



XIII LO Szczecin

Wojownicze Żółwie Ninja

Tomasz Nowak, Michał Staniewski, Justyna Jaworska

2019-10-13

- 1 Utils
- 2 Podejścia
- 3 Wzorki
- 4 Matma
- 5 Struktury danych
- 6 Grafy
- 7 Geometria
- 8 Tekstówki
- 9 Optymalizacje
- 10 Randomowe rzeczy

Utils (1)

```
headers
Opis: Nagłówki używane w każdym kodzie. Działa na każdy kontener i pary
Użycie:  debug(a, b, c) << d << e; wypisze a, b, c:  a; b; c;
de
<bits/stdc++.h>
1084fb, 39 lines

using namespace std;
using LL = long long;
#define FOR(i, l, r) for(int i = (l); i <= (r); ++i)
#define REP(i, n) FOR(i, 0, (n) - 1)
template<class T> int size(T &&x) {
    return int(x.size());
}
template<class A, class B> ostream& operator<<(ostream &out,
    const pair<A, B> &p) {
    return out << '(' << p.first << ", " << p.second << ')';
}
template<class T> auto operator<<(ostream &out, T &&x) ->
    decltype(x.begin(), out) {
    out << '{';
    for(auto it = x.begin(); it != x.end(); ++it)
        out << *it << (it == prev(x.end()) ? "" : ", ");
    return out << '}';
}
void dump() {}
template<class T, class... Args> void dump(T &&x, Args... args)
{
    cerr << x << " ";
    dump(args...);
}
#ifdef DEBUG
    const int seed = 1;
    struct Nl{~Nl(){cerr << '\n';}};
# define debug(x...) cerr << (strcmp(#x, "") ? #x " : ", ""),
    dump(x), Nl(), cerr << ""
#else
    const int seed = chrono::system_clock::now().time_since_epoch
        ().count();
# define debug(...) 0 && cerr
#endif
```

```
1  mt19937_64 rng(seed);
   int rd(int l, int r) {
1       return uniform_int_distribution<int>(l, r)(rng);
   }

1  // int main() {
   //     ios_base::sync_with_stdio(0);
   //     cin.tie(0);
2  // }

3  headers/bazshrc.sh
10 lines

4  c() {
   clang++ -O3 -std=c++11 -Wall -Wextra -Wshadow \
   -Wconversion -Wno-sign-conversion -Wfloat-equal \
6   -D_GLIBCXX_DEBUB -fsanitize=address,undefined -ggdb3 \
   -DDEBUG $1.cpp -o $1
   }

6  nc() {
6   clang++ -O3 -std=c++11 -static $1.cpp -o $1 # -m32
   }

6  headers/vimrc
3 lines

set nu rnu hls is nosol ts=4 sw=4 ch=2 sc
filetype indent plugin on
syntax on

headers/sprawdzaczka.sh
13 lines

#!/bin/bash
for ((i=0; i<1000000; i++)); do
    ./gen < conf.txt > gen.txt
    ./main < gen.txt > main.txt
    ./brute < gen.txt > brute.txt

    if diff -w main.txt brute.txt > /dev/null; then
        echo "OK $i"
    else
        echo "WA"
        exit 0
    fi
done
```

Podejścia (2)

- dynamik, zachłan
- sposób "liczba dobrych obiektów = liczba wszystkich obiektów - liczba złych obiektow"
- czy warunek konieczny = warunek wystarczający?
- odpowiednie przekształcenie równania
- zastanowić się nad łatwiejszym problemem, bez jakiegoś elementu z treści
- sprowadzić problem do innego, łatwiejszego/mniejszego problemu
- sprowadzić problem 2D do problemu 1D (szczególny przypadek: zmiatanie; częsty przypadek: niezależność wyniku dla współrzędnych X od współrzędnych Y)
- konstrukcja grafu / określenie struktury grafu

- optymalizacja bruta do wzorcówki
- czy można poprawić (może zachłannie) rozwiązanie nieoptymalne?
- czy są ciekawe fakty w rozwiązaniach optymalnych? (może się do tego przydać brute)
- sprawdzić czy w zadaniu czegoś jest "mało" (np. czy wynik jest mały, albo jakaś zmienna, może się do tego przydać brute)
- odpowiednio "wzbogacić" jakiś algorytm
- cokolwiek poniżej 10⁹ operacji ma szansę wejść
- co można wykonać offline? Coś można posortować? Coś można shuffle'ować?
- narysować dużo swoich własnych przykładów i coś z nich wynioskować

Wzorki (3)

3.1 Równości

$$ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Wierzchołek paraboli = $(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a})$.

$$\begin{matrix} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x = \frac{ed - bf}{ad - bc} \\ y = \frac{af - ec}{ad - bc} \end{matrix}$$

3.2 Pitagolas

Trójki (a, b, c) , takie że $a^2 + b^2 = c^2$:

$$a = k \cdot (m^2 - n^2), \quad b = k \cdot (2mn), \quad c = k \cdot (m^2 + n^2),$$

gdzie $m > n > 0$, $k > 0$, $m \perp n$, oraz albo m albo n jest parzyste.

