_back();
        return n++;
    }

    void at_most_one(vector<int>& li) {
        if(size(li) <= 1) return;
        int cur = ~li[0];
        FOR(i, 2, size(li) - 1) {
            int next = add_var();
            either(cur, ~li[i]);
            either(cur, next);
            either(~li[i], next);
            cur = ~next;
        }
        either(cur, ~li[1]);
    }

    vector<int> val, comp, z;
    int t = 0;
    int dfs(int i) {
        int low = val[i] = ++t, x;
        z.emplace_back(i);
        for(auto &e : gr[i]) if(!comp[e])
            low = min(low, val[e] ?: dfs(e));
        if(low == val[i]) do {
            x = z.back(); z.pop_back();
            comp[x] = low;
            if (values[x >> 1] == -1)
                values[x >> 1] = x & 1;
        }
```

```
    } while (x != i);
    return val[i] = low;
}

bool solve() {
    values.assign(n, -1);
    val.assign(2 * n, 0);
    comp = val;
    REP(i, 2 * n) if(!comp[i]) dfs(i);
    REP(i, n) if(comp[2 * i] == comp[2 * i + 1]) return 0;
    return 1;
}
};
```

**matching**  
**Opis:** Turbo Matching  
**Czas:** Średnio około  $\mathcal{O}(n \log n)$ , najgorzej  $\mathcal{O}(n^2)$   
**Użycie:** wierzchołki grafu nie muszą być ładnie podzielone na dwa przedziały, musi być po prostu dwudzielny.

0290f0, 41 lines

```
vector<vector<int>> graph;
vector<int> match, vis;
int t = 0;

bool match_dfs(int v) {
    vis[v] = t;
    for(int u : graph[v])
        if(match[u] == -1) {
            match[u] = v;
            match[v] = u;
            return true;
        }

    for(int u : graph[v])
        if(vis[match[u]] != t && match_dfs(match[u])) {
            match[u] = v;
            match[v] = u;
            return true;
        }
    return false;
}

int match() {
    int n = int(graph.size());
    match.resize(n, -1);
    vis.resize(n);

    int d = -1;
    while(d != 0) {
        d = 0;
        ++t;
        for(int v = 0; v < n; ++v)
            if(match[v] == -1)
                d += match_dfs(v);
    }
    int ans = 0;
    for(int v = 0; v < n; ++v)
        if(match[v] != -1)
            ++ans;
    return ans / 2;
}
```

**flow**  
**Opis:** Dinic bez skalowania  
**Czas:**  $\mathcal{O}(V^2 E)$

**Użycie:** Dinic flow(2); flow.add\_edge(0, 1, 5); cout << flow(0, 1); // 5  
funkcja get\_flow() zwraca dla każdej oryginalnej krawędzi, ile przez nią leci

fed904, 78 lines

```
struct Dinic {
    using T = int;
    struct Edge {
        int v, u;
        T flow, cap;
    };
    int n;
    vector<vector<int>> graph;
    vector<Edge> edges;

    Dinic(int N) : n(N), graph(n) {}

    void add_edge(int v, int u, T cap) {
        debug() << "adding edge " << make_pair(v, u) << " with cap " << cap;
        int e = size(edges);
        graph[v].emplace_back(e);
        graph[u].emplace_back(e + 1);
        edges.emplace_back(Edge{v, u, 0, cap});
        edges.emplace_back(Edge{u, v, 0, 0});
    }

    vector<int> dist;
    bool bfs(int source, int sink) {
        dist.assign(n, 0);
        dist[source] = 1;
        deque<int> que = {source};
        while(size(que) and dist[sink] == 0) {
            int v = que.front();
            que.pop_front();
            for(int e : graph[v])
                if(edges[e].flow != edges[e].cap and dist[edges[e].u] == 0) {
                    dist[edges[e].u] = dist[v] + 1;
                    que.emplace_back(edges[e].u);
                }
        }
        return dist[sink] != 0;
    }

