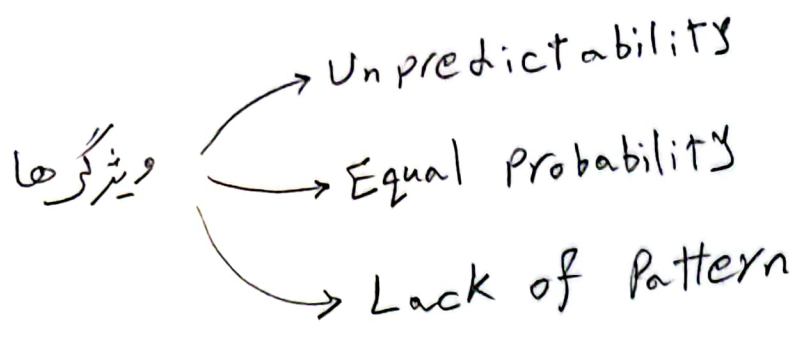
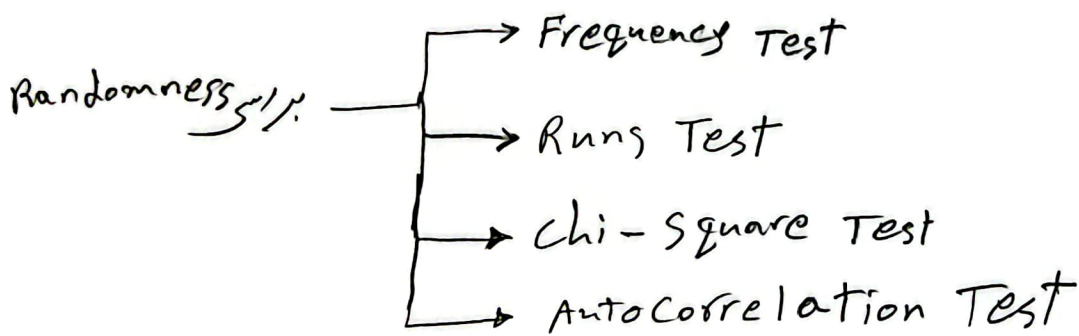
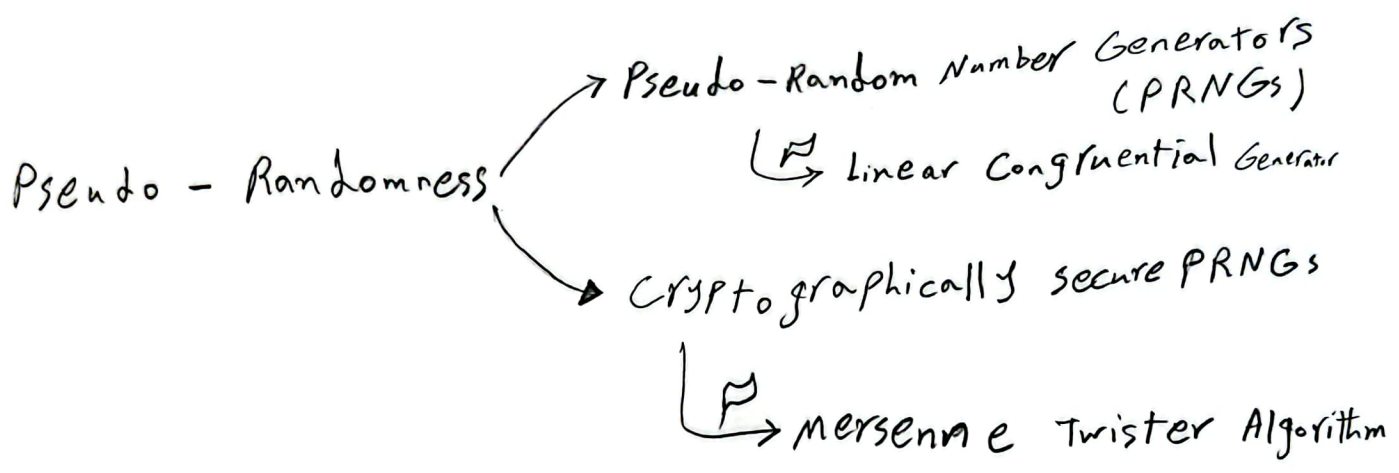


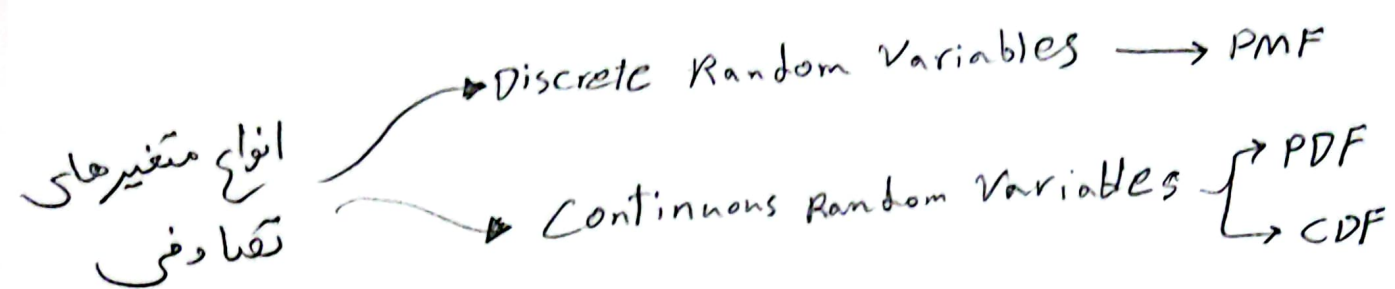
» Randomness



Expected value → long-term average value of a random variable



>> Random Variables



Probability Mass Function (PMF)

$$P(X=x) = P(x)$$

Probability Density Function (PDF)

$$f(x) = P(X=x)$$

Cumulative Distribution Function (CDF)

$$F(x) = P(X \leq x)$$

Expected Value (mean)

$$E(X) = \sum_x x \cdot P(x)$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

