

Probas - Résumé

October 18, 2023

THEVENET Louis

Notions

Fonction de répartition

$$F : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow [0,1] \\ x \mapsto P[X < x] \end{cases}$$

VAC

$$F(x) = \int_{-\infty}^x p(u) du$$

Propriété

$$p(x) = F'(x)$$

Fonction caractéristique

$$\Phi_X(t) = E[\exp(itX)]$$

Lois conditionnelles

VAD

$$P[X = X_i \mid Y = y_j] = \frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}}$$

VAC

Densité de $X \mid (Y = y)$:

$$p(x|y) = \frac{p(x,y)}{p(\cdot,y)}$$

Où $p_{i\cdot}$ et $p(x, \cdot)$ sont les lois marginales,

$$\text{i.e. } p(x, \cdot) = \int_{\mathbb{R}} p(x, y) dy$$

Indépendance

Pour X et Y **indépendantes** et α et β **continues**, on a $\alpha(X)$ et $\beta(Y)$ **indépendantes**. (réciproque vraie si bijectivité)

Corrélation

$$\text{cov}(X, Y) = E[XY] - E[X]E[Y],$$

$$E[VV^T] = \begin{pmatrix} \text{var}(X) & \text{cov}(X, Y) \\ \text{cov}(X, Y) & \text{var}(Y) \end{pmatrix},$$

$$r(X, Y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$

Espérance conditionnelle

$$E[\alpha(X, Y)] = E_X[E_Y[\alpha(X, Y) \mid X]]$$

Vecteurs Gaussiens

Transformation affine

Pour $X \sim \mathcal{N}_n(m, \Sigma)$ un vecteur Gaussien et $Y = AX + b$, $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$,

Si $\text{rg}(A) = p$, on a :

$$Y \text{ est un vecteur Gaussien et } Y \sim \mathcal{N}_p(Am + b, A\Sigma A^T)$$

Lois marginales

$$X = \begin{pmatrix} X' & X'' \end{pmatrix} \sim \mathcal{N}_n(m, \Sigma), \quad m = \begin{pmatrix} m' & m'' \end{pmatrix}, \quad \Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma' & M \\ M^T & \Sigma'' \end{pmatrix}, \text{ alors on a :}$$

$$X' \sim \mathcal{N}_p(m', \Sigma')$$

où $\Sigma' \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$

Convergence

En loi : $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} X \Leftrightarrow F_n[X_n < x] \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{CS}} F(x) = P[X < x]$

En probas : $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{P}} X \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, P[|X_n - X| > \varepsilon] \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$

En moyenne quadratique : $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{MQ}} X \Leftrightarrow E[(X_n - X)^2] \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$

Presque sûrement : $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{PS}} X \Leftrightarrow X_n(\omega) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} X(\omega), \forall \omega \in A \mid P(A) = 1$

Théorèmes

Loi faible des grands nombres

Si X_1, \dots, X_n sont des VA *iid* de moyennes $E[X_k] = m < \infty$, alors

$$\overline{X_n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{P}} m$$

Loi forte des grands nombres

Si X_1, \dots, X_n sont des VA *iid* de moyennes $E[X_k] = m < \infty$, de variances $\sigma^2 < \infty$ alors

$$\overline{X_n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{MQ}} m$$

Théorème central limite

Si X_1, \dots, X_n sont des VA *iid* de moyennes $E[X_k] = m < \infty$, de variances $\sigma^2 < \infty$ alors

$$Y_n = \frac{\sum_{k=1}^n X_k - nm}{\sqrt{n\sigma^2}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} X \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

Méthodes

Changements de variables

VAD

$$P(y = y_j) = \sum_{i|y_j=g(x_i)} P[X = x_i]$$

VAC

Si g est **bijective** et **différentiable**, alors $Y = g(X)$ est une VAC et

$$p_{Y(y)} = p_{X(g^{-1}(y))} \left| \frac{dx}{dy} \right|$$

Si $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, on a : $p_{U,V}(u, v) = P_{X,Y}(g^{-1}(u, v)) |\det(J)|$

Astuces

- Changement de variable type $Z = \alpha(X, Y)$, on peut poser $T = Y$ par exemple pour utiliser les théorèmes sur les changements de $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$