

# EDP - Résumé

October 18, 2023

THEVENET Louis

## Table des matières

1. Définitions .....	1
1.1. Conditions aux limites classiques .....	1
1.2. Classification des EDP d'ordre 2 .....	1
2. Approximation de la dérivée d'ordre 1 .....	1
2.1. Approximation décentrée .....	1
2.2. Approximation centrée .....	2
2.3. Définition .....	2
3. jsp quel nom mettre .....	2
3.1. Expression générale d'un schéma .....	2
3.2. Erreur de consistance .....	2
3.3. Consistance d'un schéma .....	2
3.4. Stabilité .....	2

## 1. Définitions

### 1.1. Conditions aux limites classiques

- Dirichlet : la valeur de  $u(x)$  est donnée  $\forall x \in \Gamma$
- Neumann : la valeur de  $\frac{\partial u}{\partial \nu}(x)$  est donnée  $\forall x \in \Gamma$ , avec  $\nu$  normale sortante à  $\Gamma$  en  $x$
- Cauchy : les valeurs de  $u(x)$  et  $\frac{\partial u}{\partial \nu}(x)$  sont données  $\forall x \in \Gamma$
- Robin : la valeur de  $\alpha(x)u(x) + \beta(x)\frac{\partial u}{\partial \nu}(x)$  est donnée  $\forall x \in \Gamma$ , avec  $\alpha$  et  $\beta$  des fonctions définies sur  $\Gamma$

### 1.2. Classification des EDP d'ordre 2

Soit une EDP linéaire d'ordre 2 sur un domaine  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  et d'inconnue  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

Elle peut s'écrire :

$$\forall z \in \Omega \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d a_{j,i}(z) \frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial z_i}(z) + \sum_{i=1}^d f_{i(z)} \frac{\partial u}{\partial z_i}(z) + g(z)u(z) = h(z)$$

avec par convention  $\forall z \in \Omega a_{j,i}(z) = a_{i,j}(z) \in \mathbb{R}$ ,  $(f_{i(z)})_{i=1:d} \in \mathbb{R}^d$  et  $(g(z), h(z)) \in \mathbb{R}^2$ , on note  $A(z) \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$  la matrice définie par  $[A(z)]_{i,j} = a_{i,j}(z)$

Ainsi, l'EDP est dite :

- Elliptique en  $z \in \Omega$  si  $A(z)$  n'admet que des vp non nulles toutes de même signe
- Hyperbolique en  $z \in \Omega$  si  $A(z)$  admet  $d-1$  vp non nulles de même signe, et une vp non nulle de signe opposé
- Parabolique en  $z \in \Omega$  si  $A(z)$  admet  $d-1$  vp non nulles de même signe, et une vp nulle

## 2. Approximation de la dérivée d'ordre 1

### 2.1. Approximation décentrée

Pour  $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \mathcal{X}^2$  sur le segment  $[x-h_0, x+h_0]$ , avec  $h_0 > 0$ . On a :

$$\exists C \geq 0, \forall h \in ]0, h_0] \mid \left| \frac{u(x+h) - u(x)}{h} - u'(x) \right| \leq Ch$$

L'approximation est dite consistante d'ordre 1.

## 2.2. Approximation centrée

Pour  $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \mathcal{X}^3$  sur le segment  $[x - h_0, x + h_0]$ , avec  $h_0 > 0$ . On a :

$$\exists C \geq 0, \forall h \in ]0, h_0] \mid \left| \frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h} - u'(x) \right| \leq Ch^2$$

L'approximation est dite consistante d'ordre 2.

## 2.3. Définition

Une approximation de  $u^{(k)(x)}$  avec  $k \in \mathbb{N}^*$  est dite consistante à l'ordre  $p$ , s'il existe  $C \geq 0$  indépendante de  $h$  telle que :

$$|\text{Approx}(u, x, h) - u^{(k)}(x)| \leq Ch^p$$

# 3. jsp quel nom mettre

## 3.1. Expression générale d'un schéma

En notant  $U_h^k \in \mathbb{R}^N$  une approximation de la solution au temps  $t_k$  en les nœuds du maillage spatial, on appellera par la suite schéma  $(\mathcal{S}_{ML})$  tout schéma à  $m + l$  niveaux de la forme

$$\sum_{p=-m}^l B_p u_h^{n+p} = C^n$$

avec  $n \geq m, l \geq 0, m \geq 0, I + m \geq 1, B_p \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R}) \forall p \in \llbracket -m : l \rrbracket, B_l \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$  inversible, et  $C^n \in \mathbb{R}^N$

## 3.2. Erreur de consistance

Pour un schéma  $(\mathcal{S}_{ML})$ , on appelle erreur de consistance au temps  $t_n$  :

$$\xi_{h(u)}^n = \sum_{p=-m}^l B_p \Pi_h^{n+p}(u) - C^n$$

avec  $u$  la solution (inconnue) de l'EDP et  $\Pi_h^{n+p}(u) = [u(x_1, t_{n+p}), \dots, u(x_N, t_{n+p})]^T \in \mathbb{R}^N$  la solution évaluée au temps  $t_{n+p}$  en les nœuds du maillage spatial.

## 3.3. Consistance d'un schéma

Le schéma est dit consistant pour la norme  $\|\cdot\|$  si

$$\sup_{n\Delta t \leq T} \left\| \xi_h^{n(u)} \right\| \xrightarrow{(\Delta t, h) \rightarrow 0} 0$$

Et si on a  $C \geq 0, (p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$  indépendantes de  $\Delta t$  et  $h$  telles que :

$$\sup_{n\Delta t \leq T} \left\| \xi_h^{n(u)} \right\| \leq C(\Delta t^p + h^q)$$

Alors le schéma est dit consistant à l'ordre  $p$  en temps et  $q$  en espace pour la norme  $\|\cdot\|$ .

## 3.4. Stabilité