TD - Intégration

November 22, 2023

THEVENET Louis

Table des matières

1. TD2

1.1. Points importants

Proposition 1.1.1:

$f : (E, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}^+, \mathcal{B}(\mathbb{R}^+))$ étagée $\Longleftrightarrow \exists (A_n)_{i=1}^N \subset E \mid (a_i)_{i=0}^N \in \mathbb{R}^+$ tels que $f = \displaystyle\sum_{i=1}^N a_i \mathbb{1}_{A_i}$

Et on a $\int_E f \mathrm{d}\mu = \sum_{i=1}^N a_i \mu(A_i)$

Théorème 1.1.1: Bépo-Lévy

(f_n) suite de fonctions mesurables positives (f_n) croissantes telles que $f_n \underset{n\to\infty}{\to} f$

Alors $\int_E f \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} f \mathrm{d}\mu$

1.2. Exercices

1.2.1. Exercice 1

Soit f mesurable de $(E, \mathcal{A})$ dans $\left(\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}\left(\overline{\mathbb{R}}\right)\right)$ et positive

Montrons que

$$\forall a > 0 : \mu(\{f > a\}) \leq \frac{1}{a} \int_E f \mathrm{d}\mu$$

On a

$$\forall x, f(x) \geq a \mathbb{1}_{\{f > a\}}$$

Donc

$$\begin{aligned}\int_E f \mathrm{d}\mu &\geq \int_E a \mathbb{1}_{\{f>a\}} \mathrm{d}\mu \\ &\geq a \int_E \mathbb{1}_{\{f>a\}} \mathrm{d}\mu\end{aligned}$$

Donc

$$\frac{1}{a} \int_E f \mathrm{d}\mu \geq \mu(\{f > a\})$$

1.2.2. Exercice 2

1)

- $\mu(\emptyset) = \int_E f \mathbb{1}_\emptyset \mathrm{d}\mu = \int_E 0 \mathrm{d}\mu = 0$
- Soient $A_1, ..., A_N \subset E$ disjoints

$$\mu_f\left(\bigsqcup_{i=1}^N A_i\right) = \int_E f \mathbb{1}_{\bigsqcup_{i=1}^N A_i} \mathrm{d}\mu = \int_E f \sum_{i=1}^N \mathbb{1}_{A_i} \mathrm{d}\mu \underset{\text{th.3.2.15}}{=} \sum_{i=1}^N \mu_f(A_i)$$

μ_f est bien une mesure sur $(E, \mathcal{A})$

2)

Ici on a $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$

$$\int_A f \mathrm{d}\mu = \int_{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_i} f \mathrm{d}\mu = \int_E f \mathbb{1}_{\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i} \mathrm{d}\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_E f \mathbb{1}_{A_n} \mathrm{d}\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{A_n} f \mathrm{d}\mu$$

1.2.3. Exercice 3

Soit g étagée positive.

$\exists (A_i)$ partition de $\mathbb{R}, (a_i) \in \mathbb{R}^N \mid g = \sum_{i=0}^N a_i \mathbb{1}_{\Delta_i}$

$$\begin{aligned}\int_\mathbb{R} g \mathrm{d}\delta_0 &= \int_\mathbb{R} \sum_{i=0}^N a_i \mathbb{1}_{A_i} \mathrm{d}\delta_0 \\ &= \sum_{i=0}^N a_i \delta_0(A_i)\end{aligned}$$

On a

$$\delta_0(\Delta_i) = \begin{cases} 1 \text{ si } 0 \in A_i = \mathbb{1}_{A_i}(0) \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Et

$$\int_\mathbb{R} g \mathrm{d}\delta_0 = \sum_{i=0}^N a_i \mathbb{1}_{A_i}(0) = g(0)$$

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fontions étagées positives telles que $f_n \underset{\text{CVS}}{\rightarrow} f$ croissante On a ainsi :

$$\int_E f \mathrm{d}\delta_0 \underset{\text{BL}}{=} \lim_{n\to+\infty} \int_E f_n \mathrm{d}\delta_0 = \lim_{n\to\infty} f_n(0) \underset{\text{CVS}}{=} f(0)$$

1.2.4. Exercice 4

- $\forall (k,l) \in \mathbb{N}^2 A_k \cap A_l = \emptyset$

$$\begin{aligned}\int_A f \mathrm{d}\mu &= \int_{\bigcup A_i} f \mathrm{d}\mu \\ &= \int_E f \mathbb{1}_A \mathrm{d}\mu \\ &= \int f \mathbb{1}_{\bigcup A_i} \mathrm{d}\mu\end{aligned}$$

Soit $f_n = f \mathbb{1}_{\bigcup A_i} \underset{\mathrm{CVS}}{\to} f \mathbb{1}_A$

$$\begin{aligned}\int f \mathrm{d}\mu &\underset{\mathrm{BL}}{=} \lim_{(n\to\infty)} \int_E f_n \mathrm{d}\mu \\ &= \int_E f\left(\mathbb{1}_{\bigcup} A_i\right) \mathrm{d}\mu \\ &= \int_{\bigcup A_i} f \mathrm{d}\mu\end{aligned}$$

Chasles : $\int_E f_n \mathrm{d}\mu = \sum_{i=0}^n \int_{A_i} f \mathrm{d}\mu$

$$\begin{aligned}\int_A f \mathrm{d}\mu &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^n \int_{A_i} f \mathrm{d}\mu \\ &= \sum_{i=0}^n \int_{A_n} f \mathrm{d}\mu\end{aligned}$$

1.2.5. Exercice 5

1)

$\forall x, f(x) = 1 < +\infty$

Avec $(\mu(f^{-1}(\{+\infty\})) = 0)$

$$\int_{\mathbb{R}} f \mathrm{d}\mu = 1 \times \mu(\mathbb{R}) = +\infty$$

Donc g non intégrable