? شرایطی که یک زیرمجموعه از فضای برداری باید داشته باشه تا یک زیرفضا (Subspace) باشه:

subset: $W$ of vector space: $V$ $\xrightarrow[\text{3 conditions}]{\text{must satisfy}}$ to be subspace of $V$

1. $W$ باید شامل بردار صفر از $V$ باشد $\quad 0 \in W$

2. برای $u, v \in W \longrightarrow u+v \in W$

3. برای هر بردار $u \in W$ و هر اسکالر $c \in \mathbb{F}$ باید $cu \in W$

بستگی به $V$ داره $\leftarrow$ $\mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$

? اثبات کن که اشتراک دو subspace ، یک subspace است

1. $0 \in U, \; 0 \in V \Longrightarrow 0 \in U \cap V$

2. $\begin{matrix} u \in U, & u \in V \\ v \in U, & v \in V \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} u+v \in U \\ u+v \in V \end{matrix} \Rightarrow u+v \in U \cap V$

3. $\begin{matrix} u \in U \\ u \in V \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} cu \in U \\ cu \in V \end{matrix} \Rightarrow cu \in U \cap V$

? برای اثبات اینکه $v_1, v_2, \dots, v_n$ مستقل خطی هستند باید:

1. Form a matrix

$$A = [v_1 \; v_2 \; \dots \; v_n]$$

2. حذف گاوسی (کاهش سطر) برای تبدیل $A$ به reduced row echelon form (RREF)

3. بررسی ستون‌های Pivot : بردارهای $v_1, v_2, \dots, v_n$ مستقل خطی‌اند اگر و تنها اگر RREF ماتریس $A$ دارای یک Pivot در هر col باشد

- گام ها بررسی مستقل خطی بودن $v_1, v_2, \dots, v_n$

1. Form the matrix ( $v_1, v_2, \dots, v_n \in \mathbb{R}^m$ )

$$A = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & \cdots & v_{1n} \\ v_{21} & v_{22} & \cdots & v_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{m1} & v_{m2} & \cdots & v_{mn} \end{bmatrix}$$

2. اعمال حذف گاوسی روی A برای بدست آوردن فرم RREF

3. بررسی RREF
- اگر همه col ها دارای Pivot بودن، آنگاه بردارها خطی مستقل اند
- وگرنه غیرمستقل خطی اند

* مثال

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad v_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} \quad v_3 = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow{RREF} \begin{array}{ccc} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \text{Pivot col} \quad \text{Pivot col} \quad \text{not Pivot} \end{array} \Rightarrow$$

خطی مستقل نیستند

rref(A) ← الکتار

? ارتباط بین معکوس ماتریس و دترمینان؟

دترمینان:
- غیرصفر ← یعنی row یا col ها مستقل خطی اند (non-singular) ← برای Ax=b یک راه حل خاص دارد.
- صفر ← ماتریس منفرد / singular ← برای Ax=b یعنی هیچ راه حلی ندارد یا بی‌نهایت راه حل دارد

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

روش حذف گاوسی → $[A|I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 & -5 \end{array}\right]$ ($A^{-1}$)

نکته: $\det(AB) = \det(A)\cdot\det(B)$

? eigenval و eigenvect یک ماتریس A

$$Av = \lambda v$$

نحوه یافتن:

$$\det(A - \lambda I) = 0 \longrightarrow \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$$

$$\forall_{i \in \{1,\dots,n\}} \ (A - \lambda_i I)v = 0 \longrightarrow v_1, v_2, \dots, v_n$$

نکته: ماتریس A و B، Similar هستند اگر ماتریس معکوس‌پذیر P وجود داشته باشد، به طوری که: $B = P^{-1}AP$ ⟵ eigenval های یکسانی دارند

? قطری‌پذیر ماتریس

یک ماتریس diagonalizable است اگر بتوان آن را به این فرم نوشت

$$A = PDP^{-1}$$

$A$: original matrix

$P$: invertible matrix which its cols are the eigenvects of A

$D$: diagonal matrix whose diagonal elements are the eigenvals of A

? تجزیه مقدار منفرد (SVD)

SVD of matrix A $\Rightarrow A = \underset{m\times n}{} \ \underset{m\times m}{U} \ \underset{m\times n}{\Sigma} \ \underset{n\times n}{V^T}$

$U$: orthogonal matrix

$\Sigma$: diagonal matrix

$V^T$: orthogonal matrix

نام دیگر col هایش: left singular vectors

مقادیر روی قطر آن، singular values of A شناخته می‌شود

نام دیگر col هایش: right singular vectors

مراحل:

1- محاسبه $AA^T$ و $A^TA$

2- یافتن مقادیر ویژه و بردارهای ویژه

مقادیر ویژه $A^TA$: Singular values squared

بردارهای ویژه $A^TA$: ستون های V

بردارهای ویژه $AA^T$: ستون های U

? تفاوت بین linear و affine transformation

# Linear:

$T: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ $\begin{cases} T(u+v) = T(u) + T(v) \\ T(cu) = cT(u) \end{cases}$

$T(x) = A x$

ماتریس

# Affine

$T: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$

$T(x) = Ax + b$ یا $\begin{pmatrix} y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$

