

←

←

重点：光线追踪（哪个部分计算量最大）、网格变形（拉普拉斯变形、as...as possible 保持细节）、阴影方法各自的优缺点特点、光照模型（phong）、网格简化细分有哪几种、基本的颜色模型、图形学顶会、ICP 算法分几步迭代之类的、判断点不在面片内部⁶⁴

Z-buffer 算法发明人：Edwin Catmull 2019 图灵奖

Leif Kobbelt：开源软件 OpenMesh 创始人

Charles Loop：Loop 细分算法发明人

Hugues Hoppe：2004 获 ACM SIGGRAPH 成就奖，2011 年获选 ACM Fellow

Turner Whitted 于 1980 年首次提出一个包含光反射和折射效果的模型

第 1 节 图形学概论

1 图形学简介

1.1 计算机图形学是利用计算机研究图形的表示、生成、处理、显示的学科

1.2 计算机生成的图像可以分为几种不同的类型：二维(2D)、三维(3D)和动画图形

1.2.1 2D 计算机图形是基于计算机的数字图像生成——主要来自二维模型（例如 2D 几何模型、文本和数字图像）和特定于它们的技术

1.2.2 2D 计算机图形始于 1950 年代，基于矢量图形设备。在很大程度上被基于光栅的设备所取代

1.2.3 3D 计算机图形（与 2D 计算机图形相反）是使用存储在计算机中的几何数据（通常是笛卡尔）的三维表示的图形，用于执行计算和渲染 2D 图像。

1.2.4 此类图像可以存储以供稍后查看或实时显示

1.3 图像(Imaging)=表示二维图像

模型(Modeling)=表示三维物体

渲染(Rendering)=从三维物体中生成二维图像

动画(Animation)=模拟时间上的变化

1.4 顶会

2 图形软件系统

3 图形与图像、计算机视觉、模式识别

图形与图像、计算机视觉、模式识别

Input \ Output	Image	Knowledge
	Image	Knowledge
Image	Digital Image Processing	Computer Vision
Knowledge	Computer Graphics	Artificial Intelligence

3.1

3.2 与图形学的区分方法

4 图形输出设备（CRT、等离子板显示器、液晶显示器件 LCD、电子发光显示器、随即扫

描显示器、光栅扫描显示器、显示处理机 DPU)

5 发展历史

5.1 1963 年, MIT 林肯实验室的 I.E.Sutherland 发表了一篇题为“Sketchpad: 一个人机交互通信的图形系统”的博士论文, 提出了图形学的概念

5.2 2020 年是智能计算机图形学的元年。工业级应用: DLSS 抗锯齿技术帧率和画质翻倍

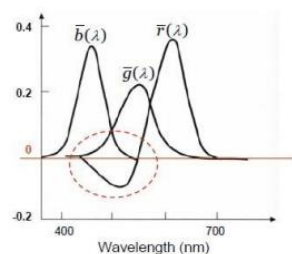
第 2 节基本知识

1 颜色视觉

1.1 RGB 颜色空间

1.1.1 颜色使用三通道 RGB 向量 (r, g, b) 来表示。通常可以将 r, g, b 分别规整化为 $[0, 1]$ 内的浮点数; 当使用 8bit 进行存储时, r, g, b 通常取值为 $[0, 255]$ 内的整数

1.1.2 一部分色彩无法表示成 R,G,B 光波的正线性组合, 这是 RGB 颜色空间的一个缺点



1.1.3

1.2 CMY 颜色空间

1.2.1 Cyan(青), Magenta(品红), Yellow(黄): 分别是 R,G,B 的补色。CMY 被称为“减色系统”, $(0, 0, 0)$ 为白, $(1, 1, 1)$ 为黑。

1.3 HSV 颜色空间

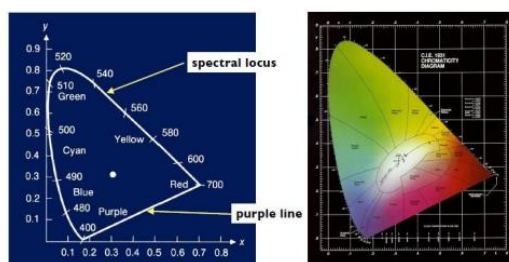
1.3.1 圆锥形的颜色空间 (色调、饱和度、亮度), 比 RGB 更加用户友好

