



XIII LO Szczecin

# Wojownicze Żółwie Ninja

Tomasz Nowak, Michał Staniewski, Justyna Jaworska

2019-10-18

1

Utils

2

Podjęcia

3

Wzorki

4

Matma

5

Struktury danych

6

Grafy

7

Geometria

8

Tekstówki

9

Optymalizacje

10

Randomowe rzeczy

## Utils (1)

```
headers
Opis: Nagłówki używane w każdym kodzie. Działa na każdy kontener i pary
Użycie: debug(a, b, c) << d << e; wypisze a, b, c:  a; b; c;
de
<bits/stdc++.h>
1084fb, 39 lines

using namespace std;
using LL = long long;
#define FOR(i, l, r) for(int i = (l); i <= (r); ++i)
#define REP(i, n) FOR(i, 0, (n) - 1)
template<class T> int size(T &&x) {
    return int(x.size());
}
template<class A, class B> ostream& operator<<(ostream &out,
    const pair<A, B> &p) {
    return out << '(' << p.first << ", " << p.second << ')';
}
template<class T> auto operator<<(ostream &out, T &&x) ->
    decltype(x.begin(), out) {
    out << '{';
    for(auto it = x.begin(); it != x.end(); ++it)
        out << *it << (it == prev(x.end()) ? "" : ", ");
    return out << '}';
}
void dump() {}
template<class T, class... Args> void dump(T &&x, Args... args)
{
    cerr << x << ";  ";
    dump(args...);
}
#ifdef DEBUG
    const int seed = 1;
    struct Nl{~Nl(){cerr << '\n';}};
# define debug(x...) cerr << (strcmp(#x, "") ? #x " : ", ""),
        dump(x), Nl(), cerr << ""
#else
    const int seed = chrono::system_clock::now().time_since_epoch
        ().count();
# define debug(...) 0 && cerr
#endif
```

```
1 mt19937_64 rng(seed);
int rd(int l, int r) {
1     return uniform_int_distribution<int>(l, r)(rng);
}

1 // int main() {
//     ios_base::sync_with_stdio(0);
//     cin.tie(0);
3 // }

3 headers/bazshrc.sh
10 lines

5 c() {
    clang++ -O3 -std=c++11 -Wall -Wextra -Wshadow \
        -Wconversion -Wno-sign-conversion -Wfloat-equal \
6        -D_GLIBCXX_DEBUG -fsanitize=address,undefined -ggdb3 \
        -DDEBUG $1.cpp -o $1
    }

7 nc() {
7     clang++ -O3 -std=c++11 -static $1.cpp -o $1 # -m32
    }

7 headers/vimrc
3 lines

set nu rnu hls is nosol ts=4 sw=4 ch=2 sc
filetype indent plugin on
syntax on

headers/sprawdzaczka.sh
13 lines

#!/bin/bash
for ((i=0; i<1000000; i++)); do
    ./gen < conf.txt > gen.txt
    ./main < gen.txt > main.txt
    ./brute < gen.txt > brute.txt

    if diff -w main.txt brute.txt > /dev/null; then
        echo "OK $i"
    else
        echo "WA"
        exit 0
    fi
done
```

## Podjęcia (2)

- dynamik, zachłan
- sposób "liczba dobrych obiektów = liczba wszystkich obiektów - liczba złych obiektow"
- czy warunek konieczny = warunek wystarczający?
- odpowiednie przekształcenie równania
- zastanowić się nad łatwiejszym problemem, bez jakiegoś elementu z treści
- sprowadzić problem do innego, łatwiejszego/mniejszego problemu
- sprowadzić problem 2D do problemu 1D (szczególny przypadek: zmiatanie; częsty przypadek: niezależność wyniku dla współrzędnych X od współrzędnych Y)
- konstrukcja grafu

- określenie struktury grafu
- optymalizacja bruta do wzorcówki
- czy można poprawić (może zachłannie) rozwiązanie nieoptymalne?
- czy są ciekawe fakty w rozwiązaniach optymalnych? (może się do tego przydać brute)
- sprawdzić czy w zadaniu czegoś jest "mało" (np. czy wynik jest mały, albo jakaś zmienna, może się do tego przydać brute)
- odpowiednio "wzbogacić" jakiś algorytm
- cokolwiek poniżej 10<sup>9</sup> operacji ma szansę wejść
- co można wykonać offline? Coś można posortować? Coś można shuffle'ować?
- narysować dużo swoich własnych przykładów i coś z nich wywnioskować

## Wzorki (3)

### 3.1 Równości

$$ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Wierzchołek paraboli =  $(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a})$ .

$$\begin{aligned} ax + by &= e \\ cx + dy &= f \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} x &= \frac{ed - bf}{ad - bc} \\ y &= \frac{af - ec}{ad - bc} \end{aligned}$$

### 3.2 Pitagoras

Trójki  $(a, b, c)$ , takie że  $a^2 + b^2 = c^2$ :

$$a = k \cdot (m^2 - n^2), \quad b = k \cdot (2mn), \quad c = k \cdot (m^2 + n^2),$$

gdzie  $m > n > 0, k > 0, m \perp n$ , oraz albo  $m$  albo  $n$  jest parzyste.

### 3.3 Generowanie względnie pierwszych par

Dwa drzewa, zaczynając od  $(2, 1)$  (parzysta-nieparzysta) oraz  $(3, 1)$  (nieparzysta-nieparzysta), rozgałęzienia są do  $(2m - n, m), (2m + n, m)$  oraz  $(m + 2n, n)$ .

