Probas - Résumé

October 18, 2023

THEVENET Louis

Notions

Fonction de répartition

$F : \begin{cases} \mathbb{R} \to [0,1] \\ x \mapsto P[X<x] \end{cases}$

VAC

$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(u)du$

Propritété

p(x)=F'(x)

Fonction caractéristique

$\Phi_X(t) = E[\exp(itX)]$

Lois conditionnelles

VAD

$P\left[X = X_i \mid Y = y_j\right] = \frac{p_{ij}}{p_{.j}}$

VAC

Densité de $X|(Y = y)$:
$p(x|y) = \frac{p(x,y)}{p(.,y)}$

Où $p_{i.}$ et $p(x,.)$ sont les lois marginales,
i.e. $p(x,.) = \int_{\mathbb{R}} p(x,y)dy$

Indépendance

Pour X et Y **indépendantes** et α et β **continues**, on a $\alpha(X)$ et $\beta(Y)$ **indépendantes**. (réciproque vraie si bijectivité)

Corrélation

$\mathrm{cov}(X, Y) = E[XY] - E[X]E[Y]$, $E\left[VV^T\right] = \begin{pmatrix} \mathrm{var}(X) & \mathrm{cov}(X,Y) \\ \mathrm{cox(X,Y)} & \mathrm{var}(Y) \end{pmatrix}$, $r(X, Y) = \frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$

Espérance conditionnelle

$E[\alpha(X, Y)] = E_X[E_Y[\alpha(X, Y) \mid X]]$

Vecteurs Gaussiens

Transformation affine

Pour $X \sim \mathcal{N}_n(m, \Sigma)$ un vecteur Gaussien et $Y = AX + b$, $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$, on a :

$$Y \sim \mathcal{N}_p\left(Am + b, A\Sigma A^T\right)$$

avec $\mathrm{rg}(A) = p$

Lois marginales

$X = \begin{pmatrix} X' & X'' \end{pmatrix} \sim \mathcal{N}_n(m, \Sigma)$, $m = \begin{pmatrix} m' & m'' \end{pmatrix}$, $\Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma' & M \\ M^T & \Sigma'' \end{pmatrix}$, alors on a :

$$X' \sim \mathcal{N}_p(m', \Sigma')$$

où $\Sigma' \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$

Convergence

En loi : $X_n \underset{n\to\infty}{\overset{\mathcal{L}}{\longrightarrow}} X \Leftrightarrow F_n[X_n < x] \underset{n\to\infty}{\overset{\mathcal{CS}}{\longrightarrow}} F(x) = P[X < x]$

En probas : $X_n \underset{n\to\infty}{\overset{\mathcal{P}}{\longrightarrow}} X \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, P[|X_n - X| > \varepsilon] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

En moyenne quadratique : $X_n \underset{n\to\infty}{\overset{\mathcal{MQ}}{\longrightarrow}} X \Leftrightarrow E\left[(X_n - X)^2\right] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

Presque sûrement : $X_n \underset{n\to\infty}{\overset{\mathcal{PS}}{\longrightarrow}} X \Leftrightarrow X_n(\omega) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} X(\omega), \forall \omega \in A \mid P(A) = 1$

Théorèmes

Loi faible des grands nombres

Si $X_1, ..., X_n$ sont des VA *iid* de moyennes $E[X_k] = m < \infty$, alors

$$\overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \underset{n\to\infty}{\overset{\mathcal{P}}{\longrightarrow}} m$$

Loi forte des grands nombres

Si $X_1, ..., X_n$ sont des VA *iid* de moyennes $E[X_k] = m < \infty$, de variances $\sigma^2 < \infty$ alors

$$\overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \underset{n\to\infty}{\overset{\mathcal{MQ}}{\longrightarrow}} m$$

Théorème central limite

Si $X_1, ..., X_n$ sont des VA *iid* de moyennes $E[X_k] = m < \infty$, de variances $\sigma^2 < \infty$ alors

$$Y_n = \frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - nm}{\sqrt{n\sigma^2}} \underset{n\to\infty}{\overset{\mathcal{L}}{\longrightarrow}} X \sim \mathcal{N}(0,1)$$

Méthodes

Changements de variables

VAD

$P(y = y_j) = \sum_{i|y_j = g(x_i)} P[X = x_i]$

VAC

Si g est **bijective** et **différentiable**, alors $Y = g(X)$ est une VAC et

$$p_{Y(y)} = p_{X(g^{-1}(y))}\left|\frac{dx}{dy}\right|$$

Si $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, on a : $p_{U,V}(u,v) = P_{X,Y}(g^{-1}(u,v))|\det(J)|$

Astuces

- Changement de variable type $Z = \alpha(X,Y)$, on peut poser $T = Y$ par exemple pour utiliser les théorèmes sur les changements de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$