1.4 CIE XYZ 颜色空间

1.4.1 可以表示所有可感知的颜色(而 RGB 空间却不能), 更多地应用于颜色科学的研究

$$x = X / (X + Y + Z)$$

$$y = Y / (X + Y + Z)$$



1.4.2

2 三角网格模型

2.1 三角网格是由一系列欧式空间中的三维顶点以及连接这些顶点的若干三角面片组成, 具体包括顶点集合和面片集合

2.2 法向量

2.2.1 面片的法向朝向决定了一个三角面片的正面与反面, 对于连续可定向的三角网格整体而言, 相邻的三角面片需要具备一致的法向量朝向。

2.2.2 顶点法向: 周围面片加权叠加

2.3 每个顶点指定颜色，模型表面每个点通过插值计算（同时考虑一个虚拟的光照）

3 光照模型与明暗处理

3.1 光照模型用于计算光的强度

3.1.1 局部光照明关注物体直接受到光源影响所产生的光照效果

3.1.2 全局光照明关注阴影效果；关注所有不是直接与光源位置相关的光照效果，例如反射和折射效果，等等

3.2 历史

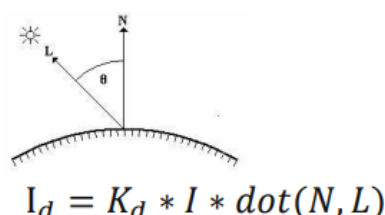
3.2.1 Bouknight 提出了第一个光反射模型：Lambert 漫反射光 + 环境光

3.2.2 Gouraud 提出了漫反射模型加插值的思想：Lambert 漫反射光+Barycentric 插值

3.2.3 Phong 模型漫反射+环境光+高光

3.3 Lambert 光照模型

3.3.1 主要是用来模拟粗糙物体表面的光照现象（dot 表示内积；Kd 漫反射系数，三个分量分别代表 R,G,B 三个通道的漫反射系数，与模型自身的色彩紧密相关）