### 3.4 Liczby pierwsze

$p = 962592769$  to liczba na NTT, czyli  $2^{21} \mid p - 1$ , which may be useful. Do hashowania: 970592641 (31-bit), 31443539979727 (45-bit), 3006703054056749 (52-bit).

Jest 78498 pierwszych  $\leq 1\,000\,000$ .

Generatorów jest  $\phi(\phi(p^a))$ , czyli dla  $p > 2$  zawsze istnieje.

### 3.5 Dzielniki

$$\sum_{d|n} d = O(n \log \log n).$$

Liczba dzielników  $n$  jest co najwyżej 100 dla  $n < 5e4$ , 500 dla  $n < 1e7$ , 2000 dla  $n < 1e10$ , 200 000 dla  $n < 1e19$ .

#### 3.5.1 Lemat Burnside’a

Liczba takich samych obiektów z dokładnością do symetrii wynosi Given a group  $G$  of symmetries and a set  $X$ , the number of elements of  $X$  up to symmetry equals

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X^g|,$$

Gdzie  $G$  to zbiór symetrii (ruchów) oraz  $X^g$  to punkty (obiekty) stałe symetrii  $g$ .

### 3.6 Silnia

$n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$n!$	1	2	6	24	120	720	5040	40320	362880	3628800
$n$	11	12	13	14	15	16	17			
$n!$	4.0e7	4.8e8	6.2e9	8.7e10	1.3e12	2.1e13	3.6e14			
$n$	20	25	30	40	50	100	150	171		
$n!$	2e18	2e25	3e32	8e47	3e64	9e157	6e262	>DBL_MAX		

#### 3.6.1 Symbol Newtona

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-2}{k-1} + \dots + \binom{k-1}{k-1}$$

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n x^k y^{n-k}$$

### 3.7 Wzorki na pewne ciągi

#### 3.7.1 Nieporządek

Liczba takich permutacji, że  $p_i \neq i$  (żadna liczba nie wraca na tą samą pozycję).

$$D(n) = (n-1)(D(n-1)+D(n-2)) = nD(n-1)+(-1)^n = \left\lfloor \frac{n!}{e} \right\rfloor$$

#### 3.7.2 Liczba podziałów

Liczba sposobów zapisania  $n$  jako sumę posortowanych liczb dodatnich.

$$p(0) = 1, \quad p(n) = \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} (-1)^{k+1} p(n - k(3k - 1)/2)$$

$$p(n) \sim 0.145/n \cdot \exp(2.56\sqrt{n})$$

$n$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	20	50	100
$p(n)$	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	627	~2e5	~2e8

#### 3.7.3 Liczby Eulera pierwszego rzędu

Liczba permutacji  $\pi \in S_n$  gdzie  $k$  elementów jest większych niż poprzedni:  $k$  razy  $\pi(j) > \pi(j+1)$ ,  $k+1$  razy  $\pi(j) \geq j$ ,  $k$  razy  $\pi(j) > j$ .

$$E(n, k) = (n - k)E(n - 1, k - 1) + (k + 1)E(n - 1, k)$$

$$E(n, 0) = E(n, n - 1) = 1$$

$$E(n, k) = \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{n+1}{j} (k+1-j)^n$$

#### 3.7.4 Stirling pierwszego rzędu

Liczba permutacji długości  $n$  mające  $k$  cykli.

$$c(n, k) = c(n - 1, k - 1) + (n - 1)c(n - 1, k), \quad c(0, 0) = 1$$
$$\sum_{k=0}^n c(n, k) x^k = x(x + 1) \dots (x + n - 1)$$

$$c(8, k) = 8, 0, 5040, 13068, 13132, 6769, 1960, 322, 28, 1$$
$$c(n, 2) = 0, 0, 1, 3, 11, 50, 274, 1764, 13068, 109584, \dots$$

#### 3.7.5 Stirling drugiego rzędu

Liczba permutacji długości  $n$  mające  $k$  spójnych.

$$S(n, k) = S(n - 1, k - 1) + kS(n - 1, k)$$

$$S(n, 1) = S(n, n) = 1$$

$$S(n, k) = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} j^n$$

#### 3.7.6 Liczby Catalana

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} = \frac{(2n)!}{(n+1)!n!}$$

$$C_0 = 1, \quad C_{n+1} = \frac{2(2n+1)}{n+2} C_n, \quad C_{n+1} = \sum C_i C_{n-i}$$

$$C_n = 1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862, 16796, 58786, \dots$$

- ścieżki na planszy  $n \times n$ .
- nawiasowania po  $n$  ).
- liczba drzew binarnych z  $n + 1$  liśćmi (0 lub 2 syny).
- skierowanych drzew z  $n + 1$  wierzchołkami.
- triangulacje  $n + 2$ -kąta.
- permutacji  $[n]$  bez 3-wyrazowego rosnącego podciągu?

#### 3.7.7 Formuła Cayley’a

Liczba różnych drzew (z dokładnością do numerowania wierzchołków) wynosi  $n^{n-2}$ . Liczba sposobów by zespójnić  $k$  spójnych o rozmiarach  $s_1, s_2, \dots, s_k$  wynosi  $s_1 \cdot s_2 \cdot \dots \cdot s_k \cdot n^{k-2}$ .