3.3 Generowanie względnie pierwszych par

Dwa drzewa, zaczynając od $(2, 1)$ (parzysta-nieparzysta) oraz $(3, 1)$ (nieparzysta-nieparzysta), rozgałęzienia są do $(2m - n, m)$, $(2m + n, m)$ oraz $(m + 2n, n)$.

3.4 Liczby pierwsze

$p = 962592769$ to liczba na NTT, czyli $2^{21} \mid p - 1$, which may be useful. Do hashowania: 970592641 (31-bit), 31443539979727 (45-bit), 3006703054056749 (52-bit).

Jest 78498 pierwszych $\leq 1\,000\,000$.

Generatorów jest $\phi(\phi(p^a))$, czyli dla $p > 2$ zawsze istnieje.

3.5 Dzielniki

$$\sum_{d|n} d = O(n \log \log n).$$

Liczba dzielników n jest co najwyżej 100 dla $n < 5e4$, 500 dla $n < 1e7$, 2000 dla $n < 1e10$, 200 000 dla $n < 1e19$.

3.5.1 Lemat Burnside’a

Liczba takich samych obiektów z dokładnością do symetrii wynosi Given a group G of symmetries and a set X , the number of elements of X up to symmetry equals

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X^g|,$$

Gdzie G to zbiór symetrii (ruchów) oraz X^g to punkty (obiekty) stałe symetrii g .

3.6 Silnia

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$n!$	1	2	6	24	120	720	5040	40320	362880	3628800
n	11	12	13	14	15	16	17			
$n!$	4.0e7	4.8e8	6.2e9	8.7e10	1.3e12	2.1e13	3.6e14			
n	20	25	30	40	50	100	150	171		
$n!$	2e18	2e25	3e32	8e47	3e64	9e157	6e262	>DBL_MAX		

3.6.1 Symbol Newtona

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-2}{k-1} + \dots + \binom{k-1}{k-1}$$

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n x^k y^{n-k}$$

3.7 Wzorki na pewne ciągi

3.7.1 Derangements

Liczba takich permutacji, że $p_i \neq i$ (żadna liczba nie wraca na tą samą pozycję).

$$D(n) = (n-1)(D(n-1)+D(n-2)) = nD(n-1)+(-1)^n = \left\lfloor \frac{n!}{e} \right\rfloor$$

3.7.2 Partition function

Liczba sposobów zapisania n jako sumę posortowanych liczb dodatnich.

$$p(0) = 1, \quad p(n) = \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} (-1)^{k+1} p(n - k(3k - 1)/2)$$

$$p(n) \sim 0.145/n \cdot \exp(2.56\sqrt{n})$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	20	50	100
$p(n)$	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	627	$\sim 2e5$	$\sim 2e8$

3.7.3 Liczby Eulera pierwszego rzędu

Liczba permutacji $\pi \in S_n$ gdzie k elementów jest większych niż poprzedni: k razy $\pi(j) > \pi(j+1)$, $k+1$ razy $\pi(j) \geq j$, k razy $\pi(j) > j$.

$$E(n, k) = (n - k)E(n - 1, k - 1) + (k + 1)E(n - 1, k)$$

$$E(n, 0) = E(n, n - 1) = 1$$

$$E(n, k) = \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{n+1}{j} (k+1-j)^n$$

3.7.4 Stirling pierwszego rzędu

Liczba permutacji długości n mające k cykli.

$$c(n, k) = c(n - 1, k - 1) + (n - 1)c(n - 1, k), \quad c(0, 0) = 1$$

$$\sum_{k=0}^n c(n, k) x^k = x(x + 1) \dots (x + n - 1)$$

$$c(8, k) = 8, 0, 5040, 13068, 13132, 6769, 1960, 322, 28, 1$$

$$c(n, 2) = 0, 0, 1, 3, 11, 50, 274, 1764, 13068, 109584, \dots$$

3.7.5 Stirling drugiego rzędu

Liczba permutacji długości n mające k spójnych.

$$S(n, k) = S(n - 1, k - 1) + kS(n - 1, k)$$

$$S(n, 1) = S(n, n) = 1$$

$$S(n, k) = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} j^n$$

3.7.6 Liczby Catalana

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} = \frac{(2n)!}{(n+1)!n!}$$

$$C_0 = 1, \quad C_{n+1} = \frac{2(2n+1)}{n+2} C_n, \quad C_{n+1} = \sum C_i C_{n-i}$$

$$C_n = 1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862, 16796, 58786, \dots$$

- ścieżki na planszy $n \times n$.
- nawiasowania po n ().
- liczba drzew binarnych z $n+1$ liśćmi (0 lub 2 syny).
- skierowanych drzew z $n+1$ wierzchołkami.
- triangulacje $n+2$ -kąta.
- permutacji $[n]$ bez 3-wyrazowego rosnącego podciągu?

