Intégration - Résumé

October 25, 2023

THEVENET Louis

Table des matières

1. Définitions et motivations

On veut étendre l'ensemble des fonctions intégrables

Définition 1.1: Tribu

E un ensemble et $\mathcal{A} \in \mathcal{P}(E)$ une famille de parties de E. $\mathcal{A}$ est une **tribu** si :

1. $E \in \mathcal{A}$
2. $\mathcal{A}$ est stable par passage au complémentaire
3. $\mathcal{A}$ est stable par réunion dénombrable

Définition 1.2:

E un ensemble, $\mathcal{A}$ une tribu sur E. $(E, \mathcal{A})$ est appelé **espace mesurable**

Définition 1.3: Tribu engendrée

Soit $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(E)$, on appelle **tribu engendrée** par $\mathcal{C}$, notée $\sigma(\mathcal{C})$, l'intersection des toutes les tribus contenant $\mathcal{C}$

Si $(E, \mathcal{O})$ est un espace topologique, $\sigma(\mathcal{O}) = \sigma(\mathcal{F}) := \mathcal{B}(E)$, avec $\mathcal{F}$ ensemble des fermés de E

On appelle $\mathcal{B}(E)$ la **tribu de Borel** de E

Définition 1.4:

- Tribu image : $f(\mathcal{A}_1) = \{B \in E_2 \mid f^{-1}(B) \in \mathcal{A}_1\}$
- Tribu réciproque : $f^{-1}(\mathcal{A}_2) = \{f^{-1}(B) \subset E_1 \mid B \in \mathcal{A}_2\}$

Théorème 1.1: Lemme de transport

Soit $f : E_1 \to E_2$ et une classe de parties E_2, notée $\mathcal{C}$. Alors

$$\sigma(f^{-1}(\mathcal{C})) = f^{-1}(\sigma(\mathcal{C}))$$

Définition 1.5: Tribu trace

La tribu trace de $\mathcal{B}(E)$ sur X définie par $\mathrm{tr}(\mathcal{B}) = \{B \cap X \mid B \in \mathcal{B}(E)\}$ est la tribu engendrée par la topologie trace de $\mathcal{O}$ sur X, i.e. par $\sigma(\mathrm{tr}(\mathcal{O}))$

2. Théorie de la mesure

2.1. Applications mesurables

Définition 2.1.1:

f est mesurable de $(E_1, \mathcal{A}_1)$ dans $(E_2, \mathcal{A}_2) \iff f^{-1}(\mathcal{A}_2) \subset \mathcal{A}_1$ i.e.

$$\forall B \in \mathcal{A}_2, f^{-1}(B) = \{x \in E_1 \mid f(x) \in B\} \in \mathcal{A}_1$$

- Si E_1 et E_2 sont des espaces topologiques et $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$ des tribus de Borel correspondantes, alors f est **borélienne**
- Si $(E_2, \mathcal{A}_2) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, on parle de fonctions **mesurables**

Méthode 2.1.1: f est mesurable de $(E_1, \mathcal{A}_1)$ dans $(E_2, \mathcal{A}_2)$ ssi

$$\forall B \in \mathcal{A}_2, f^{-1}(B) = \{x \in E_1 \mid f(x) \in B\} \in \mathcal{A}_1$$

Théorème 2.1.1: Critères de mesurabilité

- $\mathcal{C}$ une classe de parties d'un ensemble F, i.e. $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(F)$, $B := \sigma(\mathcal{C})$

$$f : (E, \mathcal{A}) \to (F, \mathcal{B}) \text{ mesurable} \Leftrightarrow f^{-1}(\mathcal{C}) \subset \mathcal{A}$$

- f_1, f_2 mesurables $\Rightarrow f_1 \circ f_2$ mesurable
- Si $\mathcal{A} = \mathcal{B}(E)$ et $\mathcal{B} = \mathcal{B}(F)$ tribus de Borel, f continue $\Rightarrow f$ mesurable
- $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ cpm $(a < b \in \mathbb{R})$, alors f mesurable de $([a, b], \mathcal{B}([a, b]))$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$

