

Intégration - Résumé

October 25, 2023

THEVENET Louis

Table des matières

| | |
|--|---|
| 1. Définitions et motivations | 1 |
| 2. Théorie de la mesure | 2 |
| 2.1. Applications mesurables | 2 |
| 2.2. Mesure et espaces mesurés | 3 |
| 2.3. La mesure de Lebesgue | 5 |
| 3. Intégral de Lebesgue des fonctions mesurables positives | 5 |
| 3.1. Fonctions étagées positives | 5 |
| 3.2. Fonctions mesurables positives | 6 |
| 4. Intégration | 7 |
| 5. Au partiel (d'après le prof) | 7 |

1. Définitions et motivations

On veut étendre l'ensemble des fonctions intégrables

Définition 1.1: Tribu

E un ensemble et $\mathcal{A} \in \mathcal{P}(E)$ une famille de parties de E . \mathcal{A} est une **tribu** si :

1. $E \in \mathcal{A}$
2. \mathcal{A} est stable par passage au complémentaire
3. \mathcal{A} est stable par réunion dénombrable

Définition 1.2:

E un ensemble, \mathcal{A} une tribu sur E . (E, \mathcal{A}) est appelé **espace mesurable**

Définition 1.3: Tribu engendrée

Soit $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(E)$, on appelle **tribu engendrée** par \mathcal{C} , notée $\sigma(\mathcal{C})$, l'intersection des toutes les tribus contenant \mathcal{C}

Si (E, \mathcal{O}) est un espace topologique, $\sigma(\mathcal{O}) = \sigma(\mathcal{F}) := \mathcal{B}(E)$, avec \mathcal{F} ensemble des fermés de E

On appelle $\mathcal{B}(E)$ la **tribu de Borel** de E

Définition 1.4:

- Tribu image : $f(\mathcal{A}_1) = \{B \in E_2 \mid f^{-1}(B) \in \mathcal{A}_1\}$
- Tribu réciproque : $f^{-1}(\mathcal{A}_2) = \{f^{-1}(B) \subset E_1 \mid B \in \mathcal{A}_2\}$

Théorème 1.1: Lemme de transport

Soit $f : E_1 \rightarrow E_2$ et une classe de parties E_2 , notée \mathcal{C} . Alors

$$\sigma(f^{-1}(\mathcal{C})) = f^{-1}(\sigma(\mathcal{C}))$$

Définition 1.5: Tribu trace

La tribu trace de $\mathcal{B}(E)$ sur X définie par $\text{tr}(\mathcal{B}) = \{B \cap X \mid B \in \mathcal{B}(E)\}$ est la tribu engendrée par la topologie trace de \mathcal{O} sur X , i.e. par $\sigma(\text{tr}(\mathcal{O}))$

2. Théorie de la mesure

2.1. Applications mesurables

Définition 2.1.1:

f est mesurable de (E_1, \mathcal{A}_1) dans (E_2, \mathcal{A}_2) si $f^{-1}(\mathcal{A}_2) \subset \mathcal{A}_1$ i.e.

$$\forall B \in \mathcal{A}_2, f^{-1}(B) = \{x \in E_1 \mid f(x) \in B\} \in \mathcal{A}_1$$

- Si E_1 et E_2 sont des espaces topologiques et $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ des tribus de Borel correspondantes, alors f est **borélienne**
- Si $(E_2, \mathcal{A}_2) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, on parle de fonctions **mesurables**

Méthode 2.1.1: f est mesurable de (E_1, \mathcal{A}_1) dans (E_2, \mathcal{A}_2) si

$$\forall B \in \mathcal{A}_2, f^{-1}(B) = \{x \in E_1 \mid f(x) \in B\} \in \mathcal{A}_1$$

