TD - Intégration

November 22, 2023

THEVENET Louis

Table des matières

1. TD2 1
1.1. Points importants 1
1.2. Exercices 2
1.2.1. Exercice 1 2
1.2.2. Exercice 2 2
1.2.3. Exercice 3 2
1.2.4. Exercice 4 3
1.2.5. Exercice 5 3
2. TD3 4
2.1. Exercice 5.1.1 4
2.1.1. Version convergence dominée 4
2.1.2. Version convergence monotone 4
2.2. Exercice 5.2.1 5
2.2.1. 1. $\sin(x)$ sur $[0, \pi]$ 5
2.2.2. 2. $e^{-x} \cos(x)$ sur $\mathbb{R}_+$ 5
2.2.3. 3. $\frac{1}{1+x^2}$ sur $\mathbb{R}_+$ 5
2.2.4. 4. $\frac{1}{2\sqrt{x}} \mathbb{1}_{[0,4]} + \frac{1}{x^2} \mathbb{1}_{(]}4, +\infty[)(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$ 6
2.3. Exercice 5.2.2 6
2.3.1. $f_n(x) = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \mathbb{1}_{[0,n]}(x)$ 6

1. TD2

1.1. Points importants

Proposition 1.1.1:

$$f : (E, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}^+, \mathcal{B}(\mathbb{R}^+)) \text{ étagée} \Longleftrightarrow \exists (A_n)_{i=1}^N \subset E \mid (a_i)_{i=0}^N \in \mathbb{R}^+ \text{ tels que } f = \sum_{i=1}^N a_i \mathbb{1}_{A_i}$$

Et on a $\int_E f \mathrm{d}\mu = \sum_{i=1}^N a_i \mu(A_i)$

Théorème 1.1.1: Bépo-Lévy

(f_n) suite de fonctions mesurables positives (f_n) croissantes telles que $f_n \underset{n \to \infty}{\to} f$

Alors $\int_E f \mathrm{d}\mu = \lim_{n \to \infty} f \mathrm{d}\mu$

1.2. Exercices

1.2.1. Exercice 1

Soit f mesurable de $(E, \mathcal{A})$ dans $\left(\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}\left(\overline{\mathbb{R}}\right)\right)$ et positive

Montrons que

$$\forall a > 0 : \mu(\{f > a\}) \leq \frac{1}{a} \int_E f \mathrm{d}\mu$$

On a

$$\forall x, f(x) \geq a \mathbb{1}_{\{f>a\}}$$

Donc

$$\begin{aligned} \int_E f \mathrm{d}\mu &\geq \int_E a \mathbb{1}_{\{f>a\}} \mathrm{d}\mu \\ &\geq a \int_E \mathbb{1}_{\{f>a\}} \mathrm{d}\mu \end{aligned}$$

Donc

$$\frac{1}{a} \int_E f \mathrm{d}\mu \geq \mu(\{f > a\})$$

1.2.2. Exercice 2

1)

- $\mu(\emptyset) = \int_E f \mathbb{1}_{\emptyset} \mathrm{d}\mu = \int_E 0 \mathrm{d}\mu = 0$
- Soient $A_1, ..., A_N \subset E$ disjoints

$$\mu_f\left(\bigsqcup_{i=1}^{N} A_i\right) = \int_E f \mathbb{1}_{\bigsqcup_{i=1}^{N} A_i} \mathrm{d}\mu = \int_E f \sum_{i=1}^{N} \mathbb{1}_{A_i} \mathrm{d}\mu \underset{\text{th.3.2.15}}{=} \sum_{i=1}^{N} \mu_f(A_i)$$

μ_f est bien une mesure sur $(E, \mathcal{A})$

2)

Ici on a $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$

$$\int_A f \mathrm{d}\mu = \int_{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_i} f \mathrm{d}\mu = \int_E f \mathbb{1}_{\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i} \mathrm{d}\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_E f \mathbb{1}_{A_n} \mathrm{d}\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{A_n} f \mathrm{d}\mu$$

1.2.3. Exercice 3

Soit g étagée positive.