Théorème 2.1.2: Limite d'une suite de fonction

$(f_n)_n$ une suite de fonctions **mesurables** sur $(E, \mathcal{A})$ à valeurs dans $|(\mathbb{R})$

1. $\sup\limits_n f_n$ et $\inf\limits_n f_n$ sont **mesurables**
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} \sup f_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \sup\limits_{k\geq n} f_k$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \inf f_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \sup\limits_{k\geq n} f_k$ sont **mesurables**
3. Si $(f_n)_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{CS}} f$, alors f est **mesurable**

2.2. Mesure et espaces mesurés

Définition 2.2.1: Mesure

Soit $(E, \mathcal{A})$ un espace mesurable. on appelle **mesure** sur $(E, \mathcal{A})$ une applicaiton $\mu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}_+ := \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ telle que

1. $\mu(\emptyset) = 0$
2. $\forall A_1, A_2, ..., A_n \in \mathcal{A}$ 2 à 2 disjoints : $\mu\left(\bigsqcup_n A_n\right) = \sum_n \mu(A_n)$ (σ-additivité)

Méthode 2.2.1: Montrer que μ est une mesure

- existence
- $\mu(\emptyset) = 0$
- σ-additivité

Définition 2.2.2: Espace mesuré

Soit $(E, \mathcal{A})$ un espace mesurable et μ une mesure dessus.
On appelle Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ **espace mesuré**.

Définition 2.2.3: Soit $(E, \mathcal{A})$ un espace mesurable. Une mesure μ est dite :

1. **finie** si $\mu(E) < +\infty$
2. **de probabilité** si $\mu(E) = 1$
3. **σ-finie** si

$$\exists (A_n)_n \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}} \mid E = \bigcup_n A_n$$

et $\mu(A_n) < +\infty \forall n$

Exemple : Exercice 2.3.3. du cours que je laisse pour Nouloun

- $\mu(\emptyset) = 1$ car $\emptyset$ est dénombrable
- Soient $A_1, ..., A_n \in \mathcal{A}$ 2 à 2 disjoints
  On a A_i et A_j dénombrables et disjoints donc $A_i \cup A_j$ dénombrable
  Donc $\mu(A_i \cup A_j) = 0 = 0 + 0 = \mu(A_i) + \mu(A_j)$
  Donc $\mu\left(\bigcup_n (A_n)\right) = \sum_n (\mu(A_n))$

Donc μ est une mesure

Définition 2.2.4: Pour $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré.

$A \in \mathcal{A}$ est négligeable si $\mu(A) = 0$

Théorème 2.2.1: Mesure image

Soient $(E_1, \mathcal{A}_1)$, $(E_2, \mathcal{A}_2)$ deux espaces mesurables. $\mu : \mathcal{A}_1 \to \overline{\mathbb{R}}_+$ une mesure sur $(E_1, \mathcal{A}_1)$ et f mesurable de $(E_1, \mathcal{A}_1)$ dans $(E_2, \mathcal{A}_2)$

On pose

$$\mu : \begin{cases} \mathcal{A}_2 \to \overline{\mathbb{R}}_+ \\ B \mapsto \mu_f(B) := \mu(f^{-1}(B)) \end{cases}$$

μ_f est une mesure sur $(E_2, \mathcal{A}_2)$ appelée **mesure image** de μ par f.

2.3. La mesure de Lebesgue

Théorème 2.3.1: Mesure de Lebesgue (ou mesure de Borel-Lebesgue)

Il existe une **unique** mesure μ_d sur les boréliens de $\mathbb{R}^d$ telle que la mesure de tout pavé $\prod_{i=1}^d]a_i, b_i[$ est :

$$\mu_d\left(\bigcap_{i=1}^d]a_i, b_i[\right) = \prod_{i=1}^d (b_i - a_i)$$

Elle est appelée **mesure de Lebesgue** et notée μ si il n'y a pas d'ambiguïté sur la dimension.

