» Randomness

ویژگی‌ها
- Unpredictability
- Equal Probability
- Lack of Pattern

Expected Value → Long-term average value of a random variable

Pseudo-Randomness
- Pseudo-Random Number Generators (PRNGs)
  - مث → Linear Congruential Generator
- Cryptographically secure PRNGs
  - مث → mersenne Twister Algorithm

بررسی Randomness
- Frequency Test
- Runs Test
- Chi-Square Test
- AutoCorrelation Test

AI (21)

>> Random Variables

انواع متغیرهای تصادفی
→ Discrete Random Variables → PMF
→ Continuous Random Variables → PDF, CDF

Probability Mass Function (PMF)

$$P(X=x) = P(x)$$

Probability Density Function (PDF)

$$f(x) = P(X=x)$$

Cumulative Distribution Function (CDF)

$$F(x) = P(X \leq x)$$

Expected Value (mean)

$$E(X) = \sum_x x \cdot P(x)$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx$$

Variance & Standard Deviation

$$Var(X) = \sum_x (x - E(X))^2 P(x)$$

$$Var(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(X))^2 f(x)\, dx$$

$$\sigma_X = \sqrt{Var(X)}$$

Common Distributions

Discrete
- → Bernoulli Distribution
- → Binomial Distribution
- → Poisson Distribution

Continuous
- → Uniform Distribution
- → Normal Distribution
- → Exponential Distribution

Join Distribution

Discrete: $P(X=x, Y=y)$

Continuous: $f(x,y)$

Marginal Distribution

discrete: $P(X=x) = \sum_y P(X=x, Y=y)$

Continuous: $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy$

Conditional Distribution

discrete: $P(X=x \mid Y=y) = \dfrac{P(X=x, Y=y)}{P(Y=y)}$

continuos: $f_{X|Y}(x|y) = \dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}$

AI (22)

>> Probability Distribution

Binomial Distribution:

در یک تعداد مشخص آزمایش
چند بار موفقیت رخ می‌دهد

$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Poisson Distribution:

در یک بازه زمانی/مکانی با چه احتمالی K بار
واقعه مورد نظر رخ می‌دهد؟

$$P(X=k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

Probability Density Function (PDF):

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\, dx$$

Uniform Distribution:

$$f(x) = \frac{1}{b-a} \quad (\text{for } a \leq x \leq b)$$

Normal Distribution:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Exponential Distribution:

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad \text{for } x \geq 0$$

Cumulative Distribution Function (CDF)

discrete: $F(x) = P(X \leq x) = \sum_{t \leq x} P(X=t)$

continuous: $F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt$

Moments of a Distribution

1. mean (Expected Value)

discrete: $E(x) = \mu = \sum_{x} x \cdot P(X=x)$

continuous: $E(x) = \mu = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx$

2. Variance

$$Var(X) = \sigma^2 = \sum_{x} (x-\mu)^2 P(X=x)$$

$$Var(X) = \sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)\, dx$$

3. standard Deviation

$$\sigma = \sqrt{Var(X)}$$

>> Conditional Probability

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Bayes' Theorem

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)\,P(A)}{P(B)}$$

اگر A و B از هم مستقل باشند:

$P(A|B) = P(A)$
$P(B|A) = P(B)$
$P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$

AI (23)

>> Independent & Identically Distributed (i.i.d.)

$X_1, X_2, \dots, X_n$ are independent if:

$$P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n) = P(X_1 = x_1) \cdot P(X_2 = x_2) \cdots P(X_n = x_n)$$

Law of Large Numbers (LLN)

با زیاد شدن تعداد متغیرهای i.i.d ، میانگین نمونه‌ها به میانگین توزیع جامعه میل می‌کند.

انواع:
- Strong LLN $\longrightarrow$ همیشه همگرا می‌شود
- weak LLN $\longrightarrow$ با احتمالات همگرا می‌شود

Central Limit Theorem

بیان می‌کند که تعداد زیاد i.i.d ها با میانگین و واریانس محدود، به طور تقریبی دارای توزیع نرمال خواهند بود. (صرف نظر از توزیع اولیه متغیرها)

>> Cumulative Distribution Function (CDF)

$$F_X(x) = P(X \leq x)$$

ویژگی‌ها

- Non-decreasing $\longrightarrow$ $F_X(b) \geq F_X(a)$ for $b > a$
- Right-Continuous $\longrightarrow$ $\lim_{x \to a^+} F_X(x) = F_X(a)$
- Limits $\longrightarrow$ $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$
  $\longrightarrow$ $\lim_{x \to \infty} F_X(x) = 1$

discrete: $F_X(x) = \sum_{x_i \leq x} P(X = x_i) = \sum_{x_i < x} P_i$

continuos: $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\, dt$

>> probability Density Function (PDF)

ویژگی‌ها:

Non-negativity $\rightarrow f_X(x) \geqslant 0$, for all x

Normalization $\longrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\, dx = 1$

رابطه با CDF:

$$f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x)$$

Probability Calculation

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(x)\, dx$$

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\, dx$$

$$Var(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E[X])^2 f_X(x)\, dx$$

>> Probability Mass Function (PMF)

برای گسسته‌ها به کار می‌رود

$$P_X(x) = P(X = x)$$

ویژگی‌ها

Non-negativity $\longrightarrow P_X(x) \geqslant 0$

Normalization $\longrightarrow \sum_x P_X(x) = 1$

رابطه با CDF:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \sum_{t \leq x} P_X(t)$$

A i 24

$$E[X] = \sum_{x} x P_X(x)$$

$$Var(X) = \sum_{x} (x - E[X])^2 P_X(x)$$