Grafos

Pedro O. Pérez M., PhD.

Análisis y diseño de algoritmos
Tecnológico de Monterrey

pperezm@tec.mx

11-2020

Contenido

Definición

Un grafo no direccionado $G = (V, E)$ consiste de una colección de vértices, V y una colección de arcos, E. Representamos cada arco, $e \in E$, como un subcojunto de dos elementos $e = \{u, v\}$ siendo $u, v \in V$, llamando a u y v los puntos terminales de e.

Un grafo direccionado $G = (V, E)$ consiste de una colección de vértices, V y una colección de arcos, E. Representamos cada arco, $e \in E$, como un par ordenado de dos elementos $e = (u, v)$ siendo $u, v \in V$. Llamamos a u el punto inicial y a v el punto final de e.

- Un grafo no direccionado está conectado si, para cada par de nodos u y v, existe un camino de u a v.
- Un grafo direccionado está fuertemente conectado si, para cada par de vértices u y v, existe un camino de u a v y de v a u.
- En un grafo no direccionado $G = (V, E)$ una secuencia de nodos P = [v_1, v_2, ..., v_{k-1}, v_k] con la propiedad de que cada par consecutivo v_i, v_{i+1} está conectado por un arco en G, es llamado un camino (path) de v_1 a v_k.
- Un ciclo es un camino P = [v_1, v_2, ..., v_{k-1}, v_k] en el cual, para cualquier $k > 2$, los primeros $k\breve{}1$ vértices son distintos y $v_1 = v_k$.

Procedure 1 DFS

Input: u : *Vertex*, G : *Graph*, *Reached* : *Set*

```
Mark u as Explored and add to Reached
for each (u, v) in G incident to u do
    if v is not marked Explored then
        DFS(v, G, Reached)
    end if
end for
```

Procedure 2 BFS

Input: u : $Vertex$, G : $Graph$, $Reached$: Set

```
Queue Q
Q.enqueue(u)
while Q is not empty do
    e ← Q.dequeue()
    if e is not marked as Explored then
        Mark e as Explored and add to Reached
        for each (e, v) incident to e do
            Q.enqueue(v)
        end for
    end if
end while
```

Subgrafos máximos

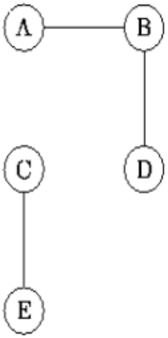
Considere un grafo G formado a partir de un gran número de vértices conectados por arcos. G se dice que está conectado si existe un camino entre cualquier par de vértices en G. Por ejemplo, el siguiente grafo no está conectado, porque no hay trayectoria de A a C.

Este grafo contiene, sin embargo, un número de subgrafos que están conectados, uno para cada uno de los siguientes conjuntos de vértices: (A), (B), (C), (D), (E), (A, B), (B,D), (C, E), (A, B, D).

Un subgrafo conectado es máximo si no hay vértices y arcos en el grafo original que podrían añadirse al subgrafo y todavía dejarlo conectado. En la imagen anterior, hay dos subgrafos máximos, uno asociada con los vértices (A, B, D) y el otro con los vértices (C, E).

Desarrollar un algoritmo para determinar el número de subgrafos máximos conectados de un gráfico dado.

`http://bit.do/eNTvC`



Procedure 3 COUNTING_GRAPHS

Input: G : *Graph*
$Reached$: *Set*
$acum \leftarrow 0$
Mark all the vertexes in G as *No_Explored*
for *vertex* in G **do**
  if *vertex* is not marked *Explored* **then**
    $DFS(vertex, G, Reached)$
    $acum \leftarrow acum + 1$
  end if
end for
return *acum*

Topological Sort

Un "Topological Sort"de un Grafo Direccionado Acíclico (Directed Acyclic Graph, DAG) es un ordenamiento lineal de los vértices que aparecen en un DAG tal que si el vértice u aparece antes de v es porque existe un arco $(u \rightarrow v)$ en el DAG. Cada DAG tiene al menos, y posiblemente más, "topological sort".