    vector<int> ended_at;
    T dfs(int v, int sink, T flow = numeric_limits<T>::max()) {
        if(flow == 0 or v == sink)
            return flow;
        for(; ended_at[v] != size(graph[v]); ++ended_at[v]) {
            Edge &e = edges[graph[v][ended_at[v]]];
            if(dist[v] + 1 == dist[e.u])
                if(T pushed = dfs(e.u, sink, min(flow, e.cap - e.flow)))
                    {
                        e.flow += pushed;
                        edges[graph[v][ended_at[v] ^ 1].flow -= pushed;
                        return pushed;
                    }
        }
        return 0;
    }

    T operator()(int source, int sink) {
        T answer = 0;
        while(true) {
            if(not bfs(source, sink))
                break;
            ended_at.assign(n, 0);
            while(T pushed = dfs(source, sink))
```

```
        answer += pushed;
    }
    return answer;
}

map<pair<int, int>, T> get_flow() {
    map<pair<int, int>, T> ret;
    REP(v, n)
        for(int i : graph[v]) {
            if(i % 2) // considering only original edges
                continue;
            Edge &e = edges[i];
            ret[make_pair(v, e.u)] = e.flow;
        }
    return ret;
}
};
```

**mcmf**  
**Opis:** Min-cost max-flow z SPFA  
**Czas:** kto wie  
**Użycie:** MCMF flow(2); flow.add\_edge(0, 1, 5, 3); cout << flow(0, 1); // 15  
można przepisać funkcję get\_flow() z Dinic'a

2baac2, 79 lines

```
struct MCMF {
    struct Edge {
        int v, u, flow, cap;
        LL cost;
        friend ostream& operator<<(ostream &os, Edge &e) {
            return os << vector<LL>{e.v, e.u, e.flow, e.cap, e.cost};
        }
    };

    int n;
    const LL inf_LL = 1e18;
    const int inf_int = 1e9;
    vector<vector<int>>> graph;
    vector<Edge> edges;
```

```
MCMF(int N) : n(N), graph(n) {}
```

```
void add_edge(int v, int u, int cap, LL cost) {
    int e = size(edges);
    graph[v].emplace_back(e);
    graph[u].emplace_back(e + 1);
    edges.emplace_back(Edge{v, u, 0, cap, cost});
    edges.emplace_back(Edge{u, v, 0, 0, -cost});
}
```

```
pair<int, LL> augment(int source, int sink) {
    vector<LL> dist(n, inf_LL);
    vector<int> from(n, -1);
    dist[source] = 0;
    deque<int> que = {source};
    vector<bool> inside(n);
    inside[source] = true;
```

```
while(size(que)) {
    int v = que.front();
    inside[v] = false;
    que.pop_front();

    for(int i : graph[v]) {
        Edge &e = edges[i];
        if(e.flow != e.cap and dist[e.u] > dist[v] + e.cost) {
            dist[e.u] = dist[v] + e.cost;
            from[e.u] = i;
            if(not inside[e.u]) {
```

```
        inside[e.u] = true;
        que.emplace_back(e.u);
    }
}

}

}

if(from[sink] == -1)
    return {0, 0};

int flow = inf_int, e = from[sink];
while(e != -1) {
    flow = min(flow, edges[e].cap - edges[e].flow);
    e = from[edges[e].v];
}
e = from[sink];
while(e != -1) {
    edges[e].flow += flow;
    edges[e ^ 1].flow -= flow;
    e = from[edges[e].v];
}
return {flow, flow * dist[sink]};
}

pair<int, LL> operator()(int source, int sink) {
    int flow = 0;
    LL cost = 0;
    pair<int, LL> got;
    do {
        got = augment(source, sink);
        flow += got.first;
        cost += got.second;
    } while(got.first);
    return {flow, cost};
}
};
```

## Geometria (7)

**point**  
**Opis:** Double może być LL, ale nie int. p.x oraz p.y nie można zmieniać (to kopie). Nie tworzyć zmiennych o nazwie "x" lub "y".  
**Użycie:** P p = {5, 6}; abs(p) = length; arg(p) = kąt; polar(len, angle); exp(angle)

fda436, 33 lines