$$I_d = K_d * I * \text{dot}(N, L)$$

3.4 HalfLambert 光照模型

3.4.1 提升了物体的整体亮度，本质不变

$$I_d = K_d * I * (\text{dot}(N, L) * 0.5 + 0.5)$$

3.5 Phong 光照模型

3.5.1 支持点光源和方向光源

3.5.2 是局部光照模型，将局部光照明效果分解为三个部分：漫反射光效果、镜面反射光效果、环境光效果

3.5.3 漫反射光效果与之前相同

3.5.4 镜面反射光效果

3.5.4.1 对于光滑的平面，反射光线往往集中在一个小的立体角内（Ks 是镜面反射系数，与物体表面光滑程度相关；n 是反射指数；n 越大，则高光区域越集中）

$$I_s = I_i K_s * (R \cdot V)^n$$

3.5.5 环境光效果（Ka 是物体对环境光的反射系数）

$$I_a = I_i K_a$$

3.6 明暗处理：通常的明暗处理除了使用光照模型外，还需要进行插值

3.7 Gouraud 明暗处理（Gouraud 插值）

3.7.1 首先计算所有模型顶点的色彩值

3.7.2 对模型上的任何一点，按照其所在的三角面片上顶点的色彩值按重心插值的结果赋予其色彩值

3.8 Phong 明暗处理

3.8.1 Phong 明暗处理不是对颜色插值，而是对点的法向量进行插值，得到连续的法向量场，再利用该法向量场逐点使用光照模型进行色彩的计算

4 视点变换和视点方向（简单变换都是可逆的，可以相互复合和嵌套）

4.1 刚体变换 Rigid-body（不变、平移、旋转）：保持度量（长度、角度、大小）

4.2 相似变换（不变、平移、旋转、[均衡缩放 Isotropic scaling](#)）：保持角度

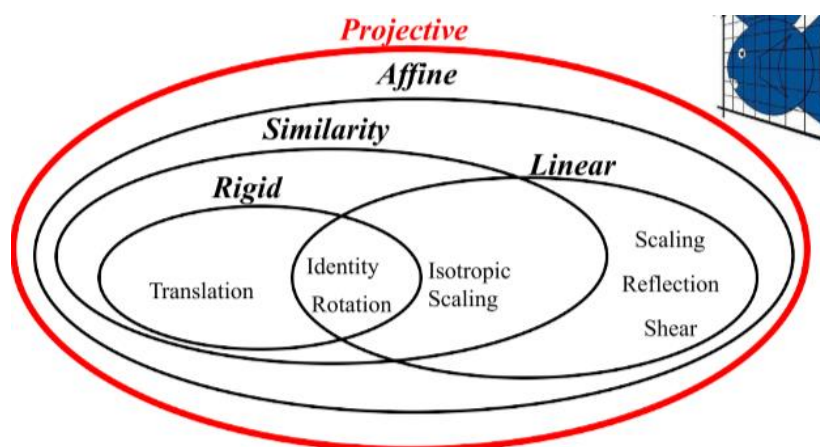
4.3 线性变换（不变、旋转、缩放(不一定要均衡缩放)，对称(Reflection)，错切(Shear))

$$L(p+q) = L(p) + L(q)$$

4.3.1 满足 $aL(p) = L(ap)$

4.4 仿射变换（线性变换，相似变换）：两条在仿射变换之前平行的直线，在仿射变换之后依旧平行

4.5 投影变换：保持直线



4.6 变换的表示

4.6.1 矩阵形式和齐次坐标

4.6.1.1 当齐次坐标被仿射矩阵作用时， w 不会改变；而如果被投影矩阵作用， w 会改变

4.6.1.2 当 w 非零时，通过将所有四个坐标同时除以 w 以归一化

4.6.2 平移变换

4.6.3 缩放变换

4.6.4 旋转变换

4.6.4.1 三维空间中物体的旋转具有三个独立的自由度，注意三角函数的位置和使用

4.6.4.2 围绕单位向量使用 Rodrigues 公式

4.6.5 变换的复合相当于矩阵乘法，不满足交换律

4.7 法向量变换

4.7.1 变换切平面(tangent plane)，再通过切平面计算法向量，而不是直接计算

切平面上的任一向量 v_{OS} 变换后成为 v_{WS} ：

$$v_{WS} = M v_{OS}$$

$$n_{WS} = (M^{-1})^T n_{OS}$$

- 4.8 视点和投影模式
 - 4.8.1 正交投影（参考课件上的图片）
 - 4.8.1.1 正交投影是视点在无穷远处的投影模式，缺乏立体透视效果
 - 4.8.2 透视投影
 - 4.8.2.1 透视投影是视点在有限距离处的投影模式，具有立体透视效果
 - 4.8.2.2 透视投影矩阵
- 5 绘制管线
 - 5.1 顶点着色器，会进行顶点和法相的变换
 - 5.1.1 物体变换、视图变换、投影变换、视口变换
 - 5.2 几何着色器
 - 5.3 片段着色器
- 第 3 节光栅图形学
 - 1 走样和反走样
 - 1.1 引入中间颜色，缓解视觉突兀感
 - 1.2 在采样前模糊（预过滤）（先采样再过滤会发生什么）
 - 2 确定最佳逼近图形的像素集合，并用指定的颜色和灰度设置像素的过程叫做图形的扫描转换，或者称作“光栅化”
 - 3 直线的扫描转换算法
 - 3.1 基本增量算法（DDA 算法），斜率过大的直线，交换 x 与 y 的角色
 - 3.2 Bresenham 算法
 - 3.2.1 考虑的是像素中心点，集中了 DDA 算法的优点，应用广泛
 - 4 光栅图形
 - 4.1 多边形的表示方式：顶点表示，点阵表示
 - 4.2 多边形的扫描转换：把顶点表示转换为点阵表示
 - 5 四连通区域和八连通区域
 - 5.1 四连通区域 \subseteq 八连通区域
 - 5.2 四连通区域的边界是八连通区域
 - 5.3 八连通区域的边界是四连通区域
 - 6 逐点判断算法
 - 6.1 判断一个点是否位于多边形内部：射线法
 - 6.2 速度慢，没有考虑像素之间的联系
 - 6.3 改进至扫描线算法：区域连贯性，扫描线连贯性，边的连贯性
 - 7 多边形扫描转换算法
 - 7.1 扫描线算法填充多边形的基本思想是按扫描线顺序，计算扫描线与多边形的相交区间，再用要求的颜色显示这些区间的像素，即完成填充工作
 - 7.2 交点应保证为偶数个
 - 7.2.1 若共享顶点的两条边分别落在扫描线的两边，交点只能算一个
 - 7.2.2 若共享顶点的两条边在扫描线的同一边，这时交点作为 0 个或者 2 个
 - 8 隐藏线隐藏面消除算法
 - 8.1 图像空间消隐（z 缓冲器算法，扫描线算法等）
 - 8.1.1 在屏幕坐标系中进行的，生成的图像一般受限于显示器的分辨率
 - 8.1.2 算法复杂度为 $O(nN)$
 - 8.2 物体空间消隐（背面剔除、表优先级算法等）