3.7.7 Formuła Cayley’a

Liczba różnych drzew (z dokładnością do numerowania wierzchołków) wynosi n^{n-2} . Liczba sposobów by zespójnić k spójnych o rozmiarach s_1, s_2, \dots, s_k wynosi $s_1 \cdot s_2 \cdot \dots \cdot s_k \cdot n^{k-2}$.

3.8 Funkcje multiplikatywne

- $id(n) = n, \mathbb{1} * \varphi = id$
- $\mathbb{1}(n) = 1$
- $\tau(n)$ = liczba dzielników dodatnich, $\mathbb{1} * \mathbb{1} = \tau$
- $\sigma(n)$ = suma dzielników dodatnich, $id * \mathbb{1} = \sigma$
- $\varphi(n)$ = liczba liczb względnie pierwszych z n większych równych 1, $id * \mu = \varphi$
- $\mu(n) = 1$ dla $n = 1$, 0 gdy istnieje p , że $p^2|n$, oraz $(-1)^k$ jak n jest iloczynem k parami różnych liczb pierwszych
- $\epsilon(n) = 1$ dla $n = 1$ oraz 0 dla $n > 1, f * \epsilon = f, \mathbb{1} * \varphi = \epsilon$
- $(f * g)(n) = \sum_{d|n} f(d)g(\frac{n}{d})$
- $f * g = g * f$
- $f * (g * h) = (f * g) * h$
- $f * (g + h) = f * g + f * h$
- jak dwie z trzech funkcji $f * g = h$ są multiplikatywne, to trzecia też
- $f * g = \epsilon \Rightarrow g(n) = -\frac{\sum_{d|n, d>1} f(d)g(\frac{n}{d})}{f(1)}$
- równoważne:
 - $g(n) = \sum_{d|n} f(d)$
 - $f(n) = \sum_{d|n} g(d)\mu(\frac{n}{d})$
 - $\sum_{k=1}^n g(k) = \sum_{d=1}^n \lfloor \frac{n}{d} \rfloor f(d)$
- $\varphi(p^k) = p^k - p^{k-1} = p^{k-1}(p - 1)$
- $\varphi(n) = n \cdot (1 - \frac{1}{p_1}) \cdot (1 - \frac{1}{p_2}) \dots (1 - \frac{1}{p_k})$

3.9 Zasada włączeń i wyłączeń

$$|\bigcup_{i=1}^n A_i| = \sum_{\emptyset \neq J \subseteq \{1, \dots, n\}} (-1)^{|J|+1} |\bigcap_{j \in J} A_j|$$

3.10 Fibonacci

$$F_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$$

$$F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n, \quad F_{n+k} = F_kF_{n+1} + F_{k-1}F_n, \\ F_n|F_{nk}, \quad NWD(F_m, F_n) = F_{NWD(m,n)}$$

Matma (4)

extended-gcd

Opis: Dla danego (a, b) znajduje takie $(gcd(a, b), x, y)$, że $ax+by = gcd(a, b)$

Czas: $\mathcal{O}(\log(\max(a, b)))$

Użycie: LL gcd, x, y; tie(gcd, x, y) = extended_gcd(a, b);

```
tuple<LL, LL, LL> extended_gcd(LL a, LL b) {
    if(a == 0)
        return {b, 0, 1};
    LL x, y, gcd;
    tie(gcd, x, y) = extended_gcd(b % a, a);
    return {gcd, y - x * (b / a), x};
}
```

crt

Opis: Chińskie Twierdzenie o Resztach

Czas: $\mathcal{O}(\log n)$ Pamięć : $\mathcal{O}(1)$

Użycie: crt(a, m, b, n) zwraca takie x, że x mod m = a i x mod n = b

m i n nie muszą być względnie pierwsze, ale może nie być wtedy rozwiązania

uwali się wtedy assertcik, można zmienić na return -1

```
"/extended-gcd/main.cpp"
269203, 9 lines

LL crt(LL a, LL m, LL b, LL n)
{
    if(n > m) swap(a, b), swap(m, n);
    LL d, x, y;
    tie(d, x, y) = extended_gcd(m, n);
    assert((a - b) % d == 0);
    LL ret = (b - a) % n * x % n / d * m + a;
    return ret < 0 ? ret + m * n / d : ret;
}
```