3. Intégral de Lebesgue des fonctions mesurables positives

3.1. Fonctions étagées positives

Définition 3.1.1: Fonctions étagée

f est une fonction étagée si elle s'écrit : $f = \sum_{i \in I} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$
avec $A_i = f^{-1}(\{\alpha_i\}) =: \{f = \alpha_i\}$

Définition 3.1.2: Intégrale d'une fonction étagée

On appelle intégrale d'une fonction étagée f **positive** par rapport à la mesure μ sur $(E, \mathcal{A})$:

$$\int_E f \mathrm{d}\mu := \sum_{\alpha \in f(E)} \alpha \mu(f^{-1}(\{\alpha\})) \in [0, +\infty[$$

Si $\int_E f \mathrm{d}\mu < +\infty$, on dit que $\boldsymbol{f}$ **est intégrable**

3.2. Fonctions mesurables positives

Théorème 3.2.1: Toute fonction de $\mathcal{M}_+$ est limite d'une suite de fonctions de $\mathcal{E}_+$ (étagées positives)

Définition 3.2.1:

On appelle intégrale d'une fonction mesurable **positive** f par rapport à μ sur $(E, \mathcal{A})$:

$$\int_E f \mathrm{d}\mu = \sup \left\{ \int_E \varphi \mathrm{d}\mu \mid \varphi \in \mathcal{E}_+ \text{ et } \varphi \leq f \right\} \in [0, +\infty[$$

Si $\int_E \varphi \mathrm{d}\mu < +\infty$, on dit que $\boldsymbol{f}$ **est intégrable**

Corollaire 3.2.1: $\mu(A) = 0 \Rightarrow \int_E f \mathbb{1}_A \mathrm{d}\mu = \int_A f \mathrm{d}\mu = 0$

Corollaire 3.2.2: Si $f \leq g$ et $\boldsymbol{g}$ **est intégrable**, alors f est **intégrable**

Théorème 3.2.2: Si μ est **finie**, alors $\forall f \in \mathcal{M}_+$, si f est **bornée** alors f est **intégrable**

Corollaire 3.2.3: $\forall f \in \mathcal{M}_+, \int_E f \mathrm{d}\mu < +\infty \Rightarrow \mu(\{f = +\infty\}) = 0$

Théorème 3.2.3: Théorème de convergence monotone

Si $(f_n)_n$ est une suite croissante de $\mathcal{M}_+(\mathcal{A})$, alors $f := \lim_{n\to\infty} f_n \in \mathcal{M}_+(\mathcal{A})$ et

$$\int_E f \mathrm{d}\mu = \int_E \left(\lim_{n\to+\infty} f_n\right) \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n \mathrm{d}\mu$$

Utilité : On veut calculer l'intégrale de f, on sait pas faire, on peut faire l'intégrale des f_n puis passer à la limite.

Corollaire 3.2.4: Pour toute suite $(f_n) \in \mathcal{M}_+$: $\sum_n f_n \in \mathcal{M}_+$ et

$$\int_E \left(\sum_n f_n\right) \mathrm{d}\mu = \sum_n \left(\int_E f_n \mathrm{d}\mu\right)$$

Proposition 3.2.1: $\forall f \in \mathcal{M}_+ : \int_E f \mathrm{d}\mu = 0 \Leftrightarrow \mu(\{f \neq 0\}) = 0$

4. Intégration

Définition 4.1: Intégrale d'une fonction de $\mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$

$$\int_E f \mathrm{d}\mu = \int_E f \mathrm{d}\mu + \int_E f \mathrm{d}\mu$$

Proposition 4.1: $f \in \mathcal{L}^1 \Leftrightarrow \left|\int_E f \mathrm{d}\mu\right| \leq \int_E f \mathrm{d}\mu < +\infty$

5. Théorèmes limites et applications

Théorème 5.1: Convergence monotone

Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $(f_n) \in \mathcal{M}\left(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}\right)$

On suppose que :

- $\exists g \in \mathcal{M}_+$ intégrable sur E telle que $\forall n \in \mathbb{N} : |f_n| \leq g$ μ-pp
- $f_n \xrightarrow{\text{p.p.}} f$, f mesurable