? اگر ماتریس انتقال را داشته باشیم، kernel و image چطور بدست میاد؟

$\ker(T) = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid T(x) = 0 \}$

$\mathrm{Im}(T) = \{ y \in \mathbb{R}^m \mid y = T(x) \text{ for some } x \in \mathbb{R}^n \}$

مثال:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

# kernel

$Ax = 0 \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{RREF} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \begin{matrix} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 + 2x_3 = 0 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} x_1 = x_3 \\ x_2 = -2x_3 \end{matrix}$

$\rightarrow \ker(T) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| x_3 \in \mathbb{R} \right\}$ $\overset{\text{kernel}}{\Longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

# Finding image

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{RREF} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

ستون هایی که Pivot اند

را انتخاب کن

$$\longrightarrow \quad Im(T) = span\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$$

? تعریف ضرب داخلی و حل یک مثال

$$\langle \cdot , \cdot \rangle : V \times V \to F \qquad [u, v, w \in V \ , \ \alpha \in F]$$

★ خواص

۱. تقارن مزدوج

$$\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$$

2. خاصیت خطی

$$\langle \alpha u + v, w \rangle = \alpha \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$$

3. مثبت_قطعی

$$\langle v, v \rangle \geq 0 \ \text{ and } \left( \langle v, v \rangle = 0 \text{ if and only if } v = 0 \right)$$

مثلا. ضرب داخلی در $\mathbb{R}^2$

$$\begin{array}{l} u = (u_1, u_2) \\ v = (v_1, v_2) \end{array} \rightarrow \langle u, v \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2$$

مثلا. $\begin{cases} u = (3,4) \\ v = (1,2) \end{cases} \rightarrow \langle u, v \rangle = 3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 = 11$

(۳) فرایند گرام - اشمیت چیست و چطور بکار می‌رود؟

برای تبدیل یک مجموعه بردارهای مستقل خطی به مجموعه بردارهای متعامد به‌کار می‌رود که هر دو مجموعه یک subspace را span می‌کنند.

← در واقع بسیار مفید برای ساخت ماتریس متعامد Q و ماتریس بالامثلثی R در تجزیه QR بکار می‌رود.

# مراحل فرایند گرام - اشمیت

input: linearly independent vectors $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$

output: orthogonal set $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$

1. Initialize the first vector

$$u_1 = v_1$$

2. Orthogonalize each subsequent vector

For $k = 2, 3, \dots, n$:

$$u_k = v_k - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\langle v_k, u_j \rangle}{\langle u_j, u_j \rangle} u_j$$

3. Normalize (obtaining orthonormal set)

$$e_k = \frac{u_k}{\|u_k\|}$$

$$\|u_k\| = \sqrt{\langle u_k, u_k \rangle}$$

۳. مثال: $v_1=(1,1)$ , $v_2=(1,0)$

$$u_1 = v_1 = (1,1)$$

$$u_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, u_1\rangle}{\langle u_1, u_1\rangle} u_1$$

$$\langle v_2, u_1\rangle = (1,0)\cdot(1,1) = 1$$

$$\langle u_1, u_1\rangle = (1,1)\cdot(1,1) = 2$$

$$u_2 = (1,0) - \tfrac{1}{2}(1,1) = \left(\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\right)$$

نرمال سازی:

$$e_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \frac{(1,1)}{\sqrt{2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$e_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|} = \frac{(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

? بررسی orthogonality

در مجموعه orthogonal ← بردارها عمود برهم هستند

دو بردار u و v ، orthogonal هستند اگر:

$$\langle u, v\rangle = 0$$

# ویژگی های بردارهای orthogonal

1. Perpendicularity $\longrightarrow$ بردارها زاویه قائم دارند

2. Projection $\longrightarrow$ $\mathrm{proj}_v\, u = \frac{\langle u,v\rangle}{\langle v,v\rangle} v = 0$

3. Pythagorean Theorem $\longrightarrow$ $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$

$$\hookrightarrow \|u+v\|^2 = \langle u+v, u+v\rangle = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\cancelto{0}{\langle u,v\rangle} = \|u\|^2 + \|v\|^2$$

$\{u_1, u_2, \dots, u_n\} \longrightarrow$ is orthogonal set if

$$\forall_{i\neq j} \quad \langle u_i , u_j \rangle = 0$$

Also if $\forall_i \|u_i\| = 1 \xrightarrow{\text{is}}$ orthonormal

? فرم کانونیکال جردن چیست و چه کاربردی دارد؟

فرم خاصی از ماتریس مربعی

$$A_{n\times n} = PJP^{-1}$$

فرم کانونی جردن

$$J_k(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{bmatrix}_{k\times k}$$

بلوک جردن

برای مقادیر ویژه تکراری

# کاربردها

1. راحت تر کردن محاسبات (مثل محاسبه توان)
2. آنالیز مقادیر ویژه و بردار ویژه
3. حل معادلات دیفرانسیل خطی
4. فهم ساختار ماتریس ← ساختار را نشان می دهد که چقدر ماتریس از قطری شدن فاصله دارد.

مثال.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{مشخصه}]{\text{معادله}} (\lambda - 3)^3 = 0$$

$$\longrightarrow J = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$