berlekamp-massey

Opis: Berlekamp-Massey

Czas: $\mathcal{O}(n^2 \log k)$ Pamięć : $\mathcal{O}(n)$

Użycie: Berlekamp_Massey(x) zgaduje rekurencję liniową ciągu x

```
get_kth(x, rec, k) zwraca k-ty ciągu x o rekurencji rec
725e04, 70 lines

int mod = 1e9 + 696969;
```

```
LL fpow(LL a, LL n) {
    if(n == 0) return 1;
    if(n % 2 == 1) return fpow(a, n - 1) * a % mod;
    LL r = fpow(a, n / 2);
    return r * r % mod;
}
```

```
vector<LL> Berlekamp_Massey(vector<LL> x) {
    vector<LL> cur, ls;
    LL lf = 0, ld = 0;

    for(int i = 0; i < x.size(); i++) {
        LL t = 0;
        for(int j = 0; j < cur.size(); j++)
            t = (t + x[i - 1 - j] * cur[j]) % mod;

        if((t - x[i]) % mod == 0) continue;
        if(cur.empty()) {
            cur.resize(i + 1);
            lf = i;
            ld = (t - x[i]) % mod;
            continue;
        }

        LL k = (t - x[i]) * fpow(ld, mod - 2) % mod;
        vector<LL> c(i - lf - 1);
        c.emplace_back(k);
        for(int j = 0; j < ls.size(); j++)
```

```
        c.emplace_back(- k * ls[j] % mod);

        if(c.size() < cur.size()) c.resize(cur.size());
        for(int j = 0; j < cur.size(); j++)
            c[j] = (c[j] + cur[j]) % mod;

        if(i - lf + (int)ls.size() >= (int)cur.size())
            ls = cur, lf = i, ld = (t - x[i]);

        cur = c;
    }

    for(LL &val : cur) val = (val % mod + mod) % mod;
    return cur;
}
```

```
LL get_kth(vector<LL> x, vector<LL> rec, LL k) {
    int n = size(rec);
    auto combine = [&](vector<LL> a, vector<LL> b) {
        vector<LL> ret(n * 2 + 1);
        REP(i, n + 1) REP(j, n + 1)
            ret[i + j] = (ret[i + j] + a[i] * b[j]) % mod;
        for(int i = 2 * n; i > n; i--) REP(j, n)
            ret[i - j - 1] = (ret[i - j - 1] + ret[i] * rec[j]) % mod
            ;
        ret.resize(n + 1);
        return ret;
    };

    vector<LL> r(n + 1), pw(n + 1);
    r[0] = 1, pw[1] = 1;
```

```
    for(++k; k; k /= 2) {
        if(k % 2) r = combine(r, pw);
        pw = combine(pw, pw);
    }

    LL ret = 0;
    REP(i, n) ret = (ret + r[i + 1] * x[i]) % mod;
    return ret;
}
```

miller-rabin

Opis: Test pierwszości Millera-Rabina

Czas: $\mathcal{O}(\log^2 n)$ Pamięć : $\mathcal{O}(1)$

Użycie: Miller_Rabin(n) zwraca czy n jest pierwsze

działa dla long longów

```
LL mul(LL a, LL b, LL mod) {
    return (a * b - (LL)((long double) a * b / mod) * mod + mod)
        % mod;
}
```

```
LL fpow(LL a, LL n, LL mod)
{
    if(n == 0) return 1;
    if(n % 2 == 1) return mul(fpow(a, n - 1, mod), a, mod);
    LL ret = fpow(a, n / 2, mod);
    return mul(ret, ret, mod);
}
```

```
bool Miller_Rabin(LL n) {
    if(n < 2) return false;

    int r = 0;
    LL d = n - 1;
    while(d % 2 == 0)
        d /= 2, r++;
```

```
for(int a : {2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31}) {
    if(n == a) return true;
    LL x = fpow(a, d, n);
    if(x == 1 || x == n - 1)
        continue;

    bool composite = true;
    REP(i, r - 1) {
        x = mul(x, x, n);
        if(x == n - 1) {
            composite = false;
            break;
        }
    }
    if(composite) return false;
}

return true;
}
```

