Modélisation et Programmation – Session 1 – 18/01/2021

Bureau d'études – 1h30 – Documents électroniques autorisés

— Télécharger depuis moodle l'archive `source-etudiants.tgz`
— Désarchiver son contenu avec la commande : `tar xzvf source-etudiants.tgz`
— Vous obtenez un répertoire nommé `source-etudiants`
— Renommer ce répertoire sous la forme `source-etudiants_Nom_Prénom` (en remplaçant Nom et Prénom par vos nom et préno). Par exemple, si l'étudiant est Marc Pantel, vous utiliserez la commande : `mv source-etudiants source-etudiants_Pantel_Marc`
— Compiler la bibliothèque avec la commande : `coqc Naturelle.v`
— En fin de séance, vous rendrez sur moodle l'archive contenant le répertoire renommé.

Exercice 1 Soient A, B et C des variables propositionnelles, vous devrez montrer avec l'outil Coq (fichier `coq_exercice_1.v`) **en utilisant la déduction naturelle constructive (c'est-à-dire sans les règles du tiers-exclu (TE dans le résumé de cours) et de l'absurde classique (A dans le résumé de cours))** que la formule suivante est un théorème :

$$((A \to C) \lor (B \to C)) \to ((A \land B) \to C)$$

1. Avec les commandes de la bibliothèque `Naturelle` utilisée en travaux pratiques
2. Avec les commandes classiques (sans la bibliothèque `Naturelle` utilisée en travaux pratiques)

Exercice 2 Soient A et B des variables propositionnelles, vous devrez montrer, avec l'outil Coq (fichier `coq_exercice_2.v`) **en utilisant la déduction naturelle classique (y compris les règles du tiers-exclu ou de l'absurde classique)**, que la formule suivante est un théorème :

$$(A \to B) \to ((\neg A) \lor B)$$

1. Avec les commandes de la bibliothèque `Naturelle` utilisée en travaux pratiques
2. Avec les commandes classiques (sans la bibliothèque `Naturelle` utilisée en travaux pratiques)

Exercice 3 Nous considérons la spécification des entiers et des listes munie des équations étudiées en cours et travaux dirigés :

(a) $\forall n \in \texttt{entier}.\ \text{somme}(\texttt{Zero}, n) = n$
(b) $\forall n, m \in \texttt{entier}.\ \text{somme}(\texttt{Succ}(n), m) = \texttt{Succ}(\text{somme}(n, m))$
(c) $\forall l \in \texttt{liste}(A).\ \texttt{append}(\texttt{Nil},l) = l$
(d) $\forall t \in A.\forall l, q \in \texttt{liste}(A).\ \texttt{append}(\texttt{Cons}(t, q),l) = \texttt{Cons}(t, \texttt{append}(q,l))$

Nous complétons cette spécification par la fonction taille(l) qui calcule la taille de la liste l (nombre d'éléments contenus dans la liste).
Le comportement de cette fonction peut être modélisé par les équations suivantes :

(e) $\forall l \in \texttt{liste}(A).\ \text{taille}(\texttt{Nil}) = \texttt{Zero}$
(f) $\forall t \in A, \forall q \in \texttt{liste}(A),\ \text{taille}(\texttt{Cons}(t, q)) = \texttt{Succ}(\text{taille}(q)))$

Spécifier cette fonction `taille_spec` dans l'outil Coq (fichier `coq_exercice_3.v`) sous la forme d'axiomes puis montrer que cette fonction satisfait les propriétés suivantes :
— `taille_append` : $\forall l_1, l_2 \in \texttt{liste}(A).\ \text{taille}(\text{append}(l_1,l_2)) = \text{somme}(\text{taille}(l_1), \text{taille}(l_2))$
Programmer une implantation de la fonction `taille_impl` puis prouver que cette implantation est correcte vis-à-vis de la spécification `taille_spec` (théorème `taille_correctness`).

Exercice 4 Prouver la correction totale du triplet de Hoare suivant (fichier `why3_exercice_4.mlw`) pour un programme calculant le carré d'un entier positif N. Nous vous suggérons d'exploiter $\texttt{R}+\texttt{X}^2 = \texttt{N}^2$ comme invariant et X comme variant. Vous compléterez l'invariant si nécessaire pour construire la preuve. Vous indiquerez dans le fichier les commandes Why3 utilisées pour construire la preuve.
$\{\texttt{N} \geq 0\}$

```
X := N;
R := 0;
while (X <> 0) do
        R := R + 2 * X - 1;
        X := X - 1;
od
```

$\{\texttt{R} = \texttt{N}^2\}$