Théorème 2.1.1: Critères de mesurabilité

- \mathcal{C} une classe de parties d'un ensemble F , i.e. $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(F)$, $B := \sigma(\mathcal{C})$

$$f : (E, \mathcal{A}) \rightarrow (F, \mathcal{B}) \text{ mesurable} \Leftrightarrow f^{-1}(\mathcal{C}) \subset \mathcal{A}$$

- f_1, f_2 mesurables $\Rightarrow f_1 \circ f_2$ mesurable
- Si $\mathcal{A} = \mathcal{B}(E)$ et $\mathcal{B} = \mathcal{B}(F)$ tribus de Borel, f continue $\Rightarrow f$ mesurable
- $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ cpm ($a < b \in \mathbb{R}$), alors f mesurable de $([a, b], \mathcal{B}([a, b]))$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$

Théorème 2.1.2: Limite d'une suite de fonction

$(f_n)_n$ une suite de fonctions **mesurables** sur (E, \mathcal{A}) à valeurs dans $|\mathbb{R}|$

1. $\sup_n f_n$ et $\inf_n f_n$ sont **mesurables**
2. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup f_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{k \geq n} f_k$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \inf f_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \inf_{k \geq n} f_k$ sont **mesurables**
3. Si $(f_n)_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{CS}} f$, alors f est **mesurable**

2.2. Mesure et espaces mesurés**Définition 2.2.1:** Mesure

Soit (E, \mathcal{A}) un espace mesurable. on appelle **mesure** sur (E, \mathcal{A}) une application $\mu : \mathcal{A} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+ := \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ telle que

1. $\mu(\emptyset) = 0$
2. $\forall A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ 2 à 2 disjoints : $\mu\left(\bigsqcup_n A_n\right) = \sum_n \mu(A_n)$ (σ -additivité)

Méthode 2.2.1: Montrer que μ est une mesure

- existence
- $\mu(\emptyset) = 0$
- σ -additivité

Définition 2.2.2: Espace mesuré

Soit (E, \mathcal{A}) un espace mesurable et μ une mesure dessus.

On appelle Soit (E, \mathcal{A}, μ) **espace mesuré**.

Définition 2.2.3: Soit (E, \mathcal{A}) un espace mesurable. Une mesure μ est dite :

1. **finie** si $\mu(E) < +\infty$
2. **de probabilité** si $\mu(E) = 1$
3. **σ -finie** si

$$\exists (A_n)_n \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}} \mid E = \bigcup_n A_n$$

$$\text{et } \mu(A_n) < +\infty \forall n$$

Exemple : Exercice 2.3.3. du cours que je laisse pour Nouloun

- $\mu(\emptyset) = 0$ car \emptyset est dénombrable
- Soient $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ 2 à 2 disjoints
On a A_i et A_j dénombrables et disjoints donc $A_i \cup A_j$ dénombrable
Donc $\mu(A_i \cup A_j) = 0 = 0 + 0 = \mu(A_i) + \mu(A_j)$
Donc $\mu\left(\bigcup_n (A_n)\right) = \sum_n (\mu(A_n))$

Donc μ est une mesure

Définition 2.2.4: Pour (E, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré.

$A \in \mathcal{A}$ est négligeable si $\mu(A) = 0$

Théorème 2.2.1: Mesure image

Soient (E_1, \mathcal{A}_1) , (E_2, \mathcal{A}_2) deux espaces mesurables. $\mu : \mathcal{A}_1 \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ une mesure sur (E_1, \mathcal{A}_1) et f mesurable de (E_1, \mathcal{A}_1) dans (E_2, \mathcal{A}_2)

On pose

$$\mu_f : \begin{cases} \mathcal{A}_2 \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+ \\ B \mapsto \mu_f(B) := \mu(f^{-1}(B)) \end{cases}$$

μ_f est une mesure sur (E_2, \mathcal{A}_2) appelée **mesure image** de μ par f .