Struktury danych (5)

find-union

Opis: Find and union z mniejszy do wiekszego

Czas: $\mathcal{O}(\alpha(n))$ oraz $\mathcal{O}(n)$ pamięciowo

```
struct FindUnion {
    vector<int> rep;
    int size(int x) { return -rep[find(x)]; }
    int find(int x) {
        return rep[x] < 0 ? x : rep[x] = find(rep[x]);
    }
    bool same_set(int a, int b) { return find(a) == find(b); }
    bool join(int a, int b) {
        a = find(a), b = find(b);
        if(a == b)
            return false;
        if(-rep[a] < -rep[b])
            swap(a, b);
        rep[a] += rep[b];
        rep[b] = a;
        return true;
    }
    FindUnion(int n) : rep(n, -1) {}
};
```

lazy-segment-tree

Opis: Drzewo przedział-przedział

Czas: $\mathcal{O}(\log n)$ Pamięć : $\mathcal{O}(n)$

Użycie: add(l, r, val) dodaje na przedziale

quert(l, r) bierze maxa z przedziału

Zmieniając z maxa na co innego trzeba edytować funkcje add_val i f

```
struct Node {
    int val, lazy;
    int size = 1;
};
```

```
struct Tree {
    vector<Node> nodes;
    int size = 1;

    void add_val(int v, int val) {
        nodes[v].val += val;
        nodes[v].lazy += val;
    }
```

```
int f(int a, int b) { return max(a, b); }

Tree(int n) {
    while(size < n) size *= 2;
    nodes.resize(size * 2);
    for(int i = size - 1; i >= 1; i--)
        nodes[i].size = nodes[i * 2].size * 2;
}

void propagate(int v) {
    REP(i, 2)
        add_val(v * 2 + i, nodes[v].lazy);
    nodes[v].lazy = 0;
}

int query(int l, int r, int v = 1) {
    if(l == 0 && r == nodes[v].size - 1)
        return nodes[v].val;
    propagate(v);
    int m = nodes[v].size / 2;
    if(r < m)
        return query(l, r, v * 2);
    else if(m <= l)
        return query(l - m, r - m, v * 2 + 1);
    else
        return f(query(l, m - 1, v * 2), query(0, r - m, v * 2 + 1));
}

void add(int l, int r, int val, int v = 1) {
    if(l == 0 && r == nodes[v].size - 1) {
        add_val(v, val);
        return;
    }
    propagate(v);
    int m = nodes[v].size / 2;
    if(r < m)
        add(l, r, val, v * 2);
    else if(m <= l)
        add(l - m, r - m, val, v * 2 + 1);
    else
        add(l, m - 1, val, v * 2), add(0, r - m, val, v * 2 + 1);

    nodes[v].val = f(nodes[v * 2].val, nodes[v * 2 + 1].val);
}
};
```

segment-tree
Opis: Drzewo punkt-przedział
Czas: $\mathcal{O}(\log n)$ Pamięć : $\mathcal{O}(n)$
Użycie: Tree(n, val = 0) tworzy drzewo o n liściach, o wartościach val
update(pos, val) zmienia element pos na val
query(l, r) zwraca f na przedziale
edytujesz funkcję f, można T ustawić na long longa albo pair

```
struct Tree {
    using T = int;
    T f(T a, T b) { return a + b; }
    vector<T> nodes;
    int size = 1;

    Tree(int n, T val = 0) {
        while(size < n) size *= 2;
        nodes.resize(size * 2, val);
    }

    void update(int pos, T val) {
        nodes[pos += size] = val;
    }
};
```

```
while(pos /= 2)
    nodes[pos] = f(nodes[pos * 2], nodes[pos * 2 + 1]);
}

T query(int l, int r) {
    l += size, r += size;
    T ret = (l != r ? f(nodes[l], nodes[r]) : nodes[l]);
    while(l + 1 < r) {
        if(l % 2 == 0)
            ret = f(ret, nodes[l + 1]);
        if(r % 2 == 1)
            ret = f(ret, nodes[r - 1]);
        l /= 2, r /= 2;
    }
    return ret;
}
};
```

fenwick-tree
Opis: Drzewo potęgowe
Czas: $\mathcal{O}(\log n)$
Użycie: wszystko indexowane od 0
update(pos, val) dodaje val do elementu pos
query(pos) zwraca sumę pierwszych pos elementów
lower_bound(val) zwraca pos, że suma [0, pos] \leq val

```
struct Fenwick {
    vector<LL> s;
    Fenwick(int n) : s(n) {}

    void update(int pos, LL val) {
        for(; pos < size(s); pos |= pos + 1)
            s[pos] += val;
    }

    LL query(int pos) {
        LL ret = 0;
        for(; pos > 0; pos &= pos - 1)
            ret += s[pos - 1];
        return ret;
    }

    int lower_bound(LL val) {
        if(val <= 0) return -1;
        int pos = 0;
        for(int pw = 1 << 25; pw; pw /= 2) {
            if(pos + pw <= size(s) && s[pos + pw - 1] < sum)
                pos += pw, sum -= s[pos - 1];
        }
        return pos;
    }
};
```