$\exists (A_i)$ partition de $\mathbb{R}, (a_i) \in \mathbb{R}^N \mid g = \sum_{i=0}^{N} a_i \mathbb{1}_{\Delta_i}$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} g \mathrm{d}\delta_0 &= \int_{\mathbb{R}} \sum_{i=0}^{N} a_i \mathbb{1}_{A_i} \mathrm{d}\delta_0 \\ &= \sum_{i=0}^{N} a_i \delta_0(A_i) \end{aligned}$$

On a

$$\delta_0(\Delta_i) = \begin{cases} 1 \text{ si } 0 \in A_i = \mathbb{1}_{A_i}(0) \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Et

$$\int_{\mathbb{R}} g \mathrm{d}\delta_0 = \sum_{i=0}^{N} a_i \mathbb{1}_{A_i}(0) = g(0)$$

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fontions étagées positives telles que $f_n \underset{\text{CVS}}{\to} f$ croissante On a ainsi :

$$\int_E f \mathrm{d}\delta_0 \underset{\text{BL}}{=} \lim_{n\to+\infty} \int_E f_n \mathrm{d}\delta_0 = \lim_{n\to\infty} f_n(0) \underset{\text{CVS}}{=} f(0)$$

1.2.4. Exercice 4

- $\forall (k,l) \in \mathbb{N}^2 A_k \cap A_l = \emptyset$

$$\begin{aligned} \int_A f \mathrm{d}\mu &= \int_{\bigcup A_i} f \mathrm{d}\mu \\ &= \int_E f \mathbb{1}_A \mathrm{d}\mu \\ &= \int f \mathbb{1}_{\bigcup A_i} \mathrm{d}\mu \end{aligned}$$

Soit $f_n = f \mathbb{1}_{\bigcup A_i} \underset{\text{CVS}}{\to} f \mathbb{1}_A$

$$\begin{aligned} \int f \mathrm{d}\mu &\underset{\text{BL}}{=} \lim_{(n\to\infty)} \int_E f_n \mathrm{d}\mu \\ &= \int_E f\left(\mathbb{1}_{\bigcup} A_i\right) \mathrm{d}\mu \\ &= \int_{\bigcup A_i} f \mathrm{d}\mu \end{aligned}$$

Chasles : $\int_E f_n \mathrm{d}\mu = \sum_{i=0}^{n} \int_{A_i} f \mathrm{d}\mu$

$$\begin{aligned} \int_A f \mathrm{d}\mu &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} \int_{A_i} f \mathrm{d}\mu \\ &= \sum_{i=0}^{n} \int_{A_n} f \mathrm{d}\mu \end{aligned}$$

1.2.5. Exercice 5

1)

$\forall x, f(x) = 1 < +\infty$

Avec $(\mu(f^{-1}(\{+\infty\})) = 0)$

$$\int_{\mathbb{R}} f \mathrm{d}\mu = 1 \times \mu(\mathbb{R}) = +\infty$$

Donc g non intégrable

2. TD3

2.1. Exercice 5.1.1

2.1.1. Version convergence dominée

Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de fonctions mesurables positives. Soit $f = \inf_{n\in\mathbb{N}} f_n$

Montrer que

$$\exists N \in \mathbb{N} \mid \int_E f_N \mathrm{d}\mu < +\infty \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \int_E f_n \mathrm{d}\mu = \int_E f \mathrm{d}\mu$$

Supposons que $\exists N \in \mathbb{N} \mid \int_E f_N \mathrm{d}\mu < +\infty$

La suite $(f_n)_n$ décroissante donc $\forall n \geq N : |f_n| < f_N$

Puis $f_n \underset{n\to+\infty}{\overset{\text{PP}}{\longrightarrow}} f = \inf_n f_n$ mesurable

Par **convergence dominée**,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_E f_n \mathrm{d}\mu = \int_E f \mathrm{d}\mu$$

2.1.2. Version convergence monotone

Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de fonctions mesurables positives. Soit $f = \inf_{n\in\mathbb{N}} f_n$

Montrer que

$$\exists N \in \mathbb{N} \mid \int_E f_N \mathrm{d}\mu < +\infty \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \int_E f_n \mathrm{d}\mu = \int_E f \mathrm{d}\mu$$

Supposons que $\exists N \in \mathbb{N} \mid \int_E f_N \mathrm{d}\mu < +\infty$

On pose $g_n := f_N - f_n, \forall n \geq N$

$g_n \nearrow, \in \mathcal{I}$ car $f_n \in \mathcal{I}, \forall n$ et positive car $f_n \searrow$

$g_n \longrightarrow f_N - f = \sup_n g_n = g$ mesurable

Donc par **convergence monotone**,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_E g_n \mathrm{d}\lambda = \int_E g \mathrm{d}\lambda$$

Puis

$$\int_E g_n \mathrm{d}\lambda \underset{\text{chasles}}{\overset{(*)}{=}} \int_E f_N \mathrm{d}\lambda - \int_E f \mathrm{d}\lambda$$
$$\Rightarrow \int_E f_N \mathrm{d}\lambda = \int_E g_n \mathrm{d}\lambda + \int_E f_n \mathrm{d}\lambda$$