```
using Double = long double;
using P = complex<Double>;
#define x real()
#define y imag()

constexpr Double eps = 1e-9;
bool equal(Double a, Double b) {
    return abs(a - b) <= eps;
}

int sign(Double a) {
    return equal(a, 0) ? 0 : a > 0 ? 1 : -1;
}

struct Sortx {
    bool operator()(const P &a, const P &b) const {
        return make_pair(a.x, a.y) < make_pair(b.x, b.y);
    }
};

istream& operator>>(istream &is, P &p) {
    Double a, b;
    is >> a >> b;
    p = P(a, b);
    return is;
}
```

```
bool operator==(P a, P b) {
    return equal(a.x, b.x) && equal(a.y, b.y);
}

// cross({1, 0}, {0, 1}) = 1
Double cross(P a, P b) { return a.x * b.y - a.y * b.x; }
Double dot(P a, P b) { return a.x * b.x + a.y * b.y; }
Double sq_dist(P a, P b) { return dot(a - b, a - b); }
Double dist(P a, P b) { return abs(a - b); }
```

## advanced-complex

**Opis:** Randomowe przydatne wzorki, większość nie działa dla intów  
"../point/main.cpp" daaa0f, 43 lines

```
// nachylenie k-> y = kx + m
Double slope(P a, P b) { return tan(arg(b - a)); }
// rzut p na ab
P project(P p, P a, P b) {
    return a + (b - a) * dot(p - a, b - a) / norm(a - b);
}
// odbicie p wzgledem ab
P reflect(P p, P a, P b) {
    return a + conj((p - a) / (b - a)) * (b - a);
}
// obrot a wzgledem p o theta radianow
P rotate(P a, P p, Double theta) {
    return (a - p) * polar(1.0L, theta) + p;
}
// kat ABC, w radianach, zawsze zwraca mniejszy kat
Double angle(P a, P b, P c) {
    return abs(remainder(arg(a - b) - arg(c - b), 2.0 * M_PI));
}
// szybkie przeciecie prostych, nie dziala dla rownoleglych
P intersection(P a, P b, P p, P q) {
    Double c1 = cross(p - a, b - a), c2 = cross(q - a, b - a);
    return (c1 * q - c2 * p) / (c1 - c2);
}
// check czy sa rownolegle
bool is_parallel(P a, P b, P p, P q) {
    P c = (a - b) / (p - q); return c == conj(c);
}
// check czy sa prostopadle
bool is_perpendicular(P a, P b, P p, P q) {
    P c = (a - b) / (p - q); return c == -conj(c);
}
// zwraca takie q, ze (p, q) jest rownolegle do (a, b)
P parallel(P a, P b, P p) {
    return p + a - b;
}
// zwraca takie q, ze (p, q) jest prostopadle do (a, b)
P perpendicular(P a, P b, P p) {
    return reflect(p, a, b);
}
// przeciecie srodkowych trojkata
P centro(P a, P b, P c) {
    return (a + b + c) / 3.0L;
}
```

## intersect-lines

**Opis:** Przecięcie prostych lub odcinków

**Użycie:** intersection(a, b, c, d) zwraca przecięcie prostych ab oraz cd  
v = intersect(a, b, c, d, s) zwraca przecięcie (s ? odcinków : prostych) ab oraz cd  
if size(v) == 0: nie ma przecięć  
if size(v) == 1: v[0] jest przecięciem  
if size(v) == 2 and s: (v[0], v[1]) to odcinek, w którym są wszystkie inf rozwiązań  
if size(v) == 2 and s == false: v to niezdefiniowane punkty (inf rozwiązań)

\"../point/main.cpp\" 3a1213, 26 lines