ordered-set
Opis: Ordered Set
Użycie: insert(x) dodaje element x (nie ma emplace)
find_by_order(i) zwraca iterator do i-tego elementu
order_of_key(x) zwraca, ile jest mniejszych elementów,
x nie musi być w secie
Jeśli chcemy multiset, to używamy par {val, id}.
Nie działa z -D_GLIBCXX_DEBUG
<ext/pb_ds/assoc_container.hpp>, <ext/pb_ds/tree_policy.hpp>
using namespace __gnu_pbds;

```
template<class T> using ordered_set = tree<
    T,
    null_type,
    less<T>,
```

```
rb_tree_tag,
tree_order_statistics_node_update
>;

lichao-tree  
Opis: Dla funkcji, których pary przecinają się co najwyżej raz, oblicza maximum w punkcie x. Podany kod jest dla funkcji liniowych  
a7f64a, 50 lines

struct Function {
    int a, b;
    L operator()(int x) {
        return x * L(a) + b;
    }
    Function(int p = 0, int q = inf) : a(p), b(q) {}
};

ostream& operator<<(ostream &os, Function f) {
    return os << make_pair(f.a, f.b);
}

struct LiChaoTree {
    int size = 1;
    vector<Function> tree;

    LiChaoTree(int n) {
        while(size < n)
            size *= 2;
        tree.resize(size << 1);
    }

    L get_min(int x) {
        int v = x + size;
        L ans = inf;
        while(v) {
            ans = min(ans, tree[v](x));
            v >>= 1;
        }
        return ans;
    }

    void add_func(Function new_func, int v, int l, int r) {
        int m = (l + r) / 2;
        bool domin_l = tree[v](l) > new_func(l),
            domin_m = tree[v](m) > new_func(m);
        if(domin_m)
            swap(tree[v], new_func);

        if(l == r)
            return;
        else if(domin_l == domin_m)
            add_func(new_func, v << 1 | 1, m + 1, r);
        else
            add_func(new_func, v << 1, l, m);
    }

    void add_func(Function new_func) {
        add_func(new_func, 1, 0, size - 1);
    }
};
```

Grafy (6)

hld
Opis: Heavy-Light Decomposition
Czas: $\mathcal{O}(\log n)$

Użycie: konstruktor - HLD(n, graph)
lca(v, u) zwraca lca
get_vertex(v) zwraca pozycję odpowiadającą wierzchołkowi
get_path(v, u) zwraca przedziały do obsługi drzewem przedziałowym
get_path(v, u) jeśli robisz operacje na wierzchołkach
get_path(v, u, false) jeśli na krawędziach
get_subtree(v) zwraca przedział odpowiadający poddrzewu v

```
struct HLD {
    vector<vector<int>> graph;
    vector<int> size, pre, pos, nxt, par;
    int t = 0;

    void init(int v, int p = -1) {
        par[v] = p;
        size[v] = 1;
        for(int &u : graph[v]) if(u != par[v]) {
            init(u, v);
            size[v] += size[u];
            if(size[u] > size[graph[v][0]])
                swap(u, graph[v][0]);
        }
    }

    void set_paths(int v) {
        pre[v] = t++;
        for(int &u : graph[v]) if(u != par[v]) {
            nxt[u] = (u == graph[v][0] ? nxt[v] : u);
            set_paths(u);
        }
        pos[v] = t;
    }

    HLD(int n, vector<vector<int>> graph, int root = 0)
        : graph(graph), size(n), pre(n), pos(n), nxt(n), par(n) {
        init(root);
        set_paths(root);
    }

    int lca(int v, int u) {
        while(nxt[v] != nxt[u]) {
            if(pre[v] < pre[u])
                swap(v, u);
            v = par[nxt[v]];
        }
        return (pre[v] < pre[u] ? v : u);
    }

    vector<pair<int, int>> path_up(int v, int u) {
        vector<pair<int, int>> ret;
        while(nxt[v] != nxt[u]) {
            ret.emplace_back(pre[nxt[v]], pre[v]);
            v = par[nxt[v]];
        }
        if(pre[u] != pre[v]) ret.emplace_back(pre[u] + 1, pre[v]);
        return ret;
    }

    int get_vertex(int v) { return pre[v]; }

    vector<pair<int, int>> get_path(int v, int u, bool add_lca = true) {
        int w = lca(v, u);
        auto ret = path_up(v, w);
        auto path_u = path_up(u, w);
        if(add_lca) ret.emplace_back(pre[w], pre[w]);
        while(!path_u.empty()) {
            ret.emplace_back(path_u.back());
        }
    }
};
```

```
    path_u.pop_back();
}
return ret;
}

pair<int, int> get_subtree(int v) { return {pre[v], pos[v] - 1}; }
};

SCC
Opis: Silnie Spójnie Składowe
Czas:  $\mathcal{O}(\log n)$ 
Użycie: konstruktor - SCC(graph)
group[v] to numer silnie spójnej wierzchołka v
get_compressed() zwraca graf silnie spójnych
get_compressed(false) nie usuwa multikrawędzi

struct SCC {
    int n;
    vector<vector<int>> graph;
    int group_cnt = 0;
    vector<int> group;

    vector<vector<int>> rev_graph;
    vector<int> order;

    void order_dfs(int v) {
        group[v] = 1;
        for(int u : rev_graph[v])
            if(group[u] == 0)
                order_dfs(u);
        order.emplace_back(v);
    }

    void group_dfs(int v, int color) {
        group[v] = color;
        for(int u : graph[v])
            if(group[u] == -1)
                group_dfs(u, color);
    }

    SCC(vector<vector<int>> &graph) : graph(graph) {
        n = size(graph);
        rev_graph.resize(n);
        REP(v, n)
            for(int u : graph[v])
                rev_graph[u].emplace_back(v);

        group.resize(n);
        REP(v, n)
            if(group[v] == 0)
                order_dfs(v);
        reverse(order.begin(), order.end());
        debug(order);

        group.assign(n, -1);
        for(int v : order)
            if(group[v] == -1)
                group_dfs(v, group_cnt++);
    }

    vector<vector<int>> get_compressed(bool delete_same = true) {
        vector<vector<int>> ans(group_cnt);
        REP(v, n)
            for(int u : graph[v])
                if(group[v] != group[u])
                    ans[group[v]].emplace_back(group[u]);

        if(not delete_same)
    }
};
```

```
        return ans;
    REP(v, group_cnt) {
        sort(ans[v].begin(), ans[v].end());
        ans[v].erase(unique(ans[v].begin(), ans[v].end()), ans[v].end());
    }
    return ans;
}
};
```