- 8.2.1 算法精度高，与显示器的分辨率无关，适合于精密的 CAD 工程领域
- 8.2.2 算法复杂度为 $O(n^2)$
- 8.3 z 缓冲器算法
 - 8.3.1 z 缓冲器：存储的是对应像素的 z 值，z 值越大，离视点越近
- 8.4 背面剔除算法
 - 8.4.1 作为消隐算法，背面剔除适用于凸多面体，不适用于凹多面体或其它复杂物体
 - 8.4.2 适用于场景消隐的预处理：消除一些显然不可见表面，从而提高其它消隐算法的效率
- 8.5 表优先级算法
- 8.6 二维半物体的深度排序
 - 8.6.1 二维半物体的深度值是常数，只要简单地比较其 z 值即可

第 5 节数字几何处理

- 1 输入数据
- 2 坐标系
 - 2.1 局部坐标系相比于世界坐标系优势
 - 2.1.1 表示简洁
 - 2.1.2 同一个物体多次出现时，可以通过变换得到新的物体
 - 2.1.3 便于进行几何操作
- 3 三维模型数据结构（点云、体素、网格）
- 4 多边形表示
 - 4.1 大量的平面片表示（三角形、四边形等）
 - 4.2 多边形应当封闭
 - 4.3 用封闭的多边形面片表示三维物体
- 5 数据格式（常用 obj 格式，STL 格式、PLY 格式）
- 6 点云的获取：直接采集，从多视角 2D 图片重建点云
- 7 图像配准：根据相关变换的初始猜测对齐两个部分重叠的网格结构
 - 7.1 ICP 算法:迭代最近点
 - 7.1.1 选择若干个随机点（如 100 个）
 - 7.1.2 匹配每个随机点在另一个模型中的最近点，可使用例如 k-d 树等数据结构
 - 7.1.3 拒绝距离大于 k 倍中位数的点对，构建损失函数

$$E = \sum \|Rp_i + t - q_i\|^2$$
 - 7.1.4 最小化损失函数
- 8 网格化
 - 8.1 三角网格的半边表示
 - 8.1.1 每个顶点至少保存两部分信息：顶点的集合信息和从该顶点出发的一条半边
 - 8.1.2 每条边需要存储的信息为：
 - 8.1.2.1 该半边的目标顶点 tar(e);
 - 8.1.2.2 该半边在同一三角形的下一条半边 next(e);
 - 8.1.2.3 该半边属于同一条边的对边 opposite(e);
 - 8.1.2.4 该半边所属的面 IncFace(e)
 - 8.1.3 关注半边结构下对某个顶点的遍历