```
P intersection(P a, P b, P c, P d) {
    Double c1 = cross(c - a, b - a), c2 = cross(d - a, b - a);
    assert(c1 != c2); // proste nie mogą być równoległe
    return (c1 * d - c2 * c) / (c1 - c2);
}
```

```
bool on_segment(P a, P b, P p) {
    return equal(cross(a - p, b - p), 0) and dot(a - p, b - p) <= 0;
}
```

```
vector<P> intersect(P a, P b, P c, P d, bool segments) {
    Double acd = cross(c - a, d - c), bcd = cross(c - b, d - c),
        cab = cross(a - c, b - a), dab = cross(a - d, b - a);
    if((segments and sign(acd) * sign(bcd) < 0 and sign(cab) * sign(dab) < 0)
        or (not segments and not equal(bcd, acd)))
        return {(a * bcd - b * acd) / (bcd - acd)};
    if(not segments)
        return {a, a};
    // skip for not segments
    set<P, Sortx> s;
    if(on_segment(c, d, a)) s.emplace(a);
    if(on_segment(c, d, b)) s.emplace(b);
    if(on_segment(a, b, c)) s.emplace(c);
    if(on_segment(a, b, d)) s.emplace(d);
    return {s.begin(), s.end()};
}
```

area

**Opis:** Pole wielokąta, niekoniecznie wypukłego

**Użycie:** w vectorze muszą być wierzchołki zgodnie z kierunkiem ruchu zegara. Jeśli Double jest intem to może się psuć / 2.  
area(a, b, c) zwraca pole trójkąta o takich długościach boku

\"../point/main.cpp\" bba541, 10 lines

```
Double area(vector<P> pts) {
    int n = size(pts);
    Double ans = 0;
    REP(i, n) ans += cross(pts[i], pts[(i + 1) % n]);
    return ans / 2;
}

Double area(Double a, Double b, Double c) {
    Double p = (a + b + c) / 2;
    return sqrt(p * (p - a) * (p - b) * (p - c));
}
```

convex-hull

**Opis:** Otoczka wypukła, osobno góra i dół

**Czas:**  $\mathcal{O}(n \log n)$

**Użycie:** top\_bot\_hull zwraca osobno górę i dół po id

hull\_id zwraca całą otoczkę po id

hull zwraca punkty na otoczce

\"../point/main.cpp\" c037ac, 38 lines

```
Double cross(P a, P b, P c) { return sign(cross(b - a, c - a)); }

pair<vector<int>, vector<int>> top_bot_hull(vector<P> &pts) {
```

area convex-hull hashing kmp pref manacher trie

```
int n = size(pts);
vector<int> ord(n);
REP(i, n) ord[i] = i;
sort(ord.begin(), ord.end(), [&](int i, int j) {
    P &a = pts[i], &b = pts[j];
    return make_pair(a.x, a.y) < make_pair(b.x, b.y);
});
```

```
vector<int> top, bot;
REP(dir, 2) {
    vector<int> &hull = (dir ? bot : top);
    auto l = [&](int i) { return pts[hull[size(hull) - i]]; };
    for(int i : ord) {
        while(size(hull) > 1 && cross(l(2), l(1), pts[i]) >= 0)
            hull.pop_back();
        hull.emplace_back(i);
    }
    reverse(ord.begin(), ord.end());
}
return {top, bot};
}
```

```
vector<int> hull_id(vector<P> &pts) {
    vector<int> top, bot;
    tie(top, bot) = top_bot_hull(pts);
    top.pop_back(), bot.pop_back();
    top.insert(top.end(), bot.begin(), bot.end());
    return top;
}
```

```
vector<P> hull(vector<P> &pts) {
    vector<P> ret;
    for(int i : hull_id(pts))
        ret.emplace_back(pts[i]);
    return ret;
}
```

Tekstówki (8)

hashing

**Czas:**  $\mathcal{O}(1)$

**Użycie:** get\_hash(l, r) zwraca hasza [l, r] włącznie  
można zmienić modulo i bazę