eulerian-path

Opis: Ścieżka eulera
Czas: $\mathcal{O}(n)$
Użycie: krawędzie to pary (to, id) gdzie id dla grafu nieskierowanego jest takie samo dla (u, v) i (v, u)
konstruktor - EulerianPath(m, graph)
graf musi być spójny
get_path() zwraca ścieżkę eulera
get_cycle() zwraca cykl eulera
jeśli nie ma, obie funkcję zwrócą pusty vector

```
struct EulerianPath {
    vector<vector<pair<int, int>>> graph;
    vector<bool> used;
    vector<int> in, out;
    vector<int> path, cycle

    void init(int v = 0) {
        in[v]++;
        while(!graph[v].empty()) {
            auto edge = graph[v].back();
            graph[v].pop_back();
            int u = edge.first;
            int id = edge.second;
            if(used[id]) continue;
            used[id] = true;
            out[v]++;
            init(u);
        }
        path.emplace_back(v);
    }

    EulerianPath(int m, vector<vector<pair<int, int>>> &graph) :
        graph(graph) {
        int n = size(graph);
        used.resize(m);
        in.resize(n);
        out.resize(n);

        init();
        in[0]--;
        debug(path, in, out);
        cycle = path;
        REP(i, n) if(in[i] != out[i]) cycle.clear();
        if(path.size() != 0) in[path.back()]++, out[path[0]]++;
        REP(i, n) if(in[i] != out[i]) path.clear();
        reverse(path.begin(), path.end());
    }

    vector<int> get_path() { return path; }
    vector<int> get_cycle() { return cycle; }
};
```