### 3.8 Funkcje multiplikatywne

- $id(n) = n, \mathbb{1} * \varphi = id$
- $\mathbb{1}(n) = 1$
- $\tau(n)$  = liczba dzielników dodatnich,  $\mathbb{1} * \mathbb{1} = \tau$
- $\sigma(n)$  = suma dzielników dodatnich,  $id * \mathbb{1} = \sigma$
- $\varphi(n)$  = liczba liczb względnie pierwszych z  $n$  większych równych 1,  $id * \mu = \varphi$
- $\mu(n) = 1$  dla  $n = 1$ , 0 gdy istnieje  $p$ , że  $p^2 | n$ , oraz  $(-1)^k$  jak  $n$  jest iloczynem  $k$  parami różnych liczb pierwszych
- $\epsilon(n) = 1$  dla  $n = 1$  oraz 0 dla  $n > 1, f * \epsilon = f, \mathbb{1} * \varphi = \epsilon$
- $(f * g)(n) = \sum_{d|n} f(d)g(\frac{n}{d})$

- $f * g = g * f$
- $f * (g * h) = (f * g) * h$
- $f * (g + h) = f * g + f * h$
- jak dwie z trzech funkcji  $f * g = h$  są multiplikatywne, to trzecia też
- $f * g = \epsilon \Rightarrow g(n) = -\frac{\sum_{d|n, d>1} f(d)g(\frac{n}{d})}{f(1)}$
- równoważne:
  - $g(n) = \sum_{d|n} f(d)$
  - $f(n) = \sum_{d|n} g(d)\mu(\frac{n}{d})$
  - $\sum_{k=1}^n g(k) = \sum_{d=1}^n \lfloor \frac{n}{d} \rfloor f(d)$
- $\varphi(p^k) = p^k - p^{k-1} = p^{k-1}(p - 1)$
- $\varphi(n) = n \cdot (1 - \frac{1}{p_1}) \cdot (1 - \frac{1}{p_2}) \dots (1 - \frac{1}{p_k})$

### 3.9 Zasada włączeń i wyłączeń

$$|\bigcup_{i=1}^n A_i| = \sum_{\emptyset \neq J \subseteq \{1, \dots, n\}} (-1)^{|J|+1} |\bigcap_{j \in J} A_j|$$

### 3.10 Fibonacci

$$F_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$$

$$F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n, \quad F_{n+k} = F_kF_{n+1} + F_{k-1}F_n, \\ F_n | F_{nk}, \quad NWD(F_m, F_n) = F_{NWD(m, n)}$$

## Matma (4)

#### extended-gcd

**Opis:** Dla danego  $(a, b)$  znajduje takie  $(gcd(a, b), x, y)$ , że  $ax+by = gcd(a, b)$   
**Czas:**  $\mathcal{O}(\log(\max(a, b)))$   
**Użycie:** LL gcd, x, y; tie(gcd, x, y) = extended\_gcd(a, b);

```
tuple<LL, LL, LL> extended_gcd(LL a, LL b) {
    if(a == 0)
        return {b, 0, 1};
    LL x, y, gcd;
    tie(gcd, x, y) = extended_gcd(b % a, a);
    return {gcd, y - x * (b / a), x};
}
```

```
crt
Opis: Chińskie Twierdzenie o Resztach
Czas:  $\mathcal{O}(\log n)$  Pamięć :  $\mathcal{O}(1)$ 
Użycie: crt(a, m, b, n) zwraca takie x, że x mod m = a i x mod n = b
m i n nie muszą być względnie pierwsze, ale może nie być wtedy rozwiązania
uwali się wtedy assertcik, można zmienić na return -1
"../extended-gcd/main.cpp" 269203, 9 lines

LL crt(LL a, LL m, LL b, LL n)
{
    if(n > m) swap(a, b), swap(m, n);
    LL d, x, y;
    tie(d, x, y) = extended_gcd(m, n);
```

```
    assert((a - b) % d == 0);
    LL ret = (b - a) % n * x % n / d * m + a;
    return ret < 0 ? ret + m * n / d : ret;
}

berlekamp-massey
Opis: Berlekamp-Massey
Czas:  $\mathcal{O}(n^2 \log k)$  Pamięć :  $\mathcal{O}(n)$ 
Użycie: Berlekamp_Massey(x) zgaduje rekurencję liniową ciągu x
get_kth(x, rec, k) zwraca k-ty ciągu x o rekurencji rec
"725e04, 70 lines"

int mod = 1e9 + 696969;

LL fpow(LL a, LL n) {
    if(n == 0) return 1;
    if(n % 2 == 1) return fpow(a, n - 1) * a % mod;
    LL r = fpow(a, n / 2);
    return r * r % mod;
}

vector<LL> Berlekamp_Massey(vector<LL> x) {
    vector<LL> cur, ls;
    LL lf = 0, ld = 0;

    for(int i = 0; i < x.size(); i++) {
        LL t = 0;
        for(int j = 0; j < cur.size(); j++)
            t = (t + x[i - 1 - j] * cur[j]) % mod;

        if((t - x[i]) % mod == 0) continue;
        if(cur.empty()) {
            cur.resize(i + 1);
            lf = i;
            ld = (t - x[i]) % mod;
            continue;
        }

        LL k = (t - x[i]) * fpow(ld, mod - 2) % mod;
        vector<LL> c(i - lf - 1);
        c.emplace_back(k);
        for(int j = 0; j < ls.size(); j++)
            c.emplace_back(- k * ls[j] % mod);

        if(c.size() < cur.size()) c.resize(cur.size());
        for(int j = 0; j < cur.size(); j++)
            c[j] = (c[j] + cur[j]) % mod;

        if(i - lf + (int)ls.size() >= (int)cur.size())
            ls = cur, lf = i, ld = (t - x[i]);

        cur = c;
    }

    for(LL &val : cur) val = (val % mod + mod) % mod;
    return cur;
}

LL get_kth(vector<LL> x, vector<LL> rec, LL k) {
    int n = size(rec);
    auto combine = [&](vector<LL> a, vector<LL> b) {
        vector<LL> ret(n * 2 + 1);
        REP(i, n + 1) REP(j, n + 1)
            ret[i + j] = (ret[i + j] + a[i] * b[j]) % mod;
        for(int i = 2 * n; i > n; i--) REP(j, n)
            ret[i - j - 1] = (ret[i - j - 1] + ret[i] * rec[j]) % mod;
        ret.resize(n + 1);
        return ret;
    };
};
```

```
vector<LL> r(n + 1), pw(n + 1);
r[0] = 1, pw[1] = 1;

for(++k; k; k /= 2) {
    if(k % 2) r = combine(r, pw);
    pw = combine(pw, pw);
}

LL ret = 0;
REP(i, n) ret = (ret + r[i + 1] * x[i]) % mod;
return ret;
}
```