Alors, on a :
1. $\int_E f \mathrm{d}\mu < +\infty$, i.e. $f \in L^1(E, \mathcal{A}, \mu)$
2. $\lim_n \int_E f \mathrm{d}\mu = \lim_n \|f_n - f\|_1 = 0$
3. $\int_E f \mathrm{d}\mu = \lim_n \int_E f \mathrm{d}\mu$

6. Intégrales multiples $\int_{E_1 \times E_2} f \mathrm{d}(\mu_1 \otimes \mu_2)$

6.1. Tribu et mesure produit

Définition 6.1.1: Mesure produit

Pour $(E_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$, $(E_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$, on appelle tribu produit sur $E_1 \times E_2$ notée $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$ la plus petite tribu contenant les ensembles de la forme $A_1 \times A_2$ avec $\forall i \in \{1, 2\} A_i \subset \mathcal{A}_i$

Théorème 6.1.1:

Pour $(E_1, \mathcal{A}_1, \mu_1), (E_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$, il existe une unique mesure m sur $(E_1 \times E_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2)$ vérifiant :

$$\forall (A_1, A_2) \in \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 : m(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1)\mu_2(A_2)$$

Cette mesure est $\boldsymbol{\sigma}$**-finie** et est appelée **mesure produit**

On note $m := \mu_1 \otimes \mu_2$

6.2. Théorèmes de Fubini

Théorème 6.2.1: Fubini-Tonelli

Pour $(E_1, \mathcal{A}_1, \mu_1), (E_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$, où les mesures sont σ-finies. Soit $f : E_1 \times E_2 \to \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ **mesurable positive**. On défninit :

$$\varphi(x) = \int_{E_2} f(x, y) \mathrm{d}\mu_2(y), \psi(y) = \int_{E_1} f(x, y) \mathrm{d}\mu_1(x)$$

Elles sont mesurables et positives et on a :

$$\int_{E_1} \varphi \mathrm{d}\mu_1 = \int_{E_1 \times E_2} f \mathrm{d}(\mu_1 \otimes (\mu_2)) = \int_{E_2} \psi \mathrm{d}\mu_2$$

Théorème 6.2.2: Fubini-Lebesgue

Pour $(E_1, \mathcal{A}_1, \mu_1), (E_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$, où les mesures sont σ-finies. Soit $f : E_1 \times E_2 \to \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ **mesurable positive**. On défninit :

$$\varphi(x) = \int_{E_2} f(x, y) \mathrm{d}\mu_2(y), \psi(y) = \int_{E_1} f(x, y) \mathrm{d}\mu_1(x)$$

Si f est $\mu_1 \otimes \mu_2$ intégrable alors φ et ψ sont resp. μ_1 intégrable et μ_2-intégrable et on a :

$$\int_{E_1} \varphi \mathrm{d}\mu_1 = \int_{E_1 \times E_2} f \mathrm{d}(\mu_1 \otimes (\mu_2)) = \int_{E_2} \psi \mathrm{d}\mu_2$$

6.3. Changement de variables

Théorème 6.3.1:

U ouvert de $\mathbb{R}^d$ et $\varphi : U \to \mathbb{R}^d$

φ réalise un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de U sur $V = \varphi(U)$ ssi

- φ est $\mathcal{C}^1$ sur U
- φ est injective
- $\forall u \in U : \det\left(J_\varphi(u)\right) \neq 0$

Théorème 6.3.2: Changement de variables Pour U, V ouverts de $\mathbb{R}^d$, $\varphi : U \to V$ un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme et $f : V \to \mathbb{R}$ borélienne sur V intégrable. Alors $f \circ \varphi : U \to \mathbb{R}$ est intégrable et

$$\int_V f \mathrm{d}\lambda = \int_U (f \circ \varphi) \left|\det\left(J_\varphi\right)\right| \mathrm{d}\lambda$$

Ne pas oublier la valeur absolue !

7. Liens entre dérivée et intégrale

8. Au partiel (d'après le prof)

- à l'examen, est-ce que l'indicatrice est mesurable pour un $(E, \mathcal{A})$ donné (voir exemple 2.2.1)
- il peut mettre des exemples du cours mais surtout des exos de TD
- il a déjà mis exemple 5.3.1 par exemple