Intégration - Résumé

October 25, 2023

THEVENET Louis

Table des matières

1. Estimation 1
   1.1. Modèle statistique, estimateurs 1
   1.2. Vraisemblance 1
   1.3. Inégalité de Cramér Rao 1
   1.4. Maximum de vraisemblance 2
   1.5. Méthode des moments (construire un estimateur) 2
   1.6. Estimation Bayésienne 2
2. Tests Statistiques 4

1. Estimation

Qualités d'un estimateur

1.1. Modèle statistique, estimateurs

Définition 1.1.1:

On note $\hat{\theta}(X_1, ..., X_n)$, $\hat{\theta}_n$ ou $\hat{\theta}$ l'estimateur lié aux n VA *iid* $X_1, ..., X_n$ elles-mêmes liées aux n observations $x_1, ..., x_n$

- Biais : $b_n(\theta) = E\left(\hat{\theta}_n\right) - \theta \in \mathbb{R}^p$
- Variance : $v_n(\theta) = E\left[\left(\hat{\theta}_n - E\left(\hat{\theta}_n\right)\right)^2\right]$
- Matrice de covariance : $E\left[\left(\hat{\theta}_n - E\left(\hat{\theta}_n\right)\right)\left(\hat{\theta}_n - E\left(\hat{\theta}_n\right)\right)^T\right]$
- Erreur quadratique moyenne (MSE) : $e_n(\theta) = E\left[\left(\hat{\theta}_n - \theta\right)^2\right] = v_n(\theta) + b_n^2(\theta)$
- un estimateur $\hat{\theta}_n$ est convergent si $\lim_{n \to +\infty} b_n(\theta) = \lim_{n \to +\infty} v_n(\theta) = 0$

1.2. Vraisemblance

Définition 1.2.1: Vraisemblance

$$L(x_1, ..., x_n; \theta) = \begin{cases} X_i \text{ VA discrète } P[X_1 = x_1, ..., X_n = x_n; \theta] \\ X_i \text{ VA continue } p(x_1, ..., x_n; \theta) \end{cases}$$

1.3. Inégalité de Cramér Rao

Théorème 1.3.1:

$$\mathrm{Var}\left(\hat{\theta}_n\right) \geq \frac{\left[1 + b_n'(\theta)\right]^2}{\left(-E\left[\frac{\partial^2 \ln(L(X_1,...,X_n;\theta))}{\partial \theta^2}\right)\right]}) = \mathrm{BCR}(\theta)$$

- BCR : Borne de Cramér-Rao
- $L(X_1, ..., X_n; \theta)$: vraisemblance
- **Hypothèses** :
  1. log-vraisemblance deux fois dérivable
  2. suport de la loi indépendant de θ

1.4. Maximum de vraisemblance

Définition 1.4.1: Maximum de vraisemblance

$$\hat{\theta}_{\mathrm{MV}} = \arg\max_{\theta} L(X_1, ..., X_n; \theta)$$

Théorème 1.4.1: Recherche de $\hat{\theta}_{\mathrm{MV}}$

- On cherche θ tel que $\frac{\partial L(X_1,...,X_n;\theta)}{\partial \theta} = 0$ ou $\frac{\partial \ln L(X_1,...,X_n;\theta)}{\partial \theta} = 0$
- Puis éventuellement tableau de variations pour vérifier ou alors on étudie $\frac{\partial^2 \ln L\left(X_1,...,X_n;\hat{\theta}_{\mathrm{MV}}\right)}{\partial \theta^2} < 0$

1.5. Méthode des moments (construire un estimateur)

Définition 1.5.1: Estimateur des moments

$$\hat{\theta}_{\mathrm{Mo}} = h\left(\widehat{m}_1, ..., \widehat{m}_q\right) \text{ avec } \widehat{m}_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k$$

Utile car en général le paramètre à estimer θ est lié **aux premiers moments** de la loi des X_i, i.e. $\theta = h\left(m_1, ..., m_q\right)$ avec $m_k = E\left[X_i^k\right], q \geq p$

1.6. Estimation Bayésienne

Définition 1.6.1: Estimation Bayésienne

On va estimer un paramètre inconnu $\theta \in \mathbb{R}^p$ à l'aide de la vraisemblance des $X_1, ..., X_n$, et une loi à priori $p(\theta)$.
Pour celà on minimise une fonction de coût $c\left(\theta, \hat{\theta}\right)$ qui représente l'erreur entre θ et $\hat{\theta}$.
Deux estimateurs principaux :

- MMSE : moyenne de la loi à posteriori

$$\hat{\theta}_{\text{MSEE}} = E[\theta \mid X_1, ..., X_n]$$

- MAP : estimateur du maximum à posteriori de θ est définie par

$$\hat{\theta}_{\text{MAP}} = \arg\max_{\theta}\, p(\theta \mid X_1, ..., X_n)$$

On appelle

- $p(\theta)$ loi à **priori** de θ
- $p(\theta \mid X_1, ..., X_n)$ loi à **posteriori** de θ

Théorème 1.6.1: MMSE

L'estimateur MMSE minimise l'erreur quadratique moyenne (Mean Square Error, MSE)
On a

$$c\left(\theta, \hat{\theta}\right) = E\left[\left(\theta - \hat{\theta}\right)^T \left(\theta - \hat{\theta}\right)\right]$$

Théorème 1.6.2: MAP

L'estimateur MAP minimise la fonction de coût $E\left[c\left(\theta, \hat{\theta}\right)\right]$ en moyenne (moyenne à posteriori) avec

$$c\left(\theta, \hat{\theta}\right) = \begin{cases} 1 \text{ si } \left\|\theta - \hat{\theta}\right\| > \Delta \\ 0 \text{ si } \left\|\theta - \hat{\theta}\right\| < \Delta \end{cases}$$

Avec Δ arbitrairement petit

Exemple : Estimation Bayésienne

Exemple :
- Vraisemblance : $X_i \sim \mathcal{N}(\theta, \sigma^2)$
- Loi à priori : $\theta \sim \mathcal{N}(\mu, \nu^2)$

Solution
- Loi à posteriori : $\theta \mid X_1, ..., X_n \sim \mathcal{N}\left(m_p, \sigma_p^2\right)$
- Estimateurs : $\hat{\theta}_{\text{MAP}} = \hat{\theta}_{\text{MMSE}} = m_p = \overline{X}\left(\frac{n\nu^2}{n\mu^2+\sigma^2}\right) + \mu\left(\frac{\sigma^2}{\sigma^2+n\nu^2}\right)$

2. Tests Statistiques

Définition 2.1:
- Risque de première espèce (fausse alarme) : $\alpha = \text{PFA} = P[\text{Rejeter } H_0 \mid H_0 \text{ vraie}]$
- Risque de seconde espèce (non détection) : $\beta = \text{PND} = P[\text{Rejeter } H_1 \mid H_1 \text{ vraie}]$
- Puissance du test (proba de détection) : $\pi = 1 - \beta$

Pour faire un test, on a H_0, H_1 etc bien posées

Statistique du test ? $T(x_1, ..., x_n)$

Règle du test : $\equiv$ zone critique

ex1 : si $T(x_1, ..., x_n)\begin{cases} > S_\alpha : \text{rejet } H_0 \\ < S_\alpha : \text{accepte } H_0 \end{cases}$