#### miller-rabin

**Opis:** Test pierwszości Millera-Rabina  
**Czas:**  $\mathcal{O}(\log^2 n)$  Pamięć :  $\mathcal{O}(1)$   
**Użycie:** Miller\_Rabin(n) zwraca czy n jest pierwsze  
działa dla long longów

```
"9854f5, 39 lines"

LL mul(LL a, LL b, LL mod) {
    return (a * b - (LL)((long double) a * b / mod) * mod + mod) % mod;
}

LL fpow(LL a, LL n, LL mod)
{
    if(n == 0) return 1;
    if(n % 2 == 1) return mul(fpow(a, n - 1, mod), a, mod);
    LL ret = fpow(a, n / 2, mod);
    return mul(ret, ret, mod);
}

bool Miller_Rabin(LL n) {
    if(n < 2) return false;

    int r = 0;
    LL d = n - 1;
    while(d % 2 == 0)
        d /= 2, r++;

    for(int a : {2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31}) {
        if(n == a) return true;
        LL x = fpow(a, d, n);
        if(x == 1 || x == n - 1)
            continue;

        bool composite = true;
        REP(i, r - 1) {
            x = mul(x, x, n);
            if(x == n - 1) {
                composite = false;
                break;
            }
        }
        if(composite) return false;
    }

    return true;
}
```

## Struktury danych (5)

#### find-union

**Opis:** Find and union z mniejszy do wiekszego  
**Czas:**  $\mathcal{O}(\alpha(n))$  oraz  $\mathcal{O}(n)$  pamięciowo

```
"c3dcbd, 19 lines"

struct FindUnion {
```

```
vector<int> rep;
int size(int x) { return -rep[find(x)]; }
int find(int x) {
    return rep[x] < 0 ? x : rep[x] = find(rep[x]);
}
bool same_set(int a, int b) { return find(a) == find(b); }
bool join(int a, int b) {
    a = find(a), b = find(b);
    if(a == b)
        return false;
    if(-rep[a] < -rep[b])
        swap(a, b);
    rep[a] += rep[b];
    rep[b] = a;
    return true;
}
FindUnion(int n) : rep(n, -1) {}
};
```

### lazy-segment-tree

**Opis:** Drzewo przedział-przedział

**Czas:**  $\mathcal{O}(\log n)$  Pamięć :  $\mathcal{O}(n)$

**Użycie:** add(l, r, val) dodaje na przedziale

quert(l, r) bierze maxa z przedziału

Zmieniając z maxa na co innego trzeba edytować

funkcje add\_val i f

a98ace, 59 lines

```
struct Node {
    int val, lazy;
    int size = 1;
};

struct Tree {
    vector<Node> nodes;
    int size = 1;

    void add_val(int v, int val) {
        nodes[v].val += val;
        nodes[v].lazy += val;
    }

    int f(int a, int b) { return max(a, b); }

    Tree(int n) {
        while(size < n) size *= 2;
        nodes.resize(size * 2);
        for(int i = size - 1; i >= 1; i--)
            nodes[i].size = nodes[i * 2].size * 2;
    }

    void propagate(int v) {
        REP(i, 2)
            add_val(v * 2 + i, nodes[v].lazy);
        nodes[v].lazy = 0;
    }

    int query(int l, int r, int v = 1) {
        if(l == 0 && r == nodes[v].size - 1)
            return nodes[v].val;
        propagate(v);
        int m = nodes[v].size / 2;
        if(r < m)
            return query(l, r, v * 2);
        else if(m <= l)
            return query(l - m, r - m, v * 2 + 1);
        else
            return f(query(l, m - 1, v * 2), query(0, r - m, v * 2 + 1));
    }
};
```

```
void add(int l, int r, int val, int v = 1) {
    if(l == 0 && r == nodes[v].size - 1) {
        add_val(v, val);
        return;
    }
    propagate(v);
    int m = nodes[v].size / 2;
    if(r < m)
        add(l, r, val, v * 2);
    else if(m <= l)
        add(l - m, r - m, val, v * 2 + 1);
    else
        add(l, m - 1, val, v * 2), add(0, r - m, val, v * 2 + 1);

    nodes[v].val = f(nodes[v * 2].val, nodes[v * 2 + 1].val);
}

};
```