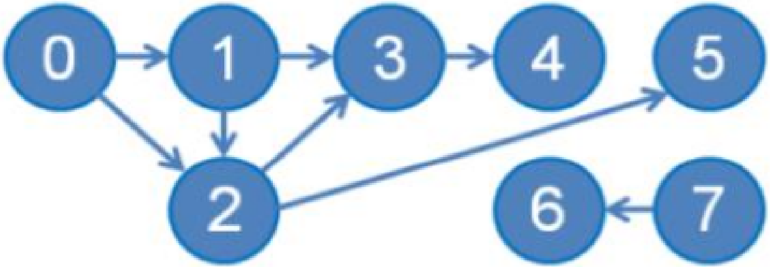
Procedure 4 DFS2

Input: $u : Vertex, G : Graph, Reached : Set, TS : Stack$

Mark u as *Explored* and add to *Reached*
for each (u, v) incident to u **do**
  if v is not marked *Explored* **then**
    $DFS2(v, G, Reached, TS)$
  end if
end for
$TS.push(u)$

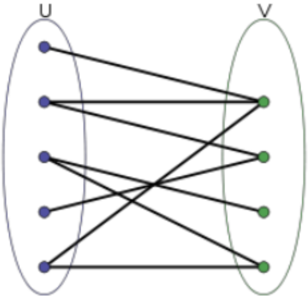
Procedure 5 TOPOLOGIGAL_SORT

Input: G : $Graph$
  $Reached$: Set
  TS : $Stack$
  for each $vertex$ in G **do**
    if $vertex$ is not marked $Explored$ **then**
      $DFS2(G, v, Reached, TS)$
    end if
  end for
  while TS is not empty **do**
    print $TS.top()$
    $TS.pop()$
  end while


0
1
3
4
5
2
6
7

Grafo bipartita

Un grafo bipartita (o bigrafo) $G = (V, E)$ es un grafo cuyos vértices pueden ser divididos en dos conjuntos disjuntos R y S tal que cada arco conecta a un vértice en R con un vértice en S.



Procedure 6 BIGRAPH

Input: $G : Graph$

$Q : Queue$

$Color : Array$

$isBipartite : boolean$

$INIT(Color, -1)$

$isBipartite \leftarrow true$

$vertex \leftarrow$ some vertex in G

$Color[vertex] \leftarrow 1$

$Q.enqueue(vertex)$

while Q is not empty **do**

  NEXT SLIDE

end while

return $isBipartite$

$u \leftarrow Q.dequeue()$
for each (u, v) incident in u **do**
  if $Color[v] = -1$ **then**
    $Color[v] \leftarrow 1 - Color[u]$
    $Q.enqueue(v)$
  else
    if $Color[v] = Color[u]$ **then**
      $isBipartite \leftarrow false$
    end if
  end if
end for

¿Es un árbol?

Decimos que una grafo forma un árbol si se cumplen las siguientes condiciones:

- El árbol contiene un solo nodo llamado raíz del árbol. Por lo tanto, decimos que el nodo p es el padre del nodo u si llegamos a u desde p después de comenzar a recorrer el árbol desde la raíz seleccionada. De manera similar, decimos que u es un hijo de p. Vale la pena señalar que podemos elegir varios nodos como raíz del árbol.
- Cada nodo, excepto la raíz, debe tener un solo padre. En otras palabras, se debe llegar a cada nodo solo desde su padre al recorrer el árbol comenzando desde la raíz.
- Partiendo de la raíz, debemos poder visitar todos los nodos del árbol. Por lo tanto, el árbol siempre debe estar conectado.

En el caso de grafos dirigidos, debemos realizar una serie de pasos:

- Encontrar la raíz del árbol, que es el vértice sin arcos entrantes. Si no existe ningún nodo, devolveremos falso. Si existe más de un nodo, entonces el grafo no está conectado y también deberemos devolver falso.
- Realizar un DFS para comprobar que cada nodo tiene exactamente un padre. Si no, devuelve falso.
- Asegurar de que se visiten todos los nodos. Si la verificación DFS no visitó todos los nodos, devuelva falso.

En cualquier otro caso, el grafo es un árbol.

Procedure 7 ISCYCLIC

Input: $u : Vertex, G : Graph, Reached : Set, parent : Vertex$

```
Mark u as Explored and add to Reached
for each (u, v) incident to u do
    if v is not marked Explored then
        if ISCYCLIC(v, G, Reached, parent) then
            return TRUE
        end if
    else
        if (v <> parent) then
            return TRUE
        end if
    end if
end for
return FALSE
```

Procedure 8 IS_TREE

Input: G : $Graph$

$Reached$: Set

$vertex \leftarrow$ some vertex in G

if $ISCYCLIC(vertex, G, Reached, NULL)$ **then**

  return $FALSE$

end if

for each $vertex$ in G **do**

  if $vertex$ is not in $Reached$ **then**

    return $FALSE$

  end if

end for

return $TRUE$

Punto Articulado

Un punto articulado (o puente) se define como un vértice in un grafo $G = (V, E)$ cuya remoción (todos los arcos que inciden sobre él también son removidos desconecta el grafo G.Un grafo que no tiene ningún punto de articulación se le conoce como biconectado.