8.1.4 邻接查询

9 填充孔洞

9.1 计算一个粗糙的三角化 T

9.2 优化和平滑

10 拉普拉斯平滑

10.1 diffusion 方程的离散化

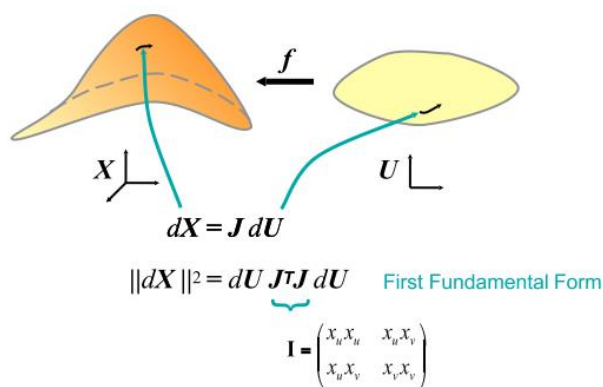
$$\frac{\partial}{\partial t} p_i = \mu \Delta p_i$$

$$p'_i = p_i + \mu dt \Delta p_i \quad \text{直到收敛}$$

10.2 迭代

11 参数化

11.1 纹理映射



11.2

J 是一个雅可比矩阵

11.3 映射的特点

11.3.1 利用曲面第一基本型 I

I 的特征值 $\lambda_{1,2}$

J 的奇异值 $\sigma_{1,2}$ ($\sigma_{i,2} = \lambda_i$)

11.3.2 等距 (Isometric) $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$

11.3.3 保角 (Conformal) $\lambda_1 / \lambda_2 = 1$

11.3.4 保面积 (Equiareal) $\lambda_1 * \lambda_2 = 1$

11.4 目标：等距映射较少，最小化关于某一度量的形变

12 As-Rigid-Aspossible surface modeling

12.1 所有的局部邻域内的边通过刚体变换进行变换来保持模型的局部细节

$$\min \sum_{j \in N(i)} \|(v'_i - v'_j) - R_i(v_j - v_i)\|^2$$

12.2

第 6 节 数字几何处理 - 点云

1 点云：

1.1 只有点，没有连接性

1.2 (x,y,z)坐标的集合，可能有法向信息

1.3 有方向的点成为 surfels (面元)

2 迭代最近点算法 (ICP)

2.1 给定一对形状, X 和 Y , 迭代:

2.2 对任意 $x_i \in X$,找到最近点 $y_i \in Y$.

2.3 求解变形参数旋转 R 和平移 t , 最小化 $\sum_{i=1}^N \|Rx_i + t - y_i\|_2^2$

3 ICP:计算最近点 (O (MN), 实际算法是遍历)

4 ICP:最优变换

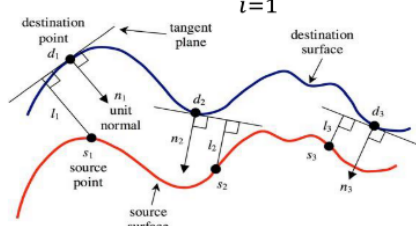
■ 给定一对形状, X 和 Y , 迭代:

1. 对任意 $x_i \in X$, 找到最近点 $y_i \in Y$.

2. 求解变形参数旋转 R 和平移 t , 最小化

$$\sum_{i=1}^N d(Rx_i + t, P(y_i))^2 = \sum_{i=1}^N ((Rx_i + t - y_i)^T n_{y_i})^2$$

求解:
最小化点到切
平面的距离



4.1 线性化旋转。假设旋转角度很小

5 法向估计 (PCA)

5.1 如果是干净的表面样本

5.1.1 找到 n , 最小化 k 个顶点集合的能量

$$n_{opt} = \arg \min_{\|n\|=1} \sum_{i=1}^k ((p_i - P)^T n)^2$$

5.1.2 使用拉格朗日乘子

法向量 n 必须是矩阵的一个特征向量:

$$Cn = \lambda n \quad C = \sum_{i=1}^k (p_i - P)(p_i - P)^T$$

而且, n_{opt} 必须是对应于 C 的最小特征值的特征向量。

变换: 使用 $C = \sum_{i=1}^k (p_i - \bar{P})(p_i - \bar{P})^T$, $\bar{P} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k p_i$

5.1.3

5.1.4 关键参数: k 由于采样不均匀, 一般固定一个半径为 r 的点, 并使用半径为 r 的球内的所有点

5.1.4.1 由于曲率, 较大的 r 会导致估计偏差

5.1.4.2 由于噪声, 小 r 会导致误差

6 噪音估计 (PCA) 重点在课件 59 页

7 表面重建 (通过隐式模型)