```
struct Hashing {
    vector<LL> ha, pw;
    LL mod = 1000696969;
    int base;
```

```
    Hashing(string &str) {
        base = rd(30, 50);
        int len = size(str);
        ha.resize(len + 1);
        pw.resize(len + 1, 1);
        REP(i, len) {
            ha[i + 1] = (ha[i] * base + str[i] - 'a' + 1) % mod;
            pw[i + 1] = (pw[i] * base) % mod;
        }
    }
```

```
    LL get_hash(int l, int r) {
        return ((ha[r + 1] - ha[l] * pw[r - l + 1]) % mod + mod) % mod;
    }
};
```

kmp

**Opis:** KMP(str) zwraca tablicę pi. [0, pi[i]) = (i - pi[i], i]

**Czas:**  $\mathcal{O}(n)$  65f132, 11 lines

```
vector<int> KMP(string &str) {
    int len = size(str);
    vector<int> ret(len);
    for(int i = 1; i < len; i++)
    {
        int pos = ret[i - 1];
        while(pos && str[i] != str[pos]) pos = ret[pos - 1];
        ret[i] = pos + (str[i] == str[pos]);
    }
    return ret;
}
```

pref

**Opis:** pref(str) zwraca tablicę prefixo prefixową [0, pref[i]) = [i, i + pref[i])

**Czas:**  $\mathcal{O}(n)$  68517d, 13 lines

```
vector<int> pref(string &str) {
    int len = size(str);
    vector<int> ret(len);
    ret[0] = len;
    int i = 1, m = 0;
    while(i < len) {
        while(m + i < len && str[m + i] == str[m]) m++;
        ret[i++] = m;
        m = (m != 0 ? m - 1 : 0);
        for(int j = 1; ret[j] < m; m--) ret[i++] = ret[j++];
    }
    return ret;
}
```

manacher

**Opis:** radius[p][i] = rad = największy promień palindromu parzystości p o środku i.  $L = i - rad + 1$ ,  $R = i + rad$  to palindrom. Dla [abaababaaab] daje [003000020], [0100141000].

**Czas:**  $\mathcal{O}(n)$  be40a9, 18 lines

```
array<vector<int>, 2> manacher(vector<int> &in) {
    int n = size(in);
    array<vector<int>, 2> radius = {{vector<int>(n - 1), vector<int>(n)}};
    REP(parity, 2) {
        int z = parity ^ 1, L = 0, R = 0;
        REP(i, n - z) {
            int &rad = radius[parity][i];
            if(i <= R - z)
                rad = min(R - i, radius[parity][L + (R - i - z)]);
            int l = i - rad + z, r = i + rad;
            while(0 <= l - 1 && r + 1 < n && in[l - 1] == in[r + 1])
                ++rad, ++r, --l;
            if(r > R)
                L = l, R = r;
        }
    }
    return radius;
}
```

trie

**Opis:** Trie

**Czas:**  $\mathcal{O}(n \log \alpha)$

**Użycie:** Trie trie; trie.add(str);

9aa8f1, 15 lines

```
struct Trie {
    vector<unordered_map<char, int>> child = {{{}};
    int get_child(int v, char a) {
        if(child[v].find(a) == child[v].end()) {
```

```
        child[v][a] = size(child);
        child.emplace_back();
    }
    return child[v][a];
}
void add(string word) {
    int v = 0;
    for(char c : word)
        v = get_child(v, c);
}
};
```

suffix-automaton

**Opis:** buduje suffix automaton. Wystąpienia wzorca, liczba różnych pod-słów, sumaryczna długość wszystkich podslów, leksykograficznie k-te pod-słowo, najmniejsze przesunięcie cykliczne, liczba wystąpień podslowa, pier-wsze wystąpienie, najkrótsze niewystępujące podslowo, longest common sub-string dwóch słów, LCS wielu słów  
**Czas:**  $\mathcal{O}(n\alpha)$  (szybsze, ale więcej pamięci) albo  $\mathcal{O}(n\log\alpha)$  (mapa)

