Probabilités - Résumé

October 18, 2023

THEVENET Louis

1. Notions

1.1. Fonction de répartition

$F : \begin{cases} \mathbb{R} \to [0,1] \\ x \mapsto P[X < x] \end{cases}$

1.1.1. VAC

$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(u) du$

1.1.2. Propritété

p(x)=F'(x)

1.2. Fonction caractéristique

$\Phi_X(t) = E[\exp(itX)]$

1.3. Lois conditionnelles

1.3.1. VAD

$P[X = X_i \mid Y = y_j] = \frac{p_{ij}}{p_{.j}}$

1.3.2. VAC

Densité de $X|(Y = y)$: $p(x|y) = \frac{p(x,y)}{p(.,y)}$

Où $p_{i.}$ et $p(x, .)$ sont les lois marginales, i.e. $p(x, .) = \int_{\mathbb{R}} p(x, y) dy$

1.4. Indépendance

Pour X et Y **indépendantes** et α et β **continues**, on a $\alpha(X)$ et $\beta(Y)$ **indépendantes**. (réciproque vraie si bijectivité)

1.5. Corrélation

$\mathrm{cov}(X, Y) = E[XY] - E[X]E[Y]$, $\quad E[VV^T] = \begin{pmatrix} \mathrm{var}(X) & \mathrm{cov}(X,Y) \\ \text{cox(X,Y)} & \mathrm{var}(Y) \end{pmatrix}$, $\quad r(X, Y) = \frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$

1.6. Espérance conditionnelle

$E[\alpha(X, Y)] = E_X[E_Y[\alpha(X, Y) \mid X]]$

2. Vecteurs Gaussiens

2.1. Transformation affine

Pour $X \sim \mathcal{N}_n(m, \Sigma)$ un vecteur Gaussien et $Y = AX + b$, $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$,
Si $\mathrm{rg}(A) = p$, on a :

$$Y \text{ est un vecteur Gaussien et } Y \sim \mathcal{N}_p(Am + b, A\Sigma A^T)$$

2.2. Lois marginales

$X = \begin{pmatrix} X' & X'' \end{pmatrix} \sim \mathcal{N}_n(m, \Sigma)$, $m = \begin{pmatrix} m' & m'' \end{pmatrix}$, $\Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma' & M \\ M^T & \Sigma'' \end{pmatrix}$, alors on a :

$$X' \sim \mathcal{N}_p(m', \Sigma')$$

où $\Sigma' \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$

3. Convergence

En loi : $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} X \Leftrightarrow F_n[X_n < x] \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{CS}} F(x) = P[X < x]$

En probas : $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{P}} X \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, P[|X_n - X| > \varepsilon] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

En moyenne quadratique : $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{MQ}} X \Leftrightarrow E\left[(X_n - X)^2\right] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

Presque sûrement : $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{PS}} X \Leftrightarrow X_n(\omega) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} X(\omega), \forall \omega \in A \mid P(A) = 1$

4. Théorèmes

4.1. Loi faible des grands nombres

Si $X_1, ..., X_n$ sont des VA *iid* de moyennes $E[X_k] = m < \infty$, alors

$$\overline{X_n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{P}} m$$

4.2. Loi forte des grands nombres

Si $X_1, ..., X_n$ sont des VA *iid* de moyennes $E[X_k] = m < \infty$, de variances $\sigma^2 < \infty$ alors

$$\overline{X_n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{MQ}} m$$

4.3. Théorème central limite

Si $X_1, ..., X_n$ sont des VA *iid* de moyennes $E[X_k] = m < \infty$, de variances $\sigma^2 < \infty$ alors

$$Y_n = \frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - nm}{\sqrt{n\sigma^2}} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} X \sim \mathcal{N}(0,1)$$

5. Méthodes

5.1. Changements de variables

5.1.1. VAD

$P(y = y_j) = \sum_{i | y_j = g(x_i)} P[X = x_i]$

5.1.2. VAC

Si g est **bijective** et **différentiable**, alors $Y = g(X)$ est une VAC et

$$p_{Y(y)} = p_{X(g^{-1}(y))} \left| \frac{dx}{dy} \right|$$

Si $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, on a : $p_{U,V}(u,v) = P_{X,Y}(g^{-1}(u,v)) |\det(J)|$

6. Astuces

- Changement de variable type $Z = \alpha(X,Y)$, on peut poser $T = Y$ par exemple pour utiliser les théorèmes sur les changements de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$