7.1 隐式曲面

7.1.1 通过算出的法向量, 计算出空间中任意一点到点云中最近点法平面的距离, 通过判断距离的正负可以决定点在面的内外。从而刻画出了曲面

7.2 泊松表面重建

7.2.1 主要目标:构建曲面的指标函数

$$7.2.2 \quad \min_{\chi} \|\nabla \chi - V\|^2$$

或者, 由于 $\Delta \chi = \nabla \cdot \nabla \chi$

采用散度算子转化为: $\min_{\chi} \|\Delta \chi - \nabla \cdot V\|$

所以问题转化为了求解泊松方程 $\Delta \chi = \nabla \cdot V$ 的解。

7.2.3

8 连续 Laplacian

8.1 直观来看, F 在 p_0 的 Laplacian 定义了 F 在 p_0 点的值和 F 在 p_0 邻域的点的值的平均值的差。

9 离散拉普拉斯

10

第 6 节 网格光顺、简化、细分与检索

1 网格光滑

1.1 Laplacian 曲线光滑

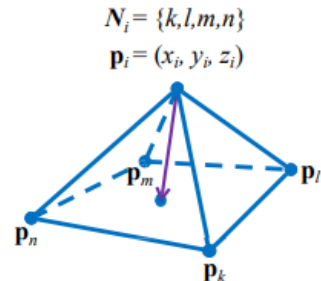
$$1.1.1 \quad L(p_i) = \frac{1}{2}(p_{i+1} - p_i) + \frac{1}{2}(p_{i-1} - p_i)$$

1.1.2 迭代 m 次 (针对非边界点) $p_i \leftarrow p_i + \lambda L(p_i)$

1.1.3 λ 条件? $0 < \lambda < 1$

1.2 Laplacian 网格光滑

$$1.2.1 \quad p_i^{(t+1)} \leftarrow p_i^{(t)} + \lambda \Delta p_i^{(t)}$$



$$\frac{1}{|N_i|} \left(\sum_{j \in N_i} p_j \right) - p_i$$

1.2.2

1.2.3 迭代次数过多, 会导致网格变小

2 简化

2.1 拓扑结构(Topology): 连通多边形网格的结构

2.1.1 亏格: 网格表面孔洞的数目

2.2 二维流形、带边界

2.3 采样 (sampling)

2.4 自适应细分 (adaptive subdivision)

2.5 去除 (decimation)

2.6 顶点合并 (vertex merging)

3 网格细分: 对于一个给定的原始网格, 进行精细地改进产生更光滑的效果

3.1 第一步, 称作细化阶段, 创建新顶点并与先前顶点相连产生新的、更小的三角形

3.2 第二步, 称作平滑阶段, 计算新顶点的位置

3.3 Loop 细分 (一个三角形变成四个)

$$p^{k+1} = (1 - n\beta)p^k + \beta(p_0^k + \dots + p_{n-1}^k)$$

$$p_i^{k+1} = \frac{3p^k + 3p_i^k + p_{i-1}^k + p_{i+1}^k}{8}, i = 0, \dots, n-1$$

3.3.1

$$\beta \text{ 是 } n \text{ 的函数 } \frac{1}{n} \left(5/8 - \left(\frac{3}{8} + \frac{1}{4} \cos \frac{2\pi}{n} \right)^2 \right)$$

3.3.2

3.4 根号 3 细分

$$p_m^{k+1} = (p_a^k + p_b^k + p_c^k)/3$$

$$p^{k+1} = (1 - n\beta)p^k + \beta \sum_{i=0}^{n-1} p_i^k$$

3.4.1

$$\beta(n) = \frac{4 - 2\cos(2\pi/n)}{9n}$$

3.4.2

4 网格模型简化

4.1 层次细节简化技术

4.1.1 从远处观察物体时, 采用精细的模型, 从远处观察物体时, 采用较粗糙的模型

4.2 基于长方体滤波的多面体简化

4.2.1 主要缺点是顶点的合并导致了一些重要高频细节的丢失

4.3 顶点删除技术

4.4 局部判别准则 (Schroeder 的局部判别准则)