Variance & Standard Deviation

$$\text{Var}(X) = \sum_x (x - E(X))^2 P(x)$$

$$\text{Var}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(X))^2 f(x) dx$$

$$\sigma_x = \sqrt{\text{Var}(X)}$$

Common Distributions

Discrete

- Bernoulli Distribution
- Binomial Distribution
- Poisson Distribution

Continuous

- Uniform Distribution
- Normal Distribution
- Exponential Distribution

Joint Distribution

Discrete: $P(X=x, Y=y)$

Continuous: $f(x, y)$

Marginal Distribution

discrete: $P(X=x) = \sum_y P(X=x, Y=y)$

continuous: $f_x(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy$

Conditional Distribution

discrete: $P(X=x|Y=y) = \frac{P(X=x, Y=y)}{P(Y=y)}$

continuous: $f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)}$

>> Probability Distribution

Binomial Distribution:

در یک تعداد مشخص آزمایش
چند بار موفقیت رخ می دهد

$$P(X=K) = \binom{n}{K} p^K (1-p)^{n-K}$$

Poisson Distribution:

در یک بازه زمانی یا مکانی با چه احتمالی K بار
واقعه مورد نظر رخ می دهد؟

$$P(X=K) = \frac{\lambda^K e^{-\lambda}}{K!}$$

Probability Density Function (PDF):

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx$$

Uniform Distribution:

$$f(x) = \frac{1}{b-a} \quad (\text{for } a \leq x \leq b)$$

Normal Distribution:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Exponential Distribution:

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad \text{for } x \geq 0$$

Cumulative Distribution Function (CDF)

$$\text{discrete: } F(x) = P(X \leq x) = \sum_{t \leq x} P(X=t)$$

$$\text{continuous: } F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

Moments of a Distribution

1. mean (Expected Value)

$$\text{discrete: } E(X) = \mu = \sum_x x \cdot P(X=x)$$

$$\text{continuous: } E(X) = \mu = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

2. Variance

$$\text{Var}(X) = \sigma^2 = \sum_x (x - \mu)^2 P(X=x)$$

$$\text{Var}(X) = \sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx$$

3. Standard Deviation

$$\sigma = \sqrt{\text{Var}(X)}$$

>> Conditional Probability

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Bayes' Theorem

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

اگر A و B از هم مستقل باشند:

$$P(A|B) = P(A)$$

$$P(B|A) = P(B)$$

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

>> Independent & Identically Distributed (i.i.d.)

 X_1, X_2, \dots, X_n are independent i f:

$$P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n) = P(X_1 = x_1) \cdot P(X_2 = x_2) \cdots P(X_n = x_n)$$

Law of Large Numbers (LLN)

باز یاد شد! تعداد متغیرهای i.i.d. میانگین نمونه‌ها به میانگین توزیع جامعه میل می‌کند.

انواع { Strong LLN \rightarrow همیشه همگرا می‌شود
Weak LLN \rightarrow با احتمالات همگرا می‌شود

Central Limit Theorem

بله! ی‌کند که تعداد زیاد i.i.d. میانگین و واریانس محدود، به طور تقریبی دارای توزیع نرمال خواهد بود. (صرف نظر از توزیع اولیه متغیرها)

>> Cumulative Distribution Function (CDF)

$$F_X(x) = P(X \leq x)$$

ویژگی‌ها

Non-decreasing $\rightarrow F_X(b) \geq F_X(a)$ for $b > a$ Right-Continuous $\rightarrow \lim_{x \rightarrow a^+} F_X(x) = F_X(a)$

Limits \rightarrow

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} F_X(x) = 1$$

discrete: $F_X(x) = \sum_{x_i \leq x} P(X=x_i) = \sum_{x_i \leq x} P_i$

continuous: $F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt$

>> Probability Density Function (PDF)

ویشتر گرها:

Non-negativity $\rightarrow f_X(x) \geq 0$ for all x

Normalization $\rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx = 1$

رابطه با CDF:

$$f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x)$$

Probability Calculation

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(x) dx$$

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx$$

$$Var(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E[X])^2 f_X(x) dx$$

>> Probability Mass Function (PMF)

برای گسسته ها به کار می رود

$$P_X(x) = P(X=x)$$

ویشتر گرها

Non-negativity $\rightarrow P_X(x) \geq 0$

Normalization $\rightarrow \sum_x P_X(x) = 1$

(رابطه با CDF):

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \sum_{t \leq x} P_X(t)$$

AI (24)

$$E[X] = \sum_x x p_X(x)$$

$$\text{Var}(X) = \sum_x (x - E[X])^2 p_X(x)$$