



**MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
UNIVERSIDADE FEDERAL DE RORAIMA  
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO  
ANÁLISE DE ALGORITMOS - DCC 606**



**ANA JULIA VIEIRA PEREIRA ANDRADE DA COSTA  
GABRIEL PEIXOTO MENEZES DA COSTA**

**ANÁLISE DESCRITIVA DO ARTIGO: APPROXIMATE GRAPH COLORING BY  
SEMIDEFINITE PROGRAMMING**

Trabalho apresentado para a disciplina de  
Análise de Algoritmos no curso de Ciência  
da Computação da Universidade Federal de  
Roraima, como parte dos requisitos para a  
aprovação do projeto final da disciplina.

**Boa Vista, RR  
2025**



## **Análise Descritiva do Artigo: Approximate Graph Coloring by Semidefinite Programming**

### **1. Título e Autores**

Em março de 1998, o Journal of the ACM (Vol. 45, nº 2, pp. 246–265) publicou o artigo “Approximate Graph Coloring by Semidefinite Programming”, resultado da colaboração de David Karger (MIT), Rajeev Motwani (Stanford) e Madhu Sudan (MIT).

### **2. Objetivo**

O objetivo do trabalho é criar algoritmos eficientes, que funcionem em tempo razoável e com uso de aleatoriedade, para colorir os vértices de grafos que podem ser coloridos com  $k$  cores. A ideia é usar o menor número possível de cores, melhorando as soluções já conhecidas, principalmente em relação ao tamanho do grafo ( $n$ ) e ao grau máximo dos vértices ( $\Delta$ ). Para isso, os autores exploram uma técnica matemática moderna chamada Programação Semidefinida (SDP), que permite obter aproximações mais precisas para esse tipo de problema complexo.

### **3. Justificativa**

Colorir grafos é um problema NP-difícil com aplicações práticas (alocação de registradores, horários de provas). O sucesso da Programação Semidefinida em aproximar o MAX CUT motivou seu uso na coloração. Como resultados de dureza indicam que não é viável melhorar muito os limites em função de  $n$  (a menos que  $P=NP$ ), faz sentido buscar avanços parametrizados pelo grau máximo  $\Delta$ .

### **4. Metodologia**

Para aproximar a coloração de vértices em grafos  $k$ -coloríveis, os autores começam criando uma versão relaxada do problema: em vez de cores discretas, atribuem a cada vértice um

vetor unitário em  $R^n$  de modo que vetores de vértices ligados tenham produto interno pequeno ( $\leq -1/(k-1)$ ). Essa formulação vetorial se traduz num programa semidefinido (SDP) que pode ser resolvido em tempo polinomial usando métodos clássicos de pontos interiores ou elipsóides, fornecendo uma solução “suave” que ainda reflete a estrutura de coloração original.

Para transformar esses vetores em cores reais, aplicam técnicas de rounding aleatório. Um método usa hiperplanos aleatórios para particionar os vetores em grupos (cores), retirando vértices conflituosos até obter um “semicolorido” válido; o outro projeto a solução num vetor normal Gaussiano e seleciona vértices acima de um limiar, gerando grandes conjuntos independentes. Além disso, uma heurística inspirada em Wigderson trata vértices de grau muito alto de forma recursiva, enquanto vértices de grau mais baixo passam pelo esquema de projeção. Por fim, qualquer semicolorido que cubra pelo menos metade dos vértices é refinado em uma coloração completa, pagando apenas um fator logarítmico extra no total de cores.



## 5. Resultados

Os autores desenvolveram e analisaram algoritmos de coloração aproximada que combinam relaxação semidefinida (SDP) com técnicas de arredondamento aleatório, obtendo garantias tanto em função do grau máximo  $\Delta$  quanto do número de vértices  $n$ . No caso de grafos 3-coloríveis, mostraram que é possível usar  $\min\{O(\Delta^{1/3} \log^{1/2} \log n), O(n^{1/4} \log^{1/2} n)\}$  cores; já para grafos  $k$ -coloríveis, estenderam a análise para garantir  $\min\{O(\Delta^{1-2/k} \log^{1/2} \Delta \log n), O(n^{1-3/(k+1)} \log^{1/2} n)\}$  cores. Essas fórmulas resultam de duas abordagens de rounding, partição por hiperplanos e projeção vetorial, aliadas a uma estratégia recursiva inspirada em Wigderson, que trata de forma especial vértices de grau muito alto.

Além disso, estabeleceram a primeira razão de aproximação não trivial em função de  $\Delta$  (por exemplo,  $O(\Delta^{1/3})$  para  $k=3$ ) e melhoraram as menores garantias conhecidas em termos de  $n$  (atingindo  $O(n^{1/4})$  versus  $O(n^{3/8})$  anteriores). Demonstraram ainda que a relaxação semidefinida estrita coincide exatamente com a função  $\vartheta$  de Lovász do grafo complementar, revelando uma dualidade profunda entre essas formulações. Por fim, construíram famílias de grafos vetorialmente 3-coloríveis que exigem  $\Omega(n^c)$  cores reais, evidenciando um gap inerente que limita até onde a SDP pode aproximar  $\chi(G)$ .

## 6. Conclusão

O principal empecilho da abordagem via SDP é o grande “gap” entre a coloração vetorial relaxada e a coloração real. Usando grafos de Kneser, os autores mostram que, mesmo quando o relaxado indica  $k$ -coloríveis, o número cromático pode crescer como  $n^{\Omega(1)}$  (por exemplo,  $n^{0,016}$  para  $k=3$ ), o que impede qualquer esquema semelhante de garantir cores  $n^{o(1)}$  em todos os casos.

Além disso, resultados de dureza posteriores (Feige–Kilian, Håstad) indicam que melhorar substancialmente essas garantias, aproximando  $\chi(G)$  dentro de  $n^{1-\delta}$  para qualquer  $\delta>0$ , seria tão difícil quanto provar  $NP=RP$ . A dualidade com a função  $\vartheta$  de Lovász confirma a elegância teórica da relaxação, mas não reduz esse gap em geral, limitando também seu uso prático a casos específicos, como grafos com grandes cliques onde outras técnicas (p. ex., Alon–Kahale) se mostram mais eficazes.

## 7. Contribuição

Os autores introduziram o uso de Programação Semidefinida para aproximar a coloração de grafos, combinando cortes por hiperplanos e projeção vetorial com um tratamento recursivo de vértices de alto grau. Eles obtiveram os melhores limites da época em função do tamanho e do grau do grafo, demonstraram a equivalência com a função  $\vartheta$  de Lovász e identificaram um gap intrínseco que baliza o alcance da técnica.

## 8. Crítica

Embora o artigo abra novas fronteiras ao usar programação semidefinida para colorir grafos e ofereça limites teóricos atraentes, ele enfrenta obstáculos práticos que dificultam sua adoção em cenários reais: a dependência de solvers especializados, o uso de etapas aleatórias que reduzem a previsibilidade e a diferença ainda grande entre a solução relaxada e a coloração final tornam esses algoritmos pouco viáveis para grafos de grande escala, onde a rapidez e a simplicidade de implementação são essenciais.

## 9. Referência Bibliográfica

KARGER, David; MOTWANI, Rajeev; SUDAN, Madhu. Approximate graph coloring by semidefinite programming. *arXiv preprint arXiv/9812008v1*, 1998. Disponível em: <http://arXiv.org/abs/cs/9812008v1>. Acesso em: 22 set. 2024.