Intégration - Résumé

October 25, 2023

THEVENET Louis

Table des matières

1. Définitions et motivations

On veut étendre l'ensemble des fonctions intégrables

Définition 1.1: Tribu

E un ensemble et $\mathcal{A} \in \mathcal{P}(E)$ une famille de parties de E. $\mathcal{A}$ est une **tribu** si :

1. $E \in \mathcal{A}$
2. $\mathcal{A}$ est stable par passage au complémentaire
3. $\mathcal{A}$ est stable par réunion dénombrable

Définition 1.2:

E un ensemble, $\mathcal{A}$ une tribu sur E. $(E, \mathcal{A})$ est appelé **espace mesurable**

Définition 1.3: Tribu engendrée

Soit $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(E)$, on appelle **tribu engendrée** par $\mathcal{C}$, notée $\sigma(\mathcal{C})$, l'intersection des toutes les tribus contenant $\mathcal{C}$

Si $(E, \mathcal{O})$ est un espace topologique, $\sigma(\mathcal{O}) = \sigma(\mathcal{F}) := \mathcal{B}(E)$, avec $\mathcal{F}$ ensemble des fermés de E

On appelle $\mathcal{B}(E)$ la **tribu de Borel** de E

Théorème 1.1: Lemme de transport

Soit $f : E_1 \to E_2$ et une classe de parties E_2, notée $\mathcal{C}$. Alors

$$\sigma(f^{-1}(\mathcal{C})) = f^{-1}(\sigma(\mathcal{C}))$$

Définition 1.4: Tribu trace

La tribu trace de $\mathcal{B}(E)$ sur X définie par $\operatorname{tr}(\mathcal{B}) = \{B \cap X \mid B \in \mathcal{B}(E)\}$ est la tribu engendrée par la topologie trace de $\mathcal{O}$ sur X, i.e. par $\sigma(\operatorname{tr}(\mathcal{O}))$

2. Théorie de la mesure

2.1. Applications mesurables

Définition 2.1.1:

f est mesurable de $(E_1, \mathcal{A}_1)$ dans $(E_2, \mathcal{A}_2)$ si $f^{-1}(\mathcal{A}_2) \subset \mathcal{A}_1$ i.e.

$$\forall B \in \mathcal{A}_2, f^{-1}(B) = \{x \in E_1 \mid f(x) \in B\} \in \mathcal{A}_1$$

- Si E_1 et E_2 sont des espaces topologiques et $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$ des tribus de Borel correspondantes, alors f est **borélienne**
- Si $(E_2, \mathcal{A}_2) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, on parle de fonctions **mesurables**

Théorème 2.1.1: Critères de mesurabilité

- $\mathcal{C}$ une classe de parties d'un ensemble F, i.e. $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(F)$, $B := \sigma(\mathcal{C})$

$$f : (E, \mathcal{A}) \to (F, \mathcal{B}) \text{ mesurable} \Leftrightarrow f^{-1}(\mathcal{C}) \subset \mathcal{A}$$

- f_1, f_2 mesurables $\Rightarrow f_1 \circ f_2$ mesurable
- Si $\mathcal{A} = \mathcal{B}(E)$ et $\mathcal{B} = \mathcal{B}(F)$ tribus de Borel, f continue $\Rightarrow f$ mesurable
- $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ cpm $(a < b \in \mathbb{R})$, alors f mesurable de $([a, b], \mathcal{B}([a, b]))$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$

Théorème 2.1.2: Limite d'une suite de fonction

$(f_n)_n$ une suite de fonctions **mesurables** sur $(E, \mathcal{A})$ à valeurs dans $|(\mathbb{R})$

1. $\sup_n f_n$ et $\inf_n f_n$ sont **mesurables**
2. $\lim_{n \to +\infty} \sup f_n = \lim_{n \to +\infty} \sup_{k \geq n} f_k$ et $\lim_{n \to +\infty} \inf f_n = \lim_{n \to +\infty} \sup_{k \geq n} f_k$ sont **mesurables**
3. Si $(f_n)_n \xrightarrow[n \to \infty]{\mathcal{CS}} f$, alors f est **mesurable**

2.2. Mesure et espaces mesurés

Définition 2.2.1: Mesure

Soit $(E, \mathcal{A})$ un espace mesurable. on appelle **mesure** sur $(E, \mathcal{A})$ une applicaiton $\mu : \mathcal{A} \to |(\mathbb{R})_+ := \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ telle que

1. $\mu(\emptyset) = 0$
2. $\forall A_1, A_2, ..., A_n \in \mathcal{A}$ 2 à 2 disjoints : $\mu\left(\bigcup_n A_n\right) = \sum_n \mu(A_n)$ (σ-additivité)

Définition 2.2.2: Espace mesuré

Soit $(E, \mathcal{A})$ un espace mesurable et μ une mesure dessus.
On appelle Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ **espace mesuré**.

Définition 2.2.3: Soit $(E, \mathcal{A})$ un espace mesurable. Une mesure μ est dite :

1. **finie** si $\mu(E) < +\infty$
2. **de probabilité** si $\mu(E) = 1$
3. **σ-finie** si

$$\exists (A_n)_n \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}} \mid E = \bigcup_n A_n$$

   et $\mu(A_n) < +\infty \forall n$

Définition 2.2.4: Pour $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré.

$A \in \mathcal{A}$ est négligeable si $\mu(A) = 0$

2.3. La mesure de Lebesgue

Théorème 2.3.1 : Mesure de Lebesgue (ou mesure de Borel-Lebesgue)

Il existe une **unique** mesure **mu_d** sur les boréliens de $\mathbb{R}^d$ telle que la mesure de tout pavé $\prod_{i=1}^{d}]a_i, b_{i[}$ est :

$$\mu_d\left(\bigcap_{i=1}^{d}]a_i, b_i[\right) = \prod_{i=1}^{d}(b_i - a_i)$$

Elle est appelée **mesure de Lebesgue** et notée μ si il n'y a pas d'ambiguïté sur la dimension.

3. Au partiel (d'après le prof)

- à l'examen, est-ce que l'indicatrice est mesurable pour un $(E, \mathcal{A})$ donné (voir exemple 2.2.1)