4.5 边收缩变换 (Hoppe)

4.5.1 渐进的网格简化技术

4.5.2 逆变换: 顶点分裂变换

4.6 基于二次误差度量的简化技术

5 三维形状描述符 SpinImages

5.1 Spinimages 的生成过程可以被可视化为一个围绕定向点基旋转的薄片, 在扫描空间时积累点

6 3DShapeContext

7 ShapeDistributions

7.1 简洁的形状描述符

7.2 常见的参数化

7.3 随机点函数

7.4 比较: 规模标准化和比较形状分布

第 7 节 网格变形

1 曲面变形: 寻找“变形不变的”模型表示

2 空间变形: 寻找具有“优良属性”的空间映射

3 Laplacian 坐标

3.1 变形: 最小化能量

最小化能量

$$V' = \underset{V'}{\operatorname{argmin}} \sum_{i=1}^n \|\delta_i - L(v'_i)\|^2 + \sum_{i \in C} \|v'_i - u_i\|^2$$

原有网格的
Laplacian
坐标

变形后网格
的Laplacian
坐标

用户限制

3.2

3.3 满足平移不变，但是不满足旋转/缩放不变

4 旋转不变坐标

原理:同时求解局部变换和模型上的顶点坐标

$$V' = \underset{V'}{\operatorname{argmin}} \left(\sum_{i=1}^n \|L(V'_i) - T_i(\delta_i)\|^2 + \sum_{j \in C} \|V'_j - u_j\|^2 \right)$$

相似变换

4.1 三维下小尺度旋转的相似变换看作是线性的，大尺度非线性

5 得到旋转的另一种方案：通过控制顶点来传播

5.1 局限性：平移不敏感

6 空间变形：变形函数定义在空间上，通过对空间 S 中的点应用函数 f 来进行变形

6.1 仿射 MLS 变形【Schaeffer et al.'06】（通过距离添加范数）

6.2 相似 MLS 变形（对 M 约束）

6.3 刚体 MLS 变形（对 M 进一步约束）

6.4 局限性：整个空间都会变形而不只是限制在模型上

6.5 Pants 问题：欧式距离小，测地距离大，不需要考虑模型外的扭曲

6.5.1 使用包围盒，变形定义在包围盒上

6.5.2 重心坐标：（干嘛用的）求和为 1，单位可重建性，仿射变换不变性

6.5.2.1 局限性：重心坐标在凹多边形内是负的

6.5.3 Harmonic 坐标[Josh et al '07]

7 直接 ARAP 建模：保持覆盖在表面的网格单元(cell)形状

7.1 网格单元形变能

7.2 总形变能

7.3 重复迭代，最小化能量：添加余切权重

8 蒙皮变换

8.1 骨骼蒙皮动画算法(LBS)

9 3D 数据（网格）的 RIMD 表示：平移不变性，旋转不变性，大规模

9.1 相邻节点之间的相关旋转总是最小的

10 3D 数据（网格）的 ACAP 表示：As-consistent-as-possible 形变表示

10.1 可以准确表示大规模旋转

第 9 节光线追踪

1 光线投射算法

1.1 从视点出发通过该像素中心射向物体，找最近点并赋值

1.2 不考虑第二层以及更深层次的光线，因此不具有阴影、反射、折射等效果

2 光线跟踪算法（阴影线的作用）

2.1 光线求交、阴影、透明和镜面反射、纹理

2.2 添加反射和折射效果

2.2.1 首先，计算光线与场景中物体的最近的交点。

2.2.2 计算光线在交点处被物体反射和折射所产生的新的光线的方向

2.2.3 对新产生的光线（反射光线和折射光线）分别继续进行跟踪

2.3 反射光方向： $R = I - 2(I \cdot N)N$

利用 $\cos \theta_T$ ，可以将折射光的方向写成：

$$T = -\frac{\eta_i}{\eta_T} * I + \left(\frac{\eta_i}{\eta_T} (I \cdot N) - \cos \theta_T \right) * N$$