jump-ptr

Opis: Jump Pointery
Czas: $\mathcal{O}(\log n)$

Użycie: konstruktor - JumpPtr(graph)
można ustawić roota
jump_up(v, k) zwraca wierzcholek o k wyższy niż v
jeśli nie istnieje, zwraca -1
lca(a, b) zwraca lca wierzchołków

```
struct JumpPtr {
    int LOG = 20;
    vector<vector<int>> graph, jump;
    vector<int> par, dep;

    void par_dfs(int v) {
        for(int u : graph[v]) {
            if(u != par[v]) {
                par[u] = v;
                dep[u] = dep[v] + 1;
                dfs(u);
            }
        }
    }

    JumpPtr(vector<vector<int>> &graph, int root = 0) : graph(
        graph) {
        int n = size(graph);
        par.resize(n, -1);
        dep.resize(n);
        par_dfs(root);

        jump.resize(LOG, vector<int>(n));
        jump[0] = par;
        FOR(i, 1, LOG - 1) REP(j, n)
            jump[i][j] = jump[i - 1][j] == -1 ? -1 : jump[i - 1][jump
                [i - 1][j]];
    }

    int jump_up(int v, int k) {
        for(int i = LOG - 1; i >= 0; i--)
            if(k & (1 << i))
                v = jump[i][v];
        return v;
    }

    int lca(int a, int b) {
        if(dep[a] < dep[b]) swap(a, b);
        int delta = dep[a] - dep[b];
        a = jump_up(a, delta);
        if(a == b) return a;

        for(int i = LOG - 1; i >= 0; i--) {
            if(jump[i][a] != jump[i][b]) {
                a = jump[i][a];
                b = jump[i][b];
            }
        }
        return par[a];
    }
};
```

Geometria (7)

point
Opis: Double może być LL, ale nie int. p.x oraz p.y nie można zmieniać (to kopie). Nie tworzyć zmiennych o nazwie "x" lub "y".
Użycie: P p = {5, 6}; abs(p) = length; arg(p) = ką; polar(len, angle); exp(angle)

```
using Double = long double;
using P = complex<Double>;
```

```
#define x real()
#define y imag()

constexpr Double eps = 1e-9;
bool equal(Double a, Double b) {
    return abs(a - b) <= eps;
}

int sign(Double a) {
    return equal(a, 0) ? 0 : a > 0 ? 1 : -1;
}

struct Sortx {
    bool operator()(const P &a, const P &b) const {
        return make_pair(a.x, a.y) < make_pair(b.x, b.y);
    }
};

istream& operator>>(istream &is, P &p) {
    Double a, b;
    is >> a >> b;
    p = P(a, b);
    return is;
}

Double cross(P a, P b) {
    return a.x * b.y - a.y * b.x;
}

Double dot(P a, P b) {
    return a.x * b.x + a.y * b.y;
}

P rotate(P x, P center, Double radians) {
    return (x - center) * exp(P(0, radians)) + center;
}
```

intersect-lines
Opis: Przecięcie prostych lub odcinków
Użycie: v = intersect(a, b, c, d, s) zwraca przecięcie (s ? odcinków : prostych) ab oraz cd
if size(v) == 0: nie ma przecięć
if size(v) == 1: v[0] jest przecięciem
if size(v) == 2 and s: (v[0], v[1]) to odcinek, w którym są wszystkie inf rozwiązań
if size(v) == 2 and s == false: v to niezdefiniowane punkty (inf rozwiązań)

```
"../point/main.cpp"

bool on_segment(P a, P b, P p) {
    return equal(cross(a - p, b - p), 0) and dot(a - p, b - p) <= 0;
}

vector<P> intersect(P a, P b, P c, P d, bool segments) {
    Double acd = cross(c - a, d - c), bcd = cross(c - b, d - c),
        cab = cross(a - c, b - a), dab = cross(a - d, b - a);
    if((segments and sign(acd) * sign(bcd) < 0 and sign(cab) *
        sign(dab) < 0)
        or (not segments and not equal(bcd, acd)))
        return {(a * bcd - b * acd) / (bcd - acd)};
    if(not segments)
        return {a, a};
    // skip for not segments
    set<P, Sortx> s;
    if(on_segment(c, d, a)) s.emplace(a);
    if(on_segment(c, d, b)) s.emplace(b);
    if(on_segment(a, b, c)) s.emplace(c);
    if(on_segment(a, b, d)) s.emplace(d);
    return {s.begin(), s.end()};
}
```

Tekstówki (8)

manacher
Opis: radius[p][i] = rad = największy promień palindromu parzystości p o środku i. $L = i - rad + 1$, $R = i + rad$ to palindrom. Dla [abaababaab] daje [003000020], [0100141000].
Czas: $O(n)$

```
array<vector<int>, 2> manacher(vector<int> &in) {
    int n = size(in);
    array<vector<int>, 2> radius = {{vector<int>(n - 1), vector<
        int>(n)}};
    REP(parity, 2) {
        int z = parity ^ 1, L = 0, R = 0;
        REP(i, n - z) {
            int &rad = radius[parity][i];
            if(i <= R - z)
                rad = min(R - i, radius[parity][L + (R - i - z)]);
            int l = i - rad + z, r = i + rad;
            while(0 <= l - 1 && r + 1 < n && in[l - 1] == in[r + 1])
                ++rad, ++r, --l;
            if(r > R)
                L = l, R = r;
        }
    }
    return radius;
}
```

Optymalizacje (9)

Randomowe rzeczy (10)