En passant à la limite

$$\int_E f_N \mathrm{d}\lambda = \underbrace{\lim_{n\to+\infty} \int_E g_n \mathrm{d}\lambda}_{=\int_E g\mathrm{d}\lambda} + \lim_{n\to+\infty} f_n \mathrm{d}\lambda$$

(*) De l'autre côté, on obtient

$$\int_E f_N \mathrm{d}\lambda = \int_E g\mathrm{d}\lambda + \int_E f\mathrm{d}\lambda$$

2.2. Exercice 5.2.1

Méthode 2.2.1: Equivalence Riemann-Lebesgue
impropre $\rightarrow f$ mesurable
$\rightarrow f$ absolument intégrable au sens de Riemann
$\rightarrow \lim_{t\to b^-} \int_a^t |f(x)| \mathrm{d}x < +\infty$

Justifier que l'intégrale de Lebesgue et de Riemann coincident et les calculer

2.2.1. 1. $\sin(x)$ sur $[0, \pi]$

sin est continue sur $[0, \pi]$ donc Riemann-intégrable et

$$\int_{[0,\pi]} \sin \mathrm{d}\lambda = \int_0^\pi \sin(x)\mathrm{d}x = [-\cos(x)]_0^\pi = 2$$

2.2.2. 2. $e^{-x}\cos(x)$ sur $\mathbb{R}_+$

$|f(x)| \underset{f \text{ continue}}{\leq} e^{-x}, \forall x$ et $g : x \mapsto e^{-x}$ intégrable au sens de Riemann

Donc f Riemann absolument intégrable et $\int_{\mathbb{R}_+} f\mathrm{d}\lambda = \int_0^{+\infty} e^{-x}$

- Soit on intègre 2 fois par parties
- Soit

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} e^{-x}\cos(x)\mathrm{d}x &= \int_0^{+\infty} e^{-x}\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{x+ix} + e^{-x-ix}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\left(\left[\frac{e^{-x+ix}}{-1+i}\right]_0^{+\infty} + \left[\frac{e^{-x-ix}}{-1-i}\right]_0^{+\infty}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{-1+i} + \frac{1}{1+i}\right) \\
&= \frac{1}{2}\frac{-(1+i)+(i-1)}{i^2-1} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

2.2.3. 3. $\frac{1}{1+x^2}$ sur $\mathbb{R}_+$

- En 0 : OK
- en $+\infty$: $|f(x)| \underset{+\infty}{=\sim} \frac{1}{x^2}$ qui est R-intégrable

Donc f est R-abs intégrable

$\int_{\mathbb{R}_+} f\mathrm{d}\mu = \int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = [\arctan(x)]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$

2.2.4. 4. $\frac{1}{2\sqrt{x}}\mathbb{1}_{[0,4]} + \frac{1}{x^2}\mathbb{1}_{(]}4,+\infty[)(x)$ **sur** $\mathbb{R}_+^*$

- f cpm sur $\mathbb{R}_+$
- en 0^+ : $|f(x)| = \frac{1}{2\sqrt{x}} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$ R-intégrable
- en $+\infty$: $|f(x)| = \frac{1}{x^2}$ R-intégrable

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}_+} f\mathrm{d}\lambda &= \int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_0^4 \frac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{d}\lambda + \int_4^{+\infty} \frac{1}{x^2}\mathrm{d}\lambda \\
&= [\sqrt{x}]_0^4 + \left[-\frac{1}{x}\right]_4^{+\infty} \\
&= \sqrt{4} + \frac{1}{4} \\
&= \frac{9}{4}
\end{aligned}$$

2.3. Exercice 5.2.2

2.3.1. $f_n(x) = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \mathbb{1}_{[0,n]}(x)$

$\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1-\frac{x}{n}\right)} \longrightarrow e^{-x}$

$$f_n(x) \to e^{-x}\cos(x) = f(x)$$

Par convergence dominée,

$$\ln\left(1 - \frac{x}{n}\right) \leq -\frac{x}{n}$$

Donc $e^{n\ln\left(1-\frac{x}{n}\right)} \leq e^{-x}$ par croissance

Donc

$$e^{n\ln\left(1-\frac{x}{n}\right)} \leq e^{-x}$$

Convergence dominée :

$$\begin{aligned}
\lim_n \int_{\mathbb{R}_+} f_n\mathrm{d}\lambda &= \int_{\mathbb{R}_+} f\mathrm{d}\lambda \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-x}\cos(x)\texttt{differential}'x \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$