```
struct SuffixAutomaton { int sigma = 26;
    using Node = array<int, sigma>; // map<int, int>
    Node new_node;

    vector<Node> edges;
    vector<int> link = {-1}, length = {0};
    int last = 0;

    SuffixAutomaton() {
        new_node.fill(-1); // -1 - stan nieistniejący
        edges = {new_node}; // dodajemy stan startowy, który
                             reprezentuje puste słowo
    }

    void add_letter(int c) {
        edges.emplace_back(new_node);
        length.emplace_back(length[last] + 1);
        link.emplace_back(0);

        int r = size(edges) - 1, p = last;
        while(p != -1 && edges[p][c] == -1) {
            edges[p][c] = r;
            p = link[p];
        }
        if(p != -1) {
            int q = edges[p][c];
            if(length[p] + 1 == length[q])
                link[r] = q;
            else {
                edges.emplace_back(edges[q]);
                length.emplace_back(length[p] + 1);
                link.emplace_back(link[q]);
                int q_prim = size(edges) - 1;

                link[q] = link[r] = q_prim;
                while(p != -1 && edges[p][c] == q) {
                    edges[p][c] = q_prim;
                    p = link[p];
                }
            }
        }
        last = r;
    }

    bool is_inside(vector<int> &s) {
        int q = 0;
        for(int c : s) {
            if(edges[q][c] == -1)
                return false;
        }
    }
};
```

```
        q = edges[q][c];
    }
    return true;
}
};
```

suffix-array

**Opis:** Tablica suffixowa  
**Czas:**  $\mathcal{O}(n\log n)$   
**Użycie:** SuffixArray t(s, lim) - lim to rozmiar alfabetu  
sa zawiera posortowane suffixy, zawiera pusty suffix  
lcp[i] to lcp suffixu sa[i - 1] i sa[i]  
Dla s = "aabaaab" sa = {6, 3, 0, 4, 1, 5, 2}, lcp = {0, 0, 3, 1, 2, 0, 1}

```
struct SuffixArray {
    vector<int> sa, lcp;
    SuffixArray(string& s, int lim = 256) { // lub basic_string<
        int>
        int n = size(s) + 1, k = 0, a, b;
        vector<int> x(s.begin(), s.end() + 1);
        vector<int> y(n), ws(max(n, lim)), rank(n);
        sa = lcp = y;
        iota(sa.begin(), sa.end(), 0);

        for(int j = 0, p = 0; p < n; j = max(1, j * 2), lim = p) {
            p = j;
            iota(y.begin(), y.end(), n - j);
            REP(i, n) if(sa[i] >= j)
                y[p++] = sa[i] - j;
            fill(ws.begin(), ws.end(), 0);
            REP(i, n) ws[x[i]]++;
            FOR(i, 1, lim - 1) ws[i] += ws[i - 1];
            for(int i = n; i--;) sa[--ws[x[y[i]]]] = y[i];
            swap(x, y);
            p = 1, x[sa[0]] = 0;
            FOR(i, 1, n - 1) a = sa[i - 1], b = sa[i], x[b] =
                (y[a] == y[b] && y[a + j] == y[b + j]) ? p - 1 : p++;
        }
        FOR(i, 1, n - 1) rank[sa[i]] = i;
        for(int i = 0, j; i < n - 1; lcp[rank[i++]] = k)
            for(k && k--, j = sa[rank[i] - 1];
                s[i + k] == s[j + k]; k++);
    }
};
```

Optymalizacje (9)

pragmy

**Opis:** Pragmy do wypychania kolaniem

```
#pragma GCC optimize("Ofast")
#pragma GCC target("avx,avx2")
```

Randomowe rzeczy (10)