### segment-tree

**Opis:** Drzewo punkt-przedział

**Czas:**  $\mathcal{O}(\log n)$  Pamięć :  $\mathcal{O}(n)$

**Użycie:** Tree(n, val = 0) tworzy drzewo o n liściach, o wartościach val

update(pos, val) zmienia element pos na val

query(l, r) zwraca f na przedziale

edytujesz funkcję f, można T ustawić na long longa albo pare

92195e, 30 lines

```
struct Tree {
    using T = int;
    T f(T a, T b) { return a + b; }
    vector<T> nodes;
    int size = 1;

    Tree(int n, T val = 0) {
        while(size < n) size *= 2;
        nodes.resize(size * 2, val);
    }

    void update(int pos, T val) {
        nodes[pos + size] = val;
        while(pos /= 2)
            nodes[pos] = f(nodes[pos * 2], nodes[pos * 2 + 1]);
    }

    T query(int l, int r) {
        l += size, r += size;
        T ret = (l != r ? f(nodes[l], nodes[r]) : nodes[l]);
        while(l + 1 < r) {
            if(l % 2 == 0)
                ret = f(ret, nodes[l + 1]);
            if(r % 2 == 1)
                ret = f(ret, nodes[r - 1]);
            l /= 2, r /= 2;
        }
        return ret;
    }
};
```

### fenwick-tree

**Opis:** Drzewo potęgowe

**Czas:**  $\mathcal{O}(\log n)$

**Użycie:** wszystko indexowane od 0

update(pos, val) dodaje val do elementu pos

query(pos) zwraca sumę pierwszych pos elementów

lower\_bound(val) zwraca pos, że suma [0, pos] <= val

78e5fe, 26 lines

```
struct Fenwick {
    vector<LL> s;
```

```
Fenwick(int n) : s(n) {}

void update(int pos, LL val) {
    for(; pos < size(s); pos |= pos + 1)
        s[pos] += val;
}

LL query(int pos) {
    LL ret = 0;
    for(; pos > 0; pos &= pos - 1)
        ret += s[pos - 1];
    return ret;
}

int lower_bound(LL val) {
    if(val <= 0) return -1;
    int pos = 0;
    for(int pw = 1 << 25; pw; pw /= 2) {
        if(pos + pw <= size(s) && s[pos + pw - 1] < sum)
            pos += pw, sum -= s[pos - 1];
    }
    return pos;
}
};
```

### ordered-set

**Opis:** Ordered Set

**Użycie:** insert(x) dodaje element x (nie ma emplace)

find\_by\_order(i) zwraca iterator do i-tego elementu

order\_of\_key(x) zwraca, ile jest mniejszych elementów,

x nie musi być w secie

Jeśli chcemy multiseta, to używamy par {val, id}.

Nie działa z -D\_GLIBCXX\_DEBUG

<ext/pb\_ds/assoc\_container.hpp>, <ext/pb\_ds/tree\_policy.hpp> 0a779f, 9 lines

using namespace \_\_gnu\_pbds;

```
template<class T> using ordered_set = tree<
    T,
    null_type,
    less<T>,
    rb_tree_tag,
    tree_order_statistics_node_update
>;
```

### lichao-tree

**Opis:** Dla funkcji, których pary przecinają się co najwyżej raz, oblicza maximum w punkcie x. Podany kod jest dla funkcji liniowych

a7f64a, 50 lines

```
struct Function {
    int a, b;
    L operator()(int x) {
        return x * L(a) + b;
    }
    Function(int p = 0, int q = inf) : a(p), b(q) {}
};
ostream& operator<<(ostream &os, Function f) {
    return os << make_pair(f.a, f.b);
}
```

```
struct LiChaoTree {
    int size = 1;
    vector<Function> tree;
```

```
LiChaoTree(int n) {
    while(size < n)
        size *= 2;
    tree.resize(size << 1);
}
```

```
L get_min(int x) {
    int v = x + size;
    L ans = inf;
    while(v) {
        ans = min(ans, tree[v](x));
        v >>= 1;
    }
    return ans;
}

void add_func(Function new_func, int v, int l, int r) {
    int m = (l + r) / 2;
    bool domin_l = tree[v](l) > new_func(l),
         domin_m = tree[v](m) > new_func(m);
    if(domin_m)
        swap(tree[v], new_func);

    if(l == r)
        return;
    else if(domin_l == domin_m)
        add_func(new_func, v << 1 | 1, m + 1, r);
    else
        add_func(new_func, v << 1, l, m);
}

void add_func(Function new_func) {
    add_func(new_func, 1, 0, size - 1);
}
};
```

