

# Intégration - Résumé

October 25, 2023

THEVENET Louis

## Table des matières

1. Estimation .....	1
1.1. Modèle statistique, estimateurs .....	1
1.2. Inégalité de Cramér Rao .....	1
1.3. Maximum de vraisemblance .....	2
1.4. Méthode des moments .....	2
1.5. Estimation de Bayésienne .....	2
1.6. Intervalles de confiance .....	2
2. Tests Statistiques .....	2

## 1. Estimation

### 1.1. Modèle statistique, estimateurs

#### Définition 1.1.1:

On note  $\hat{\theta}(X_1, \dots, X_n)$ ,  $\hat{\theta}_n$  ou  $\hat{\theta}$  l'estimateur lié aux  $n$  VA *iid*  $X_1, \dots, X_n$  elles-mêmes liées aux  $n$  observations  $x_1, \dots, x_n$

- Biais :  $b_n(\theta) = E(\hat{\theta}_n) - \theta \in \mathbb{R}^p$
- Variance :  $v_n(\theta) = E\left[(\hat{\theta}_n - E(\hat{\theta}_n))^2\right]$
- Matrice de covariance :  $E\left[(\hat{\theta}_n - E(\hat{\theta}_n))(\hat{\theta}_n - E(\hat{\theta}_n))^T\right]$
- Erreur quadratique moyenne (MSE) :  $e_n(\theta) = E\left[(\hat{\theta}_n - \theta)^2\right] = v_n(\theta) + b_n^2(\theta)$
- un estimateur  $\hat{\theta}_n$  est convergent si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n(\theta) = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n(\theta) = 0$

### 1.2. Inégalité de Cramér Rao

#### Théorème 1.2.1:

$$\text{Var}(\hat{\theta}_n) \geq \frac{[1 + b'_n(\theta)]^2}{(-E\left[\frac{\partial^2 \ln(L(X_1, \dots, X_n; \theta))}{\partial \theta^2}\right])} = \text{BCR}(\theta)$$

- *BCR* : Borne de Cramér-Rao
- $L(X_1, \dots, X_n; \theta)$  : vraisemblance
- **Hypothèses** :
  1. log-vraisemblance deux fois dérivable
  2. support de la loi indépendant de  $\theta$

### 1.3. Maximum de vraisemblance

**Définition 1.3.1:** Maximum de vraisemblance

$$\hat{\theta}_{\text{MV}} = \arg \max_{\theta} L(X_1, \dots, X_n; \theta)$$

**Théorème 1.3.1:** Recherche de  $\hat{\theta}_{\text{MV}}$

- Cherche les points fixes de la vraisemblances ou de la log-vraisemblances
- Tableau de variations pour vérifier ou alors étudier  $\frac{\partial^2 \ln L(X_1, \dots, X_n; \hat{\theta}_{\text{MV}})}{\partial \theta^2} < 0$

**Définition 1.3.2:** Régularité

### 1.4. Méthode des moments

### 1.5. Estimation de Bayésienne

### 1.6. Intervalles de confiance

## 2. Tests Statistiques