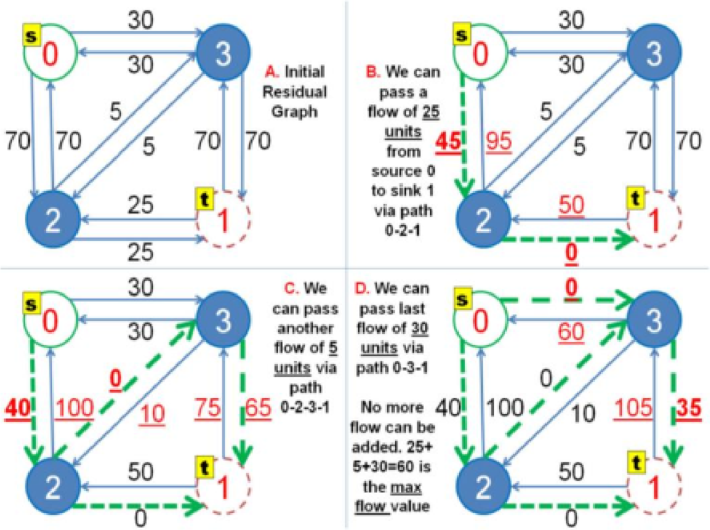
Procedure 9 FIND_POINT

Input: G : $Graph$

```
originalCC ← COUNTING_GRAPHS(G)
for each v in G do
    Remove v and its incident edges
    newCC ← COUNTING_GRAPHS(G)
    if newCC > originalCC then
        return true
    end if
    Restore v and its incident edges
end for
return false
```

Flujo máximo

Una red de flujo es un grafo dirigido, donde cada arco tiene capacidad y cada arco recibe un flujo. La cantidad de flujo de un arco no puede exceder la capacidad del mismo. Un flujo debe satisfacer la restricción de que la cantidad de flujo en un nodo es igual a la cantidad de flujo que sale de ella, a menos que sea una *fuente*, que sólo tiene flujo saliente, o un *sumidero*, que solo tiene flujo saliente.


A. Initial Residual Graph
B. We can pass a flow of 25 units from source 0 to sink 1 via path 0-2-1
C. We can pass another flow of 5 units via path 0-2-3-1
D. We can pass last flow of 30 units via path 0-3-1
No more flow can be added. 25+5+30=60 is the max flow value

Procedure 10 MAX_FLOW

Input: G : *Graph*

Setup directed residual graph with edge capacity equal to original graph
$max\_flow \leftarrow 0$
while there exists an augmenting path p from s to t **do**
  Find f, the minimum edge weight along the path
  Decrease capacity of the ougoing edges
  Increase capacity of the incomming egdes
  $max\_flow \leftarrow max\_flow + f$
end while
return max_flow

All-Pairs Shortest Path

El algoritmo Floyd – Warshall permite encontrar las rutas más cortas en un grfo ponderado con costos positivos o negativos (pero sin ciclos negativos). Una sola ejecución del algoritmo encontrará los costos de las rutas más cortas entre **todos los pares de vértices**. Aunque no devuelve detalles de las rutas en sí, es posible reconstruir las rutas con simples modificaciones al algoritmo. Las versiones del algoritmo también se pueden usar para encontrar el cierre transitivo de una relación R.

Procedure 11 VERSION1

Input: $M : Adjacent\_Matrix$

```
for k ← 1 to M.length do
    for i ← 1 to M.length do
        for j ← 1 to M.length do
            M[i][j] ← M[i][k] and M[k][j]
        end for
    end for
end for
```

Procedure 12 VERSION2

Input: M : $Adjacent\_Matrix$

for $k \leftarrow 1$ to $M.length$ **do**
  for $i \leftarrow 1$ to $M.length$ **do**
    for $j \leftarrow 1$ to $M.length$ **do**
      $M[i][j] \leftarrow MIN(M[i][j], M[i][k] + M[k][j])$
    end for
  end for
end for