Grafy (6)

hld  
**Opis:** Heavy-Light Decomposition  
**Czas:**  $\mathcal{O}(\log n)$   
**Użycie:** konstruktor - HLD(n, graph)  
lca(v, u) zwraca lca  
get\_vertex(v) zwraca pozycję odpowiadającą wierzchołkowi  
get\_path(v, u) zwraca przedziały do obsługiwaniania drzewem przedziałowym  
get\_path(v, u) jeśli robisz operacje na wierzchołkach  
get\_path(v, u, false) jeśli na krawędziach  
get\_subtree(v) zwraca przedział odpowiadający poddrzewu v

```
struct HLD {
    vector<vector<int>>> graph;
    vector<int> size, pre, pos, nxt, par;
    int t = 0;

    void init(int v, int p = -1) {
        par[v] = p;
        size[v] = 1;
        for(int &u : graph[v]) if(u != par[v]) {
            init(u, v);
            size[v] += size[u];
            if(size[u] > size[graph[v][0]])
                swap(u, graph[v][0]);
        }
    }

    void set_paths(int v) {
        pre[v] = t++;
        for(int &u : graph[v]) if(u != par[v]) {
            nxt[u] = (u == graph[v][0] ? nxt[v] : u);
            set_paths(u);
        }
        pos[v] = t;
    }
};
```

```
}

HLD(int n, vector<vector<int>>> graph, int root = 0)
    : graph(graph), size(n), pre(n), pos(n), nxt(n), par(n) {
    init(root);
    set_paths(root);
}

int lca(int v, int u) {
    while(nxt[v] != nxt[u]) {
        if(pre[v] < pre[u])
            swap(v, u);
        v = par[nxt[v]];
    }
    return (pre[v] < pre[u] ? v : u);
}

vector<pair<int, int>>> path_up(int v, int u) {
    vector<pair<int, int>>> ret;
    while(nxt[v] != nxt[u]) {
        ret.emplace_back(pre[nxt[v]], pre[v]);
        v = par[nxt[v]];
    }
    if(pre[u] != pre[v]) ret.emplace_back(pre[u] + 1, pre[v]);
    return ret;
}

int get_vertex(int v) { return pre[v]; }

vector<pair<int, int>>> get_path(int v, int u, bool add_lca = true) {
    int w = lca(v, u);
    auto ret = path_up(v, w);
    auto path_u = path_up(u, w);
    if(add_lca) ret.emplace_back(pre[w], pre[w]);
    while(!path_u.empty()) {
        ret.emplace_back(path_u.back());
        path_u.pop_back();
    }
    return ret;
}

pair<int, int> get_subtree(int v) { return {pre[v], pos[v] - 1}; }
};
```

SCC  
**Opis:** Silnie Spójnie Składowe  
**Czas:**  $\mathcal{O}(\log n)$   
**Użycie:** konstruktor - SCC(graph)  
group[v] to numer silnie spójnej wierzchołka v  
get\_compressed() zwraca graf silnie spójnych  
get\_compressed(false) nie usuwa multikrawędzi

```
struct SCC {
    int n;
    vector<vector<int>>> graph;
    int group_cnt = 0;
    vector<int> group;

    vector<vector<int>>> rev_graph;
    vector<int> order;

    void order_dfs(int v) {
        group[v] = 1;
        for(int u : rev_graph[v])
            if(group[u] == 0)
                order_dfs(u);
        order.emplace_back(v);
    }
};
```

```
}

void group_dfs(int v, int color) {
    group[v] = color;
    for(int u : graph[v])
        if(group[u] == -1)
            group_dfs(u, color);
}

SCC(vector<vector<int>>> &graph) : graph(graph) {
    n = size(graph);
    rev_graph.resize(n);
    REP(v, n)
        for(int u : graph[v])
            rev_graph[u].emplace_back(v);

    group.resize(n);
    REP(v, n)
        if(group[v] == 0)
            order_dfs(v);
    reverse(order.begin(), order.end());
    debug(order);

    group.assign(n, -1);
    for(int v : order)
        if(group[v] == -1)
            group_dfs(v, group_cnt++);
}

vector<vector<int>>> get_compressed(bool delete_same = true) {
    vector<vector<int>>> ans(group_cnt);
    REP(v, n)
        for(int u : graph[v])
            if(group[v] != group[u])
                ans[group[v]].emplace_back(group[u]);

    if(not delete_same)
        return ans;
    REP(v, group_cnt) {
        sort(ans[v].begin(), ans[v].end());
        ans[v].erase(unique(ans[v].begin(), ans[v].end()), ans[v].end());
    }
    return ans;
}
};
```

eulerian-path  
**Opis:** Ścieżka eulera  
**Czas:**  $\mathcal{O}(n)$   
**Użycie:** konstruktor - EulerianPath(m, graph)  
krawędzie to pary (to, id) gdzie id dla grafu nieskierowanego jest takie samo dla (u, v) i (v, u)  
konstruktor - EulerianPath(m, graph)  
graf musi być spójny  
get\_path() zwraca ścieżkę eulera  
get\_cycle() zwraca cykl eulera  
jeśli nie ma, obie funkcję zwrócą pusty vector

```
struct EulerianPath {
    vector<vector<pair<int, int>>>> graph;
    vector<bool> used;
    vector<int> in, out;
    vector<int> path, cycle;

    void init(int v = 0) {
        in[v]++;
        while(!graph[v].empty()) {
            auto edge = graph[v].back();
            used[edge.first] = true;
            out[edge.first] = v;
            graph[v].pop_back();
        }
    }
};
```

```
graph[v].pop_back();
int u = edge.first;
int id = edge.second;
if(used[id]) continue;
used[id] = true;
out[v]++;
init(u);
}
path.emplace_back(v);
}

EulerianPath(int m, vector<vector<pair<int, int>>> &graph) :
    graph(graph) {
    int n = size(graph);
    used.resize(m);
    in.resize(n);
    out.resize(n);

    init();
    in[0]--;
    debug(path, in, out);
    cycle = path;
    REP(i, n) if(in[i] != out[i]) cycle.clear();
    REP(i, n) if(in[i] != out[i]) cycle.clear();
    if(path.size() != 0) in[path.back()]++, out[path[0]]++;
    REP(i, n) if(in[i] != out[i]) path.clear();
    reverse(path.begin(), path.end());
}

vector<int> get_path() { return path; }
vector<int> get_cycle() { return cycle; }
};
```