2.3. La mesure de Lebesgue

Théorème 2.3.1: Mesure de Lebesgue (ou mesure de Borel-Lebesgue)

Il existe une **unique** mesure μ_d sur les boréliens de \mathbb{R}^d telle que la mesure de tout pavé $\prod_{i=1}^d]a_i, b_i[$ est :

$$\mu_d \left(\bigcap_{i=1}^d]a_i, b_i[\right) = \prod_{i=1}^d (b_i - a_i)$$

Elle est appelée **mesure de Lebesgue** et notée μ si il n'y a pas d'ambiguïté sur la dimension.

3. Intégral de Lebesgue des fonctions mesurables positives

3.1. Fonctions étagées positives

Définition 3.1.1: Fonctions étagée

f est une fonction étagée si elle s'écrit : $f = \sum_{i \in I} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$
avec $A_i = f^{-1}(\{\alpha_i\}) =: \{f = \alpha_i\}$

Définition 3.1.2: Intégrale d'une fonction étagée

On appelle intégrale d'une fonction étagée f **positive** par rapport à la mesure μ sur (E, \mathcal{A}) :

$$\int_E f d\mu := \sum_{\alpha \in f(E)} \alpha \mu(f^{-1}(\{\alpha\})) \in [0, +\infty[$$

Si $\int_E f d\mu < +\infty$, on dit que f est **intégrable**

3.2. Fonctions mesurables positives

Théorème 3.2.1: Toute fonction de \mathcal{M}_+ est limite d'une suite de fonctions de \mathcal{E}_+ (étagées positives)

Définition 3.2.1:

On appelle intégrale d'une fonction mesurable **positive** f par rapport à μ sur (E, \mathcal{A}) :

$$\int_E f d\mu = \sup \left\{ \int_E \varphi d\mu \mid \varphi \in \mathcal{E}_+ \text{ et } \varphi \leq f \right\} \in [0, +\infty[$$

Si $\int_E \varphi d\mu < +\infty$, on dit que f est **intégrable**

Corollaire 3.2.1: $\mu(A) = 0 \Rightarrow \int_E f \mathbb{1}_A d\mu = \int_A f d\mu = 0$

Corollaire 3.2.2: Si $f \leq g$ et g est **intégrable**, alors f est **intégrable**

Théorème 3.2.2: Si μ est **finie**, alors $\forall f \in \mathcal{M}_+$, si f est **bornée** alors f est **intégrable**

Corollaire 3.2.3: $\forall f \in \mathcal{M}_+, \int_E f d\mu < +\infty \Rightarrow \mu(\{f = +\infty\}) = 0$

Théorème 3.2.3: Théorème de convergence monotone

Si $(f_n)_n$ est une suite croissante de $\mathcal{M}_+(\mathcal{A})$, alors $f := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \in \mathcal{M}_+(\mathcal{A})$ et

$$\int_E f d\mu = \int_E \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n \right) d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n d\mu$$

Utilité : On veut calculer l'intégrale de f , on sait pas faire, on peut faire l'intégrale des f_n puis passer à la limite.

Corollaire 3.2.4: Pour toute suite $(f_n) \in \mathcal{M}_+ : \sum_n f_n \in \mathcal{M}_+$ et

$$\int_E \left(\sum_n f_n \right) d\mu = \sum_n \left(\int_E f_n d\mu \right)$$

Proposition 3.2.1: $\forall f \in \mathcal{M}_+ : \int_E f d\mu = 0 \Leftrightarrow \mu(\{f \neq 0\}) = 0$

4. Intégration

Définition 4.1: Intégrale d'une fonction de $\mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$

$$\int_E f d\mu = \int_E f d\mu + \int_E f d\mu$$

Proposition 4.1: $f \in \mathcal{L}^1 \Leftrightarrow \left| \int_E f d\mu \right| \leq \int_E f d\mu < +\infty$

5. Au partiel (d'après le prof)

- à l'examen, est-ce que l'indicatrice est mesurable pour un (E, \mathcal{A}) donné (voir exemple 2.2.1)