

Intégration - Résumé

October 25, 2023

THEVENET Louis

Table des matières

1. Estimation	1
1.1. Modèle statistique, estimateurs	1
1.2. Inégalité de Cramér Rao	1
1.3. Maximum de vraisemblance	2
1.4. Méthode des moments	2
1.5. Estimation de Bayésienne	2
1.6. Intervalles de confiance	2
2. Tests Statistiques	2

1. Estimation

1.1. Modèle statistique, estimateurs

Définition 1.1.1:

On note $\hat{\theta}(X_1, \dots, X_n)$, $\hat{\theta}_n$ ou $\hat{\theta}$ l'estimateur lié aux n VA *iid* X_1, \dots, X_n elles-mêmes liées aux n observations x_1, \dots, x_n

- Biais : $b_n(\theta) = E(\hat{\theta}_n) - \theta \in \mathbb{R}^p$
- Variance : $v_n(\theta) = E\left[\left(\hat{\theta}_n - E(\hat{\theta}_n)\right)^2\right]$
- Matrice de covariance : $E\left[\left(\hat{\theta}_n - E(\hat{\theta}_n)\right)\left(\hat{\theta}_n - E(\hat{\theta}_n)\right)^T\right]$
- Erreur quadratique moyenne (MSE) : $e_n(\theta) = E\left[\left(\hat{\theta}_n - \theta\right)^2\right] = v_n(\theta) + b_n^2(\theta)$
- un estimateur $\hat{\theta}_n$ est convergent si $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n(\theta) = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n(\theta) = 0$

1.2. Inégalité de Cramér Rao

Théorème 1.2.1:

$$\text{Var}(\hat{\theta}_n) \geq \frac{[1 + b'_n(\theta)]^2}{(-E\left[\frac{\partial^2 \ln(L(X_1, \dots, X_n; \theta))}{\partial \theta^2}\right])} = \text{BCR}(\theta)$$

BCR : Borne de Cramér Rao de θ

Hypothèse : log-vraisemblance deux fois dérivable et support de la loi indépendant de θ .

Définition 1.2.1: Estimateur sans biais si

$$\text{Var}(\hat{\theta}_n) = \text{BCR}(\theta)$$

1.3. Maximum de vraisemblance

Définition 1.3.1: Maximum de vraisemblance

$$\hat{\theta}_{\text{MV}} = \arg \max_{\theta} L(X_1, \dots, X_n; \theta)$$

Théorème 1.3.1: Recherche de $\hat{\theta}_{\text{MV}}$

- Cherche les points fixes de la vraisemblances ou de la log-vraisemblances
- Tableau de variations pour vérifier ou alors étudier $\frac{\partial^2 \ln L(X_1, \dots, X_n; \hat{\theta}_{\text{MV}})}{\partial \theta^2} < 0$

Définition 1.3.2: Régularité

1.4. Méthode des moments

1.5. Estimation de Bayésienne

1.6. Intervalles de confiance

2. Tests Statistiques