**jump-ptr**  
**Opis:** Jump Pointery  
**Czas:**  $\mathcal{O}(\log n)$   
**Użycie:** konstruktor - JumpPtr(graph)  
można ustawić roota  
jump\_up(v, k) zwraca wierzcholek o k wyższy niż v  
jeśli nie istnieje, zwraca -1  
lca(a, b) zwraca lca wierzchołków

```
struct JumpPtr {
    int LOG = 20;
    vector<vector<int>>> graph, jump;
    vector<int> par, dep;

    void par_dfs(int v) {
        for(int u : graph[v]) {
            if(u != par[v]) {
                par[u] = v;
                dep[u] = dep[v] + 1;
                dfs(u);
            }
        }
    }

    JumpPtr(vector<vector<int>>> &graph, int root = 0) : graph(
        graph) {
        int n = size(graph);
        par.resize(n, -1);
        dep.resize(n);
        par_dfs(root);

        jump.resize(LOG, vector<int>(n));
        jump[0] = par;
        FOR(i, 1, LOG - 1) REP(j, n)
            jump[i][j] = jump[i - 1][j] == -1 ? -1 : jump[i - 1][jump
                [i - 1][j]];
    }
};
```

```
int jump_up(int v, int k) {
    for(int i = LOG - 1; i >= 0; i--)
        if(k & (1 << i))
            v = jump[i][v];
    return v;
}

int lca(int a, int b) {
    if(dep[a] < dep[b]) swap(a, b);
    int delta = dep[a] - dep[b];
    a = jump_up(a, delta);
    if(a == b) return a;

    for(int i = LOG - 1; i >= 0; i--) {
        if(jump[i][a] != jump[i][b]) {
            a = jump[i][a];
            b = jump[i][b];
        }
    }
    return par[a];
};
```

**floyd-warshall**  
**Opis:** Floyd-Warshall  
**Czas:**  $\mathcal{O}(n^3)$   
**Użycie:** FloydWarshall(graph) zwraca macierz odległości  
graph to macierz sąsiedztwa z wagami

```
vector<vector<LL>> FloydWarshall(vector<vector<int>>> graph) {
    int n = size(graph);
    vector<vector<LL>> dist(n, vector<LL>(n, 1e18));
    REP(k, n) REP(i, n) REP(j, n)
        dist[i][j] = min(dist[i][j], dist[i][k] + dist[k][j]);
}
```

**2sat**  
**Opis:** Zwraca poprawne przyporządkowanie zmiennym logicznym dla proble-  
mu 2-SAT, albo mówi, że takie nie istnieje  
**Czas:**  $\mathcal{O}(n + m)$ , gdzie n to ilość zmiennych, i m to ilość przyporządkowań.  
**Użycie:** TwoSat ts(ilość zmiennych);  
oznacza negację  
ts.either(0, ~3); // var 0 is true or var 3 is false  
ts.set\_value(2); // var 2 is true  
ts.at\_most\_one({0,~1,2}); // co najwyżej jedna z var 0, ~1 i 2  
to prawda  
ts.solve(); // rozwiązuje i zwraca true jeśli rozwiązanie  
istnieje  
ts.values[0..N-1] // to wartości rozwiązania

```
struct TwoSat {
    int n;
    vector<vector<int>>> gr;
    vector<int> values;

    TwoSat(int n = 0) : n(n), gr(2*n) {}

    void either(int f, int j) {
        f = max(2*f, -1-2*f);
        j = max(2*j, -1-2*j);
        gr[f].emplace_back(j^1);
        gr[j].emplace_back(f^1);
    }

    void set_value(int x) { either(x, x); }

    int add_var() {
        gr.emplace_back();
        gr.emplace_back();
    }
};
```

```
return n++;
}

void at_most_one(vector<int>& li) {
    if(size(li) <= 1) return;
    int cur = ~li[0];
    FOR(i, 2, size(li) - 1) {
        int next = add_var();
        either(cur, ~li[i]);
        either(cur, next);
        either(~li[i], next);
        cur = ~next;
    }
    either(cur, ~li[1]);
}

vector<int> val, comp, z;
int t = 0;
int dfs(int i) {
    int low = val[i] = ++t, x;
    z.emplace_back(i);
    for(auto &e : gr[i]) if(!comp[e])
        low = min(low, val[e] ? : dfs(e));
    if(low == val[i]) do {
        x = z.back(); z.pop_back();
        comp[x] = low;
        if (values[x >> 1] == -1)
            values[x >> 1] = x & 1;
    } while (x != i);
    return val[i] = low;
}

bool solve() {
    values.assign(n, -1);
    val.assign(2 * n, 0);
    comp = val;
    REP(i, 2 * n) if(!comp[i]) dfs(i);
    REP(i, n) if(comp[2 * i] == comp[2 * i + 1]) return 0;
    return 1;
}
};
```