2.4 折射光方向：

2.5 光线跟踪递归过程中止条件

2.5.1 光线与环境中任何物体均不相交，或交于纯漫射面

2.5.2 被跟踪光线返回的光亮度值对像素颜色的贡献很小

2.5.3 已递归到给定深度

3 光线求交

3.1 光线的参数表示：向量，保证参数 t 是正数

3.2 光线与平面求交

3.2.1 当 \mathbf{n} 是单位法向量时， \mathbf{P} 到平面 \mathbf{H} 的距离就是 $\mathbf{H}(\mathbf{P})$ （可正可负）

3.2.2 联立方程，解出 t ，最后验算 t 大于 0

3.3 光线与三角形求交（怎么结出来的）

3.3.1 重心坐标

3.4 光线与球面求交

3.4.1 直接计算：二次函数

3.4.2 几何法

3.5 光线与多边形求交

3.5.1 交点检测算法

4 阴影计算

包含阴影计算的Phong模型：

$$I(P) = K_a I_a + \sum_{i=1}^m (f_i(P) I_i (k_{di}(N, L) + k_s(N, H)^n))$$

$$f_i(P) = \begin{cases} 0 & \text{若 } P \text{ 未受光源 } i \text{ 直接照射} \\ 1 & \text{若 } P \text{ 受光源 } i \text{ 直接照射} \end{cases}$$

4.1

5 走样

5.1 超采样（超级采样抗锯齿）

5.2 自适应超采样

6 添加纹理

第 10 节 阴影

1 阴影

1.1 本影 (umbra) 和半影 (penumbra) 统称为阴影 (Shadow)

2 硬阴影和软阴影

3 平面阴影

3.1 阴影投影：使用投影矩阵

- 3.2 当光源位于最上方物体之下时，算法会生成错误的阴影
- 3.3 当物体位于接收平面背对光源的一方（即下方）时，也会导致产生错误的阴影
- 4 表面上的阴影
 - 4.1 阴影纹理技术
- 5 阴影域 (shadow volume) 算法（体阴影）
 - 5.1 采用模板缓存（与 z-buffer 相似）
- 6 阴影图 (Shadow Map) 算法

第 11 节 纹理映射

- 1 提高了建模效率，提高了渲染效率
- 2 纹理采集
 - 2.1 手工绘制
 - 2.2 拍照
 - 2.3 过程纹理（柏林噪声）
 - 2.4 纹理合成
 - 2.4.1 基于像素(Pixel-based)的纹理合成
 - 2.4.2 基于块 (Patch-based)的纹理合成
- 3 纹理映射
 - 3.1 映射函数（只考虑如何确定当前像素的颜色）
 - 3.1.1 用当前像素块的原像的中心对应的纹理元素的颜色
 - 3.1.2 把纹理映射到一个简单的中间曲面上
 - 3.2 网格参数化、共形参数化
- 4 纹理滤波
 - 4.1 防止走样：提高采样率；预先对信号进行滤波，得到一个更低频率的信号
 - 4.2 各向同性的 (Isotropic)滤波
 - 4.3 各向异性 (Anisotropic)滤波

第 13 节 BRDF

- 1 双向反射分布函数
 - 1.1 描述的是物体表面将光能从任何一个入射方向反射到任何一个 视点方向的反射特性
 - 1.2 是关于入射光方向和反射光方向的四维实值函数，它等于反射 方向的微分辐射率和沿入射方向的入射光的微分辐照度之比
- 2 经验模型
 - 2.1 Lambert 模型
 - 2.2 Phong 模型（Lambert+镜面反射项）（不满足可逆性）
- 3 物理模型
 - 3.1 Cook-Torrance 模型
- 4 BRDF 度量、评价

第 14 节 计算机动画

图像变形：Beier & Neely 算法

第 16 节元宇宙

- 1 定义：一个平行于现实世界的虚拟世界
- 2 特点：
 - 2.1 人与现实世界的数字化
 - 2.2 沉浸式交互体验
 - 2.3 海量用户创作数字内容
 - 2.4 具有价值的数字资产
 - 2.5 庞大的算力需求