EDP - Résumé

October 18, 2023

THEVENET Louis

1. Définitions

1.1. Conditions aux limites classiques

- Dirichlet : la valeur de $u(x)$ est donnée $\forall x \in \Gamma$
- Neumann : la valeur de $\frac{\partial u}{\partial \nu}(x)$ est donnée $\forall x \in \Gamma$, avec ν normale sortante à Γ en x
- Cauchy : les valeurs de $u(x)$ et $\frac{\partial u}{\partial \nu}(x)$ sont données $\forall x \in \Gamma$
- Robin : la valeur de $\alpha(x)u(x) + \beta(x)\frac{\partial u}{\partial \nu}(x)$ est donnée $\forall x \in \Gamma$, avec α et β des fonctions définies sur Γ

1.2. Classification des EDP d'ordre 2

Soit une EDP linéaire d'ordre 2 sur un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ et d'inconnue $u : \Omega \to \mathbb{R}$

Elle peut s'écrire :

$$\forall z \in \Omega \sum_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{d} a_{j,i}(z) \frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial z_i}(z) + \sum_{i=1}^{d} f_{i(z)} \frac{\partial u}{\partial z_i}(z) + g(z)u(z) = h(z)$$

avec par convention $\forall z \in \Omega a_{j,i}(z) = a_{i,j}(z) \in \mathbb{R}$, $\left(f_{i(z)}\right)_{i=1:d} \in \mathbb{R}^d$ et $(g(z), h(z)) \in \mathbb{R}^2$, on note $A(z) \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ la matrice définie par $[A(z)]_{i,j} = a_{i,j}(z)$

Ainsi, l'EDP est dite :

- Elliptique en $z \in \Omega$ si $A(z)$ n'admet que des vp non nulles toutes de même signe
- Hyperbolique en $z \in \Omega$ si $A(z)$ admet $d - 1$ vp non nulles de même signe, et une vp non nulle de signe opposé
- Parabolique en $z \in \Omega$ si $A(z)$ admet $d - 1$ vp non nulles de même signe, et une vp nulle

2. Approximation de la dérivée d'ordre 1

2.1. Approximation décentrée

Pour $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \mathcal{X}^2$ sur le segment $[x - h_0, x + h_0]$, avec $h_0 > 0$. On a :

$$\exists C \geq 0, \forall h \in]0, h_0] \mid \left| \frac{u(x+h) - u(x)}{h} - u'(x) \right| \leq Ch$$

L'approximation est dite consistante d'ordre 1.

2.2. Approximation centrée

Pour $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \mathcal{X}^3$ sur le segment $[x - h_0, x + h_0]$, avec $h_0 > 0$. On a :

$$\exists C \geq 0, \forall h \in]0, h_0] \mid \left| \frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h} - u'(x) \right| \leq Ch^2$$

L'approximation est dite consistante d'ordre 2.

2.3. Définition

Une approximation de $u^{k(x)}$ avec $k \in \mathbb{N}^*$ est dite consistante à l'ordre p, s'il existe $C \geq 0$ indépendante de h telle que :

$$\left|\text{Approx}(u, x, h) - u^{(k)}(x)\right| \leq Ch^p$$

3. jsp quel nom mettre

3.1. Expression générale d'un schéma

En notant $U_h^k \in \mathbb{R}^N$ une approximation de la solution au temps t_k en les nœuds du maillage spatial, on appellera par la suite schéma $(\mathcal{S}_{ML})$ tout schéma à $m + l$ niveaux de la forme

$$\sum_{p=-m}^{l} B_p u_h^{n+p} = C^n$$

avec $n \geq m, l \geq 0, m \geq 0, I + m \geq 1, B_p \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R}) \forall p \in [\![-m : l]\!]), B_l \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ inversible, et $C^n \in \mathbb{R}^N$

3.2. Erreur de consistance

Pour un schéma $(\mathcal{S}_{ML})$, on appelle erreur de consistance au temps t_n :

$$\xi_{h(u)}^n = \sum_{p=-m}^{l} B_p \Pi_h^{n+p}(u) - C^n$$

avec u la solution (inconnue) de l'EDP et $\Pi_h^{n+p}(u) = \left[u(x_1, t_{n+p}), ..., u(x_N, t_{n+p})\right]^T \in \mathbb{R}^N$ la solution évaluée au temps t_{n+p} en les noeuds du maillaige spatial.

3.3. Consistance d'un schéma

Le schéma est dit consistant pour la norme $\|.\|$ si

$$\sup_{n\Delta t \leq T} \left\|\xi_h^{n(u)}\right\| \underset{(\Delta t, h) \to 0}{\longrightarrow} 0$$

Et si on a $C \geq 0$, $(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$ indépendantes de Δt et h telles que :

$$\sup_{n\Delta t \leq T} \left\|\xi_h^{n(u)}\right\| \leq C(\Delta t^p + h^q)$$

Alors le schéma est dit consistant à l'ordre p en temps et q en espace pour la norme $\|.\|$.

3.4. Stabilité