## Geometria (7)

**point**  
**Opis:** Double może być LL, ale nie int. p.x oraz p.y nie można zmieniać (to  
kopie). Nie tworzyć zmiennych o nazwie "x" lub "y".  
**Użycie:** P p = {5, 6}; abs(p) = length; arg(p) = kąt; polar(len,  
angle); exp(angle)

```
using Double = long double;
using P = complex<Double>;
#define x real()
#define y imag()

constexpr Double eps = 1e-9;
bool equal(Double a, Double b) {
    return abs(a - b) <= eps;
}

int sign(Double a) {
    return equal(a, 0) ? 0 : a > 0 ? 1 : -1;
}

struct Sortx {
    bool operator()(const P &a, const P &b) const {
        return make_pair(a.x, a.y) < make_pair(b.x, b.y);
    }
};
```

```
istream& operator>>(istream &is, P &p) {
    Double a, b;
    is >> a >> b;
    p = P(a, b);
    return is;
}
Double cross(P a, P b) {
    return a.x * b.y - a.y * b.x;
}
Double dot(P a, P b) {
    return a.x * b.x + a.y * b.y;
}
P rotate(P x, P center, Double radians) {
    return (x - center) * exp(P(0, radians)) + center;
}
```

intersect-lines

**Opis:** Przecięcie prostych lub odcinków  
**Użycie:** `v = intersect(a, b, c, d, s)` zwraca przecięcie (s ? odcinków : prostych) ab oraz cd  
if size(v) == 0: nie ma przecięć  
if size(v) == 1: v[0] jest przecięciem  
if size(v) == 2 and s: (v[0], v[1]) to odcinek, w którym są wszystkie inf rozwiązań  
if size(v) == 2 and s == false: v to niezdefiniowane punkty (inf rozwiązań)

```
bool on_segment(P a, P b, P p) {
    return equal(cross(a - p, b - p), 0) and dot(a - p, b - p) <= 0;
}

vector<P> intersect(P a, P b, P c, P d, bool segments) {
    Double acd = cross(c - a, d - c), bcd = cross(c - b, d - c),
        cab = cross(a - c, b - a), dab = cross(a - d, b - a);
    if((segments and sign(acd) * sign(bcd) < 0 and sign(cab) * sign(dab) < 0)
        or (not segments and not equal(bcd, acd)))
        return {(a * bcd - b * acd) / (bcd - acd)};
    if(not segments)
        return {a, a};
    // skip for not segments
    set<P, Sortx> s;
    if(on_segment(c, d, a)) s.emplace(a);
    if(on_segment(c, d, b)) s.emplace(b);
    if(on_segment(a, b, c)) s.emplace(c);
    if(on_segment(a, b, d)) s.emplace(d);
    return {s.begin(), s.end()};
}
```

Tekstówki (8)

hashing

**Opis:** Haszowanie  
**Czas:**  $\mathcal{O}(1)$   
**Użycie:** `get_hash(l, r)` zwraca hasza [l, r] włącznie  
można zmienić modulo i bazę

```
struct Hashing
{
    vector<LL> ha, pw;
    LL mod = 1000696969;
    int base;

    Hashing(string &str) {
        base = rd(30, 50);
        int len = size(str);
```

intersect-lines hashing kmp pref manacher

```
ha.resize(len + 1);
pw.resize(len + 1, 1);
REP(i, len) {
    ha[i + 1] = (ha[i] * base + str[i] - 'a' + 1) % mod;
    pw[i + 1] = (pw[i] * base) % mod;
}

LL get_hash(int l, int r) {
    return ((ha[r + 1] - ha[l] * pw[r - l + 1]) % mod + mod) % mod;
}
};
```

kmp

**Opis:** KMP  
**Czas:**  $\mathcal{O}(n)$   
**Użycie:** `KMP(str)` zwraca tablicę pi

```
vector<int> KMP(string &str) {
    int len = size(str);
    vector<int> ret(len);
    for(int i = 1; i < len; i++)
    {
        int pos = ret[i - 1];
        while(pos && str[i] != str[pos]) pos = ret[pos - 1];
        ret[i] = pos + (str[i] == str[pos]);
    }
    return ret;
}
```

pref

**Opis:** Algorytm pref  
**Czas:**  $\mathcal{O}(n)$   
**Użycie:** `pref(str)` zwraca tablicę prefixo prefixową  
[0, pref[i]) = [i, i + pref[i])

```
vector<int> pref(string &str) {
    int len = size(str);
    vector<int> ret(len);
    ret[0] = len;
    int i = 1, m = 0;
    while(i < len) {
        while(m + i < len && str[m + i] == str[m]) m++;
        ret[i++] = m;
        m = (m != 0 ? m - 1 : 0);
        for(int j = 1; ret[j] < m; m--) ret[i++] = ret[j++];
    }
    return ret;
}
```

manacher

**Opis:** `radius[p][i]` = *rad* = największy promień palindromu parzystości p o środku i.  $L = i - rad + 1, R = i + rad$  to palindrom. Dla [abaababaa] daje [003000020], [0100141000].  
**Czas:**  $\mathcal{O}(n)$

```
array<vector<int>, 2> manacher(vector<int> &in) {
    int n = size(in);
    array<vector<int>, 2> radius = {{vector<int>(n - 1), vector<int>(n)}};
    REP(parity, 2) {
        int z = parity ^ 1, L = 0, R = 0;
        REP(i, n - z) {
            int &rad = radius[parity][i];
            if(i <= R - z)
                rad = min(R - i, radius[parity][L + (R - i - z)]);
            int l = i - rad + z, r = i + rad;
            while(0 <= l - 1 && r + 1 < n && in[l - 1] == in[r + 1])
```

```
                ++rad, ++r, --l;
            if(r > R)
                L = l, R = r;
        }
    }
    return radius;
}
```

Optymalizacje (9)

Randomowe rzeczy (10)